**1.** Siguin les funcions $f_\lambda(x) = \dfrac{x+\lambda}{x^2+1}$, amb $\lambda \in \mathbb{R}$. Si diem $R_\lambda$ a la recta tangent a la gràfica de $f_\lambda$ en el punt $(0, \lambda)$, comproveu que totes les rectes $R_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, són paral·leles.

**2.** Trobeu les derivades de les funcions següents (allà on existeixin):

(a) $f(x) = \sqrt{5x^4 + 7x^2 - 2x + 1}$ (b) $g(x) = x^2 \sin x \tan x$

(c) $f(x) = e^{\cos(3x)}$ (d) $g(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^{2/3}}$

(e) $f(x) = ((x^3-4)^2+7)^4 \log(\cos^3(5x))$ (f) $g(x) = (4 + (4 + (4 + x^2)^2)^2)^2$.

**3.** (a) Calculeu la recta tangent a la gràfica de $f(x) = \cos(\pi \sin x)$ en el punt $(\frac{\pi}{6}, 0)$.

(b) Calculeu la recta tangent a la gràfica de $g(x) = x\,(\tan^2 x - 1)$ en el punt $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$.

**4.** (a) Calculeu la recta normal a la gràfica de $f(x) = (\sin x)^2 \cos(x^2)$ en l'origen.

(b) Calculeu la recta normal a la gràfica de $g(x) = \dfrac{\log x}{\arcsin(x/2)}$ en el punt $(1, 0)$.

**5.** Useu el mètode de derivació logarítmica per calcular les derivades de les funcions següents (allà on existeixin):

(a) $f(x) = \dfrac{(\log x)^x}{x^{\log x}},\ x > 1,$ (b) $f(x) = x^{\sin(2x)}$, (c) $f(x) = (x^3+4)^{7e^x}$.

**6.** Estudieu la derivabilitat de la funció següent segons els diferents valors reals d'$a$ i $b$:

$$f(x) = \begin{cases} -x + a, & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + bx, & \text{si } 0 < x < 1, \\ c, & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

Doneu, en cas que existeixi, l'expressió de $f'(x)$.

**7.** Per a $\alpha \in \mathbb{R}$ sigui la funció $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Determineu per a quins valors d'$\alpha$ la funció és contínua.

(b) Determineu per a quins valors d'$\alpha$ la funció és derivable i calculeu la funció derivada.

(c) Determineu per a quins dels valors $\alpha$ trobats a l'apartat anterior la funció $f'_\alpha$ és contínua.

**8.** Per a cada $n \in \mathbb{N}$ sigui $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \log|x| & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudieu la derivabilitat de $f_n$ per als diferents valors de $n$, i determineu la funció derivada $f_n'$ en el cas que $f_n$ sigui derivable a tots els punts.

**9.** Calculeu els límits següents (si existeixen) utilitzant la regla de L'Hôpital:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\log(1+x))^x$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} \quad (\alpha > 0)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{1 - \sin(x/2)}{(x-\pi)^2}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x \;\; (\alpha > 0)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-\cos x}\right)$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right)$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$