

Grups

Exercici 1. Determineu si els conjunts següents amb les operacions que s'indiquen són o no grups.

- (a) El conjunt dels nombres naturals \mathbb{N} amb la suma.
- (b) El conjunt dels nombres racionals \mathbb{Q} amb la suma; el mateix conjunt, però amb el producte.
- (c) El conjunt $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ amb el producte en \mathbb{C} .
- (d) El conjunt dels polinomis $P_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{gr}(p(x)) \leq n\}$ amb la suma habitual; el mateix conjunt, però amb el producte habitual.
- (e) Sigui E un espai vectorial sobre un cos K ; el conjunt dels endomorfismes $\text{End}(E) = \{f : E \rightarrow E \text{ aplicacions lineals}\}$ amb la composició.
- (f) Sigui E un espai vectorial sobre un cos K ; el conjunt dels endomorfismes de E que tenen invers, que denotarem per $\text{Aut}(E)$, amb la composició.

Exercici 2 (*). Siguin G un grup i $H \subseteq G$ un subconjunt no buit. Demostreu que els tres enunciats següents són equivalents:

- (a) H satisfà les propietats:
 - (1) Per a tot $x, y \in H$, és que $xy \in H$,
 - (2) H és un grup amb l'operació de G .
- (b) H satisfà les propietats:
 - (1) $1 \in H$,
 - (2) Per a tot $x \in H$, és que $x^{-1} \in H$,
 - (3) Per a tot $x, y \in H$, és que $xy \in H$,
- (c) Per a tot $x, y \in H$, és que $xy^{-1} \in H$.

Exercici 3. Considerem

$$\begin{aligned}
 \text{GL}(n, \mathbb{Z}) &:= \{M \in M_{n \times n}(\mathbb{Z}) : \det(M) \in \mathbb{Z}^*\}, & \text{grup lineal,} \\
 \text{SL}(n, \mathbb{Z}) &:= \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{Z}) : \det(M) = 1\}, & \text{grup especial lineal,} \\
 \text{O}(n, \mathbb{Z}) &:= \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{Z}) : M^t M = Id\}, & \text{grup ortogonal,} \\
 \text{SO}(n, \mathbb{Z}) &:= \{M \in \text{O}(n, \mathbb{Z}) : \det(M) = 1\}, & \text{grup especial ortogonal.}
 \end{aligned}$$

- (a) Demostreu que $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$ és un grup amb la multiplicació de matrius.
- (b) Demostreu que $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$ i $\text{O}(n, \mathbb{Z})$ són subgrups del grup $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$.
- (c) Demostreu que $\text{SO}(n, \mathbb{Z})$ és un subgrup de $\text{O}(n, \mathbb{Z})$.

Exercici 4 (*). Demostreu que, donat un cos K , el grup $\text{SO}(2, K)$ és abelià. Demostreu que, en canvi, el grup $\text{SO}(3, K)$ no ho és.

Exercici 5. Demostreu que, per a $n \geq 2$, el subconjunt de $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$ format per les matrius simètriques no és un subgrup de $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$.

Exercici 6. Demostreu que si tots els elements d'un grup G , llevat del neutre, són d'ordre 2, aleshores G és un grup abelià.

Exercici 7 (*). Sigui G un grup cíclic d'ordre n , generat per un element a . Per a tot nombre enter k , determineu l'ordre del subgrup generat per a^k i demostreu que a^k és un generador de G si, i només si, $\text{mcd}(k, n) = 1$.

Exercici 8. Sigui G un grup cíclic d'ordre n .

- (a) Demostreu que tot subgrup de G és cíclic.
- (b) Demostreu que, per a cada divisor d de n , existeix un únic subgrup de G d'ordre d .

Exercici 9. Sigui $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ el conjunt de les arrels n -èsimes de la unitat complexes. Demostreu que μ_n amb el producte de \mathbb{C} és un grup cíclic.

Exercici 10. Siguin p, q nombres primers diferents i $r, s \geq 1$ nombres enters.

- (a) Determineu quants elements del grup $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ el generen.
- (b) Determineu quants elements del grup $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ el generen.
- (c) Determineu quants elements del grup $\mathbb{Z}/p^r q^s \mathbb{Z}$ el generen.

