ALGEBRA LINEAL. CURSO 2010-11

APÉNDICE 3. FORMA CANÓNICA DE JORDAN DE UNA MATRIZ

Índice

En este capítulo estudiamos la forma más sencilla de la matriz de un endomorfismo f de un espacio vectorial E de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$, la llamada forma canónica de Jordan.

1. Polinomio mínimo

Definición 1.1. Sea $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ un polinomio. Se dice que $P(t)$ es un *polinomio anuladoor de* f si $P(f) = 0$.

Toda endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión finita n tiene un polinomio anulador distinto de 0. En efecto, la familia de $n^2 + 1$ endomorfismos $f^0, f, f^2, \dots, f^{2n}$ es linealmente dependiente, ya que la dimensión del espacio de endomorfismos de E es n^2.

Un polinomio no nulo se llama normalizado si el término de mayor grado tiene coeficiente igual a la unidad.

Definición 1.2. Sea $\phi_f(t)$ el polinomio anulador no nulo de f normalizado de menor grado. El polinomio $\phi_f(t)$ se llama *el polinomio mínimo* de A.

Proposición 1.3. El conjunto de polinomios anuladores de f coincide con el conjunto de múltiplos del polinomio ϕ_f.

Ejemplo 1.4.

1. Si A es una matriz diagonal, y $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son los valores propios distintos de A, entonces $P(t) = \prod_i (t - \lambda_i)$ es un polinomio anulador de A. Por ejemplo, si $A = D(2, 2, -3)$, entonces $(A-2)(A+3) = D(0, 0, -5)D(5, 5, 0) = D(0, 0, 0) = 0$. y $P(t) = (t-2)(t-3)$ es un polinomio anulador de A.

Date: 11 de mayo de 2011.

2. Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ y $P(t) = \chi_A(t) = (t-2)^2(t+3)$ entonces

$$P(A) = (A-2)^2\,(A+3) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{smallmatrix}\right)^2 \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & 25 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$$

Proposición 1.5. Toda raíz de $\chi_A(t)$ es una raíz de $\phi_A(t)$, y recíprocamente.

Demostración. En efecto. Si λ es una raíz de $\chi_A(t)$, existe $v \in E$ no nulo tal que $A(v) = \lambda v$. Por tanto, $A^i(v) = \lambda^i \cdot v$, para todo i, de donde se deduce que $0 = \phi_A(A)v = \phi_A(\lambda)v$. Puesto que $v \neq 0$, resulta $\phi_A(\lambda) = 0$, y por tanto λ es una raíz de $\phi_A(t)$.

Recṕrocamente, si λ es una raíz de $\phi_A(t)$, entonces $\phi_A(t) = (t-\lambda)\cdot Q(t)$, con $Q(A) \neq 0$. Sea $v \in E$ tal que $Q(A)v \neq 0$. Entonces $Q(A)(v)$ es un vector propio de A de valor propio λ. $\square$

Lema 1.6. Sea g un endomorfismo de un espacio vectorial G. Si s es un entero ≥ 1 tal que $\operatorname{Ker} g^s = \operatorname{Ker} g^{s+1}$ entonces $\operatorname{Ker} g^s = \operatorname{Ker} g^p$ para todo $p > s$.

Demostración. Por inducción sobre $p-s \geq 0$. El caso $p-s=1$ es la hipótesis. Si $p-s>1$, por hipótesis de inducción podemos suponer que $\operatorname{Ker} g^s = \operatorname{Ker} g^{p-1}$. Obviamente $\operatorname{Ker} g^s \subset \operatorname{Ker} g^p$. Recíprocamente, si $v \in \operatorname{Ker} g^p$, enonces $g(v) \in \operatorname{Ker} g^{p-1} = \operatorname{Ker} g^s$, luego $g^{s+1}(v) = g^s g(v) = 0$, por tanto $v \in \operatorname{Ker} g^{s+1} = \operatorname{Ker} g^s$. $\square$

Corolario 1.7. Sean f un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita E, λ un valor propio de f, y s la multiplicidad de λ como raíz de $\phi_f(t)$, entonces s coincide con el mínimo de los enteros k tales que

$$\dim \operatorname{Ker}\,(f-\lambda)^k = \dim \operatorname{Ker}\,(f-\lambda)^{k+1}.$$

Ejemplo 1.8. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \oplus (5) \oplus (5) \oplus \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \oplus (7) = \left(\begin{smallmatrix} 5&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&5&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&5&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&5&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&7&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&7&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&7&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&7&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&7&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&7 \end{smallmatrix}\right)$$

Entonces, $n = 10$, $\chi_A(t) = (t-5)^4 \cdot (t-7)^6$.

El polinomio mínimo es de la forma

$$\phi_A = (t-5)^{s_1} \cdot (t-7)^{s_2},$$

con $s_1, s_2 \geq 1$. El cálculo de los rangos conduce a

$$\operatorname{rg}(A-5) = 7; \quad \operatorname{rg}(A-5)^2 = 6 = \operatorname{rg}(A-5)^3$$
$$\operatorname{rg}(A-7) = 7; \quad rg(A-7)^2 = 5; \quad rg(A-5)^3 = 4 = rg(A-5)^4$$

por tanto $s_1 = 2$, $s_2 = 3$ y $\phi_A = (t-5)^2 \cdot (t-7)^3$.

