Deskripsi Permasalahan

1. ***Bidang Matematika***
   Hitung integral berikut.

$$\int_{0}^{100} \frac{e^{-x}}{1+\sqrt{x}+x^{2}}\,dx$$

Metode yang digunakan:

a) Kaidah trapesium
b) Kaidah titik-tengah
c) Kadiah Simpson 1/3
d) Kaidah Simpson 3/8
e) Metode Romberg
f) Metode Gauss-Legendre orde 2, 3, 4, 5.

2. ***Bidang Fisika 1***
   Suatu benda hitam meradiasikan energi berdasarkan rumus Planck berikut:

$$e d\lambda = \frac{2\pi h c^{2} d\lambda}{\lambda^{5}[\exp(hc/k\lambda T)-1]} \frac{erg}{cm^{2}\ \mathrm{det}}$$

dimana *e dλ* adalah energi radiasi dengan interval panjang gelombang *dλ*, λ adalah panjang gelombang dalam cm, *h* adalah konstanta Planck (6.6256×10^{-27} erg det), *c* adalah kecepatan cahaya (2.99792×10^{10} cm/det), *k* adalah kontanta Boltzman (1.3805×10^{-16} erg/°K), dan *T* adalah temperatur absolut dalam °K. Hitung besar energi yang dikeluarkan pada setiap interval panjang gelombang (0,10), (100,110), (1000,1010), (0,∞) pada kasus *T* = 10, 100, 1000.

Metode yang digunakan:

a. Kaidah Trapesium
b. Kaidah 3/8 Simpson
c. Metode Romberg
d. Metode Gauss-Legendre orde 4

3. ***Integral Ganda***
   Hitung nilai integral

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} x^{3} y\,dy\,dx$$

Metode yang digunakan:

a. Metode Trapesium dalam kedua arah
b. Metode 1/3 Simpson dalam kedua arah

c. Metode Gauss-Legendre orde 2 dalam kedua arah

4. ***Bidang Kimia***

Fugasitas merupakan istilah yang digunakan untuk menggambarkan kerja dari suatu proses isotermal. Untuk gas ideal, fugasitas *f*, sebanding dengan tekanan *P*, tapi untuk kondisi sesungguhnya,

$$\ln \frac{f}{P} = \int_0^P \frac{C-1}{P} dp$$

dimana *C* adalah faktor kompresibilitas. Untuk metan, nilai *C* adalah sbb.

P (atm)	**C**	*P* (atm)	***C***
1	0.9940	80	0.3429
10	0.9370	120	0.4259
20	0.8683	160	0.5252
40	0.7043	250	0.7468
60	0.4515	400	1.0980

Nilai *C* akan mendekati 1.0 saat *P* mendekati 0.0.

Hitung *f* metan berdasarkan masukan *P* dari pengguna (*P* harus ada di tabel).

Bonus: Ada tambahan nilai jika program mampu menerima masukan *P* yang tidak ada pada tabel.

Metode yang digunakan:

a. Kaidah Trapesium
b. Kaidah Simpson 1/3
c. Metode Romberg
d. Kaidah Gauss-Legendre orde 3, 4, dan 5.

5. **Bidang transportasi**

Suatu sensus yang diadakan oleh DLLAJ terhadap sebuah ruas jalan protokol menghasilkan tabel korelasi antara debit kendaraan yang melintasi jalan tersebut dengan jangka waktunya (dalam hitungan jam), seperti di bawah ini :

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Siang (6-16)	74	85	106	115	94	88	91	110	123	142
Malam (18-4)	153	121	80	77	54	42	38	34	45	66

Jika jumlah mobil yang melintasi jalan tersebut sebanding dengan integrasi dari debit kendaraan yang melintasinya. Maka hitunglah jumlah total kendaraan yang melewati jalan protokol tersebut (baik siang hari maupun malam hari) selama periode dari t=1 sampai t=10.

Batas-batas integrasi juga dapat merupakan masukan dari user.

Program juga dapat menerima masukan tabel (*editing*), yang dibaca dari keyboard maupun file (arsip).

