

# Résistance Des Matériaux

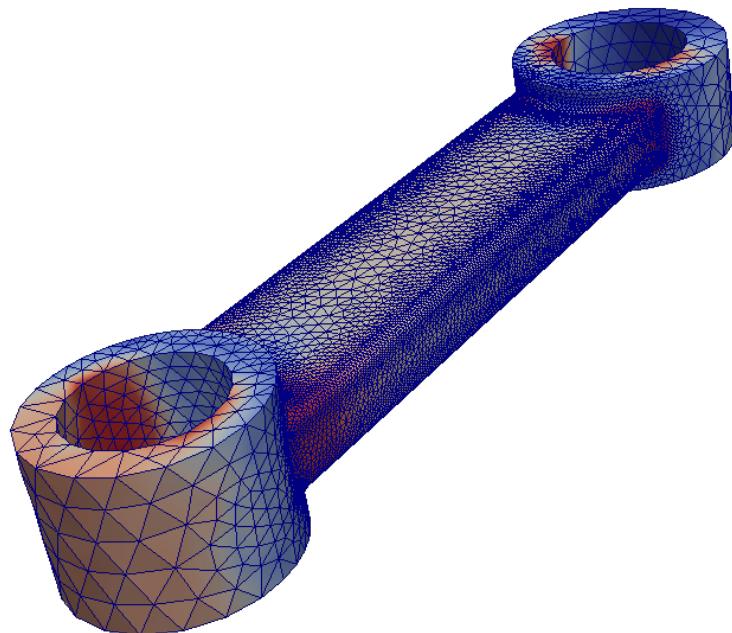
---

Module 425

## Table des matières

<b>1 Introduction</b>	<b>4</b>
1.1 La modélisation, une étape clé dans le calcul des structures . . . . .	6
1.2 Les enjeux du calcul des structures . . . . .	6
1.3 La première expérience de résistance des matériaux . . . . .	7
<b>2 Modélisation des actions et des liaisons mécaniques</b>	<b>9</b>
2.1 Actions mécaniques . . . . .	9
2.2 Liaisons mécaniques . . . . .	12
2.3 Représentations graphiques et torseur des actions transmissibles . . . . .	12
2.4 Des exemples de liaison en matériaux céramiques . . . . .	14
<b>3 Le principe fondamental de la statique</b>	<b>14</b>
3.1 Système matériel ( $S$ ) et notion d'équilibre . . . . .	14
3.2 Principe Fondamental de la Statique (PFS) . . . . .	14
3.3 Théorème d'action réciproque . . . . .	15
3.4 Méthode de résolution d'un problème de statique . . . . .	15
3.5 Exemple de résolution de problème simple : poutre en « L » . . . . .	16
<b>4 Les contraintes</b>	<b>18</b>
4.1 Vecteur contrainte . . . . .	18
4.2 Propriété de réciprocité . . . . .	19
4.3 Torseur des efforts de cohésion . . . . .	19
4.4 Contrainte normale et tangentielle . . . . .	19
4.5 Théorème de Cauchy : équilibre des vecteurs contraintes . . . . .	20
4.6 Contrainte sur une facette quelconque, expression matricielle des contraintes . . . . .	21
4.7 Élasticité plane . . . . .	22
4.8 Cercle de Mohr . . . . .	24
4.9 Critère de limite élastique et de résistance . . . . .	25
<b>5 Les déformations</b>	<b>27</b>
5.1 Allongement unitaire ou déformation de l'ingénieur . . . . .	27
5.2 Distorsion ou glissement . . . . .	27
5.3 Tenseur des déformations de Cauchy . . . . .	28
5.4 Signification physique des composantes du tenseur des déformations . . . . .	31
5.5 Propriétés du tenseur des déformations . . . . .	32
<b>6 Loi de comportement</b>	<b>32</b>
6.1 Considérations expérimentales . . . . .	32
6.2 État de traction uniaxiale et loi de Hook en traction . . . . .	33
6.3 Loi de Hook en cisaillement pur . . . . .	34
6.4 Relation entre $E$ , $\nu$ et $G$ . . . . .	34
6.5 Loi de Hook généralisée . . . . .	36
<b>7 Théorie des poutres</b>	<b>37</b>
7.1 Hypothèses de la théorie des poutres . . . . .	38
7.2 Torseur de cohésion . . . . .	38
7.3 Les différentes sollicitations simples . . . . .	39
7.4 Équilibre des tronçons de poutre . . . . .	40
7.5 Extension - Compression . . . . .	40
7.6 Flexion plane simple . . . . .	43

<b>8 Exercices</b>	<b>49</b>
8.1 Modélisation des liaisons et statique . . . . .	49
8.2 État de contrainte plan et cercle de Mohr . . . . .	54
8.3 Loi de comportement . . . . .	55
8.4 Théorie des poutres . . . . .	57
<b>9 Annexes</b>	<b>62</b>
9.1 Ergonomie et effort . . . . .	62
9.2 Formulaire de trigonométrie . . . . .	65
9.3 La droite des moindres carrés . . . . .	68
9.4 Caractéristiques géométriques des sections . . . . .	68



## 1 Introduction

La Résistance Des Matériaux (RDM) est une des branches de la mécanique qui permet l'étude des **contraintes** et des **déformations**. Les contraintes mécaniques peuvent être vues comme des « efforts de cohésion » de la matière et sont homogènes à une pression (généralement exprimée en mégapascal MPa). Les déformations d'un objet physique s'observent par un changement de forme de celui-ci et/ou de variation dans ses dimensions. Les déformations sont sans unités. Des définitions plus précises de ces deux notions fondamentales en RDM viendront plus tard dans ce manuscrit. L'utilisation de la théorie de la RDM est très utilisée par les ingénieurs matériaux afin de répondre à deux problématiques.

1. Caractériser les propriétés d'usage mécaniques d'un nouveau matériau. Quel est son comportement mécanique ? Quelles sont les valeurs associées à ce comportement ? Par exemple, quel est le comportement d'une mousse céramique en compression ? Ou bien, quelle est la valeur de la contrainte en rupture en compression d'une brique en terre cuite ?
2. Modéliser pour prédire et dimensionner des structures mécaniques. Par exemple :
  - quel est le poids maximal du pêcheur admissible par ce pont en dalle préhistorique (voir figure 1a) ?
  - quelle est la vitesse de vent maximale de face admissible que peut supporter ce panneau de signalisation autoroutier (voir figure 1b) ?
  - quelle doit être l'épaisseur de la plaque de carbure de silicium de ce gilet pare balle pour arrêter des projectiles (voir figure 1c) ?
  - quelle doit être la forme optimale de ce couteau en céramique pour éviter qu'il ne se brise (voir figure 1d) ?

Il est important de remarquer que pour pouvoir mener à bien ces calculs, une bonne connaissance des caractéristiques mécaniques du matériau est requise (cf étape précédente).



(a) Pêcheur traversant un pont préhistorique [12]



(b) Panneau de signalisation [18]



(c) Gilet pare balle militaire [10]



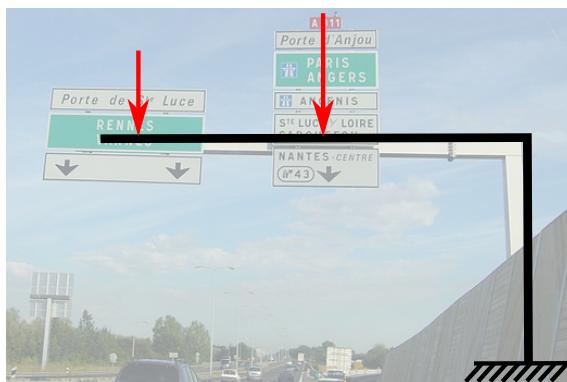
(d) Couteau céramique [16]

FIGURE 1 – Exemples de structures mécaniques

## 1.1 La modélisation, une étape clé dans le calcul des structures

Pour être en mesure de réaliser ces études, il est nécessaire de procéder à la **modélisation** du problème. L'étape de modélisation consiste à appliquer un certain nombre d'hypothèses simplificatrices à un problème réel de façon à pouvoir traduire mathématiquement ce problème.

Par exemple, le problème illustré sur la figure 1b donne lieu à la modélisation schématisée sur la figure ci-dessous. Dans cet exemple, il s'agit d'étudier la déformée de la structure en « L » supportant les panneaux de signalisation sous le poids de ces panneaux. Dans le modèle proposé, le poids des panneaux est modélisé par des efforts ponctuels, la structure par une poutre d'Euler-Bernouilli et la liaison au sol par une liaison encastrement. Même si ces notions vont être abordées plus en profondeur un peu plus loin dans ce manuscrit, il est aisément de se rendre compte ici que la modélisation est une représentation très simplifiée d'un problème réel.



Cette étape de modélisation est une étape clé dans la résolution d'un problème de structure. Elle met en exergue le sens d'observation, « le sens physique » et les connaissances théoriques de l'ingénieur. Le diagramme suivant montre la démarche générale de modélisation d'un problème.



Il est important de noter qu'un « bon » modèle est un modèle qui répond à une question précise. Par exemple, le modèle élaboré sur la figure ci-dessus peut répondre à la question : « quelle est la flèche maximale de la structure ? ». Par contre, si le problème soulevé est de dimensionner avec précision le pied de la structure (liaison mécanique entre le sol et la structure, voir figure ci-contre), il sera nécessaire de faire appel à des modélisations numériques qui permettent de prendre en compte la géométrie complexe de cette pièce d'assemblage.



## 1.2 Les enjeux du calcul des structures

Aujourd'hui, la recherche scientifique est très active dans le domaine de la modélisation numérique de la résistance des matériaux et du calcul des structures. L'enjeu est de proposer de nouvelles approches numériques permettant de résoudre des problèmes plus grands (au sens des degrés de liberté à résoudre) et plus riches (au sens des lois physiques introduites dans les modèles numériques). Par exemple, une entreprise comme *Airbus* est aujourd'hui capable de simuler entièrement la structure d'un avion (voir figure 2) par des approches dites *multiéchelles*.

Les objectifs sont alors multiples. Il s'agit d'optimiser les coûts en minimisant l'emploi d'essais mécaniques, de réduire les coefficients de sécurité qui s'avèrent être bien souvent des coefficients

d'ignorance, d'optimiser les formes et de minimiser la matière utilisée de façon à réduire l'impact écologique.

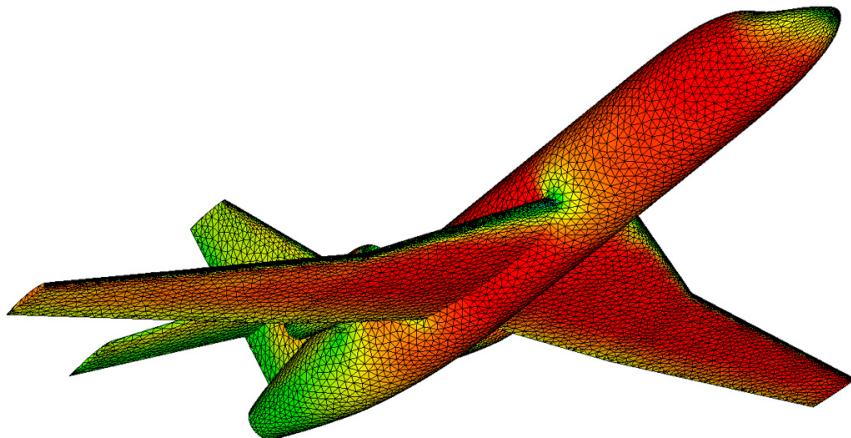


FIGURE 2 – Simulation mécanique de la structure d'un avion [11]

### 1.3 La première expérience de résistance des matériaux

La première expérience connue de résistance des matériaux est imputée à *Léonard de Vinci* (1452-1519) [19]. La figure 3 représente l'essai mécanique réalisé. Il s'agissait d'étudier la résistance de fils de cuivre soumis à un effort de traction d'intensité croissante. L'augmentation de l'effort résulte de l'écoulement de sable dans un panier auquel est noué le fil de cuivre. Lors de la rupture du fil, l'écoulement est stoppé et la masse de sable contenu dans le panier est ensuite pesée. Les expériences sont répétées plusieurs fois puis un fil de cuivre de diamètre deux fois inférieur est ensuite testé par le même procédé.

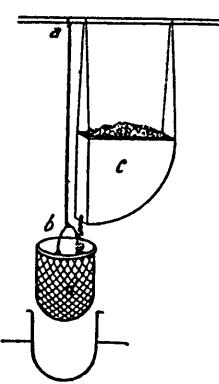
Bien que l'interprétation de cette expérience soit controversée [14], il semble que *Léonard de Vinci* fit la découverte suivante : *les rapports des masses de sable mesurés lors des ruptures sont proportionnels aux rapports des diamètres des fils élevés au carré*.

② Grâce à cette dernière observation, donner la valeur de la masse à rupture pour un fil de cuivre de 3 mm de rayon en supposant que la masse à rupture relevée pour un fil de 6 mm de rayon est de 1 kg.

Il est remarquable de noter que cette observation, datant de la fin du XV<sup>e</sup> siècle, est tout à fait



(a) Reproduction 3D du dispositif [7]



(b) Gravure originale [20]

FIGURE 3 – l'essai de traction mis en oeuvre par Léonard de Vinci

en accord et trouve sa justification à l'aide des théories modernes de la RDM détaillées plus loin dans ce document.

## Objectifs, compétence attendue et pré-requis de ce cours

**Objectif général** : sensibiliser les étudiants aux problématiques de calcul de structure et de tenue mécanique.

**Compétence attendue** : modéliser et résoudre à la main un problème de mécanique dans le cadre de la théorie des poutres ou de l'élasticité plane.

**Pré-requis** : calcul intégral et différentiel, calcul vectoriel et matriciel.

La démarche générale de résolution de ces problèmes requiert généralement les étapes suivantes :

1. modélisation des liaisons mécaniques et des actions mécaniques,
2. isolement du système étudié, bilan des efforts et application du principe fondamental de la statique,
3. prise en compte d'hypothèses cinématiques (théorie des poutres par exemple),
4. application de loi de comportement (relation *contrainte-déformation*),
5. mise en équation et résolution.

Les points 1 et 2 seront considérés comme des pré-requis de ce cours et seront abordés rapidement. En particulier, les notions de torseur des actions mécaniques, d'action transmissible et d'équilibre des forces seront rappelées. Ensuite, il sera abordé les notions de contrainte et de déformation ainsi que leurs représentations mathématiques associées. Les lois de comportement seront ensuite vues avec, en particulier, la loi de *Hook*. Enfin, il sera abordé la théorie des poutres en insistant plus particulièrement sur les sollicitations et les essais de traction, de compression et de flexion particulièrement utiles et utilisés pour les ingénieurs céramistes.

## Références

Ce polycopié est la synthèse de plusieurs ouvrages portant sur la résistance des matériaux :

- *Résistance des matériaux* de P. Agathi et al. [1],
- *Mécanique des systèmes et des milieux déformables* de L. Chevalier [5],
- *Mécanique des milieux continus : introduction à la plasticité des matériaux* de J. Douin [8],
- *Guide de mécanique : Sciences et technologies industrielles, Statique, Cinématique, Dynamique, Résistance des matériaux, Elasticité, Mécanique des fluides, Vibrations* de JL. Fanchon [9],
- Notes de cours de *Mécanique des matériaux solides* de G. Cailletaud de Mines ParisTech [3].

## 2 Modélisation des actions et des liaisons mécaniques

### 2.1 Actions mécaniques

On nomme une action mécanique toute cause susceptible de maintenir un corps au repos, de créer ou de modifier un mouvement ou bien encore de créer une déformation. Une action mécanique est donc un concept abstrait qui ne peut être mesuré dans la réalité qu'au travers de ces conséquences sur des objets physiques.

#### 2.1.1 Force

On appelle force, l'action mécanique qui s'exerce mutuellement entre deux particules ponctuelles. Une force est appliquée en un point et se modélise par l'ensemble d'un point et d'un vecteur. Par exemple, la notation  $(P, \vec{F})$  signifie que  $P$  est le point d'application de la force  $\vec{F}$ . La droite ( $\Delta$ ) passant par  $P$  et parallèle à  $\vec{F}$  est appelée la droite support de la force. La norme  $\|\vec{F}\|$  est l'intensité de la force et s'exprime en Newton (N).

 Une force aura tendance à mettre une particule en mouvement de translation.

#### 2.1.2 Moment

Le moment d'une force  $(P, \vec{F})$  s'exprime au point  $A$  par la relation :

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F} \quad (1)$$

L'unité du moment est le Newton-mètre (N.m). On remarque qu'il est possible d'appliquer la formule précédente en un autre point (ici le point  $B$ ) :

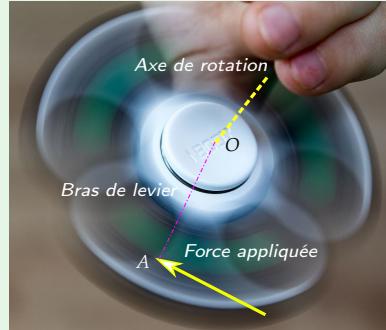
$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \overrightarrow{BP} \wedge \vec{F} \text{ avec } B \neq A \quad (2)$$

En combinant les deux équations précédentes, on obtient alors :

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} \quad (3)$$

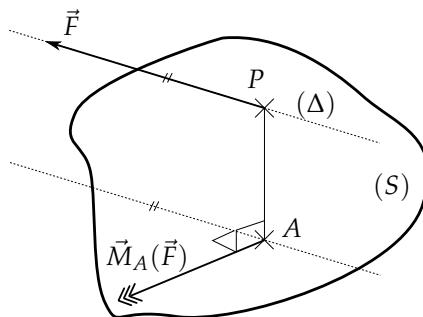
Cette dernière relation est plus connue sous le nom *de transport des moments* et sera d'une grande importance par la suite.

**■** Un moment aura tendance à mettre un solide en mouvement de rotation. Par exemple, une bonne manière de mettre le jouet fidget-spinner en rotation (cf figure ci-dessous) est d'appliquer une force de direction perpendiculaire à l'axe de rotation. De plus, il faut que le point d'application de la force soit le plus éloigné de cet axe. De cette façon, le moment résultant de cette force sur l'axe de rotation est maximal.



### 2.1.3 Champ vectoriel d'une action mécanique et torseur associé

Soit  $(P, \vec{F})$  une force appliquée au solide  $(S)$  au point  $P$  tel que le montre la figure ci-dessous. Par convention, dans ce polycopié, les forces seront schématisées par des flèches simples et les moments par des flèches triples.



L'action mécanique associée à  $(P, \vec{F})$  se définit en un point  $A$  par deux champs vectoriels :

1. un champ uniforme de résultante  $\vec{R} = \vec{F}$
2. un champ de moment défini en  $A$  par l'équation 1, soit  $\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}$

Aussi, grâce à la relation 3, il est possible de démontrer que ce champ est *équiprojectif*, c'est-à-dire que  $\vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{M}_B(\vec{F}) \cdot \overrightarrow{AB}$ . Il est alors possible d'écrire ce champ sous la forme d'un *torseur* qui exprime ces deux champs vectoriels (résultante et moment). Ce torseur se nomme *torseur d'action mécanique* et s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_S\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{F} \\ \vec{M}_B = \vec{M}_A(\vec{F}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} \end{array} \right\} \quad (4)$$

où  $\vec{R}$  est la résultante et  $\vec{M}_A$  est le moment exprimé au point  $A$  du torseur d'action mécanique.

#### 2.1.4 Modélisation d'un ensemble de force

Si un solide ( $S$ ) subit de la part d'un milieu extérieur ( $\bar{S}$ ) un ensemble de  $n$  forces ( $P_i, \vec{F}_i$ ) alors le torseur des actions mécaniques équivalent à cet ensemble de force est :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow S}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{\bar{S} \rightarrow S} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ \vec{M}_{A, \bar{S} \rightarrow S} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F}_i \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Si cet ensemble de force est un champ continu de force comme une pression ou un poids, alors la somme devient continue et prend la forme d'une intégrale :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow S}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{\bar{S} \rightarrow S} = \int \vec{f} d\omega \\ \vec{M}_{A, \bar{S} \rightarrow S} = \int_{\omega} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f} d\omega \end{Bmatrix} \quad (6)$$

où  $\vec{f}$  est la force infinitésimale appliquée au point  $P$  et  $\omega$  est le domaine sur lequel s'applique cette force.

#### 2.1.5 Expression analytique

Soit  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  une base orthonormée directe. Les résultantes et les moments peuvent alors s'exprimer en coordonnées cartésiennes dans ce repère de la façon suivante :

$$\vec{R}_{\bar{S} \rightarrow S} = X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z} \quad (7)$$

$$\vec{M}_{A, \bar{S} \rightarrow S} = L_A \vec{x} + M_A \vec{y} + N_A \vec{z} \quad (8)$$

ce qui donne en *écriture ligne* :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow S}\}_A = \begin{Bmatrix} X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z} \\ L_A \vec{x} + M_A \vec{y} + N_A \vec{z} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ou bien encore en *écriture colonne* :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow S}\}_A = \begin{Bmatrix} X & L_A \\ Y & M_A \\ Z & N_A \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (10)$$

### 2.1.6 Torseurs particuliers

$$\begin{aligned}\{\mathcal{T}\}_A &= \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}} && \text{torseur quelconque} \\ \{\mathcal{T}\}_A &= \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}} && \text{torseur couple, uniforme en tout point} \\ \{\mathcal{T}\}_A &= \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} && \text{glisseur, uniforme le long de la droite d'app. } (\Delta)\end{aligned}$$

### 2.1.7 Les différentes actions mécaniques

On appelle force extérieure appliquée à un système matériel ( $S$ ), toute force exercée par le milieu extérieur ( $\bar{S}$ ). On distingue plusieurs types de force.

