

# Equazione di Lane-Emdem

Sara Evangelista

May 4, 2024

## Abstract

L'equazione di Lane-Emdem è una relazione adimensionale che descrive sfere di fluido autogravitante e politropico in equilibrio idrostatico. Viene solitamente utilizzata per modellizzare alcuni tipi di stelle. È risolvibile esattamente solo per determinati valori di  $n$ , l'indice politropico che compare nell'equazione di stato da cui deriva; per tutti gli altri è necessario adottare un metodo numerico. Nella seguente relazione si andrà a risolvere numericamente l'equazione per alcuni valori di  $n$ , confrontando i risultati con i valori analitici quando possibile, dopo essersi accertati della convergenza dell'algoritmo utilizzato. Successivamente si andrà a identificare i valori della prima intersezione con le ascisse, legato al raggio, a studiare la densità media e il profilo di densità, andando a confrontare per ogni caso quanto ottenuto con i valori presenti in letteratura. E infine si andrà a calcolare il valore della massa di Chandrasekhar, parametro molto utilizzato in astrofisica, che si può ricavare dalla soluzione numerica per  $n=3$ . Tutti i risultati ottenuti corrispondono alle aspettative e sono compatibili con i valori noti.

## 1 Soluzione dell'equazione

L'equazione di Lane-Emdem si può ricavare partendo dalla relazione di equilibrio idrostatico di un corpo a simmetria sferica, in cui la pressione termica si contrappone a quella gravitazionale.

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r) \frac{GM_{<r}}{r^2} \quad (1)$$

dove  $M_{<r}$  corrisponde alla massa di fluido contenuta in una sfera di raggio  $r$  e si scrive:

$$M_{<r} = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (2)$$

Sostituendo la formula della massa e derivando ambi i membri è possibile ricondurre (1) alla seguente forma:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -\rho G 4\pi r^2 \quad (3)$$

A questo punto si assume che il fluido segue un'equazione di stato politropica, dove l' $n$  che compare è detto indice politropico, e che il trasporto di energia avvenga per mezzo di convezione adiabatica, che corrisponde ad assumere valida la seguente formula:

$$P = K_0(T) \rho^\gamma = K_0(T) \rho^{\frac{n+1}{n}} \quad (4)$$

Infine si impongono le seguenti condizioni al contorno, dove la seconda è necessaria per evitare divergente nell'origine e la prima mi impone una densità nel centro della sfera pari a  $\rho_c$ , detta densità critica.

$$\begin{cases} \rho(r=0) = \rho_c \\ \left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{r=0} = 0 \end{cases}$$

L'equazione che si otterrebbe facendo le opportune sostituzioni non è adimensionale. Per questo motivo convenzionalmente si fa il seguente cambio di variabile, in modo tale che tutte le variabili che compaiono siano adimensionali, come si può vedere per mezzo di un'analisi dimensionale.

$$\rho = \rho_c \theta^n(\xi) \quad r = \xi \alpha \quad \alpha = \frac{K_0(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1}{n}-1} \quad (5)$$

Si ottiene perciò l'equazione di Lane-Emdem solitamente utilizzata e che si andrà a risolvere successivamente.

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (6)$$

In seguito al cambio di variabile le condizioni al contorno sono diventate:

$$\begin{cases} \theta(\xi = 0) = 1 \\ \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0 \end{cases}$$

Per la soluzione numerica si decide di utilizzare l'algoritmo di Runge-Kutta 4 avendo un'accuratezza locale di  $O(h^5)$ . Si sceglie come intervallo in cui valutare l'equazione  $\xi \in [0, 20]$  poiché, come si può osservare dalla letteratura esistente, in tale range sono contenute tutte le intersezioni con l'asse orizzontale delle funzioni al variare di  $n$ , e perciò è utile al nostro scopo. Per poter risolvere l'equazione è però utile espanderla, svolgendo le derivate, nel seguente modo:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{d^2\theta}{d\xi^2} = -\theta^n \quad (7)$$

### 1.1 Singolarità nell'origine

Si noti come il termine  $\frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi}$  sia singolare in zero, portando dei problemi nell'integrazione. Questo si può evitare andando a considerare lo sviluppo in serie di  $\xi$  nell'origine:

$$\theta(\xi) \approx 1 - \frac{1}{6}\xi^2 \quad (8)$$

$$\left. \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} \approx -\frac{2}{3} \quad (9)$$

In questo modo si potrebbe far partire l'integrazione già da  $\xi = 0$ , ma è una scelta migliore utilizzare come valore iniziale di  $0 < \xi \ll 1$  come consigliato in alcuni testi. (Hansen, Kawaler, and Trimble 2004)

