1. a) Definiu el concepte de conjunt obert. Proveu que la intersecció d'un nombre finit d'oberts és un obert. És sempre oberta la intersecció d'infinits oberts?

b) Calculeu l'adherència del conjunt

$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1, \, x + y < 0 \}.$$

Justifiqueu detalladament les respostes.

Solució:

a) *Definició de conjunt obert:* Un conjunt $A \subset \mathbb{R}^n$ és *obert* quan cada punt d'A és el centre d'una bola oberta continguda en A, és a dir, per a cada $a \in A$ existeix $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset A$.

La intersecció d'un nombre finit d'oberts és un obert: Siguin $A_1, \ldots, A_m \subset \mathbb{R}^n$ conjunts oberts. Volem provar que $A = A_1 \cap \cdots \cap A_m$ també és obert, és a dir. per a cada $a \in A$ existeix $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset A$.

Sigui $a \in A$. Llavors $a \in A_j$, per a $j = 1, \ldots, m$, i, com que cada A_j és obert, existeix $r_j > 0$ tal que $B(a, r_j) \subset A_j$. Ara $r = \min(r_1, \ldots, r_m) > 0$ i compleix que $r \leq r_j$, per a $j = 1, \ldots, m$. Per tant, $B(a,r) \subset B(a,r_j) \subset A_j$, per a $j = 1, \ldots, m$. En conseqüència, $B(a,r) \subset A$. I hem provat que A és obert.

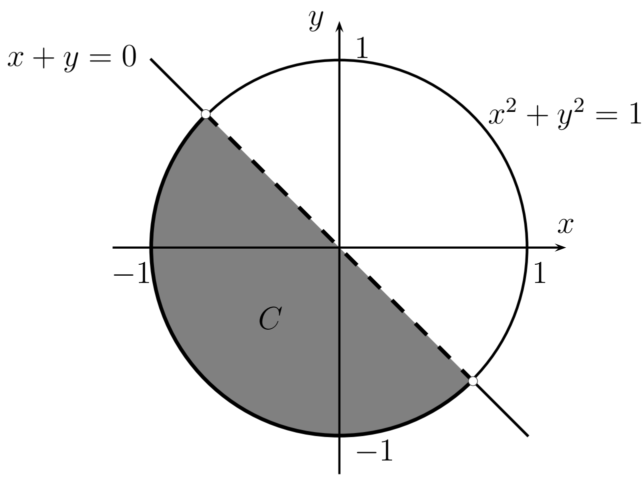
La intersecció d'infinits oberts no sempre és oberta: Provarem aquesta afirmació trobant una familia infinita de conjunts oberts tal que la seva intersecció no és oberta.

Sigui $a \in \mathbb{R}^n$. Per a cada $r > 0$ considerem la bola oberta $B(a,r)$ centrada en a i de radi r. Aleshores $\cap_{r>0} B(a,r) = \{a\}$:

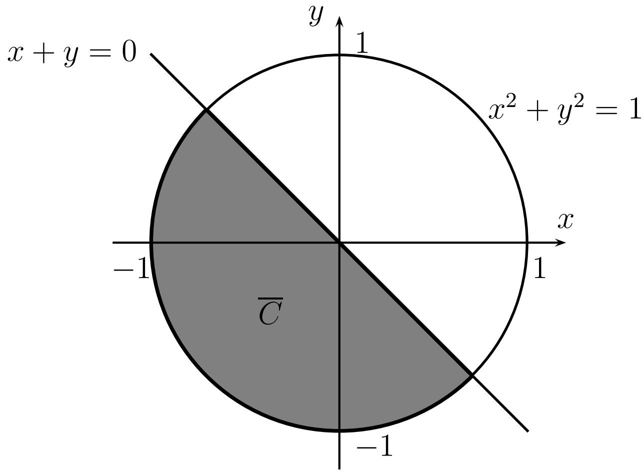
- $\cap_{r>0} B(a,r) \supset \{a\}$: És obvi!!
- $\cap_{r>0} B(a,r) \subset \{a\}$: Sigui $x \in \cap_{r>0} B(a,r)$. Llavors $\|x - a\| < r$, per a tot $r > 0$, i per tant $\|x - a\| \leq \lim_{r \to 0^+} r = 0$. En conseqüència, $\|x - a\| = 0$, és a dir, $x = a$.

