

Funções Lineares, Quadráticas

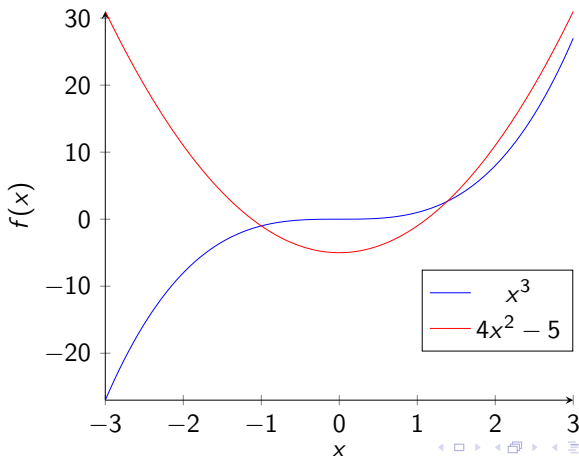
Matemática

ONGEP

2018

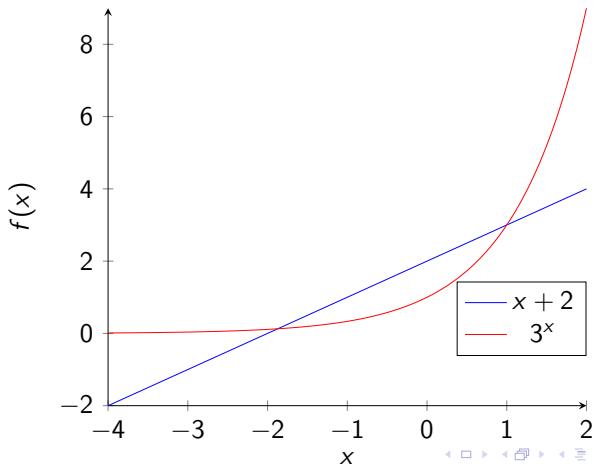
Funções Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras

- ▶ Uma função injetora (ou injetiva) é uma onde cada elemento diferente do domínio mapeia para um elemento diferente da imagem: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
- ▶ OBS. toda função injetora é **invertível à esquerda** ($f^{-1}(f(x)) = x$) – e vice-versa. Por quê?



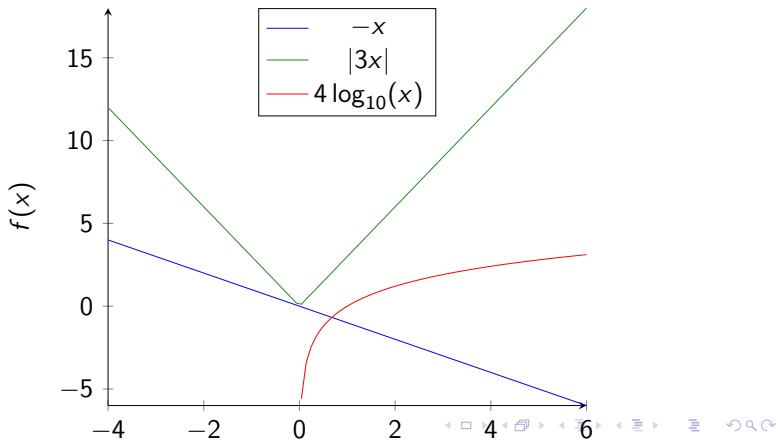
Funções Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras

- ▶ Uma função sobrejetora (ou sobrejetiva) é uma onde todo elemento no codomínio é “atingido” (a imagem da função é igual ao codomínio): $f(X) = Y$
- ▶ OBS. toda função função sobrejetora é **invertível à direita** ($f(f^{-1}(x)) = x$) – e vice-versa. Por quê?



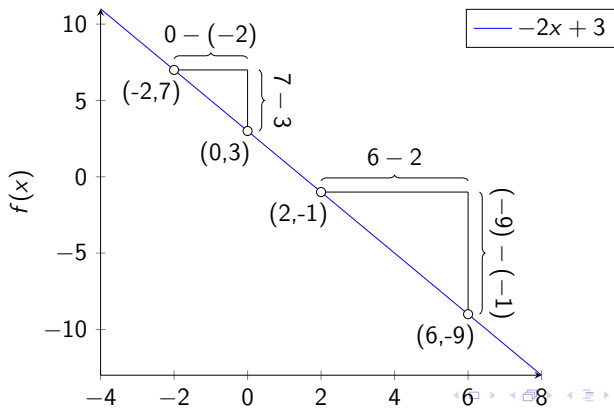
Funções Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras

- ▶ Uma função bijetora (ou bijetiva) é uma onde cada elemento do domínio é mapeado para um elemento do codomínio e **vice-versa**.
- ▶ OBS. toda função função bijetora é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora. Por quê? Ela é invertível à esquerda ou à direita?