Exercici 11. Siguin $\sigma, \tau \in S_9$ les permutacions següents:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 1 & 8 & 7 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 8 & 2 & 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculeu $\sigma\tau$ i $\tau\sigma$.
- (b) Descomponeu σ i τ com a producte de cicles disjunts, i també com a producte de transposicions; calculeu les seves signatures.
- (c) Calculeu σ^{2012} .

Exercici 12. Determineu la signatura de totes les permutacions de S_3 . Determineu tots els subgrups de S_3 .

Exercici 13. Demostreu que, per a $n \geq 2$, S_n té el mateix nombre de permutacions parelles que de permutacions senars.

Exercici 14 (*). (a) Demostreu que, donada una permutació $\sigma \in S_n$, llavors

$$\sigma \circ (a_1, \dots, a_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_r)).$$

- (b) Demostreu que, donats dos cicles del mateix ordre σ_1, σ_2 , existeix una permutació $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma \circ \sigma_1 \circ \sigma^{-1} = \sigma_2$.
- (c) Siguin $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in S_n$ cicles disjunts dos a dos, i també $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$, cicles disjunts dos a dos. Posem $\sigma := \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k$ i $\tau := \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$. Demostreu que si, per a $1 \leq i \leq k$, la longitud del cicle σ_i coincideix amb la del cicle τ_i , aleshores existeix una permutació $\rho \in S_n$ tal que $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1} = \tau$.

Exercici 15. Demostreu que S_n admet els sistemes de generadors següents:

- (a) $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)$.

(b) $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$.

(c) $(1, 2, \dots, n), (1, 2)$.

Exercici 16 (*). Sigui A_n el conjunt de permutacions parelles de S_n . Demostreu que A_n és un subgrup d'índex 2 de S_n i que A_n és generat pels cicles d'ordre 3. A_n rep el nom de subgrup alternat de S_n .

Exercici 17 (*). El grup diedral D_{2n} és el grup de desplaçaments del pla que deixen invariant un polígon regular de n costats. És a dir, $D_{2n} = \langle \rho, \sigma \rangle$, on ρ és una rotació d'angle $2\pi/n$ centrada en el centre de simetria del polígon, i σ és una simetria axial respecte d'un dels radis del polígon.

(a) Proveu que $\rho^n = \sigma^2 = Id$ i $\rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$.

(b) Escriviu tots els elements de D_{2n} . Quants n'hi ha?

(c) Definiu un morfisme injectiu de D_{2n} en el grup simètric S_n .

(d) Demostreu que els grups $D_{2,4}$ i $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ no són isomorfs.

Exercici 18. (*El grup dels quaternions*) Sigui H_8 el subgrup de $GL(2, \mathbb{C})$ generat per les matrius

$$Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Demostreu que H_8 és un grup tal que Id és l'element neutre, $i^4 = Id$, $i^2 = j^2$ i $ij = ji^3$.

(b) Calculeu l'ordre de cadascun dels elements de H_8 .

(c) Demostreu que, si H és un grup qualsevol generat per dos elements a, b tals que $a^4 = 1$, $a^2 = b^2$ i $ab = ba^3$, llavors H és isomorf a H_8 .

Exercici 19 (*). Demostreu que tot subgrup d'índex 2 d'un grup G és normal.

Exercici 20. Demostreu que, si G és un grup, el seu centre $Z(G) := \{g \in G : gh = hg, \text{ per a tot } h \in G\}$ és un subgrup normal de G .

Exercici 21. Sigui K un cos. Demostreu que el centre de $GL(n, K)$ és format per les matrius de la forma $M = \lambda Id$, per a algun $\lambda \in K^*$.

Exercici 22. Demostreu que, si $n \geq 3$, el centre de S_n només conté la identitat.

Exercici 23 (*). Siguin $f : G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme de grups i $H_1 \subseteq G_1$, $H_2 \subseteq G_2$ subgrups.

(a) Demostreu que $f(H_1)$ és subgrup de G_2 i $f^{-1}(H_2)$ ho és de G_1 .

(b) Demostreu que si H_2 és normal en G_2 , llavors $f^{-1}(H_2)$ és normal en G_1 .

(c) Demostreu que si H_1 és normal en G_1 , llavors $f(H_1)$ és un subgrup normal de la imatge $f(G_1)$; i que no és necessàriament normal en G_2 .

Exercici 24 (*). *Teoremes d'isomorfia de grups*.