### 1.2 Confronto con le soluzioni analitiche

È possibile risolvere l'equazione di Lane-Emdem analiticamente solo per  $n = 0, 1, 5$ , per mezzo di diversi metodi. Le soluzioni che si ottengono sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= 1 - \frac{1}{6}\xi^2 & n = 0 \\ \theta(\xi) &= \frac{\sin(\xi)}{\xi} & n = 1 \\ \theta(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{3}}} & n = 5 \end{aligned}$$

Si può vedere la soluzione numerica per questi indici politropici, trovata con il metodo descritto precedentemente, graficata in Figura 1.

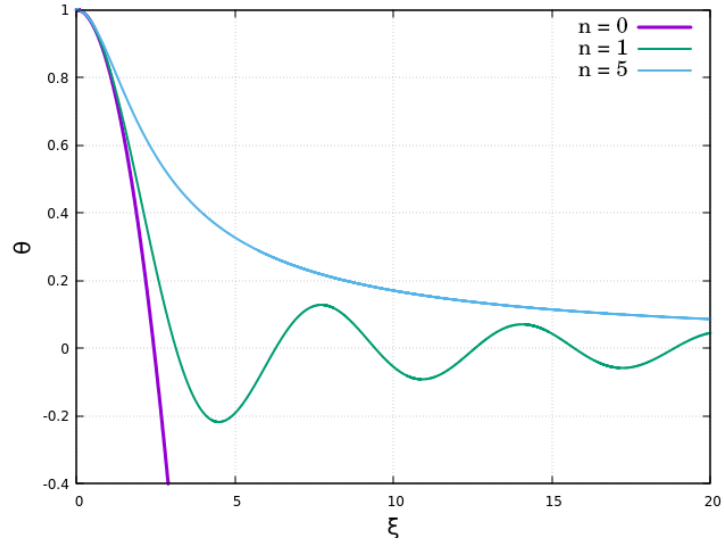


Figure 1: Soluzioni dell'equazioni di Lane-Emdem per  $n=0,1,5$

Dopodiché si può fare un confronto quantitativo tra la soluzione numerica e quella analitica per ognuno dei valori di  $n$ . Si va in particolare a fare un grafico della loro differenza, presa in valore assoluto, per ogni valore di  $\xi$  considerato, per mezzo della seguente formula:

$$\Delta = |\theta(\xi) - \bar{\theta}(\xi)| \quad (10)$$

Dal confronto emerge un andamento non costante, ma comunque assumendo valori dell'ordine di  $10^{-10}$  che ci porta a concludere che le due soluzioni possono essere considerate confrontabili.

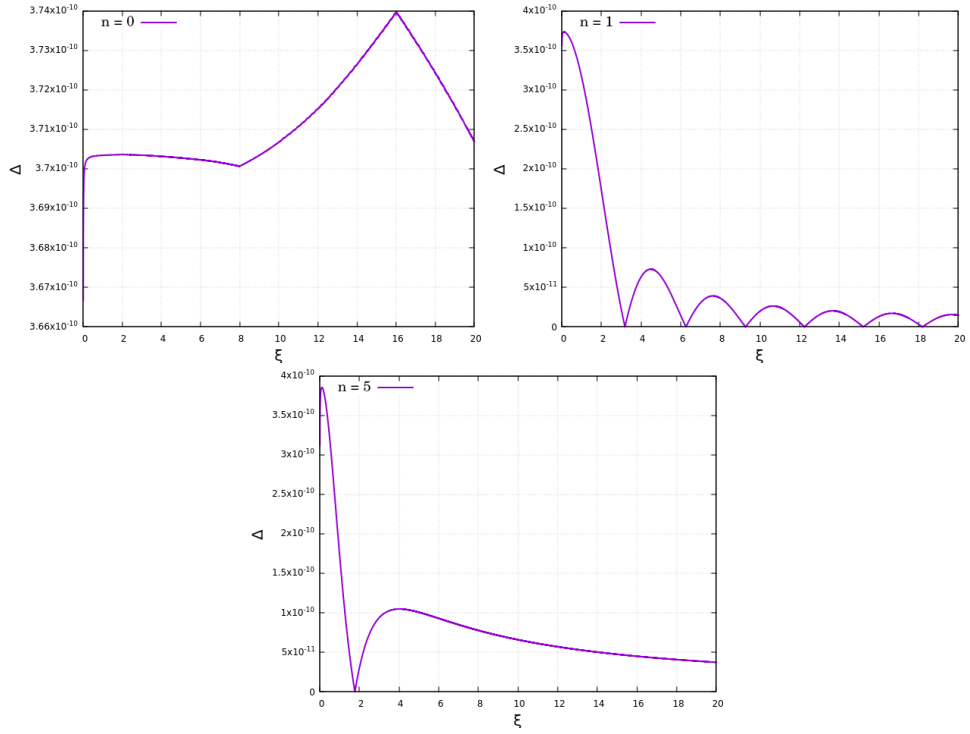
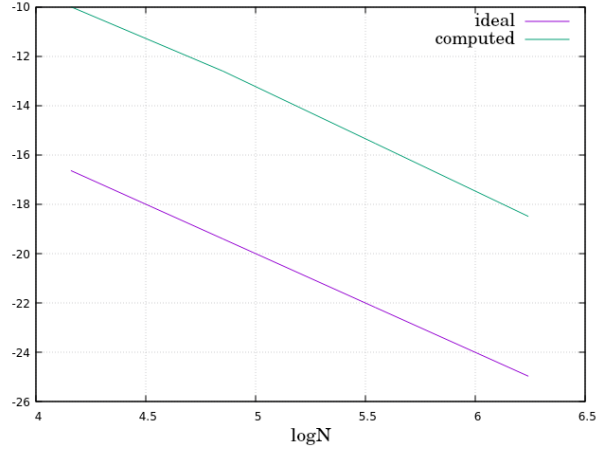