Funções lineares ou do primeiro grau

- ▶ Funções lineares sob várias perspectivas:
 - ▶ O gráfico de uma função linear no plano cartesiano é uma linha reta
 - ▶ A lei de uma função linear genérica é $f(x) = ax + b$ (com a, b constantes e $a \neq 0$)
 - ▶ Numa função linear, a proporção entre a variação em y e a variação em x é sempre constante $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a\right)$

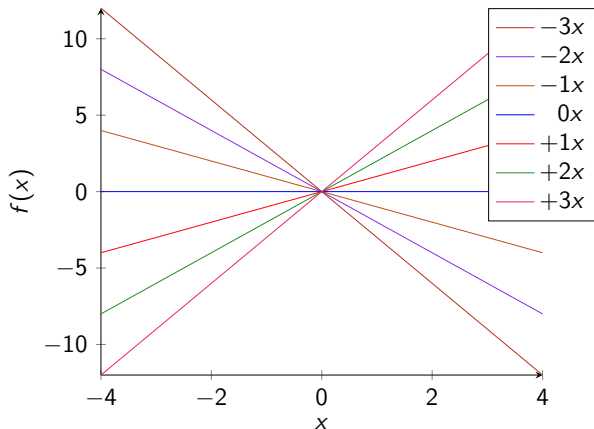


Raízes ou soluções de uma função qualquer

- ▶ Frequentemente temos uma função $f(x)$ e desejamos saber para quais valores de x vale $f(x) = 0$
- ▶ Esses valores de x têm um nome especial: “raízes” ou “soluções” de $f(x)$
- ▶ E se desejarmos saber para quais valores de x vale $f(x) = y$ (para algum y arbitrário?)

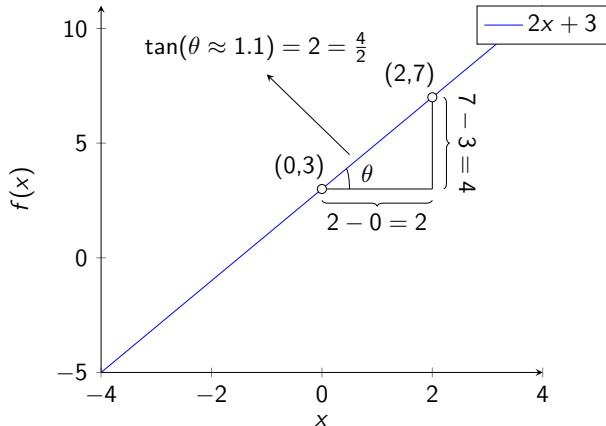
Anatomia de uma função linear

- A constante “a” em $f(x) = ax + b$ é chamada “coeficiente angular”, pois ela determina o ângulo que a reta faz com o eixo x .



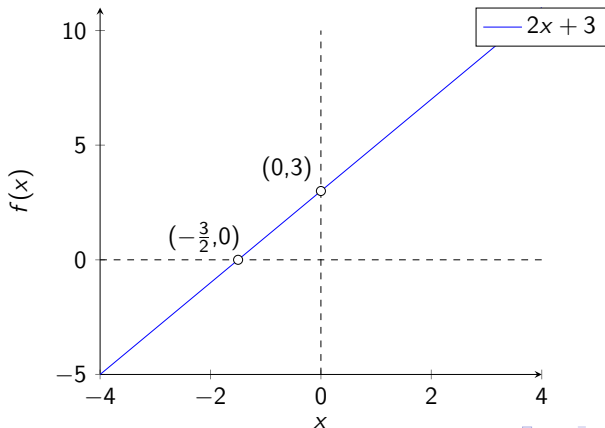
Anatomia de uma função linear

- ▶ A constante “a” em $f(x) = ax + b$ é chamada “coeficiente angular”, pois ela determina o ângulo que a reta faz com o eixo x .
- ▶ O coeficiente angular pode ser calculado em qualquer posição da reta se dividirmos a variação em y (Δy) pela variação em x (Δx):
$$a = (\Delta y = y_1 - y_0) / (\Delta x = x_1 - x_0)$$



