Exercici 15. Demostreu que S_n admet els sistemes de generadors següents:

(a) $(1,2)$, $(1,3)$, $\cdots$, $(1,n)$.

Solució: $\{(1,2),(1,3),\ldots,(1,n)\}$ genera S_n, ja que una transposició $(i,j) \in S_n$, amb $i \neq j$, es pot escriure de la següent manera:

$$(i,j) = (1,i)(1,j)(1,i).$$

Vegem-ho:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ i & 2 & \ldots & 1 & \ldots & j & \ldots & n \\ i & 2 & \ldots & j & \ldots & 1 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & i & \ldots & n \end{array}$$

(b) $(1,2)$, $(2,3)$, $\cdots$, $(n-1,n)$.

Solució: $\{(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)\}$ genera S_n, ja que una transposicó $(i,j) \in S_n$, amb $i < j$ es pot escriure de la següent manera:

$$(i,j) = (i,i+1)(i+1,i+2)\ldots(j-2,j-1)(j-1,j)(j-2,j-1)\ldots(i+1,i+2)(i,i+1).$$

Ho demostrarem per inducció descendent sobre $i < j$, fixat j.

Cas inicial: $(j-2,j-1)(j-1,j)(j-2,j-1) = (j-2,j)$.

Hipòtesi d'inducció: Suposem que $(i+1,j) = (i+1,i+2)\ldots(j-2,j-1)(j-1,j)(j-2,j-1)\ldots(i+1,i+2)$ i ho demostrarem per a (i,j):

Veiem que $(i,i+1)(i+1,i+2)\ldots(j-2,j-1)(j-1,j)(j-2,j-1)\ldots(i+1,i+2)(i,i+1)$ que, per hipòtesi d'inducció, és $(i,i+1)(i+1,j)(i,i+1) = (i,j)$

Així, arribem a la conclusió que (i,j) es pot esrciure com a producte de transposicions de la forma $(i,i+1)$.

(c) $(1,2,\cdots,n)$, $(1,2)$.

Solució: El conjunt $\{(1,2,\ldots,n)(1,2)\}$ genera S_n. Si a partir d'aquests dos elements,podem expressar els de l'apartat (b), haurem demostrat que el conjunt $\{(1,2,\ldots,n),(1,2)\}$ genera S_n. Fixem-nos que:

$$(1,\ldots,n)(1,2)(1,\ldots,n)^{-1} = (2,3)$$

Si tornem a conjugar l'element$(2,3)$ amb $(1,\ldots,n)$ obtindrem el $(3,4)$, atès que la conjugació d'un element de la forma $(m-1,m)$ amb $(1,\ldots,n)$ és la permutació $(m,m+1)$. Llavors, a partir de les permutacions $(1,2)$ i $(1,\ldots,n)$ podem expressar qualsevol element del conjunt $\{(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)\}$, que hem demostrat a l'apartat (b) que genera S_n.

Per tant, com volíem demostrar, S_n accepta com a generadors $(1,2,\ldots,n),(1,2)$.