Figure 2: Confronto tra soluzione numerica e soluzione analitica per  $n = 0, 1, 5$

### 1.3 Convergenza dell'algoritmo

Si vuole inoltre verificare che l'algoritmo utilizzato per risolvere l'equazione converga al diminuire dell'intervallo  $h$  considerato. A questo fine si fa un grafico del logaritmo della differenza presa in valore assoluto tra soluzione analitica e numerica, valutate nel punto finale ( $\xi = 20$ ), per  $n=5$ . Si parte da 64 punti, andando a raddoppiarli ad ogni ciclo. Si può vedere che al crescere del numero di punti la differenza decresce e in particolare ha un andamento confrontabile con la funzione  $y = -4\log N$ , perciò si può concludere che converge al quart'ordine, come ci si aspetta dall'algoritmo considerato.



### 1.4 Soluzioni numeriche

Dopo aver verificato la convergenza del metodo si può procedere a risolvere l'equazione anche per valori dell'indice politropico di cui non abbiamo la soluzione esatta. Di seguito si possono vedere sullo stesso grafico confrontate le soluzioni ottenute per  $n=1, \frac{3}{2}, 3, 4$ . La soluzione con indice semi-intero si ferma alla prima intersezione con l'asse delle ascisse poiché per risolverla oltre quel punto sarebbe necessario calcolare la radice quadrata di un numero negativo.

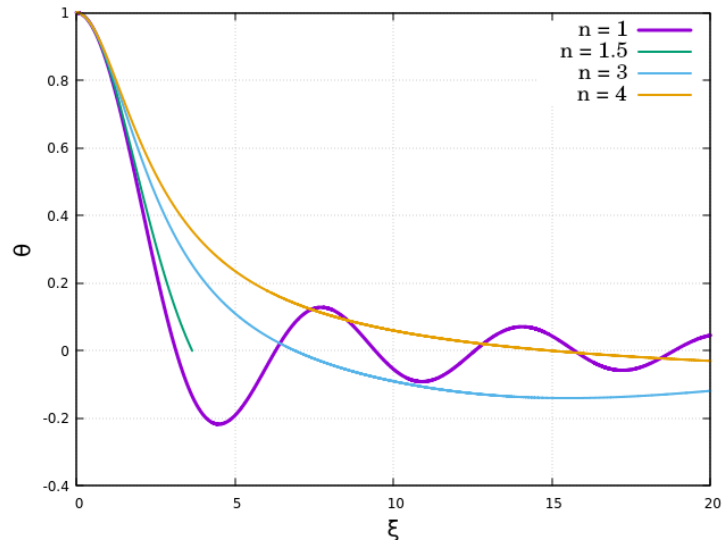


Figure 3: Soluzioni dell'equazioni di Lane-Emdem per  $n=1, \frac{3}{2}, 3, 4$

La soluzione per  $n = 3$  è particolarmente importante perché è utilizzata per studiare l'approssimazione di Eddington per stelle completamente radiative, come viene fatto per il nostro Sole. Inoltre come vedremo in seguito è anche usata per lo studio di alcuni tipi di nane bianche e stelle di neutroni.