Metode yang digunakan:

a) kaidah trapesium
b) kaidah Simpson 1/3
c) kaidah Simpson 3/8

6. Bidang Fisika 2

Suatu pendulum sederhana dilepaskan pada saat t=0 dengan sudut awal θ_0. Perioda pendulum tersebut dapat dihitung dengan rumus :

$$T = 4\sqrt{(L/g)}\ {}_0\int^{\pi/2} (d\phi / (1-\sin^2(\theta_0/2) \sin^2 \phi)^{1/2})$$

dengan menggunakan metoda integral yang sesuai, hitunglah nilai $T\sqrt{(g/L)}$ untuk semua nilai θ_0 dari $\pi/20$ hingga $\pi/2$ dengan kenaikan tiap $\pi/20$

7. Bidang kelistrikan

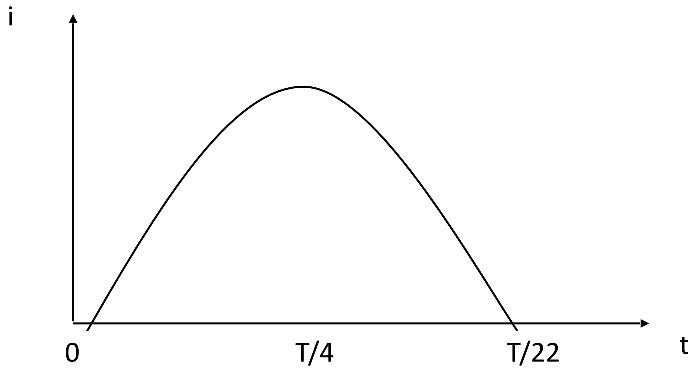
Nilai efektif dari arus listrik bolak balik mempunyai rumus :

$$I_{RMS} = 1/T\ {}_0\int^{T} i^2(t)\, dt$$

Untuk T adalah periode, yaitu waktu untuk suatu gelombang, i(t) adalah arus fungsi waktu. Hitunglah arus RMS dari bentuk gelombang dalam gambar di bawah ini menggunakan :

d) kaidah trapesium
e) kaidah 1/3 Simpson
f) metode Romberg
g) kuadratur Gauss orde 3 dan 4

untuk T = 1 detik. Bandingkan hasilnya dengan perhitungan analitik.



Untuk $0 \le t \le T/2$, $i(t) = 10et/T \sin(2\pi t/T)$

Untuk $T/2 \le t \le T$, $i(t) = 0$

Dasar Teori

Persoalan integrasi numerik

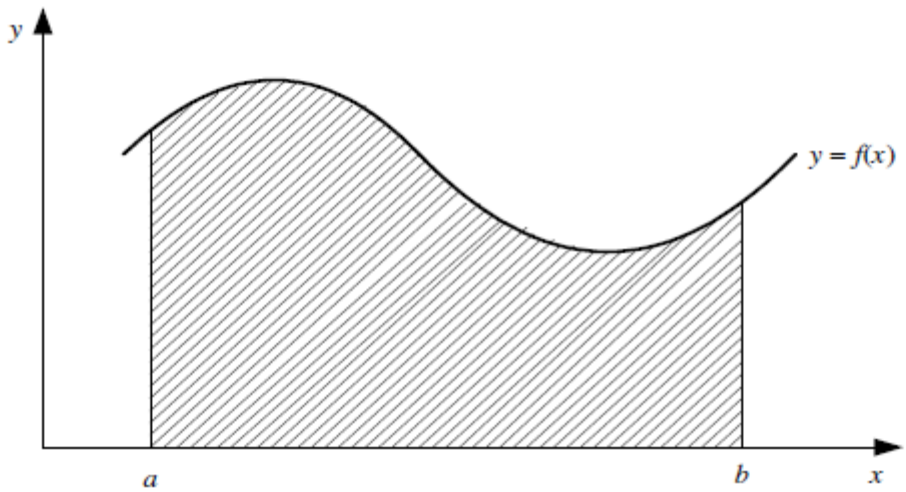
Persoalan umum dari integrasi numerik ialah: Hitunglah nilai integral tentu dari

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Dalam hal ini:

- a dan b ialah batas-batas integrasi
- f adalah fungsi yang dapat diberikan secara eksplisit dalam bentuk persamaan ataupun secara empirik dalam bentuk tabel nilai

Dengan penafsiran geometri, diketahui bahwa nilai integral-tentu sesungguhnya adalah luas daerah di bawah kurva.



