Problema 26. Sigui A un domini d'integritat. Proveu que l'anell de polinomis $A[x]$ és un domini d'ideals principals si, i només si, A és un cos.

Solució. $\Rightarrow$) Suposem que $A[x]$ és un domini d'ideals principals. Volem veure que, aleshores, A és un cos.

Sigui $a \in A$, on A és domini d'integritat, i $a \neq 0$, i volem veure que a té invers. Considerem l'ideal $I = (a, x)$ de $A[x]$. Com que, per hipòtesi, tot ideal de $A[x]$ és principal, sabem que $\exists p(x) \in A[x]$ tal que $(a, x) = (p(x))$. Atès que $p(x)|a$ i A és DI, el polinomi $p(x)$ ha de tenir grau 0. Definim ara $p = p(x)$.

Sabem, que $p(x)|x$, aleshores $\exists g(x) \in A[x]$ tal que $p(x)g(x) = x$. Com que $gr(p(x)) = 0$, aleshores $gr(g(x)) = 1$. Per tant $g(x) = C_0 + C_1x$, amb C_0,$C_1 \in A$; aleshores $C_0p = 0$ i $C_1p = 1 \Rightarrow p$ és una unitat de $A[x]$. Tenim, doncs, $(a, x) = (1) \Rightarrow 1 = r(x)a + s(x)x$ amb $r(x), s(x) \in A[x]$. En fer $x = 0$, o sigui, en considerar els termes independents dels polinomis, obtenim que $1 = r(0)a$, de manera que a és invertible, com volíem veure.

$\Leftarrow$) Atès que A és un domini d'integritat, aleshores $A[x]$ també ho és.

Suposem que A és un cos. Volem veure que, aleshores, tot ideal de $A[x]$ és principal.

Sigui $I \neq 0$ un ideal de $A[x]$. Considerem un polinomi, $p(x) \in I$, de grau mínim entre els polinomis no nuls de I, $gr(p(x)) =: n$. Sigui $q(x) \in I$ un polinomi qualsevol. Per ser A un cos, el podem prendre mònic i, per tant, podem fer la divisió entera de $q(x)$ per $p(x)$. Per tant $q(x) = p(x)s(x) + r(x)$, amb $s(x)$, $r(x) \in A[x]$, i $gr(r) < n$ o $r(x) = 0$.

De la igualtat $r(x) = q(x) - p(x)s(x)$, i com que $q(x)$ i $p(x) \in I$, resulta que $r(x) \in I$; i com que $p(x)$ és de grau mínim en I, no pot ser que $gr(r(x)) < gr(p(x))$; per tant, $r(x) = 0 \Rightarrow I = (p(x))$ és un ideal principal, d'on $A[x]$ és un domini d'ideals principals.