Càlcul Diferencial en Diverses Variables **Matemàtiques**

Examen Final (Primera Part) Curs 2010-11

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT

ESCRIVIU ELS VOSTRES NOM, COGNOMS I GRUP EN CADA FULL

1. a) Definiu el concepte de conjunt obert. Proveu que la intersecció d'un nombre finit d'oberts és un obert. És sempre oberta la intersecció d'infinits oberts?

b) Calculeu l'adherència del conjunt

$$C = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\, x + y < 0 \,\}.$$

Justifiqueu detalladament les respostes.

2. a) Definiu els conceptes de límit d'una funció en un punt i de límit d'una funció en un punt segons un subconjunt. Relacioneu els dos conceptes.

b) Sigui $U = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x+y \neq 0 \,\}$. Per a cada $n \in \mathbb{Z}$ considereu la funció $f_n : U \to \mathbb{R}$ definida per

$$f_n(x, y) = \frac{\sin(x + y)}{(x + y)^n}.$$

Per a quins enters n existeix una funció contínua $g_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g_n(x, y) = f_n(x, y)$, per a tot $(x, y) \in U$?

Justifiqueu detalladament les respostes.

3. a) Demostreu que si una funció és diferenciable en un punt aleshores també és contínua en aquest punt.

b) Per a cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considereu la funció $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - y^2)^2}{(x^2 + y^2)^\alpha}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(b.1) Determineu els nombres $\alpha \in \mathbb{R}$ per als quals f_α és contínua.

(b.2) Determineu els nombres $\alpha \in \mathbb{R}$ per als quals f_α és diferenciable.

Justifiqueu detalladament les respostes.

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT

ESCRIVIU ELS VOSTRES NOM, COGNOMS I GRUP EN CADA FULL