(a) Siguin G un grup, H un subgrup normal i F un subgrup qualsevol. Proveu que HF és un subgrup de G , que $F \cap H$ és un subgrup normal de F , que H és un subgrup normal de HF i que tenim un isomorfisme de grups

$$HF/H \simeq F/F \cap H.$$

- (b) Siguin $\varphi : G \rightarrow G'$ un morfisme exhaustiu de grups, H' un subgrup normal de G' i $H = \varphi^{-1}(H')$. Proveu que φ induïx un isomorfisme entre G/H i G'/H' .
- (c) Siguin G un grup i $F \subset H$ dos subgrups normals de G . Demostreu que H/F és un subgrup normal de G/F i que tenim un isomorfisme de grups

$$(G/F)/(H/F) \simeq G/H.$$

Exercici 25. (*Examen, gener 2011*) Sigui $GL(2, \mathbb{C})$ el grup de matrius 2×2 , invertibles, i de coeficients complexos. Considerem $T \subset GL(2, \mathbb{C})$ el subgrup de matrius diagonals i $D = \langle T, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \subset GL(2, \mathbb{C})$ el subgrup generat per les matrius diagonals i $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Demostreu que T és un subgrup normal de D .
- (b) Descriu un isomorfisme entre D/T i $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- (c) Estudieu si D és normal en $GL(2, \mathbb{C})$.

Exercici 26. Considerem el grup diedral D_{2n} .

- (a) Expliciteu tots els subgrups de $D_{2,4}$ i digueu quins són normals.
- (b) Demostreu que D_{2n} té un subgrup normal d'ordre n , que és cíclic.
- (c) Demostreu que $D_{2,3} \simeq S_3$.

Exercici 27. Calculeu tots els subgrups del grup dels quaternions H_8 i digueu quins són normals.

Exercici 28 (*). (a) Demostreu que A_4 és l'únic subgrup d'índex 2 de S_4 . És cert que A_n és l'únic subgrup d'índex 2 de S_n , per a un n qualsevol?

- (b) Demostreu que A_4 no té subgrups d'índex 2. En té A_n quan $n \geq 5$?

Exercici 29. Determineu, llevat d'isomorfisme, tots els grups d'ordre menor o igual que 8.

Exercici 30. Sigui G un grup i considerem l'aplicació $f : G \rightarrow G \times G$ definida per $f(x) := (x, x)$, per a $x \in G$. Demostreu que f és un morfisme injectiu i que $f(G)$ és un subgrup normal de $G \times G$ si, i només si, G és abelià.

Exercici 31. Determineu tots els subgrups de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, els de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i els de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Exercici 32. Sigui G un grup cíclic finit. Calculeu $\text{Aut}(G)$, el grup dels automorfismes de G .

Exercici 33 (*). Donat un grup G , denotem per $\text{Aut}(G)$ el grup dels automorfismes de G . Denotem per $\text{Int}(G)$ el conjunt dels automorfismes interns de G , és a dir, dels automorfismes φ_g definits per $\varphi_g(h) := ghg^{-1}$, per a $h \in G$ i $g \in G$ donat.

- (a) Demostreu que $\text{Int}(G)$ és un subgrup de $\text{Aut}(G)$.
- (b) Siguin $\sigma \in \text{Aut}(G)$ i $\varphi_g \in \text{Int}(G)$. Demostreu que $\sigma\varphi_g\sigma^{-1} = \varphi_{\sigma(g)}$.
- (c) Demostreu que $\text{Int}(G)$ és un subgrup normal de $\text{Aut}(G)$.

Exercici 34. Demostreu que, si G és un grup, llavors

$$G/Z(G) \simeq \text{Int}(G).$$

En particular, si $Z(G) = \{1\}$, llavors $\text{Int}(G) \simeq G$. Quin és el grup $\text{Int}(G)$ quan G és abelià?

Exercici 35. (a) Calculeu les classes de conjugació del grup S_3 .

(b) Calculeu les classes de conjugació del grup S_4 .

Exercici 36. Demostreu que les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

són elements conjugats en el grup $GL(2, \mathbb{R})$, però que no ho són en $SL(2, \mathbb{R})$.

Exercici 37. Calculeu totes les classes de conjugació del grup diedral $D_{2 \cdot 4}$.

Exercici 38. Sigui n un nombre enter i d un divisor propi de n . Demostreu que el subgrup (ρ^d) de D_{2n} és un subgrup normal i que el grup quocient és isomorf a D_{2d} .

Exercici 39 (*). (a) Escriviu la definició de grup (finit) resoluble.

