Ejercicio num (ii) resuelto por Martin Azpillaga niub 14944926

i) Modificamos la matriz con operaciones elementales hasta convertirla en escalonada. La operación realizada en cada paso se encuentra entre los dos simbolos $\cong$ que se refieren a equivalente. (simbolo original no encontrado.)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & m & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -m & 4 \end{pmatrix} \cong f_2 \to f_1 \cong \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -m & 4 \end{pmatrix} \cong f_2 - 2f_1, f_3 - 3f_1 \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 3 \\ 0 & 1-2m & -3 & -3 \\ 0 & 1-3m & -m-3 & -5 \end{pmatrix} \cong f_3 - f_2 \cong \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 3 \\ 0 & 1-2m & -3 & -3 \\ 0 & -m & -m & -2 \end{pmatrix} \cong f_2 - 2f_3 \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2m-3 & 1 \\ 0 & -m & -m & -2 \end{pmatrix} \cong f_3 = f_3 + mf_2 \cong \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2m-3 & 1 \\ 0 & 0 & 2m^2-4 & -2+m \end{pmatrix}.$$

ii) Analicemos los rangos de A y $A|b$.

El rg(A) $= 2 :\ 2m^2 - 4m = 0$

El rg(A) $= 3 :\ 2m^2 - 4m \neq 0$

$$2m^2 - 4m = 0$$
$$2m(m-2) = 0$$
$$m = 0 \wedge m = 2$$

rg(A) $= 3 :$ m $\neq 0, 2$

rg(A) $= 2 :$ m $= 0$ $\wedge m = 2$

Lo mismo con $A|b$:

$\text{rg}(A|b) = 3 :$ rg(A) $= 3 \vee -2 + m \neq 0$

$\text{rg}(A|b) = 2 :$ rg(A) $= 2 \wedge -2 + m = 0$

$$-2 + m = 0$$
$$m = 2$$

$\text{rg}(A|b) = 3 :\ m \neq 2$

$\text{rg}(A|b) = 2 :$ m $= 2$

iii) Aplicamos el Teorema de Rouche-Forbenious:

m = 0 $\rightarrow$ rg(A) = 2 $<$ rg($A|b$) = 3 $\rightarrow$ Sis. Incompatible

m = 2 $\rightarrow$ rg(A) = rg($A|b$) = 2 $<$ n = 3 $\rightarrow$ Sis. Comp. Ind.

m $\neq$ 0,2 $\rightarrow$ rg(A) = rg($A|b$) = n = 3 $\rightarrow$ Sis. Comp. Det.

iv) Resolvemos el SCI para m = 2. Podemos prescindir de la ultima ecuacion ya que todos los coeficientes serán ceros.

$$\begin{Bmatrix} x & +2y & +z = 3 \\ 0 & y & +z = 1 \end{Bmatrix}$$

Consideraremos z incognita libre y le daremos valor $z = \lambda$

$$y + \lambda = 1$$

$$y = 1 - \lambda$$

$$x = 3 - 2 - 2\lambda - \lambda$$

$$x = 1 + \lambda$$

La solucion del SCI es: $(1 + \lambda, 1 - \lambda, \lambda) \in R^3$

v) Resolvemos el SCD para todo m $\neq$ 0,2

$$\begin{Bmatrix} x & +my & +z & = 3 \\ 0 & y & +(2m-3)z & = 1 \\ 0 & 0 & (2m^2 - 4m)z & = m - 2 \end{Bmatrix}$$

$$z = \frac{m-2}{2m(m-2)} = \frac{1}{2m}$$

$$y = 1 - \frac{2m-3}{2m} = \frac{2m - 2m + 3}{2m} = \frac{3}{2m}$$

$$x = 3 - \frac{1}{2m} - \frac{3m}{2m} = \frac{6m - 1 - 3m}{2m} = \frac{3m-1}{2m}$$

La solucion del SCD es: $(\frac{3m-1}{2m}, \frac{3}{2m}, \frac{1}{2m}) \in R^3$