

EXERCICIS DE CàLCUL DIFERENCIAL EN DIVERSES VARIABLES
Primer quadrimestre del curs 2012-2013

Llista 5: Funcions inverses i implícites i extrems condicionats

1. Determineu els punts on les funcions següents defineixen un difeomorfisme local. Calculeu en els punts imatge la diferencial de la funció inversa. Existeixen inverses globals?
 - (a) $f(x, y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$.
 - (b) $g(x, y, z) = (e^z, \sin(x + z), y)$.
2. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funció definida per $f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$.
 - (a) En quins punts és un difeomorfisme local?
 - (b) Demostreu que f és un difeomorfisme entre el segon quadrant i un subconjunt obert del pla. Quin és aquest subconjunt?
3. Proveu que l'equació $x - xy + zx^2 + y \sin z = 0$ defineix una funció implícita $z(x, y)$ en un entorn del punt $(0, 1, 0)$.
Té la funció $z(x, y)$ un extrem local en el punt $(0, 1)$?
4. Demostreu que el sistema
$$\begin{cases} 3x + 4 \sin(y) + 2u + e^v = 4 \\ 2xy + \sin u + xv = 0 \end{cases}$$
defineix u i v com a funcions diferenciables de (x, y) en un entorn de $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 0, 0, 0)$.
És la funció $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ un difeomorfisme local en un entorn del punt $(1, 0)$?
5. Donada la funció $f(x, y) = (x + 6)^2 + (y + 8)^2$ i el conjunt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$.
 - (a) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f sobre el conjunt A .
 - (b) Trobeu els punts on s'assoleixen, i calculeu els valors màxim i mínim que pren la funció f sobre A .
 - (c) Doneu una interpretació geomètrica del resultat.
 - (d) Hi ha algun punt $(a, b) \in A$ on $f(a, b) = 420$? I algun on $f(a, b) = 67$?
6. Sigui S la superfície d'equació $z^2 + xy = 1$.
 - (a) Calculeu el pla tangent a S en el punt $(-1, 3, 2)$.
 - (b) Trobeu els punts de S més propers a l'origen. Justifiqueu l'existència.
 - (c) Hi haurà punts de S a distància màxima de l'origen?
7. Calculeu la distància de l'el·lipse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{32} = 1$ a la recta $4x + 3y = 72$.
Indicació: La distància del punt (x_0, y_0) a la recta $ax + by + c = 0$ és $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
8. Sigui A el conjunt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 2x - 2\}$.
 - (a) Proveu que la funció $f(x, y) = xy - 4x^2 - y^2$ pren un valor màxim i un valor mínim sobre el conjunt A . Calculeu-los.
 - (b) Quins són els valors màxim i mínim de $|f|$ sobre A ?