**Les actions à distance.** La plus courante est l'action de la pesanteur. Celle-ci est généralement modélisée par une force dont l'intensité est  $m \times g$  appliquée au centre de gravité de ( $S$ ) et selon une « direction verticale ». Une modélisation plus fine des actions de pesanteur consiste à supposé un ensemble infini d'actions reparties dans le volume de ( $S$ ).

**Les actions de contact.** Lorsque deux solides sont en contact, une surface de contact va se créer. Toutefois, on modélise généralement les actions de contact par une force ponctuelle dont le point d'application est le centre de cette surface et dont la direction est perpendiculaire à celle-ci.

**Les actions réparties.** Ce sont des actions généralement exercées par un fluide sur une surface de ( $S$ ). Ces forces sont généralement modélisées par une pression répartie sur cette surface.

## 2.2 Liaisons mécaniques

Les liaisons mécaniques sont des dispositions constructives permettant à deux pièces des mouvements relatifs. Les liaisons mécaniques foisonnent dans notre quotidien, il suffit de regarder autour de soi pour énumérer des dizaines d'exemples de liaisons mécaniques.

Afin de simplifier les études, il sera supposé les liaisons mécaniques **comme parfaites**, c'est à dire sans jeu, sans frottement et à géométries parfaites (les déformations sont négligées). Ces hypothèses permettent de simplifier grandement les problèmes et peuvent s'appliquer lorsqu'on ne souhaite pas étudier finement la liaison en question (voir figure 4).

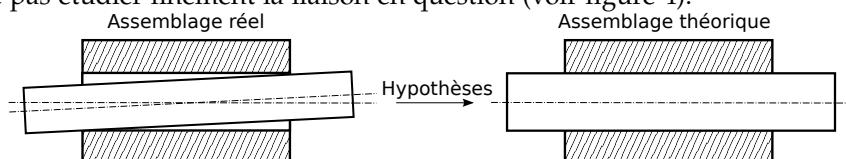


FIGURE 4 – Mise en application des hypothèses sur un assemblage alésage/cylindre

## 2.3 Représentations graphiques et torseur des actions transmissibles

La représentation graphique des liaisons est normalisée par la norme *NF EN ISO 3952-1*. Cette dernière norme est généralement utilisée dans la communauté de la *construction mécanique*. En *génie civil*, il existe une autre symbolisation. C'est généralement cette dernière qui est utilisée en

Nom	Symbolé génie méca	Symbolé génie civil	Degré de liberté	Torseur des AM	Avec hypothèse de symétrie ( $O, \vec{x}, \vec{y}$ )
Encastrement			$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$A \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$A \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Rotule de centre $A$		/	$\begin{bmatrix} 0 & R_x \\ 0 & R_y \\ 0 & R_z \end{bmatrix}$	$A \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$A \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Pivot d'axe ( $A, \vec{z}$ )			$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & R_z \end{bmatrix}$	$A \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$A \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Linéaire annulaire d'axe ( $A, \vec{x}$ )		/	$\begin{bmatrix} T_x & R_x \\ 0 & R_y \\ 0 & R_z \end{bmatrix}$	$A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Ponctuelle de normale ( $A, \vec{y}$ )			$\begin{bmatrix} T_x & R_x \\ 0 & R_y \\ T_z & R_z \end{bmatrix}$	$A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	$A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

TABLE 1 – Symbolisation de quelques liaisons mécaniques

résistance des matériaux. Le tableau 1 synthétise quelques liaisons mécaniques usuelles avec les deux symbolisations.

En plus de la symbolisation des liaisons, il apparaît également sur ce tableau, [les Degrés De Liberté \(DDL\) cinématiques associés pour chacune de ces liaisons](#). En effet, une liaison entre deux pièces [se caractérise par le nombre de mobilités que peut avoir l'une des pièces par rapport à l'autre](#). Ces mobilités (ou mouvements autorisés) sont appelées degrés de liberté. Si  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est le repère local associé à la liaison entre deux solides  $i$  et  $j$ , alors on peut définir :

1.  $T_x$  comme la liberté de mouvement de *translation* de direction  $\vec{x}$ ,
2.  $T_y$  comme la liberté de mouvement de *translation* de direction  $\vec{y}$ ,
3.  $T_z$  comme la liberté de mouvement de *translation* de direction  $\vec{z}$ ,
4.  $R_x$  comme la liberté de mouvement de *rotation* de direction  $\vec{x}$ ,
5.  $R_y$  comme la liberté de mouvement de *rotation* de direction  $\vec{y}$  et
6.  $R_z$  comme la liberté de mouvement de *rotation* de direction  $\vec{z}$ .

[À partir de l'analyse de ces mobilités, il est possible de définir un torseur des actions mécaniques transmissibles pour chacune des liaisons](#).

Une mobilité interdit la transmission d'une action mécanique et se traduit par un zéro dans le torseur des actions mécaniques transmissibles. [Les composantes  \$X, Y, Z, L, M, N\$  désignent alors les inconnues de liaison](#).

Il est possible de réduire de 6 à 3 ces inconnues de liaison, [si la liaison et le problème étudiés présentent un plan de symétrie](#). Dans ce cas, les résultantes sont alors parallèles au plan de symétrie et les moments résultants perpendiculaires à ce plan de symétrie. Par exemple, si le plan de symétrie est  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  alors les composantes  $Z, L$  et  $M$  sont nulles.

## 2.4 Des exemples de liaison en matériaux céramiques

Les matériaux céramiques, grâce à leurs très hautes duretés, permettent de réaliser des liaisons mécaniques à hautes performances en minimisant les frottements et l'usure.

Par exemple, les éléments roulants des roulements à billes visibles sur la figure 5b sont réalisés en nitrure de silicium. Ces roulements à billes permettent de réaliser alors des liaisons pivots entre un *arbre* (cylindre) et un *alésage* (trou cylindrique) pouvant fonctionner à haute température et haute vitesse.

Un autre exemple est la tête de la prothèse de hanche, visible sur la figure 5a, qui permet de réaliser une liaison rotule entre le bassin du patient et la prothèse dans un matériau biocompatible et de haute dureté. Cette grande dureté permet une faible usure de la rotule. Cela permet de limiter la présence de débris dans le corps qui peuvent occasionner des pathologies graves chez le patient.



(a) Prothèse de hanche avec rotule céramique en alumine  $\text{Al}_2\text{O}_3$  [15]



(b) Pièce de roulement à bille en nitrure de silicium  $\text{Si}_3\text{N}_4$  [17]

FIGURE 5 – Exemples de liaisons mécaniques réalisées en céramique

## 3 Le principe fondamental de la statique

### 3.1 Système matériel ( $S$ ) et notion d'équilibre

Un système matériel, généralement noté ( $S$ ), désigne une certaine quantité de matière solide, gazeuse ou bien liquide. Un système matériel peut également désigner un ensemble de solide lié ou non ou bien une partie de ce(s) solide(s). Pour définir correctement un système matériel, il est nécessaire de définir ses limites. On parle alors de *frontière d'isolement*, généralement noté ( $\Omega$ ). Un système matériel est dit à l'équilibre, si il est immobile ou au repos par rapport à un repère galiléen  $\mathcal{R}$ . Les coordonnées de chaque point de ( $S$ ) sont alors constantes dans  $\mathcal{R}$ .

**■** Un référentiel galiléen se définit comme un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié, c'est-à-dire que tout corps libre est en mouvement de translation rectiligne uniforme ou au repos.

### 3.2 Principe Fondamental de la Statique (PFS)

**■** On nomme principe physique, une loi physique apparente qu'aucune expérience n'a invalidée jusque-là bien qu'elle n'ait pas été démontrée.

Il existe un repère galiléen  $\mathcal{R}$ , tel que pour tous systèmes matériels ( $S$ ) en équilibre par rapport à ce repère, les actions mécaniques appliquées à ( $S$ ) vérifient :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow S}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{\bar{S} \rightarrow S} \\ \vec{M}_{A, \bar{S} \rightarrow S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Le PFS se traduit alors par deux théorèmes : le théorème de la résultante statique et le théorème du moment statique.

**Le théorème de la résultante statique** implique que la somme des  $n$  résultantes des actions mécaniques  $\vec{F}_i$  appliquées à un système matériel ( $S$ ) en équilibre est nulle :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad (12)$$

**le théorème du moment statique** implique que la somme des  $n$  moments  $\vec{M}_{A_i}$  appliqués à un système matériel ( $S$ ) en équilibre et réduits en un point  $A$  quelconque est nulle :

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{A_i} = \vec{0} \quad (13)$$

### 3.3 Théorème d'action réciproque

Le théorème d'action réciproque aussi appelé *principe d'action / réaction* s'énonce simplement par :

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2}\}_M = -\{\mathcal{T}_{S_2 \rightarrow S_1}\}_M \quad (14)$$

### 3.4 Méthode de résolution d'un problème de statique

Généralement, dans un problème de statique les actions extérieures appliquées à un système matériel sont connues tandis que les efforts de liaison sont inconnus. Il s'agit alors de déterminer ces inconnues de liaison. Pour ce faire, les étapes suivantes sont généralement requises :

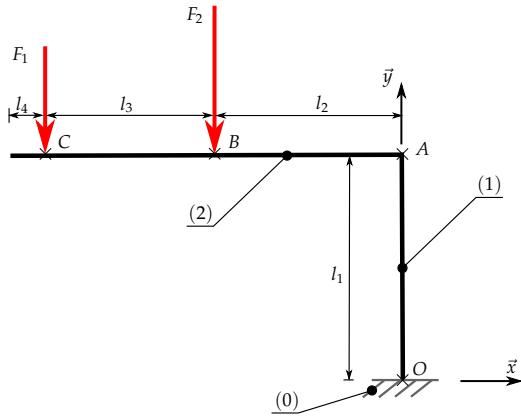
1. modéliser les actions mécaniques extérieures appliquées au système ( $S$ ).
2. modéliser les liaisons mécaniques entre l'extérieur ( $\bar{S}$ ) et le système ( $S$ ).
3. exprimer le torseur des actions mécaniques transmissibles pour chacune des liaisons.
4. exprimer les efforts extérieurs appliqués par ( $\bar{S}$ ) sur le système ( $S$ ).
5. formuler des hypothèses simplificatrices telles que les plans de symétrie, etc...
6. isoler le système ( $S$ ) et faire le bilan des actions mécaniques extérieures.
7. appliquer le théorème de la résultante et du moment statique.
8. résoudre le système d'équations.

Si le système matériel ( $S$ ) est composé de plusieurs solides, il est possible de répéter ces étapes pour chacun des solides composant ( $S$ ).

💡 Résoudre efficacement un problème de statique, c'est à dire en minimisant le nombre de calculs intermédiaires à réaliser, est généralement affaire d'expérience. Par exemple, le choix du point de réduction pour écrire le théorème du moment statique est déterminant pour minimiser le nombre de calculs.

### 3.5 Exemple de résolution de problème simple : poutre en « L »

Il s'agit ici d'étudier l'influence du poids de panneau de signalisation (cf figure 1b) sur la structure de soutien dite en « L ». La modélisation associée à ce problème est décrite sur la figure ci-dessous.



L'objectif est de calculer les inconnues de liaisons entre la poutre en « L », composée des systèmes matériels  $(1 \cup 2)$ , et le sol  $(0)$ .

#### Étape 1/5 : expression du torseur des actions transmissibles des liaisons

Si on suppose le système matériel  $(S) = (1 \cup 2)$ , alors la liaison mécanique avec  $(\bar{S})$  est une liaison encastrement avec le sol  $(0)$  au point  $O$ . Il a été vu dans le tableau 1 que le torseur des actions mécaniques transmissibles d'une liaison encastrement est :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\}_O = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{cc} X_O & L_O \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{array} \right\}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} = X_O \vec{x} + Y_O \vec{y} + Z_O \vec{z} \\ \vec{M}_{O,0 \rightarrow 1} = L_O \vec{x} + M_O \vec{y} + N_O \vec{z} \end{array} \right\}}$$

#### Étape 2/5 : expression des efforts extérieurs

Si on suppose le système matériel  $(S) = (1 \cup 2)$ , alors les efforts extérieurs sont ceux exercés par le poids des panneaux notés  $(p_1)$  et  $(p_2)$  sur la structure  $(2)$  aux points  $B$  et  $C$ . Ces actions mécaniques peuvent être modélisées par des forces verticales (axe  $\vec{y}$ ) exercées aux points  $B$  et  $C$  :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{p_1 \rightarrow 2}\}_C &= \underset{C}{\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{p_1 \rightarrow 2} = F_1 \vec{y} \\ \vec{M}_{C,p_1 \rightarrow 2} = \vec{0} \end{array} \right\}} \\ \{\mathcal{T}_{p_2 \rightarrow 2}\}_B &= \underset{B}{\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ F_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{p_2 \rightarrow 2} = F_2 \vec{y} \\ \vec{M}_{B,p_2 \rightarrow 2} = \vec{0} \end{array} \right\}} \end{aligned}$$

#### Étape 3/5 : prise en compte de l'hypothèse simplificatrice de symétrie

Il sera supposé dans ce problème un plan de symétrie selon le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ . Par conséquent :

- les résultantes sont parallèles au plan de symétrie ( $O, \vec{x}, \vec{y}$ ). Les composantes des résultantes selon  $\vec{z}$  sont donc nulles.
- les moments seront perpendiculaires au plan de symétrie ( $O, \vec{x}, \vec{y}$ ). Les composantes des moments selon  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont donc nulles.

Le torseur des actions mécaniques transmissibles de  $0 \rightarrow 1$  peut donc s'écrire :

$$\{T_{0 \rightarrow 1}\}_O = \begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ Y_O & 0 \\ 0 & N_O \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} = X_O \vec{x} + Y_O \vec{y} \\ \vec{M}_{O, 0 \rightarrow 1} = N_O \vec{z} \end{Bmatrix}$$

#### Étape 4/5 : application du théorème de la résultante statique

Le théorème de la résultante statique appliqué au système matériel ( $S = (1 \cup 2)$ ) peut être exprimé par :

$$\vec{R}_{0 \rightarrow 1} + \vec{R}_{p_1 \rightarrow 2} + \vec{R}_{p_2 \rightarrow 2} = \vec{0}$$

Ce qui donne :

$$(X_O) \vec{x} + (Y_O + F_1 + F_2) \vec{y} = \vec{0}$$

On peut donc en déduire les efforts de liaison  $X_O$  et  $Y_O$ , soit :

$$X_O = 0 \text{ et } Y_O = -F_1 - F_2$$

#### Étape 5/5 : application du théorème du moment statique

Le théorème du moment statique exprimé au point  $O$  et appliqué au système matériel ( $S = (1 \cup 2)$ ) peut être exprimé par :

$$\vec{M}_{O, 0 \rightarrow 1} + \vec{M}_{O, p_1 \rightarrow 2} + \vec{M}_{O, p_2 \rightarrow 2} = \vec{0}$$

D'après la formule de transport des moments (cf équation 3) :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O, p_1 \rightarrow 2} &= \vec{M}_{C, p_1 \rightarrow 2} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{R}_{p_1 \rightarrow 2} \\ &= \vec{0} + [l_1 \vec{y} - (l_2 + l_3) \vec{x}] \wedge F_1 \vec{y} \\ &= -(l_2 + l_3) F_1 \vec{z} \\ \vec{M}_{O, p_2 \rightarrow 2} &= \vec{M}_{B, p_2 \rightarrow 2} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{R}_{p_2 \rightarrow 2} \\ &= \vec{0} + [l_1 \vec{y} - l_2 \vec{x}] \wedge F_2 \vec{y} \\ &= -l_2 F_2 \vec{z} \end{aligned} \tag{15}$$

Ce qui donne :

$$[N_O - (l_2 + l_3) F_1 - l_2 F_2] \vec{z} = \vec{0}$$

On peut donc en déduire les efforts de liaison  $N_O$ , soit :

$$N_O = (l_2 + l_3) F_1 + l_2 F_2$$

## Conclusion

Connaissant les masses des panneaux  $p_1$  et  $p_2$  et donc les valeurs des forces  $F_1$  et  $F_2$  ainsi que les longueurs  $l_2$  et  $l_3$ , il est donc possible d'en déduire les inconnues des efforts de liaison de la liaison encastrement de  $0 \rightarrow 1$ , soit :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F_1 - F_2 & 0 \\ 0 & (l_2 + l_3)F_1 + l_2F_2 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (16)$$

## 4 Les contraintes

D'un point de vue physique, les contraintes peuvent être vues comme des efforts internes infinitésimaux. Ce sont des efforts de cohésion qui vont s'opposer aux déformations du solide pour garder la cohésion et l'intégrité du solide. Il est possible de déterminer ces efforts de cohésion en réalisant une coupe fictive du solide étudié telle que le montre la figure 6.

### 4.1 Vecteur contrainte

Soit un solide ( $E$ ) soumis à un ensemble d'actions mécaniques extérieures  $\vec{f}_i$  en équilibre (cf figure 6-a) et dont on souhaite étudier les efforts de cohésion en un point  $M$ . Il est possible de couper virtuellement ce solide en deux parties ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ) par un plan noté  $P$ .

Comme ( $E$ ) est à l'équilibre alors ( $E_1$ ) (cf figure 6-b) est également à l'équilibre. Pour garantir cet équilibre vrai, il faut alors prendre en compte les actions mécaniques de ( $E_2$ ) sur ( $E_1$ ), notées  $\vec{f}_{c_i}$  réparties dans la section droite  $S$ . Ce sont alors les *efforts de cohésion*.

Si  $\Delta S$  est une petite surface appartenant à  $S$  autour du point  $M$  dont la normale extérieure est  $\vec{n}$ , alors l'effort de cohésion agissant sur le petit élément de surface  $\Delta S$  est  $\Delta \vec{F}$  (cf figure 6-c). Le vecteur contrainte  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n})$  est alors défini par :

$$\vec{\Sigma}(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \frac{d \vec{F}}{dS} \quad (17)$$

La dimension d'une contrainte est donc homogène à une pression et est exprimée en Pa ou plus généralement en MPa.

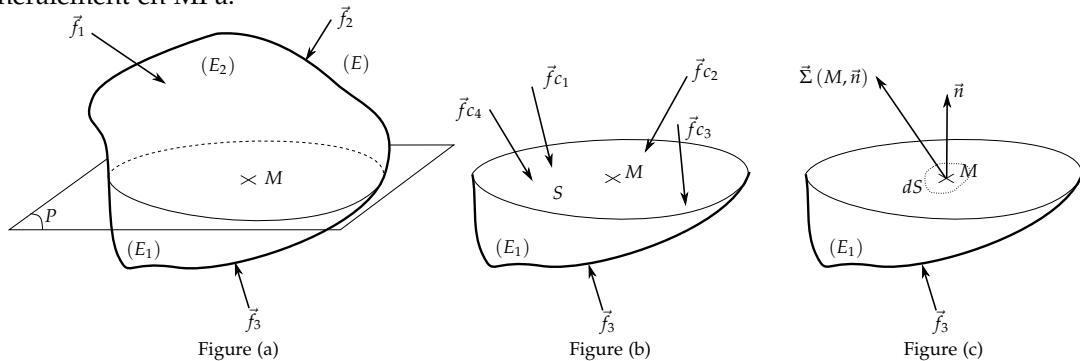


FIGURE 6 – (a) Coupure fictive, (b) détermination des efforts de cohésion et (c) du vecteur contrainte

## 4.2 Propriété de réciprocité

Le théorème de réciprocité de Cauchy s'énonce de la manière suivante :

$$\vec{\Sigma}(M, \vec{n}) = -\vec{\Sigma}(M, -\vec{n}) \quad (18)$$

Ce théorème découle du théorème des actions réciproques de la statique aussi appelé troisième loi de Newton et peut facilement être démontré grâce au principe fondamental de la statique.

**■ Augustin Louis, baron Cauchy (1789-1857) est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique**

**■ Isaac Newton (1643-1727) est un philosophe, mathématicien et physicien britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique.**

## 4.3 Torseur des efforts de cohésion

Il est possible de déterminer le torseur des efforts de cohésion par intégration du vecteur contrainte sur toute la surface  $S$  au centre de surface  $G$  :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \iint_S \vec{\Sigma}(M, \vec{n}) dS \\ \iint_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\Sigma}(M, \vec{n}) dS \end{array} \right\} \quad (19)$$

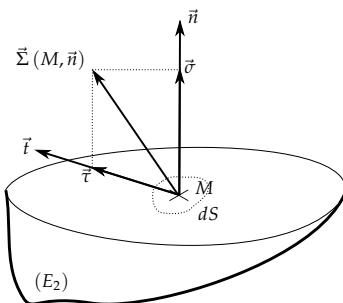
## 4.4 Contrainte normale et tangentielle

On distingue généralement la contrainte normale  $\vec{\sigma}$  de la contrainte tangentielle  $\vec{\tau}$  (voir figure ci-dessous) :

- $\vec{\sigma}$  correspond à la projection de  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n})$  suivant  $\vec{n}$  et
- $\vec{\tau}$  correspond à la projection de  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n})$  dans le plan de la facette  $\vec{n}$ .

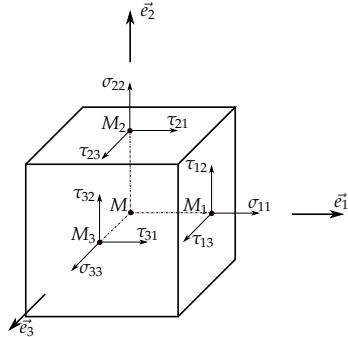
La contrainte tangentielle  $\vec{\tau}$  est aussi appelée *contrainte de cisaillement* à cause de son effet de cisaillement de la matière. Si on suppose  $\vec{t}$  le vecteur unitaire qui porte  $\vec{\tau}$ , on peut écrire le vecteur contrainte comme :

$$\vec{\Sigma}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} \quad (20)$$



## 4.5 Théorème de Cauchy : équilibre des vecteurs contraintes

Supposons un cube infinitésimal de matière de longueur  $dl$  tel que le montre la figure ci-dessous.



