1. Sigui $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funció de classe C^2 tal que $f(0,0)=0$ i $\nabla f(0,0)=(2,1)$. Considereu la funció $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida per

$$g(x,y)=f(\log(1+y^2),\log(1+x^2)).$$

a) Demostreu que g també és una funció de classe C^2 i calculeu el seu polinomi de Taylor d'ordre 2 en l'origen.

b) Calculeu el límit següent:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(x,y)+2x^2+y^2}{x^2+y^2}.$$

Justifiqueu detalladament les respostes.

Solució:

a) g és una funció de classe C^2 ja que és la composició de dues funcions de classe C^2. En efecte, $g=f\circ h$, on $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ és la funció definida per $h(x,y)=(h_1(x,y),h_2(x,y))$, $h_1(x,y)=\log(1+y^2)$ i $h_2(x,y)=\log(1+x^2)$. Observeu que h és de classe C^∞ (i, en particular, de classe C^2) perquè h_1 i h_2 són de classe C^∞, ja que $h_1=\log\circ p$ i $h_2=\log\circ q$, on $\log:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ és la funció logaritme (que és de classe C^∞) i $p,q:\mathbb{R}^2\to(0,+\infty)$ són les funcions polinòmiques definides per $p(x,y)=1+y^2$ i $q(x,y)=1+x^2$ (i, per tant, també són de classe C^∞).

Ara anem a calcular el polinomi de Taylor de g d'ordre 2 en l'origen per dos mètodes:

Mètode 1

El polinomi de Taylor de g d'ordre 2 en l'origen és

$$p_2(x,y)=g(0,0)+\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)\,x+\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\,y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0)\,x^2+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0)\,y^2\right)+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0)\,xy.$$

És clar que $g(0,0)=f(0,0)=0$ i a més a més, per la regla de la cadena, tenim que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(h(x,y))\,\frac{2x}{1+x^2};\quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(h(x,y))\,\frac{2y}{1+y^2}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(x,y))\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}(h(x,y))\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(x,y))\left(\frac{2y}{1+y^2}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}(h(x,y))\,\frac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(h(x,y))\,\frac{2y}{1+y^2}\,\frac{2x}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

I, com que $h(0,0)=(0,0)$ i $(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))=\nabla f(0,0)=(2,1)$, deduïm que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0)=0,\ \ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0)=2\,\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=2\ \text{ i }\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0)=2\,\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=4.$$

En conclusió, $p_2(x,y)=x^2+2y^2$.

Mètode 2

Sabem que el polinomi de Taylor de g d'ordre 2 en l'origen és l'únic polinomi p de grau més petit o igual que 2 pel qual tenim el desenvolupament asimptòtic

$$g(x,y) = p(x,y) + o(x^2+y^2) \quad ((x,y) \to (0,0)). \tag{1}$$

Anem a obtenir aquest desenvolupament asimptòtic de g a partir del desenvolupament de Taylor de f d'ordre 1 en l'origen. En efecte, com que f és de classe C^2, f és diferenciable en l'origen i per tant tenim el desenvolupament de Taylor de f d'ordre 1 en l'origen:

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + o(\|(x,y)\|) \quad ((x,y) \to (0,0)).$$

Però $f(0,0) = 0$ i $(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = \nabla f(0,0) = (2,1)$, i en conseqüència

$$f(x,y) = 2x + y + o(\|(x,y)\|) \quad ((x,y) \to (0,0)). \tag{2}$$

D'altra banda, per la derivabilitat de la funció logaritme en el punt $x = 1$ tenim que $\log(1+t) = t + o(t)$, quan $t \to 0$, i en particular

$$\log(1+t^2) = t^2 + o(t^2) \quad (t \to 0). \tag{3}$$

Com que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\log(1+y^2), \log(1+x^2)) = (0,0),$$

dels desenvolupaments (2) i (3) deduïm que

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f((\log(1+y^2), \log(1+x^2)) \\ &= 2\log(1+y^2) + \log(1+x^2) + o(\|(\log(1+y^2), \log(1+x^2))\|) \\ &= 2y^2 + x^2 + o(x^2+y^2) \quad ((x,y) \to (0,0)), \end{aligned}$$

ja que $\|(\log(1+y^2), \log(1+x^2))\| \leq \log(1+y^2) + \log(1+x^2) \leq x^2+y^2$. Així doncs, el polinomi $p(x,y) = x^2 + 2y^2$ compleix (1), i en conclusió $p_2(x,y) = x^2+2y^2$ és el polinomi de Taylor de g d'ordre 2 en l'origen.