Observación 1.9. Sea A una matriz $n \times n$. Si $\chi_A(t) = \pm \prod_{i=1}^{r} (t-\lambda_i)^{m_i}$, por el teorema de Cayley-Hamilton 3.8 que veremos más adelante, el grado s de ϕ_a es menor o igual que n y la multiplicidad s_i de λ_i en el polinomio mínimo es $\leq m_i$. Por tanto una técnica para calcular el polinomio mínimo de A consiste en calcular, para valores crecientes de s, las matrices $P(A)$ donde $P(t)$ recorre el conjunto de polinomios de la forma

$$P(t) = \prod_i (t-\lambda_i)^{k_i},$$

con exponentes k_i tales que $1 \leq k_i \leq m_i$ y $\sum_i k_i = s$. El primero de los polinomios P tal que $P(A) = 0$ es el polinomio mínimo de A.

Por ejemplo, si $\chi_A(t) = (t-1)^3(t-2)^2$, que tiene grado 5, entonces calcularemos, sucesivamente, las matrices siguientes hasta encontrar la primera que se anule (en cada linea el orden puede ser cambiado)

$$\begin{aligned}&(A-1)(A-2)\\&(A-1)^2(A-2),\ (A-1)(A-2)^2,\\&(A-1)^3(A-2),\ (A-1)^2(A-2)^2.\end{aligned}$$

Si ninguna de estas matrices se anula, el polinomio mínimo coincide con el polinomio característico, por el teorema de Cayley-Hamilton 3.8.

Ejemplos 1.10. En el ejemplo 1.4 (1), el polinomio mínimo es $(t-2)(t+3)$.

En el ejemplo 1.4 (2),se tiene

$$(A-2)(A+3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

por tanto el polinomio mínimo coincide con el característico.

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces $\chi_A(t) = t^3(t-2)$. Puesto que $A(A-2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, y $A^2(A-2) = A(A(A-2)) = 0$, resulta $\phi_A(t) = t^2(t-2)$.

Corolario 1.11. (Segundo criterio de diagonalizabilidad. Versión 2.) Sea E un espacio vectorial de dimensión finita n sobre $\mathbb{C}$, f un endomorfismo de E. El endomorfismo f es diagonalizable si, y solo si, el polinomio mínimo de f descompone en factores lineales y todas sus raíces son simples.

2. Descomposición primaria

Si A es una matriz de tipo $n \times n$ que se descompone en bloques en la forma $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. donde A_1 es una matriz $n_1 \times n_1$ y A_2 es una matriz $n_2 \times n_2$, con $n = n_1 + n_2$, los subespacios E_1 y E_2 de $\mathbb{C}^n$, generados respectivamente por los n_1 primeros vectores de la base canónica y por los n_2 últimos vectores de la base canónica de $\mathbb{C}^n$, son invariantes por la acción de A, es decir, $A \cdot v \in E_i$, para $v \in E_i$. Esto nos conduce a la siguiente definición.

Definición 2.1. Un subespacio F de E se llama invariante por f, o f-invariante, si $f(F) \subset F$. En tal caso, f induce un endomorfismo de F, que denotaremos $f_{|F}$, por la fórmula

$$f_{|F}(v) := f(v), \quad \forall\ v \in F.$$

Proposición 2.2. Si F es un subespacio f-invariante, y $g = f_{|F}$ entonces $\phi_g | \phi_f$ y $\chi_g | \chi_f$.

Proposición 2.3. Supongamos que E es de dimensión finita. Si

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_r,$$

donde los F_i son subespacios f-invariantes no nulos, y B_i una base de F_i para $1 \leq i \leq r$. Entonces la matriz de f en la base $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r$ es de la forma

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix},$$

donde A_i es la matriz de $f|_{F_i}$ en la base B_i, para $i = 1, \ldots, r$.

Ejemplo 2.4. Si $P(t)$ es un polinomio, el subespacion $\operatorname{Ker} P(f)$ (y también el subespacio $\operatorname{Im} P(f)$) es un subespacio f-invariante.

Proposición 2.5. Supongamos que E es de dimensión finita. Sea $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_r$ una descomposición de E en suma directa de subespacios f-invariantes, y $f_i = f_{|E_i}$, para todo i. Entonces

$$\chi_f(t) = \chi_{f_1}(t) \cdot \chi_{f_2}(t) \cdot \cdots \cdot \chi_{f_r}(t),$$
$$\phi_f(t) = mcm\left(\phi_{f_1}(t), \phi_{f_2}(t), \ldots, \phi_{f_r}(t)\right).$$

Demostración. Para la primera fórmula basta tomar una base de E que sea reunión de bases B_i de E_i. Para ver la segunda, denotemos por M el mcm de los polinomios ϕ_{f_i}. Entonces $M(f) = 0$, por tanto $M|\phi_f$. Por otra parte, $\phi_f(f_i) = 0$, implica que $\phi_{f_i}|\phi_f$, para todo i, por tanto $M|\phi_f$. □

Teorema 2.6. (Lema clave) Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial E (no necesariamente de dimensión finita). Sean Q_1, Q_2 dos polinomios, $D = mcd(Q_1, Q_2)$ y $M = mcm(Q_1, Q_2)$ entonces

$$\operatorname{Ker} Q_1(f) + \operatorname{Ker} Q_2(f) = \operatorname{Ker} M(f), \quad \operatorname{Ker} Q_1(f) \cap \operatorname{Ker} Q_2(f) = \operatorname{Ker} D(f).$$

Demostración. Existen polinomios P_1, P_2 primos entre sí tales que $DP_1 = Q_1, DP_2 = Q_2$. Por la identidad de Bezout existen polinomios A_1, A_2 tales que

$$1 = P_1A_1 + P_2A_2.$$

Veamos las dos igualdades del lema. Las inclusiones $\operatorname{Ker} D(f) \subset \operatorname{Ker} Q_i(f) \subset \operatorname{Ker} M(f)$, para $i = 1, 2$, son obvias, pues $D|Q_i$, y $Q_i|M$. Por tanto

$$\operatorname{Ker} D(f) \subset \operatorname{Ker} Q_1(f) \cap \operatorname{Ker} Q_1(f), \quad \operatorname{Ker} Q_1(f) + \operatorname{Ker} Q_1(f) \subset \operatorname{Ker} M(f)$$

Veamos las inclusiones contrarias. Si $v \in \operatorname{Ker} M(f)$, se tiene

$$v = P_1(A_1(v)) + P_2(A_2(v)),$$

donde $Q_2(P_1(\alpha_1(v))) = A_1(f)(M(f)(v)) = 0$, $Q_1(P_2(A_2(v)) = A_2(f)(M(f)(v)) = 0$. Por tanto $v \in \operatorname{Ker} Q_2(f) + \operatorname{Ker} Q_1(f)$.