## 2 Analisi dei risultati

Utilizzando le soluzioni numeriche appena calcolate è possibile andare a studiare l'andamento di alcune grandezze fisiche che caratterizzano le stelle che si stanno modellizzando. In particolare di seguito ci si concentra sul raggio, la densità media e il profilo di densità.

### 2.1 Raggio delle stelle

Andando ad analizzare il cambio variabile fatto in (5) si può notare come un'intersezione della funzione  $\theta$  con l'asse delle ascisse corrisponde a una densità nulla, ovvero ci si trova sulla superficie della stella che stiamo studiando. Perciò  $\xi_1$ , il valore in cui avviene l'intersezione, è proporzionale al raggio a meno del fattore  $\alpha$  precedentemente definito, il quale dipende dalle caratteristiche fisiche intrinseche della stella. Nel caso in cui la funzione invece presenti più di un punto a densità nulla, quelli successivi al primo non vengono considerati non avendo significato fisico, in quanto collocati al di fuori della superficie della stella.

Si procede quindi andando a stimare il valore delle intersezioni di  $\theta(\xi)$  per alcuni valori arbitrari dell'indice politropico  $n$ , sia interi che sem-interi, purché  $n < 5$  perché altrimenti non sono presenti intersezioni. Per fare ciò si cerca durante la risoluzione dell'equazione differenziale l'intervallo in cui il segno della funzione cambia e se ne prende il valor medio. In questo modo l'incertezza associata al risultato sarà la metà dell'intervallo considerato per RK4, ovvero  $h = 0.003$ . Si va poi a confrontare il risultato ottenuto con questo procedimento con quelli riportati in letteratura (Chandrasekhar 1970).

	computed	reference
$n = 0.5$	2.75	2.7528
$n = 1.5$	3.65667	3.65375
$n = 3$	6.89667	6.89685
$n = 4$	14.97	14.97155

Table 1: Confronto tra intersezioni trovate numericamente  $\xi_1$  e valori presi in letteratura  $\xi_0$

Si può osservare come in tutti i casi i valori sono confrontabili entro l'incertezza associata.

Per i valori di  $n$  a cui è associata una soluzione analitica invece si procede con un doppio controllo del risultato numerico, confrontandolo sia con il valore della soluzione esatta, sia con lo zero calcolato applicando il metodo di bisezione alla funzione analitica.

	computed	bisection	analytical
$n = 0$	2.45	2.44983	$\sqrt{6}$
$n = 1$	3.14333	3.14124	$\pi$
$n = 5$	$\nexists$	$\nexists$	$\infty$

Table 2: Confronto tra intersezioni trovate numericamente, valori ottenuti con il metodo di bisezione applicato alla funzione analitica e soluzione esatta.

Anche in questo caso i risultati possono essere considerati tra loro compatibili.

### 2.2 Profilo di densità

Un'altra caratteristica fisica che si può andare a studiare è il grafico del profilo di densità all'interno del corpo celeste, per vedere come varia la densità in funzione di  $\xi < \xi_1$ . Si utilizza anche in questo caso il cambio di variabile (5) per scrivere una relazione tra  $\theta$  e la densità scritta in unità di densità critica.

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \theta^n \quad (11)$$

Di seguito sono mostrati i grafici ottenuti per alcuni valori della variabile  $n$ .

