過去問演習講座	校舎名	吉祥寺校 校	得点	40
2017年度 東京大学・理科・数学	ふりがな	ヤマザキ カナコ	採点者	安東
	氏名	山崎 可奈子		
	生徒番号	30201292		
	科類	理科 類		

12, 0, 12, 8, 2, 6

1 点数
12/20

第 1 問

(1) $\cos 3\theta = \cos 2\theta \cdot \cos\theta - \sin 2\theta \cdot \sin\theta$

8/8

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$= 4x^3 - 3x$.

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1$

$\therefore f(\theta) = 4x^3 - 3x + a(2x^2-1) + bx$

$f(\theta) = 4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a$ // 答 +4

$f(0) = 1 + a + b$

$\therefore g(\theta) = \dfrac{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - 2a - b - 1}{x - 1}$

$g(\theta) = 4x^2 + (2a+4)x + b + 2a + 1$ // 答 +4

(2) $0 < \theta < \pi$ $\therefore -1 < x < 1$

4/12

$g(\theta) = 4\left(x + \dfrac{a+2}{4}\right)^2 + b + 2a + 1 - \dfrac{(a+2)^2}{4}$

ここまで正しいです。

(i) $-1 < -\dfrac{a+2}{4} < 1$ のとき $-1 < -\dfrac{a+2}{4} < 1$ +2

$\therefore -6 < a < 2$ のとき $-6 < a < 2$ +2

$\min g(\theta) = b + a + 1 - \dfrac{(a+2)^2}{4} = 0$ (2)

ゆえに求める条件は

$a^2 - 4b = 0$ …①

(ii) $-\dfrac{a+2}{4} < -1$

$2 < a$ のとき

$\min g(\theta)$ はなし。

(iii) $-\dfrac{a+2}{4} > 1$

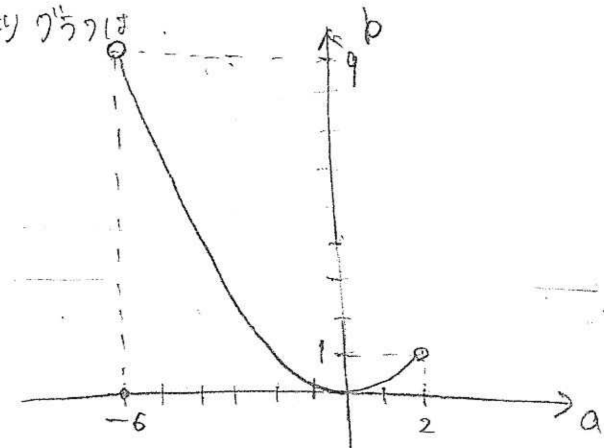
$\therefore a < -6$ のとき

$\min g(\theta)$ はなし。

よって、(i)〜(iii)より、求める条件は

$\begin{cases} -6 < a < 2 \\ a^2 - 4b = 0 \end{cases}$ //

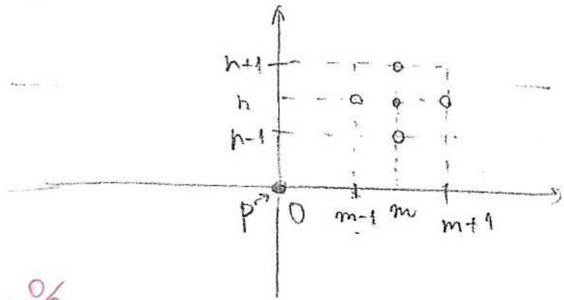
これよりグラフは



もったいないミスです。
見直しをして防ぎましょう!

2 点数
0/12

第 2 問



(1) 0/8

n秒後に、Pがx軸上にある確率をp_n

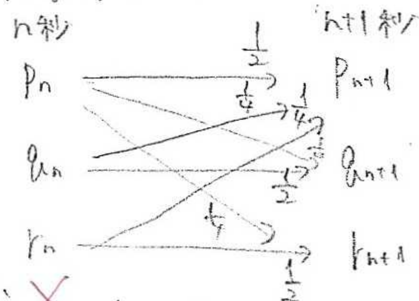
$y=1$上 〃 をq_n.