Si $v \in \operatorname{Ker} Q_1(f) \cap \operatorname{Ker} Q_2(f)$, puesto que $D = Q_1A_1 + Q_2A_2$, se tiene

$$D(f)(v) = A_1(f)(Q_1(f)(v)) + A_2(f)(Q_2(f)(v)) = 0.$$

Por tanto $v \in \operatorname{Ker} D(f)$. □

Corolario 2.7. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial E (no necesariamente de dimensión finita). Si $Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_r(t)$ son r polinomios primos dos a dos, y $Q = \prod_i Q_i$, entonces

$$KerQ(f) = \operatorname{Ker} Q_1(f) \oplus \operatorname{Ker} Q_2(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} Q_r(f).$$

Demostración. Razonamos por inducción sobre r. Para $r = 2$ se deduce del lema anterior.

Si $r > 2$, entonces Q_1 y el producto $Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_r$ son primos entre sí, por el lema de Euclides. En efecto,si $P(t)$ es un polinomio irreducible tal que $P|Q_1$, y $P|Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_r$, como los polinomios $Q_2, \cdots, Q_r$ son primos dos a dos, P ha de dividir a alguno de los Q_i, con $2 \leq i$, Por tanto $P|MCD(Q_1, Q_i)$, y $P = 1$.

Teniendo en cuenta el caso $r = 2$, y la hipótesis de inducción para $Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_r$, resulta

$$\operatorname{Ker} Q(f) = \operatorname{Ker} Q_1(f) \oplus \operatorname{Ker} (Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_r)(f) = \operatorname{Ker} Q_1(f) \oplus \operatorname{Ker} Q_2(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} Q_r(f).$$

$\square$

Definición 2.8. Un polinomio se llama *primario* si es potencia de un polinomio irreducible. Sobre $\mathbb{C}$ los polinomios primarios son las potencias de polinomios de grado 1, $(t-\lambda)^r$.

Sea F un subespacio vectorial f-invariante de E. Se dice que F es *primario respecto de f* si el polinomio mínimo de $f|_F$ es primario. Si además no existe ningún subespacio primario mayor que F se dice que F es primario maximal. Se dice que F es *irreducible* si no se puede expresar en la forma $F = F_1 \oplus F_2$ con F_1, F_2 subespacios invariantes no nulos.

El objetivo de este capítulo es hacer una doble descomposición, la primera en subespacios primarios maximales, y a continuación descomponer cada componente primaria maximal en componentes irreducibles.

El siguiente resultado es la primera etapa.

Teorema 2.9. (Descomposición primaria) Sea E un espacio vectorial de dimensión finita n sobre $\mathbb{C}$, f un endomorfismo de E y $\phi_f(t)$ su polinomio mínimo. Sea $\phi_f(t) = \prod Q_i$, la descomposición de ϕ_f en factores primarios primos dos a dos, y sea $E_i = \operatorname{Ker} Q_i(f)$, para todo i. Se cumple

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_r,$$

donde cada E_i es primario maximal, y los polinomios minimales de los $f_{|E_i}$ son coprimos entre sí. Más precisamente, si f_i es la restricción de f a E_i, el polinomio mínimo de f_i es Q_i, para todo i. Además esta es la única descomposición de E como suma directa de subespacios f-invariantes primarios y con polinomios minimales coprimos entre sí.

Demostración. Por la proposición 2.7 aplicado al polinomio mínimo de f se obtiene la descomposición en suma directa. Puesto que $E_i = \operatorname{Ker} Q_i(f)$, $Q_i(t)$ es un polinomio anulador de E_i, luego el polinomio mínimo de f_i es un divisor de Q_i. Por otra parte, $\phi_f = mcm(\phi_i)_i$, de donde se sigue que $\phi_i = Q_i$.

Ahora, si

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_r$$

es otra descomposición f-invariante primaria con polinomios mínimos coprimos $R_i(t)$, entonces $\phi_f(t) = \prod_i Q_i(t) = \prod R_i(t)$. Por la unicidad de la factorización, podemos suponer $Q_i(t) = R_i(t)$ para todo i. entonces

$$F_i = \text{Ker } Q_i(f|_{F_i}) \subset \text{Ker} Q_i(f)$$

Por tanto

$$\dim F_i \leq \dim E_i, \quad \sum_i \dim F_i = n = \sum_i \dim E_i,$$

de donde resulta $F_i = E_i$. $\square$

Definición 2.10. Los sumandos de E de la descomposición del teorema anterior se llaman componentes primarias de E, y coinciden con los subespacios primarios maximales de E.

Corolario 2.11. Con las notaciones del teorema 2.9, si F es un subespacio invariante, y $F_i = F \cap E_i$, entonces $F = \bigoplus_i F_i$ es la descomposición primaria de F (la suma se extiende solo a los i tales que $F_i \neq 0$).