I és clar que el conjunt $\{a\}$ no és obert, ja que tota bola oberta centrada en a conté punts diferents de a: si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $r > 0$ llavors $(a_1 + r/2, a_2, \ldots, a_n) \in B(a,r) \setminus \{a\}$.

b) El conjunt C està dibuixat en la figura següent:



Per tant, $\overline{C}$ ha de ser el conjunt següent:



Així doncs, volem demostrar que

$$\overline{C} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1, \, x + y \leq 0 \}.$$

Per fer això provarem les dues inclusions següents:

- $\overline{C} \subset \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1, \, x + y \leq 0 \}$:

  Sigui $(x, y) \in \overline{C}$. Aleshores $(x, y) = \lim(x_n, y_n)$, essent $\{(x_n, y_n)\}_n$ una successió de punts de C. Com que $(x_n, y_n) \in C$, tenim que $x_n^2 + y_n^2 \leq 1$ i $x_n + y_n < 0$, i passant al límit obtenim que $x^2 + y^2 = \lim x_n^2 + y_n^2 \leq 1$ i $x + y = \lim x_n + y_n \leq 0$, és a dir, $x^2 + y^2 \leq 1$ i $x + y \leq 0$, com voliem demostrar.

- $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1, \, x + y \leq 0 \} \subset \overline{C}$:

  Sigui $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2 + y^2 \leq 1$ i $x + y \leq 0$. Si $x + y < 0$ llavors $(x, y) \in C \subset \overline{C}$. Suposem doncs que $x + y = 0$, i per a cada enter $n \geq 1$ considerem el punt

  $$(x_n, y_n) = \frac{n}{n+1}(x, y) + \frac{1}{n+1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{nx - \frac{1}{\sqrt{2}}}{n+1}, \frac{ny - \frac{1}{\sqrt{2}}}{n+1}\right).$$

  Com que $\lim x_n = x$ i $\lim y_n = y$, tenim que $\lim(x_n, y_n) = (x, y)$. A més a més, $(x_n, y_n) \in C$, ja que

  $$x_n^2 + y_n^2 = \frac{n^2(x^2 + y^2) - n\sqrt{2}(x + y) + 1}{(n+1)^2} = \frac{n^2(x^2 + y^2) + 1}{(n+1)^2} \leq \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2} < 1$$

  i

  $$x_n + y_n = \frac{n(x + y) - \sqrt{2}}{n+1} = \frac{-\sqrt{2}}{n+1} < 0.$$

  I hem provat que $(x, y) \in \overline{C}$.

2. a) Definiu els conceptes de límit d'una funció en un punt i de límit d'una funció en un punt segons un subconjunt. Relacioneu els dos conceptes.

b) Sigui $U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x+y \neq 0 \}$. Per a cada $n \in \mathbb{Z}$ considereu la funció $f_n : U \to \mathbb{R}$ definida per

$$f_n(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{(x+y)^n}.$$

Per a quins enters n existeix una funció contínua $g_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g_n(x,y) = f_n(x,y)$, per a tot $(x,y) \in U$?

Justifiqueu detalladament les respostes.

Solució:

a) *Definició de límit d'una funció en un punt:* Siguin $a \in \mathbb{R}^n$ un punt d'acumulació d'un conjunt $D \subset \mathbb{R}^n$ i $f : D \to \mathbb{R}^m$ una funció. El *límit de la funció f en a* és $\ell \in \mathbb{R}^m$ ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$) quan es compleix qualsevol de les dues afirmacions (equivalents) següents:

a) Per a cada $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ i $0 < \|x-a\| < \delta$ llavors $\|f(x)-\ell\| < \varepsilon$.

b) Si $\{x_j\}_{j \geq 1}$ és una successió de punts de $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim x_j = a$ llavors $\lim f(x_j) = \ell$.

