PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL. CURSO 2010-11. GRUPO T

1. Capítulo 1. Espacios vectoriales, subespacios, espacios cociente

1.1. Espacios vectoriales y subespacios.

1. Sea $(E, 0, +, -(?))$ un grupo conmutativo.

(1) Prueba que si $e \in E$ cumple $e + x = x$, para todo $x \in E$, entonces $e = 0$.
(2) Prueba que si $x + y = 0$, entonces $y = -x$ y $x = -y$.
(3) Prueba que $-0 = 0$ y $-(-x) = x$.

2. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K.

(1) Prueba que, para todo $\lambda \in K$ y para todo $u \in E$, $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $0 \cdot u = \mathbf{0}$, $(-1)u = -u$.
(2) Prueba que si $\lambda \in K$ y $u \in E$ son no nulos, entonces $\lambda u \neq \mathbf{0}$.

3. Sea X un conjunto. Denotamos por $\mathcal{F}(X)$ el conjunto de funciones de X en $\mathbb{R}$. Dotamos a $\mathcal{F}(X)$ de las siguientes operaciones:

Si $f, g \in \mathcal{F}(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, se definen la suma de f y g, $f + g$, el producto de λ por f, $\lambda \cdot f$, la función opuesta de f, $-f$, y la función cero, $\mathbf{0}$, por

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) \ := \lambda \cdot (f(x)),$$

para todo $x \in X$. Prueba que $\mathcal{F}(X)$ con estas operaciones es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y que se cumple

$$(-f)(x) = -(f(x)), \quad \mathbf{0}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

4. Sean $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las sucesiones de números reales. Sea $\mathcal{C}$ el subconjuto de las sucesiones convergentes. Prueba que $\mathcal{C}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{N})$.

5. Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0(I)$ el subconjunto de $\mathcal{F}(I)$ formado por las funciones continuas y, para $n \geq 1$, $\mathcal{C}^n(I)$ el subconjunto de las funciones n veces derivables. Prueba que $\mathcal{C}^n(I)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(I)$, para todo entero $n \geq 0$.

1.2. **Aplicaciones lineales.**

6. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0(I)$. Sea $\mathcal{G}$ el subconjunto de $\mathcal{C}^1(I)$ de las funciones $g \in \mathcal{C}^1(I)$ tales que $g' = f$, es decir, el conjunto de las primitivas de f. ¿Es $\mathcal{G}$ un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^1(I)$?

7. Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Estudia si los siguientes subconjuntos de $\mathcal{C}^\infty(I)$ son subespacios vectoriales

$$\mathcal{G}_1 = \{f \in \mathcal{C}^1(I);\ f' = f\},\ \mathcal{G}_2 = \{f \in \mathcal{C}^2(I);\ f'' = -f\},\ \mathcal{G}_3 = \left\{f \in \mathcal{C}^0(I);\ \int_a^b f(x)dx = 0\right\}.$$

8. Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, $n \geq 0$ un entero. Denotamos la derivada de una función f por $D(f)$, y la derivada i-ésima por $D^i(f)$, para todo i. Sea $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ un polinomio de grado $\leq n$. Denotamos por $P(D)(f)$ la función

$$P(D)(f) = a_0 f + a_1 D(f) + \cdots + a_n D^n(f).$$

Sea $\mathcal{G}$ el subconjunto de $\mathcal{C}^\infty(I)$ de las funciones $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ tales que $P(f) = \mathbf{0}$. Prueba que $\mathcal{G}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^n(I)$.

9. Sea $E = \mathbb{R}[x]$. Determina cuales de los siguientes subconjuntos de E son subespacios vectoriales de E:

$$F_1 = \{p(x) \in E;\ p(3) = 0\}, \qquad F_2 = \{p(x) \in E;\ p'(3) = 0\}$$

$$F_3 = \left\{p(x) \in E;\ \int_0^1 p(x)dx \leq 100\right\}, \qquad F_4 = \left\{p(x) \in E;\ \int_0^1 p(x)dx = 0\right\}$$

$$F_5 = \{p(x) \in E;\ \text{grado}(p(x)) \text{ es par}\}, \qquad F_6 = \{p(x) \in E;\ \text{grado}(p(x)) > 4\}$$

10. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Determina cuales de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}(m, n)$:

$$F_1 = \{A = (a_i^j) \in \mathbb{R}(m, n);\ a_1^1 = 0\}, \qquad F_2 = \{A = (a_i^j) \in \mathbb{R}(m, n);\ a_1^1 + a_1^2 = 0\}$$

$$F_3 = \{A = (a_i^j) \in \mathbb{R}(n, n);\ \text{traza}(A) = 0\}, \quad F_4 = \{A = (a_i^j) \in \mathbb{R}(m, n);\ a_i^j = 2\pi\ \forall i, j\}$$

$$F_5 = \{A \in \mathbb{R}(n, n);\ A = A^t\} \qquad F_6 = \{A \in \mathbb{R}(n, n);\ A = -A^t\}.$$

11. Sea $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Determina cuales de los siguientes subconjuntos de E son subespacios vectoriales:

$$F_1 = \{f \in E;\ f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 = \{f \in E;\ f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

$$F_3 = \{f \in E;\ f(x^2) = (f(x))^2\ \forall x \in \mathbb{R}\}, \quad F_4 = \{f \in E;\ f(5 - x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\},$$

$$F_5 = \{f \in E;\ f(\pi) = 0\}, \quad F_6 = \{f \in E;\ f(\pi) = \pi\},$$

$$F_7 = \{f \in E;\ f(0) = f(1)\}, \quad F_8 = \{f \in E;\ f(0) \neq 0,\ f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

$$F_9 = \{f \in E; \#\{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\} < \infty\}, \quad F_{10} = \{f \in E;\ 0 \leq f(x) \leq 1\ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

1.3. **Combinaciones lineales.**

12. Sea $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Expresa, si es posible, los siguientes elementos $\mathbf{v}$ de E como combinación lineal de las familias S correspondientes:

(1) $\mathbf{v} = \sin x;\ S = \{1, x, x^2, \dots\}$
(2) $\mathbf{v} = 1;\ S = \{x+1, x^2-1, x^3+1\}$
(3) $\mathbf{v} = x^2 + x - 1;\ S = \{1, x-1, (x-1)^2\}$
(4) $\mathbf{v} = 0;\ S = \{(x+1)^2, x, x^2+2, \sqrt{3}\}$

13. Sea $E = \mathbb{R}[x]$. Expresa, si es posible, los siguientes elementos $\mathbf{v}$ de E como combinación lineal de las familias S correspondientes:

(1) $\mathbf{v} = 1$; $S = \{x, x^2, x^3 - 1\}$
(2) $\mathbf{v} = x - 1$; $S = \{2, x-2, (x-3)^2\}$
(3) $\mathbf{v} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$; $S = \{(x+1)^n, 1, x+1, x^n - 1\}$
(4) $\mathbf{v} = x$; $S = \{x^2 - x^3, x^4 - x^3, x - x^3\}$
(5) $\mathbf{v} = x$; $S = \{x - x^2, x^2, x^4 - 1, 1\}$
(6) $\mathbf{v} = \sqrt{2}$; $S = \{x, x^2, (x+1)^2, x^2+1\}$

14. Determina cuales de los siguientes conjuntos de matrices son linealmente dependientes:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}; S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

15. Sea $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Determina cuales de los siguientes subconjuntos de E son linealmente independientes:

$$S_1 = \{\sin x, \cos x, 1\},\ S_2 = \{e^x, e^{x+1}\},\ S_3 = \{e^x, e^{-x}, 1\},\ S_4 = \{e^{\lambda_i x}; 1 \le i \le n\}.$$

16. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K y F un subespacio vectorial de E.

(1) Prueba que todo conjunto minimal de generadores de F es linealmente independiente.
(2) Prueba que todo conjunto maximal de vectores de F linealmente independiente genera F.

(Nota: Sea X un conjunto ordenado. Un elemento $x_0 \in X$ se llama *minimal* (resp. *maximal*) si ningún elemento de X es menor (resp. mayor) que x_0.)

