Problema 35. Considerem l'anell $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] := a + b\sqrt{-2} : a, b \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ i la seva norma $N = a + b\sqrt{-2} = a^2 + 2b^2, a, b \in \mathbb{Z}$. Proveu que $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ és un domini d'ideals principals.

Solució. Anomenem $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ i $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$. Començarem demostrant que per a tot parell x, $y \in A \subseteq K$, $y \neq 0$, existeixen q i $r \in A$ tals que

$$x = qy + r \text{ amb } r = 0 \text{ o bé } N(r) < N(y).$$

Definim $x = a + b\sqrt{-2}$ i $y = c + d\sqrt{-2}$ on $y \neq 0$ i $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{a + b\sqrt{-2}}{c + d\sqrt{-2}} = \frac{a + b\sqrt{-2}}{c + d\sqrt{-2}} \cdot \frac{c - d\sqrt{-2}}{c - d\sqrt{-2}} = \frac{\alpha + \beta\sqrt{-2}}{c^2 + 2d^2} = p_1 + p_2\sqrt{-2}$$

on $\alpha = ab + 2cd$, $\beta = bc - ad$ i $p_1 = \dfrac{\alpha}{c^2 + 2d^2}$ i $p_2 = \dfrac{\beta}{c^2 + 2d^2}$ són de $\mathbb{Q}$,
per tant, $p_1 + p_2\sqrt{-2} \in K$.
Siguin $q = q_1 + q_2\sqrt{-2}$ on $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ tals que $|p_i - q_i| \leq \dfrac{1}{2}$, $i = \{1, 2\}$ i $r = r_1 + r_2\sqrt{-2}$ tals que $\alpha = \beta \cdot q + r$, és a dir, $r = \alpha - \beta \cdot q$ amb $\alpha, \beta, q \in A$, per tant obtenim $r \in A$.
Provada l'existència de $q, r \in A$, hem de veure que $r = 0$ o bé $N(r) < N(\beta)$:

- Si $r = 0$: Implica que $p = p_1 + p_2 \in A$. Ja hem acabat.
- Si $r \neq 0$: Utilitzant $N(xy) = N(x) \cdot N(y)$, $\forall x, y \in A$,
  $N(r) = N(x - y \cdot q) = N(\dfrac{x}{y} - q) \cdot N(y) = N(p - q) \cdot N(y)$.
  Com que $N(p - q) = (p_1 - q_1)^2 + 2(p_2 - q_2)^2 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right) + 2\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{4} < 1$,
  obtenim que $N(p - q) < 1 \Rightarrow N(r) < N(\beta)$.

Finalment hem de veure que A és un DIP, és a dir, qualsevol ideal de A és principal.
Sigui $I \subseteq A$ un ideal:

- Si $I = (0)$, llavors $I = 0 \cdot A$ i I és principal.
- Si $I \neq (0)$, llavors existeix $\beta \in I$ amb $\beta \neq 0$, i $|N(\beta)|$ és el minim en $I - 0$.
  Com que $I \ni \beta \subseteq \beta A = I \Rightarrow \beta A \in I$, i existeixen $q, r \in A$ tals que $\alpha = \beta \cdot q + r$,
  però, com que $N(r) < N(\beta)$ i $N(\beta)$ és el mínim, llavors $r \in I \Rightarrow r = 0$.
  Per tant hem vist que I és principal.

Finalment tenim que $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ és un Domini d'ideals principals.