6. Cónicas y cuádricas proyectivas

6.1 (a) Proveu que per cinc punts de $\mathbb{P}^2$, de manera que no n'hi ha tres d'alineats, hi passa una única cònica.

(b) Proveu que per cinc punts de $\mathbb{P}^2$, de manera que no n'hi ha quatre d'alineats, hi passa una única cònica.

6.2 Determineu les equacions de les còniques que verifiquen:

(a) Passen pels punts $(1:0:-1)$, $(1:0:4)$, $(1:2:1)$, $(1:2:-1)$, $(1:3:0)$.

(b) Passen pels punts $(1:0:1)$, $(1:1:0)$, $(1:1:1)$ i són tangents a la recta $x+y+z=0$ en el punt $(-1:0:1)$.

(c) Passen pels punts $(0:1:0)$, $(0:0:1)$, $(1:0:1)$, $(1:-1:0)$ i són tangents a la recta $x-y+z=0$.

(d) Passen pels punts $(0:1:0)$, $(0:0:1)$, $(1:0:1)$, $(1:-1:0)$ i són degenerades.

6.3 Trobeu les equacions de les còniques respecte de les quals el triangle $(1:0:-1)$, $(1:1:-1)$, $(1:1:0)$ és autopolar, passen pel punt $(1:2:0)$ i són tangents a la recta d'equació $x-2y+z=0$. Entre les còniques anteriors n'hi ha una de degenerada: determineu-la i trobeu les rectes tangents a ella des dels punts $(-1:1:1)$, $(1:4:1)$.

6.4 Trobeu l'equació d'una cònica (no degenerada, en els apartats b, c i d) prenent per triangle de referència:

(a) Un triangle inscrit.

(b) Un triangle autopolar.

(c) El triangle format per dues rectes tangents i la polar del punt d'intersecció.

(d) El cas anterior prenent a més el punt unitat sobre la cònica.

6.5 Sigui ABC un triangle en el pla projectiu complex $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ i siguin $A' \in BC$, $B' \in AC$ i $C' \in AB$ tres punts diferents dels vèrtexs. Proveu que existeix una cònica no degenerada tangent a AB en C', tangent a BC en A' i tangent AC en B' si i només si les rectes AA', BB' i CC' són concurrents.

6.6 Sigui Q una cònica no degenerada de $\mathbb{P}^2$ i A, B, C tres punts diferents de Q. Siguin t_A, t_B, t_C les tangents a Q en A, B, C. Demostreu que sobre la recta t_A les parelles $\{t_A \cap t_B, t_A \cap t_C\}$ i $\{A, BC \cap t_A\}$ es divideixen harmònicament.

6.7 Calculeu els punts d'intersecció de les còniques

$$2x^2+5y^2-7xy+2yz-2z^2=0$$
$$x^2+3y^2-4xy+yz-z^2=0$$

(*Indicació*: Si $\phi(x,y,z)=0$ i $\psi(x,y,z)=0$ són les equacions de les dues còniques, demostreu que p pertany a la intersecció si i només si pertany a la intersecció de dues còniques qualssevol d'equació $\lambda\phi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)=0$ i $\lambda'\phi(x,y,z)+\mu'\psi(x,y,z)=0$ (amb $(\lambda:\mu)\neq(\lambda':\mu')$); busqueu d'entre aquestes les més senzilles possibles)

6.8 Trobeu els plans tangents a la quàdrica de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ d'equació $x^2+2y^2-4zt=0$ que passen per la recta r: $x-2y-t=0, 2y-z=0$.

6.9 Calculeu l'equació reduïda de les quàdriques següents de $\mathbb{P}^3$:

i) $x_0^2 + 2x_0x_1 - 3x_0x_3 - x_2^2 = 0$,
ii) $x_0^2 + 3x_0x_3 + 2x_0x_1 + x_2^2 + 2x_3^2$.

6.10 Proveu que el triangle diagonal d'un quadrivèrtex inscrit en una cònica no degenerada és autopolar.

6.11 Proveu que un quadrivèrtex inscrit en una cònica no degenerada i el quadrilàter circumscrit format per les tangents a la cònica en els vèrtexos de l'anterior tenen el mateix triangle diagonal.

6.12 Siguin C i C' dues còniques no degenerades de $\mathbb{P}^2$ diferents i que es tallen en quatre punts diferents Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Demostreu que les úniques rectes que tenen el mateix pol respecte de les dues còniques són els tres costats del triangle diagonal del quadrivèrtex $Q_1Q_2Q_3Q_4$.

