PROBLEMES D'ANÀLISI COMPLEXA
2n quadrimestre del curs 2013-2014.

Llista 1: Els nombres complexos

B.1. Expresseu en la forma $a + ib$ els següents nombres:

(a) $(2+3i)(4+i)$ (c) $\frac{1}{4+i}$ (e) $\sqrt{i}$ (g) $\sqrt{9i}$

(b) $(4+2i)^2$ (d) $\frac{i}{4+i}$ (f) $\sqrt{-i}$ (h) $\sqrt{1+i}$

B.2. Si $z = x + iy$ trobeu les parts real i imaginària de les expressions següents:

(a) z^2 (b) $z(z+1)$ (c) $\frac{1}{z}$ (d) $\frac{1}{z-3}$.

B.3. És cert que

a) $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w$?

b) $\operatorname{Re}(zw) = (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Re} w)$?

c) $\operatorname{Re}(\frac{z}{w}) = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Re} w}$?

B.4. Trobeu la forma polar dels nombres següents i dibuixeu-los.

(a) $3(1+\sqrt{3}\,i)$ (b) $2\sqrt{3} - 2i$ (c) $-2+2i$ (d) $-1-i$

B.5. Sigui $(x+iy)/(x-iy) = a+ib$. Proveu que $a^2 + b^2 = 1$.

B.6. Proveu que si $p(z)$ és un polinomi amb coeficients reals i z és un zero de p llavors $\bar{z}$ també ho és.

B.7. Descriviu els conjunts del pla que satisfan (recordeu que $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.)

(a) $\operatorname{Im} \frac{z-a}{z} = 0, a \in \mathbb{C}^*$ (b) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$ (c) $|z-2| > |z-3|$

SOL. B.1. a) $5+14i$; b)$12+16i$; c) $4/17 - i/17$; d)$1/17 + 4i/17$; e) $\pm\sqrt{2}/2(1+i)$; f)$\pm\sqrt{2}/2(1-i)$; g) $\pm 3\sqrt{2}/2(1+i)$; h) $\pm 2^{1/4}(\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8))$.

B.2 a) $x^2 - y^2 + 2ixy$; b) $x^2 - y^2 + x + i(y + 2xy)$; c) $(x-iy)/(x^2+y^2)$; d) $(x-3-iy)/((x-3)^2+y^2)$.

B.3 a) si. b) no. c) no.

B.4 a) $6(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$; b) $4(cos(\pi/6) - i\sin(\pi/6))$; c) $2\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$; d) $\sqrt{2}(cos(3\pi/4) - i\sin(3\pi/4))$.

B.6 Conjugueu tot el polinomi.

B.7 a) Recta que passa per 0 i a; b) Paràbola horitzontal $x = (1/2)(y^2-1)$; c) $\{\operatorname{Re} z > 3/2\}$.

1. Expresseu en la forma $a + ib$ els següents nombres:

(a) $\frac{1}{i}$ (c) $\frac{1}{2+i} + \frac{1}{2-i}$ (e) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$ (g) $\sqrt[4]{-i}$

(b) $\frac{1+i}{1-i}$ (d) $\frac{1}{2+i} + \frac{4-2i}{3+i}$ (f) $(1+i)^{100} + (1-i)^{100}$ (h) $(3+4i)^{\frac{1}{2}}$

2. Si $z = x + iy$ on $x, y \in \mathbb{R}$, trobeu les parts real i imaginària de:

(a) $\frac{1}{z^2}$ (b) $\frac{z+1}{2z-5}$ (c) z^3 (d) $z^{2n}\overline{z}^{2m}$,

on $n, m = 1, 2, \ldots$.

3. Descriviu els conjunts de punts del pla que satisfan:

(a) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$
(b) $|z+i| < 2$
(c) $2\operatorname{Re} z < |z|^2$
(d) $\operatorname{Im} \frac{z-a}{b} = 0$
(e) $|z-1| = |z+1|$
(f) $|z+i| + |z-i| = 4$

on $a \in \mathbb{C}$ i $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4. Trobeu totes les solucions de l'equació $z^4 = 3 - 4i$.

5. Calculeu les solucions de l'equació $\overline{z} = z^n$, per a $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

6. Donat $a \in \mathbb{C}$, quin és el màxim de $|z^n + a|$ per a $|z| \leq 1$?

7. Demostreu les següents desigualtats fent consideracions geomètriques

(a) $\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| \leq |\arg z|$ (b) $|z-1| \leq ||z|-1| + |z||\arg z|$

8. Demostreu geomètricament que si $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z \neq -1$, aleshores $\operatorname{Im} \frac{z}{(z+1)^2} = 0$.