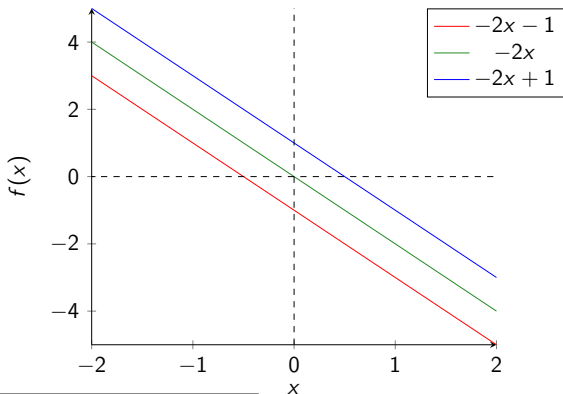
Anatomia de uma função linear

- ▶ A constante “b” em $f(x) = ax + b$ é chamada “coeficiente linear” ou “termo independente”, e determina onde a reta cruza o eixo y, porque $f(0) = a \times 0 + b = b$
- ▶ O coeficiente linear também determina onde a reta cruza o eixo x (ou seja, a raiz ou solução da função linear), pois $f(-b/a) = a \times (-b/a) + b = -b + b = 0$



Transformações em funções lineares

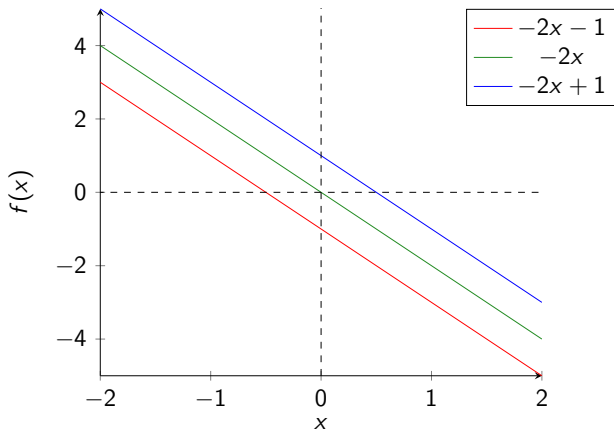
- ▶ Observe que podemos mover uma função linear para cima ou para baixo se aumentarmos ou diminuirmos o valor do coeficiente linear (“b”), respectivamente
- ▶ Demonstração interativa em <https://www.openprocessing.org/sketch/568383> ¹



¹Arrasta o mouse p/ mover a linha; Arrasta o mouse apertando uma tecla p/ mudar inclinação

Transformações em funções lineares

- Observe também que quando a reta sobe 1 unidade, é como se ela se deslocasse algumas unidades para a direita. Quantas?

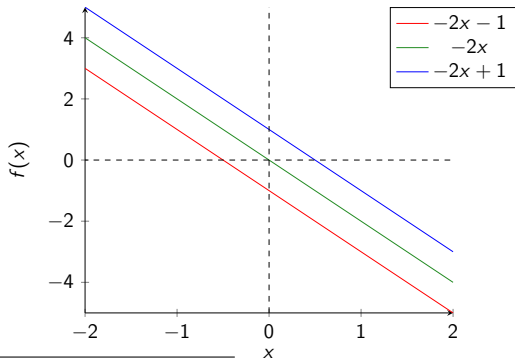


Raízes de uma função linear

- ▶ Uma função linear tem apenas **uma** raiz. Por quê?
 - ▶ Graficamente: porque uma reta só cruza o eixo x uma única vez
 - ▶ Algebricamente: porque
$$0 = f(x) = ax + b \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -b/a, \text{ e } -b/a \text{ é um único valor (lembrando que no caso das equações do segundo grau temos } \pm\sqrt{\dots})$$
- ▶ Podemos escrever qualquer equação linear no seguinte formato: $a(x - r)$, onde a é o coeficiente angular e r é a raiz da equação
- ▶ Expandindo, temos $a(x - r) = ax - ar$, onde “ ar ” equivale ao “ b ” (coeficiente linear) no esquema $f(x) = ax + b$

