1. Calculeu els límits següents (quan existeixin):

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-3x+1}{x^3+x^2+x-3}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-7x+6}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}}$.

(d) $\lim\limits_{x\to -3} \left(\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{x^2+4x+3}\right)$.

(e) $\lim\limits_{x\to 1} (x^5-x^2+1/2)^{\frac{1}{(x-1)^6}}$.

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x^{5/2}+1}{x\sqrt[3]{x^2}-x^2\sqrt{x}+3x^3}$.

(g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x+\log(1+x^2)}{\sqrt[3]{x}}$.

(h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-2x}+\log x+e^x\sqrt{\log x}}{e^x+x^2+x}$.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x)$.

2. Determineu, si és possible, els valors de a i b per als quals la funció següent és contínua:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x), & \text{si } x \le 0, \\ \sqrt{9-x^2}, & \text{si } 0 < x < 1, \\ a+bx^2, & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

3. Cadascuna de les funcions següents no està definida en $x=0$. Estudieu en cada cas si és possible assignar un valor a la funció en $x=0$ que faci que sigui contínua:

(a) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

(b) $g(x) = x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

(c) $h(x) = x\left(1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$

4. Doneu un exemple de dues funcions f i g tals que les dues siguin discontínues en $x=0$, però en canvi la funció producte $f(x)\cdot g(x)$ sigui contínua en $x=0$.

5. En cada cas, doneu un exemple de funció que:

(a) Tingui una discontinuïtat evitable en $x=2$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ i $f(-1)=0$.

(b) Tingui una discontinuïtat evitable en $x = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$ i $f(-2) = 1$.

6. Per a cada $n \in \mathbb{N}$ sigui $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^n)}{x^2}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Per a quins valors de n existeix $\lim_{x\to 1} f_n(x)$ i és finit?

(b) Per a quins valors de n la funció $f_n(x)$ és contínua?

7. Estudieu la continuïtat de la funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x^2)\log(1+|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ -2 & \text{si } x = 0\ . \end{cases}$$

8. Per a cada $n \in \mathbb{Z}$ digueu si existeix $a \in \mathbb{R}$ tal que la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin x & \text{si } x > 0 \\ \log(1-x) + a & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

és contínua a tot $\mathbb{R}$.

9. En un aparcament es cobren 3 euros per la primera hora (o fracció) i 2 euros per cada hora (o fracció) de més, fins a un màxim diari de 10 euros.

(a) Dibuixeu la funció de cost de l'estacionament en funció del temps per a un interval d'un dia.

(b) Discutiu les discontinuïtats d'aquesta funció i el seu significat.

10. Utilitzeu el Teorema de Bolzano per demostrar que

(a) El polinomi $x^3 - 3x - 1$ té una arrel entre 1 i 2.

(b) L'equació $e^x = x^2$ té solució a l'interval $[-1, 0]$.

11. Sigui $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ una funció contínua tal que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Demostreu que f és acotada. Té f necessàriament màxim absolut en $(0, 1]$?

12. Demostreu que tota funció contínua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ té un punt fix (un punt $x \in [0, 1]$ on $f(x) = x$).

13. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua que és parella i compleix $f(0) = -1$ i $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$. Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té almenys una solució positiva i una solució negativa.

14. Per a cada $p \in \mathbb{R}$, sigui $f_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per

$$f_p(x) = e^{px} - x - 2\ .$$

(a) Si $p < 0$, demostreu que l'equació $f_p(x) = 0$ té exactament una solució real.

(b) Si $p > 0$, demostreu que l'equació $f_p(x) = 0$ té almenys dues solucions reals.

15. Sigui $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua no acotada ni inferior ni superiorment. Demostreu que f s'anul·la en infinits punts. Proveu que això no és cert per a les funcions $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ amb les mateixes condicions.