

Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2012-2013

Revaluació

- Feu els problemes en fulls separats.
- Justifiqueu detalladament les respostes.

- (1) Representeu gràficament el conjunt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq 4 + x^2\}$, i determineu el seu interior, la seva adherència i la seva frontera.
- (2) (a) Enuncieu el teorema de la funció inversa.
Proveu que la funció $f(x, y) = (1 - e^{x-y}, \sin(y - x^2))$ és un difeomorfisme de classe C^∞ en un entorn del punt $p = (1, 1)$.
- (b) Proveu que el sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} ye^u + x \cos v &= 0 \\ xu - yv &= 0 \end{aligned} \right\}$$

defineix implícitament funcions $u(x, y)$ i $v(x, y)$ de classe C^∞ en un entorn del punt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, -1, 0, 0)$.

Calculeu $(\nabla u)(1, -1)$.

Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2012-2013

Revaluació

- Feu els problemes en fulls separats.
- Justifiqueu detalladament les respostes.

- (3) (a) Proveu que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció diferenciable que té un extrem local en un punt $a \in \mathbb{R}^n$, llavors la seva diferencial en a és nul·la.
- (b) Per a $m \in \mathbb{N}$, definim les funcions

$$f_m(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^m}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Per a quins valors de m són diferenciables en \mathbb{R}^2 ?

- (4) Donada la funció $f(x, y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$ i el conjunt

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 5, y - x \geq 0\}.$$

Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f sobre A i calculeu-los.