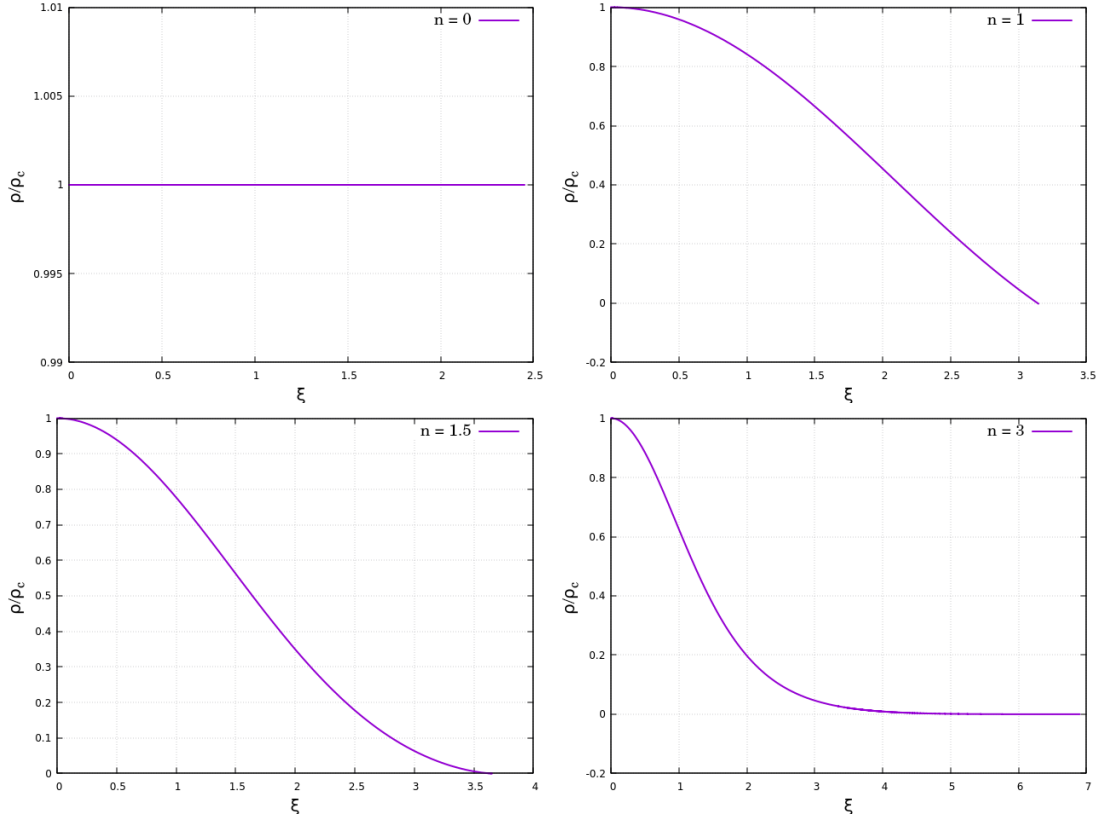


Figure 4: Profili di densità in unità di densità critica per  $n = 0, 1, \frac{3}{2}, 3$

### 2.3 Densità media

Si vuole ora andare a stimare il valore della densità media per unità di densità critica della stella al variare di  $n$ .

Si prenda l'espressione integrale della massa (2) e si cambi la variabile di integrazione:

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = 4\pi \rho_c \alpha^3 \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^2 d\xi \quad (12)$$

Per mezzo dell'equazione di Lane-Emdem e della relazione  $r = \alpha\xi$  si può riscrivere questa relazione nel seguente modo, facilitando così l'integrazione diretta:

$$M = 4\pi \rho_0 \alpha^3 \int_0^{\xi_1} -\frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi = 4\pi \rho_0 r^3 \left( -\frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \right) \quad (13)$$

Che andando a valutare sulla superficie diventa:

$$M = 4\pi \rho_0 R^3 \left( -\frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1} \quad (14)$$

Infine utilizzando la formula della densità media  $\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$  si può scrivere:

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} = \left( -\frac{3}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1} \quad (15)$$

Dove il membro di destra dipende dall'indice politropico  $n$ .

Si va quindi a stimare l'inverso di questo valore  $\rho_0 / \bar{\rho}$  al variare di  $n$  e si confronta con i risultati presenti in letteratura (Hansen, Kawaler, and Trimble 2004) :

	computed	reference
n = 0	1.00273	1.00000
n = 1	3.2814	3.28987
n = 1.5	5.98316	5.99071
n = 3	54.1782	54.1825

Table 3: Confronto tra  $\rho_0 / \bar{\rho}$  ottenute numericamente e trovate in letteratura.

Per calcolare la derivata valutata in  $\xi_1$  si è utilizzata la seguente formula ricavata dalle espansioni in serie di Taylor e precisa al prim'ordine:

$$f'_i = \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h} + \frac{3}{2}f''_i h \quad (16)$$

Dove  $h$  è l'ampiezza degli intervalli di RK4 e  $f_{i-1}$  e  $f_{i-2}$  sono i valori della funzione calcolati durante la risoluzione dell'equazione, un punto e due punti prima dell'intervallo in cui si trova l'intersezione. Questa espressione coinvolge solo valori della funzione valutati a sinistra dello zero, in modo da poter essere utilizzata anche per valori di  $n$  semi-interi, per cui  $\theta(\xi)$  non è ben definita per valori di  $\xi$  negativi. Si può vedere come i valori ottenuti siano compatibili tra loro entro una certa incertezza.