Les forces appliquées sur les facettes de normales  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  sont :

$$\vec{F}_1 = \vec{\Sigma}(M_1, \vec{e}_1) dl^2 = (\sigma_{11} \vec{e}_1 + \tau_{12} \vec{e}_2 + \tau_{13} \vec{e}_3) dl^2 \text{ sur la facette de normale } \vec{e}_1$$

$$\vec{F}_2 = \vec{\Sigma}(M_2, \vec{e}_2) dl^2 = (\tau_{21} \vec{e}_1 + \sigma_{22} \vec{e}_2 + \tau_{23} \vec{e}_3) dl^2 \text{ sur la facette de normale } \vec{e}_2$$

$$\vec{F}_3 = \vec{\Sigma}(M_3, \vec{e}_3) dl^2 = (\tau_{31} \vec{e}_1 + \tau_{32} \vec{e}_2 + \sigma_{33} \vec{e}_3) dl^2 \text{ sur la facette de normale } \vec{e}_3$$

De même, les forces appliquées sur les facettes  $-\vec{e}_1$ ,  $-\vec{e}_2$  et  $-\vec{e}_3$  sont :

$$\vec{F}_{-1} = \vec{\Sigma}(M_1, -\vec{e}_1) dl^2 = -(\sigma_{-1-1} \vec{e}_1 + \tau_{-1-2} \vec{e}_2 + \tau_{-1-3} \vec{e}_3) dl^2 \text{ sur la facette de normale } -\vec{e}_1$$

$$\vec{F}_{-2} = \vec{\Sigma}(M_2, -\vec{e}_2) dl^2 = -(\tau_{-2-1} \vec{e}_1 + \sigma_{-2-2} \vec{e}_2 + \tau_{-2-3} \vec{e}_3) dl^2 \text{ sur la facette de normale } -\vec{e}_2$$

$$\vec{F}_{-3} = \vec{\Sigma}(M_3, -\vec{e}_3) dl^2 = -(\tau_{-3-1} \vec{e}_1 + \tau_{-3-2} \vec{e}_2 + \sigma_{-3-3} \vec{e}_3) dl^2 \text{ sur la facette de normale } -\vec{e}_3$$

**■ Dans la notation  $\sigma_{ij}$  et  $\tau_{ij}$ ,  $i$  et  $j$  désignent respectivement :**

- $i$  désigne l'indice du vecteur normal de la facette considérée et
- $j$  désigne l'indice de l'axe à considérer pour projeter le vecteur contrainte.

Par exemple,  $\tau_{12}$  est la composante du vecteur contrainte sur une facette de normale  $\vec{e}_1$  et projetée sur  $\vec{e}_2$ .

On remarque que pour les contraintes normales  $i = j$  et que pour les contraintes tangentielles  $i \neq j$ .

Le volume étant supposé infinitésimal et la matière étant supposée continue, il est possible d'écrire que :

$$\vec{\Sigma}(M_i, \vec{e}_i) = \vec{\Sigma}(M, \vec{e}_i) \quad (21)$$

De plus, à partir du théorème de réciprocité de Cauchy (voir équation 18), il est possible d'écrire que :

$$\vec{\Sigma}(M, -\vec{e}_i) = -\vec{\Sigma}(M, \vec{e}_i) \quad (22)$$

En supposant le cube à l'équilibre puis en appliquant le théorème de la résultante statique et grâce aux égalités 21 et 22, il est possible de démontrer que :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{-i-j} \quad \text{et} \quad \tau_{ij} = \tau_{-i-j} \quad (23)$$

En appliquant le théorème du moment statique au centre du cube  $M$ , on peut démontrer également :

ment que :

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (24)$$

Cette dernière relation exprime la **réciprocité des contraintes tangentielles**. Cette réciprocité est d'une grande importance dans la construction de la théorie de la résistance des matériaux.

## 4.6 Contrainte sur une facette quelconque, expression matricielle des contraintes

En supposant un repère orthonormé  $\mathcal{R}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et une facette de normale  $\vec{n}(a, b, c)$  quelconque, il est possible de démontrer en réalisant l'équilibre statique d'un tétraèdre que le vecteur contrainte en  $M$  de la facette  $\vec{n}$  est :

$$\vec{\Sigma}(M, \vec{n}) = a\vec{\Sigma}(M, \vec{x}) + b\vec{\Sigma}(M, \vec{y}) + c\vec{\Sigma}(M, \vec{z}) \quad (25)$$

En projetant sur  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ , on peut écrire cette dernière relation sous la forme :

$$\begin{aligned}\Sigma_{nx} &= a\sigma_{xx} + b\tau_{yx} + c\tau_{zx} \\ \Sigma_{ny} &= a\tau_{xy} + b\sigma_{yy} + c\tau_{zy} \\ \Sigma_{nz} &= a\tau_{xz} + b\tau_{yz} + c\sigma_{zz}\end{aligned}$$

Avec :

$$\vec{\Sigma}(M, \vec{n}) = \Sigma_{nx} \vec{x} + \Sigma_{ny} \vec{y} + \Sigma_{nz} \vec{z} \quad (26)$$

Il est alors possible d'écrire cette relation sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{nx} \\ \Sigma_{ny} \\ \Sigma_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (27)$$

Sous forme condensée, cela donne :

$$\vec{\Sigma}(M, \vec{n}) = \bar{\bar{\Sigma}}(M) \bullet \vec{n} \quad (28)$$

La réciprocité des contraintes tangentielles permet d'écrire :

$$\bar{\bar{\Sigma}}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Où  $\bar{\bar{\Sigma}}(M)$  est le *tenseur des contraintes* exprimé au point  $M$  et  $[\sigma_{xx} \dots]$  est la matrice associée au tenseur des contraintes. Aussi, il est important de noter que :

1. si les composantes  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  du tenseur des contraintes sont connues au point  $M$ , il est possible de déterminer le vecteur contrainte  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n})$  pour n'importe quelle facette de normale  $\vec{n}$ .
2. la matrice associée au tenseur des contraintes est symétrique. Elle peut donc être **diagonalisée** si elle est exprimée dans son **repère principal**. Si on note ce repère  $\mathcal{R}_1(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ , alors

la matrice devient :

$$\bar{\Sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Dans le repère principal, les contraintes de cisaillement sont nulles. La matière est donc uniquement sollicitée en traction-compression suivant les 3 directions principales. Cette sollicitation est appelée traction/compression tri-axiales.

**■** On dit que  $\vec{N}$  est une direction principale si  $\tau_{Ni} = 0$ . Dans ce cas,  $\sigma_{NN}$  est dite contrainte principale. Par convention, on note en majuscule une direction principale.

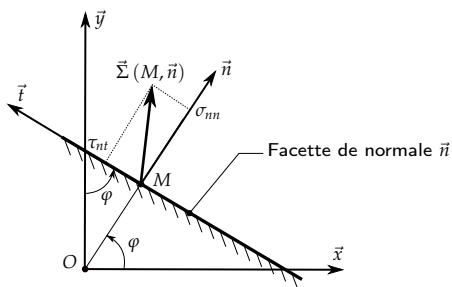
## 4.7 Élasticité plane

L'élasticité plane concerne les corps dont la géométrie et les déformations peuvent être décrites de façon bi-dimensionnelle dans un plan de symétrie. Cela concerne par exemple le cas des *plaques*. Si ce plan de symétrie est  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  alors la matrice des contraintes en élasticité plane s'écrit alors :

$$\bar{\Sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (31)$$

En élasticité plane, on remarque que  $\vec{z} = \vec{Z}$  est une direction principale et donc que  $\sigma_{zz} = \sigma_{ZZ}$  est une contrainte principale. À partir de la relation 28, il est possible de déterminer le vecteur contrainte  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n})$  en un point  $M$  pour une facette de normale  $\vec{n}(\cos \varphi, \sin \varphi)$  parallèle au plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  (voir figure ci-dessous). Ainsi :

$$\vec{\Sigma}(M, \vec{n}) = \begin{cases} \sigma_{nn} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{nt} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{cases} \quad (32)$$



Si la contrainte de cisaillement  $\tau_{nt}$  sur la facette de normale  $\vec{n}$  est nulle, alors  $\sigma_{nn}$  est une contrainte principale. Or, d'après la relation 32, on démontre que pour  $\tau_{nt} = 0$  l'angle  $\varphi$  est :

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (33)$$

Où  $\varphi_1$  est l'angle  $(\vec{x}, \vec{X})$  de la première direction principale  $\vec{X}$  avec  $\vec{x}$ . L'angle de la deuxième direction principale  $\vec{Y}$  est perpendiculaire à  $\vec{X}$  et l'angle  $\varphi_2$  avec  $\vec{x}$  est simplement donnée par  $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ .

Ainsi, les directions principales  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$  et  $\vec{Z}$  en élasticité plane sont :

$$\begin{cases} \vec{X} = \cos(\varphi_1) \vec{x} + \sin(\varphi_1) \vec{y} \\ \vec{Y} = \cos(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) \vec{x} + \sin(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) \vec{y} \\ \vec{Z} = \vec{z} \end{cases} \quad (34)$$

À partir des équations 33 et 32, il est alors possible de déterminer la valeur des contraintes principales, soit :

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_{XX} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \sigma_{YY} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \sigma_{ZZ} = \sigma_{zz} \end{cases}} \quad (35)$$

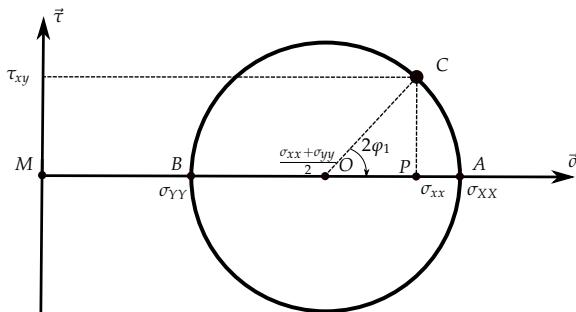
## 4.8 Cercle de Mohr

Le cercle de Mohr est une construction graphique très utilisée en résistance des matériaux. Ce graphe permet de représenter un état de contrainte dans le plan de Mohr ( $M, \vec{\sigma}, \vec{\tau}$ ) selon n'importe quelle direction spatiale. Dans le cas de contraintes planes où  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ , qui est un cas particulier de l'élasticité plane, l'état de contrainte en un point  $M$  exprimé dans une base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est :

$$\bar{\Sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

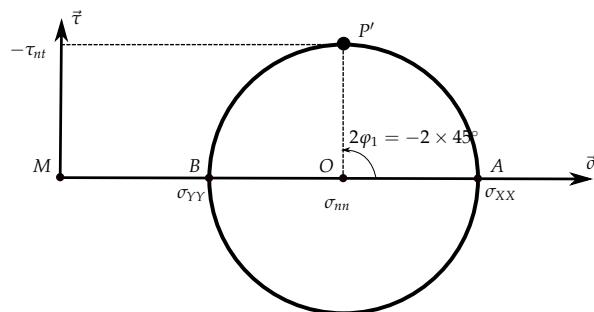
Comme tout cercle, il est possible de tracer le cercle de Mohr en connaissant les coordonnées de son centre  $O$  et d'un point  $C$  appartenant au cercle. Les coordonnées du centre du cercle de Mohr  $O$  et d'un point  $C$  sont alors données par :

$$\overrightarrow{MO} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \vec{\sigma} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MC} = \sigma_{xx} \vec{\sigma} - \tau_{xy} \vec{\tau} \quad (37)$$



Cette construction graphique donne de nombreuses informations utiles :

1. les contraintes principales  $\sigma_{XX}$  et  $\sigma_{YY}$  sont données par l'intersection du cercle avec l'axe des abscisses ( $M, \vec{\sigma}$ ).
2. la direction principale  $\vec{X}$  est obtenue par la mesure de l'angle  $\varphi_1(\vec{x}, \vec{X})$ , qui est donné graphiquement par  $2\varphi_1 = (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OC})$ .
3. le vecteur contrainte  $\bar{\Sigma}(M, \vec{n})$  pour n'importe quelle direction  $\vec{n}$  peut être déterminé graphiquement. Par exemple, si l'on souhaite connaître le vecteur contrainte pour une facette orientée de  $45^\circ$  par rapport à l'axe principal  $\vec{X}$ , il suffit de tracer la figure suivante :



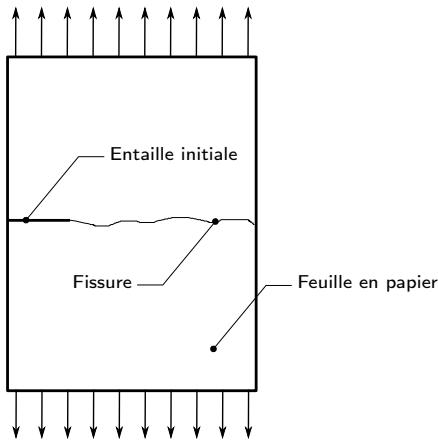


FIGURE 7 – Essai de traction sur feuille A4 entaillée

**■** Grâce au cercle de Mohr, on remarque que les contraintes normales ne peuvent pas être supérieures à la contrainte principale  $\sigma_{XX}$ . La direction principale  $\vec{X}$  correspond donc à une facette où la contrainte normale  $\sigma$  est maximale. De plus, la direction  $\vec{n}$  orientée de  $45^\circ$  par rapport à l'axe principal  $\vec{X}$  correspond à une facette où la contrainte de cisaillement est maximale :  $\tau_{nt} = \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2}$ . Ces deux dernières remarques sont importantes pour comprendre les critères de résistance de la section suivante.

Pour un état de contrainte quelconque (élasticité non plane), on utilise les tri-cercles de Mohr qui ne seront pas abordés ici.

## 4.9 Critère de limite élastique et de résistance

Toute pièce mécanique doit être dimensionnée de façon à pouvoir résister aux sollicitations mécaniques externes et/ou internes qu'elle subit. Les contraintes, qui caractérisent les efforts de cohésion dans la matière, sont donc limitées par les caractéristiques mécaniques du matériau utilisé. Pour estimer les contraintes maximales admissibles et dimensionner une pièce, il est nécessaire de définir un critère de résistance limite.

### Critère de Rankine

Les matériaux céramiques sont des matériaux fragiles, c'est-à-dire qu'ils rompent brutalement après avoir stocké une certaine quantité d'énergie élastique. La mécanique de la rupture fragile (qui ne sera pas abordée ici) nous apprend que la rupture s'initie et se propage perpendiculairement à la contrainte maximale de traction [13], c'est à dire suivant la direction principale  $\vec{X}$ . Ce comportement peut être facilement vérifié en réalisant un essai de traction sur une simple feuille de papier pré-entailles (voir figure 7).

La contrainte limite à rupture  $\sigma_f$  de traction est une caractéristique intrinsèque du matériau qui peut être déduite grâce à des essais de traction ou de flexion. Pour certaines applications, comme les pièces de maçonnerie par exemple, on s'intéresse aussi à la contrainte limite à rupture en compression  $\sigma'_f$ . Généralement  $\sigma'_f$  est très supérieure à  $\sigma_f$ .

Si le matériau est dans un état de contrainte quelconque, les contraintes maximales en traction sont déduites à partir des contraintes principales  $\sigma_{XX}$ ,  $\sigma_{YY}$  et  $\sigma_{ZZ}$ . Le critère de résistance en

traction est alors :

$$\max(|\sigma_{XX}|, |\sigma_{YY}|, |\sigma_{ZZ}|) = \sigma_I \quad \text{et} \quad \sigma_I < \sigma_f \quad \text{si} \quad \sigma_I > 0 \quad (38)$$

$$\max(|\sigma_{XX}|, |\sigma_{YY}|, |\sigma_{ZZ}|) = \sigma_I \quad \text{et} \quad \sigma_I < \sigma'_f \quad \text{si} \quad \sigma_I < 0 \quad (39)$$

Ce dernier critère est appelé *critère de Rankine*.

**■** Une contrainte normale positive correspond à une sollicitation de traction alors qu'une contrainte normale négative correspond à une sollicitation de compression.

### Critère de Von Mises

Le critère de *Von Mises* est un critère qui s'applique généralement aux métaux et qui décrit un seuil de *plasticité*. La plasticité est un comportement mécanique caractérisé par des déformations irréversibles que l'on souhaite généralement éviter. On considère que le matériau « sort » du domaine élastique lorsque la contrainte de cisaillement atteint une valeur limite définie par :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{XX} - \sigma_{YY})^2 + (\sigma_{YY} - \sigma_{ZZ})^2 + (\sigma_{ZZ} - \sigma_{XX})^2} < \sigma_e \quad (40)$$

où  $\sigma_e$  est la limite élastique du matériau métallique généralement déduite grâce à des essais de traction.

**■** Il existe encore bien d'autres critères qui ne peuvent pas être abordés dans le cadre de ce cours. Parmi tous ces critères, le plus important pour l'ingénieur céramiste est le critère de Rankine relatif à la rupture des matériaux fragiles. Les céramiques étant majoritairement fragiles le critère de Rankine peut donc être appliqué à une large gamme de matériaux céramiques.

### Coefficient de sécurité

En fonction du degré de fiabilité souhaité, le concepteur applique généralement un coefficient de sécurité  $s$ . La contrainte pratique admissible  $\sigma_{\text{adm}}$  est alors la valeur calculée  $\sigma_{\text{lim}}$  à partir des critères précédents puis pondérée par le coefficient de sécurité, soit :

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{s} \quad (41)$$

## 5 Les déformations

Un mouvement de corps rigide ne provoque aucune déformation. Il ne faut donc pas confondre déformation et déplacement! La déformation d'un corps se traduit par un changement dans ses dimensions (longueurs) et de ses formes. Une déformation est dite homogène si les variations de longueurs sont proportionnelles dans l'ensemble du corps. C'est en quelque sorte alors une homothétie appliquée sur un ou plusieurs axes. Un exemple de déformation homogène est la dilatation thermique.

Une déformation non-homogène, telle que le montre la figure 8 est caractérisée par des variations de longueurs qui ne sont pas proportionnelles. Si l'on imagine un quadrillage (cf figure 8) dessiné sur (et dans) au solide au repos, alors les lignes initialement droites deviennent courbes et des droites initialement parallèles ne le sont plus.

Si l'on associe au solide au repos 3 points  $M$ ,  $N$  et  $P$  qui deviennent  $M'$ ,  $N'$  et  $P'$  dans la configuration déformée, on remarque qu'une déformation s'accompagne de **variations de longueur** et de **variations d'angle**, soit :

$$\|\overrightarrow{MN}\| \neq \|\overrightarrow{M'N'}\| \quad \text{et} \quad \widehat{\overrightarrow{PMN}} \neq \widehat{\overrightarrow{P'M'N'}} \quad (42)$$

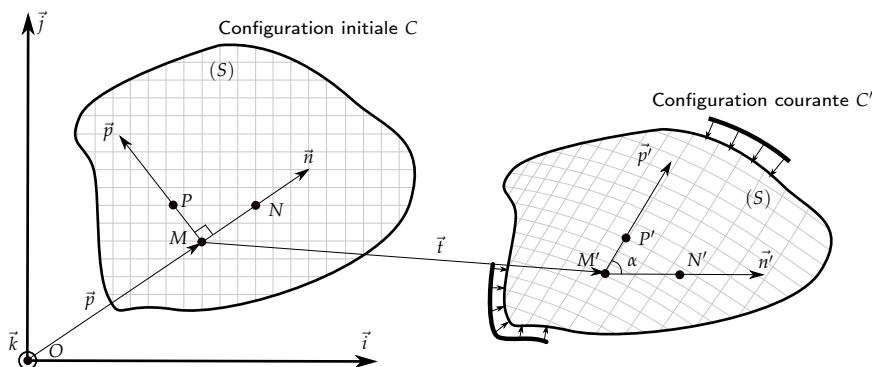


FIGURE 8 – Illustration de la déformation d'un corps  $C'$  par rapport à son état de référence  $C$

### 5.1 Allongement unitaire ou déformation de l'ingénieur

L'allongement unitaire traduit la variation de longueur de deux points  $M$  et  $N$  infiniment proche. On définit alors  $\varepsilon(M, \vec{n})$  l'allongement unitaire au point  $M$  dans la direction  $\vec{n}$  :

$$\varepsilon(M, \vec{n}) = \lim_{N \rightarrow M} \frac{M'N' - MN}{MN} \quad (43)$$

$\varepsilon(M, \vec{n})$  est aussi appelé « déformation de l'ingénieur ». Nous emploierons par la suite tout simplement le terme de « déformation ».

### 5.2 Distorsion ou glissement

La distorsion traduit la variation angulaire d'un angle initialement droit entre 3 points  $M$ ,  $N$  et  $P$  infiniment proches. Si on note  $\gamma(M, \vec{n}, \vec{p})$  la distorsion au point  $M$  entre les directions  $\vec{n}$  et  $\vec{p}$ , soit :

$$\gamma(M, \vec{n}, \vec{p}) = \lim_{N \rightarrow M \text{ et } P \rightarrow M} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (44)$$

### 5.3 Tenseur des déformations de Cauchy

Le *tenseur des déformations de Cauchy* ou *tenseur des déformations linéarisées* permet de traduire l'état de déformation en un point : allongement unitaire et distorsion selon les 3 directions de l'espace. Le tenseur de Cauchy est dit linéarisé car il est construit sous l'Hypothèse des Petites Perturbations (HPP).

l'HPP traduit que la transformation de l'état  $C$  à l'état  $C'$  de ( $S$ ) est réalisé dans des conditions de petit déplacement, de petit gradient de déplacement et de petite déformation. Cette hypothèse permet de simplifier grandement les problèmes en négligeant les effets de courbure locales et en linéarisant les déformations.

