Tasca teoria - 4

Nom i cognoms : Martin Azpillaga

1.

1.1 Se denomina nucleo de una aplicacion lineal, al conjunto de vectores del espacio de partida cuya imagen es el vetor $\vec{0}$. Sea f una aplicacion lineal:

$$u \in Nuc\, f \leftrightarrow f(u) = \vec{0}$$

El nucleo siempre forma un subespacio del espacio de partida, ya que este preserva la suma vectorial y el producto por escalares:

$$(+)\, u, v \in Nuc\, f. \rightarrow f(u) = \vec{0}, f(v) = \vec{0}$$

$$u + v \in Nuc\, f \leftrightarrow f(u + v) = \vec{0}$$

Como es una aplicacion lineal

$$f(u + v) = f(u) + f(v) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$$(\cdot) : u \in Nuc\, f, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda u \in Nuc\, f \leftrightarrow f(\lambda u) = \vec{0}$$

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda\vec{0} = \vec{0}$$

Tanto la suma como el producto se conservan $\rightarrow$ Nuc f es un subespacio.

1.2 Se denomina imagen de una aplicacion lineal, al conjunto de vectores del espacio de llegada que provienen de algun vector perteneciente al espacio de salida. Sea f una aplicacion lineal de $\mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m$

$$v \in Img\, f \leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^n : f(u) = v$$

La imagen siempre forma un subespacio del espacio de llegada, ya que esta preserva la suma y el producto por escalares:

$$(+)\, u, v \in Img\, f. \rightarrow \exists u', v' \in \mathbb{R}^n : f(u') = u \wedge f(v') = v$$

$$u + v \in Img\, f \leftrightarrow \exists w \in \mathbb{R}^n : f(w) = u + v$$

Sea w = u'+v':

$$f(w) = f(u' + v') = u + v$$

$$(\cdot) : u \in Img\, f, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$u \in Img\, f \rightarrow \exists u' : f(u') = u$$

$$\lambda u \in Img\, f \leftrightarrow \exists w : f(w) = \lambda u$$

Sea w = $\lambda u'$

$$f(\lambda u') = \lambda f(u') = \lambda v$$

Tanto la suma como el producto se conservan $\rightarrow$ Img f es un subespacio.

1.3 Podemos utilizar la analogia entre las aplicaciones lineales y los sistemas de ecuaciones para lograr las bases y dimensiones de la imagen y el nucleo de la aplicacion.

Siendo A la matriz de la aplicacion:

El conjunto de vectores que pertenezcan a la imagen seran justamente las x que cumplan:

$$Ax = b : b \neq \vec{0}$$

La base que forma este subespacio esta definida por los vectores linealmente independientes de la matriz A Por tanto es suficiente reducir por Gauss la matriz A y quedarse con los vectores diferentes de cero. La dimension del subespacio sera la cantidad de vectores que contiene una de sus bases. En el caso de la imagen:

$$dim(Imgf) = rg(A)$$

Por otro lado para lograr una base del nucelo basta con encontrar la solucion general del siguiente sistema:

$$Ax = \vec{0}$$

Y expresarla en funcion de vectores. La cantidad de vectores indicara la dimension del nucleo, que siempre coincidira con:

$$Dim\, Nuc\, f = n - rg(A)$$

Para encontrar las ecuaciones implicitas de cada uno de ellos utilizaremos un procedimiento parecido.

Sea B una matriz formada por los vectores de la base de un subespacio, sus ecuaciones implicitas seran aquellas que surgen al desarrollar el sistema:

$$Bx = \vec{0}$$

En particular esto nos vale para encontrar las ecuaciones de la imagen y el nucleo de f, ya que son subespacios.

1.4 Siendo A la matriz de la aplicacion f lineal, hemos visto que

$$dim\, Img\, f = rg(A)$$

$$dim(\, Nuc\, f) = dim(\mathbb{R}^n) - rg(A)$$

Uniendo ambas condiciones logramos la relacion entre las dimensiones de la imagen y el nucleo de f:

$$dim(Img\, f) + dim(Nuc\, f) = dim(\mathbb{R}^n)$$

2.

2.u es un vector particular cuya imagen es v. Queremos ver que el conjunto de todas las antimagenes de v, $f^{-1}(v)$, esta formado por los vectores que se logran de la suma del vector particular, u, y vectores del nucleo de f , "e", y unicamente por estos vectores.

$$u' \in f^{-1}(v) \Leftrightarrow u' = u + e$$

$$\Leftarrow$$

Primero veamos que esta suma siempre tiene como imagen el vector v :

$$\forall e \in Nuc\, f,\ (u + e) \in f^{-1}(v)$$

$$e \in Nuc\, f \rightarrow f(e) = \vec{0}$$

Como f es lineal:

$$f(u + e) = f(u) + f(e) = v + \vec{0} = v$$

$$(u + e) \in f^{-1}(v)$$

$$c.v.d.$$

$$\Rightarrow$$

Ahora veamos que todas las antimagenes de v se pueden expresar como la suma de u y e. Siendo u' una antimagen arbitraria de v queremos demostrar que:

$$\exists e \in Nuc\, f : u + e = u'$$

$$u' \in f^{-1}(v) \rightarrow f(u') = v$$

$$u' = u + (u' - u)$$

$$f(u' - u) = f(u') - f(u) = v - v = \vec{0}$$

$$(u' - u) \in Nuc\, f$$

Por tanto u' se puede expresar como la suma del vector particular u mas un vector del nucleo, e = (u' - u).

$$c.v.d.$$