1 Topología

- Encontrar la adherencia
  - Suponemos que C es la adherencia de A
  - $\bar{A} \subset C$:
    - C es un cerrado ya que es anti-imagen de un cerrado por una aplicación continua.
    - $A \subset C$ ya que todo punto de A cumple las condiciones de C.
    - $\bar{A}$ contiene a todos los cerrado que contienen A $\rightarrow \bar{A} \subset C$
  - $C \subset \bar{A}$:
    - $C = A \cup (C \setminus A)$
    - $A \subset \bar{A}$ siempre.
    - $\forall\ (x, y) \in (C \setminus A)$: Defino una sucesión (x_n, y_n) tal que
      - $\forall\ n \in \mathbb{N} : x_n, y_n \in A$
      - $lim_{n\rightarrow\infty}(x_n, y_n) = (x, y)$
    - Procedimiento general:
      - $x_n = x + 1/n * l$ donde $x + l \in A$.
      - y_n se logra sustituyendo la expresión de x_n en la expresión de la grafica que define y en función de x.
- Encontrar el interior
  - Suponemos U el interior de A
  - $U \subset \mathring{A}$:
    - U es abierto ya que es anti-imagen de un abierto por una aplicación continua.
    - $U \in A$ ya que todo punto de U cumple las condiciones de A
    - $\mathring{A}$ contiene a todos los abiertos contenidos en $A \rightarrow U \in \mathring{A}$
  - $\mathring{A} \subset U$:

    * Descomponemos $A = U \cup (A \setminus U)$.
    * $\mathring{A} \subset A \rightarrow \mathring{A} \subset U \cup (A \setminus U)$.
    * Quiero ver: $\mathring{A} \cap (A \setminus U) = \emptyset$. Para ello:
    * $\forall p \in (A \setminus U)$:

        $\forall r \in \mathbb{R}^{+}$:

            $\exists q \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ tal que $q \in B(p, r)$ y $q \notin A \rightarrow p \notin \mathring{A}$

- Encontrar la frontera

    · $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

- Analizar si es compacto.

    · A es cerrado ya que es anti-imagen de un cerrado por una aplicación continua

    · A es acotado ya que $\exists\ r \in \mathbb{R}$ tal que $A \subset B(0, r)$. Esto se hace acotando la norma de $p \in A$. $\forall p \in A : ||p|| <= C \rightarrow A \subset B(0, C)$.

2 Límites y Continuidad

2.1 Limites mediante Taylor

- Desarrollamos cada función que

2.2 Análisis de continuidad de una función definida por trozos

- Sea C el conjunto de puntos donde cambia la definición de f

- f es continua en $\mathbb{R}^n \setminus C$ ya que es composición de funciones continuas y el denominador no se anula en $\mathbb{R}^n \setminus C$

- Análisis de continuidad en C

    · Caso en que en el denominador haya una suma. $\forall\ c \in C$:

        * Sea N la norma del denominador

* Acotamos el enumerador en función de N
* Logramos $0 \leq | \lim_{x \to c} f(x) - f(c) | \leq N^p$
  - $p > 0$: Por el Teorema del Sandwich, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \to f$ es continua en c.
  - $p = 0$ Hay que ver que f no es continua mediante límites direccionales. Normalmente se intenta igualar las potencias del denominador.
  - $\lim_{x \to c, x \in E} f(x) \neq f(c) \to \lim_{x \to c} f(x) \neq f(c) \to f$ no es continua en c.

- Caso en que en el denominador haya una resta:
  * Defino Z el conjunto de puntos de C que anulan el enumerador también.
  * $f = \frac{P}{Q}$.
  * $\forall c \in C \setminus Z : \lim_{x \to c} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \infty \neq f(x) \to f$ no es continua en c.
  * $\forall \ (x_0, y_0) \in Z :$

    Defino $E = \{(x, y) | P(x, y) = Q(x, y)\} = \{(x, y) | y = g(x)\}$
  * (x_0, y_0) es punto de acumulación de E ya que $\lim_{n \to \infty} (x_0 + 1/n, g(x)) = (x_0, y_0)$
  * $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0), (x,y) \in E} f(x, y) = 1 \to \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) \neq f(x_0, y_0) \to f$ no es continua en (x_0, y_0).

3 Difernciabilidad

3.1 Análisis de diferenciabilidad de una función definida por trozos

1. Sea C el conjunto donde f cambia de expresión
2. f es diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus C$ ya que es composición de funciones diferenciables y en denominador no se anula.
3. $\forall \ p \in C$: calculamos su matriz jacobiana $D_f(p)$

4. f es diferenciable en p si $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p) - D_f(p)(x-p)}{||x-p||} = 0$

5. f no es diferenciable si $\exists\, E \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\lim\limits_{x \to p, x \in E} \dfrac{f(x) - f(p) - D_f(p)(x-p)}{||x-p||} \neq 0$. Normalmente se prueba con $x > 0, \alpha > 0, y = \alpha x$.

4 Extremos y Puntos de silla

4.1 Análisis de Máximos y mínimos

- Sea $C = \{p \in \mathbb{R}^n | D_f(p) = 0\}$
- $\forall\, p \in C$:

  · Caso $H_f(p)$ definida positiva: p es un mínimo local de f

  · Caso $H_f(p)$ definida negativa: p es un máximo local de f

  · Caso $H_f(p)$ indefinida, p es un punto de silla.

5 Función implícita e inversa

5.1 Ver que una ecuación define una función implícita

- Sea V el conjunto de las variables libres e D el de los dependientes
- Defino $F : \mathbb{R}^{\#V} \times \mathbb{R}^{\#D} \to \mathbb{R}$ como la función que envía las variables a la ecuación igualada a 0.
- $F \in C^1$ ya que es composición de diferenciables.
- $F(p) = 0$
- Si $\exists\, d \in D$ tal que $\frac{\delta f}{\delta d} \neq 0$, se puede aplicar el Teorema de la función implícita:
- $\exists\, W$ entorno de (x, y)
- $\exists\, V$ entorno de x

- $\exists\ g : \mathbb{R}^{\#V} \to \mathbb{R}^{\#D} \in C^1$ tal que:

  $\forall\ (x, y) \in W$:

  $F((x, y)) = 0 \leftrightarrow y = g(x)$

5.2 Teorema de la función inversa

- $f \in C^1$
- $\forall\ p \in \mathbb{R}^n$ tal que $det(J_f(p)) \neq 0$:
  - · Sea $q = f(p)$
  - · $\exists$ U entorno de p y V entorno de q tal que f:U $\to V$ es un difeomorfismo. En particular tiene inversa y se cumple

$$J_f^{-1}(b) = [J_f(a)]^{-1}$$

5.3 Multiplicadores de Lagrange

- Sea K el conjunto donde queremos maximizar la función f
- K es compacto, por el teorema de WeierStrass existe máximo y mínimo de f sobre K
- Descomponemos K = $IntK \cup FrK$
- P es el conjunto de puntos críticos de $IntK$
- Sea g la función que envía las variables a las ecuaciones de K igualadas a cero.
- Por el teorema de Lagrange, si un punto es extremo ha de cumplir $\nabla f = \lambda \nabla g$. Sea L el conjunto de estos puntos.
- $\forall\ p \in P \cup L$: evalúo los puntos y veo cuales son los extremos. Si uno de ellos era de p confirmo que es extremo mediante la Hessiana.