INTRODUCCIÓ AL CÀLCUL DIFERENCIAL

1 de febrer de 2010

Índex

Capítol 1

Preliminars

Aquest curs fa una introducció a les propietats més importants de les funcions d'una variable real, sobretot a les lligades a la continuïtat i a la derivabilitat. Comencem explicant què són un nombre real i una funció.

1.1 Conjunts de nombres

Considerem els conjunts de nombres:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} \quad \textit{nombres naturals}$$
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\} \quad \textit{nombres enters}\ .$$

A partir de $\mathbb{Z}$ construïm el conjunt de *nombres racionals*:

$$\mathbb{Q} = \{n/m : n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Es veu de seguit que el conjunt $\mathbb{Q}$ és insuficient per a resoldre molts problemes elementals. Per exemple:

1. Només amb $\mathbb{Q}$ no podem mesurar longituds. Si prenem el triangle rectangle de costats 1 i volem mesurar la hipotenusa x, tenim, pel Teorema de Pitàgores: $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

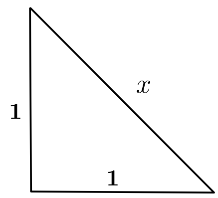


Figura 1.1:

Així $x = \sqrt{2}$. Però $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; per veure-ho suposarem el contrari ($\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) i arribarem a una contradicció (d'aquest tipus de raonament se'n diu *reducció a l'absurd*). Suposem doncs que $\sqrt{2} = n/m$, amb $n \in \mathbb{Z}$ i $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, i on n i m no tenen factors comuns. Aleshores

$$n^2 = 2m^2, \tag{1.1}$$

i per tant n és parell (el quadrat d'un nombre senar també és senar). Existeix doncs $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. L'equació (1.1) dóna $2k^2 = m^2$, i per tant m també és parell, la qual cosa contradiu la suposició que n i m no tenen factors comuns.

2. Les funcions "contínues"a $\mathbb{Q}$ poden passar de valors positius a negatius (o al revés) senze passar per 0. Per exemple, la funció $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida per $f(x) = x^2 - 2$ pren valors positius i negatius, però mai 0.

Aquests i d'altres exemples mostren que hem d'ampliar el conjunt de nombres racionals i considerar-ne un de més gran. L'anomenat conjunt $\mathbb{R}$ dels *nombres reals* està format pels x que tenen una expressió decimal del tipus $x = a_0.a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$, on $a_0 \in \mathbb{Z}$ i $a_n \in \{0, 1, 2 \dots, 9\}$, $n \in \mathbb{N}$. Amb aquesta expressió entenem que, si $a_0 \geq 0$,

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

Els nombres reals se solen representar en una recta en la que els nombres estan ordenats de més petit (a l'esquerra) a més gran (a la dreta).

Cal fer atenció a que, a diferència de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$, no hi ha una descripció explícita dels nombres reals. La definició rigorosa de $\mathbb{R}$ és delicada, i no la veurem en aquest curs.

Els nombres reals que no són a $\mathbb{Q}$ s'anomenen *irracionals*, i el subconjunt de $\mathbb{R}$ que formen es denota per $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.1.1 Subconjunts. Intervals.

Tot sovint considerarem subconjunts d'aquests conjunts de nombres bàsics. Els podem determinar dient explícitament quins elements contenen, com a

$$\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\} \, ,$$

o bé podem determinar-los mitjançant una propietat o una relació, com a

$$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2x + 2 \leq 1/3\}.$$

A partir de conjunts ja donats en podem construir de nous, prenent interseccions o unions. Si A i B són dos conjunts de nombres es defineix la *unió* de A i B com el nou conjunt

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ o } x \in B\},$$

mentre que la *intersecció* de A i B es defineix com

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}.$$

Finalment, es pot produir un nou conjunt a partir de dos conjunts A i B donats considerant el *producte cartesià*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Els subconjunts de $\mathbb{R}$ que utilitzarem més sovint són els intervals. L'*interval obert* d'extrems a i b, amb $a < b$, és el conjunt:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \, .$$

Anàlogament, l'*interval tancat* d'extrems a i b, amb $a \leq b$, és el conjunt:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \ .$$

Quan diem, sense precisar, que I és un interval entendrem que és un interval obert.

Utilitzarem els intervals com a entorns de punts $a \in \mathbb{R}$, en els que hi estudiarem el comportament d'una funció donada (habitualment la continuïtat o la derivabilitat). Més precisament, donats $a \in \mathbb{R}$ i $r > 0$, considerem els *intervals centrats a a i de radi r* donats com:

$$\begin{aligned} I(a, r) &= \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\} \\ \overline{I}(a, r) &= \{x \in \mathbb{R} : a - r \leq x \leq a + r\} \ . \end{aligned}$$

Tot i que els racionals són molts menys que els irracionals (en el sentit que $\mathbb{Q}$ és numerable i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no), n'hi ha a tot arreu.

Propietat de densitat. *Per a tot interval I de $\mathbb{R}$ es té:*

$$I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \qquad i \qquad I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset \ .$$

Això diu, en particular, que qualsevol $x \in \mathbb{R}$ es pot aproximar tant per racionals com per irracionals.

1.2 Aplicacions i propietats

Les funcions són un cas particular d'una família una mica més general, les aplicacions, la definició formal de les quals és la següent.

Definició. *Una aplicació entre dos conjunts A i B és un subconjunt R del producte cartesià $A \times B$ en el que per a cada $a \in A$ existeix un únic $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.*

En general designem l'aplicació per f (o una lletra semblant). Escrivim

$$f : A \longrightarrow B \ ,$$

i en lloc de $(a, b) \in R$ diem $b = f(a)$. En aquesta situació diem que b és la *imatge* d'a, i que a és una *antiimatge* d'b.

És important tenir present que el que caracteritza les aplicacions és el fet que tot $a \in A$ té sempre una imatge, i que aquesta és única. En canvi, pot passar perfectament que alguns elements $b \in B$ no tinguin cap antiimatge, o que en tinguin més d'una.

Donada una aplicació $f : A \longrightarrow B$ diem *domini* de f al conjunt A (escrivim $A = D(f)$), i diem *recorregut* de f al subconjunt de B format pels elements que tenen alguna antiimatge:

$$R(f) = \{b \in B : \exists a \in A : f(a) = b\}.$$

Donat un subconjunt $C \subset B$, diem *antiimatge de C* al conjunt d'elements d'A que són enviats a C per f, és a dir,

$$f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\} \ .$$

Diem *gràfica* de f al conjunt

$$G(f) = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} \subset A \times B \ .$$

Definició. *Una aplicació $f : A \longrightarrow B$ es diu injectiva si cada element $b \in B$ té com a molt una antiimatge. Equivalentment, f és injectiva si cada vegada que tenim $f(a) = f(a')$, amb $a, a' \in A$, necessàriament $a = a'$.*

L'aplicació f és diu exhaustiva si cada element $b \in B$ té almenys una antiimatge, és a dir si $R(f) = B$.

L'aplicació f és diu bijectiva si és simultàniament injectiva i exhaustiva, és a dir, si cada element $b \in B$ té exactament una antiimatge.

Quan $f : A \longrightarrow B$ és bijectiva es pot definir l'anomenada *aplicació inversa* $f^{-1} : B \longrightarrow A$ mitjançant la relació:

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{tal que } f(a) = b\,.$$

Definició. *Una funció és una aplicació entre conjunts de nombres.*

Exemple: Sigui $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

(a) La funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^2$ no és ni injectiva ni exhaustiva. No és injectiva perquè $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, tot i que evidentment $x \neq -x$ en general. No és exhaustiva perque $R(f) = [0, +\infty)$ no és tot $\mathbb{R}$.

(b) La funció $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^2$ és injectiva però no exhaustiva.

(c) La funció $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida per $f(x) = x^2$ és bijectiva, i la corresponent funció inversa és $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Observació. Quan A i B són conjunts finits i existeix una bijecció $f : A \longrightarrow B$ aleshores A i B tenen el mateix nombre d'elements.

Quan A i B són infinits això no és necessàriament així, en el sentit que pot existir una bijecció entre un conjunt A i un conjunt B estríctament més petit (o més gran) que A. Per exemple, existeix una bijecció entre els conjunts $A = \mathbb{N}$ i $B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ (conjunt de nombres naturals parells), donada per

$$f(n) = 2n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Els conjunts que estan en bijecció amb $\mathbb{N}$ s'anomenen numerables. ELs conjunts $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ són numerables, però $\mathbb{R}$ no ho és.

1.3 Funcions elementals

Vegem tot seguit un recull de les propietats més importants de les funcions elementals.

1.3.1 Polinomis i funcions racionals

Un *polinomi* de grau n és una expressió del tipus

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

on $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ i $a_n \neq 0$. El domini dels polinomis és tot $\mathbb{R}$.

Una *funció racional* és una funció de la forma

$$Q(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

on p i q són polinomis. El domini de Q és $\mathbb{R}$ llevat dels punts on s'anul·la el polinomi q. Formalment, $D(Q) = \mathbb{R} \setminus Z(q)$, on $Z(q) = \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$.

1.3.2 El valor absolut

La funció *valor absolut* es defineix com:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

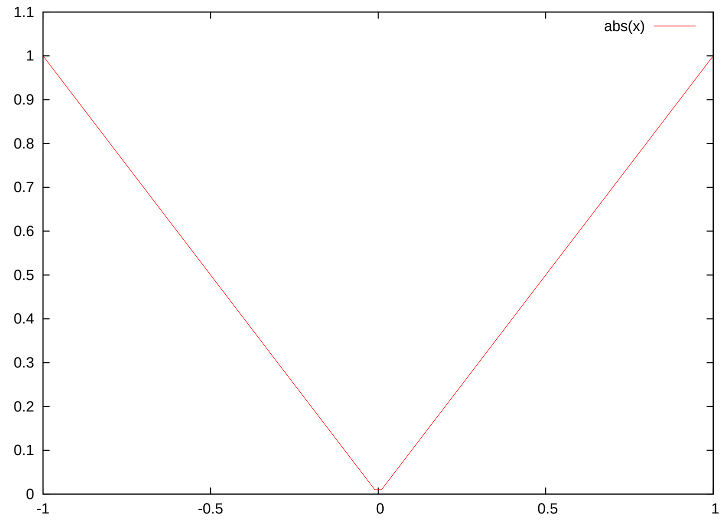


Figura 1.2: Funció $|x|$.

Observem que $|x|$ indica la distància de x a 0, i que, fent un desplaçament, $|x - a|$ indica la distància de x a a.Tenint en compte aquest fet tenim la propietat següent.

Desigualtat triangular. *Per qualssevol* $x, y \in \mathbb{R}$ *tenim*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \; .$$

La funció valor absolut es pot utilitzar per descriure els intervals vistos a la Secció 1.1.1:

$$I(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$$
$$\overline{I}(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\}$$

1.3.3 Exponencials

Donat $a > 0$ definim la *funció exponencial de base* a, denotada $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, de la manera següent:

- Si $x = n \in \mathbb{N}$ tenim $a^n = a \overset{n}{\overbrace{\cdots}} a$,
- $a^0 = 1$,
- Si $x = -n$, amb $n \in \mathbb{N}$, definim $a^{-n} = 1/a^n$,

- Si $x = 1/n$, amb $n \in \mathbb{N}$, existeix un únic nombre real positiu α tal que $\alpha^n = a$. Aleshores diem $a^{1/n} = \alpha$. Tot sovint s'escriu $\sqrt[n]{a}$, en lloc de $a^{1/n}$.
- Si $x = n/m$, amb $n, m \in \mathbb{Z}$ sense factors comuns i $m > 0$, tenim $a^{n/m} = (a^{1/m})^n$. S'escriu també $\sqrt[m]{a^n}$, en lloc de $a^{n/m}$,
- Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ considerem l'expressió decimal $x = b_0.b_1b_2 \dots b_k \dots$ i les aproximacions de x donades per la truncació al decimal k-èsim: $x_k = b_0.b_1b_2 \dots b_k \in \mathbb{Q}$. Es demostra que els valors a^{x_k} s'aproximen a un valor, que és el que s'anomena a^x.

