Conjuntos Numéricos: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Matemática

ONGEP

2018

Notas Históricas

Números Naturais: $\mathbb{N}$

Figura: Osso de Ishango (18.000 AC – 20.000 AC)

- Com o advento da linguagem, surgiu a necessidade de comunicar quantidades numéricas a um interlocutor
- A maneira mais primitiva de representação de um número natural consiste em denotá-lo por um conjunto de marcações (p.ex. $5 = \circ \circ \circ \circ \circ$)
- Ainda que limitada, a representação por marcações permite testar relações de equalidade, excesso ("maior que", $>$) e deficiência ("menor que", $<$) entre dois números
- Exemplo: $\circ \circ \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet$, logo $5 > 3$

Notas Históricas

Números Naturais: $\mathbb{N}$

0123456789
٠١٢٣٤٥٦٧٨٩
I II III IV V VI VII VIII IX X
০১২৩৪৫৬৭৮৯
௦௧௨௩௪௫௬௭௮௯
០១២៣៤៥៦៧៨៩
〇一二三四五六七八九

Figura: Sistemas de numerais arábicos ocidentais, arábicos orientais, Romanos, Benengaleses, Tamil, Khmer e Chineses, em ordem

- O primeiro avanço em termos de abstração foi a representação numérica usando *numerais* (Figura ao lado)
- A representação compacta (60 vs ◦◦) nos convida a desenvolver notações para denotar operações aritiméticas importantes $(+, -, \times, \div)$
- Desse modo, a abstração nos convida a fazer perguntas inicialmente proibidas: $5 - 8 = ?$
- A tentativa de responder essas perguntas promove a generalização dos conceitos. Esse é o motor do desenvolvimento da matemática.

Números Naturais: $\mathbb{N}$

- A expressão $5-8$ é *proibida* nos números naturais, ou, no linguajar matemático:
  "*A expressão não admite soluções em* $\mathbb{N}$"
- Na notação de teoria dos conjuntos: $5-8 \notin \mathbb{N}$
- O símbolo $\in$ denota pertinência a um conjunto. $x \in \mathbf{A}$ se lê, em português:
  "o elemento x faz parte do conjunto A"
- A versão "riscada" de $\in$, $\notin$, denota o oposto: "não pertence".

Números Naturais: $\mathbb{N}$

- Quais elementos fazem parte de $\mathbb{N}$?
  R: $0, 1, 2, 3, \ldots$
- OK, mas *concretamente*, o que tá escondido em $\ldots$? Como a gente sabe o que vem depois do 3? Podíamos ter parado no 2? No 1? Quantas enumerações são suficientes?
- Em resumo, como definir o conjunto $\mathbb{N}$?
- Bom, $0 \in \mathbb{N}$.
- O que mais? Nós queremos expressar a ideia de que $\mathbb{N}$ é infinito.
- Como, intuitivamente, nós sabemos que $\mathbb{N}$ é infinito?

Números Naturais: $\mathbb{N}$

- $\mathbb{N}$ é inifnito porque não existe o "maior número" de $\mathbb{N}$
- Por quê?
- Me dá um candidato n a maior número que eu te dou um número maior
- Qual?

Números Naturais: $\mathbb{N}$

- $\mathbb{N}$ é inifnito porque não existe o “maior número” de $\mathbb{N}$
- Por quê?
- Me dá um candidato n a maior número que eu te dou um número maior
- Qual?
- O “sucessor” de n: $n + 1$

Números Naturais: $\mathbb{N}$

- OK, isso é suficiente para definir $\mathbb{N}$? Sim!
- Definição:
- $$\begin{aligned} 0 &\in \mathbb{N} \\ \text{Para todo } n \in \mathbb{N}\text{:}\quad n+1 &\in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{1}$$
- $$\begin{aligned} 0 &\in \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N} : \quad n+1 &\in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{2}$$
- O símbolo $\forall$ denota "para todo". A expressão $\forall x \in \mathbf{A}$ se lê, em português:
  "para todo elemento x que pertence ao conjunto **A**"

Números Inteiros: $\mathbb{Z}$

- Voltando à pergunta: $5 - 8 =?$
- Se $5 - 8 \notin \mathbb{N}$, a que conjunto $5 - 8$ pertence? Qual o conjunto **A** pro qual podemos escrever $5 - 8 \in \mathbf{A}$?
- Recorremos à generalização: vamos generalizar a subtração para que $5 - 8$ seja uma expressão bem definida!
- OK, como?