Transformações em funções lineares

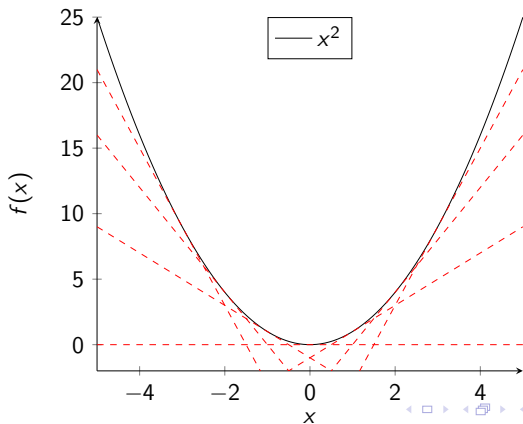
- ▶ Podemos mover uma reta 1 unidade para a direita ou para a esquerda subtraindo ou somando a no coeficiente linear, respectivamente
- ▶ Isso funciona pois $a(x - r) - a = a(x - r - 1) = a(x - (r + 1))$
- ▶ Demonstração interativa em <https://www.openprocessing.org/sketch/568383>²



²Arrasta o mouse p/ mover a linha; Arrasta o mouse apertando uma tecla p/ mudar inclinação

Funções quadráticas ou do segundo grau

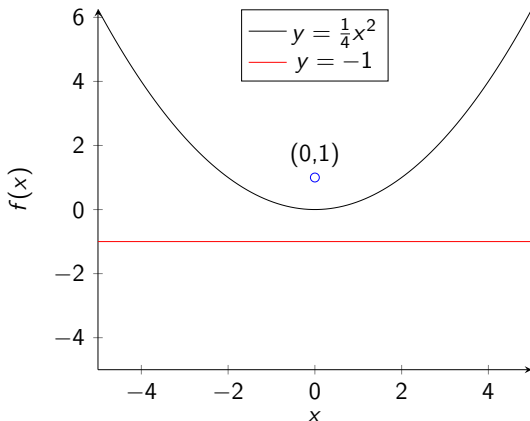
- ▶ Funções quadráticas sob várias perspectivas:
 - ▶ O gráfico de uma função quadrática no plano cartesiano é uma *parábola* (mas o que é uma parábola? :D)
 - ▶ A lei de uma função quadrática genérica é $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ (do contrário vira uma equação linear)
 - ▶ A inclinação da curva quadrática (parábola) não é constante como a da reta, mas **varia linearmente**



O que é uma parábola?

- ▶ Uma parábola é um conjunto de pontos que estão à mesma distância de um **ponto focal** e de uma **reta** (chamada **diretriz**)
- ▶ Demonstração interativa:

www.openprocessing.org/sketch/567057 ³



³arrasta o mouse p/ mudar o ângulo da diretriz; arrasta o mouse apertando uma tecla do teclado p/ movimentar o ponto focal

Por que o gráfico de uma função quadrática é parabólico?

- ▶ Considere a parábola do exemplo anterior, com foco $F = (0, 1)$ e diretriz $y = -1$
- ▶ A distância de um ponto (x, y) até o foco é
$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$
- ▶ A distância de um ponto (x, y) até a diretriz é a “altura” do ponto relativo a ela: $y - (-1) = y + 1$
- ▶ A parábola é o conjunto dos pontos para os quais as distâncias são iguais: $\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = y + 1$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} &= y + 1 \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 &= y^2 + 2y + 1 \\ x^2 - 2y &= 2y \\ x^2 &= 4y \\ \frac{1}{4}x^2 &= y\end{aligned}\tag{1}$$

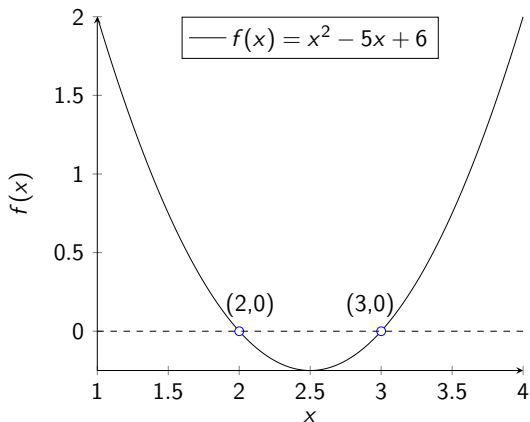
Raízes ou soluções de uma função quadrática

- ▶ Toda função quadrática pode ser escrita no formato $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, onde r_1 e r_2 são as raízes (ou soluções) de $f(x)$. Por que isso funciona?