b) Com que $p_2(x,y) = x^2 + 2y^2$ és el polinomi de Taylor de g d'ordre 2 en l'origen tenim el desenvolupament asimptòtic

$$g(x,y) = x^2 + 2y^2 + o(x^2+y^2) \quad ((x,y) \to (0,0)).$$

Per tant,

$$g(x,y) + 2x^2 + y^2 = 3(x^2+y^2) + o(x^2+y^2) \quad ((x,y) \to (0,0)),$$

i en conseqüència

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y) + 2x^2 + y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3 + \frac{o(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 3.$$

2. a) Enuncieu el teorema de la funció inversa.

b) Demostreu que el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x^3y + y^3u + e^{-u}v = 1 \\ e^{-x}y + yu^3 + uv^3 = 1 \end{cases}$$

defineix dues funcions implícites $u = g(x, y)$ i $v = h(x, y)$ en un entorn del punt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 1, 0, 1)$. Té la funció $F(x, y) = (g(x, y), y + h(x, y))$ inversa diferenciable en un entorn del punt $(0, 1)$?

Justifiqueu detalladament les respostes.

Solució:

a) Teorema de la funció inversa

Siguin $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funció de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ i $a \in U$. Si la diferencial de f en a, $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, és un isomorfisme lineal, o equivalentment, si $\det Df(a) \neq 0$, llavors f és un difeomorfisme local de classe C^k en a, és a dir, existeix un entorn obert $V \subset U$ d'a tal que $W = f(V)$ és un subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$ i f és un difeomorfisme de classe C^k entre V i W (això vol dir que $f_{/V} : V \to W$ és bijectiva i de classe C^k, i la seva inversa $(f_{/V})^{-1} : W \to V$ també és de classe C^k).

b) Per demostrar que el sistema d'equacions de l'enunciat defineix dues funcions implícites $u = g(x, y)$ i $v = h(x, y)$ en un entorn del punt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 1, 0, 1)$, només cal aplicar el teorema de la funció implícita a la funció $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, definida per

$$f(x, y, u, v) = (x^3y + y^3u + e^{-u}v - 1,\ e^{-x}y + yu^3 + uv^3 - 1),$$

en el punt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 1, 0, 1)$. Això es pot fer perquè f és de classe C^∞, $f(0, 1, 0, 1) = (0, 0)$ i

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}(0, 1, 0, 1) = \begin{vmatrix} y^3 - e^{-u}v & e^{-u} \\ 3yu^2 + v^3 & 3uv^2 \end{vmatrix}_{(0,1,0,1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Aleshores el teorema de la funció implícita assegura que el sistema l'equacions de l'enunciat (és a dir, $f(x, y, u, v) = (0, 0)$) defineix dues funcions implícites $u = g(x, y)$ i $v = h(x, y)$ (de classe C^∞) en un entorn del punt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 1, 0, 1)$. Concretament, existeixen un entorn obert $W \subset \mathbb{R}^4$ de $(0, 1, 0, 1)$, un entorn obert $V \subset \mathbb{R}^2$ de $(0, 1)$ i dues funcions $g, h : V \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tals que

$$\{ (x, y, u, v) \in W \ :\ f(x, y, u, v) = (0, 0) \} = \{ (x, y, g(x, y), h(x, y)) \ :\ (x, y) \in V \}. \tag{4}$$

En particular, com que $(0, 1, 0, 1) \in W$ i $f(0, 1, 0, 1) = (0, 0)$, tenim que $g(0, 1) = 0$ i $h(0, 1) = 1$.

