Funções Lineares, Quadráticas e Modulares

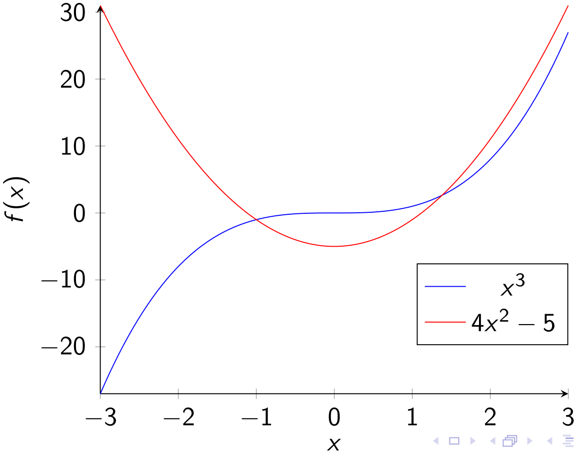
Matemática

ONGEP

2018

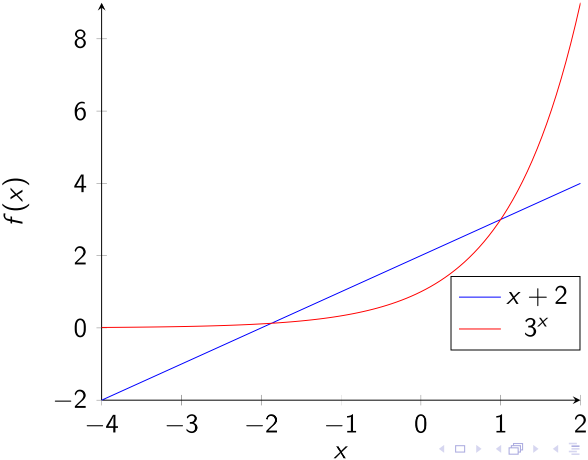
Funções Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras

- Uma função injetora (ou injetiva) é uma onde cada elemento diferente do domínio mapeia para um elemento diferente da imagem: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
- OBS. toda função função injetora é **invertível à esquerda** $(f^{-1}(f(x)) = x)$ – e vice-versa. Por quê?



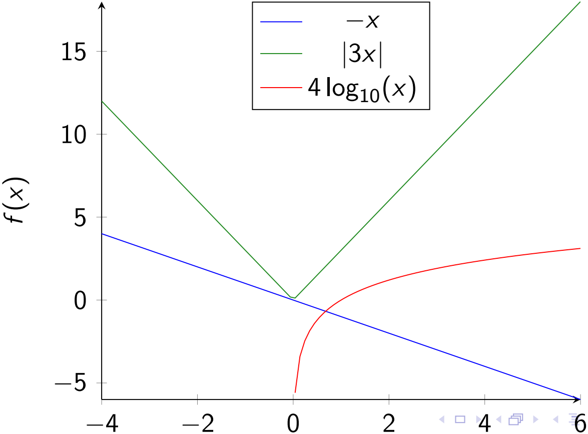
Funções Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras

- Uma função sobrejetora (ou sobrejetiva) é uma onde todo elemento no codomínio é "atingido" (a imagem da função é igual ao codomínio): $f(X) = Y$
- OBS. toda função função sobrejetora é **invertível à direita** ($f(f^{-1}(x)) = x$) – e vice-versa. Por quê?



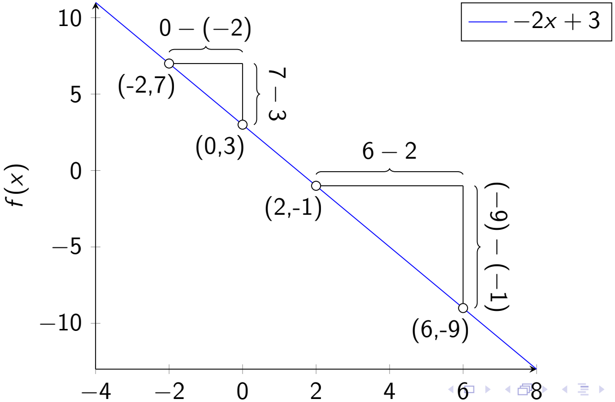
Funções Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras

- Uma função bijetora (ou bijetiva) é uma onde cada elemento do domínio é mapeado para um elemento do codomínio **e vice-versa**.
- OBS. toda função função bijetora é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora. Por quê? Ela é invertível à esquerda ou à direita?