### 3 Massa di Chandrasekhar

Le stelle di neutroni e le nane bianche possono essere considerate come formate da gas degeneri. In particolare nel caso delle stelle di neutroni e delle nane bianche molto massive si parla di gas degeneri relativistico (ovvero a densità molto alta). Quest'ultimo è ben descritto dall'equazione politropica con  $n=3$ . In base a queste considerazioni è lecito andare a stimare la massa limite di Chandrasekhar a partire dall'equazione di Lane-Emden per  $n = 3$ . Essa rappresenta la massa più grande che può avere una nana bianca per rimanere stabile e non collassare ulteriormente.

La costante  $K_0$ , che compare nell'equazione di stato politropica, per questo tipo di sistemi si può scrivere nel seguente modo:

$$K_0 = \frac{3^{1/3}\pi^{2/3}}{2^{4/3}4} \frac{\hbar c}{m_p^{4/3}} \quad (17)$$

Andando a riprendere l'equazione (13) e sostituendo l'espressione esplicita di  $\alpha$  otteniamo:

$$M = 4\pi \left[ \frac{(n+1)K_0}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_0^{(3-n)/2n} \xi_1^2 \left( -\frac{d\theta}{d\xi_1} \right)_{\xi_1} \quad (18)$$

Si sostituisca successivamente anche i valori di  $n$  e  $K_0$ , notando che per  $n=3$  dipendenza dalla densità critica scompare. L'espressione finale che si ottiene in questo modo è:

$$M = \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{4m_p^2} \frac{\sqrt{3\pi}}{2} \xi_1^2 \left( -\frac{d\theta}{d\xi_1} \right)_{\xi_1} \quad (19)$$

Si può osservare come il risultato ottenuto non dipende esplicitamente del raggio e perciò il valore limite è uguale per tutte le stelle.

Per trovare il valore numerico di questa espressione è necessario andare a valutare la derivata prima di  $\theta$  in  $\xi_1$ . In questo caso, a differenza del precedente, la funzione è definita da entrambe le parti dello zero e perciò si può utilizzare un metodo più preciso, in particolare si opta per quello della central differentiation, preciso al secondo ordine.

$$f' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (20)$$

Dove si considera come  $f_i$  la funzione calcolata nel centro dell'intervallo in cui si ipotizza l'intersezione,  $f_{i+1}$  e  $f_{i-1}$  sono i valori nei punti precedenti e successivo e  $h$  è la metà dell'intervallo utilizzato per RK4. Con questo metodo il valore della massa di Chandrasekhar scritta in unità di masse solari risulta essere:

$$M_{\text{Chandrasekhar}} = 1.434 M_{\odot} \quad (21)$$

La quale è compatibile con il valore  $1.4 M_{\odot}$  comunemente accettato (Hawking 2003).

## 4 Conclusioni

Per mezzo dell'algoritmo di RK4 è stato possibile risolvere in modo soddisfacente l'equazione di Lane-Emdem trovando le soluzioni per vari indici politropici, sia interi che seminteri, nonostante problemi di divergenza sull'asse delle ordinate che si sono superati utilizzando uno sviluppo in serie. Questo procedimento è stato giustificato da uno studio di convergenza e da un confronto con le soluzioni esatte ove esistenti.

A partire dai risultati ottenuti è stato possibile quindi andare a studiare l'andamento di alcuni parametri fisici che caratterizzano le stelle che si vanno a modellizzare, tra cui il raggio, la densità media e il profilo di densità. In tutti i casi i risultati sono stati confrontati con quelli riportati in letteratura o ricavati dalla soluzione esatta con esito positivo. Infine anche il calcolo della Massa di Chandrasekhar, parametro fondamentale nello studio dell'evoluzione stellare, ha portato a un valore compatibile con quello comunemente accettato dalla comunità scientifica.

## Bibliografia

- Chandrasekhar, Subrahmanyam (1970). *An introduction to the study of stellar structure*. eng. Unabr. and corr. republ. of orig. publ. 1939 by Univ. of Chicago Pr. Dover books on astronomy. New York: Dover Publ. ISBN: 978-0-486-60413-8.
- Hansen, Carl J., Steven D. Kawaler, and Virginia Trimble (2004). *Stellar interiors: physical principles, structure, and evolution*. eng. 2. ed. Astronomy and astrophysics library. New York, NY: Springer. ISBN: 978-1-4612-6497-2 978-0-387-20089-7. DOI: 10.1007/978-1-4419-9110-2.
- Hawking, Stephen W., ed. (2003). *Three hundred years of gravitation*. eng. Transferred to digital print. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN: 978-0-521-37976-2 978-0-521-34312-1.