Números Inteiros: $\mathbb{Z}$

- A justificativa histórica para os números negativos é o conceito de débito. Um comprador que deve 8 reais a um comerciante, mas só tem 5 no bolso, fica *devendo* $8 - 5 = 3$ reais.
- Esse ponto é chave: o débito é calculado trocando os números de lugar! A transação $5 - 8$ produz 3 de débito.
- A notação que usamos pra débito na matemática é o conceito de *negativo*: $5 - 8 = -3$, ou, em português: "cinco menos oito é igual a três negativo"
- Eis o conceito de simetria: a subtração não é comutativa ($5 - 8 \neq 8 - 5$), mas é quase: só muda o sinal!
- Exemplo: $5 - 8 = -3$ e $8 - 5 = 3$

Números Inteiros: $\mathbb{Z}$

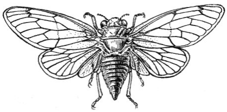

Figura: Anatomia de uma Cigarra, um animal com simetria bilateral (clado *bilateria* na biologia)

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

Figura: Linha numérica de $\mathbb{Z}$

- Uma maneira de definir o sinal "$-$" que colocamos na frente dos números negativos é a seguinte: $\forall n : (-n) + n = 0$
- Em resumo: $-n$ denota n passos à esquerda e n denota n passos à direita na linha numérica
- A esquerda e à direita da onde?

Números Inteiros: $\mathbb{Z}$

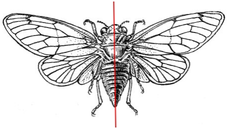

Figura: Anatomia de uma Cigarra, um animal com simetria bilateral (clado *bilateria* na biologia)

$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

Figura: Linha numérica de $\mathbb{Z}$

- Uma maneira de definir o sinal "$-$" que colocamos na frente dos números negativos é a seguinte: $\forall n : (-n) + n = 0$
- Em resumo: $-n$ denota n passos à esquerda e n denota n passos à direita na linha numérica
- A esquerda e à direita da onde?
- De 0!
- 0 é o eixo de simetria da relação de negação, assim como o ponto médio (horizontal) da Figura ao lado é o eixo de simetria (bilateral) da cigarra

Números Inteiros: $\mathbb{Z}$

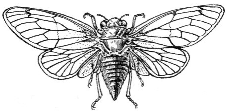

Figura: Anatomia de uma Cigarra, um animal com simetria bilateral (clado *bilateria* na biologia)

$-3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

Figura: Linha numérica de $\mathbb{Z}$

- Poderíamos definir outro eixo de simetria?
  Sim, múltiplos:
  $\forall n : (-n) + n = 1$
  $\forall n : (-n) + n = -387$
  $\forall n : (-n) + n = 42$
  $\ldots$
- Quantos? Um para cada número $\in \mathbb{Z}$

Números Inteiros: $\mathbb{Z}$

- Nós definimos o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, usando a operação de soma
- Qual operação precisamos adicionar ao nosso repertório para definir o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$?

Números Inteiros: $\mathbb{Z}$

- Nós definimos o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, usando a operação de soma
- Qual operação precisamos adicionar ao nosso repertório para definir o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$?
- Subtração!
-

$$
\begin{aligned}
0 &\in \mathbb{Z} \\
\forall n \in \mathbb{Z}: \quad n+1 &\in \mathbb{Z} \\
\forall n \in \mathbb{Z}: \quad n-1 &\in \mathbb{Z}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

O que temos até agora: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$

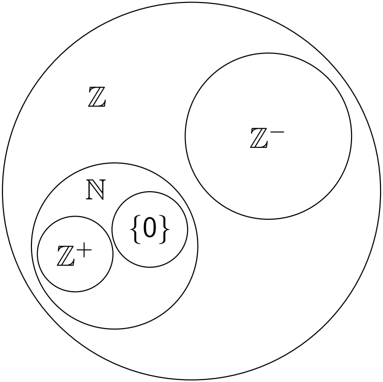

Figura: Diagrama de Venn dos conjuntos $\{0\}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

- O *Diagrama de Venn* (exemplo à esquerda) é uma maneira de visualizar quais conjuntos estão condidos em quais outros conjuntos
- OBS 1. O tamanho dos círculos não significa nada; $\mathbb{Z}^+$ não é "menor" que $\mathbb{Z}^-$
- OBS 2. Num certo sentido, nenhum desses conjuntos (à exceção do $\{0\}$, que é finito) é realmente "maior" ou "menor" que o outro: todos têm a mesma *cardinalidade* (mais sobre isso mais adiante)

O que temos até agora: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$

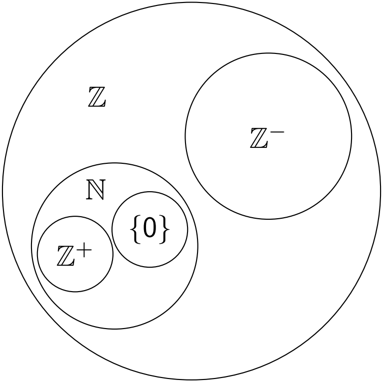

Figura: Diagrama de Venn dos conjuntos $\{0\}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

- O símbolo $\subset$ denota a relação de "está contido em"
- Por exemplo, **A** $\subset$ **B** pode ser lido em português como "O conjunto A está contido no conjunto B"
- O símbolo $\supset$ denota a relação inversa: "contém"
- O que podemos dizer sobre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}, \{0\}$, baseado nas suas definições (ou no diagrama ao lado)?

