Praktikum Mikrocontroller und Interface-Elektronik
Herleitungen Oszilloskop

Marc Geweiler, 7276730
Lino Sebeke, 7268890

22. Januar 2025

Aufgabe 1

Leiten Sie die Lade- und Entladekurve einer Reihenschaltung von R (Widerstand) und C (Kapazität) als Funktion der Zeit her.

Kirchhoffsches Gesetz: In der Reihenschaltung gilt die Maschengleichung:

$$U_{gesamt} = U_R + U_C \tag{1}$$

Durch das einsetzen der Bauteilgleichungen ergibt sich:

$$U_{gesamt} = RC\frac{du_C}{dt} + u_c(t) \tag{2}$$

Im nächsten Schritt muss diese inhomogene, lineare Differenzialgleichung mit Hilfe des Exponentialansatzes gelöst werden.

$$u_{Ci}(t) = U_{gesamt} = const. \tag{3}$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_c(t) = 0 \tag{4}$$

Durch Einsetzen des Exponentialansatzes in die Differentialgleichung ergibt sich:

$$(-RC\frac{1}{\tau} + 1)u_{Ch0}e^{\frac{-t}{\tau}} = 0 \tag{5}$$

Die Exponentialfunktion ist niemals Null. Unter der Annahme $u_{Ch} \neq 0$ muss

$$\tau = RC \tag{6}$$

Somit ergibt sich für die allgemeine Lösung:

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Ci}(t) = u_{Ch0}e^{\frac{-t}{\tau}} + U_{gesamt} \tag{7}$$

Der Kondensator ist zu Beginn ungeladen, ein Schalter schaltet zu $t = 0$ eine Spannung (hier 3,3V) ein.

$$u_C(0) = u_{C0} \tag{8}$$

Daraus folgt:

$$u_{Ch0} = u_{C0} - U_{gesamt} \tag{9}$$

Die Kondensatorspannung kann somit über

$$u_C(t) = u_{C0} e^{\frac{-t}{\tau}} - U_{gesamt}(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) \tag{10}$$

bestimmt werden. Der entladene Kondensator lädt mit

$$u_C(t) = U_{gesamt}(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) \tag{11}$$

Analog ist die Entladekurve

$$u_C(t) = U_{C0} e^{\frac{-t}{\tau}} \tag{12}$$

mit $U_{C0} = vollgeladenerKondensator$.

Aufgabe 2

Leiten Sie die Zeit δt , die beim Laden des Kondensators zwischen 1/4 ind 3/4 der Ladung vergeht, als Funktion von RC her.

Die Ladung $q(t)$ des Kondensators beim Laden verläuft nach (siehe 1)

$$q(t) = C * U_{gesamt}(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) \tag{13}$$

wobei $C * U_{gesamt}$ die maximale Ladung des Kondensators ist.
Die relative Ladung, nach der wir suchen, ist der Anteil der maximalen Ladung mit

$$\frac{q(t)}{C * U_{gesamt}} = 1 - e^{\frac{-t}{\tau}} = x \tag{14}$$

Für $x_1 = \frac{1}{4}$ ergibt sich

$$\frac{1}{4} = 1 - e^{\frac{-t_1}{\tau}} \tag{15}$$

Nach umstellen also

$$t_1 = -\tau * \ln \frac{3}{4} \tag{16}$$

Für $x_1 = \frac{1}{4}$ ergibt sich

$$\frac{3}{4} = 1 - e^{\frac{-t_1}{\tau}} \tag{17}$$

Nach umstellen also

$$t_2 = -\tau * \ln \frac{1}{4} \tag{18}$$

Als nächstes wird die Zeitdifferenz hinzugezogen:

$$\delta t = t_2 - t_1 \tag{19}$$

Nach umstellen und einsetzen also

$$\delta t = \tau[\ln(\frac{3}{4}) - \ln(\frac{1}{4})] \tag{20}$$

$$\delta t = \tau \ln 3 = RC \ln(3) \tag{21}$$