Propietats 1.1. *Siguin $a, b > 0$ i siguin $x, y \in \mathbb{R}$. Llavors:*

(a) $a^x a^y = a^{x+y}$,

(b) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(c) $(ab)^x = a^x b^x$,

(d) *Si $a > 1$ la funció a^x és creixent, és a dir, si $x < y$, llavors $a^x < a^y$. Si $a \in (0, 1)$ la funció a^x és decreixent, és a dir, si $x < y$, llavors $a^x > a^y$.*

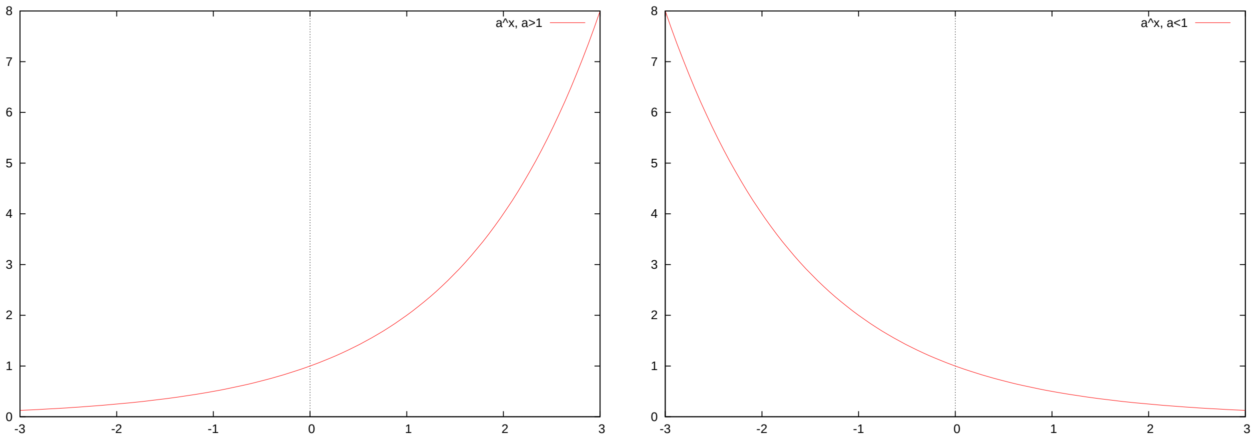


Figura 1.3: Funcions a^x, amb $a > 1$ i $a < 1$.

Per raons que explicarem més endavant, una tria de la base a que simplifica considerablement els càlculs és la que fa que el pendent de la recta tangent a la gràfica al punt $(0, 1)$ sigui exactament 1. A aquesta base privilegiada se l'anomena e.

1.3.4 Logaritmes

La funció exponencial $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ definida com $y = f(x) = a^x$, $a > 0$, és bijectiva. Això permet construir la funció inversa $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, que s'anomena *logaritme en base* a de y. Així

$$\log_a y = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = y \, .$$

El logaritme en base e s'anomena *logaritme neperià*, i s'escriu $\log y$ o $\ln y$.

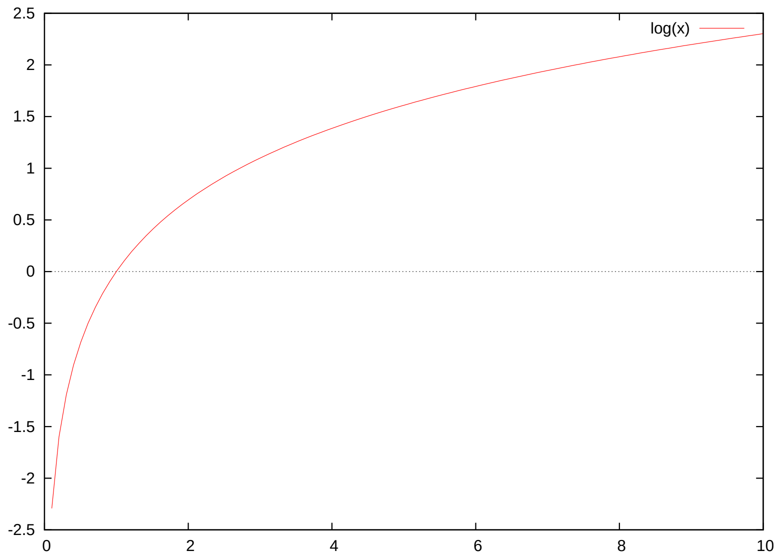


Figura 1.4: Funció $\log x$.

Propietats 1.2. *Siguin $a, b > 0$ i siguin $x, y \in \mathbb{R}$. Llavors:*

(a) $\log_a(xy) = \log_a x \cdot \log_a y$,

(b) $\log_a x^y = y \log_a x$,

(c) $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$ *(Fórmula del canvi de base).*

Demostració. (a) és una reescritura de Propietats 1.1(a).

(b) Per (b) de Propietats 1.1:

$$a^{y \log_a x} = (a^{\log_a x})^y = x^y \ .$$

(c) Siguin $z = \log_a x$ i $w = \log_b x$, de manera que $a^z = b^w = x$. Per la propietat anterior, tenim:

$$z = \log_a b^w = w \log_a b \ .$$

□

La propietat (c) permet, en particular, calcular un logaritme qualsevol en termes del logaritme neperià:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \ .$$

1.3.5 Funcions trigonomètriques

En principi les funcions trigonomètriques són les que apareixen en la mesura d'angles de triangles rectangles. Donat el triangle

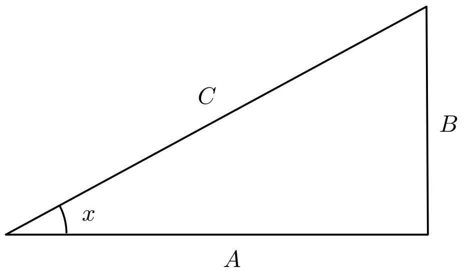


Figura 1.5:

definim el *sinus* de l'angle x com $\sin x = B/C$, i el *cosinus* de x com $\cos x = A/C$. La *tangent* de x és

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{B}{A},$$

i la *cotangent* de x és

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{A}{B}.$$

Si ens situem en un cercle de radi 1 i considerem l'angle x (mesurat en radiants), que dóna lloc al triangle rectangle que veiem a la figura, tenim $\sin x = s$, $\cos x = c$, $\tan x = t$ i $\cot x = ct$.

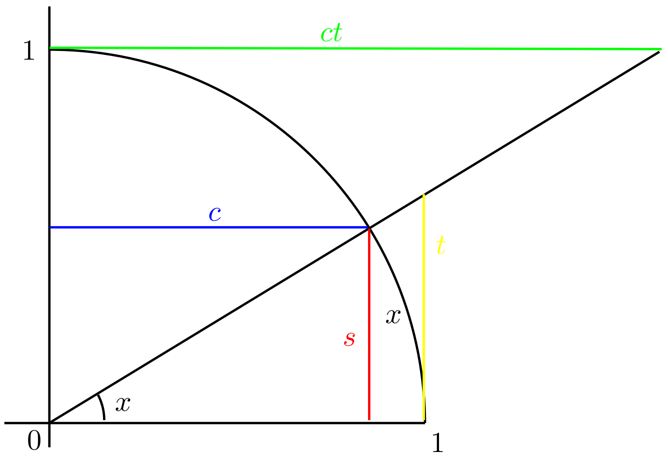


Figura 1.6: Funcions trigonomètriques.

Proposició 1.3. *Per a tot* $x \in \mathbb{R}$*:*

(a) *Les funcions sinus i cosinus són* 2π*-periòdiques, és a dir,*

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad i \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x,$$

(b) $|\sin x| \leq 1$*;* $|\cos x| \leq 1$*,*

(c) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$*,*

(d) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ *;* $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$*.*

Les propietats (a) i (b) són immediates a partir de la definició, mentre que (c) surt d'aplicar el Teorema de Pitàgores al triangle inscrit al cercle.

1.3.6 Composició de funcions

A partir de les funcions elementals se'n poden produir d'altres sumant, multiplicant o composant. Suposem que tenim conjunts de nombres A, B, C i D amb $B \subset D$, i funcions

$$f : A \longrightarrow B \qquad , \qquad g : C \longrightarrow D\,.$$

La composició de f i g és la funció $g \circ f : A \longrightarrow D$ definida com

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad x \in A.$$

Així, per exemple, la funció

$$F(x) = \log(1 + |\sin x|)$$

és la composició successiva de les funcions elementals $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = |x|$, $f_3(x) = 1 + x$ i $f_4(x) = \log x$.

Observació. No totes les funcions són elementals, ni poden obtenir-se a partir de les funcions elementals amb operacions algèbriques (suma i producte) o amb composicions. Un exemple típic és la funció $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ donada per

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt\,.$$

Un exemple de natura diferent el podeu trobar a l'Exemple 4(b).

1.4 El principi d'inducció

Aquest principi dóna un mètode per determinar la validesa de propietats $P(n)$ que fan referència als naturals $n \in \mathbb{N}$.

Principi d'Inducció. *Suposem que*

(a) $P(1)$ és certa,

(b) $P(n)$ certa implica $P(n+1)$ certa (per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$).

Aleshores $P(n)$ és certa per a tot $n \in \mathbb{N}$.

La condició "$P(n)$ certa" de (b) s'anomena *hipòtesi inductiva*, o hipòtesi d'inducció.

Exemple: Sigui, per a cada $n \in \mathbb{N}$, la igualtat

$$P(n) : \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Utilitzem el Principi d'Inducció per comprovar-ne la validesa:

(a) $P(1)$ és la igualtat $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, que és òbviament certa.

(b) Vegem ara que $P(n)$ implica $P(n+1)$. Suposem que val $P(n)$ (la igualtat escrita més amunt) i veiem si podem provar $P(n+1)$, que és la igualtat

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,.$$

La suma dels n primers termes d'aquesta suma ve donada per $P(n)$, així que tenim:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

tal i com volíem veure.

Observació. En termes formals, el Principi d'Inducció diu que si $A \subset \mathbb{N}$ és tal que
(a) $1 \in A$,
(b) $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$,
aleshores $A = \mathbb{N}$.

En aquests termes, a l'exemple anterior prendríem

$$A = \left\{n \in \mathbb{N} : 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\right\}.$$

1.5 Exercicis

1. Calculeu el domini i el recorregut de la funció $f(x) = \sqrt{2x+1}$. Demostreu que és injectiva i determineu la funció inversa f^{-1}.

2. Donada la funció $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, demostreu que val la igualtat
$$f(x_1)+f(x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right).$$

3. Siguin A, B, C conjunts i $f : A \to B$, $g : B \to C$ funcions. Demostreu:
   (a) Si $g \circ f$ és injectiva, llavors f és injectiva.
   (b) Si $g \circ f$ és exhaustiva, llavors g és exhaustiva.

4. Demostreu que tots els nombres de la forma $5^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ són divisibles per 4.

5. Demostreu que per a $n \in \mathbb{N}$ i $x \neq 1$ val la igualtat
$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

Capítol 2

Límits i continuïtat

En aquest capítol definirem la noció de límit d'una funció a un punt, que és l'eina fonamental per estudiar, més endavant, dues propietats de regularitat bàsiques de les funcions: la continuïtat i la derivabilitat.

2.1 Límit d'una funció a un punt

Sigui $D \subset \mathbb{R}$ i sigui $f : D \to \mathbb{R}$. Quan $a \in \mathbb{R}$ és un punt aproximable per punts de D, diem que el límit de f quan x tendeix a a és l si a mesura que x es va apropant a a el valor $f(x)$ es va apropant a l.

Definició. *El límit de f quan x tendeix a a és $l \in \mathbb{R}$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$) si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que*

$$0 < |x - a| < \delta,\ x \in D \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - l| < \varepsilon\ .$$

Aquesta darrera implicació, escrita en termes d'intervals, és:

$$x \in D \cap (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)\ .$$

A vegades ens convindrà estudiar el comportament d'una funció quan x s'acosta a un punt a per la dreta (amb $x > a$) o per l'esquerra (amb $x < a$).