Supposons que (cf figure 8) :

1. la position du point  $M$  est décrite par  $\overrightarrow{OM} = \vec{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$
2.  $N$  soit un point infiniment proche de  $M$ , donc  $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \vec{p} + d\vec{p} = \begin{bmatrix} x + dx \\ y + dy \\ z + dz \end{bmatrix}$
3.  $\vec{t}$  est une fonction continue et dérivable de  $(x, y, z)$ , soit  $\vec{t}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}$

On peut alors écrire le vecteur déplacement du point  $N$  comme :

$$\overrightarrow{NN'} = \begin{bmatrix} u(x + dx, y + dy, z + dz) \\ v(x + dx, y + dy, z + dz) \\ w(x + dx, y + dy, z + dz) \end{bmatrix} = \vec{t} + d\vec{t} = \begin{bmatrix} u + du \\ v + dv \\ w + dw \end{bmatrix} \quad (45)$$

Par conséquent :

$$u(x + dx, y + dy, z + dz) = u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (46)$$

$$v(x + dx, y + dy, z + dz) = v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad (47)$$

$$w(x + dx, y + dy, z + dz) = w + dw = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (48)$$

Ainsi, le vecteur déplacement de  $N$  peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\overrightarrow{NN'} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \overline{\overline{N}} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \overline{\overline{N}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (49)$$

On remarque que  $\overline{\overline{N}}$  est le gradient du vecteur position  $\vec{u}$ . Il est possible de décomposer la matrice  $\overline{\overline{N}}$  comme la somme de deux matrices :

$$\overline{\overline{N}} = \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \quad (50)$$

où  $\bar{\varepsilon}$  est une matrice symétrique :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \bar{N} + \bar{N}^t \right) \quad (51)$$

et  $\bar{\omega}$  est une matrice antisymétrique :

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \left( \bar{N} - \bar{N}^t \right) \quad (52)$$

Le vecteur déplacement de  $N$  peut s'écrire alors :

$$\overrightarrow{NN'} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \bar{\omega} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} + \bar{\varepsilon} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (53)$$

**Signification du premier terme  $\vec{t}(u, v, w)$**

Le premier terme  $\vec{t}(u, v, w)$  traduit un *mouvement de translation*. En effet, si :

$$\bar{\omega} = \bar{\varepsilon} = \bar{0} \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{MM'} = \vec{t} \quad (54)$$

ce qui traduit un déplacement en translation.

**Signification du second terme  $\bar{\omega}$**

Le second terme  $\bar{\omega}$  traduit un *mouvement de rotation*. En effet,  $\bar{\omega}$  étant antisymétrique alors :

$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

avec :

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (56)$$

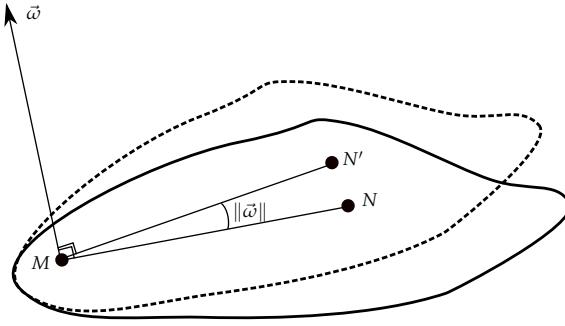
$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (57)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (58)$$

Si on pose :

$$\vec{t} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \bar{\varepsilon} = \bar{0} \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{NN'} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \vec{\omega} \wedge \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (59)$$

Ce qui correspond bien à l'expression vectorielle d'une petite rotation d'angle  $\|\vec{\omega}\|$  autour de l'axe  $(M, \vec{\omega})$  comme l'illustre la figure ci-dessous.



### Signification du troisième terme $\bar{\bar{\varepsilon}}$

Le troisième terme  $\bar{\bar{\varepsilon}}$  traduit les *déformations pures*. C'est donc ce dernier terme qui nous intéresse.  $\bar{\bar{\varepsilon}}$  est alors un tenseur des déformations linéarisées homologue au tenseur des contraintes qui s'exprime par une matrice symétrique, soit :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (60)$$

Avec :

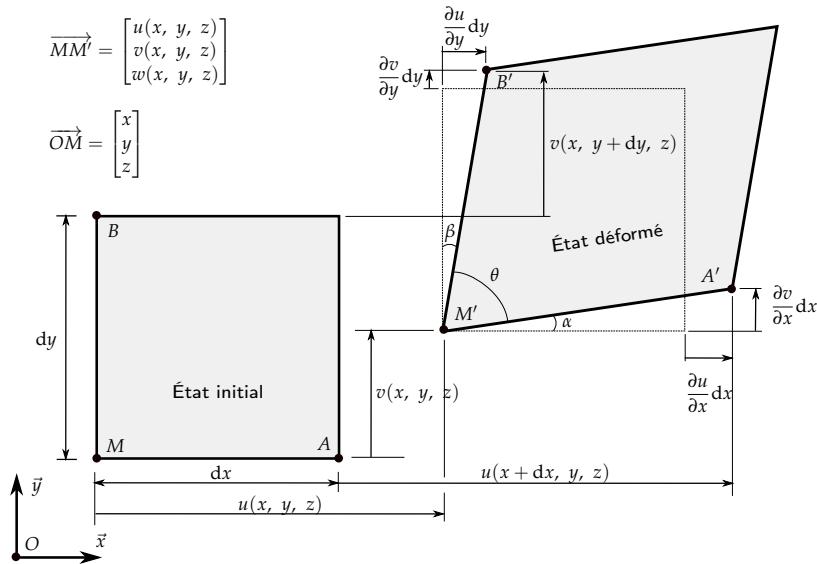
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (61)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (62)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (63)$$

## 5.4 Signification physique des composantes du tenseur des déformations

La figure ci-dessous illustre la déformation d'un carré infinitésimal de matière. Cette figure permet de mieux comprendre la signification physique des composantes du tenseur des déformations.



Par exemple, on observe que :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} dx \times \frac{1}{dx} = \frac{M'A' - MA}{MA} = \varepsilon(M, \vec{x})$$

Les déformations étant faibles on suppose ici que  $\cos \alpha \approx 1$ . La relation ci-dessus représente l'allongement unitaire (voir équation 43) au point  $M$  dans la direction  $\vec{x}$ . Ce raisonnement est également valable dans les 3 directions, ainsi :

$$\boxed{\varepsilon_{xx} = \varepsilon(M, \vec{x}) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon(M, \vec{y}) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon(M, \vec{z})} \quad (64)$$

En outre, on remarque que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx \times \frac{1}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} dy \times \frac{1}{dy} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\overrightarrow{M'A'} \cdot \vec{y}}{dx} + \frac{\overrightarrow{M'B'} \cdot \vec{x}}{dy} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\tan \alpha + \tan \beta) = \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{1}{2} \gamma(M, \vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

Les déformations étant faibles on suppose ici que  $\tan \alpha \approx \alpha$  et  $\tan \beta \approx \beta$ . La relation ci-dessus représente la distorsion (voir équation 44) au point  $M$  entre les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . Ce raisonnement est également valable dans les 3 directions, ainsi :

$$\boxed{\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma(M, \vec{x}, \vec{y}) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma(M, \vec{x}, \vec{z}) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma(M, \vec{y}, \vec{z})} \quad (65)$$

## 5.5 Propriétés du tenseur des déformations

Le tenseur des déformations  $\bar{\varepsilon}$  étant représenté par une matrice symétrique, celui-ci possède les mêmes propriétés que son homologue, le tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$ . En particulier celui-ci est diagonalisable et possède des axes principaux  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ , soit :

$$\bar{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{ZZ} \end{bmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (66)$$

Il est également possible d'utiliser la représentation graphique de Mohr afin d'étudier les déformations principales.

## 6 Loi de comportement

En mécanique, on nomme *loi de comportement* une relation mathématique établie entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations. Nous limiterons ici l'étude aux petites déformations et aux matériaux supposés continus, homogènes et isotropes. On supposera également que les contraintes sont proportionnelles aux déformations. On parle alors de *domaine élastique* ou de *comportement linéaire* ce qui est généralement vrai pour les matériaux céramiques en petite déformation.

**■** L'hypothèse des petites perturbations permet d'énoncer le **principe de superposition**. Si *n* systèmes de forces extérieures indépendants provoquent séparément des déformations élastiques et des contraintes, leurs applications provoqueront des déformations élastiques et des contraintes qui seront les sommes géométriques des déformations et des contraintes prises séparément.

### 6.1 Considérations expérimentales

Pour caractériser le comportement des matériaux, on utilise généralement des essais mécaniques qui permettent de solliciter une éprouvette dans un état de contrainte connu à l'avance. Les valeurs des forces appliquées et des déformations induites par ces sollicitations mécaniques sont relevées grâce à des capteurs. Les *dynamomètres* permettent de mesurer les forces appliquées et les *extensomètres* permettent de mesurer les déformations de l'éprouvette. Un essai mécanique extrêmement utilisé pour caractériser un matériau est *l'essai de traction* (voir figure 9).

L'essai de traction consiste à solliciter une éprouvette dans un état de traction uniaxial. La figure 10 montre la courbe force/allongement typique d'une céramique fragile. On remarque sur cette figure que le *domaine élastique* caractérisé par une linéarité entre force et allongement est le domaine majoritaire. Il s'ensuit une brève non-linéarité pour finalement atteindre la rupture de l'éprouvette. Les lois de comportement étudiées ici ne concernent que le domaine élastique.

Il faut noter que réaliser un tel essai sur des matériaux céramiques présente une réelle difficulté expérimentale. Dans la pratique, l'essai de flexion 3 points ou 4 points ou bien l'essai de compression est plus majoritairement utilisé avec les céramiques, car ils sont plus faciles à mettre en œuvre. Toutefois, ces derniers essais sont moins robustes et fiables que l'essai de traction.



FIGURE 9 – Machine d'essai de traction avec éprouvette [4]

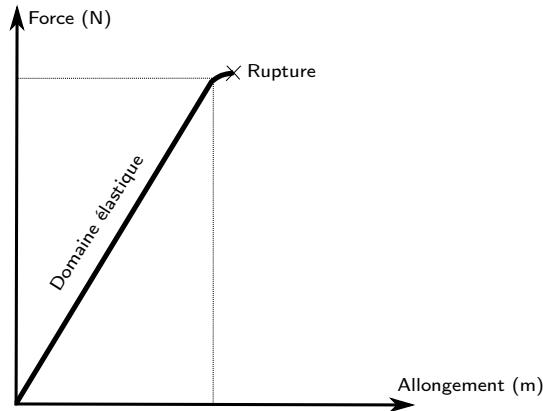


FIGURE 10 – Courbe force/allongement typique d'une céramique pour un essai de traction

## 6.2 État de traction uniaxiale et loi de Hook en traction

Supposons un cube infinitésimal de matière sollicité de manière uniaxiale selon l'axe  $\vec{x}$  (voir figure 11). Le tenseur des contraintes est alors :

$$\bar{\bar{\Sigma}}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Sous l'effet de la contrainte  $\sigma_{xx}$ , on suppose alors un allongement unitaire  $\varepsilon_{xx}$ . En supposant que l'on reste dans le domaine élastique linéaire, il existe alors une relation de proportionnalité entre  $\sigma_{xx}$  et  $\varepsilon_{xx}$ , soit :

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad (68)$$

où  $E$  est une caractéristique du matériau appelé *module de Young* généralement exprimé en GPa. Sous l'effet de l'allongement unitaire  $\varepsilon_{xx}$ , une réduction des longueurs dans les directions orthogonales à  $\vec{x}$  ce produit. On suppose alors :

$$\varepsilon_{yy} = \nu\varepsilon_{xx} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{zz} = \nu\varepsilon_{xx} \quad (69)$$

où  $\nu$  est la deuxième constante élastique du matériau appelé *coefficient de Poisson*.  $\nu$  est sans dimension. Le *coefficient de Poisson* traduit la compressibilité du matériau. On peut démontrer qu'un matériau incompressible possède un coefficient de Poisson  $\nu$  égal à 0,5 et un matériau

parfaitement compressible, un coefficient de Poisson  $\nu$  égal à 0, ainsi :

$$0 \geq \nu \geq 0,5 \quad (70)$$

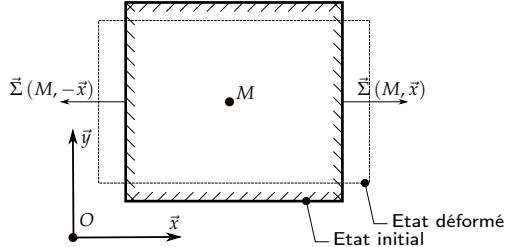


FIGURE 11 – État de traction uniaxial

Afin d'étendre les lois trouvées ci-dessus à un état de contrainte 3D, on peut imaginer un état de contrainte tri-axial où :

$$\bar{\Sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (71)$$

Dans ce cas, on peut appliquer le principe de superposition. De cette façon, on trouve que :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (72)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad (73)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (74)$$

Ces dernières relations expriment la loi de Hook pour un état de traction.

### 6.3 Loi de Hook en cisaillement pur

En supposant que l'on reste dans le domaine élastique linéaire, on suppose une relation de proportionnalité entre la contrainte de cisaillement  $\tau$  et le glissement  $\gamma$ , soit :

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (75)$$

où  $G$  est une caractéristique du matériau appelé *module de cisaillement* généralement exprimé en GPa. On peut généraliser cette équation dans l'espace, ainsi :

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (76)$$

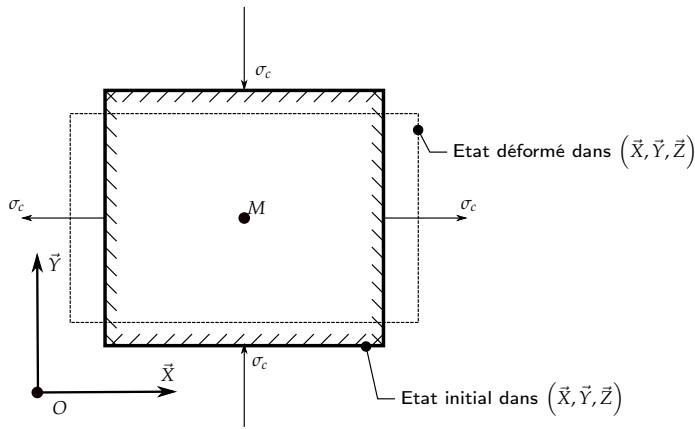
$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (77)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad (78)$$

Ces dernières relations expriment la loi de Hook pour un état de cisaillement.

### 6.4 Relation entre $E$ , $\nu$ et $G$

Supposons l'état de contrainte plane tel qu'illustré sur la figure ci-dessous.



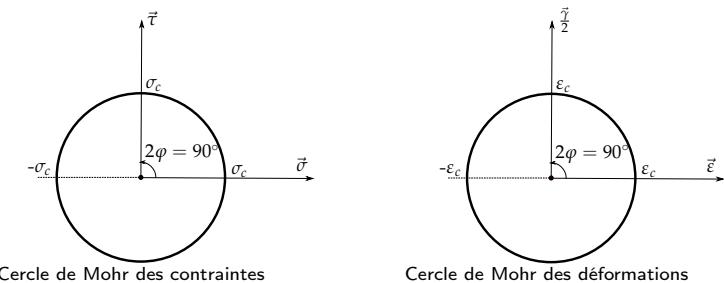
Cet état de contrainte est caractérisée par la matrice suivante :

$$\bar{\Sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_c & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (79)$$

À partir des lois de Hook (cf équations 72 et 73) en traction, on peut démontrer que ce cas de chargement induit un état de déformation décrit par :

$$\bar{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_c & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (80)$$

Ces états de contrainte et de déformation peuvent être décrits par les cercles de Mohr suivants :



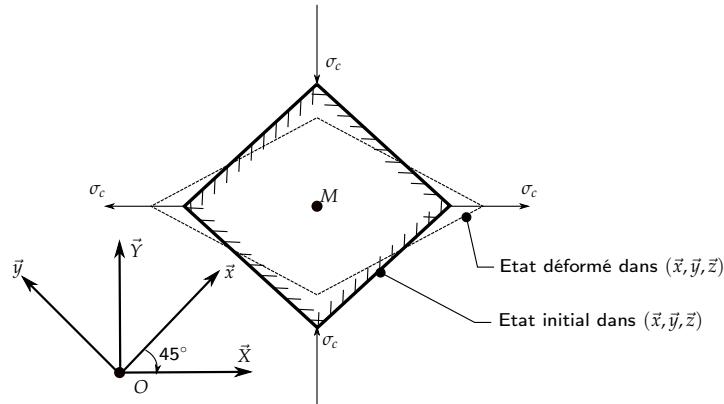
On remarque que  $\varphi = 45^\circ$  correspond alors à un état de contrainte en cisaillement pur selon les directions  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , soit :

$$\bar{\Sigma}(M) = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_c & 0 \\ \sigma_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (81)$$

Et également un état de déformation en glissement pur selon les directions  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , soit :

$$\bar{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_c & 0 \\ \varepsilon_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (82)$$

Cet état de contrainte peut être décrit par la figure suivante :



Or, d'après l'équation 72, on peut écrire dans le repère principal  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{XX} &= \frac{1}{E} [\sigma_{XX} - \nu (\sigma_{YY} + \sigma_{ZZ})] \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} &= \frac{1}{E} [\sigma_{XX} - \nu (\sigma_{YY} + \sigma_{ZZ})] \quad \text{car} \quad \varepsilon_{XX} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{E} (\sigma_{XX} - \nu \sigma_{YY}) \quad \text{car} \quad \sigma_{ZZ} = 0 \\ &= \frac{2}{E} (\sigma_c + \nu \sigma_c) \quad \text{car} \quad \sigma_{XX} = \sigma_c \quad \text{et} \quad \sigma_{YY} = -\sigma_c \\ &= \frac{2}{E} (1 + \nu) \times \sigma_c \\ &= \frac{2}{E} (1 + \nu) \times \tau_{xy} \quad \text{car} \quad \sigma_c = \tau_{xy}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}} \quad (83)$$

Grâce aux équations 75 et 83, on montre qu'il existe une relation entre les constantes élastiques  $G$ ,  $E$  et  $\nu$  de la forme :

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad (84)$$

## 6.5 Loi de Hook généralisée

À partir des lois de Hook en traction et en cisaillement, on peut généraliser la loi de Hook dans l'espace pour obtenir des relations déformations/contraintes :

$$\boxed{\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad \text{et} \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}} \quad (85)$$

$$\boxed{\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad \text{et} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}} \quad (86)$$

$$\boxed{\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}} \quad (87)$$

Ces dernières relations peuvent s'inverser pour obtenir des relations contraintes/déformations :

$$\sigma_{xx} = 2\mu\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad \text{et} \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (88)$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad \text{et} \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (89)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad \text{et} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad (90)$$

Les coefficients  $\mu$  et  $\lambda$  sont les *coefficients de Lamé* et s'expriment en MPa. On démontre que ces coefficients sont liés aux modules élastiques par les relations :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (91)$$

$\triangle$  La loi de Hook ci-dessus n'est valable que pour les matériaux supposés continus, homogènes et isotropes sous les hypothèses des petites déformations et dans le domaine élastique.

Le tableau suivant donne le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , mais aussi la contrainte à rupture  $\sigma_f$  en traction de quelques matériaux céramiques.

Matériau	$E$ (GPa)	$\nu$	$\sigma_f$ (MPa)
Alumine	390	0,22	300
Béton	20 à 50	0,20	2 à 5
Brique	14	0,16 à 0,22	0,5
Carbure de silicium	450	0,14	1000
Carbure de titane	440	0,18 à 0,19	250
Carbure de tungstène	650	0,18 à 0,19	344
Carbure de zirconium	380 à 440	0,19	14 à 48
Diamant	1000	0,20	> 60 000
Graphite	30	0,17 à 0,23	4,8 à 75
Granite	60	0,2 à 0,3	14 à 34
Marbre	26	0,2 à 0,3	15
Mullite	145	0,25	110
Oxyde de beryllium	350	0,26 à 0,34	140
Oxyde de magnésium	250	0,35 à 0,37	100
Oxyde de zirconium	200	0,22 à 0,32	100 à 700
Silice	70	0,17	50
Titanate d'aluminium	140	0,2	5
Verre borosilicate	69	0,18 à 0,3	50

$\triangle$  Les valeurs ci-dessus sont données à titres indicatifs et peuvent fortement fluctuer en fonction du fournisseur du matériau.

## 7 Théorie des poutres

La théorie des poutres permet une mise en oeuvre calculatoire aisée de la théorie de l'élasticité en petite déformation décrite dans les précédentes sections. En effet, la théorie des poutres développée par *Euler*, *Navier* et *Bernouilli* permet un certain nombre de simplifications de problème 3D complexes.

## 7.1 Hypothèses de la théorie des poutres

- Les matériaux étudiés sont supposés continus, homogènes et isotropes. Cette hypothèse est tout à fait valable pour les matériaux céramiques lorsque les dimensions étudiées sont grandes devant l'échelle caractéristique de la micro-structure où ces hypothèses ne sont pas valides. À ces échelles macroscopiques qui sont souvent celles de l'ingénieur, le matériau est alors approximé par un matériau continu équivalent qui présente des caractéristiques mécaniques moyennées. En pratique, il faut que la dimension la plus petite de l'éprouvette, soit au moins 100 fois supérieures à la taille des hétérogénéités du matériau. Le tableau suivant résume quelques dimensions caractéristiques pour différents matériaux.