Demostración. Sea $F = G_i$ la descomposición primaria de F. Puesto que $\phi_{f|_F} | \phi_f$, cada G_i es de la forma Ker $Q_i(f|_F)$ para algún i. Puesto que Ker $Q_i(f|_F) = F \cap \text{Ker } Q_i(f)$, se tiene $G_i \subset F_i$. Por otra parte $\bigoplus_i F_i = F = \bigoplus_i G_i$, por tanto $G_i = F_i$ para todo i. $\square$

Corolario 2.12. Con las notaciones del teorema 2.9, si $Q_i = (t - \lambda_i)^{s_i}$, para todo i, y m_i es la multiplicidad algebraica del valor propio λ_i, entonces $\dim E_i = m_i$.

Demostración. Puesto que cada E_i es f-invariante, de la proposición 2.5 se sigue que

$$\chi_f(t) = \chi_{f_1}(t) \cdot \chi_{f_2}(t) \cdot \cdots \cdot \chi_{f_r}(t).$$

Además f_i es anulado por $(t - \lambda_i)^{s_i}$, luego λ_i es la única raíz de χ_{f_i}. De aquí se sigue que $\chi_{f_i}(t) = (t - \lambda_i)^{m_i}$, y por tanto $\dim E_i = m_i$. □

3. Matrices de Jordan

Dado un endomorfismo f de E, la descomposición primaria de E en subespacios invariantes primarios maximales es única. Esta descomposición da lugar a unos endomorfismos primarios esencialmente determinados por f. En términos de matrices, la matriz de f se desomopone, salvo cambio de base, en una suma por bloques de matrices primarias maximales, con polinomios mínimos coprimos.

Dado un endomorfismo primario de un espacio E, el espacio E admite posiblemente una descomposición en suma directa de subespacios invariantes, que ya no es necesariamente única. Esta descomposición corresponde a las componentes irreducibles. El objetivo de esta sección es obtener una descomposición de un endomorfismo primario en suma de componentes irreducibles. Esta descomposición da lugar a una descomposición de la matriz, salvo cambio de base, en suma por bloques de matrices de Jordan.

Definición 3.1. Matrices de Jordan.

1. La matriz de tipo $c \times c$ definida por

$$J_c(\lambda) = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} \lambda & \cdot \\ 1 & \lambda \\ & 1 \end{smallmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{smallmatrix} \lambda & \cdot \\ 1 & \lambda \end{smallmatrix} \end{pmatrix}.$$

   se llama *bloque de Jordan de valor propio λ y altura c.*
2. Se llama *matriz de Jordan de valor propio λ* a toda suma por bloques de bloques de Jordan del mismo valor propio λ. Si $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ es una lista de tamaños tal que $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_m$, notaremos

$$J(\lambda; c_1, \ldots, c_m) = J_{c_1}(\lambda) \oplus J_{c_2}(\lambda) \oplus \cdots \oplus J_{c_m}(\lambda).$$

3. Más generalmente, se llama *matriz de Jordan* a una suma por bloques de matrices de Jordan de diferentes valores propios

$$J = J(\lambda_1) \oplus J(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_r),$$

   donde $\lambda_k \in \mathbb{C}$ son escalares, y cada $J(\lambda_k)$ es una matriz de Jordan de valor propio λ_k.
4. Si B es una base de E tal que la matriz de f en la base B es una matriz de Jordan, diremos que B es una *base de Jordan de E* (respecto de f).

Los invariantes de una matriz de Jordan primaria son los siguientes:

Proposición 3.2. Sea $J = J(\lambda)$ una matriz de Jordan de un solo valor propio λ,

$$J(\lambda) = J(\lambda_k; c_1, \ldots, c_m),$$

donde

$$c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_m, \quad n = c_1 + c_2 + \cdots c_m.$$

Entonces

(1) El polinomio característico de J es $\chi_J(t) = (t - \lambda_k)^n$, y el polinomio mínimo de J es $\phi_J(t) = (t - \lambda_k)^{c_1}$.

(2) La dimensión de $\mathrm{Ker}\,(J-\lambda)^i/\mathrm{Ker}\,(J-\lambda)^{i-1}$ coincide con el número de bloques de Jordan de J de tamaño $\geq i$,

$$\dim \mathrm{Ker}\,(J-\lambda)^i/\mathrm{Ker}\,(J-\lambda)^{i-1} = \#\{j; c_j \geq i\}, \quad \forall i.$$

Demostración. La parte (1) es obvia. Veamos (2). Dividimos la base canónica B en m partes ordenadas disjuntas, $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$, una para cada bloque de Jordan de J. Dentro de cada parte B_j usamos la numeración $B_j = (e_{j,1}, \cdots, e_{j,c_j})$. Entonces se cumple

$$(J-\lambda)\cdot e_{j,i} = e_{j,i+1}, \quad 1 \leq i < c_j, \quad (J-\lambda)\cdot e_{j,c_j} = 0.$$

□

Observación 3.3. Sea $N = J - \lambda$. La base canónica se puede expresar de la manera siguiente a partir de N. En cada parte B_j hay un vector $e_{j,1}$, que se llama *vector primitivo de altura* c_j, tal que

$$B_j = \{N^i e_{j,1};\ 0 \leq i < c_j\}.$$

Por tanto,

$$B = \bigcup_{j=1}^{m} \{N^i e_{j,1};\ 0 \leq i < c_j\}.$$

Expresemos esto de una manera alternativa. Sea $V_k = \{e_{j,1}; c_j = k\}$ el conjunto de vectores de B que son primitivos de altura k. Entonces

$$B = \bigcup_{k=1}^{c_1} \bigcup_{i=1}^{k-1} N^i V_k.$$

Los conjuntos V_k son conjuntos linealmente independientes que tienen la propiedad siguiente. Sea $F_k = \mathrm{Ker}\, N^k$. Entonces

$$\langle V_k \rangle \oplus (F_{k-1} + N(F_{k+1})) = F_k.$$

Puesto que para $k = c_1$ se tiene $N(F_{c_1+1}) = N(F_{c_1}) \subset F_{c_1-1}$, para determinar a priori una base de Jordan se empieza determinando unos conjuntos de vectores linealmente independientes V_k de la forma siguiente: Se escoge V_{c_1} tal que

$$\langle V_{c_1} \rangle \oplus F_{c_1-1} = F_{c_1}.$$

A continuación, de forma recurrente, para $1 \leq k < c_1$ se escoge V_k tal que

$$\langle V_k \rangle \oplus \left(F_{k-1} \oplus \bigoplus_{j=k+1}^{c_1} N^{j-k}(V_j) \right) = F_k.$$

Las fórmulas anteriores para el cálculo de los V_k se pueden aplicar a una matriz primaria A cualquiera, de valor propio λ, obteniendo una base de Jordan del endomorfismo L_A. Para verlo establecemos en primer lugar el lema siguiente.