$I = \int_a^b f(x)dx$ adalah luas daerah yang dibatasi oleh kurva *y=f(x)*, garis *x=a* dan garis *x=b*.

Metode integrasi numerik dapat diklasifikasikan menjadi tiga yaitu:

1. Metode Pias

Daerah integrasi dibagi atas sejumlah pias (*strip*) yang berbentuk segiempat. Luas daerah dihampiri dengan luas seluruh pias.

2. Metode Newton Cotes

Fungsi *integrand f(x)* dihampiri dengan polinom interpolasi $p_n(x)$. Selanjutnya, integrasi dilakukan terhadap $p_n(x)$.

3. Kuadratur Gauss

Nilai integral diperoleh dengan mengevaluasi nilai fungsi pada sejumlah titik tertentu di dalam selang [-1,1], mengalikannya dengan suatu konstanta, kemudian menjumlahkan keseluruhan perhitungan.

Metode-Metode Pias

Selang integrasi [a,b] dibagi menjadi n buah pias. Lebar tiap pias adalah:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Titik absis pias dinyatakan sebagai:

$$x_r = a + rh,\ r = 0,1,2,\ldots,n$$

Dan nilai fungsi pada titik absis pias adalah

$$f_r = f(x_r)$$

Kaidah integrasi numerik yang dapat diturunkan dengan metode pias adalah:

1. Kaidah segiempat
2. Kaidah trapesium
3. Kaidah titik tengah

Kaidah Segiempat

Kaidah segiempat gabungan adalah

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\right) = \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n)$$

Kaidah Trapesium

Kaidah trapesium sama dengan kaidah segiempat gabungan, hanya cara penurunannya yang beda.

Kaidah trapesium adalah

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n)$$

Kaidah Titik Tengah

Kaidah titik tengah gabungan adalah

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1/2}$$

Yang dalam hal ini,

$$x_{r+1/2} = a + \left(r + \frac{1}{2}\right)h$$

Dan

$$f_{r+1/2} = f(x_{r+1/2})$$

Metode-Metode Newton-Cotes

Metode Newton-Cotes adalah metode yang umum untuk menurunkan kaidah integrasi numerik. Dasar dari metode ini ialah polinom interpolasi. Gagasannya ialah menghampiri fungsi *f(x)* dengan polinom interpolasi $p_n(x)$. Polinom interpolasi yang akan digunakan ialah polinom Newton Gregory maju.

Ada tiga kaidah yang diturunkan dari metode Newton-Cotes, diantaranya:

1. Kaidah trapesium
2. Kaidah Simpson 1/3
3. Kaidah Simpson 3/8

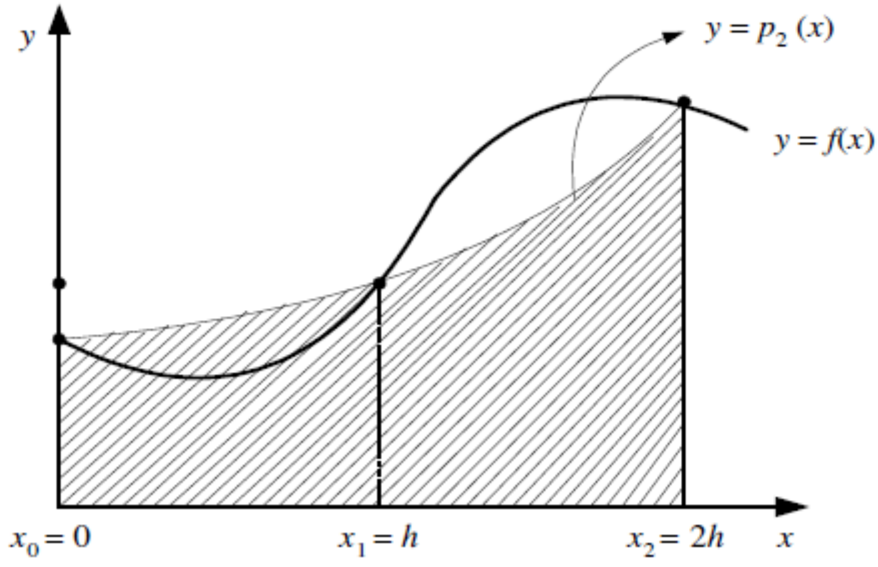
Kaidah Trapesium

Kaidah trapesium dengan interpolasi sama dengan kaidah trapesium yang diturunkan pada metode pias, yaitu:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n)$$

Kaidah Simpson 1/3

Hampiran nilai integrasi yang lebih baik dapat ditingkatkan dengan menggunakan polinom interpolasi berderajat lebih tinggi.



