

EXERCICIS DE CàLCUL DIFERENCIAL EN DIVERSES VARIABLES
Primer quadrimestre del curs 2012-2013

Llista 1: L'espai \mathbb{R}^n

1. Trobeu l'angle que formen els vectors $a = (1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ i $b = (1, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.
2. Trobeu la projecció ortogonal de a sobre b , on $a = (0, 1, 2)$ i $b = (1, -1, 0)$.
3. Trobeu analíticament i representeu gràficament tots els vectors unitaris de \mathbb{R}^3 que formen un angle de $\pi/3$ radians amb el vector $(0, 1, 1)$. Quina figura geomètrica representen?
4. Utilitzant la desigualtat de Cauchy-Schwarz $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$, proveu que si $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, llavors es compleix

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

5. Donat el conjunt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 2y \leq 3\}$
 - (a) Representeu-lo gràficament.
 - (b) Proveu que $(0, 2)$ és un punt interior a A .
 - (c) Proveu que $(1, 2)$ és un punt exterior a A .
 - (d) Proveu que $(1, 1)$ és un punt de la frontera de A .
 - (e) Trobeu dos punts interiors a A , dos d'exterior i dos de la frontera.
6. Trobeu l'adherència, l'interior i la frontera dels conjunts següents, representeu-los gràficament i digueu si són oberts, tancats o ni una cosa ni l'altre.
 - (a) $\mathbb{R} \times \{0\}$ en \mathbb{R}^2 .
 - (b) \mathbb{Q}^n en \mathbb{R}^n .
 - (c) $(0, 1] \times [1, 2)$ en \mathbb{R}^2 .
 - (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^3\}$ en \mathbb{R}^2 .
 - (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ en \mathbb{R}^2 .
 - (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 2, x - y \leq 1\}$ en \mathbb{R}^2 .
7. Quins conjunts de l'exercici anterior són compactes? Quins la seva adherència és compacte?