15. Per tot $n \geqslant 1$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

16. Per tot $n \geqslant 4$, $2n^2 + 3n < 3^n$.

17. Per tot natural n, $n^2 + 5n + 6$ és parell. Demostra-ho per inducció i també per separació de casos.

18. Per tot $n \geqslant 1$, $4^n - 3n - 1$ és divisible per 9.

19. L'anomenada «successió de FIBONACCI»[1] és la successió $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que es defineix de la següent forma recursiva:

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad \text{i, per } n \geqslant 2, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Fent servir únicament aquesta definició, demostra:

(a) Per tot $n \geqslant 3$, a_n i a_{n+1} són primers entre si. [*Indicació*: reducció a l'absurd.]
(b) Per tot $n \geqslant 1$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1$.
(c) Per tot $n \geqslant 1$, $a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_n^2 + (-1)^n$.
(d) Per tot $n \geqslant 0$, a_{3n} és parell, i a_{3n+1} i a_{3n+2} són senars.
(e) Per tot $n \geqslant 0$, $a_{n+6} = 4a_{n+3} + a_n$. [*Indicació:* inducció completa.]

20. Demostra que, per tot $n \geqslant 2$, el nombre màxim de punts en què es tallen n rectes diferents del pla és $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

21. Per tot $n \geqslant 0$, $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)$.

22. Per tot $n \geqslant 3$, $1 + 2n < 2^n$.

23. Una oficina de correus només té segells de 5 i de 9 cèntims d'euro. Demostra que qualsevol carta que valgui 35 cèntims o més es podrà franquejar amb aquests segells.
Indicació: En el pas d'inducció, fes una separació de casos.

24. Si $z = a + bi$ és un nombre complex, el seu *conjugat* es defineix com $\overline{z} := a - bi$. Demostra que per tot natural $n \geqslant 2$, i qualssevol complexos $z_1, \dots, z_n$, es compleix:

(a) $\overline{z_1 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_n}$.
(b) $\overline{z_1 \times \cdots \times z_n} = \overline{z_1} \times \cdots \times \overline{z_n}$.

25. Per tot $n \geqslant 2$, si $a_1, \dots, a_n$ són nombres reals estrictament entre 0 i 1, aleshores

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) > 1 - a_1 - \cdots - a_n.$$

26. Per tot $n \geqslant 1$, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

[1] LEONARDO PISANO (1170–1250), també anomenat «FIBONACCI», va ser un matemàtic italià que, entre altres aportacions, va introduir a Europa el sistema hindú-aràbic de numeració decimal posicional i les xifres aràbigues.