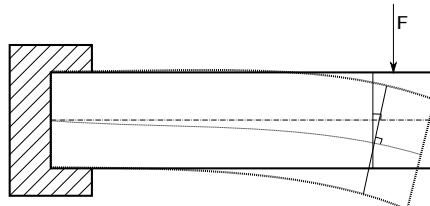
Matériau	Type d'hétérogénéité	Dimension min
Métaux	cristaux & grains, 10-100 $\mu\text{m}$	1 mm
Polymères	molécules, 10-50 $\mu\text{m}$	1 mm
Céramiques	grains, 1-10 $\mu\text{m}$	1 mm
Bois	fibres, 0,1-1 mm	10 mm
Béton	granulats, 1 cm	10 cm
Argiles	grains, 1-10 mm	1 mm

- Les géométries étudiées sont des poutres. Une géométrie de type poutre est celle engendrée par une surface plane ( $S$ ) dont le centre de surface  $G$  décrit une courbe plane ( $C$ ) appelée ligne moyenne. La longueur de ( $C$ ) doit être grande par rapport aux dimensions transversales. Ainsi, les caractéristiques d'une poutre sont :

- une ligne moyenne plane ou courbe mais qui doit être continue et plane,
- une section droite ( $S$ ) constante ou qui varie continûment le long de ( $C$ ),
- une perpendicularité entre ( $S$ ) et ( $C$ ) et
- un plan de symétrie ( $P$ ) qui contient ( $C$ ).

Il existe de nombreux exemples de géométries qui peuvent être approchées par une poutre. En génie civil, cela peut être des éléments de charpente, des colonnes de soutènement, des ponts ou des éléments de construction comme une brique. En construction mécanique, cela peut-être une plaque, un arbre de rotation, un levier ou bien dans la vie courante les pieds d'une table, le tablier d'un banc, etc... tel que la montre la figure 12.

- Les forces extérieures sont situées dans ( $P$ ) ou bien symétriquement par rapport à ( $P$ ).
- Les sections droites restent droites après déformation. C'est à dire qu'elle reste plane et perpendiculaire à la ligne moyenne ( $C$ ) telle que le montre la figure ci-dessous. Cette dernière hypothèse est celle de *Navier-Bernoulli*.



- Enfin, les résultats obtenus ne seront valables qu'à une distance suffisante des points d'application des efforts concentrés. C'est l'hypothèse de *Barré de Saint Venant*.

## 7.2 Torseur de cohésion

Désignons par ( $E$ ) la poutre étudiée et ( $\bar{E}$ ) le milieu extérieur à la poutre (voir figure 13). Supposons le repère  $\mathcal{R}(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié à ( $E$ ). Soit un plan ( $P$ ) perpendiculaire à  $(O, \vec{x}_0)$  et soit ( $S$ ) la section droite ainsi définie. Soit  $G$ , d'abscisse  $x$ , le centre de surface de ( $S$ ), ainsi :

$$\overrightarrow{OG} = x \vec{x}_0 \quad (92)$$

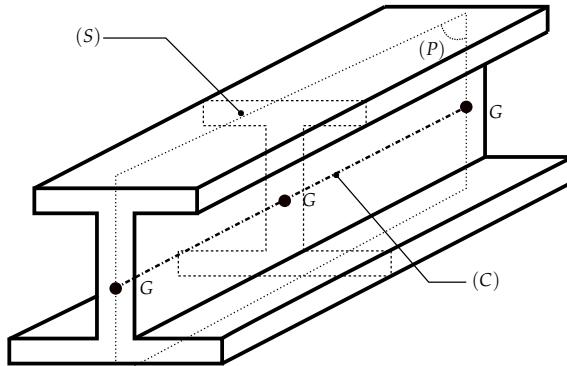


FIGURE 12 – Exemple de géométrie poutre

définie la position de la section droite ( $S$ ). Cette coupure fictive passant par ( $P$ ) partage la poutre en deux tronçons ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ). **L'ensemble des actions mécaniques exercées par le tronçon ( $E_2$ ) sur ( $E_1$ ) au travers de la coupure fictive ( $S$ ) est appelé torseur de cohésion :**

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \{\mathcal{T}_{E_2 \rightarrow E_1}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{E_2 \rightarrow E_1} \\ \vec{M}_{G, E_2 \rightarrow E_1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} N_x \quad M_{tx} \\ T_y \quad M_{fy} \\ T_z \quad M_{fz} \end{array} \right\}_{G(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} \quad (93)$$

On définit alors les composantes du torseur de cohésion comme :

- $N_x$ , la composante algébrique de l'*effort normal*,  $\vec{N} = N \vec{x}_0$
- $T_y$  et  $T_z$ , les composantes algébriques de l'*effort tranchant*,  $\vec{T} = T_y \vec{y}_0 + T_z \vec{z}_0$
- $M_{tx}$ , la composante algébrique du *moment de torsion*,  $\vec{M}_t = M_{tx} \vec{x}_0$
- $M_{fy}$  et  $M_{fz}$ , les composantes algébriques du *moment de flexion*,  $\vec{M}_f = M_{fy} \vec{y}_0 + M_{fz} \vec{z}_0$

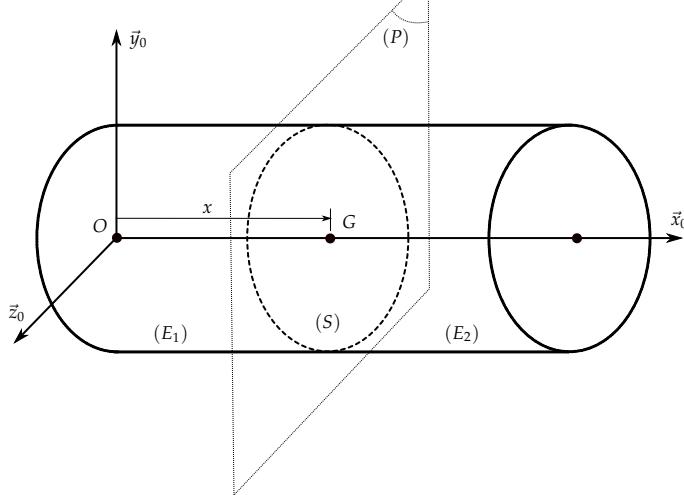


FIGURE 13 – Coupure fictive dans une poutre

### 7.3 Les différentes sollicitations simples

Le tableau ci-dessous résume les différentes sollicitations simples en fonction de différentes expressions du torseur de cohésion.

<i>Torseur coh.</i>	<i>Sollicitation</i>
$G \begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} N_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	<b>traction-compression</b>
$G \begin{Bmatrix} \vec{T} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	<b>cisaillement</b>
$G \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_t \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} 0 & M_{tx} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	<b>torsion simple</b>
$G \begin{Bmatrix} \vec{T} \\ \vec{M}_f \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	<b>flexion plane</b>
$G \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_f \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	<b>flexion pure</b>

## 7.4 Équilibre des tronçons de poutre

En réalisant l'équilibre statique des systèmes matériels ( $E$ ), ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ), on démontre que :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_G = -\{\mathcal{T}_{E \rightarrow E_1}\}_G = \{\mathcal{T}_{\bar{E} \rightarrow E_2}\}_G \quad (94)$$

## 7.5 Extension - Compression

Un certain nombre de matériaux usuels, utilisés en construction, ont un comportement différent en extension et en compression. Par exemple, on observe avec certains bétons ou matériaux réfractaires une « rigidification » apparente en compression. Cela induit un comportement asymétrique en traction et en compression avec  $E_{\text{compression}} > E_{\text{traction}}$ . Au niveau microscopique, ce comportement s'explique par le fait que les micro-fissures présentes dans le matériau se referment au cours de la compression. Contrairement aux métaux où ce comportement asymétrique est peu observé, il est important de caractériser le comportement des matériaux céramiques en traction, mais aussi en compression. Il sera toutefois supposé ici un comportement strictement identique en traction et en compression.

Rappelons que dans le repère  $\mathcal{R}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié à la section droite de la poutre ( $S$ ), l'expression du torseur de cohésion pour un état d'extension/compression est :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_G = G \begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} N_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_x > 0 & \text{alors extension} \\ N_x < 0 & \text{alors compression} \end{cases} \quad (95)$$

Par convention, si  $N_x > 0$  alors on suppose une sollicitation d'extension et si  $N_x < 0$  alors on suppose un état de compression. Dans la plupart des applications d'extension et de compression, le poids de la poutre peut être négligé devant les forces extérieures en présence.

### 7.5.1 Hypothèse cinématique

La figure 14 illustre un cas de chargement théorique d'une sollicitation d'extension compression. La poutre est soumise à deux forces directement opposées appliquées aux centres de surface des sections extrêmes et portées par l'axe ( $O, \vec{x}$ ).

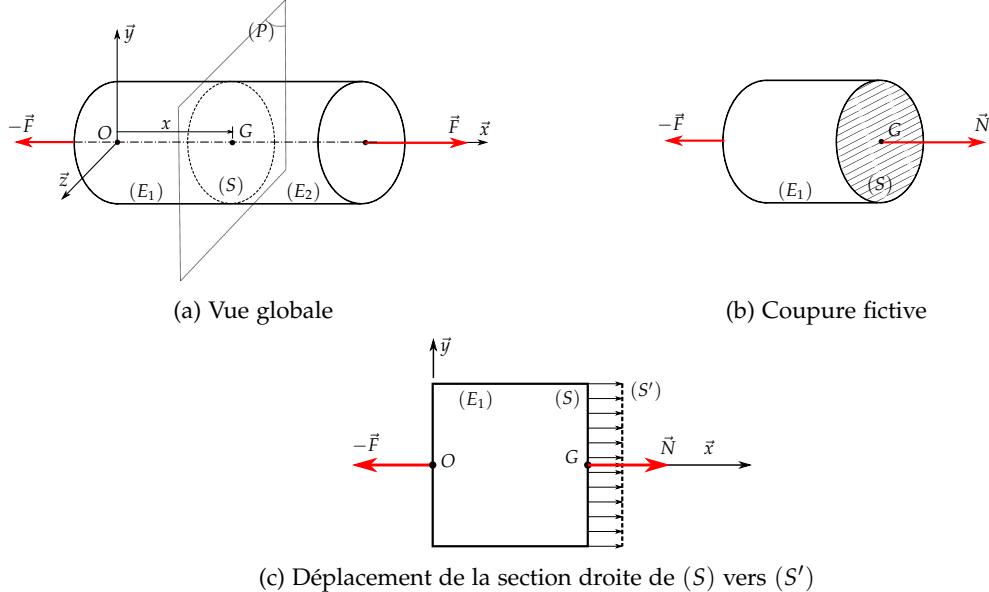


FIGURE 14 – Définition de l'extension-compression

Comme il est supposé que les sections droites restent droites après déformations, les sections droites effectuent alors une translation suivant l'axe  $\vec{x}$  telle que le montre la figure 14c. Pour garantir ce mouvement, on peut donc supposer que la déformation  $\varepsilon_{xx}$  est constante et uniforme dans ( $S$ ).

Il est alors possible de déduire la contrainte normale à partir de cette observation grâce à la loi de Hook en traction uniaxiale (voir section 6.5), soit :

$$\sigma_{xx} = E \times \varepsilon_{xx} \quad (96)$$

De plus, grâce à l'équation 19, il est possible de lier la résultante du torseur de cohésion  $\vec{R}_{coh}$  à la contrainte normale, soit :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \int_G \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{coh} \\ \vec{M}_{G,coh} \end{array} \right\} = \int_G \left\{ \begin{array}{l} \vec{N} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = \int_G \left\{ \begin{array}{l} \iint_S \vec{\sigma}_{xx} dS \\ \vec{0} \end{array} \right\} = \int_G \left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{xx} \times S) \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad (97)$$

Où  $S$  est l'aire de la section droite ( $S$ ). Ainsi, comme  $\vec{F} = \vec{N}$ , il est possible de traduire la relation algébrique entre effort et contrainte d'un essai de traction, soit :

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{S} \quad (98)$$

Comme l'effort normal  $N$  est constant le long de la poutre, les contraintes  $\sigma_{xx}$  sont également constantes. On peut donc également en déduire grâce à la loi de Hook que les déformations longitudinales  $\varepsilon_{xx}$  sont constantes dans la poutre ( $E$ ). Il est alors possible d'exprimer simplement

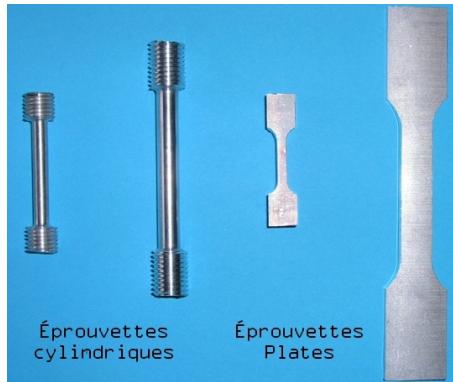


FIGURE 15 – Éprouvettes normalisées de traction [2]

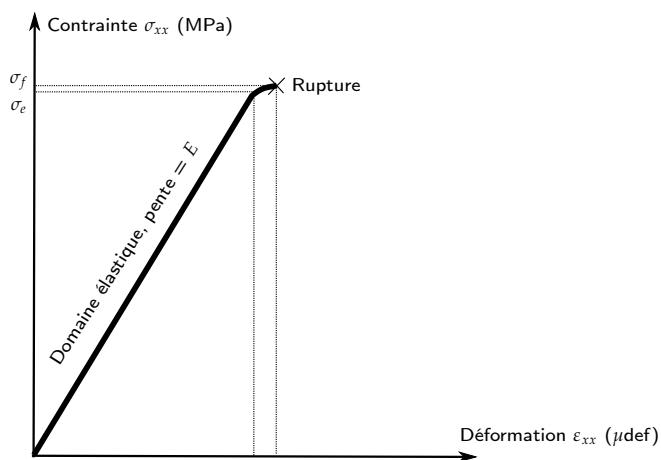


FIGURE 16 – Courbe contrainte-déformation typique d'une céramique fragile

la déformation longitudinale de la poutre par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l} \quad (99)$$

où  $l$  est la longueur initiale de la poutre et  $\Delta l$  est l'allongement longitudinal de la poutre.

Dans la réalité, l'essai de traction est défini par la norme NF A 03-151 qui préconise l'emploi d'éprouvettes normalisées dites « altère » (voir figure 15). Ces éprouvettes présentent une zone utile de section plus faible que les zones extrêmes de l'éprouvette utilisées pour immobiliser l'éprouvette dans la machine d'essai. Des congés permettent alors de limiter les effets de concentration de contrainte qui peuvent perturber l'essai notamment lors de la rupture. Seule la zone utile est ensuite utilisée pour les calculs de RDM.

À partir des relevés expérimentaux de la force  $F$  appliquée et de l'allongement  $\Delta l$  mesuré, les relations 98 et 99 peuvent être exploitées pour tracer l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  en fonction de la déformation  $\varepsilon_{xx}$ . Pour des céramiques fragiles, on obtient la courbe typique visible sur la figure 16 où  $\sigma_e$  est la *limite élastique* et  $\sigma_f$  est la *contrainte à rupture*. Ces deux caractéristiques sont supposées être des caractéristiques du matériau testé. Les céramiques caractérisées par un fort module de Young ( $E > 80$  MPa) sont généralement « très » fragiles. On considère alors que la rupture a lieu dans le domaine élastique et  $\sigma_f \approx \sigma_e$ . Enfin, on remarque que la pente de la courbe du domaine élastique est égale au module de Young  $E$  du matériau testé.

## 7.6 Flexion plane simple

L'essai de traction présente des difficultés expérimentales à mettre en oeuvre dans le cas des céramiques. En effet, de par leurs caractères fragiles, il est difficile pour les céramiques « d'être agrippés » par le système de maintien des machines d'essai mécanique qu'on appelle les mors. Ce système de fixation par serrage engendre des concentrations de contraintes au niveau des contacts éprouvettes/mors qui peuvent générer des fissures et ruiner l'éprouvette. Pour éviter ces problèmes, on préfère alors se tourner vers d'autres types d'essai comme les essais de flexion dont la théorie va être détaillée ici.

Les essais de flexion plane simple sont des essais de flexion dont le torseur de cohésion associé possède la forme suivante :

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{T} \\ \vec{M}_f \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \vec{T} \perp \vec{M}_f \quad \text{donc} \quad \{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (100)$$

où l'axe ( $O, \vec{x}$ ) est suivant l'axe longitudinal de la poutre.

### 7.6.1 Hypothèses additionnelles

En plus des hypothèses générales de l'élasticité et de la théorie des poutres, nous ajouterons celles-ci :

- la ligne moyenne de la poutre ( $C$ ) est rectiligne,
- la section droite de la poutre reste constante,
- toutes les forces appliquées à la poutre sont : perpendiculaires à la ligne moyenne, situées dans le plan de symétrie ou réparties symétriquement par rapport à celle-ci, concentrée ou réparties.

### 7.6.2 Hypothèse cinématique

Au cours de la déformation, nous supposerons que les sections droites restent droites **et perpendiculaires** à la ligne moyenne. La figure 17 montre l'implication de cette hypothèse. Le mouvement de  $G$  à  $G'$  est uniquement la conséquence du cumul des rotations des sections droites notées  $\phi$  le long de la ligne moyenne.

Tout ce passe « comme si » les sections droites effectuent uniquement un mouvement de rotation par rapport à la configuration initiale. Pour assurer cette rotation de section droite, la répartition des déformations longitudinales doit suivre une évolution linéaire suivant  $\vec{y}$ . On peut donc supposer que la déformation longitudinale  $\varepsilon_{xx}$  au point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  est :

$$\boxed{\varepsilon_{xx} = C_1 y} \quad \text{avec} \quad C_1 = \text{cste} \quad \text{et} \quad C_1 < 0 \quad (101)$$

Ainsi, la loi de Hook en traction uniaxiale permet alors de supposer une répartition également linéaire des contraintes  $\sigma_{xx}$ , soit :

$$\boxed{\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = C_2 y} \quad \text{avec} \quad C_2 = \text{cste} \quad \text{et} \quad C_2 < 0 \quad (102)$$

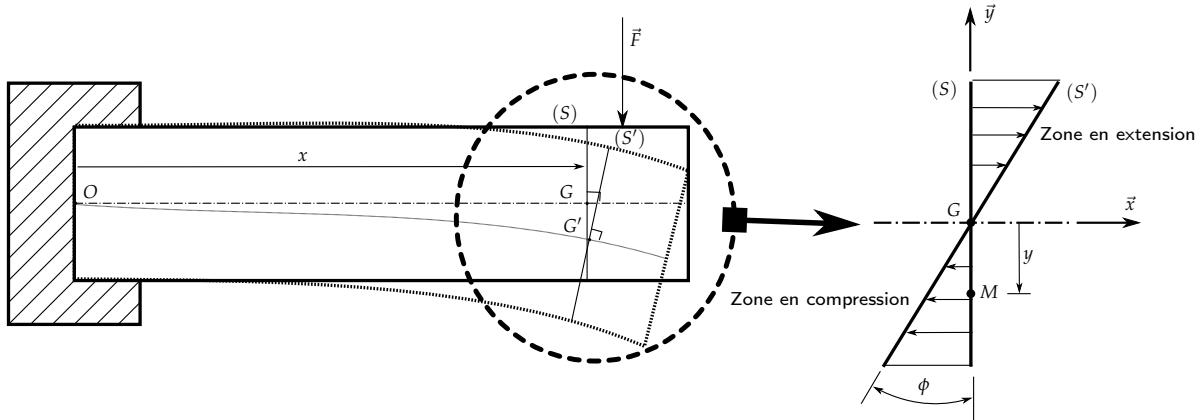


FIGURE 17 – Illustration de l'hypothèse cinématique de flexion

**■** Pour assurer la condition de perpendicularité entre la section droite et la ligne moyenne, le glissement  $\gamma_{xy}$  doit être nul. Une conséquence directe de cette hypothèse est de négliger l'influence du cisaillement  $\tau_{xy}$ . Cette hypothèse est d'autant moins fausse que la poutre est élancée. Pour des poutres avec un facteur d'élancement moindre, il peut être envisagé de prendre en compte ce cisaillement à l'aide de la théorie des poutres non-élancées développée par Timoshenko. Cette dernière théorie ne sera toutefois pas abordée ici.

### 7.6.3 Relation contrainte - moment fléchissant

Grâce à l'équation 19, il est possible de lier le moment fléchissant  $\vec{M}_f$  à la contrainte normale  $\sigma_{xx}$ , soit :

$$\vec{M}_f = \iint_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\sigma}_{xx} dS \quad (103)$$

$$= \iint_S (y \vec{y} + z \vec{z}) \wedge (\sigma_{xx} \vec{x}) dS \quad (104)$$

or, la projection de  $\vec{M}_f$  sur  $\vec{y}$  est nulle, donc :

$$\vec{M}_f \cdot \vec{z} = M_{fz} = \iint_S -y \sigma_{xx} dS \quad (105)$$

d'après la relation 102, on en déduit que :

$$M_{fz} = -C_2 \iint_S y^2 dS \quad (106)$$

On voit apparaître l'expression du moment quadratique  $I_{Gz}$  de  $(S)$  par rapport à l'axe  $(G, \vec{z})$ , soit :

$$I_{Gz} = \iint_S y^2 dS \quad (107)$$

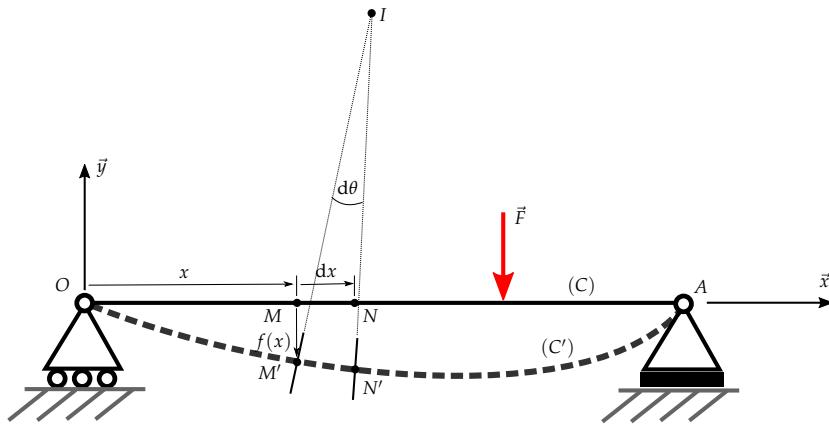


FIGURE 18 – Illustration de la flèche  $f(x)$  d'une poutre en flexion

donc :

$$M_{fz} = C_2 I_{Gz} \quad (108)$$

Enfin, d'après la relation 102, on montre que :

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{fz}}{I_{Gz}} \times y \quad (109)$$

#### 7.6.4 Relation flèche - moment fléchissant

La figure 18 montre la déformation d'une poutre résultant d'une sollicitation quelconque de flexion. Sous l'effet des sollicitations mécaniques, la ligne moyenne se déforme. Un point  $M$  appartenant à la ligne moyenne devient alors  $M'$  dans l'état déformé. On appelle alors « flèche », notée  $f(x)$ , le déplacement de  $M$  suivant l'axe  $\vec{y}$  :

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{y} = f(x) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{x} \approx 0 \quad (110)$$

On suppose que la flèche est une fonction de l'abscisse  $x$ . Les déformations étant faibles, on suppose également que les déplacements de  $M$  selon  $\vec{x}$  sont petits devant les déplacements suivant  $\vec{y}$ . Ainsi, la ligne moyenne déformée ( $C'$ ) est décrite entièrement par  $f(x)$ .

