Àlgebra Lineal, Curs 2010-11, Grup tarda
Segon examen parcial. 30 de maig de 2011

1.(4/10) Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Determina para qué valores de $a \in \mathbb{C}$ la matriz A es diagonalizable. Halla la forma de Jordan de A en función de $a \in \mathbb{C}$.
(2) Para $a = 0$, halla una base de vectores propios de A.
(3) Para $a = 1$, halla una base de Jordan de $\mathbb{C}^4$ respecto de A.
(4) Para $a = 0$, estudia para qué valores de $p \in \mathbb{N}$ se cumple $A^p = A$. Para $a = 1$, halla el rango de A^p, para todo $p \geq 1$, y estudia si existe algún $p > 1$ tal que $A^p = A$.

Solución: (1) En primer lugar calculamos el polinomio característico:

$$\chi_A(t) = (-t)(a-t)(t^2-1) = t(t-a)(t-1)(t+1).$$

Si $a \neq 0, 1, -1$, entonces A tiene 4 valores propios diferentes y por tanto es diagonalizable, y la forma diagonal es $D(0, 1, -1, a)$.

Si $a = 0$, la multiplicidad del valor propio $\lambda = 0$ es 2 , $\operatorname{rg} A = 2$ y $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda) = 2$, por tanto, por el criterio de las multiplicidades, A es diagonalizable. La forma de Jordan es la forma diagonal $D(0, 0, 1, -1)$

Si $a = 1$, la multiplicidad del valor propio $\lambda = 1$ es 2, $\operatorname{rg}(A-1) = 3$ y $\dim \operatorname{Ker}(A-1) = 1$, por tanto A no es diagonalizable. La forma de Jordan es la $J_2(1) \oplus J_1(0) \oplus J_1(-1)$

Si $a = -1$, la multiplicidad del valor propio $\lambda = -1$ es 2, $\operatorname{rg}(A+1) = 3$ y $\dim \operatorname{Ker}(A + 1) = 1$, por tanto A no es diagonalizable. La forma de Jordan es la $J_2(-1) \oplus J_1(0) \oplus J_1(1)$

(2) Sea $a = 0$. Entonces $\dim \operatorname{Ker}(A - 0) = 2$, $\dim \operatorname{Ker}(A - 1) = 1$, $\dim \operatorname{Ker}(A + 1) = 1$. Base de $\operatorname{Ker} A =\{e_3, e_4\}$. Base de $\operatorname{Ker}(A - 1) = \{(1, 1, 0, 1)\}$. Base de $\operatorname{Ker}(A + 1)=$ $\{(1, -1, 0, 1)\}$. Base de vectores propios

$$\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (1, -1, 0, 1)\}$$

(3) Para $a = 1$ se construye una base de Jordan con $u_1 \in \operatorname{Ker}(A-1)^2$, $u_1 \notin \operatorname{Ker}(A-1)$, $u_2 \in (A - 1)u_1$, $0 \neq u_3 \in \operatorname{Ker} A$, $0 \neq u_4 \in \operatorname{Ker} A + 1$.

Como

$$(A-1)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A+1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

una solución es

$$u_1 = (1,0,-2,3),\ u_2 = (-1,-1,0,-2),\ u_3 = (0,0,0,1),\ u_4 = (1,-1,0,0).$$

(4) Para $a = 0$, el polinomio mínimo es $t(t-1)(t+1)$. La condición $A^p = A$ equivale a que $P(t) = t^p - t$ sea múltiplo del polinomio mínimo, es decir, $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$. Esto sucede si y solo si p es impar.

Para $a = 1$, $A^p = UJ^pU^{-1}$, donde J es la forma de Jordan de A y U es la matriz de cambio de base de la base de Jordan hallada en el apartado (3).

$$J^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} (-1)^p \end{pmatrix},$$

por tanto el rango de A^p coincide con el rango de J^p que es 3. Para todo $p > 1$ es $A^p \neq A$, pues $J^p \neq J$

2.(3/10) Sea A una matriz con coeficientes en $\mathbb{C}$, de tipo 10×10 tal que

$$A^{10}(A-1)^{10} = 0, \quad \operatorname{tr} A = 7, \quad \operatorname{rg} A^2 = 8, \quad \text{y} \quad \operatorname{rg}(A-1)^5 = 4.$$

(1) Halla el polinomio mínimo, el polinomio característico, y la forma Jordan de A. ¿Se cumple $A^2 = A$?
(2) Halla el rango de $A^2(A-1)^5$. Halla el rango de $A^p(A-1)$, para todo $p \in \mathbb{N}$.
(3) Sean $u, v, w \in \mathbb{C}^{10}$ tales que
   (a) $A^3u = 0, \quad A^2u \neq 0$,
   (b) $(A-1)^6v = 0, \quad (A-1)^5v \neq 0$,
   (c) $\{(A-1)^5v, w\}$ es una base de $\operatorname{Ker}(A-1)$.
   Halla una base de Jordan de A.