(b) Demostreu que A_2 , A_3 i A_4 són resolubles.

(c) Demostreu que, per a $n \geq 5$, A_n no és resoluble.

Exercici 40 (*). (a) Escriviu la definició de grup finit simple.

(b) Demostreu la simplicitat de A_n per a $n \geq 5$.

Exercici 41. En aquest exercici calcularem els subgrups de Sylow del grup simètric S_4 .

(a) Calculeu els 3-subgrups de Sylow de S_4 . De quin ordre són?

(b) Descriviu els elements de S_4 que són d'ordre una potència de 2 i recordeu que aquests elements estan continguts en un 2-subgrup de Sylow. Deduïu que un 2-subgrup de Sylow conté un subgrup cíclic d'ordre 4. Expliciteu els 2-subgrups de Sylow de S_4 .

Exercici 42. Sigui G un grup finit. Demostreu que si $|G| = 96$, aleshores G no és simple.

Exercici 43. Proveu que tot grup d'ordre 15 és cíclic

Exercici 44 (*). Proveu que tot grup d'ordre 255 és cíclic.

Exercici 45 (*). Sigui G un grup finit d'ordre $2p$, on p és un nombre primer més gran que 2. Demostreu que o bé G és cíclic o bé G és isomorf al grup diedral D_{2p} .

Exercici 46 (*). Sigui G un grup d'ordre pq amb p, q nombres primers. Demostreu que G és resoluble.

Exercici 47. Sigui G un grup d'ordre pqr , amb p, q, r nombres primers. Demostreu que G és resoluble.

Exercici 48. (*Examen, gener 2011*) Sigui p, q dos nombres primers, amb $0 < p < q$.

(a) Demostreu que tot grup d'ordre p^2 és resoluble.

(b) Sigui G un grup d'ordre p^2q . Demostreu que G té un únic subgrup normal d'ordre p^2 o bé un únic subgrup normal d'ordre q .

(c) Demostreu que G és resoluble.

Exercici 49. Siguin G_1 i G_2 els grups abelians donats per generadors a, b, c i relacions

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 12 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determineu els factors invariants i els divisors elementals de G_1 i de G_2 .

(b) Determineu un morfisme injectiu $M_1 \longrightarrow M_2$.

Exercici 50. (a) Trobeu els divisors elementals i els factors invariants de tots els grups abelians d'ordre 200.

(b) Classifiqueu el grup abelià $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(5) \oplus \mathbb{Z}/(20)$.

Exercici 51. Determineu tots els grups abelians G d'ordre 24 que no contenen cap element d'ordre més gran que 12.

Exercici 52. Demostreu que un grup abelià finit és cíclic si, i només si, tots els seus subgrups de Sylow ho són.

Exercici 53. Demostreu que si G és un grup abelià finit no cíclic, aleshores existeix un nombre primer p tal que G conté un subgrup isomorf a $C_p \times C_p$.

Exercici 54. Demostreu que si G és un grup abelià finit no cíclic, aleshores existeix un nombre primer p tal que G admet un quocient isomorf a $C_p \times C_p$.

Exercici 55. Demostreu que un sistema d'equacions lineals $MX = b$, on $M \in M_{m \times n}(\mathbb{Z})$, $b = (b_1, \dots, b_m)^t \in M_{m \times 1}(\mathbb{Z})$, té solució $X = (x_1, \dots, x_n)^t \in M_{n \times 1}(\mathbb{Z})$ si, i només si, per a tot r , el màxim comú divisor dels menors d'ordre r de la matriu M i el màxim comú divisor dels menors d'ordre r de la matriu ampliada $(M : b)$ coincideixen.

Exercici 56. (a) Demostreu que el grup multiplicatiu dels nombres racionals positius no és finitament generat.

(b) Sabeu donar-ne un conjunt de generadors?

Exercici 57. (a) Demostreu que el grup multiplicatiu dels nombres racionals no nuls no és finitament generat.

(b) Doneu-ne un conjunt de generadors.

Exercici 58. Classifiqueu els grups abelians donats pels grups multiplicatius $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, on p és un nombre primer ≤ 20 .

Exercici 59. Classifiqueu els grups abelians donats pels grups multiplicatius $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, per a $2 \leq n \leq 15$.

Exercici 60. Doneu l'estructura dels grups abelians donats pels grups multiplicatius $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. (*Indicació:* reviseu el concepte d'arrel primitiva, explicat en l'assignatura d'Aritmètica.)