Complex Analysis

Martin Azpillaga

February 18, 2014

Contents

Block I

Definitions

1. The field of complex numbers

introduction

The field of complex numbers

Let:

- $\begin{array}{rcl} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (a+c, b+d) \end{array}$
- $\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (ac-bd, ad+bd) \end{array}$

We name the field of complex numbers to:

- $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

We denote:

- $(\mathbb{R}^2, +, \cdot) \, : \, \mathbb{C}$
- $(0,1) \in \mathbb{C} \, : \, i$
- $(a,b) \in \mathbb{C} \, : \, a+bi$
- $\pi_1(\mathbb{C}) \, : \, Re$
- $\pi_2(\mathbb{C}) \, : \, Im$

Conjugation

We name complex conjugation to:

- $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a,b) & \longmapsto & (a,-b) \end{array}$

We denote:

- $f((a,b)) \, : \, \overline{(a,b)}$

Norm

We name complex norm to:

$$\cdot \begin{array}{rcl} f \ :\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \sqrt{a^2+b^2} \end{array}$$

We denote:

$$\cdot\, f((a,b)) \ : \ |(a,b)|$$

Polar transformation

We name polar transformation to:

$$\cdot \begin{array}{rcl} f \ :\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi) \\ (a,b) & \longmapsto & (\sqrt{|(a,b)|}, \arctan(\frac{b}{a})) \end{array}$$

We denote:

$$\cdot\, f((a,b)) \ : \ (r,\theta)$$

Unit sphere projection

We name unit sphere projection to:

$$\cdot \begin{array}{rcl} f \ :\mathbb{C} & \longrightarrow & S^1 \\ z & \longmapsto & \frac{z}{|z|} \end{array}$$

We denote:

$$\cdot\, f(z) \ : \ \pi(z)$$

Roots of unity

Let:

- $z \in \mathbb{C}$

Then, z is a root of unity if:

- $\exists\, n \in \mathbb{N} \;\shortparallel\; z^n = 1$

We denote:

- $\{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ root of unity } \} \;:\; S^1$

Disk

Let:

- $p \in \mathbb{C}$
- $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

We name Disk centered in p and radius r to:

- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| < r\}$

We denote:

- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| < r\} \;:\; D^1$

Component decomposition

Let:

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

We name real component of f to:

- $\begin{array}{rcl} f_{Re} : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & Re(f(z)) \end{array}$

We name imaginary component of f to:

- $\begin{array}{rcl} f_{Im} : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & Im(f(z)) \end{array}$

We name component decomposition of f to:

- $\begin{array}{rcl} f_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (f_{Re}(x+yi), f_{Im}(x+yi)) \end{array}$

2. Holomorphic functions

Incremental quotient

Let:

- $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ open
- $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$
- $p \in \mathcal{U}$

We name incremental quotient of f in p to:

- $\lim_{z \to p} \dfrac{f(z) - f(p)}{z - p}$

We denote:

- $f'(p)$

Holomorphic function

Let:

- $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ open
- $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$
- $p \in \mathcal{U}$

Then, f is holomorphic over p if:

- $\exists f'(p)$

Then, f is holomorphic over U if:

- $\forall\ p \in \mathcal{U}$:

  $\exists f'(p)$

We denote:

- $\{f : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorphic over } \mathcal{U}\} : \mathcal{H}(\mathcal{U})$
- $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : f$ entire

Block II

Propositions

1. The field of complex numbers

introduction

go

Block III

Examples

1. Holomorphic functions

introduction

go

Block IV

Problems

PROBLEMES D'ANÀLISI COMPLEXA
2n quadrimestre del curs 2013-2014.

Llista 1: Els nombres complexos

B.1. Expresseu en la forma $a + ib$ els següents nombres:

(a) $(2+3i)(4+i)$ (c) $\frac{1}{4+i}$ (e) $\sqrt{i}$ (g) $\sqrt{9i}$
(b) $(4+2i)^2$ (d) $\frac{i}{4+i}$ (f) $\sqrt{-i}$ (h) $\sqrt{1+i}$

B.2. Si $z = x + iy$ trobeu les parts real i imaginària de les expressions següents:

(a) z^2 (b) $z(z+1)$ (c) $\frac{1}{z}$ (d) $\frac{1}{z-3}$.

B.3. És cert que

a) $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w$?
b) $\operatorname{Re}(zw) = (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Re} w)$?
c) $\operatorname{Re}(\frac{z}{w}) = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Re} w}$?

B.4. Trobeu la forma polar dels nombres següents i dibuixeu-los.

(a) $3(1+\sqrt{3}\,i)$ (b) $2\sqrt{3} - 2i$ (c) $-2+2i$ (d) $-1-i$

B.5. Sigui $(x+iy)/(x-iy) = a+ib$. Proveu que $a^2 + b^2 = 1$.