Solución. (1) $P(t) := t^{10}(t-1)^{10}$ es un polinomio anulador de A, por tanto el polinomio mínimo $\phi_A(t)$ divide a $P(t)$. Las únicas raíces de ϕ_A pueden ser 0 o 1. La traza de A y la traza de su forma de Jordan coinciden, por tanto la traza de A coincide con la suma de los valores propios. De aquí resulta que la multiplicidad algebraica del valor propio 1 es 7 y la del valor propio 0 es 3. El polinomio característico de A es $\chi_A(t) = t^3(t-1)^7$.

El hotel de Jordan del vap $\lambda = 0$ tiene 3 habitaciones, y hasta la segunda planta hay $2 = \dim \operatorname{Ker} A^2$ habitaciones, luego es $3 = 1 + 1 + 1$ por tanto es $\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline\end{array}$

El hotel de Jordan de vap $\lambda = 1$ tiene 7 habitaciones, y hasta la planta 5 hay 6 habitaciones, luedo es de la forma $7 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, por tanto es
$$\begin{array}{ll} \boxed{1} & \\ \boxed{1} & \\ \boxed{1} & \\ \boxed{1} & \\ \boxed{1} & \\ \boxed{1} & \boxed{1} \end{array}$$

La forma de Jordan es $J_3(0) \oplus J(1; 6, 1)$.

El polinomio mínimo de A es $\phi_A(t) = t^3(t-1)^6$.

Puesto que $t^2 - t = t(t-1)$ no es múltiplo de ϕ_A, $A^2 \neq A$. (2) Como t^2 y $(t-1)^5$ son primos entre sí, se tiene $\mathrm{Ker}\, A^2(A-1)^5 = \mathrm{Ker}\, A^2 \oplus \mathrm{Ker}\,(A-1)^5$, por tanto

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Ker}\, A^2(A-1)^5 &= \dim \mathrm{Ker}\, A^2 + \dim \mathrm{Ker}\,(A-1)^5 \\ &= (10 - \mathrm{rg} A^2) + (10 - \mathrm{rg}(A-1)^5) = 2 + 6 = 8 \end{aligned}$$

de donde deducimos que $\mathrm{rg} A^2(A-1)^5 = 10 - \dim \mathrm{Ker}\, A^2(A-1)^5 = 2$.

Análogamente, para $1 \leq p \leq 3$ se tiene $\dim \mathrm{Ker}\, A^p = p$, por tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{rg} A^p(A-1) &= 10 - (\dim \mathrm{Ker}\, A^p + \dim \mathrm{Ker}\,(A-1)) \\ &= 10 - (p+2) = 8 - p, \end{aligned}$$

y para $p \geq 3$, $\dim \mathrm{Ker}\, A^p = 3$ y $\mathrm{rg} A^p(A-1) = 5$

(3) Una base de Jordan es

$$\{u, Au, A^2u, v, (A-1)v, (A-1)^2v, (A-1)^3v, (A-1)^4v, (A-1)^5v, w\}$$

3.(3/10) Sea A una matriz de tipo $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$.

(1) (a) Define vector propio y valor propio de A.
   (b) Define el autoespacio asociado a un valor propio. Define la multiplicidad geométrica de un valor propio.
   (c) Define el polinomio característico de A. Define la multiplicidad algebraica de un valor propio.
   (d) Prueba que la multiplicidad geométrica es menor o igual que la multiplicidad algebraica.

(2) Estudia la independencia lineal de vectores propios de valores propios distintos. (Enunciado y demostración.)

(3) Enuncia y demuestra el primer criterio de diagonalizabilidad (por las multiplicidades).

E denota un espacio vectorial de dimensión finita y f un endomorfismo de E.

(1) (a) Un vector *no nulo* $u \in E$ tal que

$$f(u) = \lambda \cdot u$$

se llama un **vector propio** de f. El escalar λ de la ecuación anterior (que es único) se llama el **valor propio de** u respecto de f. Un escalar $\lambda \in \mathbf{K}$ se llama un **valor propio de** f si es el valor propio de algún vector no nulo.

