PROBLEMES D'ANLISI COMPLEXA
2n quadrimestre del curs 2013-2014

Llista 2: Funcions de variable complexa i equacions de Cauchy-Riemann

B.1. Trobeu els punts on la funció f és derivable (en el sentit complex), en els següents casos, i calcula'n la derivada.

(a) $\cos|z|^2$ (c) e^{iz} (e) $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+2)}$

(b) $|z|^4$ (d) $z+\frac{1}{z}$ (f) $\frac{1}{(z+\frac{1}{z})^2}$

Solució: (a) $\emptyset$; (b) $\emptyset$; (c) $\mathbb{C}$; $f'(z)=ie^{iz}$;(d) $\mathbb{C}\setminus\{0\}$; $f'(z)=1-|\frac{1}{z^2}$; (e) $\mathbb{C}\setminus\{1,\pm\sqrt{2}i\}$; (f) $\mathbb{C}$.

B.2. Determineu si aquestes funcions poden ser la part real d'una funció holomorfa, i en cas que ho siguin calculeu la part imaginària.

(a) $e^x\cos y$ (b) x^3+6xy^2 (c) $\log(x^2+y^2)$

Solució: (a) $e^x\sin y$; $f(z)=e^z$; (b) No ho és; (c) $2\arctan(y/x)$; $(f(z)=\log(z^2)$.

B.3. Sigui f una funció holomorfa en un obert $\Omega\subset\mathbb{C}$ i $z_0\in\Omega$ tal que $f'(z_0)\neq 0$. Quin angle formen les corbes $\operatorname{Re}f(z)=\operatorname{Re}f(z_0)$ i $\operatorname{Im}f(z)=\operatorname{Im}f(z_0)$ en un punt z_0 ?
Solució: $\pi/2$.

1. Trobeu els punts on la funció f és derivable (en el sentit complex), en els següents casos:

(a) $f(z)=|z|$

(b) $\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y$

(c) $f(z)=\operatorname{Re}z$

(d) $f(z)=z+z\overline{z}$

(e) $f(z)=\operatorname{Im}e^{\overline{z}}+i\operatorname{Re}e^z$

2. Sigui $\Omega\subset\mathbb{C}$ un obert, $z_0\in\Omega$ i $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una funció.

a) Identificant $\mathbb{R}^2$ amb $\mathbb{C}$ de la forma habitual, demostreu que si f és diferenciable en z_0, llavors

$$Df(z_0)(z)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\cdot z+\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(z_0)\cdot\overline{z}\qquad(z\in\mathbb{C}),$$

on

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

b) Proveu que f és holomorfa en Ω si, i només si, f és diferenciable i $\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}=0$ en Ω. En tal cas, $f'=\frac{\partial f}{\partial z}$.

3. Demostreu que si f és diferenciable en un obert de $\mathbb{C}$, llavors

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{z}}\quad\text{i}\quad\overline{\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}}=\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}.$$

4. Demostreu que si f i g són diferenciables en un obert de $\mathbb{C}$, llavors

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z}\cdot g + f\cdot\frac{\partial g}{\partial z}\\ \frac{\partial(f\cdot g)}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\cdot g + f\cdot\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}.\end{aligned}$$

5. Demostreu la següent versió de la regla de la cadena:
Si $G, \Omega \subset \mathbb{C}$ són oberts i $g : G \to \Omega$ i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ són diferenciables llavors

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f\circ g)}{\partial z}(z) &= \frac{\partial f}{\partial w}(g(z))\cdot\frac{\partial g}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(g(z))\cdot\frac{\partial \overline{g}}{\partial z}(z)\\ \frac{\partial(f\circ g)}{\partial \overline{z}}(z) &= \frac{\partial f}{\partial w}(g(z))\cdot\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) + \frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(g(z))\cdot\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}}(z).\end{aligned}$$

6. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i f una funció holomorfa en Ω. Definim $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in \Omega\}$ i $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ donada per $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Proveu que f^* és holomorfa en Ω^*.

7. Utilitzeu les equacions de Cauchy-Riemann per demostrar que si una funció f és holomorfa al pla complex i satisfà que $\mathrm{Re}(f(z))+\mathrm{Im}(f(z)) = c$, on c és una constant, aleshores f és constant.

8. a) Determineu els nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ pels quals

$$v_\lambda(x,y) = 2\sin x \sinh y + x^3 - \lambda x y^2 + y$$

és la part imaginària d'una funció entera f_λ i calculeu f_λ.

b) Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre determinat en a). És

$$g_\lambda = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - i\frac{\partial v_\lambda}{\partial y}$$

una funció entera? Quina relació hi ha entre g_λ i f_λ?

9. Sigui $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$:

a) On és f analítica?

b) És f conforme en $z = 0$?

c) Calculeu les imatges dels eixos de coordenades per f.

d) Quin és l'angle d'intersecció d'aquestes imatges?

10. Sigui $f = u+iv$ una funció entera (holomorfa a tot $\mathbb{C}$) tal que $\partial_x u + \partial_y v = 0$. Proveu que existeixen $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\beta \in \mathbb{C}$ tals que $f(z) = i\alpha z + \beta$.

11. Raoneu si és o no possible que existeixin funcions f enteres no constants tals que $|f|^2$ sigui la part real d'una altra funció entera.

12. a) Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i f una funció holomorfa en Ω. Proveu que f satisfà les equacions de Cauchy-Riemann.

b) Doneu una descripció de les funcions enteres de la forma $f(x+iy) = u(x) + iv(x,y)$.