O que temos até agora: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$

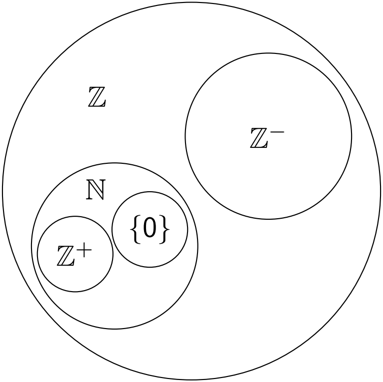

Figura: Diagrama de Venn dos conjuntos $\{0\}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

- $\{0\} \subset \mathbb{N}$
- $\{0\} \not\subset \mathbb{Z}^+$
- $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N}$
- $\mathbb{Z}^- \not\subset \mathbb{N}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}^- \subset \mathbb{Z}$

No caminho da generalização:

Quais as perguntas proibidas em $\mathbb{Z}$?

- Escolhe uma operação $(+/-/\times/\div)$
- Escolhe dois números $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$
- Consegue criar um número $c \notin \mathbb{Z}$?

$$\begin{aligned} c = a\ (+/-/\times/\div)\ b \\ a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{4}$$

No caminho da generalização:

Quais as perguntas proibidas em $\mathbb{Z}$?

- Escolhe uma operação $(+/-/\times/\div)$
- Escolhe dois números $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$
- Consegue criar um número $c \notin \mathbb{Z}$?
- $c = 1 \div 2$

$$\begin{aligned} c = a\ (+/-/\times/\div)\ b \\ a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{5}$$

Números Racionais: $\mathbb{Q}$

- Antes de qualquer coisa: agora que já descobrimos que a operação de interesse é a divisão ($\div$), será que conseguimos definir $\mathbb{Q}$ assim como fizemos com $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$?

Números Racionais: $\mathbb{Q}$

- Antes de qualquer coisa: agora que já descobrimos que a operação de interesse é a divisão ($\div$), será que conseguimos definir $\mathbb{Q}$ assim como fizemos com $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$?
- $$\substack{\forall n \in \mathbb{Z} \\ \forall m \in \mathbb{Z}} : n \div m \in \mathbb{Q} \tag{6}$$

Números Racionais: $\mathbb{Q}$

- Antes de qualquer coisa: agora que já descobrimos que a operação de interesse é a divisão ($\div$), será que conseguimos definir $\mathbb{Q}$ assim como fizemos com $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$?
-
$$\substack{\forall n \in \mathbb{Z} \\ \forall m \in \mathbb{Z}} : n \div m \in \mathbb{Q} \tag{7}$$
- Algum problema com essa definição?

Números Racionais: $\mathbb{Q}$

- Antes de qualquer coisa: agora que já descobrimos que a operação de interesse é a divisão ($\div$), será que conseguimos definir $\mathbb{Q}$ assim como fizemos com $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$?
- $$\begin{matrix} \forall n \in \mathbb{Z} \\ \forall m \in \mathbb{Z} \end{matrix} : n \div m \in \mathbb{Q} \tag{8}$$
- Algum problema com essa definição?
- E se $m = 0$?

Números Racionais: $\mathbb{Q}$

- Definição corrigida:
-
$$\forall_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} : n \div m \in \mathbb{Q} \tag{9}$$

Números Racionais: $\mathbb{Q}$

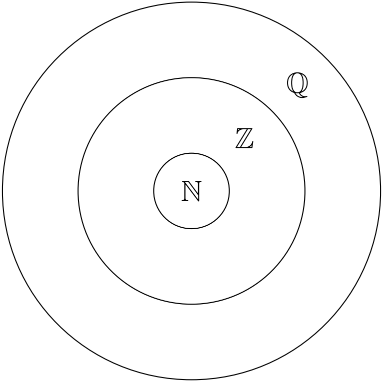

Figura: Diagrama de Venn dos conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

No caminho da generalização:
De novo: Quais as perguntas proibidas em $\mathbb{Q}$?

