

1. Demostreu que l'equació $x^2 = x \sin x + \cos x$ té exactament dues arrels reals i que aquestes es troben a l'interval $[-\pi, \pi]$.
2. Trobeu els valors màxim i mínim de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ als intervals $[-2, 2]$ i $[0, 2/3]$.
3. Demostreu que la suma d'un nombre positiu i el seu invers és més gran o igual que 2.
4. De tots els rectangles d'igual perímetre determineu quin té àrea màxima.
5. Siguin $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcions derivables amb $f'(x) > g'(x)$, per a tot $x \in \mathbb{R}$, i $f(a) = g(a)$. Demostreu que $f(x) > g(x)$, per a tot $x > a$, i $f(x) < g(x)$, per a tot $x < a$.
6. (a) Calculeu els intervals de monotonia de la funció $f(x) = (\log x)/x$.
(b) Què és més gran, π^e o e^π ?
7. Determineu el nombre de solucions reals de l'equació $e^x = a + x$, segons els diferents valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$.
8. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció dues vegades derivable tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 1$ i $f''(x) < 0$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. Demostreu que l'equació $f(x) = e^x$ té exactament dues solucions.
9. Demostreu que $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$, per a cada $a, b \in \mathbb{R}$, i, en particular, $|\sin x| \leq |x|$, per a cada $x \in \mathbb{R}$.
10. (a) Demostreu que l'equació $e^x + \sin x = \pi$ té una única solució positiva.
(b) Té solucions negatives l'equació $e^x + \sin x = \pi$? Quantes?
11. Sigui $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable tal que $|g'(x)| < 1$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. Demostreu que la funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida per $f(x) = x + g(x)$, és injectiva.
Indicació: Utilitzeu el teorema del valor mitjà.
12. Sigui $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, derivable a $(0, +\infty)$, amb $f(0) = 0$ i f' creixent. Demostreu que la funció $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida per $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, és creixent.
13. Trobeu els extrems locals i els punts d'inflexió de les funcions següents:
(a) $f(x) = x^4(x - 1)^3$ (b) $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$
14. (a) Estudieu la convexitat i concavitat de la funció $f(x) = e^x - ax^2$ en funció de $a \in \mathbb{R}$.
(b) Per a $a \leq 1/2$, calculeu el nombre de zeros de f .
15. Representeu gràficament les funcions següents:
(a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (b) $g(x) = \frac{\log x}{x}$ (c) $h(x) = xe^{-x^2}$