こちら側を上にして、用紙をまっすぐにセットしてください。
(既に採点済の試験は再度答案を提出しても採点されませんのでご了承下さい。)

021423301730201292084

過去問演習講座	
2017年度 東京大学・理科・数学	

校舎名	吉祥寺校 校
ふりがな	ヤマザキ カナコ
氏名	山崎 可奈子
生徒番号	30201292
科類	理 科 類

得点	40
採点者	安東

12, 0, 12, 8, 2, 6

1 点数
12/20

第 1 問

(1) $\cos 3\theta = \cos 2\theta \cdot \cos\theta - \sin 2\theta \cdot \sin\theta$

8/8

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$= 4x^3 - 3x$.

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1$

$\therefore f(\theta) = 4x^3 - 3x + a(2x^2 - 1) + bx$

$f(\theta) = 4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a$ // 答 +4

$f(0) = 1 + a + b$

$\therefore g(\theta) = \dfrac{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - 2a - b - 1}{x - 1}$

$g(\theta) = 4x^2 + (2a+4)x + b + 2a + 1$ // 答 +4

(2) $0 < \theta < \pi$ $\therefore -1 < x < 1$

4/12

$g(\theta) = 4\left(x + \dfrac{a+2}{4}\right)^2 + b + 2a + 1 - \dfrac{(a+2)^2}{4}$

ここまで正しいです。

(i) $-1 < -\dfrac{a+2}{4} < 1$ のとき

$-1 < -\dfrac{a+2}{4} < 1$ +2

$\therefore -6 < a < 2$ のとき

$-6 < a < 2$ +2

$\mathrm{Min}\, g(\theta) = b + a + 1 - \dfrac{(a+2)^2}{4} = 0$

2

ゆえん 求める条件は $a^2 - 4b = 0$ …①

(ii) $-\dfrac{a+2}{4} < -1$

$2 < a$ のとき

$\mathrm{Min}\, g(\theta)$ はなし。

(iii) $-\dfrac{a+2}{4} > 1$

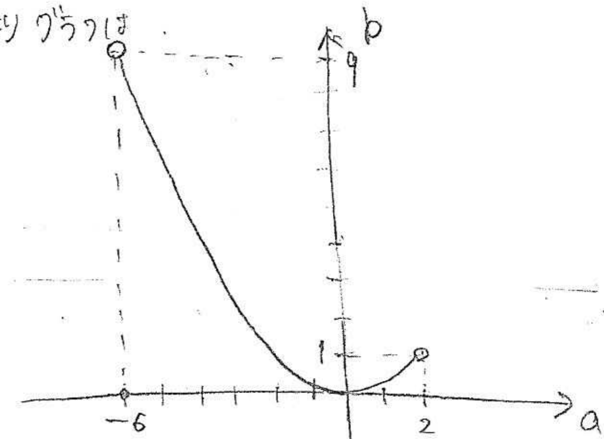
$\therefore a < -6$ のとき

$\mathrm{Min}\, g(\theta)$ はなし。

よって(i)〜(iii)より求める条件は

$\begin{cases} -6 < a < 2 \\ a^2 - 4b = 0 \end{cases}$ //

これよりグラフは



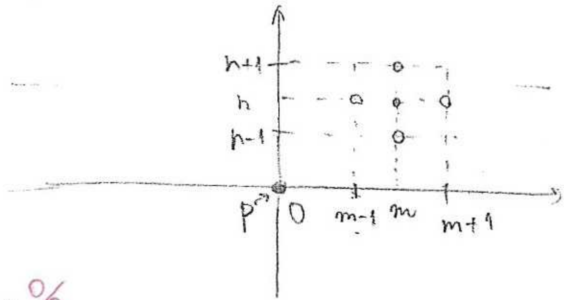
もったいないミスです。

見直しをして防ぎましょう！

021423301730201292015

2 点数
0/12

第 2 問



(1) 0/8

n 秒後に、P が x 軸上にある確率を p_n

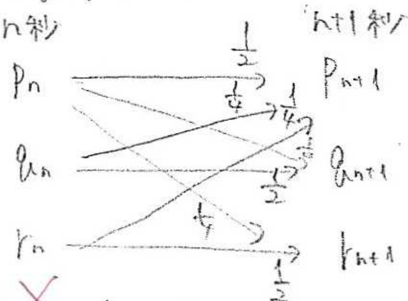
y=1 上 〃 を q_n.