D'altra banda, com que g i h són funcions de classe C^∞ en V, tenim que la funció $F : V \to \mathbb{R}^2$, definida per $F(x, y) = (g(x, y),\ y + h(x, y))$, també és de classe C^∞. Per decidir si F té inversa diferenciable en un entorn del punt $(0, 1)$ anem a calcular el jacobià de F en $(0, 1)$:

$$\det DF(0, 1) = \begin{vmatrix} g_x(0, 1) & g_y(0, 1) \\ h_x(0, 1) & 1 + h_y(0, 1) \end{vmatrix}$$

Així doncs, hem de calcular les derivades parcials de primer ordre de g i h en $(0, 1)$. Observeu que (4) mostra que, per a tot $(x, y) \in V$, es compleixen les identitats següents:

$$x^3y + y^3g(x, y) + e^{-g(x,y)}h(x, y) = 1 \tag{5}$$

$$e^{-x}y + y(g(x, y))^3 + g(x, y)(h(x, y))^3 = 1. \tag{6}$$

Ara derivant (5) respecte x i y obtenim que, per a tot $(x,y) \in V$, es compleixen:

$$\begin{aligned} (7) \qquad 3x^2y + y^3g_x(x,y) + (h_x(x,y) - g_x(x,y)h(x,y))e^{-g(x,y)} &= 0 \\ (8) \qquad x^3 + 3y^2g(x,y) + y^3g_y(x,y) + (h_y(x,y) - g_y(x,y)h(x,y))e^{-g(x,y)} &= 0 \end{aligned}$$

I derivant (6) respecte x i y tenim que, per a tot $(x,y) \in V$, es compleixen:

$$\begin{aligned} (9) \qquad -ye^{-x} + 3yg_x(x,y)(g(x,y))^2 + g_x(x,y)(h(x,y))^3 + 3h_x(x,y)(h(x,y))^2g(x,y) &= 0 \\ (10) \quad e^{-x} + (g(x,y))^3 + 3yg_y(x,y)(g(x,y))^2 + g_y(x,y)(h(x,y))^3 + 3h_y(x,y)(h(x,y))^2g(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Avaluant (7), (8), (9) i (10) en $(x,y) = (0,1)$, tenint en compte que $g(0,1) = 0$ i $h(0,1) = 1$, deduïm que $h_x(0,1) = h_y(0,1) = 0$, $g_x(0,1) = 1$ i $g_y(0,1) = -1$. Per tant,

$$\det DF(0,1) = \begin{vmatrix} g_x(0,1) & g_y(0,1) \\ h_x(0,1) & 1 + h_y(0,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

En conseqüència, pel teorema de la funció inversa, sabem que F té inversa de classe C^∞ (i per tant diferenciable) en un entorn del punt $(0,1)$.

3. a) Calculeu els extrems relatius de la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^2$.

b) Trobeu la distància del punt $(0,0,1)$ a la superfície $z = x^2 + 2y^2$.

Justifiqueu detalladament les respostes.

Solució:

a) Observeu que f és de classe C^∞ ja que és un polinomi. Per tant, els extrems relatius de f han de ser punts crítics de f. Els punts crítics de f són els punts (x,y) que compleixen les dues equacions següents:

$$\begin{aligned} (11) \qquad 0 &= f_x(x,y) = 3x^2 + 3y = 3(x^2 + y) \\ (12) \qquad 0 &= f_y(x,y) = 3x + 2y \end{aligned}$$

Aleshores (11) equival a $y = -x^2$ i substituïnt en (12) obtenim que

$$0 = 3x - 2x^2 = x(3 - 2x),$$

i les solucions d'aquesta equació són $x = 0$ i $x = \frac{3}{2}$. En definitiva, els punts crítics de f són $(0,0)$ i $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$. Per decidir quins d'aquests punts són extrems relatiius de f i de quin tipus utilitzarem la matriu hessiana de f:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Com que

$$\det Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -9 < 0,$$

resulta que $Hf(0,0)$ té un valor propi positiu i un valor propi negatiu. Per tant, $Hf(0,0)$ no és semidefinida positiva ni semidefinida negativa, i en conseqüència $(0,0)$ no és un extrem relatiu de f (és un punt de sella). D'altra banda,

$$Hf(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{9}{4}) = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

i com que $\Delta_1 = 9 > 0$ i $\Delta_2 = \det Hf(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}) = 18 - 9 = 9 > 0$, resulta que $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ és un mínim local de f.