Diem que el límit de f quan x tendeix a a *per la dreta* és $l \in \mathbb{R}$ ($\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$) si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$x \in (a, a + \delta),\ x \in D \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - l| < \varepsilon\ .$$

Anàlogament, diem que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ (límit *per l'esquerra*) si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$x \in (a - \delta, a),\ x \in D \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - l| < \varepsilon\ .$$

Exemple 1. *(a) $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$. Per simplificar els càlculs suposem que $a > 0$; el cas general es fa anàlogament. Fixat $\varepsilon > 0$ qualsevol, volem veure si existeix $\delta > 0$ tal que*

$$0 < |x - a| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |x^2 - a^2| < \varepsilon\ .$$

Si $|x-a|<\delta$ *tenim, per la desigualtat triangular,* $|x+a|\leq|x|+|a|<(a+\delta)+a=2a+\delta$. *Aleshores, triant* $\delta<a$ *(cosa que no és cap restricció):*

$$|x^2-a^2|=|x-a||x+a|<\delta(2a+\delta)<3a\delta\ .$$

N'hi ha prou doncs amb triar $\delta<\varepsilon/(3a)$ *per tenir la desigualtat* $|x^2-a^2|<\varepsilon$*.*

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ *no existeix. Pels punts* $x_k=1/(\pi k)$*,* $k\in\mathbb{Z}$*, que es van acostant a* 0*, tenim* $\sin(1/x_k)=0$*. Per altra part, si triem* $y_k=1/(\pi/2+2\pi k)$*,* $k\in\mathbb{Z}$*, que també es van acostant a* 0*, tenim* $\sin(1/y_k)=1$*. Per tant no és cert que quan* $x\to 0$ *la funció tendeixi a un valor* $l\in\mathbb{R}$*.*

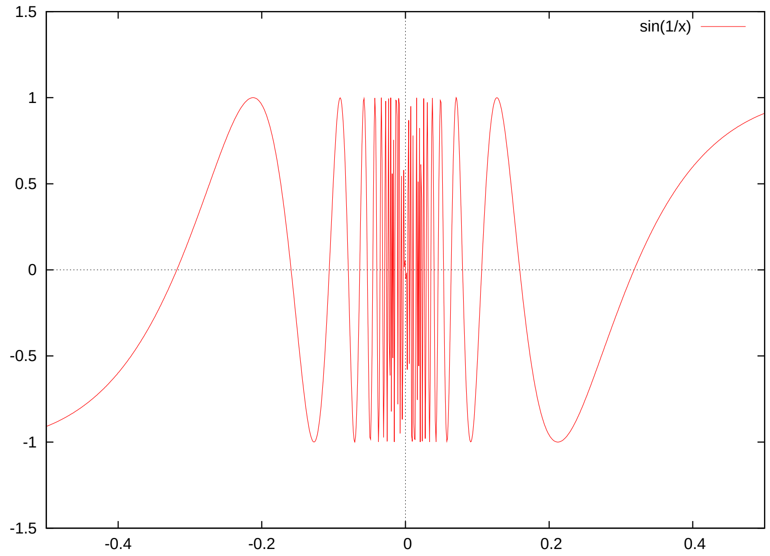


Figura 2.1:

Definició. *Diem que una funció* $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ *és acotada superiorment si existeix* $C\in\mathbb{R}$ *tal que* $f(x)\leq C$ *per a tot* $x\in D$*. Anàlogament,* f *és acotada inferiorment si existeix* $C\in\mathbb{R}$ *tal que* $f(x)\geq C\ \ \forall x\in D$*.*

Diem que f *és acotada si és simultàniament acotada superiorment i inferiorment. Això equival a dir que existeix* $C>0$ *tal que* $|f(x)|\leq C\ \ \forall x\in D$*.*

Teorema 2.1. *Si* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l\in\mathbb{R}$ *existeix un entorn d'*a *on la funció* $f(x)$ *hi és acotada.*

Demostració. Fixem $\varepsilon=1$ i apliquem la definició de límit: existexi $\delta>0$ tal que si $x\in I(a,\delta)\setminus\{a\}$ aleshores

$$l-1\leq f(x)\leq l+1\ ,$$

de manera que f a $I(a,\delta)\setminus\{a\}$ és acotada superiorment per $l+1$ i inferiorment per $l-1$. □

Teorema 2.2. *Sigui* $D\subset\mathbb{R}$ *i siguin* $f,g:D\to\mathbb{R}$*. Sigui* $a\in\mathbb{R}$ *pel qual existeixen els límits*

$$l_f=\lim_{x\to a}f(x)\qquad \textit{i}\qquad l_g=\lim_{x\to a}g(x)\ .$$

Aleshores

(a) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = l_f + l_g$*,*

(b) $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = l_f \cdot l_g$*,*

(c) Si $g(x) \neq 0$ *en un entorn d'*a *i* $l_g \neq 0$*, també* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g}$*.*

(d) Si $f(x) \leq g(x)$ *per a tot* $x \in D$ *(o a un entorn de* a*), aleshores* $l_f \leq l_g$*.*

Observació. Cal fer atenció a que l'apartat (d) no val si canviem les desigualtats per desigualtats estrictes. Per exemple, si $f(x) = x$ i $g(x) = x + x^2$ tenim $f(x) < g(x)$ (desigualtat estricta), però en canvi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) \ .$$

Una darrera propietat dels límits respecte les desigualtats és la que veiem a continuació.

Teorema del Sandwich. *. Siguin* $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ *tals que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in D.$$

Sigui $a \in \mathbb{R}$ *pel qual existeixen els límits de* f *i* h *al punt* a *i a més coincideixen:*

$$l = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) \ .$$

Aleshores també $\lim_{x\to a} g(x) = l$*.*

Exemple 2. *(a) Com que* $-x \leq \sin x \leq x$ *i* $\lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0} -x = 0$*, deduïm que*

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \ .$$

(b) Per a $x \in (0, \pi/2)$ *tenim* $\sin x \leq x \leq \tan x$ *(vegeu la Figura 1.6), i per tant*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \ .$$

2.2 Límits infinits i límits a l'infinit

Pot passar que a mesura que x s'acosta a un extrem del domini, la funció es vagi fent cada cop més gran (o més petita).

Sigui $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Diem que el límit de f quan x tendeix a a és $+\infty$ ($\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$) si per a tot $M > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$x \in (a, a+\delta) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) > M \ .$$

Anàlogament, $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ si per a tot $M > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$x \in (a, a+\delta) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) < -M \ .$$

Els límits a b es defineixen anàlogament.

Sigui $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Diem que el límit de f quan x tendeix a $+\infty$ és $l \in \mathbb{R}$ ($\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$) si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $K > 0$ tal que

$$x > K \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - l| < \varepsilon\ .$$

Anàlogament, si $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$, diem que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $K > 0$ tal que

$$x < -K \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - l| < \varepsilon\ .$$

Podem també tenir límits infinits a l'infinit. Per exemple, donada $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, diem que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si per a tot $M > 0$ existeix $K > 0$ tal que

$$x > K \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) > M\ .$$

Anàlogament es defineixen $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple 3. *Siguin $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ i $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ polinomis de graus respectius n i m, amb $a_n, b_m > 0$. Aleshores*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} +\infty & \textit{si } n > m \\ a_n/b_m & \textit{si } n = m \\ 0 & \textit{si } n < m. \end{cases}$$

Per veure aquesta igualtat escrivim

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^n(a_n + a_{n-1}/x + \cdots + a_0/x^n)}{x^m(b_m + b_{m-1}/x + \cdots + b_0/x^m)}$$

i utilitzem que $\lim_{x\to\infty} 1/x^n = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Cal fer atenció al fet que els infinits no són nombres, i per tant si fem operacions amb ells (sumes, productes, quocients, etc.) cal justificar-ne els resultats.

Proposició 2.3. *Siguin f i g funcions amb $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ i $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Aleshores*

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = +\infty \quad (l + (+\infty) = +\infty)$,

(b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = +\infty \quad (l - (+\infty) = -\infty)$,

(c) $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = 0 \quad (l/+\infty = 0)$,

(d) *Si* $l > 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = +\infty \quad (l\cdot(+\infty) = +\infty)$;
si $l < 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = -\infty \quad (l\cdot(+\infty) = -\infty)$.

Demostració. (a) Fixat $M > 0$ existeixen $K_f, K_g > 0$ tals que

$$\begin{aligned} |f(x) - l| &< 1 \quad \text{si } x > K_f \\ g(x) &> M - l + 1 \quad \text{si } x > K_g . \end{aligned}$$

Llavors, si $x > K = \max(K_f, K_g)$ tenim

$$f(x) + g(x) > l - 1 + M - l + 1 = M \ .$$

(b) Anàlogament.

(c) Fixem $\varepsilon > 0$; volem veure que existeix $K > 0$ tal que

$$x > K \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon \ .$$

Prenem $M = (l+1)/\varepsilon$ i considerem $K > 0$ tal que $|f(x) - l| < 1$ i $g(x) > M$ si $x > K$. Aleshores, per a aquests x,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \frac{l+1}{M} = \varepsilon \ ,$$

tal i com volíem.

(d) Suposem $l > 0$. Volem veure ara que fixat $M > 0$ existeix $K > 0$ tal que

$$x > K \quad \Rightarrow \quad f(x)g(x) > M \ .$$

Triem en primer lloc $\varepsilon > 0$ prou petit tal que $l - \varepsilon > 0$. Existeix $K_f > 0$ tal que si $x > K_f$ aleshores $f(x) > l - \varepsilon$. També existeix $K_g > 0$ tal que si $x > K_g$ aleshores $g(x) > M/(l - \varepsilon)$. Per tant, si $x > K = \max(K_f, K_g)$ tenim, com volíem,

$$f(x)g(x) > (l - \varepsilon)\frac{M}{l - \varepsilon} = M \ .$$

□

2.2.1 Límits indeterminats

Hi ha d'altres operacions d'aquest tipus que no tenen resultat determinat en general (depenen de cada cas), per la qual cosa s'anomenen indeterminacions. Vegem-ne les més habituals:

(A) $\underline{(+\infty) - (+\infty)}$. Veiem que, depenent de cada cas, podem tenir un resultat diferents. Prenem per exemple $f(x) = x$ i $g(x) = x^2$. Òbviament $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; per altra part

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) &= \lim_{x\to+\infty} x - x^2 = -\infty \ , \\ \lim_{x\to+\infty} g(x) - f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x^2 - x = +\infty \ . \end{aligned}$$

(B) $\underline{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$,$\underline{0 \cdot (\pm\infty)}$, $\underline{0/0}$. L'Exemple 3 mostra que aquests els límits del tipus $\pm\infty/\pm\infty$ poden tenir valors diferents segons els casos.

Els límits de la forma $0 \cdot (\pm\infty)$ es redueixen als anteriors posant $p(x)q(x) = \frac{q(x)}{1/p(x)}$, i els de la forma $0/0$ ho fan posant $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1/q(x)}{1/p(x)}$.

(C) $\underline{1^{\pm\infty}}$, $\underline{0^0}$, $\underline{(\pm\infty)^0}$. Sovint podem resoldre-les utilitzant la relació

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)} \,.$$

(Vegeu també l'Aplicació a la Secció 2.3).

El nombre e**.** Una altra possibilitat, a l'hora de resoldre aquest darrer tipus d'indeterminacions, és utilitzar la definició del nombre e. La funció $f(x) = (1 + 1/x)^x$ és monòtona creixent i acotada superiorment, i per tant té límit quan $x \to +\infty$. A aquest valor se l'anomena e. Així, per definició,

$$e = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \,.$$

Veurem més endavant, com a conseqüència de la Regla de l'Hôpital (vegeu final de la Secció 3.3), que si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ tenim també

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \,.$$

2.2.2 Comparació de funcions

Els límits que acabem de veure s'utilitzen a vegades per comparar funcions. Per exemple, sabem que si $a > 1$ aleshores $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. D'això i la definició de logaritme en deduïm que també $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$. Però, quina de les dues funcions va més depressa a l'infinit? Quina creix més?

Una manera de respondre aquesta pregunta imprecisa és fer el límit del quocient.

Proposició 2.4. *Siguin* $a > 1$ *i* $c > 0$*. Aleshores*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^c} = 0 \quad i \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^c}{a^x} = 0 \,.$$

Això mostra que tot logaritme creix més lentament que tota potència, i que tota potència ho fa més lentament que qualsevol exponencial. A vegades escrivim $\log_a x \lesssim x^c \lesssim a^x$ ($x \to +\infty$), o bé $\log_a x = o(x^c)$ i $x^c = o(a^x)$.

Aquests tipus de comparacions també es poden fer a l'entorn de punts $a \in \mathbb{R}$, no només a l'infinit.

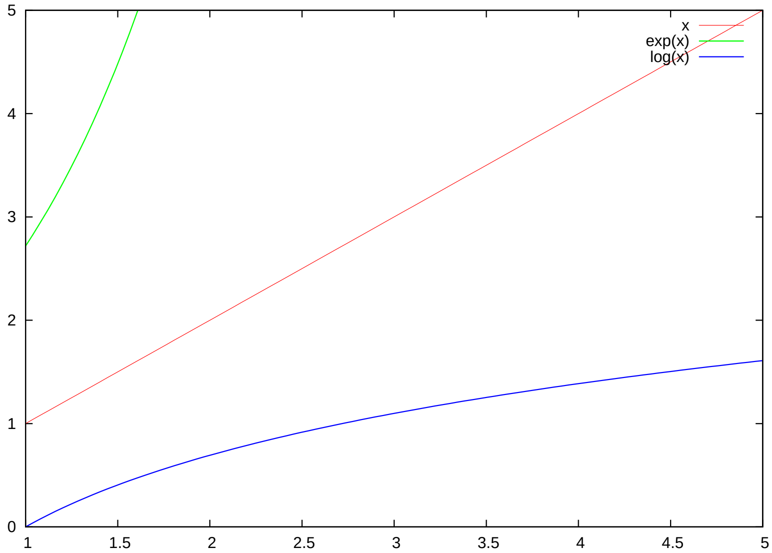


Figura 2.2: Comparació de x, e^x i $\log x$.

Definició. *Diem que f és un infinitèsim quan x tendeix a a si* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Si f i g són dos infinitèsims quan x tendeix a a, diem que f és d'ordre superior a g si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\ ,$$

és a dir, si f és fa petit més ràpidament que g quan x tendeix a a. S'escriu $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$.

Diem que f i g són infinitèsims equivalents si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\ .$$

Escriurem $f(x) \simeq g(x)$, $x \to a$.

Exemples:

(a) $\sin x \simeq x$, $x \to 0$ (Exemple 2(b)).