$y=-1$上 〃 をr_n

$y=0, -1, 1$でない確率をd_nとおく。

$(p_n+q_n+r_n+d_n=1)$.

p_n, r_n, q_nについて、



よって、

$$\therefore \begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n & \cdots ① \\ q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n & \cdots ② \\ r_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}r_n & \cdots ③ \end{cases}$$

また $p_0=1,\ q_0=r_0=0$

② − ③

$\therefore q_{n+1}-r_{n+1} = \frac{1}{2}(q_n-r_n)$

$\therefore q_n-r_n = (0-0)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore q_n = r_n$.

$\therefore$

$\therefore p_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n+q_n)$.

$p_{n+1}+q_{n+1} = \frac{3}{4}p_n + q_n$

$\therefore p_6 = \frac{1}{2}(p_5+q_5) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}p_4+q_4\right)$

$= \frac{1}{2}\left[(p_4+q_4) - \frac{1}{4}p_4\right]$

$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{3}{4}p_3+q_3\right) - \frac{1}{8}(p_3+q_3)\right\}$

$= \frac{7}{16}\left\{(p_3+q_3) - \frac{5}{7}p_3\right\}$

$= \frac{7}{16}\left\{\left(\frac{3}{4}p_2+q_2\right) - \frac{5}{14}(p_2+q_2)\right\}$

$= \frac{63}{224}\left\{\left(\frac{3}{4}p_1+q_1\right) - \frac{13}{36}(p_1+q_1)\right\}$

$= \frac{63}{224}\times\frac{29}{36}\left\{\frac{3}{4}p_0+q_0 - \frac{9}{58}(p_0+q_0)\right\}$

$= \frac{63}{224}\times\frac{29}{36}\times\frac{69}{116} = \frac{69}{512}$ //

y=0、−1、1でないところから y=0 まで戻ってくる可能性もあります。

y−xの値に着目しましょう。

0/12 (2)

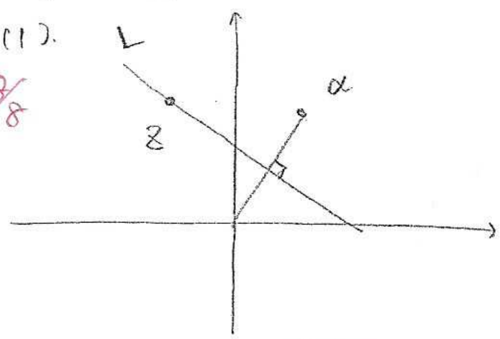
(2) 4つの操作について、何回ずつ起これば原点に戻ってくるかを書き出し、それぞれについて確率を求めましょう。

021423301730201292022

3 点数
12/20

第 3 問 (1枚目)

(1). 8/8



$(\alpha \neq 0)$

また 点(0)と点(α)の垂直二等分線上の点ゆえ

$|z| = |z-\alpha|$ 　$|z-\alpha| = |z|$ +4

このとき $\frac{1}{z} = \omega$ ゆえ

$z = \frac{1}{\omega}$ $(\omega \neq 0)$

$\therefore \left|\frac{1}{\omega}\right| = \left|\frac{1}{\omega} - \alpha\right|$

$\left|\frac{1}{\omega}\right| = \left|\frac{1-\alpha\omega}{\omega}\right|$

$1 = |1-\alpha\omega|$

$\therefore |\alpha \cdot \omega - 1| = 1$

$\left|\alpha\left(\omega - \frac{1}{\alpha}\right)\right| = 1$

$\left|\omega - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|}$

中心 点$\left(\frac{1}{\alpha}\right)$、半径 $\frac{1}{|\alpha|}$ 答 +4

(2) 4/12

$x^3 = 1$.

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore \beta = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$

$\beta^2 + \beta + 1 = 0$

ゆえ、$\beta^2 = -(1+\beta)$

$= \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$

よって、

$\therefore z = x + yi$ とすると $(x, y \in \mathbb{R})$

$x = -\frac{1}{2}$.