En conclusió, f només té un extrem relatiu que és el punt $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ i es tracta d'un mínim relatiu.

b) Observeu que la superfície S d'equació $z = x^2 + 2y^2$ és un subconjunt tancat de $\mathbb{R}^3$ ja que $S = p^{-1}(0)$, on $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, és la funció definida per $p(x, y) = x^2 + 2y^2 - z$, que és contínua ja que és un polinomi. Com que sabem que la distància d'un punt a un subconjunt tancat de $\mathbb{R}^n$ s'assoleix en algun punt del subconjunt tancat, la distància del punt $(0, 0, 1)$ a S s'assoleix en algun punt $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Calcularem aquest(s) punt(s) $(x_0, y_0, z_0) \in S$ on s'assoleix aquesta distància. Farem el càlcul per dos mètodes:

Mètode 1

Observeu que en el punt $(x_0, y_0, z_0) \in S$ s'assoleix la distància de $(0, 0, 1)$ a S si i només si (x_0, y_0) és un mínim absolut de la funció $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per

$$g(x, y) = \|(x - 0,\ y - 0,\ x^2 + 2y^2 - 1)\|^2 = x^2 + y^2 + (x^2 + 2y^2 - 1)^2.$$

(Noteu que $g(x, y)$ és el quadrat de la distància del punt $(0, 0, 1)$ al punt $(x, y, x^2 + 2y^2)$ de S.)
Per tant, volem calcular el(s) mínim(s) absolut(s) de g. Ara tot mínim absolut de g també és un mínim relatiu de g, i per tant un punt crític de g (ja que g és una funció diferenciable, perquè és un polinomi). Així doncs calcularem primer els punts crítics de g, que són els punts (x, y) que compleixen les dues equacions següents:

$$\begin{aligned} (13) \qquad 0 &= g_x(x, y) = 2x + 2(x^2 + 2y^2 - 1)2x = 2x(1 + 2(x^2 + 2y^2 - 1)) \\ (14) \qquad 0 &= g_y(x, y) = 2y + 2(x^2 + 2y^2 - 1)4y = 2y(1 + 4(x^2 + 2y^2 - 1)) \end{aligned}$$

És evident que (x, y) compleix (13) si i només si $x = 0$ o bé $1 + 2(x^2 + 2y^2 - 1) = 0$, i en conseqüència les solucions de (13) són els punts de la recta $x = 0$ i els de l'el·lipse $x^2 + 2y^2 = \frac{1}{2}$. També és evident que (x, y) compleix (14) si i només si $y = 0$ o bé $1 + 4(x^2 + 2y^2 - 1) = 0$, i en conseqüència les solucions de (14) són els punts de la recta $y = 0$ i els de l'el·lipse $x^2 + 2y^2 = \frac{3}{4}$. En definitiva, els punts crítics de g són els punts (x, y) que compleixen alguna de les tres afirmacions següents:

- $x = y = 0$, que només la compleix el punt $(0, 0)$.
- $x = 0$ i $x^2 + 2y^2 = \frac{3}{4}$, que només la compleixen el punts $(0, \pm\sqrt{\frac{3}{8}})$.
- $x^2 + 2y^2 = \frac{1}{2}$ i $y = 0$, que només la compleixen el punts $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

Així doncs, els punts crítics de g són els cinc punts següents: $(0, 0)$, $(0, \pm\sqrt{\frac{3}{8}})$ i $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Com que $g(0, 0) = 1 > g(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{12}{16} > g(0, \pm\sqrt{\frac{3}{8}}) = \frac{7}{16}$, concloem que g només té un mínim absolut que és el punt $(0, \pm\sqrt{\frac{3}{8}})$. En conseqüència, la distància de $(0, 0, 1)$ a S és igual a $\sqrt{g(0, \pm\sqrt{\frac{3}{8}})} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Mètode 2

