50. Escriu de la forma “Si . . . , aleshores . . . ” les següents afirmacions:

(a) Que el producte de dos nombres enters sigui senar és necessari per a que ambdós ho siguin (de senars).

(b) Que el quadrat d’un nombre natural n sigui senar és suficient per a que n sigui senar.

(c) Que un natural $n+1$ sigui quadrat perfecte és necessari per a que n sigui un quadrat perfecte.

Formula les propietats recíproques de cadascuna d’elles.

51. Considera les tres proposicions següents

P : $2+2=5$

Q : La suma dels angles d’un triangle és de 180°

R : L’àrea d’un cercle de radi r és igual a $2\pi r$

Podem afirmar que alguna de les següents proposicions és veritat ?

(a) $P \to P$ **(c)** $P \to Q$ **(e)** $P \to R$

(b) $R \to P$ **(d)** $(P \vee Q) \wedge R$ **(f)** $(P \wedge Q) \vee R$

52. Investiga si les següents fórmules són tautologies, contradiccions, o ni una cosa ni l’altra.

(a) $\big((A \to C) \wedge (B \to C)\big) \to \big((A \vee B) \to C\big)$

(b) $\big((A \to (B \to C)\big) \to \big((A \wedge B) \to C)\big)$

(c) $A \wedge (B \vee \neg A)$

(d) $\big((A \to B) \to C\big) \wedge \neg\big(\big((B \to A) \to C\big) \to C\big)$

53. Demostra que les següents parelles d’enunciats són equivalents.

(a) P i $P \wedge (P \vee Q)$

(b) $P \leftrightarrow Q$ i $(P \to Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)$

(c) $(P \wedge R) \to Q$ i $P \to (R \to Q)$

54. Utilitzant altres equivalències conegudes, troba una fórmula equivalent a cada una de les següents, amb la condició que només contingui els símbols A, B, C, $\neg$ i $\vee$.

(a) $A \wedge (A \vee B)$

(b) $\neg\big(\neg(A \vee B) \to A\big)$

(c) $(A \vee B) \to (B \vee A)$

(d) $\neg\big(A \to (\neg B)\big)$

(e) $(A \wedge B) \to (A \vee B)$

(f) $\neg\big(A \leftrightarrow (\neg B)\big)$

(g) $\big((A \to C) \wedge (B \to C)\big) \to \big((A \vee B) \to C\big)$

(h) $\neg\Big(\big((C \to A) \wedge (C \to B)\big) \to \big(C \to (A \wedge B)\big)\Big)$

55. Examina la següent fal·làcia (segueix els passos personalment).

(a) Considerem l'equació $\dfrac{x+5}{x-7} - 5 = \dfrac{4x-40}{13-x}$, amb $x \neq 7, 13$.

(b) Operant en el terme de l'esquerra, es pot comprovar que $\dfrac{x+5}{x-7} - 5 = \dfrac{4x-40}{7-x}$.

(c) De (a) i (b) es dedueix que $\dfrac{4x-40}{7-x} = \dfrac{4x-40}{13-x}$.

(d) Atès que els numeradors són iguals, els denominadors també ho han de ser.

És a dir, de (c) es dedueix que $7 - x = 13 - x$.

(e) De (d) es dedueix que $7 = 13$. Absurd!

En algun dels passos (b)–(e) hi ha d'haver un error. Quin és ? Per què ?

(Atenció, no es demana que "corregeixis" el raonament, ja que si porta a un absurd segur que no es pot arreglar! Només has de dir on hi ha l'error, en què consisteix, i per què és un error.)

56. Reformula els següents teoremes en forma d'implicació ($P \to Q$) i digues quina és la condició necessària i quina la suficient.

(a) L'àrea del cercle de radi r és πr^2.

(b) Donada una recta r i un punt P exterior a r, hi ha exactament una recta s que conté a P i és paral·lela a r.

(c) Considerant el triangle de vèrtexs A, B, C i costats de longitud a, b c,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

(d) (Teorema fonamental del Càlcul) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, essent f una funció contínua en l'interval real $[a, b]$ i F qualsevol funció tal que $F'(x) = f(x)$.

57. Demostra que els següents enunciats són tautologies.

(a) $\neg(P \to Q) \to P$

(b) $\big[(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q)\big] \to \neg P$

(c) $(P \to Q) \to \big[(P \wedge R) \to (Q \wedge R)\big]$

(d) $(P \leftrightarrow Q) \to (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$

58. Investiga si les següents fórmules són tautologies, contradiccions, o ni una cosa ni l'altra.

(a) $\big((C \to A) \wedge (C \to B)\big) \to \big(C \to (A \wedge B)\big)$

(b) $\big((A \to B) \to C\big) \wedge \neg\big(\big((B \to A) \to C\big) \to C\big)$

59. Utilitzant altres equivalències conegudes, troba una fórmula equivalent a cada una de les següents, amb la condició que només contingui els símbols A, B, C, $\neg$ i $\wedge$.

(a) $A \to (\neg B)$

(b) $\neg\big(A \wedge (A \vee B)\big)$

(c) $A \leftrightarrow (\neg B)$

(d) $\neg\big((A \vee B) \to (B \vee A)\big)$

(e) $\neg(A \vee B) \to A$

(f) $\neg\big((A \wedge B) \to (A \vee B)\big)$

(g) $\big((C \to A) \wedge (C \to B)\big) \to \big(C \to (A \wedge B)\big)$

(h) $\neg\Big(\big((A \to C) \wedge (B \to C)\big) \to \big((A \vee B) \to C\big)\Big)$