Definició de límit d'una funció en un punt segons un subconjunt: Siguin $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt i $f : D \to \mathbb{R}^m$ una funció. Siguin $a \in \mathbb{R}^n$ un punt d'acumulació d'un subconjunt E de D. Diem que el *límit de la funció f en a segons el conjunt E* és $\ell \in \mathbb{R}^m$ ($\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x) = \ell$) quan el límit de $f_{/E}$ en a és $\ell \in \mathbb{R}^m$, és a dir, quan es compleix qualsevol de les dues afirmacions (equivalents) següents:

a) Per a cada $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $x \in E$ i $0 < \|x-a\| < \delta$ llavors $\|f(x)-\ell\| < \varepsilon$.

b) Si $\{x_j\}_{j \geq 1}$ és una successió de punts d'$E \setminus \{a\}$ tal que $\lim x_j = a$ llavors $\lim f(x_j) = \ell$.

Relacions entre els dos conceptes anteriors:

1. Si el límit de la funció f en a és $\ell \in \mathbb{R}^m$ aleshores el límit de la funció f en a segons qualsevol subconjunt E de D tal que a sigui punt d'acumulació d'E també és ℓ. Això és conseqüència directa de les dues definicions anteriors.
2. El recíproc de la implicació anterior és fals, és a dir, si existeix el límit d'una funció en un punt segons un subconjunt, pot no existir el límit d'aquesta funció en el punt. Per exemple, la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida per $f(x,y) = 0$, si $y \neq 0$, i $f(x,0) = 1$, compleix que $\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in E}} f(x) = 1$, essent $E = \mathbb{R} \times \{0\}$, ja que $f_{/E} \equiv 1$, i també que $\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in E'}} f(x) = 0$, essent $E' = \{0\} \times \mathbb{R}$, ja que $f_{/E' \setminus \{(0,0)\}} \equiv 0$. Per tant, 1 implica que no existeix el límit de f en $(0,0)$.
3. Siguin $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt, $f : D \to \mathbb{R}^m$ una funció i $\ell \in \mathbb{R}^m$. Suposem que existeix un entorn V d'a tal que $V \cap (D \setminus \{a\}) = E_1 \cup \cdots \cup E_N$, essent a punt d'acumulació de cada conjunt $E_j \subset \mathbb{R}^n$. Aleshores són equivalents les dues afirmacions següents:
   (a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
   (b) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E_j}} f(x) = \ell$, per a $j = 1, \ldots, N$.

   Demostració: (a) $\Rightarrow$ (b): És conseqüència directa de 1.

   (b) $\Rightarrow$ (a): Com que V és un entorn d'a, existeix $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset V$. Sigui $\varepsilon > 0$. La hipòtesi (b) implica que, per a $j = 1, \ldots, N$, existeix $\delta_j > 0$ tal que si

$x \in E_j$ i $0 < \|x-a\| < \delta_j$ llavors $\|f(x)-\ell\| < \varepsilon$. Aleshores $\delta = \min(r, \delta_1, \dots, \delta_N) > 0$ i cada punt $x \in D$ tal que $0 < \|x-a\| < \delta$ compleix que

$$x \in B(a,r) \cap (D \setminus \{a\}) \subset V \cap (D \setminus \{a\}) = E_1 \cup \cdots \cup E_N,$$

per tant existeix $j \in \{1, \dots, N\}$ tal que $x \in E_j$ i $0 < \|x-a\| < \delta_j$, i en conseqüència $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$. I hem provat (a).

