Problema 35. (a) Calculeu les classes de conjugació del grup S_3.

(b) Calculeu les classes de conjugació del grup S_4.

Observació 1. Per fer aquest problema utilitzem:

(1) **Definició.** Una *partició de n* és una successió decreixent de nombres enters no negatius que sumen n.

(2) **Definició.** El *tipus* d'una permutació de S_n és la partició de n que resulta de considerar les longituds dels cicles que apareixen en la seva factorització, incloent els punts fixos com a cicles de longitud 1.

Exemple: Sigui $n = 8$ i $\sigma = (1283)(57) = (1283)(57)(4)(6)$. Aleshores σ és de tipus $(4211) = [1^2 2^1 4^1]$.

(3) **Observació.** En el grup simètric S_n, les classes de conjugació queden descrites per les particions de n.

(4) **Teorema.** Dues permutacions estan en la mateixa classe de conjugació si, i només si, són del mateix tipus. A més, la classe de conjugació de tipus $[1^{r_1} 2^{r_2} ... n^{r_n}]$ té $\dfrac{n!}{1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! ... n^{r_n} r_n!}$ elements.

Solució. (a) Les particions de $n = 3$ són: $(3) = [3^1]$, $(2{,}1) = [1^1 2^1]$, $(1{,}1{,}1) = [1^3]$.

Així doncs,

TIPUS	CLASSE DE CONJUGACIÓ	NOMBRE D'ELEMENTS
$[3^1]$	$\{(123), (132)\}$	$\dfrac{3!}{3^1 1!} = 2$
$[1^1 2^1]$	$\{(12), (13), (23)\}$	$\dfrac{3!}{1^1 1! 2^1 1!} = 3$
$[1^3]$	$\{1\}$	$\dfrac{3!}{1^3 3!} = 1$

(b) Les particions de $n = 4$ són: $(4) = [4^1]$, $(3{,}1) = [1^1 3^1]$, $(2{,}2) = [2^2]$, $(2{,}1{,}1) = [1^2 2^1]$, $(1{,}1{,}1{,}1) = [1^4]$.

Així doncs,

TIPUS	CLASSE DE CONJUGACIÓ	NOMBRE D'ELEMENTS
$[4^1]$	$\{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}$	$\dfrac{4!}{4^1 1!} = 6$
$[1^1 3^1]$	$\{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$	$\dfrac{4!}{1^1 1! 3^1 1!} = 8$
$[2^2]$	$\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$	$\dfrac{4!}{2^2 2!} = 3$
$[1^2 2^1]$	$\{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$	$\dfrac{4!}{1^2 2! 2^1 1!} = 6$
$[1^4]$	$\{1\}$	$\dfrac{4!}{1^4 4!} = 1$