(b) $1 - \cos x = o(x)$, $x \to 0$. Essent $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$ tenim

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 = 0 \cdot 1 = 0\ .$$

2.3 Funcions contínues. Tipus de discontinuïtat.

Definició. *Sigui $f : D \to \mathbb{R}$ i sigui $a \in D$. Diem que f és contínua al punt a si existeix $\lim_{x\to a} f(x)$ i aquest val $f(a)$.*

De manera equivalent, f és contínua al punt a si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \cap I(a, \delta)) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \in I(f(a), \varepsilon)\ .$$

Quan f no és contínua al punt a diem que és discontínua.

Quan diem que f és contínua a D entendrem que és contínua a tots els $a \in D$. Aleshores escriurem $f \in \mathcal{C}(D)$.

Exemple 4. *(a) La funció $f(x) = [x]$ és contínua a tot $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ i discontínua a tot $a \in \mathbb{Z}$.*

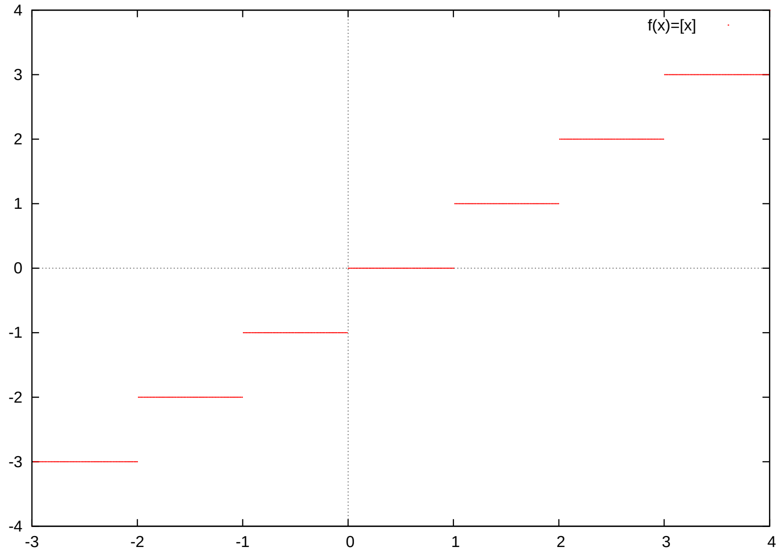


Figura 2.3: $f(x) = [x]$.

(b) La funció

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

és discontínua a tot arreu, per la propietat de densitat de $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (1.1.1).

(c) La funció

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

és contínua a tot arreu.

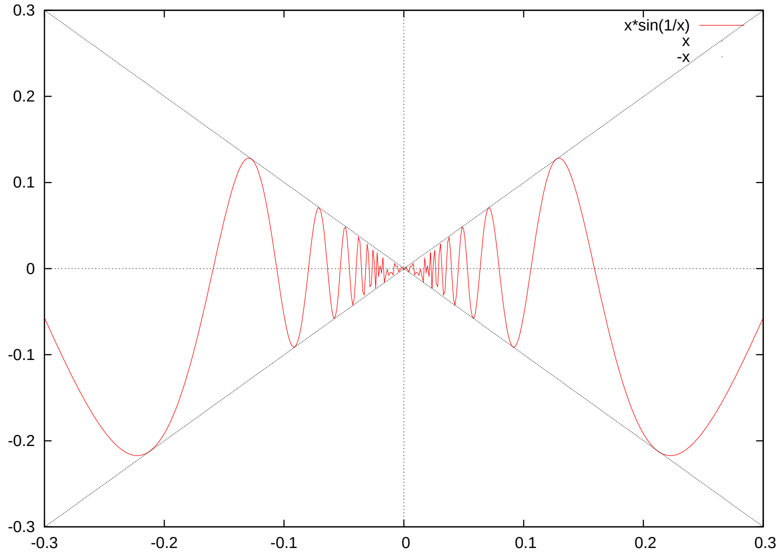


Figura 2.4:

(d) La funció

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \textit{si } x \neq 0 \\ 0 & \textit{si } x = 0 \end{cases}$$

és discontínua al punt $a = 0$ (vegeu la gràfica a l'Exemple 1(b)).

Les propietats dels límits vistes al Teorema 2.2 donen lloc al resultat següent.

Teorema 2.5. *Siguin $f, g : D \to \mathbb{R}$ contínues al punt $a \in D$. Aleshores les funcions $f + g$ i $f \cdot g$ són contínues al punt $a \in D$. Si a més $g(x) \neq 0$ per a tot $x \in D$ (o a tot un entorn de a), aleshores f/g també és contínua al punt $a \in D$.*

La continuïtat també es conserva en fer composició de funcions.

Teorema 2.6. *Siguin $f : D \to \mathbb{R}$ i $g : E \to \mathbb{R}$ amb $f(D) \subset E$. Si f és contínua al punt $a \in D$ i g és contínua al punt $f(a) \in E$, aleshores la funció composta $g \circ f$ també és contínua al punt $a \in D$.*

Demostració. Essent g contínua al punt $f(a)$, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$y \in E \cap I(f(a), \delta)) \qquad \Rightarrow \qquad g(y) \in I(g(f(a)), \varepsilon) \ .$$

Per la continuïtat de f al punt a, fixat $\delta > 0$ existeix $\eta > 0$ tal que

$$x \in D \cap I(a, \eta) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \in I(f(a), \delta) \ .$$

Aleshores, si $x \in D \cap I(a, \eta)$ podem prendre $y = f(x)$ a la primera implicació i deduïm que $g(f(x)) \in I(g(f(a)), \varepsilon)$, com volíem. $\square$

Exemple. La funció

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin(\pi / \sin x) & \text{si } x \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

és contínua al punt $a = 0$.

Aplicació: podem utilitzar aquests resultats i el fet que les exponencials i logaritmes són contínues per mirar si són contínues d'altres funcions. Un cas típic és el de funcions del tipus $f(x)^{g(x)}$, que es poden escriure

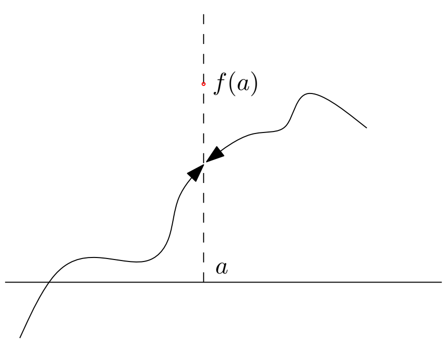
$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)} \ .$$

Si $f(x) > 0$ i $\lim_{x \to a} f(x) = l \neq 0$, i si $\lim_{x \to a} g(x) = t$, aleshores

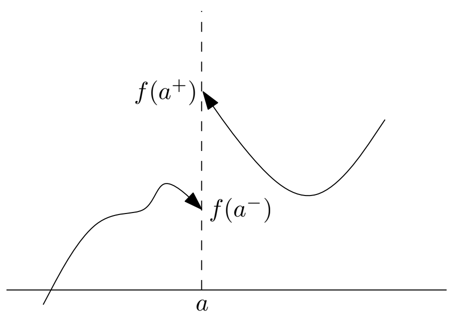
$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} e^{g(x) \log f(x)} = e^{t \log l} \ .$$

Tipus de discontinuïtats. Els exemples anteriors mostren clarament que hi ha discontinuïtats de natures diferents. El tipus més senzill és el que es produeix quan existeix el límit $\lim_{x \to a} f(x)$ però no coincideix amb $f(a)$. Aquest tipus de discontinuïtats s'anomenen *evitables*, perque deixen de ser-ho tant bon punt com es canvia la definició de $f(a)$ i es fa coincidir amb $\lim_{x \to a} f(x)$.

Quan existeixen els límits laterals $f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ i $f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x)$, però no coincideixen, es diu que la discontinuïtat és *de salt*. El "salt"és justament la diferència entre els valors dels límits laterals.



Discontinuïtat evitable



Discontinuïtat de salt

Quan almenys un dels límits laterals és infinit, es diu a vegades que la discontinuïtat és *essencial*.

Observem que no totes les singularitats són necessàriament d'aquests tres tipus: la funció vista a l'Exemple 4 (d) és discontínua al 0, tot i que la discontinuïtat no és evitable, ni de salt, ni essencial.

Exemple. Les discontinuïtats de les funcions monòtones (creixents o decreixents) són de salt.

Suposem que f és creixent: $f(x) \leq f(y)$ si $x \leq y$. Fixat $a \in D$ tenim $f(x) \leq f(a)$ si $x < a$, demanera que $f(x)$ és acotada superiorment (per $f(a)$) quan $x < a$. Com que f és creixent i acotada superiorment, existeix $\lim_{x \to a^-} f(x)$. De manera anàloga, utilitzant que $f(x)$ és acotada inferiorment per $f(a)$ quan $x > a$, veiem que existeix $\lim_{x \to a^+} f(x)$.

2.4 Teoremes de Weierstrass, Bolzano i del valor intermig.

En aquesta secció recollim tres propietats fonamentals de les funcions contínues. La primera fa referència a l'existència de punts on la funció assoleix el valor màxim o el valor mínim.

Diem que una funció $f : D \to \mathbb{R}$ assoleix un *màxim absolut* al punt $a \in D$ si $f(x) \leq f(a)$ per a tots els $x \in D$. Diem abreujadament que a és un màxim absolut de f. Anàlogament, diem que $a \in D$ és un *mínim absolut* de f si $f(x) \geq f(a)\ \ \forall x \in D$.

Teorema de Weierstrass. *Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Aleshores f és acotada i assoleix un màxim i un mínim absolut.*

Observem que el mateix resultat canviant l'interval tancat $[a,b]$ per l'interval obert (a,b) és fals, com mostra, per exemple, la funció $f(x) = x$.

El segon resultat ens diu que una funció contínua que passa de positiu a negatiu (o al revés) necessàriament passa per 0. Com ja vam comentar al principi de curs, quan parlavem de la necessitat d'ampliar $\mathbb{Q}$, aquesta és tant una propietat de les funcions contínues com del conjunt de nombres reals $\mathbb{R}$.

Teorema de Bolzano. *Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua amb $f(a) \cdot f(b) < 0$. Existeix $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

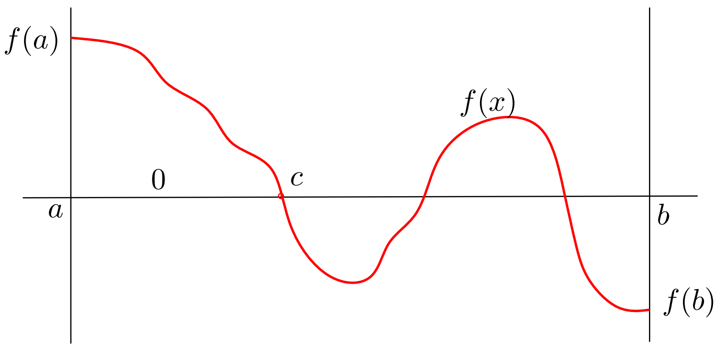


Figura 2.5: Teorema de Bolzano.

Per provar aquest resultat s'aplica el *mètode de la bisecció*. Dividim $I = [a,b]$ en dos intervals d'igual longitud; a un dels dos intervals resultants (de longitud $(b-a)/2$) la funció compleix una propietat anàloga a la de l'interval inicial: els valors de f als extrems tenen signes oposats. En aquest nou interval hi repetim el procés anterior: el dividim en dos d'igual longitud (ara $(b-a)/2^2$) i ens quedem amb aquell en el que f tingui valors de signes oposats als extrems. Aquest procés convergeix a un punt $c \in (a,b)$, que és on la funció f s'anul·la.

Aplicació: Demostrem que tot polinomi $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$ de grau n imparell té almenys una arrel real.

Suposem que $a_n > 0$, i observem que

$$\lim_{x\to+\infty} p_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n \Big(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + a_n\Big) \text{``}=\text{''} +\infty \cdot a_n = +\infty\ .$$

Aleshores existeix algun $b \in \mathbb{R}$ prou avançat de manera que $p_n(b) > 0$.

Anàlogament podem veure que $\lim_{x\to+\infty} p_n(x) = -\infty$, de manera que existeix algun $a \in \mathbb{R}$ prou endarrerit tal que $p_n(a) > 0$.

Aplicant el teorema de Bolzano a la funció $p_n(x)$, que òbviament és contínua, i a l'interval $[a, b]$ veiem que necessàriament existeix $c \in (a, b)$ amb $p_n(c) = 0$.

El cas $a_n < 0$ es tracta de manera semblant.

Una conseqüència directa de Bolzano és el resultat següent.

Teorema del valor intermig. *Sigui* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua i sigui* z *un valor entre* $f(a)$ *i* $f(b)$. *Existeix* $c \in [a, b]$ *tal que* $f(c) = z$.

En particular, si $M, m \in [a, b]$ són punts on s'assoleixen respectivament el màxim i el mínim absoluts, tenim $f([a, b]) = [f(m), f(M)]$.