4. El resultat anterior és fals si canviem la descomposició finita $V \cap (D \setminus \{a\}) = \cup_{j=1}^{N} E_j$ per una descomposició infinita $V \cap (D \setminus \{a\}) = \cup_{j\in J} E_j$. Per exemple, considerem la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida per $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$, si $y \neq 0$, i $f(x,0) = 0$. Aleshores $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ és la unió del conjunt $E' = \{\, (x,0) \ : \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,\}$ i dels conjunts $E_c = \{\, (cy, y) \ : \ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,\}$, amb $c \in \mathbb{R}$. Observeu que $(0,0)$ és punt d'acumulació de tots aquests conjunts, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E'}} f(x,y) = 0$ (ja que $f_{E'} \equiv 0$) i

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E_c}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(cy,y) = \lim_{y\to 0} \frac{(cy)^2}{y} = \lim_{y\to 0} c^2 y = 0, \quad \text{per a cada } c \in \mathbb{R}.$$

A més a més, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in P}} f(x) = 1$, essent $P = \{\, (x, x^2) \ : \ x \in \mathbb{R} \,\}$, ja que $f_{/P} \equiv 1$, i per tant 1 implica que no existeix el límit de f en $(0,0)$.

b) Si existeix una funció contínua $g_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g_n(x,y) = f_n(x,y)$, per a tot $(x,y) \in U$, aleshores, per a cada $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus U$, tenim que

$$g_n(x_0,y_0) \overset{(a)}{=} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g_n(x,y) \overset{(b)}{=} \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in U}} g_n(x,y) \overset{(c)}{=} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_n(x,y).$$

((a): perquè g_n és contínua en (x_0,y_0); (b): per 1; (c): ja que $g_n = f_n$ en U.)

Ara, per a cada $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus U$, com que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x+y) = 0$, es compleix que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_n(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\sin(x+y)}{(x+y)^n} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t^n} = \lim_{t\to 0} t^{1-n} \frac{\sin t}{t},$$

$$\text{i com que} \quad \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{t\to 0} t^{1-n} = \begin{cases} \text{no existeix,} & \text{si } n > 1 \text{ i } n \text{ és parell,} \\ +\infty, & \text{si } n > 1 \text{ i } n \text{ és senar,} \\ 1, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n < 1, \end{cases}$$

resulta que

$$\text{(1)} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_n(x,y) = \begin{cases} \text{no existeix,} & \text{si } n > 1 \text{ i } n \text{ és parell,} \\ +\infty, & \text{si } n > 1 \text{ i } n \text{ és senar,} \\ 1, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n < 1. \end{cases}$$

En conseqüència, si existeix una funció contínua $g_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g_n(x,y) = f_n(x,y)$, per a tot $(x,y) \in U$, llavors $n \leq 1$ i, a més a més, $g_n \equiv 1$ en $\mathbb{R}^2 \setminus U$, si $n = 1$, i $g_n \equiv 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus U$, si $n < 1$.

Recíprocament, anem a comprovar que si $n \leq 1$ aleshores existeix una funció contínua $g_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g_n(x,y) = f_n(x,y)$, per a tot $(x,y) \in U$. Només cal comprovar que, per a cada $n \leq 1$, la funció $g_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per $g_n = f_n$ en U, $g_n \equiv 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus U$, si $n < 1$, i $g_1 \equiv 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus U$, és contínua.

En efecte, com que f_n és una funció contínua en l'obert U (ja que és el quocient de dues funcions contínues en U i la del denominador no té cap zero en U), g_n és contínua en cada punt d'U. Sigui $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus U$. Aleshores

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in U}} g_n(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_n(x,y) \overset{\text{per (1)}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si } n=1 \\ 0, & \text{si } n<1 \end{array} \right\} = g_n(x_0,y_0).$$

D'altra banda, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus U}} g_n(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si } n=1 \\ 0, & \text{si } n<1 \end{array} \right\} = g_n(x_0,y_0).$

Per tant,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g_n(x,y) = g_n(x_0,y_0)$$

(aqui hem utilitzat 3), i en conseqüència g_n és contínua en (x_0, y_0).

En conclusió, existeix una funció contínua $g_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g_n(x,y) = f_n(x,y)$, per a tot $(x,y) \in U$, si i només si $n \leq 1$.

3. a) Demostreu que si una funció és diferenciable en un punt aleshores també és contínua en aquest punt.

b) Per a cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considereu la funció $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^\alpha}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b.1) Determineu els nombres $\alpha \in \mathbb{R}$ per als quals f_α és contínua.