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 　zが満たす条件 +4

また、$\frac{1}{\omega} = x + yi$ 　(1)を利用すれば $|w+1| = 1$, $|w| \geqq 1$ という条件が求められます。

$\frac{1}{\omega} = -\frac{1}{2} + yi$

$\frac{1}{\omega} + \frac{1}{2} = yi$

両辺に$-i$をかけると

$i\left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{2}\right) = y$

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq -\left(\frac{2+\omega}{2\omega}\right)i \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

021423301730201292039

第 3 問 (2枚目)

$$\therefore \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq -\left(\frac{2+\omega}{2\omega}\right)i & \cdots① \\ -\left(\frac{2+\omega}{2\omega}\right)i \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} & \cdots② \end{cases}$$

①より $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\omega \geqq 1$

$\therefore \beta\omega \geqq 1$

②より $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\omega \leqq 1$

$\therefore \beta^2\omega \leqq 1$

4 点数
8/20

第 4 問

$p=2+\sqrt{5}$ $\therefore$ $\frac{1}{p}=\sqrt{5}-2$.

$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$.

2/2

(1) $a_1 = 4$

$a_2 = 18$」 +2 答

4/4

(2) $n \geqq 2$

$a_1 a_n = \left\{p + \left(-\frac{1}{p}\right)\right\}\left\{p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n\right\}$

$= p^{n+1} + p\left(-\frac{1}{p}\right)^n + p^n\left(-\frac{1}{p}\right) + \left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1}$

$= p^{n+1} + \left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1} - p^{n-1}$

$= a_{n+1} - a_{n-1}$ 答 +4

2/6

(3) 「a_nが自然数であること」という(※)を、数学的帰納法により示す。 +2 方針

(証明)

(I) $n=1$のとき、(1)より $a_1=4$であり、(※)は成立。

(II) $n=k$のとき、a_kが自然数であると仮定する。
$n=k+1$について、a_{k+1}が自然数であることを示す。
このとき、$k=2m+1$ ($m \in \mathbb{N}$) であれば、
a_{k+1}が自然数であることは、自明。
$k+1=2m$のとき
$a_{k+1} = p^{2m} + \left(-\frac{1}{p}\right)^{2m}$.

$\therefore a_{k+1} = p \cdot p^{2m-1} - \frac{1}{p}\left(-\frac{1}{p}\right)^{2m-1}$

$= (2+\sqrt{5})p^{2m-1} + (2-\sqrt{5})\left(-\frac{1}{p}\right)^{2m-1}$

$2m-1=k$ ゆえ ×

$= 2\left\{p^k + \left(-\frac{1}{p}\right)^k\right\} + \sqrt{5}\left\{p^k - \left(-\frac{1}{p}\right)^k\right\}$

第3問もですが、行き詰った場合は
前の小問を利用してみましょう。
今回も(2)を用います。

0/8

(4)

$a_{k-1}+4a_k$とa_kの最大公約数は
a_{k-1}とa_kの公約数と等しいこと
がヒントです。

5 点数 2/20

第 5 問

$k \in \mathbb{R}$.

$C: y = x^2 + k \quad \cdots①$

$D: x = y^2 + k \quad \cdots②$

2/8

(1). ①の $x = t$ における接線の傾きは、$y' = 2x$ ゆえ、$2t$.

② より $y^2 = x - k$

$\therefore y = \pm\sqrt{x-k} \quad (x \geqq k)$

$y \geqq 0$ のとき $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-k}}$

$y \leqq 0$ のとき $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x-k}}$

①より、t における接線は

$y = 2t(x-t) + t^2 + k$.

$y = 2tx - t^2 + k$

よって、与式 $y = ax + b$ について.

$\begin{cases} a = 2t & \cdots③ \\ b = k - t^2 & \cdots④ \end{cases}$ +2

このとき、

$2t = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{x-k}}$

$4t^2 = \dfrac{1}{4(x-k)}$

$x - k = \dfrac{1}{16t^2}$

$x = \dfrac{1}{16t^2} + k$

$\therefore$ ②の $x = \dfrac{1}{16t^2} + k$

における接線は.