Kaidah Simpson 1/3 gabungan:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f_i + f_n)$$

Penggunaan kaidah 1/3 Simpson mensyaratkan jumlah n harus genap.

Metode Romberg

Metode integrasi Romberg didasarkan pada perluasan ekstrapolasi Richardson untuk memperoleh nilai integrasi yang lebih baik.

Misalkan nilai *I* adalah nilai integrasi sejati yang dinyatakan sebagai

$$I = A_k + Ch^2 + Dh^4 + Eh^6 + \dots$$

Gunakan A_0, A_1, ..., A_k pada persamaan ekstrapolasi Richardson untuk mendapatkan runtunan B_1, B_2, ..., B_k yaitu

$$B_k = A_k + \frac{A_k - A_{k-1}}{2^2 - 1}$$

Jadi, nilai I yang lebih baik sekarang adalah

$$I = B_k + D'h^4 + E'h^6 + \dots$$

Selanjutnya gunakan B_1, B_2, ..., B_k pada persamaan ekstrapolasi Richardson untuk mendapatkan runtunan C_2, C_3, ..., C_k yaitu

$$C_k = B_k + \frac{B_k - B_{k-1}}{2^4 - 1}$$

Jadi, nilai I yang lebih baik sekarang adalah

$$I = C_k + E''h^6 + \dots$$

Selanjutnya gunakan $C_2, C_3, \dots, C_k$ pada persamaan ekstrapolasi Richardson untuk mendapatkan runtunan $D_3, D_4, \dots, D_k$ yaitu

$$D_k = C_k + \frac{C_k - C_{k-1}}{2^6 - 1}$$

Jadi, nilai I yang lebih baik sekarang adalah

$$I = D_k + E''h^8 + \dots$$

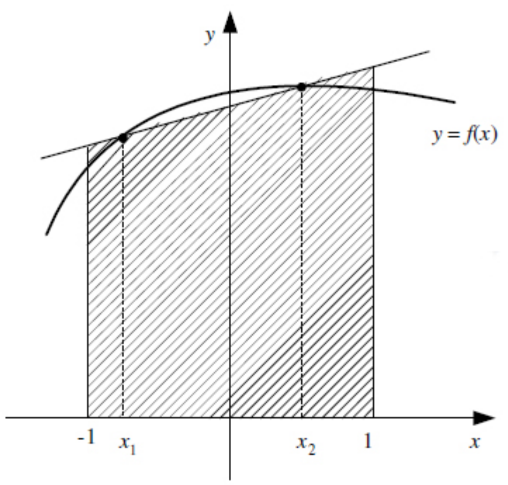
Dan seterusnya.

Integral Ganda

Tafsiran geometri dari integral ganda adalah menghitung volume ruang di bawah permukaan kurva *f(x,y)* yang alasnya berupa bidang yang dibatasi oleh garis-garis *x=a, x=b, y=c,* dan *y=d.*

Solusi integral lipat dua diperoleh dengan melakukan integrasi dua kali, pertama dalam arah x, dan selanjutnya dalam arah y, atau sebaliknya.

Kuadratur Gauss



Persamaan kuadratur Gauss ialah

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

Dengan c_1, c_2, x_1, x_2 adalah sembarang nilai.

Kaidah Gauss-Legendre 2 titik:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(1/\sqrt{3}\right) + f(-1/\sqrt{3})$$

Dengan kaidah ini, menghitung integral *f(x)* di dalam selang [-1,1] cukup dengan mengevaluasi nilai fungsi *f* di *x*=1/$\sqrt{3}$ dan di *x*=-1/$\sqrt{3}$.

Transformasi $\int_{a}^{b} f(x)dx$ Menjadi $\int_{-1}^{1} f(t)dt$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left[\frac{a+b+(b-a)t}{2}\right]\frac{b-a}{2}dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f[\frac{a+b+(b-a)}{2}]dt$$