Funções lineares ou do primeiro grau

- Funções lineares sob várias perspectivas:
  - O gráfico de uma função linear no plano cartesiano é uma linha reta
  - A lei de uma função linear genérica é $f(x) = ax + b$ (com a, b constantes e $a \neq 0$)
  - Numa função linear, a proporção entre a variação em y e a variação em x é sempre constante $\left(\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = a\right)$

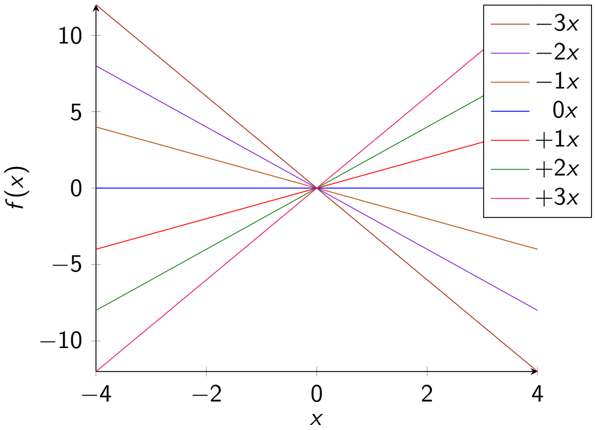


Raízes ou soluções de uma função qualquer

- Frequentemente temos uma função $f(x)$ e desejamos saber para quais valores de x vale $f(x) = 0$
- Esses valores de x têm um nome especial: "raízes" ou "soluções" de $f(x)$
- E se desejarmos saber para quais valores de x vale $f(x) = y$ (para algum y arbitrário?)

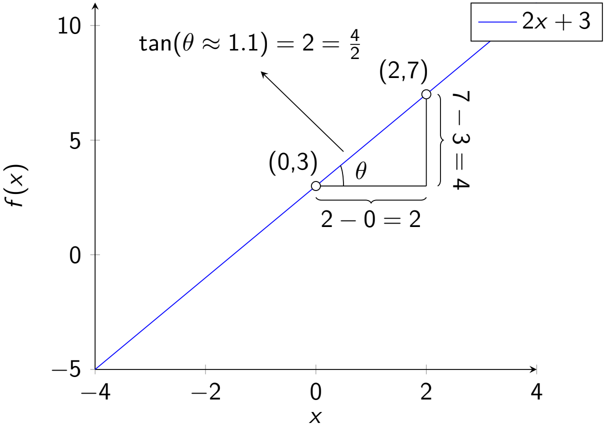
Anatomia de uma função linear

- A constante "a" em $f(x) = ax + b$ é chamada "coeficiente angular", pois ela determina o ângulo que a reta faz com o eixo x.



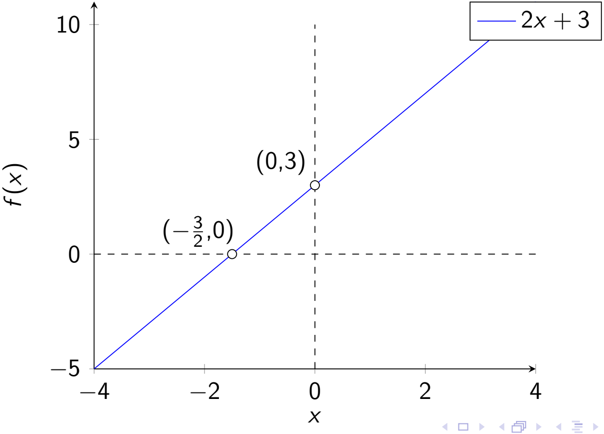
Anatomia de uma função linear

- A constante "a" em $f(x) = ax + b$ é chamada "coeficiente angular", pois ela determina o ângulo que a reta faz com o eixo x.
- O coeficiente angular pode ser calculado em qualquer posição da reta se dividirmos a variação em y (Δy) pela variação em x (Δx): $a = (\Delta y = y_1 - y_0)/(\Delta x = x_1 - x_0)$