- Escolhe uma operação $(+/-/\times/\div/\,^{x}, \sqrt[x]{\ })$
- Escolhe dois números $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$
- Consegue criar um número $c \notin \mathbb{Q}$?
- OBS 1. $a\ (\ ^{x})\ b = a^{b}$
- OBS 2. $a\ (\sqrt[x]{\ })\ b = \sqrt[a]{b}$

$$\begin{aligned} c = a\ (+/-/\times/\div/\,^{x}, \sqrt[x]{\ })\ b \\ a \in \mathbb{Q} \\ b \in \mathbb{Q} \end{aligned} \tag{10}$$

No caminho da generalização:

De novo: Quais as perguntas proibidas em $\mathbb{Q}$?

- Escolhe uma operação $(+/-/\times/\div/\ ^{x},\ \sqrt[x]{\ })$
- Escolhe dois números $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$
- Consegue criar um número $c \notin \mathbb{Q}$?
- OBS 1. $a\ (\ ^{x})\ b = a^{b}$
- OBS 2. $a\ (\sqrt[x]{\ })\ b = \sqrt[a]{b}$
- $c = \sqrt[2]{2}$

$$\begin{aligned} c = a\ (+/-/\times/\div/\ ^{x},\ \sqrt[x]{\ })\ b \\ a \in \mathbb{Q} \\ b \in \mathbb{Q} \end{aligned} \tag{11}$$

No caminho da generalização:

De novo: Quais as perguntas proibidas em $\mathbb{Q}$?

- OK, mas o que significa dizer que $\sqrt[2]{2} \notin \mathbb{Q}$?

No caminho da generalização:

De novo: Quais as perguntas proibidas em $\mathbb{Q}$?

- OK, mas o que significa dizer que $\sqrt[2]{2} \notin \mathbb{Q}$?
- Lembrando da definição:

$$\forall_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} : n \div m \in \mathbb{Q} \tag{12}$$

No caminho da generalização:

De novo: Quais as perguntas proibidas em $\mathbb{Q}$?

- OK, mas o que significa dizer que $\sqrt[2]{2} \notin \mathbb{Q}$?
- Lembrando da definição:

$$\forall \substack{n \in \mathbb{Z} \\ m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0} : n \div m \in \mathbb{Q} \tag{13}$$

- Não existe nenhum par de números $n, m \neq 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\sqrt[2]{2} = n \div m$
- Em português: "*A raiz quadrada de* 2 *não pode ser expressa como a razão entre dois números inteiros.*"
- $\sqrt[2]{2}$ é irracional

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mas por que $\sqrt[2]{2}$ é irracional?

- Vamos supor que $\sqrt[2]{2}$ é racional
- O que isso significa?

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mas por que $\sqrt[2]{2}$ é irracional?

- Vamos supor que $\sqrt[2]{2}$ é racional
- O que isso significa?
- $\sqrt[2]{2} = N \div M$, para algum par de números $N, M \neq 0 \in \mathbb{Q}$
- Então $(\sqrt[2]{2})^2 = (N \div M)^2$
- Ou seja: $2 = N^2 \div M^2$
- Ou seja: $2 \times M^2 = (N^2 \div M^2) \times M^2$
- Ou seja: $2 \times M^2 = N^2$

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mas por que $\sqrt[2]{2}$ é irracional?

- $2 \times M^2 = N^2$
- O que a equação acima nos permite concluir sobre N^2?

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mas por que $\sqrt[2]{2}$ é irracional?

- $2 \times M^2 = N^2$
- O que a equação acima nos permite concluir sobre N^2?
- N^2 é par
- E o que isso nos permite concluir sobre N?

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mas por que $\sqrt[2]{2}$ é irracional?

- $2 \times M^2 = N^2$
- O que a equação acima nos permite concluir sobre N^2?
- N^2 é par
- E o que isso nos permite concluir sobre N?
- N também é par
- OK, então $N = (2 \times n)$

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mas por que $\sqrt[2]{2}$ é irracional?

- Voltando à equação de antes:
- $2 \times M^2 = N^2$
- Como $N = (2 \times n)$:
- $2 \times M^2 = (2 \times n)^2$
- Ou seja: $2 \times M^2 = 2^2 \times n^2$
- Ou seja: $2 \times M^2 = 4 \times n^2$
- Ou seja: $(2 \times M^2) \div 2 = (4 \times n^2) \div 2$
- Ou seja: $M^2 = 2 \times n^2$

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mas por que $\sqrt[2]{2}$ é irracional?

- $M^2 = 2 \times n^2$
- Eita, mas então M^2 também é par?
- Então M também é par
- $M = 2 \times m$

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mas por que $\sqrt[2]{2}$ é irracional?

- De volta à equação original:
- $\sqrt[2]{2} = N \div M$
- $\sqrt[2]{2} = (2 \times n) \div (2 \times m)$
- $\sqrt[2]{2} = n \div m$
- $\sqrt[2]{2} = N \div M$ e $\sqrt[2]{2} = n \div m$ são parecidas, né?
- Pergunta: o que acontece se aplicarmos a $\sqrt[2]{2} = n \div m$ o mesmo raciocínio que aplicamos a $\sqrt[2]{2} = N \div M$?

