60. Donats $A = \{3, 4, 9\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ i $D = \{3, 4, 5\}$, comprova si es compleixen les següents igualtats.

(a) $(C \setminus D) \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus \big(D \times B\big)$.

(b) $(C \cup D) \times A = (C \times A) \cup (D \times A)$.

(c) $C \times (D \setminus A) = (C \setminus A) \times (D \setminus A)$.

61. Digues si és o no veritat que, per a conjunts A i B qualssevol, si $B \subsetneq A$ aleshores $B \times A \subsetneq A \times A$, justificant la teva resposta.

62. Demostra (per inducció sobre k) que si el conjunt S té k elements, i el conjunt T en té m, aleshores el conjunt $S \times T$ té $k \cdot m$ elements.

63. D'entre els següents grups de relacions, digues quines són reflexives, quines simètriques, quines transitives, quines antisimètriques, quines totals:

(i) En el conjunt dels nombres naturals:

(a) És estrictament més petit que.

(b) És més petit o igual que.

(c) És divisor de.

(d) Són diferents.

(ii) En el conjunt de les rectes del pla:

(e) És perpendicular a.

(f) És paral·lela a.

(g) Es tallen.

64. Considera la relació $\otimes$ en $\mathcal{P}(A)$, essent A un conjunt qualsevol, definida per a $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ així: $X \otimes Y$ si i només si $X \cap Y \neq \emptyset$. Digues justificadament si és reflexiva, simètrica, antisimètrica, transitiva, d'equivalència, d'ordre, d'ordre total.

65. Considera les següents relacions en $\mathbb{Q}^+$, el conjunts dels nombres racionals estrictament positius:

(a) La relació S definida per aSb si i només si $p + q < r + s$ o $(p + q = r + s$ i $p \leqslant r)$, on $\dfrac{p}{q}$ és l'expressió irreduïble d'a i $\dfrac{r}{s}$ és l'expressió irreduïble de b.

(b) La relació T definida per aTb si i només si $q < s$ o $(q = s$ i $p \leqslant r)$, on $\dfrac{p}{q}$ és l'expressió irreduïble d'a i $\dfrac{r}{s}$ és l'expressió irreduïble de b.

Investiga les propietats de cadascuna d'elles (reflexiva, simètrica, etc.) i digues si són relacions d'equivalència, d'ordre o d'ordre total. Si alguna és d'ordre, digues si amb ella $\mathbb{Q}^+$ té element mínim o element màxim.

66. Sigui R una relació en un conjunt $A \neq \emptyset$. Definim la relació S en el mateix conjunt A de la següent manera: Per a $a, b \in A$, aSb si i només si no és cert que bRa. Investiga i respon de forma raonada les següents preguntes:

(a) Si R és reflexiva, aleshores S ha de ser reflexiva? Ha de ser no reflexiva ?

(b) Si R és simètrica, necessàriament S ha de ser simètrica, necessàriament ha de ser no simètrica, o cap de les dues?

(c) Si R és transitiva, necessàriament S ha de ser transitiva, necessàriament ha de ser no transitiva, o cap de les dues ?

(d) Si R és antisimètrica, necessàriament S ha de ser antisimètrica, necessàriament ha de ser no antisimètrica, o cap de les dues ?

67. Considera X, Y, Z conjunts arbitraris. Demostra les següents igualtats:

(a) $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$.

(b) $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$.

68. Digues si és cert o no que, per a conjunts A, B, C, D qualssevol, si $A \times B = C \times D$ aleshores $A = C$ i $B = D$. Justifica la teva resposta.

69. Sigui X un conjunt arbitrari no buit. Considera la següent relació en $\mathcal{P}(X)$: Si $A, B \subseteq X$, $A \oplus B$ si i només si $A \nsubseteq B$. Mostra justificadament si té o no les següents propietats: reflexiva, simètrica, antisimètrica, transitiva, total.

70. En el conjunt de totes les successions convergents de nombres reals definim una relació $\square$ de la següent manera: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \square \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si i només si existeix un $k \in \mathbb{N}$ tal que per tot $m \geqslant k$, $a_m - b_m \leqslant 0$. Es demana si la relació $\square$ és reflexiva, simètrica, antisimètrica, transitiva, d'equivalència, d'ordre, d'ordre total. Justifica les respostes.

71. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ considerem la següent relació:

$$(r, s) \ll (r', s') \text{ si i només si } \begin{cases} r < r', & \text{o bé} \\ r = r' \text{ i } s \leqslant s'. \end{cases}$$

Demostra que $\ll$ és una relació d'ordre total sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.