CÀLCUL INTEGRAL EN DIVERSES VARIABLES. PRIMAVERA 2013

Llista 3: Funcions de tres variables integrables Lebesgue

1. Calculeu el volum dels conjunts:

a) A limitat pel paraboloide el·líptic $z = 2x^2 + y^2$, el pla $x + y = 1$, i els plans coordenats.

b) $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{2} \leq 1,\ y \geq x\}$

c) A limitat per un cilindre vertical circular de radi 1, i una esfera de radi 2 centrada en la superfície del cilindre.

2. Sigui $A \subset \mathbf{R}^3$ un conjunt mesurable, i f una funció integrable en A. Suposem a més que A és simètric respecte 0 (és a dir, $x \in A$ si i només si $-x \in A$).

Useu el teorema del canvi de variables per provar que si per a tot $x \in A$, es compleix $f(-x) = -f(x)$, aleshores $\displaystyle\int_A f = 0$.

Qué succeeix si per a tot $x \in A$, es compleix $f(-x) = f(x)$?

3. Estudieu la integrabilitat de les funcions

a) $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$, en $[0, 1]^3$

b) $\dfrac{xy}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^a}$, $a \in \mathbf{R}$, en $(0, +\infty)^3$

c) $f(x, y, z) = \dfrac{z}{|x^2 + y^2 + z^2 - 2|^a}$, $a \in \mathbf{R}$, en el conjunt mesurable

$$A = \{(x, y, z) | 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 3,\ x > 0,\ y > 0, z > 0\}$$

d) $f(x, y, z) = (x - 1)y^{2a}z^b$, $a, b \in \mathbf{R}$, en el conjunt mesurable

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 < z < 2,\ (x - 1)^2 + y^2 < 1,\ x - y < 1,\ y > 0\}$$

4. a) Si $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x > 0\}$, proveu que les equacions

$u = \dfrac{1}{x^2}, \quad v = xy + z, \quad w = x^2 z - y,$ defineixen un canvi de variables d'U en U.

b) Calculeu $\displaystyle\int_A \frac{x^2 z - y}{x(xy + z)}(1 + x^3)\, dx\, dy\, dz,$ essent $A \subset \mathbf{R}^3$ el conjunt definit com

$A = \{(x, y, z) \in U \mid 1 < x < 3, \quad 1 < xy + z < 2, \quad 0 < x^2 z - y < 1\}.$

5. Calculeu $\displaystyle\int_A f$, essent:

a) $f(x, y, z) = \dfrac{z^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}, \quad A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z > \sqrt{x^2 + y^2}, \; x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$

b) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)(1 - z[2z]), \quad A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 1, \; 0 < z < 1, \; x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$

c) $f(x, y, z) = \sqrt{|z - (x^2 + y^2)|}, \quad A = \{(x, y, z) \mid 0 < y < \sqrt{3}\, x, \; x^2 + y^2 < 1, \; 0 < z < 2\}$

6. a) Proveu que les equacions

$$\begin{cases} u = x + y + z \\ uv = y + z \\ uvw = z \end{cases}$$

defineixen un canvi de variables entre $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x > 0, \; y > 0, \; z > 0\}$ i $g(U)$.

b) Sigui A el tetraedre definit per $A = \{(x, y, z) \mid x > 0, \; y > 0, \; z > 0, \; x + y + z < 1\}$.

Calculeu $\displaystyle\int_A xyz(1 - x - y - z)\; dx\; dy\; dz$