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mas por que $\sqrt[2]{2}$ é irracional?

- De volta à equação original:
- $\sqrt[2]{2} = N \div M$
- $\sqrt[2]{2} = (2 \times n) \div (2 \times m)$
- $\sqrt[2]{2} = n \div m$
- $\sqrt[2]{2} = N \div M$ e $\sqrt[2]{2} = n \div m$ são parecidas, né?
- Pergunta: o que acontece se aplicarmos a $\sqrt[2]{2} = n \div m$ o mesmo raciocínio que aplicamos a $\sqrt[2]{2} = N \div M$?
- A mesma coisa!
- Concluiríamos que n e m são em si números pares, e daí faríamos o mesmo de novo e de novo e de novo ... para sempre
- Pergunta: *qual o problema* do processo persistir para sempre?

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mas por que $\sqrt[2]{2}$ é irracional?

- Se N é par, e a metade de N é par, e a metade da metade de N é par, e assim por diante, infinitamente, então ...

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mas por que $\sqrt[2]{2}$ é irracional?

- Se N é par, e a metade de N é par, e a metade da metade de N é par, e assim por diante, infinitamente, então ...
- N é infinito
- Pergunta: $\infty \in \mathbb{Q}$?

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mas por que $\sqrt[2]{2}$ é irracional?

- Se N é par, e a metade de N é par, e a metade da metade de N é par, e assim por diante, infinitamente, então ...
- N é infinito
- Pergunta: $\infty \in \mathbb{Q}$?
- Não! *infinito não é um número!*

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mas por que $\sqrt[2]{2}$ é irracional?

- Retrocedendo: o que deu errado no nosso raciocínio?

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mas por que $\sqrt[2]{2}$ é irracional?

- Retrocedendo: o que deu errado no nosso raciocínio?
- Assumimos que $\sqrt[2]{2}$ era um número racional
- Concluímos então que nossa suposição era falsa!
- Ou seja: *existem números irracionais*

Notas históricas

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Figura: Hípaso de Metaponto, filósofo da linha Pitagórica a quem se atribui a descoberta da irracionalidade de $\sqrt[2]{2}$ (século 5º AC)

- Os pitagóricos – linha filosófica criada por Pitágoras – acreditavam que tudo no mundo físico e espiritual, da afinação dos instrumentos de corda à geometria dos corpos celestes, podia ser expressado em termos numéricos de maneira simples e elegante como a razão de dois números inteiros
- Reza a lenda que um dos estudantes de Pitágoras – Hípaso – um dia por acidente resbalou numa demonstração da irracionalidade de $\sqrt[2]{2}$ (possivelmente a mesma que nós vimos). Hípaso teria sido condenado à morte e executado pelos Pitagóricos, pelo "crime" de divulgar a demonstração
- Ironicamente, $\sqrt[2]{2}$ em alguns contextos é conhecida como "constante de Pitágoras"

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Números irracionais não são todos aqueles com infinitos algarismos após a vírgula: alguns números racionais também se comportam assim
- Exemplos?

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Números irracionais não são todos aqueles com infinitos algarismos após a vírgula: alguns números racionais também se comportam assim
- Exemplos?
- $5 \div 9 = 0,555 \cdots = 0,\overline{5}$
- $4 \div 33 = 1,121212 \cdots = 1,\overline{12}$
- $1039 \div 90 = 1,15444 \cdots = 1,15\overline{4}$
- Então qual a diferença?

Números Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Números irracionais não são todos aqueles com infinitos algarismos após a vírgula: alguns números racionais também se comportam assim
- Exemplos?
- $5 \div 9 = 0,555\cdots = 0,\overline{5}$
- $4 \div 33 = 1,121212\cdots = 1,\overline{12}$
- $1039 \div 90 = 1,15444\cdots = 1,15\overline{4}$
- Então qual a diferença?
- Os algarismos após a vírgula não se repetem num número irracional

Números Reais: $\mathbb{R}$

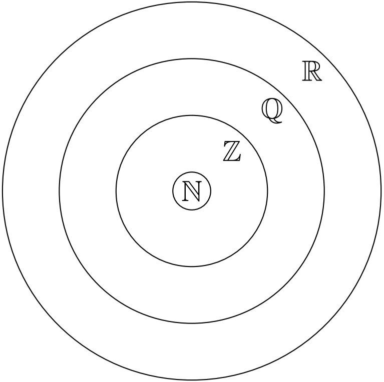

Figura: Diagrama de Venn dos conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

- Os números reais são a união dos números racionais com os números irracionais. Ou seja, todo número racional e também todo número irracional faz parte do conjunto dos reais
- De novo: conseguimos definir o conjunto dos números reais como fizemos anteriormente com $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$?