Lema 3.4. Sea f un endomorfismo primario de valor propio λ, $g = f - \lambda$, y $F_m = \mathrm{Ker}\, g^m$. Para todo $m > 2$ y $\{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ vectores de F_m tales que sus clases en F_m/F_{m-1} sean linealmente independientes, entonces las clases de los vectores $\{g(u_1), g(u_2), \cdots, g(u_r)\}$ son linealmente independientes en F_{m-1}/F_{m-2}.

Demostración. Supongamos que existen escalares $\alpha_i, 1 \le i \le r$, tales que

$$\sum_i \alpha_i[g(u_i)] = 0, \quad \text{es decir,} \sum_i \alpha_i g(u_i) \in F_{m-2} = \operatorname{Ker} g^{m-2}.$$

Por tanto $0 = g^{m-2}(\sum_i \alpha_i g(u_i)) = g^{m-1}(\sum_i \alpha_i u_i)$. Así $\sum_i \alpha_i u_i \in \operatorname{Ker} g^{m-1} = F_{m-1}$. Por tanto $\sum_i \alpha_i u_i$ es cero en F_m/F_{m-1}, y, por la hipótesis, $\alpha_i = 0$, para todo i. □

Teorema 3.5. Sea f un endomorfismo primario de valor propio λ, $g = f - \lambda$, y $F_m = \operatorname{Ker} g^m$. Si $m \ge 1$ y $u_1, u_2, \cdots, u_r$ son vectores de F_m tales que sus clases en F_m/F_{m-1} sean linealmente independientes, entonces existe una base de Jordan L_m de F_m tal que

$$A_m = \{u_1, u_2, \cdots, u_r\} \subset L_m.$$

En particular, si $\phi_f(t) = (t - \lambda)^s$, y $u_1, \cdots, u_r$ son r vectores de E tales que sus clases en F_s/F_{s-1} son una base, existe una base de Jordan B de E tal que $\{u_1, \cdots, u_r\} \subset B$

Demostración. La prueba es por inducción sobre m. Si $m = 1$, los vectores linealmente independientes $\{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ de F_1 se extienden, por el teorema de Steitnitz, a una base de F_1, que es por tanto una base de F_1 formada por vectores propios de f.

Supongamos que $m > 1$, y que el teorema es cierto hasta $m - 1$. Por el teorema de Steitnitz, existen $u_{r+1}, \ldots, u_s$ de F_m tales que las clases de $u_1, \ldots, u_s$ forman una base de F_m/F_{m-1}. Por el lema anterior, las clases de $g(u_1), \ldots, g(u_s)$ son linealmente independientes en F_{m-1}/F_{m-2}. Por la hipótesis de inducción, existe una base de Jordan L_{m-1} de F_{m-1} tal que

$$A_{m-1} = \{gu_1, \ldots, gu_s\} \subset L_{m-1}.$$

Por tanto $L_m = \{u_1, \ldots, u_s\} \cup L_{m-1}$ es una base de Jordan de F_m tal que $A_m \subset L_m$. □

Corolario 3.6. Existencia de bases de Jordan y determinación de la forma de Jordan de una matriz. Sea A es una matriz cuadrada $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Entonces

(1) Existe una base de Jordan de $\mathbb{C}^n$ respecto de A. La matriz de Jordan J que resulta es única, salvo permutaciones del orden de los valores propios, y se llama *la forma canónica de Jordan* de la matriz A.
(2) Para cada valor propio λ de A, sean

$$n_{\lambda,i} = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda)^i, \quad \delta_{\lambda,i} = n_{\lambda,i} - n_{\lambda,i-1},$$

para todo i, el número $\nu_{\lambda,i}$ de cajas de Jordan de valor propio λ y tamaño $i \times i$ es

$$\nu_{\lambda,i} = \delta_{\lambda,i} - \delta_{\lambda,i+1} = 2n_{\lambda,i} - n_{\lambda,i-1} - n_{\lambda,i+1}. \tag{3.1}$$

Demostración. Basta hallar una base de Jordan para cada componente primaria. Podemos suponer que f es un endomorfismo primario de valor propio λ de un espacio vectorial E. Entonces se aplica el teorema anterior.

Por otra parte, teniendo en cuenta que si $U^{-1}AU = J$, entonces $\dim(A - \lambda)^i = \dim(J - \lambda)^i$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$, la forma de Jordan J de A queda determinada por A y el número de bloques de Jordan viene dado por la proposición 3.2.

