Àlgebra Lineal (grup tarda)
Primer parcial. 4 d'abril de 2011

1.(5/10) Sea $E = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 en la indeterminada X con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $F = \mathbb{R}(2,2)$ el espacio vectoril de matrices de tipo 2×2 con coeficientes en $\mathbb{R}$.

(a) Sean
$$E_1 = \{a + bx - bx^2 + cx^3 \in E;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$$
y F_1 el subconjunto de F de las matrices de traza nula. Prueba que E_1 es un subespacio vectorial de E y que F_1 es un subespacio vectorial de F. Halla las dimensiones de E_1 y de F_1, y también una base de cada uno de ellos.

(b) Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, y $f : E \longrightarrow F$ la aplicación definida por
$$f(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) - \frac{\lambda}{6}p''(0) & p'(1) \end{pmatrix}.$$
Prueba que f es una aplicación lineal. Halla la matriz de f en las bases
$$\mathbf{u} = (1, x, x^2, x^3), \quad \mathbf{v} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$$
de E y F respectivamente.

(c) Halla el rango y una base del núcleo de f en función de λ. ¿Para qué valores de λ es f un isomorfismo?

(d) Supongamos que $\lambda = 1$. Prueba que $E = E_1 \oplus \operatorname{Ker} f$. Prueba que $F = \operatorname{Im} f + F_1$.

(e) Supongamos que $\lambda = 1$. Halla la dimensión y una base del espacio cociente $F_1/(\operatorname{Im} f \cap F_1)$. ¿Para qué valores de a se tiene $\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right] = 0$ en $F_1/(\operatorname{Im} f \cap F_1)$?

2.(2/10) Sean E y F espacios vectoriales de dimensión 3 y 4 respectivamente. Sean
$$\mathbf{u} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}), \quad \mathbf{v} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4})$$
bases de E y F respectivamente. Sea $f : E \longrightarrow F$ la aplicación lineal tal que
$$f(\overrightarrow{u_1}) = 2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2},\ f(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3},\ \overrightarrow{u_3} \in \operatorname{Ker} f.$$
Sea $\mathbf{v}' = (\overrightarrow{v_1}', \overrightarrow{v_2}', \overrightarrow{v_3}', \overrightarrow{v_4}')$ otra base de F tal que la matriz P cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{v}_i'$ en la base $\mathbf{v}$ es
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sea $\overrightarrow{y}$ un vector de F tal que su vector de coordenadas en la base $\mathbf{v}'$ es $Y' = (y_1', y_2', y_3', y_4')$. Halla el vector $Y \in \mathbb{R}^4$ formado por las coordenadas de $\overrightarrow{y}$ en la base $\mathbf{v}$. Aplica la fórmula anterior al caso en que $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{v_1}' + \overrightarrow{v_2}' + \overrightarrow{v_3}'$.

(b) Sean A la matriz A de f en las bases $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ y B la matriz B de f en las bases $(\mathbf{u}, \mathbf{v}')$. ¿Qué relación existe entre A y B? Halla la matriz B.

3. (Teoría) (3/10)

(a) (0.5/10) Define base (finita) de un espacio vectorial. Da una caracterización del concepto de base finita en términos de combinaciones lineales. Prueba el resultado.

(b) (1/10) Enuncia con precisión el teorema de Steitnitz. Pruébalo para un solo vector.

(c) (0.5/10) Prueba que si un espacio vectorial tiene una base finita, todas las bases tienen el mismo cardinal. Define dimensión

(d) (1/10) Enuncia las propiedades de la dimensión