Números Reais: $\mathbb{R}$

- Os números reais são a união dos números racionais com os números irracionais. Ou seja, todo número racional e também todo número irracional faz parte do conjunto dos reais
- De novo: conseguimos definir o conjunto dos números reais como fizemos anteriormente com $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$?
- Podemos tentar:

$$\begin{gathered} \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \\ \begin{matrix} \forall n \in \mathbb{Q}^+ \\ \forall m \in \mathbb{Q} \\ m \neq 0 \end{matrix} : \sqrt[m]{n} \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{14}$$

- Pergunta: conseguem pensar em algum número real que não tenha sido "capturado" pela definição acima?

Números Reais: $\mathbb{R}$

- Os números reais são a união dos números racionais com os números irracionais. Ou seja, todo número racional e também todo número irracional faz parte do conjunto dos reais
- De novo: conseguimos definir o conjunto dos números reais como fizemos anteriormente com $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$?
- Podemos tentar:

$$\begin{gathered} \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \\ \substack{\forall n \in \mathbb{Q}^+ \\ \forall m \in \mathbb{Q} \\ m \neq 0} : \sqrt[m]{n} \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{15}$$

- Pergunta: conseguem pensar em algum número real que não tenha sido "capturado" pela definição acima?
- π!
- Por quê? (vocês não precisam saber disso, mas) π^n é irracional para qualquer $n \neq 0 \in \mathbb{Q}$

Números Reais: $\mathbb{R}$

- Então como definir o conjunto dos reais?
- Tem uma maneira que vai (mais ou menos) na linha do que fizemos até agora
- Observem o padrão:
  - O conjunto dos números naturais é "fechado sobre" as operações de adição, multiplicação, exponenciação
  - O conjunto dos números inteiros é fechado sobre as operações de adição, multiplicação, exponenciação, subtração
  - O conjunto dos números racionais é fechado sobre as operações de adição, multiplicação, exponenciação, subtração, divisão
  - O conjunto dos números reais é fechado sobre ???

Números Reais: $\mathbb{R}$

- Então como definir o conjunto dos reais?
- Tem uma maneira que vai (mais ou menos) na linha do que fizemos até agora
- Observem o padrão:
  - O conjunto dos números naturais é "fechado sobre" as operações de adição, multiplicação, exponenciação
  - O conjunto dos números inteiros é fechado sobre as operações de adição, multiplicação, exponenciação, subtração
  - O conjunto dos números racionais é fechado sobre as operações de adição, multiplicação, exponenciação, subtração, divisão
  - O conjunto dos números reais é fechado sobre ???
- Podemos chutar o balde e definir o conjunto dos números reais como o menor conjunto fechado sobre tudo
- Como assim *tudo*?
- Todas as expressões que pudermos formar usando adição, subtração, multiplicação, exponenciação, divisão e radiciação!

Números Reais: $\mathbb{R}$

- Então como definir o conjunto dos reais?
- Tem uma maneira que vai (mais ou menos) na linha do que fizemos até agora
- Podemos chutar o balde e definir o conjunto dos números reais como o menor conjunto fechado sobre tudo
- Como assim *tudo*?
- Todas as expressões que pudermos formar usando adição, subtração, multiplicação, exponenciação, divisão e radiciação!
- Concretamente: todas as soluções x de polinômios $0 = a + bx + cx^2 + \cdots + zx^n$ (que veremos (bem) mais adiante) compõem os números reais

Números Reais: $\mathbb{R}$

- Então como definir o conjunto dos reais?
- Tem uma maneira que vai (mais ou menos) na linha do que fizemos até agora
- Podemos chutar o balde e definir o conjunto dos números reais como o menor conjunto fechado sobre tudo
- OK! ✓✓✓

Números Reais: $\mathbb{R}$

- Então como definir o conjunto dos reais?
- Tem uma maneira que vai (mais ou menos) na linha do que fizemos até agora
- Podemos chutar o balde e definir o conjunto dos números reais como o menor conjunto fechado sobre tudo
- OK! $\checkmark\checkmark\checkmark$
- Não funciona
- Qual o contra exemplo dessa vez?