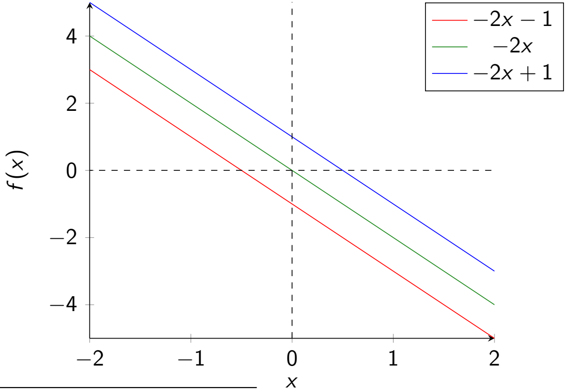
Anatomia de uma função linear

- A constante "b" em $f(x) = ax + b$ é chamada "coeficiente linear" ou "termo independente", e determina onde a reta cruza o eixo y, porque $f(0) = a \times 0 + b = b$
- O coeficiente linear também determina onde a reta cruza o eixo x (ou seja, a raiz ou solução da função linear), pois $f(-b/a) = a \times (-b/a) + b = -b + b = 0$



Transformações em funções lineares

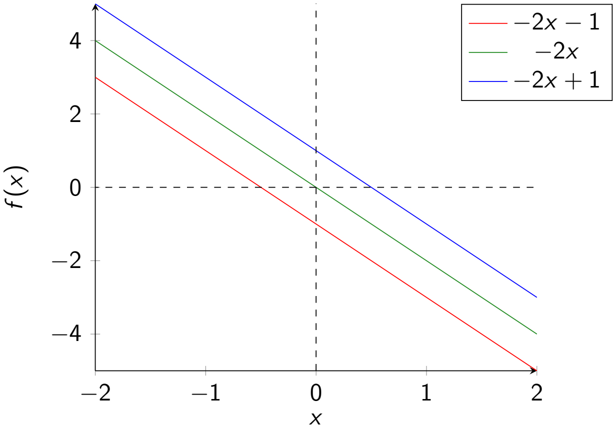
- Observe que podemos mover uma função linear para cima ou para baixo se aumentarmos ou diminuirmos o valor do coeficiente linear ("b"), respectivamente
- Demonstração interativa em `https://www.openprocessing.org/sketch/568383` [1]



[1] Arrasta o mouse p/ mover a linha; Arrasta o mouse apertando uma tecla p/ mudar inclinação

Transformações em funções lineares

- Observe também que quando a reta sobe 1 unidade, é como se ela se deslocasse algumas unidades para a direita. Quantas?

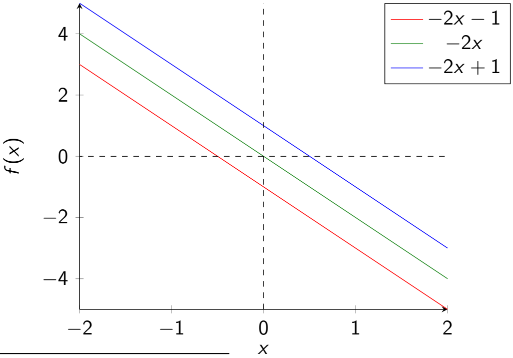


Raízes de uma função linear

- Uma função linear tem apenas **uma** raiz. Por quê?
  - Graficamente: porque uma reta só cruza o eixo x uma única vez
  - Algebricamente: porque $0 = f(x) = ax + b \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -b/a$, e $-b/a$ é um único valor (lembrando que no caso das equações do segundo grau temos $\pm\sqrt{\ldots}$)
- Podemos escrever qualquer equação linear no seguinte formato: $a(x - r)$, onde a é o coeficiente angular e r é a raiz da equação
- Expandindo, temos $a(x - r) = ax - ar$, onde "ar" equivale ao "b" (coeficiente linear) no esquema $f(x) = ax + b$