17. Sean E un espacio vectorial sobre un cuerpo K y S un subconjunto de E. Prueba que S es linealmente dependiente si, y sólo si, alguno de los vectores $u_i \in S$ es combinación lineal de los restantes.

18. Sean E un K-espacio vectorial y S un subconjunto de E. Supongamos que $S \cup \{v\}$ es un conjunto de generadores de E. Prueba que si v es combinación lineal de S, entonces S es un conjunto de generadores de E.

19. Sean E un espacio vectorial sobre un cuerpo K, S un subconjunto de E linealmente independiente, y $\mathbf{v} \in E$. Entonces $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}\}$ es linealmente dependiente si, y sólo si, $\mathbf{v}$ es combinación lineal de $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$.

1.4. **Bases y dimensión.**

20. Sea $E = \mathbb{R}[x]$. Determina cuales de los siguientes subconjuntos de E son linealmente independientes y encontrad bases de los subespacios que generan los que no son linealmente independientes.

$$S_1 = \{1, x, x^2, \dots\}, \qquad S_2 = \{x-1, x^2-1, x-2\}$$
$$S_3 = \{1, x-1, x^2-2, \dots, x^n-n\} \qquad S_4 = \{1+x+x^2, 1+x+x^3, 1+x\}$$
$$S_5 = \{1, (x-1), (x-1)^2, \dots, (x-1)^n\} \qquad S_6 = \{x^3-1, x^2, x^4-1, x^4-x^3+x^2\}$$

21. Sea $E = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Prueba que el subconjunto F de E de polinomios $p(x)$ tales que

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = p(0)$$

es un subespacio de E. Halla una base de F y un sistema de ecuaciones de F en las coordenadas canónicas de E.

22. Sean $E = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, $a \in \mathbb{R}$. Prueba que si $e_i(x) = \frac{1}{i!}(x-a)^i$, $0 \leq i \leq n$, entonces $B = \{e_i; 1 \leq i \leq n\}$ es una base de E. Determina las coordenadas de $p(x) \in E$ en esta base.

Indicación: (i) Prueba que, para todo $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, se cumple $p(x) = q_a(x-a) = \sum c_i(x-a)^i$, donde $q_a(x) = p(x+a) = \sum_i c_i x^i$. Concluye de aquí que B genera E. (ii) Prueba que si $p(x) = \sum_i c_i \frac{1}{i!}(x-a)^i$, entondes $D^i(p)(a) = c_i$. Concluye de aquí que B es linealmente independiente.

23. Sea E un K-espacio vectorial.

(1) Sea S un subconjunto finito de E. Prueba que existe $B \subset S$ tal que B es una base de $< S >$.
(2) Prueba que si E es un subespacio finitamente generado, E tiene una base finita.

24. [Sucesiones de Fibonacci] Sea $E = \mathcal{F}(\mathbb{N})$ el espacio vectorial de las sucesiones de números reales. Sea

$$F := \{a \in E;\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ \forall n \in \mathbb{N}\} \subseteq E.$$

(1) Prueba que F es un subespacio vectorial de E.
(2) Calcula la dimensión de F y determina una base.
(3) Demuestra que si (a_n) es una progresión geométrica de razón r del subespacio F entonces se tiene que $r = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. (Nota: Una *progresión geométrica de razón* $r \in \mathbb{R}$ es una sucesión $a \in E$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_{n+1} = r \cdot a_n$.)
(4) Halla una base de F formada por progresiones geométricas.
(5) Expresa la sucesión de Fibonacci $f \in F$ determinada por $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, en la base determinada en el apartado anterior y expresa el término general de f_n de forma no recurrente.

1.5. **Suma de subespacios.**

25. Sea $E := \mathbb{R}(3,4)$.

(a) Prueba que los siguientes subconjuntos de E son subespacios vectoriales:

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ a,b,c,d,e \in \mathbb{R} \right\};\ F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \end{pmatrix} ;\ a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\};$$
$$F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} ;\ a \in \mathbb{R} \right\};\ F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ e & 0 & f & 0 \end{pmatrix} ;\ a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\};$$
$$F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b & c-a & d+e \\ d & -a & 0 & b+c \\ e & e & 0 & 4d-b \end{pmatrix} ;\ a,b,c,d,e \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Determina una base de cada uno de los subespacios del apartado anterior.
(c) Calcula la dimensión de $F_i \cap F_j$ y de $F_i + F_j$ cuando $1 \le i,j \le 4$. Determina una base de cada uno de estos subespacios. Determina cuales de las sumas $F_i + F_j$ son sumas directas.
(d) ¿Es $F_1 + F_2 + F_3$ suma directa? ¿Y $F_1 + F_2 + F_4$?