Números Reais: $\mathbb{R}$

- Então como definir o conjunto dos reais?
- Tem uma maneira que vai (mais ou menos) na linha do que fizemos até agora
- Podemos chutar o balde e definir o conjunto dos números reais como o menor conjunto fechado sobre tudo
- OK! ✓✓✓
- Não funciona
- Qual o contra exemplo dessa vez?
- π!
- De novo, vocês não precisam saber isso, mas π não é a solução de *nenhuma* equação polinomial!
- Números com essa propriedade são chamados "números transcendentais" (porque eles "transcendem" a álgebra)

Números Reais: $\mathbb{R}$

- Então – *de novo* – como definir o conjunto dos reais?
- Tem uma maneira simples:
- Considerem o subconjunto dos números racionais cujo quadrado é menor que 2 (ou seja: $\{x \mid x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 2\}$)
- Exemplo de um limite superior para esse conjunto?
- 2 serve! Porque $2^2 > 2$
- $8 \div 5$ também serve! Porque $(8 \div 5)^2 = 64 \div 25 = 2,56 > 2$
- $3 \div 2$ também serve! Porque $(3 \div 2)^2 = 9 \div 4 = 2,25 > 2$
- $1,42$ também serve: Porque $1,42^2 = 2,0164 > 2$

Números Reais: $\mathbb{R}$

- O que todos esses números têm em comum? Por quê todos funcionam?

Números Reais: $\mathbb{R}$

- Todos são maiores que a raiz quadrada de 2, que é $1,414213562\ldots$
- No conjunto dos racionais, *sempre* podemos encontrar um limite superior menor do que o anterior (ou seja, não existe *O menor* limite superior)
- Por quê?

Números Reais: $\mathbb{R}$

- Todos são maiores que a raiz quadrada de 2, que é $1,414213562\ldots$
- No conjunto dos racionais, *sempre* podemos encontrar um limite superior menor do que o anterior (ou seja, não existe *O menor* limite superior)
- Por quê?
- Porque nunca podemos encostar em $\sqrt[2]{2}$, que é irracional!

Números Reais: $\mathbb{R}$

- Resumo da ópera:
- No conjunto dos racionais, sempre podemos nos aproximar indefinidamente de alguns limites (como o do exemplo anterior), mas nunca alcançá-los
- Tudo que o conjunto dos reais faz é preencher essas lacunas!
- Pergunta: essas lacunas são raras? Qual a frequência com que aparecem?

Números Reais: $\mathbb{R}$

- Resumo da ópera:
- No conjunto dos racionais, sempre podemos nos aproximar indefinidamente de alguns limites (como o do exemplo anterior), mas nunca alcançá-los
- Tudo que o conjunto dos reais faz é preencher essas lacunas!
- Pergunta: essas lacunas são raras? Qual a frequência com que aparecem?
- Virtualmente *todos* os números reais são lacunas!

Números Reais: $\mathbb{R}$

- Virtualmente *todos* os números reais são lacunas!
- Em outras palavras: a proporção de números racionais para números irracionais é irrisória
- Em outras^2 palavras: imagina a linha numérica dos números reais, se estendendo de $-\infty$ a $+\infty$, e deixa cair um grão de arroz em algum ponto aleatório dessa linha. A probabilidade do grão cair num número racional (ou natural, ou inteiro) é zero!

No caminho da generalização:

De novo: Quais as perguntas proibidas em $\mathbb{R}$?

- Escolhe uma operação $(+/-/\times/\div/\ ^{x}, \sqrt[x]{\ })$
- Escolhe dois números $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$
- Consegue criar um número $c \notin \mathbb{R}$?
- OBS 1. $a\ (\ ^{x})\ b = a^b$
- OBS 2. $a\ (\sqrt[x]{\ })\ b = \sqrt[a]{b}$

$$\begin{aligned} c = a\ (+/-/\times/\div/\ ^{x}, \sqrt[x]{\ })\ b \\ a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{16}$$

No caminho da generalização:

De novo: Quais as perguntas proibidas em $\mathbb{R}$?

- Escolhe uma operação $(+ / - / \times / \div / \,^{x}, \sqrt[x]{\ })$
- Escolhe dois números $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$
- Consegue criar um número $c \notin \mathbb{R}$?
- OBS 1. $a\ (\,^{x})\ b = a^{b}$
- OBS 2. $a\ (\sqrt[x]{\ })\ b = \sqrt[a]{b}$
- $c = \sqrt[2]{-1}$

$$\begin{aligned} c = a\ (+ / - / \times / \div / \,^{x}, \sqrt[x]{\ })\ b \\ a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{17}$$

Números "Imaginários": $\mathbb{I}$

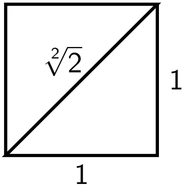

Figura: O número irracional $\sqrt[2]{2}$ aparece em contextos mundanos, como na diagonal de um quadrado de lado 1

- OK, mas qual a *utilidade* de $\sqrt[2]{-1}$?
- Até o momento, todos os conjuntos numéricos introduziram alguma abstração útil:
  - Números negativos: o conceito de débito
  - Números racionais: o conceito de fração
  - Números irracionais: nos permite incluir alguns números que obviamente existem no mundo real, como $\sqrt[2]{2}$ e π