$y = |4t|\left\{x - \left(\dfrac{1}{16t^2} + k\right)\right\} + \left|\dfrac{1}{4t}\right|$

2t

$= |4t|\, x - \dfrac{1}{|4t|} + |4t|\,k + \left|\dfrac{1}{4t}\right|$

$= |4t|\, x + |4t|\,k$

$\therefore \begin{cases} a = |4t| \\ b = |4t|\,k \end{cases}$

$t > 0$ のとき.

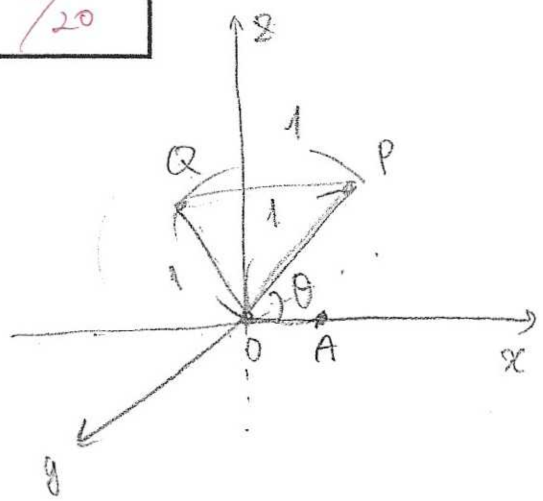
$y = ax + b$ が C、D と接することをそれぞれ式に表し、2式を立式することで a、b、k の関係式を求められます。

(2) 0/12

$a = 2$ を代入しましょう。

6 点数
6/20

第 6 問 (1枚目)



6/6 (1) Q $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ P $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$x^2+y^2+z^2=1$ …①

$|\overrightarrow{QP}|=1 \iff x^2+y^2+(z-1)^2=1$ …②

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\cos\theta$

+2 OP=PQ=1を立式

②−①

$\therefore (z-1)^2=z^2$

$-2z+1=0$

$\therefore z=\frac{1}{2}$

∴ ①にこれを代入して、

$x^2+y^2=\frac{3}{4}$

$y^2=\frac{3}{4}-x^2$

$\therefore y=\pm\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}$

このとき、$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ // +2 答

また、θは $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=0$ のとき、最大で、150°、

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=0$ のとき 最小で、30° ゆえ

$30^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ$ // +2 答

(2) 点Qは y−z 平面上で 0/14 頂点を中心とする半径1の円を描く。

このとき、$x>0$ の範囲を考えると、

点Pは $x=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ で半径 $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ の円を描く。 点Qによって点Pの位置も動きます。

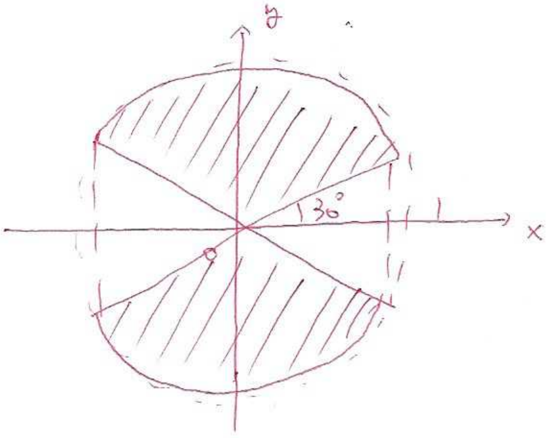
よって、OPの動く軌跡は 底面の半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 高さ $\frac{1}{2}$ の円柱の、$x>0$ と $x<0$ での2つ分である。

021423301730201292077

第 6 問 (2枚目)

よって、求める体積は、
円周率を π として、

$$V = \frac{3}{4}\pi \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 2$$
$$= \frac{1}{4}\pi$$



これを x 軸のまわりに一周させたものです。

まずは K について正しく把握しましょう。