Demostració. Apliquem el Teorema de Bolzano a la funció $g(x) = f(x) - z$. Si $g(a) = 0$ o $g(b) = 0$ ja hem acabat. Si no, $g(a)$ i $g(b)$ tenen signes diferents (perque z està entre $f(a)$ i $f(b)$), i per tant existeix $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$. $\square$

2.5 Exercicis

1. Demostreu que la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1/n & \text{si } x = n/m \in \mathbb{Q} \text{ (fracció irreductible)} \end{cases}$$

   és discontínua als punt $a \in \mathbb{Q}$ i contínua als punt $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funció tal que $|f(x)| \leq |x|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Demostreu que f és contínua al punt $a = 0$ i doneu un exemple que mostri que no té perque ésser contínua a cap altre punt.

3. Sigui $f \in \mathcal{C}[a, b]$ estríctament creixent. Demostreu que la funció inversa també és contínua a l'interval $[f(a), f(b)]$.

4. Demostreu que $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ i $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ (Vegeu Proposició 2.3).

5. Sigui $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funció contínua tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} < 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} > 1\ .$$

   Demostreu que existeix $x_0 > 0$ tal que $f(x_0) = x_0$.

6. Demostreu que a l'equador de la terra hi ha dos punts antipodals (un a les antípodes de l'altre) amb la mateixa temperatura (Indicació: considereu la funció $f(x) = T(x) - T(x + 180^o)$, on T indica la temperatura del punt de l'equador de longitud x).

Capítol 3

La derivada i la seva interpretació geomètrica

Moltes vegades, tant o més important que el valor d'una funció donada és el valor de la seva variació, l'evolució. L'objecte matemàtic que conté la informació sobre aquesta variació és la derivada de la funció.

3.1 Derivada d'una funció en un punt

Definició. *Sigui f definida a un interval I i sigui $a \in I$. Diem que f és derivable al punt a si existeix el límit*

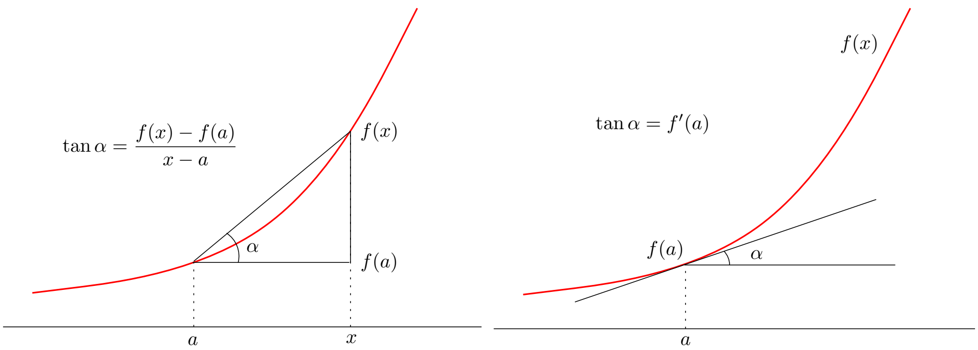
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \, .$$

Quan això passa el valor del límit s'escriu $f'(a)$. Observem que aleshores

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = 0 \, .$$

L'aplicació lineal $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donada per $L(x) = f'(a)x$ s'anomena *diferencial* de f al punt a i es designa per df_a. És en aquesta forma que la noció de derivabilitat es generalitza a funcions de diverses variables.

La derivada té una interpretació geomètrica clara, que posa de manifest la relació amb el creixement de la funció. El quocient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ dóna el pendent de la recta (secant) que uneix els punts $(x, f(x))$ i $(a, f(a))$, és a dir, $\tan\alpha = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. En fer el límit quan $x \to a$ obtenim el pendent de la recta tangent a la gràfica de f al punt $(a, f(a))$.



Pendent de la secant   Pendent de la tangent

Exemples.

(a) La funció $f(x) = C$ constant té derivada 0 a tots els punts $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{C-C}{x-a} = \lim_{x\to a} 0 = 0 \ .$$

(b) La funció $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, és derivable a tot punt $a \in \mathbb{R}$, i $f'(a) = na^{n-1}$:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a}\big(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1}\big) = na^{n-1} \ .$$

(c) La funció $f(x) = b^x$, amb $b > 0$, és derivable a tot $a \in \mathbb{R}$, i $f'(a) = b^a \log b$: amb el canvi $y = b^{x-a} - 1$ tenim

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{b^x-b^a}{x-a} = \lim_{x\to a} b^a \frac{b^{x-a}-1}{x-a} = \lim_{x\to a} b^a \frac{y}{\log_b(1+y)} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{b^a}{\log_b(1+y)^{1/y}} = \frac{b^a}{\log_b e} = \frac{b^a}{\log e/\log b} = b^a \log b \ . \end{aligned}$$

Tenim, en particular, que la derivada de $f(x) = e^x$ és $f'(x) = e^x$.

(d) La funció $f(x) = \sin x$ és derivable a tot punt $a \in \mathbb{R}$, i $f'(a) = \cos a$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2\cos(\frac{x+a}{2})\sin(\frac{x-a}{2})}{x-a} \\ &= \cos(\frac{2a}{2}) \cdot 1 = \cos a \ . \end{aligned}$$

Acabem aquesta secció observant que la derivabilitat és un grau de regularitat més elevat que la continuïtat.

Teorema 3.1. *Sigui f funció derivable al punt $a \in I$. Aleshores f és contínua al punt $a \in I$.*

El recíproc d'aquest enunciat és fals, com mostra la funció $f(x) = |x|$, que és contínua al punt 0, però no hi és derivable. Hi ha també funcions contínues per a les quals els límits laterals del quocient incrementals no existeixen (vegeu l'Exemple 4(c)). De fet, hi ha funcions contínues que no són derivables a cap punt del seu domini.

Demostració. Per veure que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ escrivim

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0 \ .$$

$\square$

3.2 Regles de derivació i càlcul de derivades

Les derivades de les funcions elementals es poden obtenir directament a partir de la definició, com hem vist a la secció anterior. Les propietats algèbriques dels límits donen lloc també al resultat següent.

Teorema 3.2. *Siguin f i g funcions definides a un interval I i sigui $a \in I$. Aleshores les funcions $f+g$ i fg són derivables i*

$$\begin{aligned} (f+g)'(a) &= f'(a)+g'(a) \\ (fg)'(a) &= f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\ . \end{aligned}$$

Si, a més, $g(x) \neq 0$ a un entorn d'a, aleshores f/g també és derivable i

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\ .$$

Demostració. La propietat per a la suma és immediata de la definició. Pel al producte escrivim

$$(fg)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)(g(x)-g(a))}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(a)(f(x)-f(a))}{x-a}$$

i passem al límit.

Pel quocient n'hi ha prou amb observar que

$$(1/g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{1/(g(x))-1/(g(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(x)g(a)} = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$$

i aplicar la regla del producte a $f \cdot \frac{1}{g}$. □

3.2.1 La regla de la cadena

Amb els resulats anteriors i la regla de derivació que veurem a continuació, podem derivar la composició de funcions elementals.

Regla de la cadena. *Sigui f definida a un interval I i sigui g definida a un interval J tal que $f(I) \subset J$. Si f és derivable al punt a i g és derivable al punt $b=f(a)$, aleshores $g\circ f$ és derivable al punt a i*

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)\ .$$

Demostració. Calculem directament el límit i utilitzem que quan $x \to a$ també $f(x) \to f(a)$ (Teorema 3.1):

$$\lim_{x\to a} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'(f(a))f'(a)\ .$$

□

3.2.2 Derivada de la funció inversa

Teorema 3.3. *Sigui f definida en $[a, b]$, injectiva, contínua i derivable a un punt $x_0 \in (a, b)$, amb $f'(x_0) \neq 0$. Aleshores la funció inversa f^{-1} és derivable a $y_0 = f(x_0)$ i*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \ .$$

Aquesta igualtat es pot veure com a conseqüència de la igualtat $f^{-1}(f(x)) = x$ i del la regla de la cadena. Observem també que la condició $f'(x_0) \neq 0$ és realment necessària. Hi ha funcions, com per exemple $f(x) = x^3$ a l'entorn del punt $x_0 = 0$, que són derivables i injectives, però per a les quals la inversa no és derivable (perque $f'(0) = 0$).

Exemples.

(a) Sigui $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. La funció inversa és $x = f^{-1}(y) = y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$, i per tant

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(y^{1/n})} = \frac{1}{n} y^{1/n-1} \ .$$

(b) Sigui $f(x) = e^x$, que és sempre no nul·la i té inversa $f^{-1}(y) = \log y$. Aleshores

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(\log y)} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y} \ .$$

(c) La funció $y = \sin x$ és bijectiva de $(-\pi/2, \pi/2)$ a $(-1, 1)$. La funció inversa s'anomena *arcsinus* de y, s'escriu $x = \arcsin y$, i té per derivada:

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \ .$$

3.2.3 Derivació logarítmica

A vegades és més fàcil derivar el logaritme d'una funció que no pas la funció mateixa. Suposem que volem derivar $y = f(x)$. Prenem logaritmes, $\log y = \log f(x)$, i derivem

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = (\log f(x))' \ .$$

Això dóna

$$y'(x) = y(x)(\log f(x))' \ ,$$

de manera que tenim una expressió de la derivada de la funció en termes de la derivada del seu logaritme.

Exemple. Sigui $f(x) = x^x$. Llavors $\log f(x) = x \log x$, i derivant

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log x + x\frac{1}{x} = 1 + \log x \ .$$

Per tant

$$f'(x) = f(x)(1 + \log x) = x^x(1 + \log x) \ .$$

Observació. El fet que f sigui derivable a un punt a no equival a dir que existeixi $\lim_{x \to a} f'(x)$. Considerem per exemple

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La funció és derivable al punt $a = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \ .$$

En canvi $\lim_{x \to 0} f'(x)$ no existeix, ja que per a $x \neq 0$ tenim $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ i $\lim_{x \to 0} \cos(1/x)$ no existeix.

3.3 Indeterminacions. La regla de l'Hôpital

La derivació és molt útil per resoldre indeterminacions en les que hi intervenen funcions derivables, que són els casos més habituals. La regla de l'Hôpital diu essencialment que el valor d'un límit indeterminat del quocient de dues funcions derivables és el mateix que el del quocient de les seves derivades.

Regla de l'Hôpital. *Siguin f, g funcions derivables a (a, b), on $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ i suposem que $g'(x) \neq 0$ per a tot $x \in (a, b)$. Suposem que el límit*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

és indeterminat (del tipus $0/0$ o ∞/∞).

Si existeix

$$l = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ ,$$

on l és real o $\pm\infty$, aleshores també

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \ .$$

El resultat anàleg fent límit quan $x \to b^-$ també val.

Exemples.

(a) Sigui $l = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x}$. Aquest és un límit indeterminat (del tipus ∞/∞) del quocient de dues funcions derivables. Per la regla de l'Hôpital, podem mirar el quocient de les derivades:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \ .$$

Per tant $l = 0$.

(b) Sigui el límit indeterminat del tipus $0/0$:

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \,.$$

Mirant el quocient de les derivades tenim

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\cos(ax)}{b\cos(bx)} = \frac{a\cdot 1}{b\cdot 1} = \frac{a}{b} \,.$$

Observem que altres indeterminacions que a priori no estan incloses en la regla de l'Hôpital també s'hi poden reduir.

(A) $\underline{(+\infty)-(+\infty)}$. La reduïm escrivint

$$f(x)-g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \,.$$

Així, per exemple, tenim

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x} \text{``}=\text{''} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = 0 \,.$$

(B) $\underline{0\cdot\infty}$ es redueix escrivint

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \,.$$

Així tenim

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^{-1/2}} \text{``}=\text{''} \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = -2\lim_{x\to 0} x^{1/2} = 0 \,.$$

(C) $\underline{1^{\pm\infty}, 0^0, (\pm\infty)^0}$ es redueixen escrivint

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$$

i calculant el límit de $g(x)\log f(x)$.

Així per exemple, si f es una funció amb $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ tenim aleshores

$$\lim_{x\to a}\Big(1+\frac{1}{f(x)}\Big)^{f(x)} = e \,,$$

ja que

$$\lim_{x\to a} f(x)\log\Big(1+\frac{1}{f(x)}\Big) = \lim_{x\to a} \frac{\log\big(1+\frac{1}{f(x)}\big)}{1/f(x)}$$

$$\text{''}=\text{''} \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{1+1/f(x)}\cdot\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}}{-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}} = \lim_{x\to a} \frac{1}{1+1/f(x)} = 1 \,.$$

3.4 Exercicis

1. Siguin les funcions $f_\lambda(x) = \frac{x+\lambda}{x^2+1}$, per a $\lambda \in \mathbb{R}$. Comproveu que les rectes tangents a les gràfiques de f_λ al punt 0 són totes paral·les.

2. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable a tot $\mathbb{R}$ i siguin $F(x) = f(e^x)$, $G(x) = e^{f(x)}$. Trobeu expressions per a F' i G'.

3. Calculeu els límits

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos(2x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$.

Capítol 4

Creixement i convexitat

Estudiem en aquest capítol la relació entre derivades successives d'una funció i el seu creixement i convexitat.

4.1 Creixement i derivada

Definició. *Una funció f és estríctament creixent a un interval I si per a tota parella $x_1, x_2 \in I$ amb $x_1 < x_2$ tenim $f(x_1) < f(x_2)$.*

La funció f és estríctament creixent a un punt $a \in I$ si existeix un entorn $I(a, \varepsilon) \subset I$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \qquad \forall x \in I(a, \varepsilon) \; .$$

Anàlogament es defineixen les funcions estríctament decreixents.

Definició. *Una funció f té un màxim relatiu al punt a si existeix un entorn $I(a, \varepsilon)$ tal que*

$$f(x) \leq f(a) \qquad \forall x \in I(a, \varepsilon) \; .$$

Anàlogament es defineix un mínim relatiu. Diem extrem relatiu a un màxim o mínim relatiu.

La relació entre la derivada de la funció i el creixement i l'existència d'extrems relatius ve donada pel resultat següent.

Teorema 4.1. *Sigui f funció derivable definida a un interval I i sigui $a \in I$. Llavors*
(a) Si $f'(a) > 0$ la funció és estríctament creixent al punt a.
(b) Si $f'(a) < 0$ la funció és estríctament decreixent al punt a.
(c) Si f té un extrem relatiu al punt a aleshores $f'(a) = 0$.

Demostració. (a) Essent $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ existeix un entorn $I(a, \varepsilon)$ tal que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ si $x \in I(a, \varepsilon)$.
(b) es prova de manera semblant, i (c) és una conseqüència de (a) i (b). □

Observació. 1. Els recíprocs de l'enunciat anterior no són certs en general. Considerem per exemple la funció $f(x) = x^3$ i el punt $a = 0$. La funció és estríctament creixent al punt a (i per tant a no és un extrem relatiu), però $f'(a) = 0$.

2. No és el mateix ésser creixent a un punt a que ésser-ho a un entorn $I(a, \varepsilon)$. Al primer cas tenim, per x, y a un entorn de a,

$$f(x) < f(a) < f(y) \qquad x < a < y,$$

mentre que al segon tenim, per x, y a un entorn de a,

$$f(x) \leq f(y) \qquad x < y\ .$$

Un exemple de funció creixent a 0 però no creixent a cap interval $I(0, \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ és

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0\ . \end{cases}$$

Es comprova que $f'(0) = 1$, de manera que f és creixent a 0. En canvi la derivada $f'(x) = 1 + 4x\sin(1/x) - 2\cos(1/x^2)$ pren valors positius i negatius a tot entorn $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

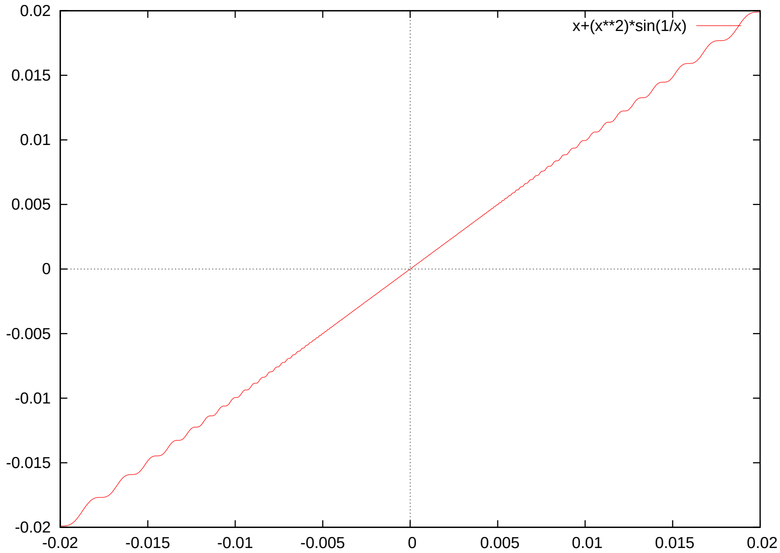


Figura 4.1:

4.2 Teorema de Rolle i aplicacions

Teorema de Rolle. *Sigui* $f \in \mathcal{C}[a, b]$ *derivable a tot* (a, b)*, i tal que* $f(a) = f(b)$*. Existeix* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

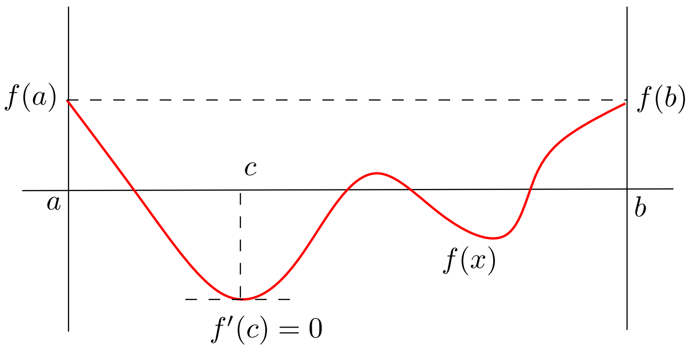


Figura 4.2: Teorema de Rolle.

Demostració. Pel Teorema de Weierstrass, la funció té un màxim M i un mínim m absoluts. Si la funció no és constant tenim $f(m) < f(M)$, de manera que o bé m o bé M no és un dels extrems de l'interval $[a, b]$. Per tant existeix $c \in (a, b)$ que és extrem relatiu (i absolut) de f, i per tant $f'(c) = 0$. □

Una conseqüència immediata del Teorema de Rolle és el següent teorema del valor mitjà.

Teorema del valor mitjà de Lagrange. *Sigui* $f \in \mathcal{C}[a, b]$ *i derivable a tot* (a, b). *Existeix* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

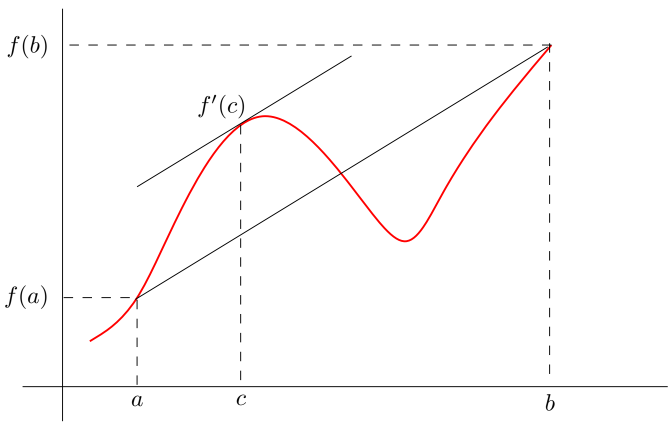


Figura 4.3: Teorema del valor mitjà de Lagrange

Demostració. Apliquem el Teorema de Rolle a la funció $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida per

$$F(x) = (f(b) - f(a))x - (b - a)f(x) \ .$$

□

Una conseqüència d'aquests resultats és la caracterització del creixement d'una funció derivable mitjançant el signe de la seva primera derivada.

Teorema 4.2. *Sigui f derivable a un interval (a, b). Llavors*
(a) f és creixent si i només si $f'(x) \geq 0$ per a tot $x \in (a, b)$.
(b) f és decreixent si i només si $f'(x) \leq 0$ per a tot $x \in (a, b)$.

Demostració. (a) Si f és creixent tenim

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \qquad x, x_0 \in (a, b), x \neq x_0 \ ,$$

i per tant en passar al límit quan $x \to x_0$ queda $f'(x_0) \geq 0$.

Recíprocament, suposem que $f'(x) \geq 0$ per a tot $x \in (a, b)$ i demostrem que si $x_1, x_2 \in (a, b)$ són tals que $x_1 < x_2$ aleshores $f(x_1) \leq f(x_2)$. Aplicant el Teorema del valor mitjà de Lagrange a l'interval (x_1, x_2) deduïm que existeix $c \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ .$$

Com que per hipòtesi $f'(c) \geq 0$ tenim que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, és a dir, $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(b) Anàlogament. □

Una altra conseqüència és el fet ben conegut que les úniques funcions derivables amb derivada idènticament nul·la són les constants.

Teorema 4.3. *Sigui f derivable a un interval (a, b) tal que $f'(x) = 0$ per a tot $x \in (a, b)$. Aleshores la funció f és constant.*

Observem que aquest resultat diu, en particular, que si dues funcions tenen la mateixa derivada aleshores difereixen d'una constant: si $f'(x) = g'(x)$ per a tot $x \in (a, b)$, pel teorema anterior, la funció $F(x) = f(x) - g(x)$ és constant.

Demostració. Fixem qualsevol $x_0 \in (a, b)$ i demostrem que $f(x) = f(x_0)$ per a tot $x \in (a, b)$. Pel Teorema del valor mitjà de Lagrange i la hipòtesi, existeix c entre x i x_0 tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \ ,$$

i per tant $f(x) = f(x_0)$. □

Observació. 1. Els teoremes de Rolle o del valor mitjà de Lagrange es poden utilitzar per obtenir desigualtats entre funcions. Demostrem que

$$e^x \geq 1 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

Si $x > 0$ apliquem el Teorema del valor mitjà de Lagrange a la funció $f(x) = e^x$ i l'interval $(0, x)$: existeix $c \in (0, x)$ tal que

$$e^x - e^0 = f'(c)(x - 0) = e^c(x - 0) \ .$$

Com que $e^c \geq e^0 = 1$ deduïm que $e^x - 1 \geq x$, tal i com volíem.

El cas $x < 0$ es fa anàlogament.

2. També podem utilitzar els resultats vistos aquí per determinar l'existència de solucions d'equacions. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dues vegades derivable, amb $f''(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, i tal que per a $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$a < b < c$ tenim $f(a) = 0$, $f(b) = 3$ i $f(c) = 1$. Demostrem que $f(x) = 2$ té exactament dues solucions.

Volem veure que hi ha exactament dos punts on s'anul·la la funció $g(x) = f(x) - 2$. Per hipòtesi $g(a) = -2 < 0$, $g(b) = 1 > 0$ i $g(c) = -1 < 0$, de manera que el Teorema de Bolzano assegura l'existència de $x_1 \in (a, b)$ i $x_2 \in (b, c)$ tals que $g(x_1) = g(x_2) = 0$.

Ara veurem, per reducció a l'absurd, que no pot haver-hi més punts on g val 0. En primer lloc observem que, pel Teorema de Rolle, existeix $c \in (x_1, x_2)$ tal que $g'(c) = f'(c) = 0$. Suposem que existís un altre punt x_3 amb $g(x_3) = 0$, i suposem que $x_3 > x_2$ (les altres situacions en resolen de manera similar). Llavors, pel Teorema de Rolle, existeix $d \in (x_2, x_3)$ amb $g'(d) = f'(d) = 0$. Aplicant de nou el Teorema de Rolle a la funció f' i l'interval $[c, d]$ obtenim un punt $\alpha \in (c, d)$ amb $f''(\alpha) = 0$, la qual cosa contradiu la hipòtesi.

4.3 Convexitat, concavitat i punts d'inflexió

Així com f' informa del creixement de la funció f, les derivades successives també donen informació del seu comportament.

Definició. *Sigui f derivable en un entorn d'un punt a. Diem que f és convexa en a si la gràfica de f a prop d'a queda per sobre de la recta tangent a f al punt a; més precisament, si existeix un entorn $I(a, \varepsilon)$ on*

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \qquad x \in I(a, \varepsilon), x \neq a \; .$$

Anàlogament, diem que f és còncava en a si existeix un entorn $I(a, \varepsilon)$ on

$$f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) \qquad x \in I(a, \varepsilon), x \neq a \; .$$

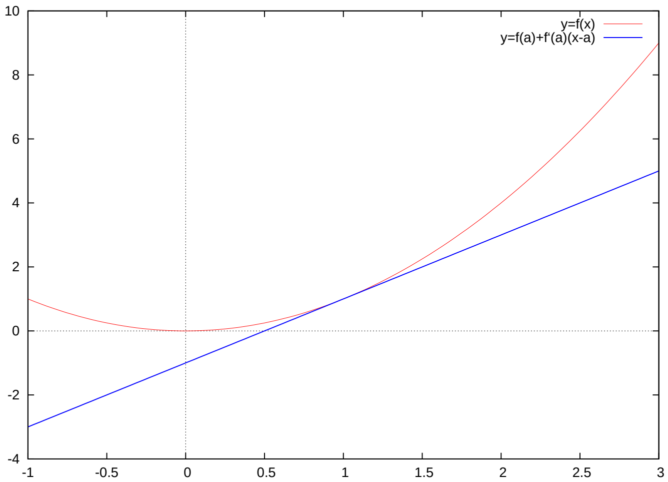


Figura 4.4: Funció convexa al punt $a = 1$.