## 5 Inserting Code

Di seguito è riportato il codice utilizzato:

```
1 #include <iostream>
2 #include <cmath>
3 #include <iomanip>
4 #include <fstream>
5 #include <cstdlib>
6 using namespace std;
7
8 #include <string>
9
10 #define session 0
11
12
13 double n ;
14 double Msun = 1.989e30; //kg
15 double mp = 1.672e-27; //kg
16 double hbar = 1.054e-34; //J*s
17 double c = 2.997e8; //m/s
18 double G = 6.674e-11; //N m^2 kg^-2
19
20
21 void RK4(double, double *, void (*RHSfunc)(double, double *,double*),double, int);
22 void dYdt (double, double *, double *);
23 double sol(double r);
24 double Bisection (double(*func)(double),double a, double b, double tol);
25
26 int main(){
27
28     #if session == 0 //risolvo l'equazione differenziale (N.B. csi = r ) e confronto con
29     la soluzione analitica
30     ofstream fdata;
31     fdata.open("lane_emdem.dat"); //soluzione equazione
32
33     ofstream fdata1;
34     fdata1.open("confronto.dat"); //confronto con soluzione analitica
35
36     int Npoints= 3000;
37     double r0 = 0.;
38     double r1=20.;
39     double dr = fabs(r0-r1)/(double)Npoints;
40     cout<<"Dimensione intervallo " <<dr<<endl;
41
42     double err; //per il confronto con la soluzione analitica
43     double mass; // calcolo della massa
44     double csi1 = 0.; //intersezione con l'asse
45     double fsx , fdx, fssx; //f calcolata prima e dopo il punto per la derivata
46
47     string choice = "si";
48
49     while(choice == "si"){
50         double r0 = 0.;
51         cout<<"Inserire indice politropico n: ";
52         cin>>n;
53
54         int neq =2;
55         double Y[neq];
56         Y[0]= 1.;
57         Y[1]= 0.;
58         double Y0=0.; //parametro di appoggio per vede quando ho degli zeri
59         double Y00=0.;
60         int d =0; //variabile che mi dice se sono dentro o fuori dalla stella (0 dentro,
61         1 fuori)
62
63         fdata<<r0<<" "<<Y[0]<<" "<<pow(Y[0],n)<<endl;
64         for(int i=0; i<Npoints;i++){ //fare in modo che posso inserire pi indici
65             politropici e stamparli sullo stesso file
```

```

64     Y00 = Y0;
65     Y0 = Y[0];
66     RK4(r0, Y, dYdt, dr, neq);
67     r0 += dr;
68
69     if(d==0){ //se non ci sono altre soluzioni prima allora cerca la soluzione
70         fdata<<r0<<" "<<Y[0]<<" "<<pow(Y[0],n)<<endl;
71
72         if(Y[0]*Y0<0){
73             cs11 = r0-dr*0.5;
74             fsx = Y0;
75             fssx = Y00;
76             fdx = Y[0];
77
78             cout<<"Il raggio della stella per n= "<<n<<"      "<< cs11 <<endl;
79
80             if(n==1. || n==0. ){ //trovo la soluzione analitica delle due
funzioni
81                 cout<<"La soluzione analitica      "<< Bisection(sol,1,4,1e-3)<<
endl;
82             }
83
84             d=1; //in questo modo mi stampa solo il primo zero (raggio)
85
86         }
87         if(isnan(Y[0])){
88             fsx = Y0;
89             fssx = Y00;
90             cs11 = r0-dr*0.5;
91             cout<<"Il raggio della stella per n= "<<n<<"      "<< cs11 <<endl;
92             d=1;
93             break;
94
95         }
96
97     }else if(d==1){
98         fdata<<r0<<" "<<Y[0]<<endl; //stampo la funzione della densit solo
99         fino al primo zero
100     }
101     err = fabs(Y[0]-sol(r0)); //confronto con la soluzione analitica, se non ho
102     sol analitica non succede niente
103     fdata1<< r0 << " "<<err<<endl;
104
105     }
106     fdata<<endl<<endl;
107     fdata1<<endl<<endl;
108
109     if (d==0) cout<<"La funzione non ha zeri e diverge "<<endl; //se nell'intervallo
110     dato non ha soluzioni
111
112     double der;
113     if(n==3){ //per n=3 mi calcolo la massa di Chandrasekar
114
115         der = (fdx - fsx)/dr; //central limit
116         cout<<cs11*cs11*der<<endl;
117         mass = 1/Msun* pow(hbar*c/G,3./2.) * sqrt(3.*M_PI)/ (2.*2.*2.*mp*mp) * cs11*
118         cs11*abs(der); //massa in unit di masse solari
119         cout<<" La massa di Chandrasekar      : "<<mass<<endl;
120         cout<<" rho_0/rho_mean = "<<1/(- 3/cs11*der)<<endl;
121
122     }else{
123
124         der = - 3/cs11* (fsx-fssx)/dr;
125         cout<<" rho_0/rho_mean = "<<1/der<<endl;
126     }