y=-1 上 〃 を r_n

y=0, -1, 1 でない確率を d_n とおく。

$(p_n+q_n+r_n+d_n=1)$.

p_n, r_n, q_n について、



図、 ✗

$$\therefore \begin{cases} p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}r_n \quad \cdots ① \\ q_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}q_n \quad \cdots ② \\ r_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}r_n \quad \cdots ③ \end{cases}$$

また、$p_0=1$、$q_0=r_0=0$

② − ③

$\therefore q_{n+1}-r_{n+1}=\frac{1}{2}(q_n-r_n)$

$\therefore q_n-r_n=(0-0)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore q_n=r_n$.

$\therefore$

$\therefore p_{n+1}=\frac{1}{2}(p_n+q_n)$.

$p_{n+1}+q_{n+1}=\frac{3}{4}p_n+q_n$

$\therefore p_6=\frac{1}{2}(p_5+q_5)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}p_4+q_4\right)$

$=\frac{1}{2}\left[(p_4+q_4)-\frac{1}{4}p_4\right]$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{3}{4}p_3+q_3\right)-\frac{1}{8}(p_3+q_3)\right\}$

$=\frac{7}{16}\left\{(p_3+q_3)-\frac{5}{7}p_3\right\}$

$=\frac{7}{16}\left\{\left(\frac{3}{4}p_2+q_2\right)-\frac{5}{14}(p_2+q_2)\right\}$

$=\frac{63}{224}\left\{\left(\frac{3}{4}p_1+q_1\right)-\frac{D}{36}(p_1+q_1)\right\}$

$=\frac{63}{224}\times\frac{29}{36}\left\{\frac{3}{4}p_0+q_0-\frac{9}{58}(p_0+q_0)\right\}$

$=\frac{63}{224}\times\frac{29}{36}\times\frac{69}{116}=\frac{69}{512}$ ✗

0/(2)

y=0、-1、1でないところから y=0 まで戻ってくる可能性もあります。

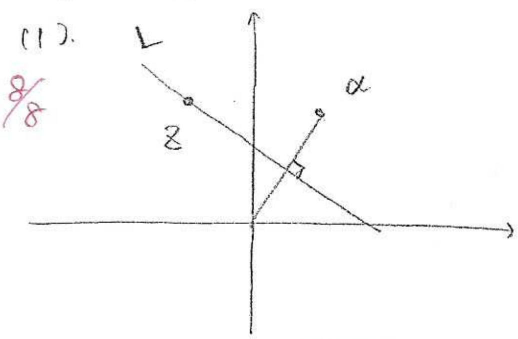
y−x の値に着目しましょう。

(2) 4つの操作について、何回ずつ起これば原点に戻ってくるかを書き出し、それぞれについて確率を求めましょう。

3 点数 12/20

第 3 問 (1枚目)

(1). 8/8



$(\alpha \neq 0)$

また、点(0)と点(α)の垂直二等分線上の点ゆえ、

$|z| = |z-\alpha|$ 　 $|z-\alpha| = |z|$ +4

このとき、$\frac{1}{z} = w$ ゆえ、

$z = \frac{1}{w}$ $(w \neq 0)$

$\therefore \left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{1}{w} - \alpha\right|$

$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{1-\alpha w}{w}\right|$

$1 = |1-\alpha w|$

$\therefore |\alpha \cdot w - 1| = 1$

$\left|\alpha\left(w - \frac{1}{\alpha}\right)\right| = 1$

$\left|w - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|}$

中心 点$\left(\frac{1}{\alpha}\right)$、半径 $\frac{1}{|\alpha|}$ 答 +4

(2) 4/12

$x^3 = 1.$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore \beta = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$

$\beta^2 + \beta + 1 = 0$

ゆえ、$\beta^2 = -(1+\beta)$

$= \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$

よって、

$\therefore z = x + yi$ とすると $(x, y \in \mathbb{R})$

$x = -\frac{1}{2}.$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 　 zが満たす条件 +4

