Problema 27. Calculeu tots els subgrups del grup dels quaternions H_8 i digueu quins són normals.

El grup dels quaternions, H_8, és el subgrup de $GL(2, \mathbb{C})$ generat per les matrius i, j:

$$Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k := ij = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Si estudiem les diferents potències de les matrius i, j i k, veiem que $i^2 = j^2 = k^2 = -Id$. Aleshores i, j i k són d'ordre 4 i, per tant, i^3, j^3, k^3 són les inverses de i, j, k. A més, veiem que els productes són anticommutatius: $ji = -ij, \quad ik = -ki, \quad kj = -jk$.

Mitjançant la taula, construim els elements de H_8:

$$H_8 = \{Id, -Id, i, -i, j, -j, k, -k\}.$$

Els subgrups són:

$$S_1 = \{Id\},$$

$$S_2 = H_8 = \{Id, -Id, i, -i, j, -j, k, -k\},$$

$$S_3 = \{Id, -Id\},$$

$$S_4 = \{Id, -Id, i, -i\},$$

$$S_5 = \{Id, -Id, j, -j\},$$

$$S_6 = \{Id, -Id, k, -k\}.$$

S_1 i S_2 són normals, així com S_3, ja que la matriu identitat sempre commuta. Veiem que els subgrups S_4, S_5, S_6 són normals mitjançant la proposició per la qual tot subgrup d'índex 2 és normal: com que són subgrups d'ordre 4 i H_8 és d'ordre 8, són d'índex 2 i, per tant, són normals.

En conclusió, tenim que el grup del quaternions té tots els subgrups normals.

La taula que hem usat per resoldre l'exercici és la següent:

H_8	Id	$-Id$	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
Id	Id	$-Id$	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
$-Id$	$-Id$	Id	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	$-Id$	Id	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	Id	$-Id$	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	$-Id$	Id	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	Id	$-Id$	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	$-Id$	Id
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	Id	$-Id$