La figure 19 représente un tronçon de poutre. Comme  $f(x)$  décrit la courbe ( $C'$ ), alors on peut supposer que la rotation de section droite  $\omega$  suivant l'axe  $\vec{z}$  au point  $M$  est :

$$\omega = \frac{df}{dx} = f'(x) \quad \text{car} \quad \tan \omega \approx \omega \quad (111)$$

Sous l'effet de la déformation, le tronçon  $MN$  initialement rectiligne va devenir courbe. Si  $N$  est infiniment proche de  $M$ , la portion de courbe déformée ( $C'$ ) peut être approchée par un arc de cercle de centre  $I$  et de rayon  $\rho$ . L'angle  $\widehat{MIN}$  ainsi formé est égal à la différence de rotation des sections droites en  $M$  et  $N$ , soit  $d\omega$ . La longueur  $JK$  peut alors être approchée par :

$$JK = dx + \Delta dx = (\rho + y)d\omega \quad \text{donc} \quad \Delta dx = (\rho + y)d\omega - dx \quad (112)$$

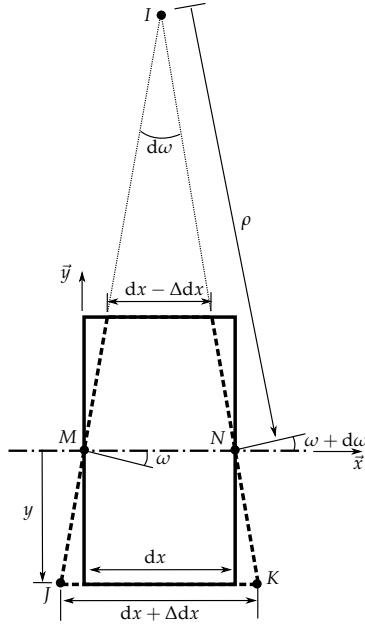


FIGURE 19 – Illustration d'un tronçon de poutre en flexion

Ainsi, il est alors possible d'exprimer la déformation  $\varepsilon_{xx}$  pour une ordonnée  $y$  :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{(\rho - y)d\omega - dx}{dx} \quad (113)$$

$$= -y \frac{d\omega}{dx} + \rho \frac{d\omega}{dx} - \frac{dx}{dx} \quad (114)$$

$$= -y f''(x) + \rho f''(x) - 1 \quad (115)$$

Or, en géométrie analytique, on démontre que :

$$\rho = \frac{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}{f''(x)} \quad \text{or} \quad (1 + f'(x)^2)^{3/2} \approx 1 \quad \text{donc} \quad \rho \approx \frac{1}{f''(x)} \quad (116)$$

Ainsi, d'après l'équation 115, on en déduit que :

$$\boxed{\varepsilon_{xx} = -y \cdot f''(x)} \quad (117)$$

Enfin, d'après les équations 109 et 102, on en déduit que :

$$\boxed{f''(x) = \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}}} \quad (118)$$

Cette dernière relation permet d'exprimer la flèche  $f(x)$  en fonction du moment fléchissant  $M_{fz}$ .

#### 7.6.5 Relation effort tranchant - moment fléchissant

La figure 20 montre un tronçon de poutre où sont appliqués les éléments de réduction du torseur de cohésion pour une sollicitation de flexion. On retrouve alors les efforts tranchants  $T_y$  et les moments fléchissants  $M_{fz}$ . Dans cette configuration, les éventuels efforts volumiques (comme le

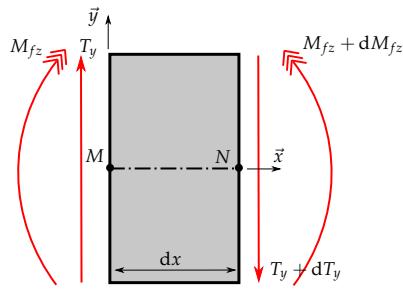


FIGURE 20 – Isolement d'un tronçon de poutre en flexion

poids) ou surfaciques ne sont pas pris en compte.

En réalisant l'équilibre des résultantes statiques, il est possible de démontrer que :

$$dT_y = 0 \quad (119)$$

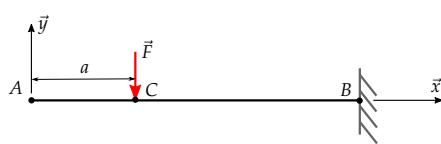
Donc, en l'absence de force volumique ou surfacique, l'effort tranchant  $T_y$  est donc constant le long de la ligne moyenne. De plus, en réalisant l'équilibre des moments statiques au point N sur un tronçon de poutre en flexion, il est possible de démontrer que :

$$T_y = -\frac{dM_{fz}}{dx} \quad (120)$$

Donc, en l'absence de force volumique ou surfacique, l'effort tranchant  $T_y$  est l'opposée de la dérivée suivant  $x$  du moment fléchissant. Cette relation permet de vérifier rapidement la validité d'un calcul!

#### 7.6.6 Formulaire de flexion plane de poutre de longueur $l$

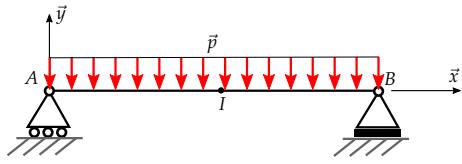




$$y_A = \frac{-F}{6EI_{Gz}} \times (l-a)^2(2l+a)$$

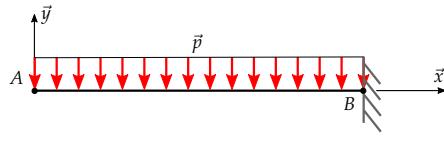
$$y_C = \frac{-F}{3EI_{Gz}} \times (l-a)^3$$

$$y'_C = y'_A = \frac{F}{2EI_{Gz}} \times (l-a)^2$$



$$y_I = \frac{-5pl}{384EI_{Gz}} \times l^3$$

$$y'_A = \frac{-pl}{24EI_{Gz}} \times l^2$$



$$y_A = \frac{-pl}{8EI_{Gz}} \times l^3$$

$$y'_A = \frac{pl}{6EI_{Gz}} \times l^2$$

### 7.6.7 Principe de superposition des déformations

*Énoncé du principe de superposition :* dans la limite des déformations élastiques, l'effet produit par plusieurs actions mécaniques est égal à la somme des effets produits par ces actions mécaniques prises séparément.

Le principe de superposition peut alors être utilisé pour décomposer un chargement complexe en plusieurs chargements simples afin de faciliter le calcul de la flèche ou de l'elongation d'une poutre.

## 8 Exercices

**⚠ Pour mener à bien ces exercices, il est important d'avoir le matériel suivant à disposition : équerre, rapporteur, compas, calculette et feuille A4 à petits carreaux de façon à pouvoir tracer des graphiques.**

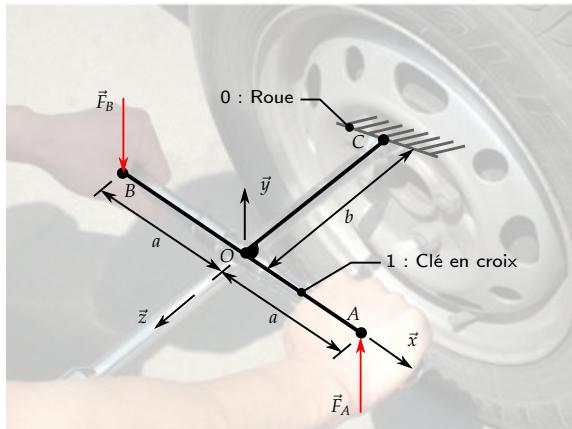
### 8.1 Modélisation des liaisons et statique

#### Démontage de pneu

L'image suivante montre la modélisation associée à un démontage manuel de pneu. Sachant que le couple nécessaire pour dévisser un écrou de pneu est estimé à 90 N.m, calculer le bras de levier  $a$  nécessaire que doit posséder la clé en croix ci-dessous.

On supposera que les forces  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  produites par l'opérateur sur la clé en croix sont d'intensités égales, opposées et de direction  $\vec{y}$ .

**💡 Pour répondre à cette question, vous devez tout d'abord estimer la force que peut produire un adulte en bonne santé. Pour cela, reportez-vous à l'annexe 9.1.**



#### Pression hydrostatique

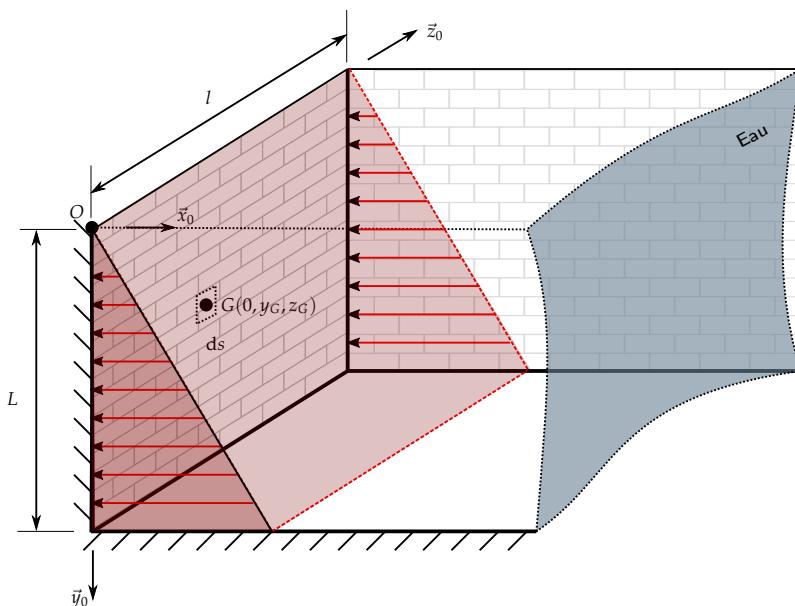
La figure ci-dessous schématise la pression exercée par l'eau d'une piscine sur un mur vertical. L'évolution de la pression du fluide est donnée par la formule suivante (fluide incompressible au repos dans un champ de pesanteur uniforme) :

$$p = \rho gy \quad (121)$$

Où  $p$  est la pression hydrostatique,  $\rho$  la masse volumique du fluide et  $y$  l'altitude de la colonne d'eau. La force exercée sur une surface infinitésimale  $dS$  au point  $M$  est alors :

$$\vec{f} = -\rho gy \times dS \vec{x}_0 \quad (122)$$

- Q1. À l'aide de l'équation 6, calculer la valeur de la force totale  $\vec{F}_p$  exercée par l'eau sur la paroi de la piscine.
- Q2. Vérifier la formule obtenue à l'aide de l'équation aux dimensions.
- Q3. Calculer la valeur de  $\vec{F}_p$  en supposant  $l=5\text{m}$  et  $L=1,5\text{m}$ . Donner la valeur en kN puis en équivalent tonne.
- Q4. À l'aide de l'équation 6, déterminer le moment  $\vec{M}_{G,p}$  exercé par l'eau sur la paroi en un point  $G$  de coordonnées  $(0, y_g, z_g)$ .
- Q5. Déterminer les coordonnées de  $G$  pour lesquelles le moment  $\vec{M}_{G,p}$  est nul.



**■** Au vu de ces résultats, on comprend un peu mieux l'utilité et la répartition des cercles de sertissage des fameux water-tanks de New York (voir figure 21).

### Centre de gravité

À l'aide de la définition 6, on en déduit que le torseur des actions mécaniques induites par les efforts de pesanteurs sur un système  $S$  réduit au point  $M$  est :

$$\{\mathcal{T}_{\pi \rightarrow S}\}_M = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\pi \rightarrow S} = \rho g \vec{u} \int dV \\ \vec{M}_{M,\pi \rightarrow S} = \rho g \iint_V \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} dV \end{array} \right\} \quad (123)$$

où on suppose que :

1. le champ de pesanteur est uniforme et orienté selon le vecteur unitaire  $\vec{u}$ . On note  $g$  l'intensité du champ de pesanteur.



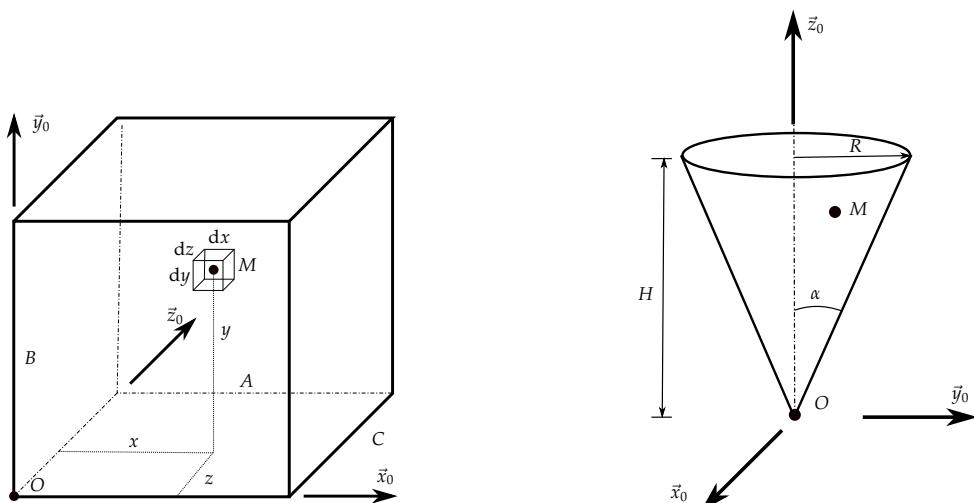
FIGURE 21 – Un water tanks de la ville de New York (photo domaine public)

2. la masse volumique  $\rho$  de  $S$  est également supposée uniforme.

On définit alors le centre de gravité  $G$  comme étant le point particulier de réduction du torseur des efforts de pesanteur où le moment est nul. Le centre de gravité  $G$  est alors défini par :

$$G \text{ tel que } \vec{M}_{G,\pi \rightarrow S} = \rho g \iint_V \overrightarrow{GM} \wedge \vec{n} \, dV = \vec{0} \quad (124)$$

- Q1. Calculer la résultante des efforts de pesanteur pour un parallélépipède (voir figure suivante).
- Q2. Calculer le moment des efforts de pesanteur pour le parallélépipède au point  $G$  de coordonnées  $(x_G, y_G, z_G)$ .
- Q3. Exprimer alors les coordonnées du centre de gravité  $G$  en fonction des dimensions du parallélépipède.
- Q4. Réaliser le même travail pour le cône (voir figure suivante).



## Échelle et arc-boutement

Lorsqu'un bricoleur grimpe sur une échelle, il ne peut s'empêcher de se poser la question : « *L'échelle est-elle stable ? Ne va-t-elle pas glisser ?* ». Une simple étude statique peut permettre de répondre à cette question.

Supposons la modélisation visible sur la figure suivante. Le problème possède un plan de symétrie ( $\vec{x}_0, \vec{y}_0$ ). L'échelle est en appui ponctuel en A et C. En supposera que le contact en A est un contact frottant. Ainsi le torseur des actions mécaniques transmissibles de ceux deux liaisons sont :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\}_A = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\}_C = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} X_C \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad (125)$$

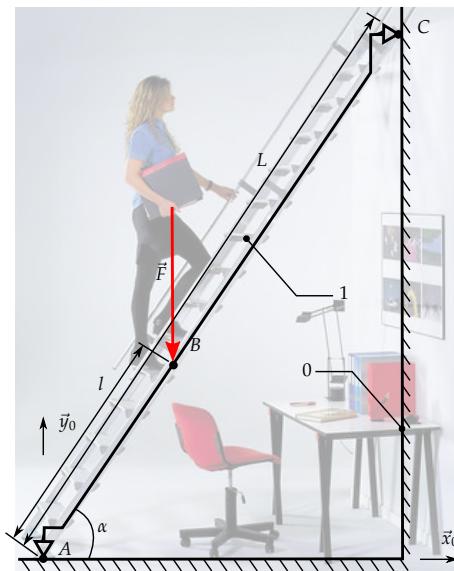
L'échelle subit également l'action  $\vec{F}$  du poids de la personne au point B.

**■** La théorie de Coulomb suppose qu'il y a glissement si :

$$\left\| \frac{X_A}{Y_A} \right\| > f \quad (126)$$

où  $f$  est le coefficient de frottement statique qui est une caractéristique des deux surfaces frottantes.

- Q1.** Réalisez le bilan des actions mécaniques agissant sur l'échelle 1.
- Q2.** En réalisant l'équilibre statique de l'échelle au point A, déterminer la relation entre  $X_A$  en fonction de  $Y_A$
- Q3.** En supposant  $\left\| \frac{X_A}{Y_A} \right\| = f$ , tracer l'évolution de  $l/L$  en fonction de  $\alpha$ .
- Q4.** À l'aide du graphique obtenu, conclure sur la stabilité de l'édifice.



## Étude d'un système bielle-manivelle

Les figures ci-dessous montrent le schéma technologique et la modélisation associée d'un système bielle-manivelle. Un système bielle-manivelle permet de transformer un mouvement de

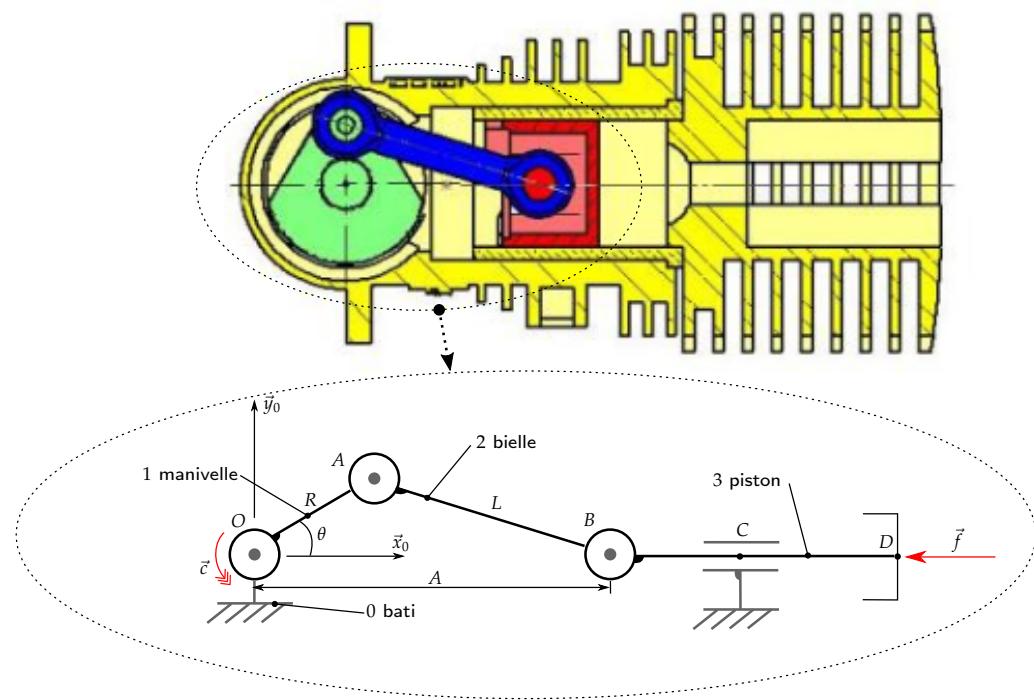
rotation continu en un mouvement de translation alternatif et vis et versa. Ce type de dispositif est présent, par exemple, dans les moteurs thermiques 2 ou 4 temps.

Le système bielle-manivelle décrit ci-dessous est supposé être à l'équilibre. Il subit des actions mécaniques extérieures :

$$\{\mathcal{T}_{c \rightarrow 1}\}_O = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ c \vec{z}_0 \end{array} \right\}} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{f \rightarrow 3}\}_D = \underset{D}{\left\{ \begin{array}{l} f \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad (127)$$

L'objectif de cet exercice est de donner la *loi d'entrée-sortie* de ce mécanisme. Cette loi exprime la relation entre le couple  $c$  en entrée et l'effort  $f$  en sortie du mécanisme en fonction des paramètres géométriques  $\theta$ ,  $L$  et  $R$ .

- Q1. Écrire les torseurs des actions mécaniques transmissibles des liaisons mécaniques. La liaison 3/2 est une liaison *pivot glissante* qui possède un degré de liberté en rotation et en translation suivant  $\vec{x}$ .
- Q2. Ré-écrire ces torseurs en prenant en compte l'hypothèse de symétrie dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ .
- Q3. Appliquer le théorème de la résultante statique au solide 3.
- Q4. Appliquer le théorème de la résultante statique au solide 2.
- Q5. Appliquer le théorème de la résultante statique au solide 2.
- Q6. Appliquer le théorème du moment statique au solide 1 au point  $O$ .
- Q7. Appliquer le théorème du moment statique au système  $1 \cup 2$  au point  $O$ .
- Q8. Traduire la fermeture géométrique  $OAB$  afin de trouver une relation entre  $A$  et  $\theta$ .
- Q9. Donner finalement la loi d'entrée-sortie qui lie le couple  $c$  à la force  $f$  en fonction des paramètres géométriques  $\theta$ ,  $L$  et  $R$ .