Observeu que la distància de $(0,0,1)$ a S s'assoleix en $(x_0,y_0,z_0)\in S$ si i només si (x_0,y_0,z_0) és un mínim absolut de $h_{/S}$, on $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ és la funció definida per $h(x,y,z)=x^2+y^2+(z-1)^2$. (Noteu que $h(x,y,z)$ és el quadrat de la distància entre $(0,0,1)$ i (x,y,z).) En particular, si la distància de $(0,0,1)$ a S s'assoleix en $(x_0,y_0,z_0)\in S$ llavors (x_0,y_0,z_0) és un mínim relatiu de $h_{/S}$. Com que h és una funció diferenciable (ja que és un polinomi) i $S=p^{-1}(0)$, on $p(x,y,z)=x^2+2y^2-z$ és una funció de classe C^1 (perquè és un polinomi) que compleix $\nabla p(x,y,z)=(2x,4y,-1)\neq(0,0,0)$, per a tot $(x,y,z)\in S$, podem aplicar el teorema dels multiplicadors de Lagrange per obtenir que si $(x_0,y_0,z_0)\in S$ és un extrem relatiu de $h_{/S}$ llavors existeix un nombre $\lambda\in\mathbb{R}$ (el multiplicador de Lagrange) tal que (x_0,y_0,z_0) és solució de l'equació $\nabla h(x,y,z)=\lambda\nabla p(x,y,z)$, i per tant de les quatre equacions següents:

$$
\begin{aligned}
2x &= \lambda 2x && (15)\\
2y &= \lambda 4y && (16)\\
2(z-1) &= \lambda(-1) && (17)\\
z &= x^2+2y^2 && (18)
\end{aligned}
$$

Observeu que:

- (15) es pot escriure com a $x(1-\lambda)=0$, que es compleix si i només si $x=0$ o bé $\lambda=1$.
- (16) es pot escriure com a $y(1-2\lambda)=0$, que es compleix si i només si $y=0$ o bé $\lambda=\frac{1}{2}$.
- (17) es pot escriure com a $z=1-\frac{\lambda}{2}$.

En definitiva, els punts (x,y,z) que són solució de les quatre equacions (15),(16),(17) i (18) són els que compleixen alguna de les tres afirmacions següents:

- $x=y=0$, $z=x^2+2y^2$, que només compleix el punt $(0,0,0)$.
- $x=0$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $z=1-\frac{\lambda}{2}$ i $z=x^2+2y^2$: Els únics punts que compleixen aquestes condicions són $(0,\pm\sqrt{\frac{3}{8}},\frac{3}{4})$, ja que si $\lambda=\frac{1}{2}$ i $x=0$ llavors $z=1-\frac{\lambda}{2}=\frac{3}{4}$ i $2y^2=x^2+2y^2=z=\frac{3}{4}$ i per tant $y^2=\frac{3}{8}$, és a dir, $y=\pm\sqrt{\frac{3}{8}}$.
- $\lambda=1$, $y=0$, $z=1-\frac{\lambda}{2}$ i $z=x^2+2y^2$: Els únics punts que compleixen aquestes condicions són $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{2})$, ja que si $\lambda=1$ i $y=0$ llavors $z=1-\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{2}$ i $x^2=x^2+2y^2=z=\frac{1}{2}$ i per tant $x^2=\frac{1}{2}$, és a dir, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Així doncs, el(s) mínim(s) absolut(s) de $h_{/S}$ està (estan) entre els cinc punts següents: $(0,0,0)$, $(0,\pm\sqrt{\frac{3}{8}},\frac{3}{4})$ i $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{2})$. Com que $h(0,0,0)=1>h(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{2})=\frac{12}{16}>h(0,\pm\sqrt{\frac{3}{8}},\frac{3}{4})=\frac{7}{16}$, concloem que h només té un mínim absolut que és el punt $(0,\pm\sqrt{\frac{3}{8}},\frac{3}{4})$. En conseqüència, la distància de $(0,0,1)$ a S és igual a $\sqrt{h(0,\pm\sqrt{\frac{3}{8}},\frac{3}{4})}=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.