Transformações em funções lineares

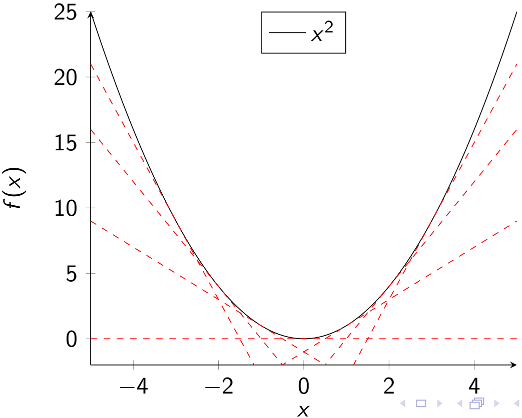
- Podemos mover uma reta 1 unidade para a direita ou para a esquerda subtraindo ou somando a no coeficiente linear, respectivamente
- Isso funciona pois $a(x-r)-a = a(x-r-1) = a(x-(r+1))$
- Demonstração interativa em `https://www.openprocessing.org/sketch/568383` [2]



[2] Arrasta o mouse p/ mover a linha; Arrasta o mouse apertando uma tecla p/ mudar inclinação

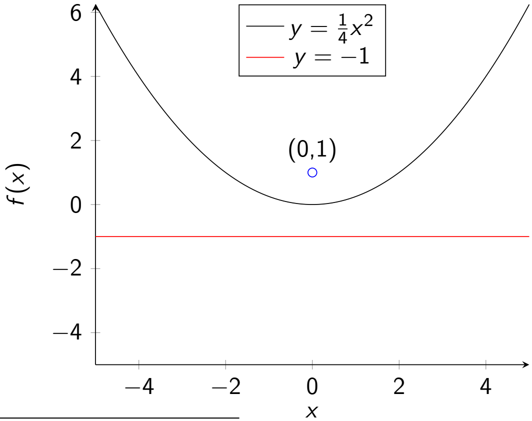
Funções quadráticas ou do segundo grau

- Funções quadráticas sob várias perspectivas:
  - O gráfico de uma função quadrática no plano cartesiano é uma *parábola* (mas o que é uma parábola? :D)
  - A lei de uma função quadrática genérica é $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ (do contrário vira uma equação linear)
  - A inclinação da curva quadrática (parábola) não é constante como a da reta, mas **varia linearmente**



O que é uma parábola?

- Uma parábola é um conjunto de pontos que estão à mesma distância de um ponto focal e de uma reta (chamada diretriz)
- Demonstração interativa: `www.openprocessing.org/sketch/567057` [3]



[3] arrasta o mouse p/ mudar o ângulo da diretriz; arrasta o mouse apertando uma tecla do teclado p/ movimentar o ponto focal

Por que o gráfico de uma função quadrática é parabólico?

- Considere a parábola do exemplo anterior, com foco $F = (0, 1)$ e diretriz $y = -1$
- A distância de um ponto (x, y) até o foco é $\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$
- A distância de um ponto (x, y) até a diretriz é a "altura" do ponto relativo a ela: $y - (-1) = y + 1$
- A parábola é o conjunto dos pontos para os quais as distâncias são iguais: $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = y + 1$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + (y-1)^2} &= y + 1 \\
x^2 + y^2 - 2y + 1 &= y^2 + 2y + 1 \\
x^2 - 2y &= 2y \\
x^2 &= 4y \\
\frac{1}{4}x^2 &= y
\end{aligned} \tag{1}$$

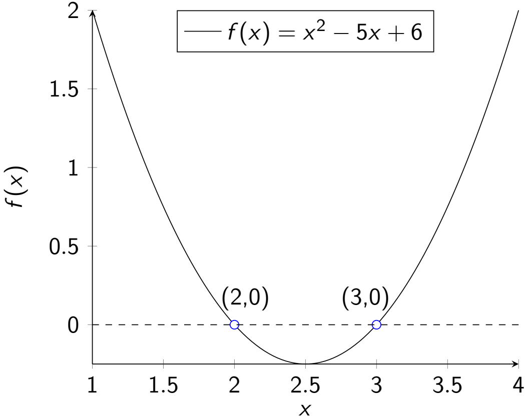
Raízes ou soluções de uma função quadrática

- Toda função quadrática pode ser escrita no formato $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, onde r_1 e r_2 são as raízes (ou soluções) de $f(x)$. Por que isso funciona?

Anatomia da fórmula quadrática (ou de Bháskara)

- Como encontrar essas raízes?

