

**EXERCICIS DE CàLCUL DIFERENCIAL EN DIVERSES VARIABLES**  
**Primer quadrimestre del curs 2012-2013**

Llista 2: Funcions: Límits i continuïtat

1. Representeu gràficament la funció  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  i les corbes de nivell  $f(x, y) = c$ .
2. Representeu gràficament les corbes de nivell de la funció  $f(x, y) = xy$ .
3. Estudieu l'existència dels límits següents en el corresponent domini de la funció:

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}.$

(b)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x \sin y}{|x| + |y| + |z|}$

(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^5}{2x^2+y^8}.$

(d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \sqrt{\left| \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2}{|x-y|} \right|}.$

4. Estudieu la continuïtat de les funcions següents:

(a)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y^2}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}.$

(b)  $f(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq |y|, \\ y & \text{si } |x| > |y|. \end{cases}$

5. Proveu que les següents funcions estenen a una funció contínua en tot  $\mathbb{R}^2$ :

(a)  $f(x, y) = \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$

(b)  $f(x, y) = \frac{\log(1 + (x + y)^2)}{(x + y)^2}.$

6. Determineu per a quins valors de  $p = 1, 2, 3, \dots$  és contínua la funció  $f_p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  definida per

$$f_p(x, y) = \begin{cases} \frac{x^p y^2}{x^4 + y^8} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

7. Determineu quins dels conjunts següents són oberts, tancats, acotats o compactes.

(a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y > 2, x^2 - y < 1\}$

(b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -xy^2 + z = 1\}$

(c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 2y^2 - 4x \leq 5\}$

(d)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 4 > z^2 \geq x^2 + y^2\}$