Problema 1 Suponemos que A es invertible por tanto podemos multiplicar ambos lados de la ecuacion con la inversa de A.

$$AA^-1 = A^2A^-1$$

$$I_n = A$$

Por tanto si A es invertible A necesariamente es la identidad.

Desarrollemos de otra manera para ver que pasa en los demas casos.

$$A = A^2$$

$$A - A^2 = 0$$

$$A(I_n - A) = 0$$

Esto solo se cumple si:

$$A = (0)$$

$$I_n - A = 0 \rightarrow A = I_n$$

Efectivamente lo cumple la identidad pero tambien una que no es invertible (la matriz A = (0)). c.v.d.

Problema 2

Demostracion por reduccion al absurdo.Antes de todo nos fijamos que si p_0 **es $\neq$ 0** I_n **es necesariamente una matriz diagonal.**

$$p_0 I_n(a_i^j) \rightarrow a_i^j = 0 : i \neq j$$

1) Por un lado tenemos la propiedad de que si A es no invertible sus potencias tambien lo son.

2) Ademas sabemos que si A es no invertible no puede ser diagonal porque si es diagonal:

$$det(A) \neq 0$$

3) Por ultimo, si A es no invertible quiere decir que existe en A una fila que es linealmente dependiente de los demas. Esto se sigue cumpliendo en todas sus potencias siempre qeu A sea cuadrada.

$$Si, A \rightarrow F_3 = F_1 - F_2$$

$$A^2 \rightarrow F_3 = F_1 - F_2$$

(...)

Usando todas estas propiedades concluimos que para que la suma de (0) habra que restarle obligatoriamente una matriz diagonal a p_0In, pero como hemos visto ni A^n nunca es una matriz diagonal ni tampoco lo sera si lo modulamos con reales p_n. Lo ultimo que queda por analizar es si la suma de estos puede ser una matriz diagonal. Ahi es donde usamos la propiedad (3) ya que si una fila concreta i de todas las potencias es dependiente linealmente de los demas todas las filas i de todas las potencias van a ser proporcionales y si queremos hacer ceros en esa fila obligatoriamente se nos convertira toda la fila en 0. Por tanto es imposible que obtengamos una matriz diagonal X y entonces es imposible que el $p_0I_n + X = 0$.

No existe matriz no invertible que cumpla la condicion