Problema 8. Sigui $A = \mathbb{R}[X]$ i considerem $I = (X^2+1), J = (X^2+3)$, ideals de A.

(a) Determineu un sistema de representats de A/I.

(b) Demostreu que $A/I \cong A/J$ i expliciteu un isomorfisme.

Solució. (a) Veiem que A/I és $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió 2. El sistema de representants el trobem a partir de la divisió. Sigui $p(X) \in \mathbb{R}[X]$; existeixen $q(X), r(X) \in \mathbb{R}[X]$ únics tals que $p(X) = (X^2+1)q(X) + r(X)$ i $r(X) = 0$ o bé $gr(r(X)) < 2$. Com que $(X^2+1)q(X)$ és de l'ideal, aleshores, tenim que $\overline{p(X)} = \overline{r(X)}$ i tot polinomi admet un representant d'aquesta forma.

Per tant, el sistema de representants és format pels polinomis $r(X)$ de grau < 2.

(b) A partir del teorema d'isomorfia d'anells tenim les dues propietats següents.

- Per una banda,

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ p(x) &\longmapsto p(i) \end{aligned}$$

és un morfisme d'anells, exhautiu, i

$$Kerf = \{p(x) : p(i) = 0\} = (X^2+1);$$

per tant, $\mathbb{R}[x]/(X^2+1) \cong \mathbb{C}$.

- Per l'altra banda,

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ p(x) &\longmapsto p(\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

és un morfisme d'anells, exhautiu, i

$$Kerf = \{p(x) : p(\sqrt{3}i) = 0\} = (X^2+3);$$

per tant, $\mathbb{R}[x]/(X^2+3) \cong \mathbb{C}$.

Finalment, obtenim un isomorfisme

$$\nu : A/I \cong A/J, \text{ amb } \nu = \mu^{-1} \circ \lambda.$$