

Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2011-2012

Primer Parcial

- Feu els problemes en fulls separats.
- Justifiqueu detalladament les respostes.

(1) [3 punts]

- (a) Dibuixeu el conjunt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \leq y \leq 4x^2\}$. És compacte?
- (b) Demostreu que si K és un compacte de \mathbb{R}^n i $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ és contínua, llavors f assoleix un valor màxim en K .

(2) [3 punts]

Per a quins valors de $p > 0$, la funció

$$f_p(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|^p}{(x^2 + |y|)^3}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

és contínua en \mathbb{R}^2 ?

(3) [4 punts]

- (a) Per funcions escalars, definiu els conceptes de derivada direccional i funció diferenciable en un punt.

Enuncieu i demostreu la relació entre els dos conceptes.

- (b) Per a $m \in \mathbb{N}$ definim les funcions

$$f_m(x, y) = \begin{cases} \frac{x^7}{(x^2 + y^2)^m}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (i) Per a quins valors de m són diferenciables en \mathbb{R}^2 ?
- (ii) Quina és la direcció de màxim creixement de f_1 en $(1, 1)$?