

Simulación

Primavera 2018

Certamen 1

27/11/18

Tiempo límite: 90 Minutos

Nombre:

Pavta

Código de honor:

No he dado ni recibido
ayuda durante este certamen

Firma

Este certamen contiene 6 páginas (incluyendo esta cubierta) y 4 preguntas. Cerciorece que su copia contiene todas las páginas. Ponga su iniciales arriba de cada página en el caso de que separe las hojas y estas se puedan perder.

Usted **PUEDE** utilizar una hoja A4 escrita en una de sus carillas para el certamen.

Se requiere que muestre su trabajo para cada problema en este certamen. Las siguientes reglas aplican:

- **Organize su trabajo**, de forma razonablemente ordenada, en el espacio entregado. Trabajo desorganizado difícil de evaluar recibirá poco o nada de puntaje (independiente de su exactitud).
- **Respuestas misteriosas o sin fundamentos no recibirán puntaje.** Una respuesta correcta, sin soporte de calculos, explicación, o trabajo algebraico **NO** recibirá puntaje; una respuesta incorrecta que sea el resultado de calculos intermedios correctos podría recibir puntaje parcial.
- Si necesita mas espacio, use el reverso de la página; indique claramente cuando haga esto.

| Problem | Points | Score |
|---------|--------|-------|
| 1 | 15 | |
| 2 | 15 | |
| 3 | 15 | |
| 4 | 15 | |
| Total: | 60 | |

No escriba en la tabla a la derecha.

Números Aleatorios

1. Utilizando los parámetros $Z_0 = 1$, $a = 630.360.016$, $c = 0$, y $m = 2.147.483.647$,

(a) (9 points) Genere 3 números aleatorios utilizando el Generador de Congruencia Lineal explicado en clases.

$$Z_i = (a Z_{i-1} + c) \bmod m$$

$$Z_1 = (630360016 * 1 + c) \bmod 2147483647$$

$$Z_1 = 630360016$$

$$u_1 = Z_1 / m = 0.2935$$

$$Z_2 = (630360016^2) \bmod 2147483647$$

$$Z_2 = 1549035330$$

$$u_2 = 0.7213$$

$$Z_3 = (1549035330 * 630360016) \bmod 2147483647$$

$$Z_3 = 264620982$$

$$u_3 = 0.12323$$

(b) (6 points) Usted quiere establecer semillas que estan 100 números aparte, determine Z_{100}

$$Z_{100} = \left[a^i Z_0 + \frac{c(a^i - 1)}{a - 1} \right] \bmod m$$

$$Z_{100} = \left[630360016^{100} * 1 \right] \bmod 2147483647$$

$$Z_{100} = 435.421.607.$$

Variables Aleatorias

2. Utilizando los números aleatorios 0.6754, 0.8602.

- (a) (5 points) Genere una variable aleatoria uniforme entre 5 y 12 usando el primer número aleatorio.

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(x) = u$$

$$\frac{x-a}{b-a} = u$$

$$x = a + u(b-a)$$

$$x = 5 + 0.6754(12-5)$$

$$x = 9.7282$$

- (b) (5 points) Genere una variable aleatoria exponencial con $\lambda = 5$ usando el segundo número aleatorio

$$F(x) = 1 - e^{-x/\beta}$$

$$F(x) = u$$

$$1 - e^{-x/\beta} = u$$

$$-e^{-x/\beta} = u - 1 \quad / -1$$

$$e^{-x/\beta} = 1 - u \quad / \log$$

$$-x/\beta = \log(1 - u) \quad / -1$$

$$x = -\beta \log(1 - u)$$

$$x = -5 \log(1 - 0.8602)$$

$$x = 9.9380$$

- (c) (5 points) Utilizando una mezcla de las dos distribuciones anteriores con pesos $p_1 = 0.3$ y $p_2 = 1 - p_1$, y con números aleatorios 0.1453, 0.8763 genere una variable aleatoria mixta.