26. En $E = \mathbb{R}[x]_{\le 3}$ consideremos la base canónica $\{1, x, x^2, x^3\}$.

(1) Calcula la dimensión, una base y ecuaciones en las coordenadas canónicas de E del subespacio F generado por el conjunto de polinomios $\{x+1, x-2, x^3+x^2, 2x^3+2x^2+x+3\}$.
(2) Determina para qué valores de a el conjunto $G = \{p(x) \in E;\ p'(x) = a\ \}$ es un subespaico vectorial. Para estos valores calcula la dimensión, una base y ecuaciones de G.
(3) Para $a = 0$, halla la dimensión una base y ecuaciones de $F \cap G$ y de $F + G$. ¿Es directa la suma $F + G$?

27. Prueba que el espacio vectorial de matrices cuadradas $\mathbb{R}(n,n)$ es suma directa del subespacio de las matrices simétricas con el subespacio de las matrices antisimétricas.

28. Prueba que el espacio vectorial de funciones $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ es suma directa del subespacio de las funciones pares con el subespacio de las funciones impares.

29. Determina cuales de las siguientes afirmaciones son siempre ciertas para subespacios cualesquiera F, G y H de un espacio vectorial E, y cuales no.

(1) $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$.
(2) $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$.
(3) $\dim\,(F \cap (G + H)) = \dim\,(F \cap G) + \dim\,(F \cap H) - \dim\,(F \cap G \cap H)$.

30. Sean F y G dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial E de dimensión finita n.

(1) Prueba que si $\dim\,F + \dim\,G > n$ entonces $F \cap G \neq \{0\}$.
(2) Prueba que si $\dim\,F + \dim\,G < n$ entonces $F + G \neq E$.
(3) Estudia si son ciertas las implicaciones recíprocas.

1.6. **Espacio cociente.**

31. Sean E un espacio vectorial sobre un cuerpo K y F un subespacio vectorial de E. Si $k \in \mathbb{N}$, demuestra que $[v_1], \dots, [v_k] \in E/F$ son linealmente independientes si y solo si $\dim\langle v_1, \dots, v_k\rangle = k$ y $\langle v_1, \dots, v_k\rangle \cap F = \{\vec{0}\}$.

32. Sea $E := \mathbb{R}^4$ y sean

$$F := \langle (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 2)\rangle \subset E,\ G := \{(x, y, z, t) \in E : x - y + z = 0, x - y = 0\}.$$

(1) Calcula las dimensiones de F, G, $F \cap G$ y de $F + G$ y halla bases de cada uno de los subespacios.
(2) Determina una base de cada uno de los espacios cociente $F/F \cap G$, $G/F \cap G$, E/F, E/G, $E/(F \cap G)$ $E/(F + G)$.

33. Sean $E = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, $a \in \mathbb{R}$. Sea V_a el conjunto de polinomios de grado ≤ 3 que tienen a como raíz.

(1) Prueba que V_a es un subespacio vectorial de dimensión 3 de E, y halla una base de V_a.
(2) Prueba que si $a \neq b$ entonces se tiene que $V_a + V_b = E$ y determina la dimensión y una base de $V_a \cap V_b$.
(3) Halla una base de E/V_a y una base de $V_a/(V_a \cap V_b)$.

34. Sea F el subespacio de las matrices diagonales de $E = \mathbb{R}(3, 3)$. Da una base del espacio cociente E/F.

35. Sea $E = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, y sean F el subespacio de los polinomios pares y G el subespacio de los polinomios $p(x)$ tales que $p(1) = 0$. Halla bases de los subespacios F, G, $F \cap G$, $F + G$, $F/(F \cap G)$ y $(F + G)/(F \cap G)$.