Diem que f té un punt d'inflexió a a si la gràfica de f travessa la recta tangent a f a a, és a dir, *si existeix un entorn $I(a,\varepsilon)$ on*

$$\begin{array}{ll} f(x) > f(a)+f'(a)(x-a) & x\in I(a,\varepsilon), x>a\ , \\ f(x) < f(a)+f'(a)(x-a) & x\in I(a,\varepsilon), x<a \end{array}$$

o bé

$$\begin{array}{ll} f(x) < f(a)+f'(a)(x-a) & x\in I(a,\varepsilon), x>a\ , \\ f(x) > f(a)+f'(a)(x-a) & x\in I(a,\varepsilon), x<a\ . \end{array}$$

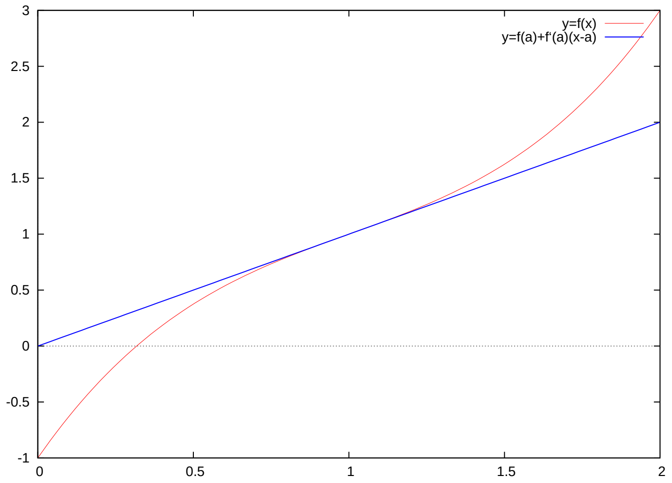


Figura 4.5: Punt d'inflexió al punt $a = 1$.

Observem que no sempre tenim alguna d'aquestes situacions. Per exemple, la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

és derivable al punt $a = 0$ i no té cap d'aquestes propietats.

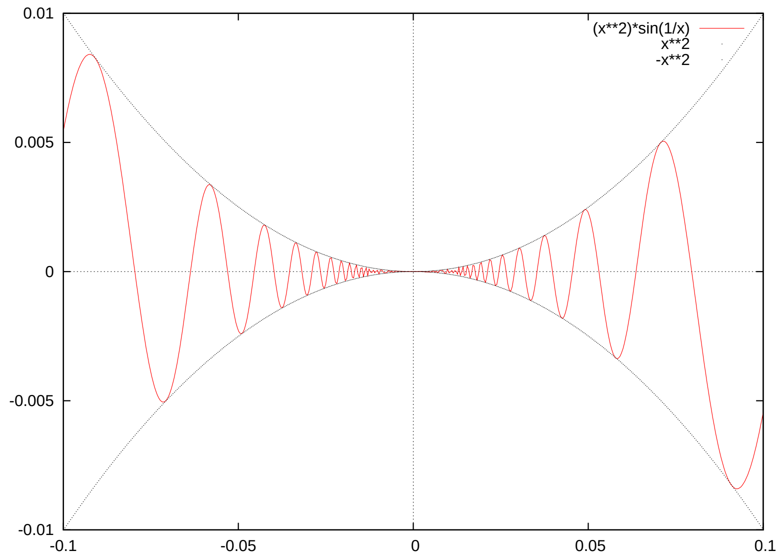


Figura 4.6:

Quan una funció és derivable dues vegades tenim una relació entre la segona derivada i la convexitat: si la segona derivada és positiva la primera derivada és creixent, i per tant la funció és convexa.

Teorema 4.4. *Sigui f una funció derivable a un interval I i sigui $a \in I$ pel que existeix $f''(a)$. Aleshores*

(a) Si $f''(a) > 0$ la funció és convexa al punt a,
(b) Si $f''(a) < 0$ la funció és còncava al punt a,
(c) Si a és punt d'inflexió aleshores $f''(a) = 0$.

Pot passar que la primera i segona derivades siguin totes nul·les, de manera que els teoremes que hem vist fins ara no aclareixin quin creixement i quina convexitat tenim. Si la funció es pot anar derivant podem resoldre aquestes qüestions mirant les derivades successives.

Teorema 4.5. *Sigui f derivable n vegades a un interval I i sigui $a \in I$ amb*

$$f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \qquad f^{(n)}(a) \neq 0\,.$$

Aleshores,

(a) Si n és senar a és un punt d'inflexió.
(b) Si n és parell:

(i) si $f^{(n)}(a) > 0$ llavors f és convexa en a,

(ii) si $f^{(n)}(a) < 0$ llavors f és còncava en a.

Si a més $f'(a) = 0$, llavors a és un mínim relatiu al cas (i), i un màxim relatiu al cas (ii).

Corol·lari 4.6. *Sigui f dues vegades derivable a un interval I. Llavors f és convexa si i només si $f''(x) \geq 0$ per a tot $x \in I$.*

Observació. Hi ha una definició general de convexitat que no requereix la derivabilitat de la funció: f és convexa a un interval I si per $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ i $t \in [0,1]$ es té

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \ .$$

Es demostra que aquesta definició implica que la funció és contínua.

4.4 Exercicis

1. Sigui f derivable a (a,b) i siguin $x_1, x_2 \in (a,b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tals que $f'(x_1) < \lambda < f'(x_2)$. Proveu que existeix $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \lambda$ (Indicació: mostreu que la funció $g(x) = f(x) - \lambda x$ té un mínim relatiu.

2. Demostreu que $\log(1/x) \ge 1 - x$ per a $x \in (0,1]$.

3. Demostreu que l'equació $e^x = x + 2$ té exactament dues solucions.

Capítol 5

Representació gràfica de funcions

Utilitzem els elements que hem vist fins ara per donar la representació gràfica aproximada de funcions.

5.1 Domini, punts de tall, simetries i asímptotes

En primer lloc determinem característiques de la gràfica que no depenen de les derivades de la funció. Donada una funció f determinarem:

1. *Domini de* f.
2. *Punts de tall amb els eixos*.

(a) Si $0 \in D(f)$ el punt $(0, f(0))$ és un punt de tall de la gràfica de f i l'eix vertical.

(b) Els punts $x \in D(f)$ tals que $f(x) = 0$ donen lloc als punts de tall amb l'eix horitzontal.

3. *Simetries i/o periodicitat*. Una funció es diu *parell* si és simètrica respecte l'eix vertical, és a dir, si $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in D(f)$, i es diu *senar* si és simètrica respecte l'origen, és a dir, si $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in D(f)$. Per a aquest tipus de funcions la gràfica de la part amb $x \geq 0$ determina la part $x < 0$, i viceversa.

Una funció és diu *periòdica de període* p si $f(x+p) = f(x)$ $\forall x \in D(f)$. Per a aquest tipus de funcions la gràfica queda determinada per $D(f) \cap \bar{I}$, on I és qualsevol interval de longitud p.

4. *Asímptotes*. Són rectes a les quals s'acosta la funció quan x tendeix a un punt de la vora del domini o a l'infinit.

(a) *Verticals*. Si $a \notin D(f)$, però es pot aproximar per punts de $D(f)$, podem tenir

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in D(f)}} f(x) = \pm\infty \ .$$

Aleshores la recta $x = a$ és una asímptota vertical.

Tot sovint només un dels límits laterals és $\pm\infty$. Aleshores la recta $x = a$ és una asímptota vertical pel costat corresponent.

(b) *Horitzontals*. Si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}, \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

la recta $y = l$ és una asímptota horitzontal. A vegades només un dels dos límits anteriors sigui un valor real; aleshores tenim l'asímptota horitzontal només al costat corresponent.

(c) *Oblíqües*. Si $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$ la recta $y = mx + n$ és una asímptota oblíqua. Els valors de m i n els podem determinar a partir dels límits:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) .$$

Com als casos anteriors, pot passar que hi hagi l'asímptota oblíqua a tan sols un costat.

Observem que les asímptotes horitzontals són un cas particular de les oblíqües, amb $m = 0$.

5.2 Zones de creixement i convexitat

Com hem vist darrerament, podem determinar el creixement i la convexitat de les funcions derivables mirant el signe de la primera i segona derivades.

5. *Creixement*. Quan $f' > 0$ la funció és estríctament creixent, i quan $f' < 0$ és estríctament decreixent (Teorema 4.1). Els punts $a \in D(f)$ amb $f'(a) = 0$ és possible que siguin extrems relatius de f, però no podem assegurar-ho fins a mirar les derivades successives (o el creixement de f a tot un entorn d'a).

6. *Convexitat*. Quan $f'' > 0$ la funció és convexa, i quan $f'' < 0$ és còncava (Teorema 4.4). Els punts amb $f''(a) = 0$ són punts d'inflexió si $f'(a) \neq 0$. Si $f'(a)$ també s'anul·la apliquem el Teorema 4.5 per determinar si a és màxim, mínim o punt d'inflexió.

Exemple. Representem gràficament la funció

$$f(x) = x - \frac{1}{x} .$$

1. El domini de f és $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Com que $0 \notin D(f)$ no hi ha tall amb l'eix vertical. Per veure si hi ha talls amb l'eix horitzontal hem de mirar si existeix algun $x \neq 0$ tal que

$$f(x) = x - \frac{1}{x} = 0 .$$

Això dóna lloc a l'equació $x^2 - 1 = 0$, que té solucions $x = 1$ i $x = -1$. Per tant els punts de tall de la gràfica amb l'eix vertical són $(1, 0)$ i $(-1, 0)$.

3. Tenim $f(-x) = -x + 1/x = -f(x)$, i per tant f és senar (simètrica respecte l'origen). A partir d'ara només caldrà estudiar el comportament per a $x > 0$.

4. (a) Observem que

$$\lim_{x\to 0^+} x - \frac{1}{x} = -\infty,$$

i per tant la recta $x = 0$ és una asímptota vertical (tant a l'esquerra com a la dreta del punt 0, per la simetria).

(b) Com que $\lim_{x\to+\infty} x - 1/x = +\infty$ no hi ha asímptotes horitzontals.

(c) Tenim

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1/x}{x} = 1, \qquad n = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} x - \frac{1}{x} - x = 0\,,$$

i per tant la recta $y = x$ és una asímptota oblíqua.

4. La funció f és derivable a tot el seu domini, i el valor de la seva primera derivada és

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}\,.$$

Així doncs $f'(x) > 1 > 0$ a tot $D(f)$, i per tant f és estríctament creixent a tot el seu domini.

5. La segona derivada de f és

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}\,.$$

Per tant f és còncava si $x > 0$, ja que $x^3 > 0$ i $f''(x) < 0$. Com que no hi ha punts amb $f''(x) = 0$ no hi ha punts d'inflexió.

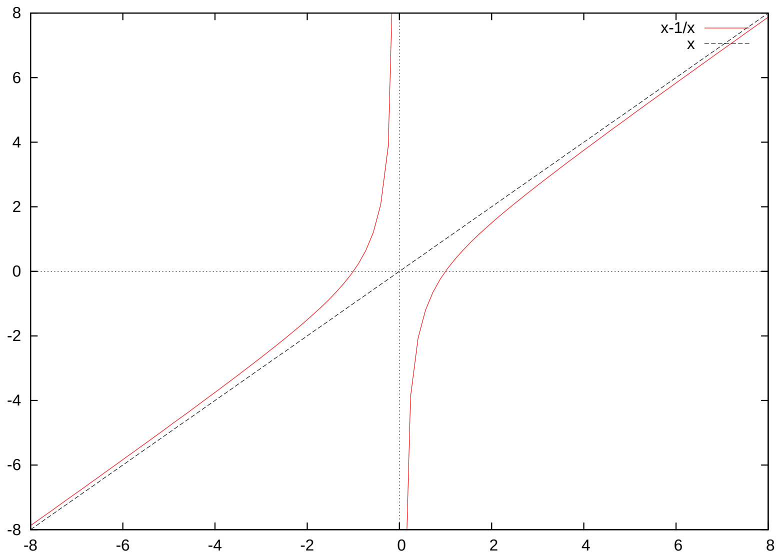


Figura 5.1:

5.3 Exercicis

Representeu gràficament les funcions

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}\,, \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{x}{x^2+x-2}\,.$$

Capítol 6

Fórmula de Taylor i aplicacions

En l'estudi local d'una funció f prou regular és útil tot sovint aproximar-la per un polinomi. La fórmula de Taylor diu quin és el polinomi de grau n que “millor"aproxima f a l'entorn d'un punt donat a, i dóna un control de l'error d'aquesta aproximació.

Definició. *Un polinomi $p(x)$ té ordre de contacte superior a n amb la funció $f(x)$ al punt a si*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n}=0\ .$$

Escrivim $f(x)=p(x)+o((x-a)^n)$.

