1. Calculeu el domini de les funcions definides per les expressions següents:

(a) $f(x) = \dfrac{1 - \log x}{1 + \log x}$.

(b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1 - 9x^2}}$.

Justifiqueu detalladament la resposta.

Solució:

(a) Observeu que $f(x) = f_2(f_1(x))$, on $f_1(x) = \log x$ i $f_2(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Per tant,

$$\begin{aligned} D(f) &= \{\, x \in D(f_1) = (0, +\infty) \,:\, \log x = f_1(x) \in D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \,\} \\ &= \{\, x \in (0, +\infty) \,:\, \log x \neq -1 \,\} \overset{(*)}{=} \{\, x \in (0, +\infty) \,:\, x \neq e^{-1} = 1/e \,\}, \end{aligned}$$

on la igualtat $(*)$ es dedueix de la injectivitat de la funció logaritme.

En conseqüència, $D(f) = (0, +\infty) \setminus \{1/e\} = (0, 1/e) \cup (1/e, +\infty)$.

(b) Observeu que $g(x) = g_2(g_1(x))$, on $g_1(x) = \frac{x^3}{1-9x^2}$ i $g_2(x) = \sqrt{x}$. Per tant, el domini de g, $D(f)$, és el conjunt dels nombres $x \in \mathbb{R}$ que compleixen les dues condicions següents:

(i) $x \in D(g_1)$, és a dir, $1 - 9x^2 \neq 0$, o, equivalentment, $x^2 \neq \frac{1}{9}$. Aquesta condició diu que $x \neq \pm\frac{1}{3}$.

(ii) $\frac{x^3}{1-9x^2} = g_1(x) \in D(g_2) = [0, +\infty)$. Això vol dir que es compleix alguna de les dues condicions següents:

- $x^3 \geq 0$ i $1 - 9x^2 > 0$, és a dir, $x \geq 0$ i $\frac{1}{9} > x^2$, o, equivalentment, $0 \leq x < \frac{1}{3}$.
- $x^3 \leq 0$ i $1 - 9x^2 < 0$, és a dir, $x \leq 0$ i $\frac{1}{9} < x^2$, o, equivalentment, $x < -\frac{1}{3}$.

(Aqui hem utilitzat la gràfica de la funció $h(x) = x^2$.)

En conseqüència, $D(g) = (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup [0, \frac{1}{3})$.

2. Calculeu el recorregut de:

(a) La funció $f : (-\infty, -\frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$.

(b) La funció $g : [9, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida per $g(x) = \log(e^{1/\sqrt{x}} - 1)$.

Justifiqueu detalladament la resposta.

Solució:

(a) Observeu que $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5/2}{2x+1}$, i en conseqüència

$$R(f) = \{\, f(x) \,:\, x < -\tfrac{1}{2} \,\} = \{\, \tfrac{1}{2} + \tfrac{5/2}{t} \,:\, t < 0 \,\} = \{\, \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2}s \,:\, s < 0 \,\} = (-\infty, \tfrac{1}{2}).$$

(Aqui hem utilitzat les gràfiques de les funcions $g(x) = 2x+1$, $h(t) = 1/t$ i $r(s) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}s$.)

(b) Observeu que $g(x) = g_5(g_4(g_3(g_2(g_1(x)))))$, amb $g_1(x) = \sqrt{x}$, $g_2(x) = \frac{1}{x}$, $g_3(x) = e^x$, $g_4(x) = x - 1$ i $g_5(x) = \log x$. Per tant,

$$R(g) = \{\, g(x) \,:\, x \in [9, +\infty) \,\} = g([9, +\infty)) = g_5(g_4(g_3(g_2(g_1([9, +\infty)))))).$$

Ara les gràfiques de les funcions g_1, g_2, g_3, g_4 i g_5 mostren que $g_1([9, +\infty)) = [3, +\infty)$, $g_2(g_1([9, +\infty))) = g_2([3, +\infty)) = (0, 1/3]$, $g_3(g_2(g_1([9, +\infty)))) = g_3((0, 1/3]) = (1, e^{1/3}]$, $g_4(g_3(g_2(g_1([9, +\infty))))) = g_4((1, e^{1/3}]) = (0, e^{1/3} - 1]$ i, finalment,

$$R(g) = g_5((0, e^{1/3} - 1]) = (-\infty, \log(e^{1/3} - 1)].$$

3. Per a cadascuna de les funcions següents, determineu si és injectiva, i en cas afirmatiu calculeu la seva inversa:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \sqrt{2e^{x^4} + 4e^{x^2} + 1}$.

