Problemas de Algebra Lineal. Grupo Tarde. Curso 2010-11

Capítulo 4. Forma canónica de un endomorfismo

1. Matrices dadas explícitamente

106. Di cual de las siguientes matrices es una matriz de Jordan. En caso afirmativo halla su polinomio caracterítico y las dimensiones de los núcleos Ker $(A-\lambda_j I)^i$, para $i \geq 1$ y los diferentes valores propios λ_j.

$$\begin{pmatrix} 2&0&0&0\\ 1&2&0&0\\ 0&0&3&0\\ 0&0&a&3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2&0&0&0\\ 1&2&0&0\\ 0&1&2&0\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2&0&0&0\\ 1&2&0&0\\ 0&1&2&0\\ 0&0&1&2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2&0&0&0\\ a&3&0&0\\ 0&0&3&0\\ 0&0&0&3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2&0&0&0\\ a&3&0&0\\ b&c&3&0\\ 0&0&0&3 \end{pmatrix},$$

107. Per a cadascuna de les següents matrius

$$\begin{pmatrix} \lambda&0&0&0\\ a&\lambda&0&0\\ 1&2&\lambda&0\\ 2&-3&1&\mu \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda&0&0&0\\ a&\lambda&0&0\\ 1&2&\mu&0\\ b&0&1&\mu \end{pmatrix}.$$

trobeu la seva forma de Jordan en funció dels paràmetres.

108. Calculeu les potències A^n de la matriu $A = \begin{pmatrix} -1&0&0&0\\ 0&2&-1&0\\ 0&1&2&1\\ 0&0&1&2 \end{pmatrix}$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.

109. Trobeu la forma normal de Jordan, una base de Jordan i les potències de cadascuna de les següents matrius.

$$\begin{pmatrix} 3&-1&1&-7\\ 9&-3&-7&-1\\ 0&0&4&-8\\ 0&0&2&-4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2&0&0&2&1\\ 0&2&3&3&0\\ 0&0&1&-1&0\\ 0&0&1&3&0\\ 0&0&-2&-2&2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1&-4&0&-1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 4&7&-12&3 \end{pmatrix}.$$

110. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 2&0&0&0\\ a&2&0&0\\ 0&0&1&0\\ a-2&0&a&a \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores propios y sus multiplicidades algebraicas en función del parámetro a.
2. Halla el polinomio mínimo y la forma de Jordan de A en función del parámetro a.
3. Prueba que para $a = 0$ la matriz A es diagonalizable y halla sus potencias.
4. Para $a = 2$ halla una base de Jordan de A y halla sus potencias.

111. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&a&a&0\\ 2&0&2&0\\ a&0&0&2 \end{pmatrix}$$

Halla los valores propios de A y sus multiplicidades, en función de a.

Halla el polinomio mínimo y la forma de Jordan de A, en función de a.

Para $a = 2$, halla una base de Jordan de A, y halla las potencias A^m, para $m \in \mathbb{N}$.

112. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo que, en la base canónica, tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

1. Encuentra, en función del parámetro a, el polinomio característico de f. Para $a = 0$ calcula $f^{100} + f$.
2. Halla el polinomio mínimo y la forma de Jordan de f, en función de a.
3. Calcula una base de Jordan para $a = 0$.

113. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Halla los valores propios de A y sus multiplicidades, en función de a.

Halla el polinomio mínimo y la forma de Jordan de A, en función de a.

Para $a = 2$, halla una base de Jordan de A, y halla las potencias A^m, para $m \in \mathbb{N}$.

114. Supongamos que $u_n \in \mathbb{R}^4$ es una sucesión de vectores tal que $u_{n+1} = A \cdot u_n$, para todo $n \geq 0$, donde A es la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Halla la expresión general de u_n
2. Halla u_{10}, dado el vector inicial $u_0 = (0, 2, 0, 2)$.
3. Estudia el límite de A^n según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

115. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Expresa A^{-1} como combinación lineal de I, A, A^2, sin calcular A^{-1}.

(Indicación: Calcula el polinomio característico de A es $-t^3 + 5t^2 - 5t - 3$.)

2. Problemas con matrices no dadas explícitamente

116. El polinomio característico de una matriz es $-t^3 + t - 1$. Expresa A^{-1} como combinación lineal de I, A.

117. Sea A una matriz cuadrada y $q(t)$ su polinomio característico. Halla en cada caso la forma de Jordan de A y el polinomio mínimo.

1. $q(t) = (t-2)^5$, $\dim \operatorname{Ker}(A-2I) = 2$, $\dim \operatorname{Ker}(A-2I)^2 = 4$, $\dim \operatorname{Ker}(A-2I)^3 = 5$.

2. $q(t) = (t-2)^5$, $\dim \operatorname{Ker}(A-2I) = 3$, $\dim \operatorname{Ker}(A-2I)^2 = 5$,.

3. $q(t) = (t-2)^5(t+3)^4$, $\operatorname{rg}(A-2I) = 6$, $\operatorname{rg}(A-2I)^2 = 5$, $\operatorname{rg}(A+3I) = 7$, $\operatorname{rg}(A+3I)^2 = 5$.