```

```

127     cout<<" Vuoi inserire un altro indice politropico? "<<endl;
128     cin>>choice;
129 }
130
131 fdata.close();
132 fdata1.close();
133 #endif
134
135 #if session == 1
136 //convergenza : NOTA non converge nel modo giusto
137
138 ofstream fdata;
139 fdata.open("convergenza.dat");
140
141 double r1 = 20.;
142 int Npoints= 64;
143 double err, err1;
144 n = 0.;
145
146 int neq =2;
147 double Y[neq];
148
149 for(int k=0; k<6;k++){
150     double r0 = 0.;
151     double dr = fabs(r0-r1)/(double)Npoints;
152     Y[0]=1.;
153     Y[1]=0.;
154
155
156     for(int i=0; i<Npoints;i++){
157
158         RK4(r0, Y, dYdt, dr, neq);
159
160         //if(r0>=1.) break;
161         r0 += dr;
162
163     }
164     err = fabs(Y[0]-sol(r0)); //vado a studiare la convergenza per r = 2
165     cout<<dr<<endl;
166     fdata<< log(Npoints) << " " <<log(err)<< " " <<-4*log(Npoints)<<endl;
167     Npoints *= 2;
168 }
169
170 fdata.close();
171 #endif
172
173 return 0;
174 }
175
176 double sol(double r){
177
178     if (n == 0.){
179         return (1.-1/6.*r*r);
180
181     }else if( n ==1.){
182         return(sin(r)/r);
183
184     } else if(n==5.){
185
186         return(1./sqrt(1+r*r/3.));
187
188     }else{
189         return 0;
190     }
191 }
192 }
193
194 void dYdt(double r, double * Y, double *R){
195

```

```

196     if(r==0){ //considero lo sviluppo di taylor della funzione nell'origine
197
198         r += 1.e-6;
199         double x = 1.-1/6.*r;
200         double z = -1/3.*r;
201
202         R[0]= z;
203         R[1]= - x- 2./r*z;
204         //R[1]=2./3;
205
206     }else{
207
208         double x = Y[0];
209         double z = Y[1];
210
211         R[0]= z;
212         R[1]= - pow(x,n) - 2./r*z;
213
214     }
215 }
216 }
217
218
219 void RK4(double t, double *Y, void (*RHSfunc)(double, double *, double *), double dt, int
    neq){
220     double k1[neq], k2[neq], k3[neq], k4[neq] ; //membro di destra dell'equazione, glielo
221     passo per referenza
222     double Y1[neq],Y2[neq],Y3[neq];
223
224     RHSfunc(t,Y,k1);
225     for (int i=0; i<neq; i++) Y1[i]=Y[i]+dt*k1[i]*0.5;
226
227     RHSfunc(t+dt*0.5,Y1,k2);
228     for (int i=0; i<neq; i++) Y2[i]=Y[i]+dt*k2[i]*0.5;
229
230     RHSfunc(t+dt*0.5,Y2,k3);
231     for (int i=0; i<neq; i++) Y3[i]=Y[i]+dt*k3[i];
232
233     RHSfunc(t+dt,Y3,k4);
234     for(int k=0; k<neq; k++) Y[k] += dt/6*(k1[k]+2*k2[k]+2*k3[k]+k4[k]);
235 }
236
237
238 double Bisection (double(*func)(double),double a, double b, double tol){
239     double xm = fabs(a+b)*0.5;
240     double funca,funcx;
241     funca = func(a);
242     funcx = func(xm);
243
244     //pu capitare che ottengo gi il risultato degli zeri, forse meglio controllare
245
246     while( fabs(b-a)>tol || funcx == 0){ //se la funzione esattamente il punto medio
247     esce
248         if(funca*funcx<0){
249             b=xm;
250         }
251         if(funca*funcx>0){
252             a = xm;
253             funca = funcx;
254         }
255
256         xm = (a+b)*0.5;
257         funcx = func(xm);
258     }
259     //cout<<fabs(b-a)<<endl;
260     return xm;
261 }

```