Problema 13. (a) Demostreu que la contracció d'un ideal primer és un ideal primer.

(b) Considereu la injecció de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}[i]$. Proveu que l'extensió de l'ideal (2) no és un ideal primer.

(c) Siguin A un anell i $\mathfrak{p}$ un ideal primer. Proveu que l'extensió de $\mathfrak{p}$ en $A[x]$ és un ideal primer.

Solució. (a) Siguin: f: $A_1 \longrightarrow A_2$ un homomorfisme d'anells $I \subseteq A_2$ un ideal primer.

Siguin $x, y \in A_1$ tals que $xy \in f^{-1}(I)$ llavors $f(xy) \in I$ d'on $f(xy) = f(x)f(y) \in I$ i, per tant, $f(x) \in I$ ó $f(y) \in I$

Suposem que $f(x) \in I$. En el cas que $f(y) \in I$ el raonament és anàleg.

Aleshores tenim que

$x \in f^{-1}(f(x)) \subseteq f^{-1}(I)$ o sigui $x \in f^{-1}(I)$

(b) Sigui

$$\lambda : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[i]$$
$$x \longmapsto x + 0i$$

.

Volem veure que $(2)^e$ no és un ideal primer de $\mathbb{Z}[i]$. Veiem que la extensió de (2) són els elements de la forma $2(a + bi)$ amb $a, b \in \mathbb{Z}$, ja que els elements de $\mathbb{Z}[i]$ es redueixen a "nombres complexos de coeficients enters".

Donats $x_1 = 3 + i$; $x_2 = 3 + i$, és evident que

$x_1, x_2 \notin (2)^e$ però $x_1 x_2 = 8 + 6i = 2(4 + 3i) \in (2)^e$; per tant, l'extensió de (2) no és un ideal primer.

(c) Nota: Utilitzarem que si A és un anell i I és un ideal aleshores es compleix la seguent propietat: A/I és un domini d'integritat si, i només si I és un ideal primer.

Considerem

$$f : A \longrightarrow A[x]$$
$$p \longmapsto p$$

.

L'extensió de $\mathfrak{p}$ per f en $A[x]$ és $\mathfrak{p}[x]$, ja que $\mathfrak{p}$ és un ideal. Si donat aquest ideal $\mathfrak{p}[x]$ fem l'anell quocient $A[x]/\mathfrak{p}[x]$ i, pel que s'ha demostrat a l'exercici 11.b, tenim que $A[x]/\mathfrak{p}[x]$ és isomorf a l'anell de polinomis amb coeficients de $A/\mathfrak{p}$.

Sabem que $\mathfrak{p}$ és un ideal primer i, per tant, $A/\mathfrak{p}$ és un domini d'integritat. Si $A/\mathfrak{p}$ és un domini d'integritat, aleshores $(A/\mathfrak{p})[x]$ també ho és i, en definitiva, $A[x]/\mathfrak{p}[x]$ també ho és ja que són isomorfs. Aleshores, $\mathfrak{p}[x] = \mathfrak{p}^e$ és un ideal primer.