Laboratorium 1

Paweł Konop

7 marca 2023

1 Treści zadań

1. Znaleźć "maszynowe epsilon", czyli najmniejszą liczbę a, taką, że $a+1 > 1$

2. Rozważamy problem ewaluacji funkcji $sin(x)$, m.in. propagację błędu danych wejściowych, tj. błąd wartości funkcji ze względu na zakłócenie h w argumencie x:

   (a) Ocenić błąd bezwzględny przy ewaluacji $sin(x)$

   (b) Ocenić błąd względny przy ewaluacji $sin(x)$

   (c) Ocenić uwarunkowanie dla tego problemu

   (d) Dla jakich wartości argumentu x problem jest bardzo czuły?

3. Funkcja sinus zadana jest nieskończonym ciągiem

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

   (a) Jakie są błędy progresywny i wsteczny jeśli przybliżamy funkcję sinus biorąc tylko pierwszy człon rozwinięcią, tj. $sin(x) \approx x$, dla $x = 0.1,\ 0.5$ i 1.0?

   (b) Jakie są błędy progresywny i wsteczny jeśli przybliżamy funkcję sinus biorąc pierwsze dwa człony rozwinięcią, tj. $sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$, dla $x = 0.1,\ 0.5$ i 1.0?

4. Zakładamy że mamy znormalizowany system zmiennoprzecinkowy z

$$\beta = 10,\ p = 3,\ L = -98$$

   (a) Jaka jest wartość poziomu UFL (underflow) dla takiego systemu?

   (b) Jeśli $x = 6.87 \cdot 10^{-97}$ i $y = 6.81 \cdot 10^{-97}$, jaki jest wynik operacji $x - y$?

2 Rozwiązania zadań

1. W standardzie IEEE754, przy dodawaniu liczb, najpierw sprowadza się je do wspólnego wykładnika, a następnie dodaje mantysy. Zatem najmniejsza wartość, którą można dodać do jedynki, musi mieć ten sam wykładnik, ale najmniejszą możliwą mantysę.

$$\epsilon = \beta^{1-p}$$

gdzie p to precyzja systemu liczbowego.

2. (a) Błąd bezwględny:

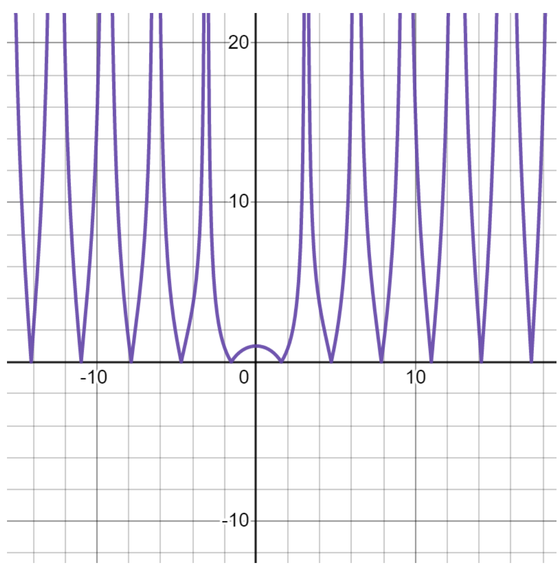
$$\Delta f(x) = |sin(x+h) - sinx|$$

(b) Błąd względny:

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \frac{sin(x+h) - sinx}{sinx} = \frac{sin(x+h)}{sinx} - 1$$

(c) Uwarunkowanie:

$$cond(f(x)) = \left|\frac{xsin'x}{sinx}\right| = |xctgx|$$



Rysunek 1: Uwarunkowanie $f(x) = |xctgx|$

(d) Problem jest bardzo czuły dla wartości x, dla których $sin(x)$ jest bliski zera, ponieważ małe zmiany w argumencie x powodują duże zmiany w wartości $sin(x)$, poza $n = 0$. Wartości bliskie $n\pi$, gdzie n jest liczbą całkowitą, są szczególnie wrażliwe, ponieważ $sin(x) = 0$ dla $x = n\pi$. Natomiast, będzie dobrze uwarunkowany tam, gdzie zeruje się cosinus, więc dla $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$.

3.

$$y = sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

Przyjmując oznaczenia:

y - dokładna wartość
$\hat{y}$ - przybliżona wartość
$\hat{x}$ - funkcja odwrotna do wartości przybliżonej

Błąd progresywny: $\Delta y = |y - \hat{y}|$
Błąd wsteczny: $\Delta x = |\hat{x} - x|$

(a) Przybliżenie pierwszym składnikiem:

i. dla $x = 0.1$:
$\Delta y = |sinx - x| = |sin(0.1) - 0.1| \approx 0.0982546163$
$\Delta x = |arcsin\hat{y} - x| = |arcsin(0.1) - 0.1| \approx 0.000167421$

ii. dla $x = 0.5$:
$\Delta y = |sin(0.5) - 0.5| \approx 0.020574461$
$\Delta x = |arcsin(0.5) - 0.5| \approx 0.023598776$

iii. dla $x = 1.0$:

$\Delta y = |sin(1) - 1| \approx 0.158529015$
$\Delta x = |arcsin(1) - 1| \approx 0.570796327$

(b) Przybliżenie dwoma składnikami:

i. dla $x = 0.1$:
$\Delta y = \left|sinx - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| \approx 0.000000083$
$\Delta x = \left|arcsin\hat{y} - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| = 0.000000084$

ii. dla $x = 0.5$:
$\Delta y \approx 0.000258872$
$\Delta x \approx 0.000294959$

iii. dla $x = 1.0$:

$\Delta y \approx 0.008137652$
$\Delta x \approx 0.014889216$

Wniosek: Warto zauważyć, że im wyższy stopień przybliżenia, tym mniejszy będzie błąd.

4. W znormalizowanym systemie zmiennoprzecinkowym o podstawie 10, precyzji 3 i dolnym ograniczeniu -98, najmniejszą reprezentowalną wartością jest

$$UFL = 1.0 \cdot 10^{-98}$$

.

W wyniku odejmowania $x - y = 0.06 \cdot 10^{-97}$. Ta wartość jest znormalizowana, ale jest mniejsza niż poziom UFL, co oznacza, że jest traktowana jako wynik underflow. W znormalizowanym systemie zmiennoprzecinkowym, wynik underflow zazwyczaj zaokrąglany jest do zera. Dlatego wynik $x - y$ jest równy 0.

3 Bibliografia

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Machine epsilon
2. http://heath.cs.illinois.edu/scicomp/notes/chap01.pdf
3. Wykład