88. Examina les següents relacions:

(a) $R_1 = \{(1,2), (2,3), (3,5), (6,6), (4,8), (3,7)\}$.

(b) $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos x\}$.

(c) $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 = y^2\}$.

(d) $R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = y^3\}$.

Digues quines són funció. De les que ho siguin calcula el seu domini, la seva imatge, i digues si són injectives.

89. Siguin $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les funcions definides per

$$f(x) = \begin{cases} 4x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \geqslant 0 \\ x+3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(a) Calcula $f([-4, \frac{1}{3}])$, $g([-4, \frac{1}{3}])$, $f([-1,3])$ i $(f \circ g)([-4, \frac{1}{3}])$.

(b) Calcula la funció $f \circ g$.

(c) Digues si $f \circ g$ és injectiva i si és exhaustiva.

Indicació: Si vols, et pots ajudar amb les gràfiques de les funcions.

90. Sigui $h\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $h(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$. Troba i dibuixa en el pla $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ el seu domini i els següents conjunts: $h^{-1}(3)$, $h^{-1}(0)$, $h^{-1}([-1,1])$.

Nota: Recorda que si $a \in \mathbb{R}$, $h^{-1}(a)$ és el conjunt $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : h(x,y) = a\}$, i si $A \subseteq \mathbb{R}$, $h^{-1}(A)$ és el conjunt $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : h(x,y) \in A\}$.

91. Dóna un exemple d'una funció injectiva de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{N}$, i digues si la funció del teu exemple és exhaustiva.

92. Siguin A, B conjunts no buits i $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicació.

(a) Demostra que si f és injectiva aleshores $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ per tots $C, D \subseteq A$.

(b) Dóna un exemple d'una aplicació f no injectiva on la propietat anterior també es compleixi

(c) Dóna un exemple d'una aplicació f no injectiva on la propietat anterior no es compleixi.

93. Examina les següents relacions entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}^+$:

(a) $S_1 = \Big\{ \big((1,2), \frac{1}{2}\big), \big((0,5), 0\big), \big((10^9, 10^{10}), 0.1\big), \big((2,4), \frac{2}{4}\big), \big((1,0), 1\big), \big((2,20), \frac{1}{10}\big), \big((3,7), 3\big), \big((7,3), 7\big) \Big\}$.

(b) $S_2 = \big\{ \big((n,m), \frac{n}{m}\big) : n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \big\}$.

(c) $S_3 = \big\{ \big((n,m), n+m\big) : n, m \in \mathbb{N} \big\}$.

Digues quines són funció. De les que ho siguin calcula el seu domini, la seva imatge, i digues si són injectives i si són exhaustives.

94. Sigui $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-2,2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'aplicació definida amb l'expressió $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$.

(a) Calcula $f^{-1}\big([-1,1]\big)$ i $f^{-1}\big([0,1]\big)$.

(b) Calcula $f \circ f$ allà on estigui definida.

(c) Digues si f és injectiva i si és exhaustiva.

95. Demostra que si dues aplicacions f i g de A en A són bijectives, aleshores la seva composició $f \circ g$ també és bijectiva i la seva inversa és $g^{-1} \circ f^{-1}$.