6.13 Siguin C, C' dues còniques no degenerades diferents que passen per dos punts $p \neq p'$ amb les mateixes tangents en cadascun d'ells. Demostreu que la composició de la polaritat respecte de C amb la inversa de la polaritat respecte de C' és una homologia general. Determineu-ne l'eix i el centre.

6.14 Siguin ABC un triangle de $\mathbb{P}^2$ i r una recta per C. Proveu que les còniques no degenerades circumscrites al triangle i tals que el pol de la recta AB està sobre r tenen totes la mateixa recta tangent en el punt C i que el pol de la recta r és fix. Trobeu les equacions d'aquestes còniques.

6.15 Per un punt P d'una cònica no degenerada C de $\mathbb{P}^2$ es tracen dues cordes fixes PQ i PR i dues cordes variables PA i PB $(Q, R, A, B \in C)$ que formen amb les primeres una quaterna harmònica. Demostreu que les rectes AB passen per un punt fix.

6.16 Proveu el *Teorema de Steiner:* Donats O, $\bar{O}$ punts diferents de $\mathbb{P}^2$ i $f : O^* \longrightarrow \bar{O}^*$ una projectivitat no perspectiva, aleshores el lloc geomètric de les interseccions $r \cap f(r)$, $r \in O^*$ és una cònica no degenerada que passa per O i per $\bar{O}$ amb tangents en O i $\bar{O}$ $f^{-1}(O \vee \bar{O})$ i $f(O \vee \bar{O})$, respectivament. (*Indicació:* Preneu referència $\{p_0, p_1, p_2; A\}$ on $p_0 = f^{-1}(O \vee \bar{O}) \cap f(O \vee \bar{O})$, $p_1 = O$, $p_2 = \bar{O}$ i $A = r \cap f(r)$, amb $r \in O^*$, $r \neq O \vee \bar{O}$).

6.17 (a) Enunicieu i proveu el recíproc del *Teorema de Steiner*
(b) Estudieu què passa en el *Teorema de Steiner* en el cas que f sigui perspectiva.

6.18 Proveu que el lloc geomètric dels punts des dels quals els vèrtexos d'un quadrivèrtex, presos en un ordre prefixat, es projecten en una quaterna harmònica de rectes és una cònica circumscrita al quadrivèrtex. Determineu-ne les tangents en els vèrtexos.

6.19 En un espacio proyectivo $\mathbb{P}$ de dimensión 3 se consideran un tetraedro de vértices A, B, C, D y puntos E y F distintos de los vértices y situados respectivamente sobre las aristas AB y CD. Demostrar que las rectas MN, con $M \in AB$, $N \in CD$ y $(A, B, E, M) = (C, D, F, N)$, están todas sobre una cuádrica reglada no degenerada de $\mathbb{P}$.

6.20 **Quàdriques reglades.** Demostreu que qualsevol quàdrica Q reglada no degenerada de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, o no degenerada de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ admet, en una referència convenient equació:

$$x_0x_1 = x_2x_3$$

(a) Comproveu que les famílies de rectes:

$$R = \left\{ \begin{cases} \lambda x_1 - \mu x_3 = 0 \\ \mu x_0 - \lambda x_2 = 0 \end{cases} \mid \lambda, \mu \in K \right\}$$

$$S = \left\{ \begin{cases} \lambda x_1 - \mu x_2 = 0 \\ \mu x_0 - \lambda x_3 = 0 \end{cases} \mid \lambda, \mu \in K \right\}$$

($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) estan contingudes en Q. R i S s'anomenen *primer* i *segon sistema de generatrius* respectivament.

(b) Proveu que dues generatrius del mateix sistema es creuen.

(c) Proveu que dues generatrius de diferent sistema es tallen.

(d) Demostreu que per cada punt de la quàdrica hi passa una generatriu de cada sistema.

(e) Deduïu que tota recta continguda en Q pertany a un dels dos sistemes de generatrius (*indicació*: per un punt simple d'una quàdrica no degenerada no hi poden passar tres rectes).

(f) En el conjunt de rectes contingudes en Q definim la relació $r \sim r\prime \;\Leftrightarrow\; r = r\prime$ o r i $r\prime$ no es tallen. Demostreu que $\sim$ és relació d'equivalència. Proveu que les classes d'equivalència són R i S i deduïu que la classificació de les generatrius en les dues famílies R i S és intrínseca.