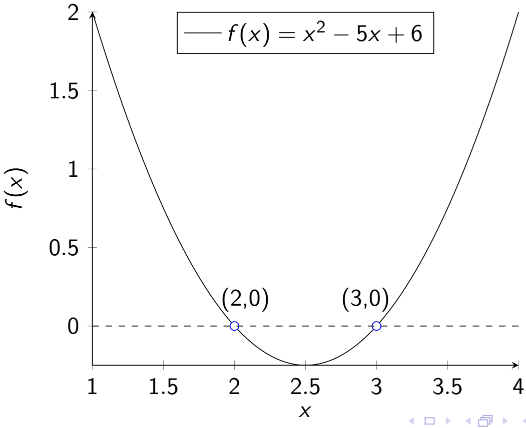
$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$



Anatomia da fórmula quadrática (ou de Bháskara)

- Pergunta: se multiplicarmos uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ por alguma constante, as raízes mudam?

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3}$$



Anatomia da fórmula quadrática (ou de Bháskara)

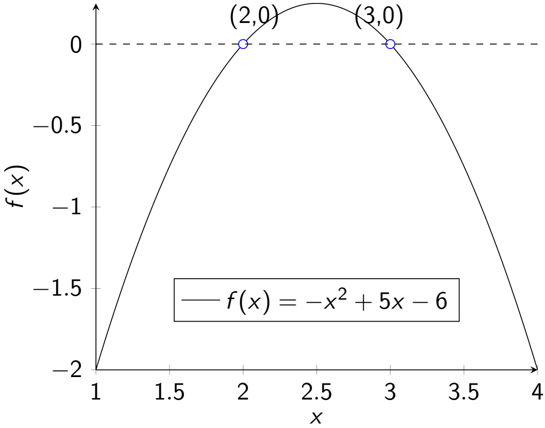
- E se multiplicarmos por um número negativo?

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4}$$

Anatomia da fórmula quadrática (ou de Bháskara)

- E se multiplicarmos por um número negativo?

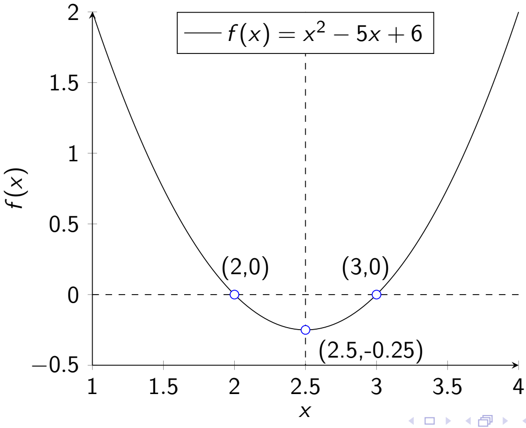
$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{5}$$



Anatomia da fórmula quadrática (ou de Bháskara)

- Pergunta: como descobrimos o mínimo (o ponto mais baixo) ou o máximo (o ponto mais alto) da função?

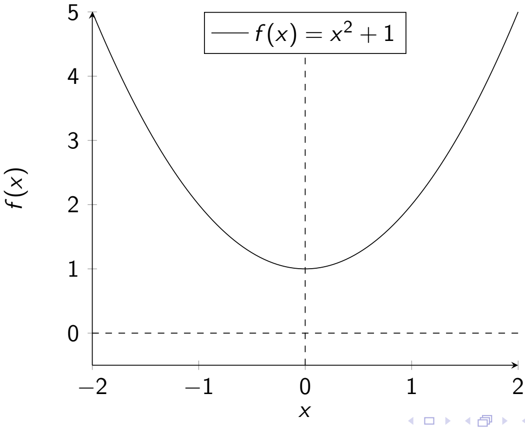
$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{6}$$



Anatomia da fórmula quadrática (ou de Bháskara)

- Pergunta: e quando o gráfico não encosta no eixo x? Quais são as raízes?

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (7)$$



Anatomia da fórmula quadrática (ou de Bháskara)

- Pergunta: e quando o gráfico não encosta no eixo x? Quais são as raízes? i e $-i$, pois $(x-i)(x+i) = x^2 + ix - ix - i^2 = x^2 + 1$

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{8}$$