□

Ejemplo 3.7. Supongamos que hay un solo valor propio λ, cuya sucesión de dimensiones $(n_i)_i$ es

$$(8, 14, 20, 25, 28, 28, 28, ...)$$

entonces el cálculo de ν_i se puede hacer con la tabla siguiente: A partir del dato $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = (8, 14, 20, 25, 28)$, llenamos las dos primeras columnas de la tabla:

i	n_i	δ_i	ν_i
1	8	8	2
2	14	6	0
3	20	6	1
4	25	5	2
5	28	3	3

Llenamos la tercera columna con las diferencias $\delta_i = n_i - n_{i-1}$, empezando por arriba, y la cuarta columna con las diferencias $\nu_i = \delta_i - \delta_{i+1}$, empezando por abajo. Finalmente, con la columna ν_i obtenemos la función c:

$$c = (\overbrace{5, 5, 5}^{\nu_5}, \overbrace{4, 4}^{\nu_4}, \overbrace{3}^{\nu_3}, \overbrace{1, 1}^{\nu_1}),$$

por tanto la matriz de Jordan es

$$\overbrace{J_\lambda(5) \oplus J_\lambda(5) \oplus J_\lambda(5)}^{\nu_5} \oplus \overbrace{J_\lambda(4) \oplus J_\lambda(4)}^{\nu_4} \oplus \overbrace{J_\lambda(3)}^{\nu_3} \oplus \overbrace{J_\lambda(1) \oplus J_\lambda(1)}^{\nu_1}.$$

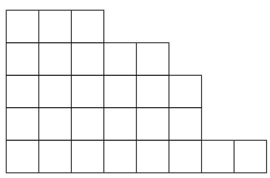
Corolario 3.8. (Teorema de Cayley-Hamilton) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{C}$, entonces $\chi_A(A) = 0$.

Corolario 3.9.
1. El polinomio mínimo de A divide al polinomio característico de A.
2. El grado del polinomio mínimo es menor o igual que n.
3. Para cada valor propio λ, la multiplicidad de λ como raíz del polinomio mínimo es menor o igual que la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico.

4. Hoteles de Jordan

El objetivo de esta sección es dar una justificación de la fórmula 3.1 del teorema 3.6 en términos de una estructura combinatoria que refleja la disposición de los lugares que ocupan los "unos" encima de la diagonal de una matriz de Jordan asociada a un solo valor propio. Se trata de unos diagramas especiales, llamados *diagramas de Young*, pero que informalmente llamaremos en este curso "hoteles de Jordan", por su semejanza con un edificio de apartamentos. La primera definición la haremos a partir de un ejemplo.

Llamaremos *hotel de Jordan* (de un solo valor propio), o simplemente hotel, a una disposición de casillas del tipo siguiente


.

Este hotel de Jordan concreto se corresponde a la matriz de Jordan de valor propio genérico λ del ejemplo 3.7. Este diagrama se puede interpretar como la gráfica de una función escalonada definida por los tamaños de las cajas de Jordan, en este caso $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8) = (5, 5, 5, 4, 4, 3, 1, 1)$, que es una sucesión monótona decreciente de números naturales > 0 tal que $\sum_i c_i = 28$. Se dice también que $(c_i)_i$ es una partición de 28.

Llamaremos una *habitación* a cada casilla del diagrama anterior. Cada fila de habitaciones es una *planta*, y cada columna de habitaciones un *bloque*. Las filas están alineadas por la izquierda y cada planta tiene un número de habitaciones menor o igual al de la planta inmediatamente inferior. Numeraremos las plantas del hotel empezando por el cardinal 1, que corresponde al de la planta inferior. Llamaremos *altura* al número total s de plantas. En este ejemplo la altura es $s = 5$.

El hotel anterior se puede, indicar alternativamente, con el número de habitaciones de cada planta. Denotaremos por δ_i el número de habitaciones de la planta i-ésima. Así en este ejemplo tenemos

$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5) = (8, 6, 6, 5, 3).$$

La sucesión anterior es una sucesión monótona decreciente de números naturales > 0, tal que $\sum_i \delta_i = 28$ (por tanto también es una partición de 28) y determina completamente la forma del hotel. Podemos interpretar también la función δ como una función escalonada, cuya gráfica está representada por el diagrama anterior, pero en el que el eje de la variable independiente i es vertical, y el eje de la variable función δ_i es horizontal.

Como hemos visto en el teorema 3.6, el dato a partir del cual queremos determinar el tamaño de las cajas de Jordan es la sucesión de enteros $(n_i)_{1 \le i \le s}$ tal que n_i es el número de habitaciones de altura menor o igual que i. Puesto que

$$\delta_i = n_i - n_{i-1}$$

(poniendo $n_0 = 0$, y $n_{s+1} = n_s$ por convenio) el número de cajas de altura i es (ver teorema 3.6)

$$\nu_i = \delta_i - \delta_{i+1} = 2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}.$$

La forma en que podemos manejar esta fórmula es haciendo una tabla como en el ejemplo 3.7. La *capacidad* del hotel es el número total de habitaciones, en el ejemplo anterior es $n = \sum_i \delta_i = 28$.

A partir de ahora identificaremos un hotel de n habitaciones con una partición del entero n como suma de enteros positivos correspondientes al número de habitaciones de todas las plantas. En el ejemplo

$$28 = 8 + 6 + 6 + 5 + 3.$$

Definición 4.1. Sean n y s enteros ≥ 1. Se llama *diagrama de Young* (u *hotel de Jordan*) de *n habitaciones y altura s* a una sucesión de enteros $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s)$ tal que

$$\delta_1 \ge \delta_2 \ge \cdots \ge \delta_s > 0, \quad \delta_1 + \cdots + \delta_s = n.$$

Para cada i, δ_i se llama el *número de habitaciones de la planta i-ésima*. Por convenio $\delta_{s+1} = 0$.

El número $n_i = \delta_1 + \cdots + \delta_i$, $\quad 1 \le i \le s$, se llama *número de habitaciones de altura* $\le i$. La sucesión $(n_i)_{1 \le i \le s}$ se llama la *capacidad acumulada* del hotel. Se tiene $n_s = n$. Por convenio pondremos $n_0 = 0$ y $n_{s+1} = n_s$.