また、$\frac{1}{w} = x + yi$ 　 (1)を利用すれば $|w+1| = 1$, $|w| \geqq 1$ という条件が求められます。

$\frac{1}{w} = -\frac{1}{2} + yi$

$\frac{1}{w} + \frac{1}{2} = yi$

両辺に$-i$をかけると

$i\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{2}\right) = y$

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq -\left(\frac{2+w}{2w}\right)i \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

021423301730201292039

第 3 問 (2枚目)

$$\therefore \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq -\left(\frac{2+\omega}{2\omega}\right)i & \cdots ① \\ -\left(\frac{2+\omega}{2\omega}\right)i \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} & \cdots ② \end{cases}$$

① より $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\omega \geqq 1$

$\therefore \beta\omega \geqq 1$

② より $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\omega \leqq 1$

×

$\therefore \beta^2\omega \leqq 1$

4 点数

8/20

第 4 問

$p=2+\sqrt{5}$ ∴ $\frac{1}{p}=\sqrt{5}-2$.

$a_n=p^n+\left(-\frac{1}{p}\right)^n$.

2/2

(1) $a_1=4$

$a_2=18$」 +2 答

4/4

(2) $n\geqq 2$

$a_1a_n=\left\{p+\left(-\frac{1}{p}\right)\right\}\left\{p^n+\left(-\frac{1}{p}\right)^n\right\}$

$=p^{n+1}+p\left(-\frac{1}{p}\right)^n+p^n\left(-\frac{1}{p}\right)+\left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1}$

$=p^{n+1}+\left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1}-\left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1}-p^{n-1}$

$=a_{n+1}-a_{n-1}$ +4 答

2/6

(3) 「a_nが自然数であること」…(※)を、数学的帰納法により示す。 +2 方針

(証明)

(Ⅰ) $n=1$のとき、(1)より $a_1=4$であり、(※)は、成立。

(Ⅱ) $n=k$のとき、a_kが自然数であると仮定する。
$n=k+1$について、a_{k+1}が自然数であることである。
このとき、$n=2m+1$ $(m\in\mathbb{N})$であれば、
a_{k+1}が自然数であることは、自明。
$k+1=2m$のとき
$a_{k+1}=p^{2m}+\left(-\frac{1}{p}\right)^{2m}$

∴ $a_{k+1}=p\cdot p^{2m-1}-\frac{1}{p}\left(-\frac{1}{p}\right)^{2m-1}$

$=(2+\sqrt{5})p^{2m-1}+(2-\sqrt{5})\left(-\frac{1}{p}\right)^{2m-1}$

~~$2m-1=k$ ゆえ~~

$=2\left\{p^k+\left(-\frac{1}{p}\right)^k\right\}+\sqrt{5}\left\{p^k-\left(-\frac{1}{p}\right)^k\right\}$

第3問もですが、行き詰った場合は前の小問を利用してみましょう。今回も(2)を用います。

0/8

(4)

$a_{k-1}+4a_k$とa_kの最大公約数はa_{k-1}とa_kの公約数と等しいことがヒントです。

0214233017302012920530214233017302012920053

5 点数

2/20

第 5 問

$k \in \mathbb{R}$.

$C: y = x^2 + k \quad \cdots ①$

$D: x = y^2 + k \quad \cdots ②$

2/8

(1). ①の $x = t$ における接線の傾きは. $y' = 2x$ ゆえ、$2t$.

② より $y^2 = x - k$

$\therefore y = \pm\sqrt{x-k} \quad (x \geqq k)$

$y \geqq 0$ のとき $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-k}}$

$y \leqq 0$ のとき $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x-k}}$

① より. t における接線は

$y = 2t(x-t) + t^2 + k.$

$y = 2tx - t^2 + k$

よって. 与式 $y = ax + b$ について.

$\begin{cases} a = 2t & \cdots ③ \\ b = k - t^2 & \cdots ④ \end{cases}$ (+2)

このとき、

$\therefore 2t = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{x-k}}$

$4t^2 = \dfrac{1}{4(x-k)}$

$x - k = \dfrac{1}{16t^2}$

$x = \dfrac{1}{16t^2} + k$

$\therefore$ ② の $x = \dfrac{1}{16t^2} + k$

における接線は.