B.6. Proveu que si $p(z)$ és un polinomi amb coeficients reals i z és un zero de p llavors $\bar{z}$ també ho és.

B.7. Descriviu els conjunts del pla que satisfan (recordeu que $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.)

(a) $\operatorname{Im} \frac{z-a}{z} = 0, a \in \mathbb{C}^*$ (b) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$ (c) $|z-2| > |z-3|$

SOL. B.1. a) $5+14i$; b)$12+16i$; c) $4/17 - i/17$; d)$1/17 + 4i/17$; e) $\pm\sqrt{2}/2(1+i)$; f)$\pm\sqrt{2}/2(1-i)$; g) $\pm 3\sqrt{2}/2(1+i)$; h) $\pm 2^{1/4}(\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8))$.

B.2 a) $x^2 - y^2 + 2ixy$; b) $x^2 - y^2 + x + i(y+2xy)$; c) $(x-iy)/(x^2+y^2)$; d) $(x-3-iy)/((x-3)^2+y^2)$.

B.3 a) si. b) no. c) no.

B.4 a) $6(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$; b) $4(cos(\pi/6) - i\sin(\pi/6))$; c) $2\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$; d) $\sqrt{2}(cos(3\pi/4) - i\sin(3\pi/4))$.

B.6 Conjugueu tot el polinomi.

B.7 a) Recta que passa per 0 i a; b) Paràbola horitzontal $x = (1/2)(y^2 - 1)$; c) $\{\operatorname{Re} z > 3/2\}$.

1. Expresseu en la forma $a + ib$ els següents nombres:

(a) $\frac{1}{i}$ (c) $\frac{1}{2+i} + \frac{1}{2-i}$ (e) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$ (g) $\sqrt[4]{-i}$
(b) $\frac{1+i}{1-i}$ (d) $\frac{1}{2+i} + \frac{4-2i}{3+i}$ (f) $(1+i)^{100} + (1-i)^{100}$ (h) $(3+4i)^{\frac{1}{2}}$

2. Si $z = x + iy$ on $x, y \in \mathbb{R}$, trobeu les parts real i imaginària de:

PROBLEMES D'ANLISI COMPLEXA
2n quadrimestre del curs 2013-2014

Llista 2: Funcions de variable complexa i equacions de Cauchy-Riemann

B.1. Trobeu els punts on la funció f és derivable (en el sentit complex), en els següents casos, i calcula'n la derivada.

(a) $\cos|z|^2$ (c) e^{iz} (e) $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+2)}$

(b) $|z|^4$ (d) $z + \frac{1}{z}$ (f) $\frac{1}{(z+\frac{1}{z})^2}$

Solució: (a) $\emptyset$; (b) $\emptyset$; (c) $\mathbb{C}$; $f'(z) = ie^{iz}$;(d) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; $f'(z) = 1 - |\frac{1}{z^2}$; (e) $\mathbb{C} \setminus \{1, \pm\sqrt{2}i\}$; (f) $\mathbb{C}$.

B.2. Determineu si aquestes funcions poden ser la part real d'una funció holomorfa, i en cas que ho siguin calculeu la part imaginària.

(a) $e^x \cos y$ (b) $x^3 + 6xy^2$ (c) $\log(x^2 + y^2)$

Solució: (a) $e^x \sin y$; $f(z) = e^z$; (b) No ho és; (c) $2\arctan(y/x)$; $(f(z) = \log(z^2)$.

B.3. Sigui f una funció holomorfa en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ i $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Quin angle formen les corbes $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0)$ i $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$ en un punt z_0 ?
Solució: $\pi/2$.

1. Trobeu els punts on la funció f és derivable (en el sentit complex), en els següents casos:

(a) $f(z) = |z|$
(b) $\cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$
(c) $f(z) = \operatorname{Re} z$
(d) $f(z) = z + z\overline{z}$
(e) $f(z) = \operatorname{Im} e^{\overline{z}} + i \operatorname{Re} e^z$

2. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $z_0 \in \Omega$ i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funció.
a) Identificant $\mathbb{R}^2$ amb $\mathbb{C}$ de la forma habitual, demostreu que si f és diferenciable en z_0, llavors

$$Df(z_0)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \cdot z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) \cdot \overline{z} \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

on

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

b) Proveu que f és holomorfa en Ω si, i només si, f és diferenciable i $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ en Ω. En tal cas, $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$.

3. Demostreu que si f és diferenciable en un obert de $\mathbb{C}$, llavors

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} \quad \text{i} \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

1. The field of complex numbers

introduction

entity

Let:

- $\cdot$ *statements*
- $\cdot$

Then, *item* is a/an entity if:

- $\cdot$ *conditions*
- $\cdot$

We denote:

- $\cdot$ $property$: $notation$
- $\cdot$

Block V

Tasks