Dualmente, podemos describir el hotel dando la *sucesión de las alturas de sus columnas o bloques* empezando por la izquierda $(c_1, c_2, \cdots, c_m)$. La sucesión de enteros $(c_1, c_2, \cdots, c_m)$ satisface

$$c_1 \ge c_2 \ge \cdots \ge c_m > 0, \quad c_1 + \cdots + c_m = n.$$

Observemos que $m = \delta_1$ y $s = c_1$.

El *número de bloques de altura* i es $\nu_i = \delta_i - \delta_{i+1},\ 1 \le i \le s$.

La relación entre las dos funciones δ_i y c_j está muy clara gráficamente pero no es evidente cual es su relación algebraica. Una forma de expresarla es a opartir de las fórmulas

$$\delta_i = \#\{j;\ c_j \ge i\}; \qquad \nu_i = \#\{j; c_j = i\}.$$

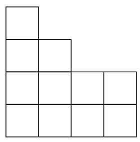
Por otra parte, las fórmulas siguientes relacionan las sucesión $(\delta_i)_i$, $(n_i)_i$ y $(\nu_i)_i$ entre sí.

$$\begin{aligned}
&\delta_i = n_i - n_{i+1} = \nu_1 + \cdots + \nu_i,\ 1 \leq i \leq s;\\
&\nu_i = \delta_i - \delta_{i+1} = 2n_i - n_{i-1} - n_{i+1},\\
&n_i = \delta_1 + \cdots + \delta_i = \nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + i\nu_i.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2. Si la sucesión de dimensiones es

$$(n_i)_{1\leq i\leq 4} = (4, 8, 10, 11),$$

entonces $(\delta_i)_{1\leq i\leq 4} = (4, 4, 2, 1)$ y el hotel es



.

La forma de Jordan será la suma directa

$$J(\lambda, 4) \oplus J(\lambda, 3) \oplus J(\lambda, 2) \oplus J(\lambda, 2).$$

5. Algoritmo para hallar una base de Jordan

Sea A una matriz cuadrada con coeficientes en $\mathbb{C}$, y sea $\prod_\lambda (t-\lambda)^{n_\lambda}$ su polinomio característico. Fijamos un valor propio λ y notamos $n = n_\lambda$, y $E = \operatorname{Ker}(A-\lambda)^{n_\lambda}$. Explicamos como hallar una base de Jordan de E respecto del endomorfismo primario inducido por L_A. Este procedimiento se ha de repetir para cada valor propio.

Si f es un endomorfismo primario de valor propio λ de un espacio vectorial E con $\phi_f(t) = (t-\lambda)^s$, para hallar una base de Jordan de f procedemos de forma recurrente. Denotemos $F_m = \operatorname{Ker} N^m$, donde $N = f - \lambda$. En primer lugar hallamos un conjunto de vectores V_s de $E = \operatorname{Ker} N^s$ tal que V_s sea una base de F_s/F_{s-1}. Completamos $N(V_s)$ a un conjunto de vectores $N(V_s) \cup V_{s-1}$ en F_{s-1} tal que $N(V_s) \cup V_{s-1}$ sea una base de F_{s-1}/F_{s-2}, y así sucesivamente. Obtenemos, una familia de conjuntos de vectores linealmente indepenedientes $V_s, \ldots, V_1$ tal que

$$\langle V_k\rangle \oplus \left(F_{k-1} \oplus \bigoplus_{j=k+1}^{c_1} N^{j-k}(V_j)\right) = F_k,$$

para todo k, $1 \leq k \leq s$. Para ordenar la base, numeramos los vectores de V_k,

$$V_k = \{e_{k,i};\ 1 \leq i \leq \nu_k\}.$$

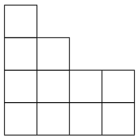
Si s es el exponente del polinomio mínimo, la base se ordena empezando con V_s y sus imágenes por N: Primero $\{e_{s,1}, N(e_{s,1}), \ldots, N^{s-1}(e_{s,1})\}$. A continuación $\{e_{s,2}, N(e_{s,2}), \ldots, N^{s-1}(e_{s,2})\}$, y así hasta $\{e_{s,\nu_s}, N(e_{s,\nu_s}), \ldots, N^{s-1}(e_{s,\nu_s})\}$. Luego se sigue de la misma manera con V_{s-1}, y así hasta V_1.

Veamos como calcular una base de Jordan de E, en una situación en que $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (4, 8, 10, 11)$. Se tiene

i	n_i	δ_i	ν_i
1	4	4	0
2	8	4	2
3	10	2	1
4	11	1	1

,

por tanto el hotel asociado es



y la forma de Jordan será la suma directa $J_4(\lambda) \oplus J_3(\lambda) \oplus J_2(\lambda) \oplus J_2(\lambda)$.

La base de Jordan se obtiene a partir de un conjunto V_i de ν_i vectores primitivos linealmente independientes de altura i, para $1 \leq i \leq 4$, que formarán parte de la base de Jordan B definida por

$$B = V_4 \cup N(V_4) \cup N^2(V_4) \cup N^3(V_4) \cup V_3 \cup N(V_3) \cup N^2(V_3) \cup V_2 \cup N(V_2) \cup V_1.$$

Paso 1. Hallar bases U_i de los subespacios F_i, con $\#U_i = n_i$ tales que $U_i = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_i$.

C_4		
C_3	C_3	
C_2	C_2	C_2
C_1	C_1	C_1

Paso 2. $V_4 := C_4$. Obtenemos un conjunto $V_4 = \{v_{4,1}\}$ de $1(= \nu_4)$ vector primitivo de altura 4, tal que $F_3 \oplus \langle V_4 \rangle = F_4$.