Notas Históricas

Números "Imaginários": $\mathbb{I}$

Figura: Tartaglia (esquerda) e Cardano, dois matemáticos do século 16 que descobriram soluções algébricas para equações do 3º grau envolvendo $\sqrt[2]{-1}$

- No século 16, o matemático Tartaglia obteve, via manipulação algébrica, a seguinte expressão para as raízes da equação $x^3 = x$:

$$\frac{1}{\sqrt[2]{3}}\left(\sqrt[3]{\sqrt[2]{-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt[2]{-1}}}\right) \tag{18}$$

- A princípio a equação não faz sentido, mas se manipulada com cuidado obtemos as raízes 0, 1 e -1 (todas reais).
- Os matemáticos da época perceberam que no caminho da obtenção de soluções reais, às vezes somos obrigados a passar por quantidades "imaginárias"
- Isso elevou $\sqrt[2]{-1}$ ao status de *número*, pois de repente se tornara útil

Números Complexos: $\mathbb{C}$

- Agora precisamos dar um jeito de combinar os números reais com os números imaginários
- Como?

Números Complexos: $\mathbb{C}$

- Agora precisamos dar um jeito de combinar os números reais com os números imaginários
- Como?
- Podemos *somar* números reais e números imaginários:

$$\begin{aligned} 3 + 2\sqrt[2]{-1} \\ 42 - 8\sqrt[2]{-1} \\ -20 + 30\sqrt[2]{-1} \\ \ldots \end{aligned} \tag{19}$$

Números Complexos: $\mathbb{C}$

- Pela última vez: vamos definir o conjunto dos números complexos

Números Complexos: $\mathbb{C}$

- Pela última vez: vamos definir o conjunto dos números complexos
- $$\substack{\forall n \in \mathbb{R} \\ \forall m \in \mathbb{I}} : n + m \in \mathbb{C} \tag{20}$$

Números Complexos: $\mathbb{C}$

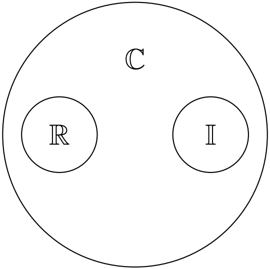

Figura: Diagrama de Venn dos conjuntos $\mathbb{R}, \mathbb{I}, \mathbb{C}$

- Os números reais são a união dos números racionais com os números irracionais
- Pergunta: o mesmo vale para os complexos? Os números complexos são a união dos números reais com os números imaginários?

Números Complexos: $\mathbb{C}$

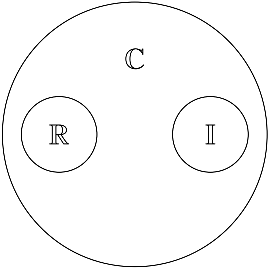

Figura: Diagrama de Venn dos conjuntos $\mathbb{R}, \mathbb{I}, \mathbb{C}$

- Os números reais são a união dos números racionais com os números irracionais
- Pergunta: o mesmo vale para os complexos? Os números complexos são a união dos números reais com os números imaginários?
- Não! Por exemplo, $2 + 3i$ não é real nem imaginário!

Números Complexos: $\mathbb{C}$

- OK! Mas o que nos impede de inventar outros números? Quando essa brincadeira dos conjuntos numéricos acaba?

Números Complexos: $\mathbb{C}$

Figura: Hamilton extendeu os números complexos acrescentando mais duas raízes (distintas) de -1: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

- OK! Mas o que nos impede de inventar outros números? Quando essa brincadeira dos conjuntos numéricos acaba?
- Nada nos impede!
- Mas tem um detalhe: agora não é mais *necessário* definir novos conjuntos
- Por quê?

Números Complexos: $\mathbb{C}$

Figura: Hamilton extendeu os números complexos acrescentando mais duas raízes (distintas) de -1: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

- OK! Mas o que nos impede de inventar outros números? Quando essa brincadeira dos conjuntos numéricos acaba?
- Nada nos impede!
- Mas tem um detalhe: agora não é mais *necessário* definir novos conjuntos
- Por quê?
- Os números complexos são *algebricamente fechados*
- Toda equação polinomial tem solução nos números complexos!

Resumo do que vimos até agora: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{I}, \mathbb{C}$

- Obtemos os números inteiros ($\mathbb{Z}$) generalizando a subtração para aceitar números negativos
- Obtemos os números racionais ($\mathbb{Q}$) generalizando a divisão para aceitar números fracionários
- Obtemos os números reais ($\mathbb{R}$) preenchendo as lacunas dos números racionais
- Obtemos os números imaginários ($\mathbb{I}$) generalizando a raiz quadrada ($\sqrt[2]{2}$) para aceitar raizes de números negativos
- Obtemos os números complexos ($\mathbb{C}$) generalizando a adição para aceitar somas entre números reais e números imaginários