## 8.2 État de contrainte plan et cercle de Mohr

### Exercice 1

Supposons un état de contrainte plan, on connaît en un point  $M$  les valeurs des contraintes normales et tangentielles dans le repère  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , soit :

$$\sigma_{xx} = 10 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \sigma_{yy} = 10 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \tau_{xy} = 20 \text{ MPa}$$

- Q1. Écrire le tenseur des contraintes  $\bar{\Sigma}(M)$  au point  $M$  dans le repère  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
- Q2. Soit en  $M$  une facette de normale  $\vec{n}$  telle que  $(\vec{x}, \vec{n}) = \phi$ . Exprimer le vecteur contrainte  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n})$  selon ses composantes  $\sigma_{nn}$  et  $\tau_{nt}$  dans le repère  $R_n(\vec{n}, \vec{t}, \vec{z})$ .
- Q3. Déterminer le repère  $R_1(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  des directions principales et calculer les contraintes principales  $\sigma_{XX}$  et  $\sigma_{YY}$ .
- Q4. Calculer le vecteur contrainte  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n})$  pour une facette de normale  $\vec{n}$  tel que  $(\vec{X}, \vec{n}) = -\frac{\pi}{4}$ .
- Q5. Construire le cercle de Mohr de cet état de contrainte et vérifier les résultats obtenus.

### Exercice 2

Supposons un état de contrainte plan, on connaît en un point  $M$  les valeurs des contraintes principales  $\sigma_{XX}$  et  $\sigma_{YY}$  dans le repère  $R_1(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ .

- Q1. Écrire le tenseur des contraintes  $\bar{\Sigma}(M)$  au point  $M$  dans le repère  $R_1$
- Soit en  $M$  une facette de normale  $\vec{n}$  tel que  $(\vec{X}, \vec{n}) = \varphi$ .
- Q2. Exprimer le vecteur contrainte  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n})$  en fonction de  $\sigma_{XX}$ ,  $\sigma_{YY}$  et  $\varphi$ .
- Supposons le vecteur unitaire  $\vec{t}$  tel que  $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{Z})$  forme une base orthonormée directe.
- Q3. Exprimer  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  en fonction de  $\vec{n}$ ,  $\vec{t}$  et  $\varphi$ .
- Q4. Démontrer alors que la contrainte normale et tangentielle d'une facette de normale  $\vec{n}$  s'exprime par rapport aux contraintes principales par :

$$\sigma_{nn} = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} + \frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \cos 2\varphi \quad (128)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2} \sin 2\varphi \quad (129)$$

Supposons  $\sigma_{XX} = 300 \text{ MPa}$  et  $\sigma_{YY} = -100 \text{ MPa}$ .

- Q5. Calculer les contraintes normales et tangentielles pour :
  1. la facette de normale  $\vec{n}_1$  orientée de  $\varphi_1 = 60^\circ$
  2. la facette de normale  $\vec{n}_2$  orientée de  $\varphi_2 = -30^\circ$
- Q6. Retrouver les résultats de la question précédente en utilisant la construction graphique de Mohr.

- Q7. Donner la représentation graphique sur ces deux facettes de  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  des deux vecteurs contraintes  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n}_1)$  et  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n}_2)$ .
- Q8. À partir de la relation  $\tau_{ij} = \vec{\Sigma}(M, \vec{i}) \cdot \vec{j}$ , exprimer la contrainte tangentielle  $\tau_{t_1 n_1}$  en fonction du vecteur contrainte  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n}_2)$ . Pour cela, aidez-vous du théorème de Cauchy et de la construction graphique précédemment effectuée. La réciprocité des contraintes tangentielle est-elle vérifiée ?
- Q9. En supposant que le matériau étudié est de l'alumine. Vérifier la tenue du matériau avec un coefficient de sécurité de  $s = 2$ .

### Exercice 3

Supposons un état de contrainte plan, on connaît en un point  $M$  les valeurs des contraintes normales et tangentielles dans le repère  $R_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , soit :

$$\sigma_{xx} = 60 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \sigma_{yy} = 20 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \tau_{xy} = -30 \text{ MPa}$$

- Q1. Écrire le tenseur des contraintes  $\bar{\Sigma}(M)$  au point  $M$  dans le repère  $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
- Q2. Déterminer l'orientation du repère des directions principales  $R(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ .
- Q3. Déterminer les valeurs des contraintes principales. Écrire le tenseur des contraintes exprimé dans le repère principal.
- Q4. Déterminer le vecteur contrainte  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n})$  pour une facette de normale  $\vec{n}$  telle que  $(\vec{X}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$  par trois façons différentes :
  1. à l'aide de l'égalité 28 et en prenant le tenseur des contraintes exprimé dans  $R$ ,
  2. à l'aide de l'égalité 32.
- Q5. Vérifiez les résultats précédents à l'aide de la construction graphique de Mohr.

### 8.3 Loi de comportement

#### Dépouillement de jauge de déformation (rosettes)

La figure 22a présente une photographie d'une jauge de déformation de marque HBM. Les jauge de déformations sont toutes basées sur le même principe. Les jauge sont composées d'un fil très fin imprimé sur un support flexible isolant (le corps d'épreuve) en serpentin. Les jauge sont ensuite collées sur la surface de l'objet dont on veut mesurer la déformation. Lorsque l'objet se déforme, le corps d'épreuve de la jauge se déforme également ce qui entraîne une variation de longueur du fil résistif.

La résistance du fil étant donné par  $R = \frac{\rho L}{S}$  où  $\rho$  est la résistivité du fil,  $L$  sa longueur et  $S$  sa section, on peut démontrer que la variation relative de résistance est donnée par :

$$\frac{\Delta R}{R_0} = K \times \frac{\Delta L}{L_0} = K\varepsilon \quad (130)$$

où le coefficient  $K$  est appelé facteur de jauge et  $R_0$  est la résistance nominale de la jauge. Les valeurs de  $K$  et  $R_0$  sont données par le constructeur. Les jauge permettent donc de mesurer une déformation  $\varepsilon$  grâce à la mesure de la variation de résistance  $\Delta R$  à l'aide d'un micro-ohmmètre.

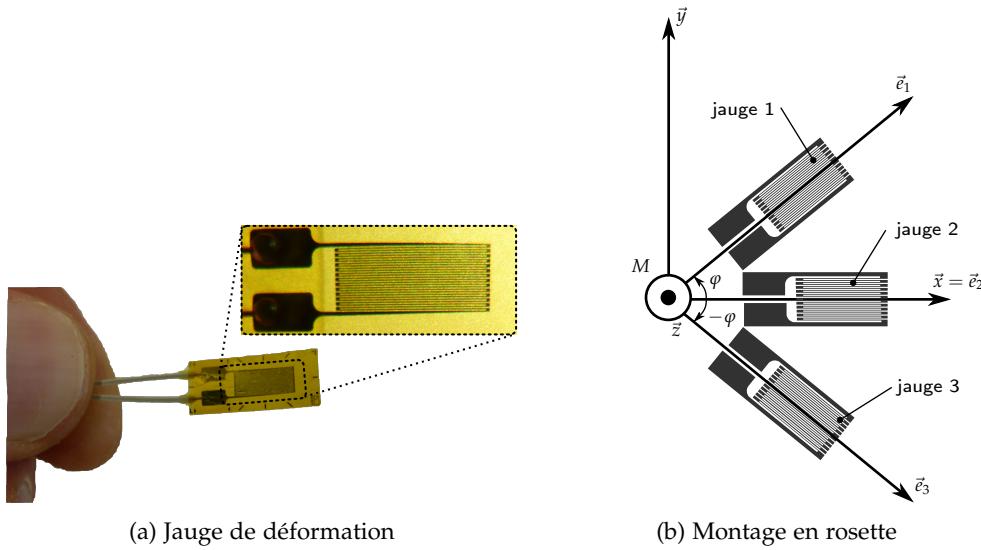


FIGURE 22 – Les jauge de déformation

Nous avons vu qu'un état de déformation plane est défini par 3 variables indépendantes. Pour mesurer un état de déformation plan, il faut donc 3 mesures de déformation dans des directions différentes. Pour cela, on utilise des *rosettes* qui consistent en l'assemblage de 3 jauge de déformations dans un même corps d'épreuve. Supposons alors le montage illustré sur la figure 22b.

La jauge 1 mesure la déformation  $\varepsilon_1$  selon la direction  $\vec{e}_1$ , la jauge 2 mesure la déformation  $\varepsilon_2$  selon les directions  $\vec{e}_1$  et  $\vec{x}$  et la jauge 3 mesure la déformation  $\varepsilon_3$  selon la direction  $\vec{e}_3$ . Les calculs des directions principales étant les mêmes pour le tenseur des contraintes que pour le tenseur des déformations, il est alors possible d'appliquer la relation 32, soit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_3 &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos -2\varphi + \varepsilon_{xy} \sin -2\varphi\end{aligned}$$

Sachant que les déformations  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  sont directement mesurées par les jauge 1,2 et 3.

Q1. Calculer  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\varepsilon_{xy}$  en fonction de  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  et  $\varphi$ .

Supposons que le matériau possède un comportement linéaire élastique et que l'état de contrainte est plan.

Q2. Exprimer les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\tau_{xy}$  en fonction des déformations  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\varepsilon_{xy}$ , du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  à l'aide des égalités 85, 86 et 87.

Supposons que l'angle  $\varphi$  entre deux jauge est  $\varphi = 60^\circ$ .

Q3. Calculer  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\varepsilon_{xy}$  en fonction de  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$ .

Les valeurs des déformations mesurées sont :  $\varepsilon_1 = -450 \mu\text{def}$ ,  $\varepsilon_2 = 120 \mu\text{def}$  et  $\varepsilon_3 = 280 \mu\text{def}$

Q4. Calculer les valeurs de  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\varepsilon_{xy}$ .

Supposons que les jauge sont collées sur de la silice.

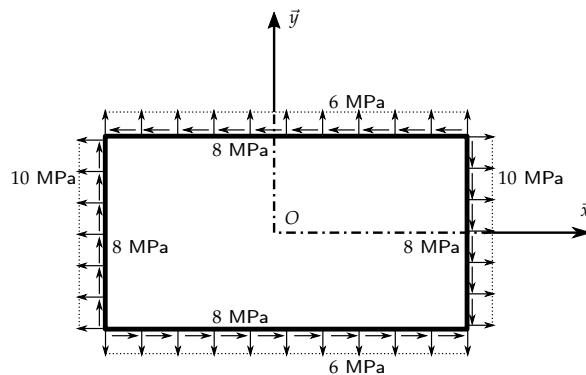
- Q5. Calculer les valeurs des contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\tau_{xy}$ .

Supposons un coefficient de sécurité  $s$  de 2.

- Q6. À l'aide du cercle de Mohr, déterminer si les contraintes sont d'un niveau acceptable.

### Plaque

Soit une plaque de silice (une vitre par exemple) rectangulaire mince centrée sur le repère dans son plan moyen  $(0, \vec{x}, \vec{y})$ . Les côtés de la plaque sont soumis à différentes forces surfaciques uniformément réparties (voir figure ci-dessous). On considère que les surfaces de normales perpendiculaires au plan moyen sont libres et que la plaque se comporte en élasticité plane.

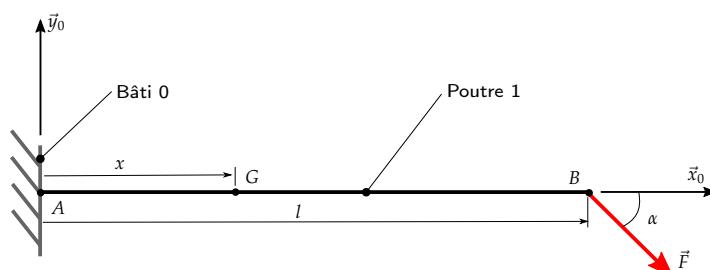


- Q1. Quels sont les différents cas de sollicitations simples auxquels est soumise la plaque ?
- Q2. Quels sont pour chacun de ces cas les déformations engendrées en un point  $M$  de la plaque ?
- Q3. Déterminer grâce au principe de superposition la matrice en  $M$  associé au tenseur des contraintes et des déformations.
- Q4. Reprendre le problème directement par les lois de contraintes planes.

### 8.4 Théorie des poutres

#### Poutre encastrée, torseur de cohésion

Soit une poutre droite, de section constante, de longueur  $l$ , encastrée à son extrémité  $A$  et supportant en son extrémité  $B$  un effort concentré  $\vec{F}$  tel que le montre la figure ci-dessous. Soit  $\mathcal{R}_0 (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le repère lié à la poutre. Soit le point  $G$  d'abscisse  $x$ , le centre de surface de la section droite.



En supposant que le système possède un plan de symétrie dans le plan  $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ .

- Q1. Déterminer l'expression au point  $A$  du torseur des actions transmissibles  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\}_A$  de la liaison encastrement entre le bâti 0 et la poutre 1 dans le repère  $\mathcal{R}_0$ .
- Q2. Déterminer l'expression du torseur de cohésion  $\{\mathcal{T}_{coh}\}_G$  exprimé au point  $G$  à l'aide des équations d'équilibre 94.
- Q3. Nommer les composantes du torseur de cohésion et donner leurs expressions.
- Q4. Tracer les diagrammes qui décrivent les évolutions des intensités des composantes du torseur de cohésion en fonction de l'abscisse  $x$ .

### Essai d'extension

La partie utile d'une éprouvette d'alumine pour un essai d'extension est un cylindre de diamètre  $D = 10 \text{ mm}^2$  et de longueur utile  $L = 100 \text{ mm}$ . Au cours de l'essai, un dynamomètre et des extensomètres permettent de mesurer la force appliquée, la longueur et le diamètre de l'éprouvette. Ces données sont indiquées dans le tableau ci-dessous. La dernière valeur correspond à la rupture de l'éprouvette. L'objectif de cet exercice est de dépouiller cet essai.

Force (kN)	Longueur (mm)	Diamètre (mm)
0	100,00000	10,00000
7,54	100,02850	9,99937
15,39	100,05699	9,99875
23,56	100,08549	9,99812

On associe à l'éprouvette un repère  $\mathcal{R}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  où l'axe  $(O, \vec{x})$  est confondu avec l'axe de révolution de l'éprouvette et l'on suppose que les contraintes et déformations sont uniformes dans l'ensemble de l'échantillon.

- Q1. Compléter ce tableau en indiquant :

- l'allongement  $\Delta L$  en mm de l'éprouvette,
- la striction  $\Delta D$  en mm de l'éprouvette,
- la contrainte normale  $\sigma_{xx}$  en MPa,
- la déformation longitudinale  $\varepsilon_{xx}$  en  $\mu\text{def}$ ,
- la déformation transversale  $\varepsilon_{yy}$  en  $\mu\text{def}$ .

On souhaite estimer maintenant les caractéristiques mécaniques de cette éprouvette d'alumine.

- Q2. Estimer grâce aux valeurs précédemment obtenues le module de Young  $E$  en GPa, le coefficient de Poisson  $\nu$  et la contrainte à rupture  $\sigma_{lim}$  en MPa de cette éprouvette en alumine. Estimer également l'incertitude de vos résultats. Commenter vos résultats.

Classiquement, les calculs de contrainte ne prennent pas en compte la diminution de section au cours de l'essai.

- Q3. Calculer la « valeur vraie » (ou plutôt un peu moins fausse) de la contrainte à rupture et l'erreur relative résultant de cette hypothèse.

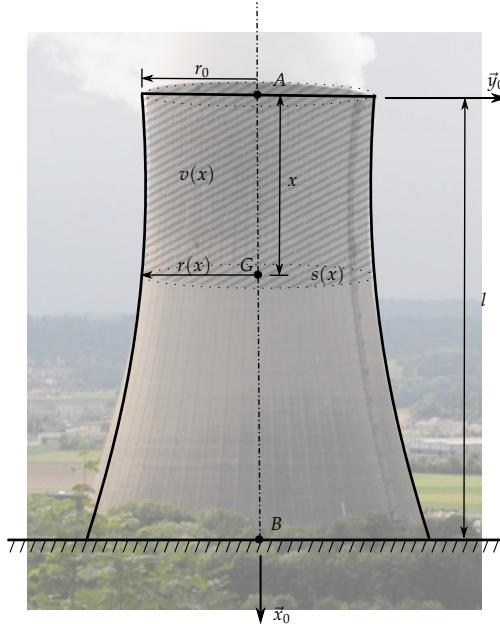
### Structure soumise à son propre poids

Considérons une structure verticale axi-symétrique telle que décrite ci-dessous de masse volumique  $\rho$ . La section droite  $S$  est variable selon  $x$ . On notera donc  $S(x)$  cette section droite. On

souhaite déterminer le profil optimal de la structure telle que la contrainte normale (en compression)  $\sigma_{xx}$  soit constante et égale à :

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{s}$$

où  $\sigma_{\text{lim}}$  est la résistance limite en compression du matériau considéré et  $s$  est le coefficient de sécurité de la structure.



Il est possible de démontrer que la contrainte normale  $\sigma_{xx}$  est constante pour une évolution exponentielle du rayon de la structure telle que :

$$r(x) = A \times e^{C \cdot x}$$

où  $A$  et  $C$  sont des constantes.

- Q1. Déterminer la valeur de  $A$  en fonction de  $r_0$ .
- Q2. Déterminer l'expression de la section droite  $S(x)$  en fonction de  $x$ .
- Q3. Déterminer l'expression du volume  $v(x)$  en fonction de  $x$ .
- Q4. Déterminer l'expression de l'effort normal  $N_x(x)$  en fonction de  $x$ .
- Q5. Déterminer l'expression de la contrainte normale  $\sigma_{xx}(x)$  en fonction de  $x$ .
- Q6. Déterminer l'expression de  $C$ , est-elle constante ?

Supposons que la structure soit pleine et réalisée en béton donc les caractéristiques sont :

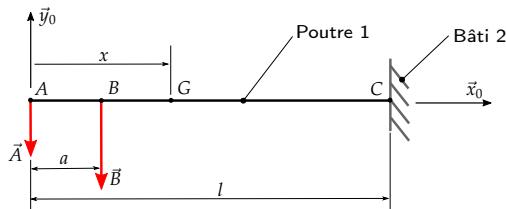
- une masse volumique  $\rho = 2400 \text{ kg.m}^{-3}$ ,
- une contrainte limite en compression  $\sigma_{\text{lim}} = 30 \text{ MPa}$ ,
- un coefficient de sécurité  $s = 2$ .

- Q7. Calculer la valeur de  $C$ , quelle est son unité ?

- Q8. Vérifier l'équation précédente à l'aide d'une équation aux dimensions.

### Flexion 1

La figure suivante donne la modélisation d'une poutre en sollicitation de flexion. Le plan  $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  est un plan de symétrie pour la poutre et les charges qui lui sont appliquées. On donne les valeurs suivantes :  $\|\vec{A}\| = A = 800 \text{ N}$ ;  $\|\vec{B}\| = B = 1000 \text{ N}$ ;  $l = 2 \text{ m}$ ;  $a = 0,8 \text{ m}$ . Le poids propre de la poutre 1 sera négligé.

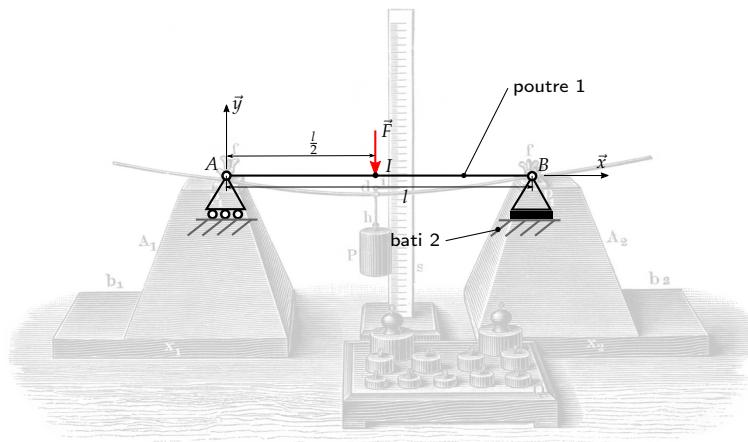


- Q1. Donner dans le repère galiléen  $\mathcal{R} (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  les composantes du torseur des actions transmissibles relativ à la liaison 2/1.
- Q2. Tracer le diagramme d'évolution de l'effort tranchant  $T_y$  et du moment fléchissant  $M_{fz}$  le long de la ligne moyenne d'abscisse  $x$ .
- En sachant que Le module de Young de la poutre est  $E = 200 \text{ GPa}$  et le moment quadratique de sa section droite est  $I_{Gz} = 328 \text{ cm}^4$
- Q3. Calculer dans le tronçon  $[BC]$  l'équation de la déformée  $f(x)$ .
- Q4. Déterminer la valeur de la flèche au point  $B$ .

### Flexion 2

La figure suivante donne la modélisation d'une poutre de longueur  $l$  en sollicitation de flexion 3 points. En arrière-plan se trouve l'illustration d'un dispositif de mesure de flèche utilisée au début du siècle dernier. L'essai de flexion 3 points est un essai très répandu pour caractériser les matériaux céramiques.

Supposons le plan  $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  un plan de symétrie pour la poutre et les charges qui lui sont appliquées. Le poids propre de la poutre 1 est négligé.



Dans la suite de l'exercice, on notera  $\|\vec{F}\| = F$ .