1) determinar que distribución

2) genere $U_{(0,1)} = 0.1453$ con la distribución elegida.
 $X = 5 + 0.8763(12 - 5)$

Procesos Especiales

3. Usted necesita determinar los tiempos de llegada de un proceso de intensidad variable en el tiempo. La siguiente información ha sido obtenida:

$$\lambda(x) = \begin{cases} 3 & \text{for } x \in [0, 3[\\ 6 & \text{for } x \in [3, 5[\\ 1 & \text{for } x \in [5, 7] \end{cases}$$

- (a) (10 points) Determine la distribución inversa acumulada.

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \int_0^x 3 dt = [3t]_0^x = 3x, & x \in [0, 3[\\ \int_0^3 3 dt + \int_3^x 6 dt = 9 + [6t]_3^x = 6x - 18 + 9 \\ & = 6x - 9, & x \in [3, 5[\\ \int_0^3 3 dt + \int_3^5 6 dt + \int_5^x 1 dt = [3t]_0^3 + [6t]_3^5 \\ & + [1t]_5^x \end{cases}$$

$$0 \leq u/3 < 3 \quad /3$$

$$0 \leq u < 9$$

$$= 9 + 30 - 18 + x - 5$$

$$= x + 16, \quad x \in [5, 7]$$

$$\Lambda^{-1}(u) = \begin{cases} 3x = u \Rightarrow u/3, & x \in [0, 3[\\ 6x - 9 = u \Rightarrow \frac{u+9}{6}, & x \in [3, 5[\\ x + 16 = u \Rightarrow u - 16, & x \in [5, 7] \end{cases}$$

- (b) (5 points) Utilizando los siguientes números aleatorios: 0.872, 0.145, y 0.543 determine el tiempo de las primeras tres llegadas al sistema.

$$1) t_1^* = 0 - \ln(0.872) = 0.137$$

$$t_1 = \Delta^{-1}(t_1^*) = 0.137/3 = 0.0456$$

$$2) t_2^* = 0.137 - \ln(0.145) = 2.0680$$

$$t_2 = \Delta^{-1}(t_2^*) = 2.0680/3 = 0.689$$

$$3) t_3^* = 2.0680 - \ln(0.543) = 2.6786$$

$$t_3 = \Delta^{-1}(t_3^*) = 2.6786/3 = 0.89287$$

Comparación de sistemas alternativos

4. Usted desea saber si dos configuraciones de su sistema son estadísticamente diferentes y ha recolectado la siguiente información.

| Experiment | Rep 1 | Rep 2 | Rep 3 | Rep 4 | Rep 5 |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| +++ | 13.4 | 14.78 | 18.52 | 9.56 | 9.92 |
| + - + | 7.45 | 9.67 | 8.92 | 5.32 | 6.65 |

$$t = 2.78$$

- (a) (10 points) Determine si las configuraciones producen resultados estadísticamente diferentes. Asuma que se utilizaron números aleatorios comunes.

| | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|------------------------|
| | dif 1 | dif 2 | dif 3 | dif 4 | dif 5 | \bar{y}_{com} |
| $(+++)-(+-+)$ | 5.95 | 5.11 | 9.6 | 4.24 | 3.77 | 5.634 |

$$S_d^2 = \frac{1}{5-1} \left((5.95-5.634)^2 + (5.11-5.634)^2 + (9.6-5.634)^2 + (4.24-5.634)^2 + (3.77-5.634)^2 \right)$$

$$= 5.90883$$

$$S_d = \sqrt{5.90883} = 2.431$$

$$t_{calc} = \frac{\bar{d} - 0}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{5.634}{2.431 / \sqrt{5}} = 5.102$$

Los modelos son diferentes.

- (b) (5 points) Usted quiere reducir el ancho medio de primer experimento a un 20% de su valor inicial. ¿Cuántas muestras adicionales necesita?

$$\bar{x} = 13.236 \quad s^2 = 13.71$$

$$\text{Half-width} = t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}$$

$$= 2.78 \times \frac{\sqrt{13.71}}{\sqrt{5}}$$

$$= 4.60$$

$$n = \left\lceil \frac{5 \times 4.6^2}{(0.2 \times 4.6)^2} \right\rceil = 125$$