(b) El subespacio vectorial $\operatorname{Ker}(f-\lambda)$ de E se llama el **λ-autoespacio** de f. La dimensión

$$d_\lambda = \dim \operatorname{Ker}(f-\lambda),$$

se llama la **multiplicidad geométrica** de λ como valor propio de f.

(c) El polinomio $\chi_A(t) = \det(A - tI)$ se llama el **polinomio característico** de A. Si λ es un valor propio de A, la multiplicidad m_λ de λ como raíz de $\chi_A(t)$ se llama la **multiplicidad algebraica** de λ como valor propio de A.

(d) Sean f un endomorfismo de E, λ un valor propio de f, d_λ su multiplicidad geométrica, y m_λ su multiplicidad algebraica. Entonces

$$d_\lambda \leq m_\lambda.$$

Demostración. Sea $\{u_1, \dots, u_d\}$ una base de $\operatorname{Ker}(f-\lambda)$. Completamos $\{u_1, \dots, u_d\}$ a una base $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_d, u_{d+1}, \dots, u_n\}$ de E. La matriz de f en la base $\mathbf{u}$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda \cdot \mathbf{1}_d & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

para matrices C, B convenientes. Por tanto

$$\chi_f(t) = (\lambda - t)^d \cdot \chi_B(t),$$

de donde deducimos que $d \leq m$. $\square$

(2) Sea f un endomorfismo de E. Sean $u_1, \dots, u_r$, r vectores propios de f de valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ diferentes. Entonces $u_1, \dots, u_r$ son linealmente independientes.

Demostración. Razonamos por inducción sobre r. Si $r = 1$ el resultado es trivial. Supongamos $r \geq 2$ y que el resultado es cierto hasta $r-1$. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ escalares tales que

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r = 0.$$

Podemos escribir esta ecuación en la forma

$$\alpha_r u_r = -\alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{r-1} u_{r-1}.$$

Aplicando f y teniendo en cuenta que los u_i son vectores propios, obtenemos

$$\begin{aligned} f(\alpha_r u_r) &= f(-\alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{r-1} u_{r-1}) = -\alpha_1 f(u_1) - \dots - \alpha_{r-1} f(u_{r-1}) \\ &= -\alpha_1 \lambda_1 u_1 - \dots - \alpha_{r-1} \lambda_{r-1} u_{r-1} \\ f(\alpha_r u_r) &= \alpha_r f(u_r) = \alpha_r \lambda_r u_r = \lambda_r(-\alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{r-1} u_{r-1}) \end{aligned}$$

por tanto

$$-\alpha_1 \lambda_1 u_1 - \dots - \alpha_{r-1} \lambda_{r-1} u_{r-1} = \lambda_r(-\alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{r-1} u_{r-1}).$$

La última igualdad se puede escribir en la forma

$$\alpha_1(\lambda_r - \lambda_1) u_1 + \dots + \alpha_{r-1}(\lambda_r - \lambda_{r-1}) u_{r-1} = 0,$$

y, puesto que los vectores $u_1, \dots, u_{r-1}$ son linealmente independientes por hipotesis de inducción, y los escalares λ_i son distintos, deducimos que $\alpha_i = 0$, para $1 \leq i < r$. Utilizando la primera de las ecuaciones deducimos que $\alpha_r u_r = 0$, y por tanto que $\alpha_r = 0$. $\square$

(3) **(Primer criterio de diagonalizabilidad: Por las multiplicidades.)** Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, los valores propios diferentes de f, y m_i la multiplicidad algebraica de λ_i y $d_i = \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_i)$, para todo i. Entonces f es diagonalizable. si y solo si $d_i = m_i$, para todo i, y $\sum_i m_i = n$.

Demostración. Si f es diagonalizable, para calcular d_i y m_i usamos la forma diagonal de la matriz de f, lo que da inmediatamente $d_i = m_i$ y $\sum_i m_i = n$. Recíprocamente, si $d_i = m_i$ y $\sum_i m_i = n$, escogiendo en cada autoespacio $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i Id)$ una base B_i formada por d_i vectores propios, obtenemos un conjunto $B = \bigcup_i B_i$ formado por $\sum_i d_i = n$ vectores propios linealmente independientes, por tanto, una base de vectores propios, y f es diagonalizable.

$\square$