- Q1. Calculer les TAMT des liaisons mécaniques entre le bâti et la poutre notés  $\{\mathcal{T}_{A_{2 \rightarrow 1}}\}_A$  et  $\{\mathcal{T}_{B_{2 \rightarrow 1}}\}_B$ .
- Q2. Tracer le diagramme d'évolution de l'effort tranchant  $T_y$  et du moment fléchissant  $M_{fz}$  le long de la ligne moyenne d'abscisse  $x$ .
- Q3. Calculer l'équation de la déformée  $f(x)$  dans le tronçon  $[AI]$ .
- Q4. Vérifier les formules données par le formulaire de flexion (voir section 7.6.6).
- Q5. À l'aide des résultats précédents, de la relation 109 et du formulaire en annexe 9.4, déterminer la relation entre la contrainte normale  $\sigma_{xx}$  et la force appliquée sur la poutre  $F$ .

On supposera que la poutre possède une section rectangulaire. On notera  $h$  la dimension de la section suivant  $\vec{y}$  et  $b$  la dimension de la section suivant  $\vec{z}$ .

- Q6. À l'aide des résultats précédents et du formulaire en annexe 9.4 déterminer la relation entre la contrainte normale maximale  $\sigma_{xx}^{\max}$  et la force appliquée sur la poutre  $F$ .

Supposons les valeurs numériques suivantes :  $l = 20 \text{ cm}$ ;  $b = 4 \text{ cm}$ ;  $h = 2 \text{ cm}$ . De plus, durant l'essai de flexion 4 points, la valeur relevée de l'effort à rupture est :  $F_{\text{rupt}} = 250 \text{ N}$ .

- Q7. Déterminer la contrainte à rupture  $\sigma_f$  de ce matériau. De quel type de matériau peut-il s'agir ?

## 9 Annexes

### 9.1 Ergonomie et effort

Les pages suivantes décrivent les efforts journaliers de manutention en fonction de différentes postures et de la répétition du geste par heure. Ces 2 pages sont extraites de [6].

### 4.3 Identification des efforts

Les courbes d'efforts et les règles de correction s'appliquent sur l'abaque de la page suivante

Posture	Nature de l'effort	Sens de l'effort	Courbes repères	REGLES DE CORRECTION					
				Posture bonne et 1 main et	Posture mauvaise ou pas de point d'appui	Posture bonne et 2 mains et	Posture mauvaise		
DEBOUT	POUSSER		C5	Garder la même valeur	/ 2	plus 20%	Garder la même valeur		
	TIRER		C6						
	BAISSER		C5						
	LEVER		C6						
	TRANSPORTER une charge (1 à 3 m)*		C6						
	ADDITION		C7		Non concerné ou proscrit				
	ABDUCTION		C8						
	TOURNER un volant vertical		C3						
ASSIS	TOURNER un volant horizontal		C3	/ 2	Non concerné ou proscrit	Garder la même valeur	Garder la même valeur		
	POUSSER assis avec dossier		C3						
	TIRER (avec appui pour les pieds)		C4						
	BAISSER		C7						
	LEVER		C9	/ 2	Non concerné ou proscrit	Garder la même valeur	Garder la même valeur		
	ADDITION		C7						
	ABDUCTION		C8						
	TOURNER un volant vertical		C4						
	TOURNER un volant horizontal		C3						

Courbes repères	Effort exercé au pied		
	Posture bonne	Posture mauvaise	
C2	Garder la même valeur	/ 2	
C1	Garder la même valeur		

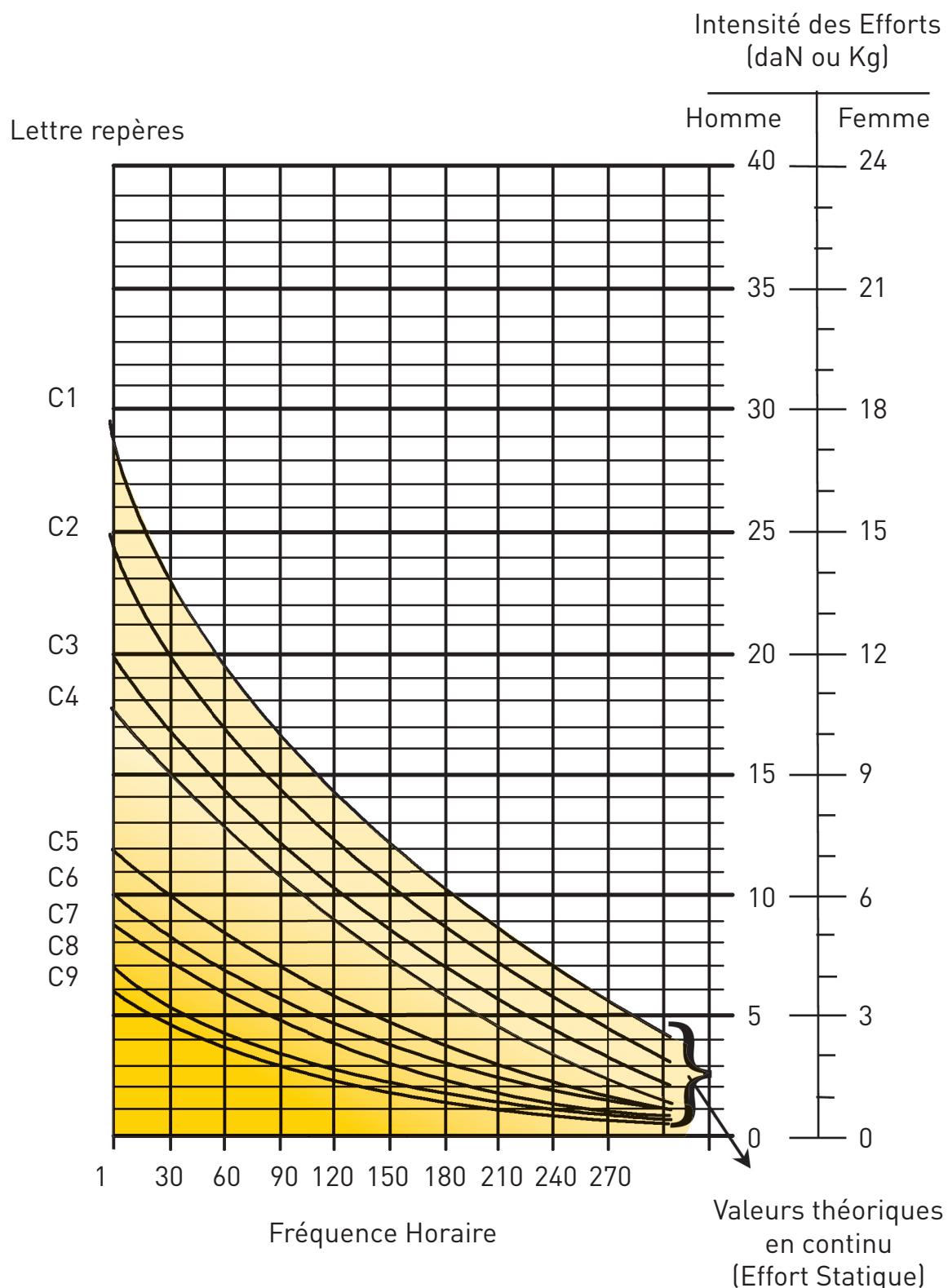
Exemple :  
Pour un rythme de travail de 60 f/h en position debout, lever une charge à une main dans une bonne posture ; prendre la courbe C6 qui indique : 7 kg maximum pour un homme, 4,2 kg pour une femme.

\*Les distances de transport d'une charge supérieures à 3 m ne sont acceptables qu'en activité de magasinage ou de manutention.

Dans tous les cas, proscrire les distances supérieures à 14 m par minute.

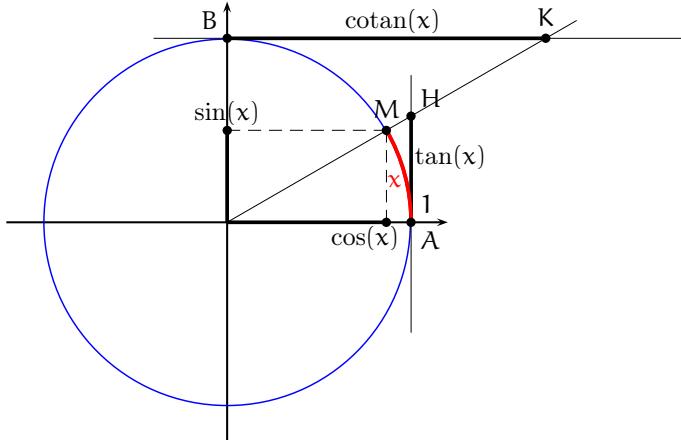
NB : limites d'efforts spécifiques (chariot, manutention et membres supérieurs/mains) cf pages 15 et 18

## 4.4 Limites d'Effort



## 9.2 Formulaire de trigonométrie

# Formulaire de trigonométrie circulaire



$\cos(x)$  = abscisse de  $M$   
 $\sin(x)$  = ordonnée de  $M$   
 $\tan(x) = \overline{AH}$   
 $\cotan(x) = \overline{BK}$   
 $e^{ix} = z_M$

Pour  $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ ,  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  et pour  $x \notin \pi\mathbb{Z}$ ,  $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ . Enfin pour  $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ ,  $\cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ .

Valeurs usuelles.

$x$ en °	0	30	45	60	90
$x$ en rd	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$
$\cotan(x)$	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\forall x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\forall x \notin \pi\mathbb{Z}, 1 + \cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

addition d'un tour	addition d'un demi-tour	angle opposé	angle supplémentaire
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$	$\cos(x + \pi) = -\cos x$	$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$	$\sin(x + \pi) = -\sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\tan(x + 2\pi) = \tan x$	$\tan(x + \pi) = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$
$\cotan(x + 2\pi) = \cotan x$	$\cotan(x + \pi) = \cotan x$	$\cotan(-x) = -\cotan x$	$\cotan(\pi - x) = -\cotan x$
angle complémentaire	quart de tour direct	quart de tour indirect	
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$	$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$	$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$	
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$	$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$	
$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cotan x$	$\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\cotan x$	$\tan(x - \frac{\pi}{2}) = -\cotan x$	
$\cotan(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$	$\cotan(x + \frac{\pi}{2}) = -\tan x$	$\cotan(x - \frac{\pi}{2}) = -\tan x$	

### Formules d'addition

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a\end{aligned}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

### Formules de duplication

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2 \cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 a \\ \sin(2a) &= 2 \sin a \cos a\end{aligned}$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

### Formules de linéarisation

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)) \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))\end{aligned}$$

### Formules de factorisation

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}\end{aligned}$$

### cos x, sin x et tan x en fonction de t=tan(x/2)

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan x &= \frac{2t}{1-t^2}\end{aligned}$$

### Divers

$$\begin{aligned}1 + \cos x &= 2 \cos^2 \frac{x}{2} \\ 1 - \cos x &= 2 \sin^2 \frac{x}{2} \\ \cos(3x) &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\ \sin(3x) &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x\end{aligned}$$

### Résolution d'équations

$$\begin{aligned}\cos x = \cos a &\Leftrightarrow \\ \exists k \in \mathbb{Z} / x = a + 2k\pi &\\ \text{ou} &\\ \exists k \in \mathbb{Z} / x = -a + 2k\pi &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin x = \sin a &\Leftrightarrow \\ \exists k \in \mathbb{Z} / x = a + 2k\pi &\\ \text{ou} &\\ \exists k \in \mathbb{Z} / x = \pi - a + 2k\pi &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan x = \tan a &\Leftrightarrow \\ \exists k \in \mathbb{Z} / x = a + k\pi &\end{aligned}$$

### Exponentielle complexe

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

#### Valeurs usuelles

$$e^0 = 1, e^{i\pi/2} = i, e^{i\pi} = -1, e^{-i\pi/2} = -i, e^{2i\pi/3} = j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i.$$

#### Propriétés algébriques

$$\forall x \in \mathbb{R}, |e^{ix}| = 1.$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}, \quad \frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}, \quad \frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix} = \overline{e^{ix}}$$

#### Formules d'EULER

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ et } e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x.$$

#### Formule de MOIVRE

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (e^{ix})^n = e^{inx}.$$

### 9.3 La droite des moindres carrés

Dans le cas particulier où l'on suppose que les populations de données  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  et  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , peuvent être approchées par une fonction affine (une droite), la méthode des moindres peut être appliquée afin de déterminer les paramètres  $a$  et  $b$  de la fonction affine  $f(x) = a.x + b$  où :

$$a = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \quad \text{et} \quad b = -a\bar{x} + \bar{y}$$

Avec :

- $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  les moyennes des  $x_i$  et des  $y_i$  :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

- $S_{xy}$  la covariance des  $x_i$  et  $y_i$  :

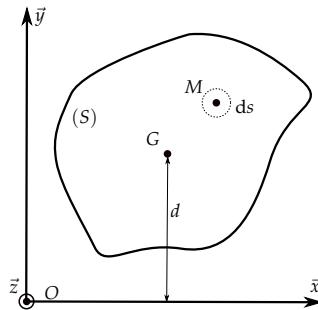
$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- $S_x^2$  le carré de l'écart type des  $x_i$  (également appelé variance) :

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

### 9.4 Caractéristiques géométriques des sections

Soit une surface plane ( $S$ ) et le repère  $\mathcal{R}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  tel que  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  appartienne au plan de ( $S$ ). Soit un point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  appartenant à ( $S$ ) et  $ds$  un élément infinitésimal de surface autour de  $M$  selon la figure ci-dessous. Soit  $G$  de coordonnées  $(x_G, y_G)$  le centre de surface de ( $S$ ). On notera  $S$  l'aire de la surface ( $S$ ) et  $d$  la distance entre les axes  $(O, \vec{x})$  et  $(G, \vec{x})$ .



#### Centre de surface $G$ d'une section $S$

Le centre de la surface ( $S$ ) est le barycentre  $G$  de l'ensemble des points  $M \in S$  affectés chacun d'un coefficient égal à son élément d'aire  $ds$  :

$$\overrightarrow{OG} \cdot S = \iint_{(S)} \overrightarrow{OM} \cdot ds \quad (131)$$

### Moment statique

Le moment statique  $W_{Ox}$  de la surface ( $S$ ) par rapport à l'axe ( $O, \vec{x}$ ) est défini par :

$$W_{Ox} = \iint_{(S)} y \, ds = y_G \times S \quad (132)$$

### Moment quadratique

Le moment quadratique  $I_{Ox}$  de la surface ( $S$ ) par rapport à l'axe ( $O, \vec{x}$ ) est défini par :

$$I_{Ox} = \iint_{(S)} y^2 \, ds \quad (133)$$

### Théorème de Huygens

Le moment quadratique d'une surface ( $S$ ) par rapport à un axe ( $O, \vec{x}$ ) de son plan est égal au moment quadratique de ( $S$ ) par rapport à l'axe ( $G, \vec{x}$ ) et passant par son centre de surface  $G$ , augmenté du produit de l'aire  $S$  par le carré de la distance des deux axes :

$$I_{Ox} = I_{Gx} + S \times d^2 \quad (134)$$

### Moment quadratique polaire

Le moment quadratique polaire  $I_O$  de la surface plane ( $S$ ) par rapport au point  $O$  est défini par :

$$I_O = \iint_{(S)} x^2 + y^2 \, ds = I_{Ox} + I_{Oy} \quad (135)$$

### Moment produit

Le moment produit  $I_{Oxy}$  de la surface plane ( $S$ ) par rapport aux axes ( $O, \vec{x}$ ) et ( $O, \vec{y}$ ) est défini par :

$$I_{Oxy} = \iint_{(S)} x \, y \, ds \quad (136)$$

### Théorème de Huygens des moments produits

Le théorème de Huygens des moments produits est défini par :

$$I_{Oxy} = I_{Gxy} + S \times x_G \times y_G \quad (137)$$

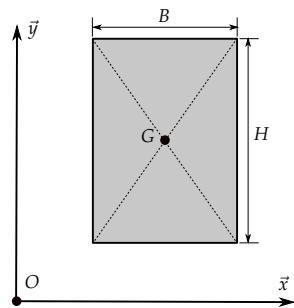
### Axes principaux

Il existe un repère principal ( $O, \vec{X}, \vec{Y}$ ) pour lequel nous aurons à la fois la plus grande valeur de  $I_{OX}$ , la plus petite valeur de  $I_{OY}$  ainsi que  $I_{OXY} = 0$ .  $I_{OX}$  et  $I_{OY}$  sont appelés *moments quadratiques*

principaux. Ce repère est défini par l'angle  $\varphi = (\vec{x}, \vec{X})$  tel que :

$$\tan 2\varphi = \frac{-2I_{Oxy}}{I_{Ox} - I_{Oy}} \quad (138)$$

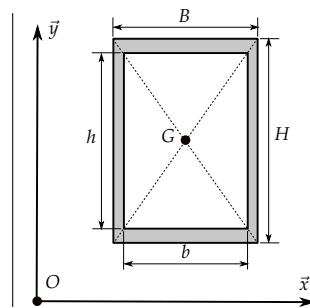
### Formulaire



$$S = BH$$

$$I_{Gx} = \frac{BH^3}{12}$$

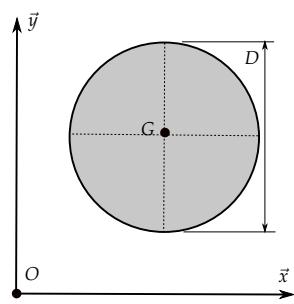
$$I_{Gy} = \frac{B^3H}{12}$$



$$S = BH - bh$$

$$I_{Gx} = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

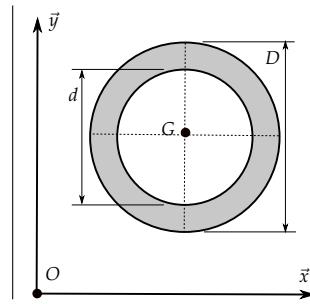
$$I_{Gy} = \frac{B^3H - b^3h}{12}$$



$$S = \pi R^2$$

$$I_{Gx} = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$I_{Gy} = \frac{\pi D^4}{64}$$



$$S = \pi(R^2 - r^2)$$

$$I_{Gx} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$

$$I_{Gy} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$

## Références

- [1] P. Agati, F. Lerouge, and M. Rossetto. *Résistance des matériaux : cours, exercices corrigés.* Sciences sup. Dunod, 1999.
- [2] Romary at French Wikipedia. Eprouvettes de traction en alliage d'aluminium. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eprouvettes\\_traction.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eprouvettes_traction.jpg). Licensed under the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported license.
- [3] G. Cailletaud. Mécanique des matériaux solides, 2012.
- [4] Cdang. Flat broken tensile sample in the self-tight jaws of a walter+bai testing machine. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eprouvette\\_plate\\_cassee\\_wb.JPG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eprouvette_plate_cassee_wb.JPG). Licence domaine public.
- [5] L. Chevalier. *Mécanique des systèmes et des milieux déformables : cours, exercices et problèmes corrigés.* Ellipses, 2004.
- [6] Comité de Normalisation des Moyens de production (CNOMO). Production ergonomics, main specifications intended for engineering and manufacture, version 3. <http://www.cnomo.com>. Copyright Renault 2007.
- [7] Museo Nazionale della Scienza e della Tecnologia. Experience of the force that a metal wire can produce in various lengths. [http://www.museoscienza.org/english/leonardo/models-exhibited/macchina-leo.asp?id\\_macchina=49](http://www.museoscienza.org/english/leonardo/models-exhibited/macchina-leo.asp?id_macchina=49). copyright 2017 Museo Nazionale della Scienza e della Tecnologia "Leonardo da Vinci" all rights reserved.
- [8] J. Douin. *Mécanique des milieux continus : introduction à la plasticité des matériaux.* Diderot multimedia, 1997.
- [9] J.L. Fanchon. *Guide de mécanique : Sciences et technologies industrielles, Statique, Cinématique, Dynamique, Résistance des matériaux, Elasticité, Mécanique des fluides, Vibrations,* édition 2001. Nathan, 2001.
- [10] U.S. federal government. The improved outer tactical vest (iotv), here in universal camouflage pattern, is issued to u.s. army soldiers. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Army\\_IOTV.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Army_IOTV.jpg). Licence domaine public.
- [11] Inria. Calcul avion. <https://www.rocq.inria.fr/gamma/gamma/Accueil/>. Licence inconnue.
- [12] Stefan Kühn. Tarr steps - pont en dalle de pierre préhistorique. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont#/media/File:Tarr\\_Steps\\_02.jpg](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont#/media/File:Tarr_Steps_02.jpg). Licence CC BY-SA 3.0.
- [13] B. Lawn. *Fracture of Brittle Solids.* Cambridge Solid State Science Series. Cambridge University Press, 1993.
- [14] Jay R Lund and Joseph P Byrne. Leonardo da vinci's tensile strength tests : implications for the discovery of engineering mechanics. *Civil engineering systems*, 18(3) :243–250, 2001.
- [15] Nuno Nogueira. A titanium hip prosthesis, with a ceramic head and polyethylene acetabular cup. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hip\\_prosthesis.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hip_prosthesis.jpg). Licence domaine public.
- [16] RedAndr. Kyocera ceramic knife. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CeramicKnife1.jpg>. Licence GNU Free Documentation.
- [17] David W. Richerson and Douglas W. Freitag; Oak Ridge National Laboratory (federal lab.). Bearing components made from 100% silicon nitride si3n4. <https://en.wikipedia.org/wiki/File:Si3N4bearings.jpg>. Licence domaine public.
- [18] SASgrafix. A new clearview typeface sign beside an old fhwa typeface, quebec. [https://en.wikipedia.org/wiki/Traffic\\_sign#/media/File:A20\\_0uest\\_km143.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Traffic_sign#/media/File:A20_0uest_km143.jpg). Licence domaine public.

- [19] Stephen Timoshenko. *History of strength of materials : with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures.* Courier Corporation, 1953.
- [20] Leonardo Da Vinci. Codex atlanticus, 1486-1490. Gravure 222.