118. Sea A una matriz compleja tal que $\chi_A(t) = t^{12}$. Sea $n_i = \dim \operatorname{Ker} A^i$. Supongamos que $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (5, 9, 11, 12)$. Halla la forma de Jordan de A.

119. Sea A una matriz cuadrada $q(t) = (t-2)^5(t+3)^4$ su polinomio característico y $m(t) = (t-2)^4(t+3)^3$ su polinomio mínimo de A. Halla la forma de Jordan de A.

120. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$f^3 = f^2, \quad \operatorname{rg} f = 2, \quad f \text{ no es diagonalizable.}$$

1. Halla la forma de Jordan de la matriz de f.
2. Halla los polinomos mínimo y característico de f.
3. Prueba que $f^2 \neq f$.

121. Encuentra todas las formas de Jordan compatibles con los polinomios característico y mínimo siguientes:

$$\begin{array}{lll} (i) & q_f(x) = (x-2)^4(x-3)^2 & , \quad m_f(x) = (x-2)^2(x-3)^2 \\ (ii) & q_f(x) = (x-7)^5 & , \quad m_f(x) = (x-7)^2 \\ (iii) & q_f(x) = (x-2)^7 & , \quad m_f(x) = (x-2)^3 \\ (iv) & q_f(x) = (x-3)^4(x-5)^4 & , \quad m_f(x) = (x-3)^2(x-5)^2 \end{array}$$

122. Demuestra que una matriz cuadrada A y su transpuesta A^t tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades, el mismo polinomio característico y el mismo polinomio mínimo. ¿Tienen los mismos vectores propios?

123. Sea E un espacio vectorial complejo de dimensión 5. Determina todas las posibles formas de Jordan de los endomorfismos f de E que cumplen las tres condiciones siguientes:

$$(i) \quad f(f+I)^3 = 0, \quad (ii) \quad \operatorname{rg}(f) \geq 4, \quad (iii) \quad \dim \operatorname{Ker}(f+I)^2 < \dim \operatorname{Ker}(f+I)^3.$$

124. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión tres y sea f un endomorfismo de E. Prueba que si f cumple $f^7 + f^5 = 0$, entonces f tiene un valor propio real y que $\det f$=0. Da un ejemplo de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 3 y un endomorfismo g de determinante no nulo tal que $g^7 + g^5 = 0$.

125. Sea A una matriz tal que $\chi_A(t) = -(t-1)^3$. Expresa A^{10} en la forma $aA^2 + bA + c$.

126. Sean E un espacio vectorial de dimensión 5 sobre $\mathbb{C}$, y f un endomorfismo de E. Supongamos que

$$f = 2f^2 - f^3, \quad \operatorname{rg} f = 3, \quad f^2 \neq f.$$

Prueba que la dimensión del núcleo de $f - I$ es 2 y que f no es diagonalizable.

127. Sea A una matriz con polinomio característico $\chi_A(t) = (t-1)^4(t-\sqrt{2})^3(t+\frac{1}{3})^3$, polinomio mínimo $\mu_A(t) = (t-1)^2(t-\sqrt{2})^2(t+\frac{1}{3})$ y tal que el rango de $A-1$ es 8. Halla la forma de Jordan de A.

128. Sean E un espacio vectorial de dimensión 5 sobre $\mathbb{C}$, y f un endomorfismo de E. Supongamos que

$$f = 2f^2 - f^3, \quad \mathrm{rg} f = 3, \quad f^2 \neq f.$$

Prueba que la dimensión del núcleo de $f - I$ es 2 y que f no es diagonalizable.

129. Sea E un espacio vectorial, f un endomorfismo de E, $P(X), Q(X)$ dos polinomios, $D = MCD(P,Q)$, $M = MCM(P,Q)$.

1. Prueba que $\operatorname{Im} P(f) + \operatorname{Im} Q(f) = \operatorname{Im} D(f)$.
2. Prueba que, si E es de dimensión finita, $\operatorname{Im} P(f) \cap \operatorname{Im} Q(f) = \operatorname{Im} M(f)$.

Compara estas fórmulas con las correspondientes a los núcleos de $P(f)$ y de $Q(f)$ (Ver Problema 59(a)).

130. Sea E el núcleo de $L : \mathcal{C}^\infty(I) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(I)$ definida por $L(f) = (D-\lambda)^{n+1}(f)$. Sea $D : E \longrightarrow E$ el operador $D(f) = f'$.

1. Prueba que $E = \{a(x)e^{\lambda x}; a(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}\}$.
2. Halla los vectores propios de D.
3. Halla el polinomio mínimo de D. Prueba que $x^n e^{\lambda x}$ es un vector primitivo de altura $n+1$ de E respecto de D.

131. Supongamos que hay una epidemia en la que cada mes se enferma la mitad de los que están sanos y muere la cuarta parte de los que están enfermos. Supongamos que inicialmente la población es de un millón de individuos sanos. Cómo será la población al cabo de un año? Que le pasa a la largo del tiempo a la población? (Se supone que no hay nacimientos, ni muertes por otras causas.)