$y = \cancel{|4t|}\left\{x - \left(\dfrac{1}{16t^2} + k\right)\right\} + \left|\dfrac{1}{4t}\right|$

$2t$

$= |4t|\, x - \dfrac{1}{|4t|} + |4t|\, k + \left|\dfrac{1}{4t}\right|$

$= |4t|\, x + |4t|\, k$

$\therefore \begin{cases} a = |4t| \\ b = |4t|\, k \end{cases}$

$t > 0$ のとき.

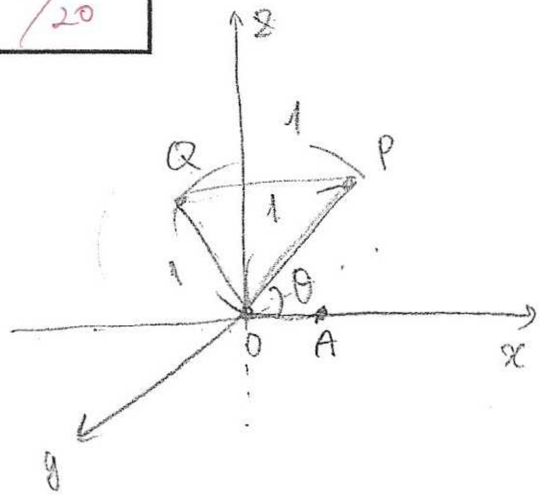
$y = ax + b$ が C、D と接することをそれぞれ式に表し、2式を立式することで a、b、k の関係式を求められます。

(2) 0/12

a=2 を代入しましょう。

6 点数
6/20

第 6 問 (1枚目)



6/6 (1) Q $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ P $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots ①$

$|\overrightarrow{QP}|=1 \iff x^2+y^2+(z-1)^2=1 \cdots ②$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\cos\theta$

+2 OP=PQ=1を立式

②−①

∴ $(z-1)^2=z^2$

$-2z+1=0$

∴ $z=\frac{1}{2}$

∴ ①にこれを代入して、

$x^2+y^2=\frac{3}{4}$

$y^2=\frac{3}{4}-x^2$

∴ $y=\pm\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}$

このとき、$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ // +2 答

また、θは $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$、$y=0$ のとき、最大で、150°、

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$、$y=0$ のとき 最小で、30° ゆえ

$30°\leqq\theta\leqq150°$ // +2 答

(2) 点Qは、y−z平面上で 0/14
原点を中心とする半径1の円を描く。

このとき、$x>0$ の範囲を考えると、

点Pは、$x=\sin30°=\frac{1}{2}$ で半径 $\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ の円を描く。点Qによって、点Pの位置も動きます。

よって、OPの動く軌跡は
底面の半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}$、高さ $\frac{1}{2}$ の円柱の、
$x>0$ と $x<0$ での2つ分である。

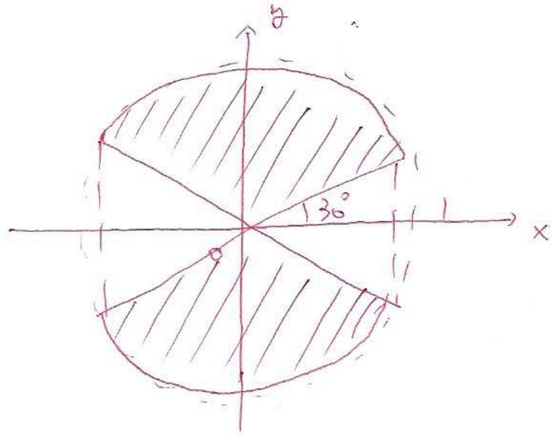
第 6 問 (2枚目)

よって、求める体積は、
円周率をπとして、

$$V = \frac{3}{4}\pi \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 2$$

$$= \frac{1}{4}\pi$$

×



これをx軸のまわりに一周させたものです。

まずはKについて正しく把握しましょう。

021423301730201292084

021423301730201292084