(b) $g : (-1, 0] \to \mathbb{R}$ definida per $g(x) = (\log(1 - x^2))^2$.

Justifiqueu detalladament la resposta.

Solució:

(a) f no és injectiva perquè f és una funció parella ($f(x) = f(-x)$, per a cada $x \in \mathbb{R}$).

(b) Demostrarem que g és injectiva i calcularem la seva inversa g^{-1} per dos mètodes:

Mètode 1: Per a demostrar que g és injectiva provarem que per a cada $y \in R(g)$ existeix una única $x \in (-1, 0]$ tal que $g(x) = y$. En efecte, sigui $y = g(x)$, amb $x \in (-1, 0]$. Aleshores $y = (\log(1 - x^2))^2 \geq 0$ i $\log(1 - x^2) < 0$ (perquè $0 < 1 - x^2 \leq 1$). Per tant, $\log(1 - x^2) = -\sqrt{y}$ i, en conseqüència, $1 - x^2 = e^{\log(1-x^2)} = e^{-\sqrt{y}}$, és a dir, $x^2 = 1 - e^{-\sqrt{y}}$. Així doncs, $x = -\sqrt{1 - e^{-\sqrt{y}}}$, ja que $x \leq 0$. Això prova que g és injectiva, $R(g) \subset [0, +\infty)$ i $g^{-1}(y) = -\sqrt{1 - e^{-\sqrt{y}}}$, per a cada $y \in R(g)$.
Ara per provar que $R(g) = [0, +\infty)$ cal comprovar que si $y \geq 0$ llavors $x = -\sqrt{1 - e^{-\sqrt{y}}} \in (-1, 0]$ i $g(x) = y$. En efecte, primer és clar que $x \leq 0$. D'altra banda, si $y \geq 0$ llavors $1 \geq e^{-\sqrt{y}} > 0$, i per tant $0 \leq 1 - e^{-\sqrt{y}} < 1$ i $\sqrt{1 - e^{-\sqrt{y}}} < 1$, i en conseqüència $x > -1$. Finalment,

$$g(x) = (\log(1 - x^2)^2 = (\log(1 - (1 - e^{-\sqrt{y}}))^2 = (\log(e^{-\sqrt{y}}))^2 = (-\sqrt{y}))^2 = (\sqrt{y}))^2 = y.$$

I acabem de provar que $R(g) = [0, +\infty)$.
En conclusió, hem vist que g és injectiva, $R(g) = [0, +\infty)$, i la seva inversa és la funció $g^{-1} : [0, +\infty) \to (-1, 0]$ definida per $g^{-1}(y) = -\sqrt{1 - e^{-\sqrt{y}}}$.

Mètode 2: Observeu que $g(x) = g_1(g_3(g_2(g_1(x))))$, amb $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = 1 - x$ i $g_3(x) = \log x$. Com que

- g_1 és bijectiva entre $(-1, 0]$ i $g_1((-1, 0]) = [0, 1)$, amb inversa $h(x) = -\sqrt{x}$,
- g_2 és bijectiva entre $g_1((-1, 0]) = [0, 1)$ i $g_2([0, 1]) = (0, 1]$, amb inversa g_2,
- g_3 és bijectiva entre $g_2([0, 1]) = (0, 1]$ i $g_3((0, 1]) = (-\infty, 0]$, amb inversa $\exp(x) = e^x$,
- g_1 és bijectiva entre $g_3((0, 1]) = (-\infty, 0]$ i $g_1((-\infty, 0]) = [0, +\infty)$, amb inversa h,

resulta que g és injectiva, $R(g) = g((-1, 0]) = [0, +\infty)$, i la seva inversa és la funció $g^{-1} : [0, +\infty) \to (-1, 0]$ definida per

$$g^{-1}(x) = h(g_2(\exp(h(x))))) = -\sqrt{1 - e^{-\sqrt{x}}}.$$