V_4		
C_3	C_3	
C_2	C_2	C_2
C_1	C_1	C_1

Paso 3. Completamos $C_1 \cup C_2 \cup N(V_4)$ a una base de F_3 y obtenemos un conjunto $V_3 = \{v_{3,1}\}$ de $1(= \nu_3)$ vectores primitivos de altura 3, tal que $F_2 \oplus \langle V_3 \rangle \oplus \langle N(V_4) \rangle = F_3$.

V_4		
$N(V_4)$	V_3	
C_2	C_2	C_2
C_1	C_1	C_1

Paso 4. Completamos $C_1 \cup N(V_3) \cup N^2(V_4)$ a una base de F_2 y obtenemos un conjunto $V_2 = \{v_{2,1}, v_{2,2}\}$ de $2(= \nu_2)$ vectores primitivos de altura 2,tal que $F_1 \oplus \langle V_2 \rangle \oplus \langle N(V_3) \rangle \oplus \langle N^2(V_4) \rangle = F_2$.

V_4		
$N(V_4)$	V_3	
$N^2(V_4)$	$N(V_3)$	V_2
C_1	C_1	C_1

Paso 5. Puesto que $0 = \nu_1$, $N(V_2) \cup N^2(V_3) \cup N^3(V_4)$ es una base de F_1 y no hay vectores primitivos de altura 1, $V_1 = \emptyset$.

V_4		
$N(V_4)$	V_3	
$N^2(V_4)$	$N(V_3)$	V_2
$N^3(V_4)$	$N^2(V_3)$	$N(V_2)$

Paso 6: La base de Jordan es $\bigcup_{1\le i\le 4, 0\le j<i} N^j(V_i)$, y ordenadamente, es

$$\{v_{4,1}, N(v_{4,1}), N^2(v_{4,1}), N^3(v_{4,1}); v_{3,1}, N(v_{3,1}), N^2(v_{3,1}); v_{2,1}, N(v_{2,1}); v_{2,2}, N(v_{2,1})\}$$

Un ejemplo elemental, pero que puede servir para contrastar la comprensión del proceso, consiste en aplicar el algoritmo paso a paso para obtener una base de Jordan de una matriz de Jordan. Elecciones adecuadas conducen a que la base canónica es una base de Jordan (pero no es la única, y otras elecciones pueden conducir a una base distinta).

$$\begin{pmatrix}
3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&3&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&3&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&3&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&3&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&3&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&3
\end{pmatrix}$$

En efecto.

Paso 1.

$$F_1 = \operatorname{Ker} N = \langle\{e_4, e_7, e_9, e_{11}\}\rangle, \quad n_1 = 4$$
$$F_2 = \operatorname{Ker} N^2 = \langle\{e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}\rangle, \quad n_2 = 8$$
$$F_3 = \operatorname{Ker} N^3 = \langle\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}\rangle, \quad n_3 = 10$$
$$F_4 = \operatorname{Ker} N^4 = \langle\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}\rangle = \mathbb{C}^{11}, \quad n_4 = 11$$

Calculamos los tamaños de las cajas de Jordan

i	n_i	δ_i	ν_i
1	4	4	0
2	8	4	2
3	10	2	1
4	11	1	1

.

Paso 2. $\nu_4 = 1$, $V_4 = \{e_1\}$.

Paso 3. $N(e_1) = e_2$, $\nu_3 = 1$, $V_3 = \{e_5\}$.

Paso 4. $N^2(e_1) = e_3, N(e_5) = e_6$, $\nu_2 = 2$, $V_2 = \{e_8, e_{10}\}$.

Paso 5. $\nu_1 = 0$, $V_1 = \emptyset$.

Paso 6. La base de Jordan es

$$\{e_1, N(e_1), N^2(e_1), N^3(e_1); e_5, N(e_5), N^2(e_5); e_8, N(e_8); e_{10}, N(e_{10})\}$$

e_1			
ge_1	e_5		
g^2e_1	ge_5	e_8	e_{10}
g^3e_1	g^2e_5	ge_8	ge_{10}

6. Cálculo de las potencias de A

Cada uno de los subespacios invariantes E_i de la descomposición anterior tiene un solo valor propio. Para efectuar el estudio de A podemos reducirnos a cada uno de estos sumandos y suponer que A tiene un solo valor propio, es decir $\chi_A(t) = (\lambda - t)^m$ y $\phi_A(t) = (t - \lambda)^s$. La matriz $N = A - \lambda$ es nilpotente: $N^s = 0$, y conmuta con $\lambda\mathbf{1}$, por tanto el cálculo de las potencias de A se puede efectuar usando la fórmula del binomio de Newton y resulta, para $p \geq s-1$

$$A^p = (\lambda + N)^p = \sum_{i=0}^{s-1} \tbinom{p}{i} \lambda^{p-i} N^i.$$

que tiene un número fijo s de sumandos.

Ejemplo 6.1. Por ejemplo, si A tiene un solo valor propio λ y $\phi_A = (t-\lambda)^3$, entonces, para todo $p \geq 3$,

$$A^p = \lambda^p + \tbinom{p}{1} \lambda^{p-1} N + \tbinom{p}{2} N^2.$$

Por ejemplo, si

$$A = U \left(\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{smallmatrix} \right) \oplus \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{smallmatrix} \right) \oplus (\lambda) \right) U^{-1}$$

entonces, $\phi_A(t) = (t-\lambda)^3$ y para $p \geq 3$,

$$A^p = U \begin{pmatrix} \lambda^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{p}{1}\lambda^{p-1} & \lambda^p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{p}{2}\lambda^{p-2} & \binom{p}{1}\lambda^{p-1} & \lambda^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \binom{p}{1}\lambda^{p-1} & \lambda^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^p \end{pmatrix} U^{-1}$$