Laboratorium 2

Paweł Konop

14 marca 2023

1 Treści zadań

1. Napisać algorytm do obliczenia funkcji wykładniczej e^x przy pomocy nieskończonych szeregów

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

   (a) Wykonując sumowanie w naturalnej kolejności, jakie kryterium zakończenia obliczeń przyjmiesz?

   (b) Proszę przetestować algorytm dla: $x = +-1, +-5, +-10$ i porównać wyniki z wynikami wykonania standardowej funkcji $exp(x)$

   (c) Czy można posłużyć się szeregami w tej postaci do uzyskania dokładnych wyników dla $x < 0$?

   (d) Czy możesz zmienić wygląd szeregu lub w jakiś sposób przegrupować składowe żeby uzyskać dokładniejsze wyniki dla $x < 0$?

2. Które z dwóch matematycznie ekwiwalentnych wyrażeń $x^2 - y^2$ oraz $(x - y)(x + y)$ może być obliczone dokładniej w arytmetyce zmiennoprzecinkowej? Dlaczego? Dla jakich wartości x i y, względem siebie, istnieje wyraźna różnica w dokładności dwóch wyrażeń?

3. Zakładamy że rozwiązujemy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ z $a = 1.22$, $b = 3.34$ i $c = 2.28$, wykorzystując znormalizowany system zmienno-przecinkowy z podstawa $\beta = 10$ i dokładnością $p = 3$.

   (a) ile wyniesie obliczona wartość $b^2 - 4ac$?

   (b) jaka jest dokładna wartość wyróżnika w rzeczywistej (dokładnej) arytmetyce?

   (c) jaki jest względny błąd w obliczonej wartości wyróżnika?

2 Rozwiązania zadań

1. (a) Kończę sumowanie, gdy kolejny wyraz bezwzględny szeregu będzie mniejszy niż 10^{-8}

   (b) Możemy zauważyć, rozważając tabele z sekcji 3.1 b), wyniki algorytmu są bardzo bliskie wynikom standardowej funkcji $exp()$ z modułu $math$. Wyniki są coraz mniej dokładne dla większych wartości x. Jest to spowodowane błędami zaokrągleń w arytmetyce zmiennopozycyjnej.

   (c) Nie, ta postać szeregu nie jest odpowiednia dla x $<$ 0, ponieważ dla ujemnych x wartości kolejnych składników szeregu będą naprzemiennie dodatnie i ujemne, co spowoduje duże błędy numeryczne i utrudni wyznaczenie dokładnych wyników.

   (d) Tak, można zmodyfikować szereg, aby uzyskać dokładniejsze wyniki dla x $<$ 0. Na przykład, można skorzystać ze wzoru:

   $$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

   Dzięki temu można obliczyć wartość funkcji dla ujemnych wartości x, korzystając z wartości e^x obliczonej dla x dodatnich.

2. Jeśli x i y są tak duże, że ich kwadraty nie mogą być dokładnie reprezentowane w arytmetyce zmienno-przecinkowej, wtedy lepiej jest użyć formy $(x - y) \cdot (x + y)$, ponieważ wartości te są mniejsze niż kwadraty x i y, a zatem mogą być reprezentowane dokładniej.

   Gdy $|x|$ jest znacznie większe niż $|y|$ lub odwrotnie, to wyrażenie $x^2 - y^2$ może być obliczone dokładniej, ponieważ błąd zaokrąglenia podczas obliczania y^2 nie wpływa na wynik końcowy.

   Jednak gdy x i y są bliskie siebie, wyrażenie $x^2 - y^2$ może prowadzić do większych błędów względnych, ponieważ cyfry znaczące w wyniku są eliminowane, podczas gdy błędy zaokrąglenia mogą pozostać. Z drugiej strony, wyrażenie $(x - y) \cdot (x + y)$ może również prowadzić do błędów względnych, ale te błędy są zwykle mniejsze niż w przypadku $x^2 - y^2$.

   Dlatego, jeśli chodzi o dokładność obliczeń w arytmetyce zmienno-przecinkowej, zazwyczaj lepiej jest używać formy $(x-y)\cdot(x+y)$, chyba że wartości x i y są tak duże, że nie mogą być dokładnie reprezentowane, lub są one bliskie siebie, wtedy lepszą opcją będzie używanie formy $x^2 - y^2$.

3. (a) $\Delta_0 = b^2 - 4ac$

   $fl(b^2) = fl(3.34 * 3.34) = fl(11.1556) = 11.2$

   $fl(4 \cdot c) = fl(fl(4 \cdot a) \cdot c) = fl(fl(4 \cdot 1.22)2.28) = fl(fl(4.88) \cdot 2.28) = fl(4.88 \cdot 2.28) = fl(11.1264) = 11.1$

$\Delta_0 = fl(11.211.1) = 0.1$

(b) $\Delta = b^2 - 4ac = 11.1556 - 11.1264 = 0.0292$

(c) $\delta = \frac{0.1-0.0292}{0.0292} \approx 2.42466$

3 Wykresy, tabele, wyniki liczbowe

1. a) Algorytm do obliczenia funkcji wykładniczej e^x przy pomocy nieskończonych szeregów, napisany w języku Python

```
def exp_app(x):

    s, t, n = 0, 1, 0

    while abs(t) > 1e-8:
        s += t
        n += 1
        t *= x / n

    return s
```

1. b) Zestawienie wyników algorytmu z dokładnymi wartościami

x	$exp(x)$	$exp\_app(x)$
1	2.718281828459045	2.718281826198493
-1	0.36787944117144233	0.367879439233606
5	148.4131591025766	148.41315909805007
-5	0.006737946999085467	0.006737943884295969
10	22026.465794806718	22026.465794802803
-10	4.5399929762484854e-05	4.5402342005347955e-05

4 Bibliografia

1. http://heath.cs.illinois.edu/scicomp/notes/chap01.pdf
2. Wykład