Anatomia da fórmula quadrática (ou de Bháskara)

- Como encontrar essas raízes?

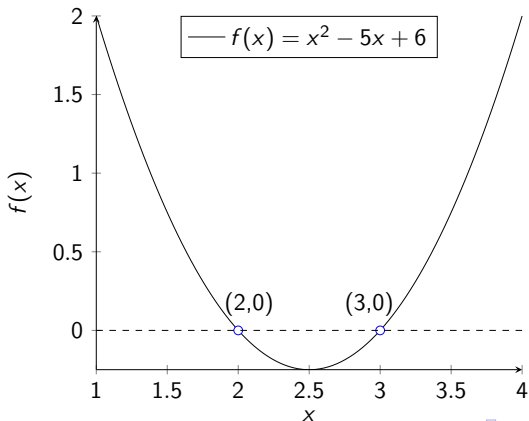
$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$



Anatomia da fórmula quadrática (ou de Bháskara)

- Pergunta: se multiplicarmos uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ por alguma constante, as raízes mudam?

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3)$$



Anatomia da fórmula quadrática (ou de Bháskara)

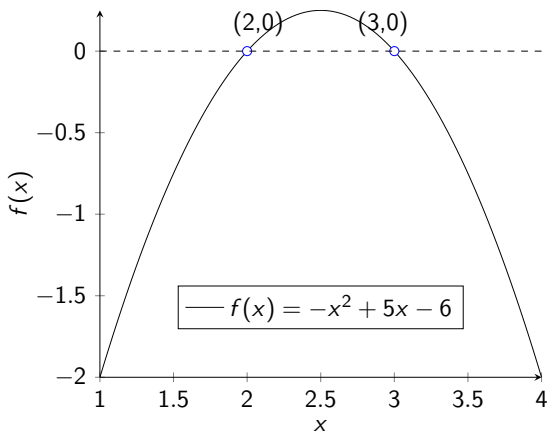
- E se multiplicarmos por um número negativo?

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4)$$

Anatomia da fórmula quadrática (ou de Bháskara)

- E se multiplicarmos por um número negativo?

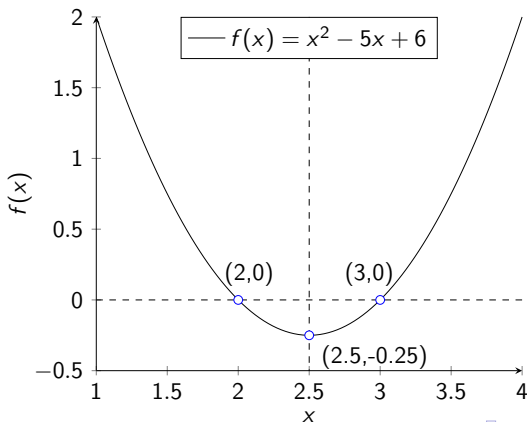
$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5)$$



Anatomia da fórmula quadrática (ou de Bháskara)

- Pergunta: como descobrimos o mínimo (o ponto mais baixo) ou o máximo (o ponto mais alto) da função?

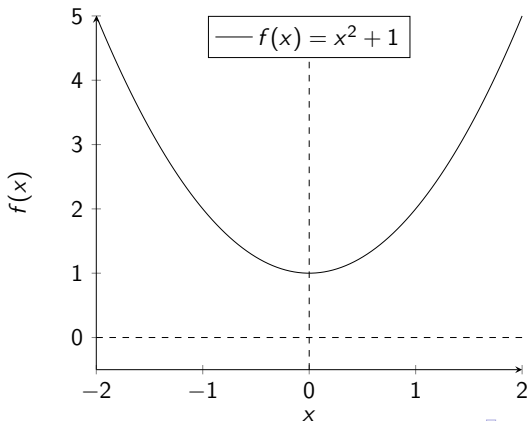
$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (6)$$



Anatomia da fórmula quadrática (ou de Bháskara)

- Pergunta: e quando o gráfico não encosta no eixo x? Quais são as raízes?


$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (7)$$



Anatomia da fórmula quadrática (ou de Bháskara)

- Pergunta: e quando o gráfico não encosta no eixo x ? Quais são as raízes? i e $-i$, pois
$$(x - i)(x + i) = x^2 + ix - ix - i^2 = x^2 + 1$$

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (8)$$

 $f(x) = x^2 + 1$