Exemple. La funció $f(x)=\frac{1}{1-x}$ i el polinomi $p(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n$ tenen al punt 0 un ordre de contacte superior a n. Per la fórmula de la suma d'una progressió geomètrica tenim

$$p(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\ ,$$

i per tant

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{n+1}}{(1-x)x^n}=0\ .$$

6.1 Polinomi de Taylor i terme de resta.

Teorema 6.1. *Sigui f funció derivable $n-1$ cops a un interval I, i sigui $a\in I$ on $f^{(n-1)}$ hi és derivable. Aleshores el polinomi*

$$\begin{aligned}p_n(x)&=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j\\&=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\end{aligned}$$

té ordre de contacte superior a n amb f al punt a.

Demostració. Apliquem successivament la regla de l'Hôpital per veure que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = 0 \ .$$

Després de derivar $n-1$ cops arribem a

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a)]}{n!(x-a)} \ .$$

Aquest límit és 0, per definició de $f^{(n-1)}$ derivable al punt a. ☐

A $p_n(x)$ se l'anomena *polinomi de Taylor de grau n de f al punt a*, i depèn de f, del grau n i del punt a. Observeu que el polinomi de Taylor de grau 1 de f al punt a és precisament la recta tangent a la gràfica de f al punt $(a, f(a))$.

Observació. 1. El polinomi de Taylor $p_n(x)$ és l'únic polinomi de grau menor o igual a n que té ordre de contacte superior a n amb f al punt a. Per veure això suposem que $q_n(x)$ és un altre polinomi de grau menor o igual a n amb aquesta propietat. Aleshores

$$\lim_{x\to a} \frac{p_n(x) - q_n(x)}{|x-a|^n} = \lim_{x\to a} \frac{p_n(x) - f(x)}{|x-a|^n} + \frac{f(x) - q_n(x)}{|x-a|^n} = 0 \ .$$

El polinomi $P(x) = p_n(x) - q_n(x)$ té grau com a molt n, i per tant es pot expressar de la forma

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots + A_n(x-a)^n, \qquad A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R} \ .$$

Així doncs

$$\lim_{x\to a} \frac{A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots + A_n(x-a)^n}{|x-a|^n} = 0 \ .$$

L'única tria de coeficients $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ que fa que aquest límit s'anul·li és $A_0 = A_1 = \cdots = A_n = 0$, és a dir, la que fa $P(x) = 0$, i per tant $p_n(x) = q_n(x)$.

2. El valor dels coeficients del polinomi de grau n que té ordre de contacte superior a n amb f al punt a es pot obtenir també de la manera següent. Sigui

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n, \qquad c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

polinomi genèric de grau n. Com que ha de tenir ordre de contacte superior a 0 tenim

$$0 = \lim_{x\to a} f(x) - p(x) = f(a) - c_0 \ ,$$

i per tant $c_0 = f(a)$.

Com que l'ordre de contacte també és superior a 1 tenim, per la regla de l'Hôpital,

$$0 = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - p(x)}{x-a} \text{``} = \text{''} \lim_{x\to a^+} f'(x) - p'(x) = f'(a) - c_1 \ .$$

(El mateix càlcul es pot fer amb l'altre límit lateral). Així $c_1 = f'(a)$.

Aplicant successivament el mateix argument per a tots els ordres de contacte $k \leq n$, amb aplicacions successives de la regla de l'Hôpital, obtenim $c_k = f^{(k)}(a)/k!$.

Exemples: (a) Siguin $f(x) = e^x$ i $a = 0$. Tenim $f^{(k)}(x) = e^x$ per a tot $k \in \mathbb{N}$, i per tant $f^{(k)}(0) = 1$. Amb això, el polinomi de Taylor de grau n de e^x al punt 0 és

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \, . \end{aligned}$$

Observem que si canviem el punt $a = 0$ per $a = 1$ llavors

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\ &= e + e(x-1) + \cdots + \frac{e}{n!}(x-1)^n \, . \end{aligned}$$

(b) Sigui $f(x) = \sin x$ al punt $a = 0$. Derivant successivament tenim

$$\begin{array}{ll} f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ f^{(iv)}(x) = \sin x & f^{(iv)}(0) = 0 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \end{array}$$

Així doncs les derivades d'ordre parell al punt $a = 0$ s'anul·len ($f^{(2k)}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$), mentre que les d'ordre imparell van saltant de 1 a -1 ($f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$). Per tant

$$\begin{aligned} p_{2k+1}(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}(x-0)^{(2k+1)} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \, . \end{aligned}$$

Definició. *Sigui f derivable n vegades a un interval I i sigui $a \in I$. Diem resta de Taylor d'ordre n de la funció f al punt a a*

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j \, .$$

El terme de resta es pot veure com l'error en aproximar f pel polinomi de Taylor de grau n a l'entorn de a.

Fórmula de Taylor. *Sigui f derivable $n+1$ cops a un interval I. Per a $a, x \in I$ es té*

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + R_n(x) \, ,$$

i existeix c entre x i a tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \, .$$

Aquesta darrera expressió de $R_n(x)$ s'anomena *resta de Lagrange*. Observeu que, tal i com cal esperar, aquest terme d'error disminueix a mesura que x s'acosta a a i a mesura que n creix.

Hi ha altres possibles expressions del terme de resta. Per exemple, la *resta de Cauchy* dóna una expressió de la forma

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x-a)(x-d)^n \,,$$

on d és un punt entre a i x. Podeu trobar una expressió integral del terma de resta als exercicis.

Exemples. (a) Prenem novament $f(x) = e^x$ amb $a = 0$. La resta de Lagrange té la forma, per cert c entre 0 i x:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \,.$$

Això dóna lloc a la fórmula de Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \,. \tag{6.1}$$

(b) Prenem ara $f(x) = \sin x$ amb $a = 0$ i mirem la fórmula de Taylor per a grau $2k$ parell. La resta de Lagrange té aleshores la forma

$$R_{2k}(x) = \frac{f^{(2k+1)}(c)}{(2k+1)!}(x-0)^{2k+1} = \frac{(-1)^k \cos c}{(2k+1)!}x^{2k+1},$$

la qual cosa dóna lloc a la fórmula

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{(-1)^k \cos c}{(2k+1)!}x^{2k+1} \,.$$

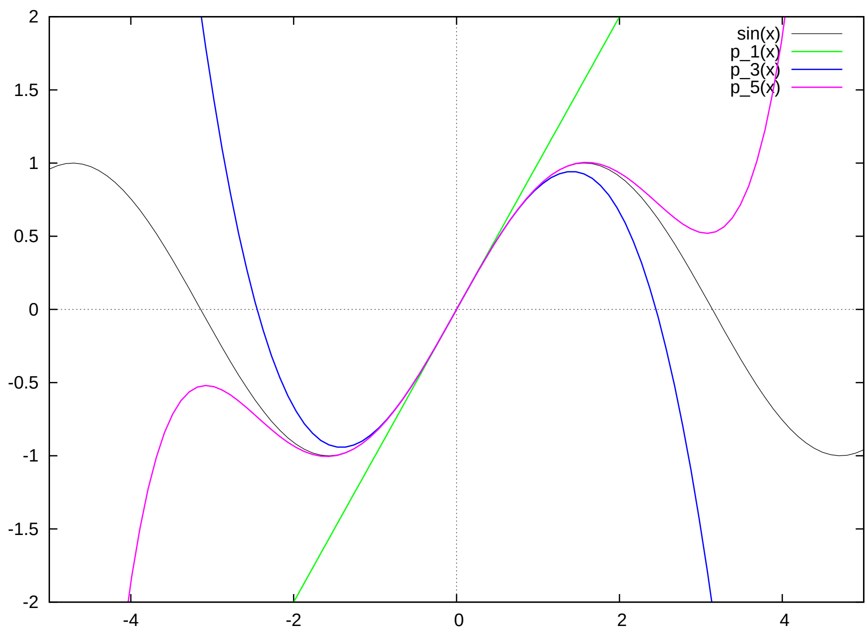


Figura 6.1: Funció $\sin x$ i primers polinomis de Taylor al punt $a = 0$.

6.2 Aplicacions

La fórmula de Taylor dóna la relació entre la funció original i el polinomi de Taylor corresponent, la qual cosa és molt útil en múltiples aplicacions. Tot seguit en veiem algunes.

6.2.1 Càlculs aproximats

Aproximem un valor $f(x)$ que no sabem calcular per un valor $p_n(x)$ triat de manera que l'error comès en l'aproximació (el terme de resta) sigui menor que la precisió que ens demanen.

Exemple. Calculem e amb un error menor que 10^{-4}. Considerem la funció exponencial $f(x) = e^x$ i la fórmula (6.1). Si aproximem $e = f(1)$ per $p_n(1)$ cometem un error controlat per $R_n(1)$: per a cert c entre 0 i 1 tenim

$$|f(1) - p_n(1)| = \left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \right| = \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} \,.$$

Així doncs, si triem n de manera que $3/(n+1)! < 10^{-4}$ podrem assegurar que $p_n(1) = 1 + 1 + 1/2! + \cdots + 1/n!$ aproxima $f(1) = e$ amb un error menor que 10^{-4}. Cal doncs $(n+1)! > 30000$, la qual cosa s'aconsegueix amb $n \geq 7$. Així

$$p_7(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{7!} = 2,718254$$

dóna l'aproximació demanada.

6.2.2 Desigualtats

Si podem determinar el signe del terme de resta $R_n(x)$ tenim una desigualtat entre la funció $f(x)$ i el polinomi de Taylor $p_n(x)$ ($f(x) \leq p_n(x)$ quan $R_n(x) \leq 0$ i $f(x) \geq p_n(x)$ quan $R_n(x) \geq 0$).

Exemple. Demostrem que $\cos x \geq 1 - x^2/2$ per a tot $x \in (-\pi, \pi)$. Desenvolupant la funció $f(x) = \cos x$ a l'entorn de $a = 0$ obtenim

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{\sin c}{3!} x^3 \,,$$

on c és un punt entre 0 i x. Aleshores, $\sin c$ té el mateix signe que $\sin x$, que és el mateix que el de x, i per tant també que el de x^3. Tot plegat tenim $(\sin c)x^3 \geq 0$ i, a partir del desenvolupament anterior, la desigualtat que volíem provar.

6.2.3 Càlcul de límits

Algunes de les indeterminacions que hem tractat fins ara es poden resoldre de manera senzilla utilitzant el fet que el polinomi de Taylor d'ordre n de f al punt a té ordre de contacte superior a n amb f. Escrivim $f(x) = p_n(x) + o(|x-a|^n)$, on $o(|x-a|^n)$ indica un terme tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{o(|x-a|^n)}{|x-a|^n} = 0 \,.$$

Exemples. (a) Calculem

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

utilitzant el desenvolupament

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\ .$$

Tenim

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-(x-x^3/3!+o(x^3))}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3!}+\frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3!}\ .$$

(b) Sigui

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}\ .$$

Utilitzem els desenvolupaments

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$$
$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$$

i deduïm

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2/2!+o(x^2))}{1+x+x^2/2!+o(x^2)-1-x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2/2!+o(x^2)}{x^2/2!+o(x^2)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1/2!+o(x^2)/x^2}{1/2!+o(x^2)/x^2} = 1\ .$$

La unicitat del polinomi de Taylor permet obtenir el desenvolupament de funcions que són composició de funcions conegudes. Per exemple, suposem que volem calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^4}{\sin x^2}\ .$$

Considerem els desenvolupaments

$$e^z = 1+z+o(z)$$
$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+o(z^3)\ .$$

Substituint al primer $z = x^3$ tenim

$$e^{x^3} = 1+x^3+o(x^3)\ ,$$

i fent $z = x^2$ al segon tenim

$$\sin x^2 = x^2-\frac{x^6}{3!}+o(x^6)\ .$$

Això dóna

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^4}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^3+o(x^3)-1-x^4}{x^2-x^6/3!+o(x^6)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{x^2+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x^3)/x^2}{1+o(x^3)/x^2} = 0\ .$$

6.3 Exercicis

1. Demostreu que el polinomi de Taylor de grau $2k$ de la funció $f(x) = \cos x$ al punt $a = 0$ és

$$p_{2k}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \ .$$

2. Demostreu que la resta de Taylor també es pot expressar de la forma

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \ dt \ .$$

   (Indicació: integreu per parts n vegades).

3. Escrivim la fórmula de Taylor d'ordre n de la funció $f(x) = \log(1+x)$ al punt $a = 0$.

4. Calculeu $\sqrt{1,2}$ amb error menor que $0,001$ (Indicació: considereu el desenvolupament de Taylor de $f(x) = \sqrt{1+x}$ a l'entorn del punt $a = 1$.)

5. Demostreu les desigualtats $x \log(1/x) \leq 1 - x \leq \log(1/x)$ per a $x \in (0,1)$.

6. Calculeu el límit

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\tan x^2)(\sin x^3) \log(1+x)}{x^2(1 - \cos x^2)} \ .$$