(b.2) Determineu els nombres $\alpha \in \mathbb{R}$ per als quals f_α és diferenciable.

Justifiqueu detalladament les respostes.

Solució:

a) Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en un punt $a \in U$. Volem demostrar que f és contínua en a, és a dir,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{o, equivalentment,} \quad \lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = 0.$$

En efecte, si $x \in U \setminus \{a\}$ llavors $f(x) - f(a) = g(x)\,\|x-a\| + Df(a)(x-a)$, on

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)}{\|x-a\|}.$$

Però $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (perquè f és diferenciable en a), $\lim_{x\to a} \|x-a\| = 0$ i

$$\lim_{x\to a} Df(a)(x-a) = \lim_{y\to 0} Df(a)(y) = Df(a)(0) = 0$$

(perquè $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és lineal i per tant contínua en a i compleix que $Df(a)(0) = 0$). En conseqüència,

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)\left(\lim_{x\to a} \|x-a\|\right) + \lim_{x\to a} Df(a)(x-a) = 0.$$

b) Observeu que f_α és diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ja que és el quocient de dues funcions diferenciables en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ i la del denominador no té cap zero en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En conseqüència, f_α és diferenciable (i per tant contínua) en cada punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b.1) Ja sabem que f_α és contínua en cada punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per tant, f_α és contínua si i només si f_α és contínua en l'origen, és a dir,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = f_\alpha(0,0) = 0. \tag{2}$$

Com que

$$|f_\alpha(x,y)| \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^\alpha} = (x^2+y^2)^{2-\alpha}, \quad \text{per a cada } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \tag{3}$$

i $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{2-\alpha} = 0$, si $2-\alpha > 0$, resulta que f_α és contínua si $\alpha < 2$.

D'altra banda, tenim que $\lim\limits_{x\to 0} f_\alpha(x,0) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2)^{2-\alpha} = \lim\limits_{x\to 0^+} t^{2-\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = 2, \\ +\infty, & \text{si } \alpha > 2. \end{cases}$

Per tant, si $\alpha \geq 2$, no es compleix (2) i en conseqüència f_α no és contínua.

En conclusió, f_α és contínua si i només si $\alpha < 2$.

(b.2) Ja sabem que f_α és diferenciable en cada punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, i per tant f_α és diferenciable si i només si f_α és diferenciable en $(0,0)$.

Si f_α és diferenciable en $(0,0)$ llavors existeixen $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0)$ i $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0)$, i

$$Df(0,0)(x,y) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0)y, \quad \text{per a cada } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Observeu que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x,0) - f_\alpha(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} x(x^2)^{1-\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}|x|^{3-2\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha < 3/2, \\ \text{no existeix}, & \text{si } \alpha \geq 3/2, \end{cases}$$

ja que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|}|x|^{3-2\alpha} = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{si } \alpha < 3/2 \\ 1, & \text{si } \alpha = 3/2 \\ +\infty, & \text{si } \alpha > 3/2 \end{array}\right\} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}|x|^{3-2\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha < 3/2, \\ -1, & \text{si } \alpha = 3/2, \\ -\infty, & \text{si } \alpha > 3/2. \end{cases}$$

A més a més, $f_\alpha(x,y) = f_\alpha(y,x)$, per a cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Per tant:

$\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0) = 0$, si $\alpha < 3/2$, i $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0)$ i $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0)$ no existeixen, si $\alpha \geq 3/2$.

En definitiva, si f_α és diferenciable en $(0,0)$ llavors $\alpha < 3/2$ i $Df(0,0) \equiv 0$.

Recíprocament, suposem que $\alpha < 3/2$. Com que

$$\frac{|f_\alpha(x,y) - f_\alpha(0,0)|}{\|(x,y)\|} \overset{\text{per (3)}}{\leq} \frac{(x^2+y^2)^{2-\alpha}}{\|(x,y)\|} = \|(x,y)\|^{3-2\alpha}, \quad \text{per a cada } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

i $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|^{3-2\alpha} = 0$, resulta que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f_\alpha(x,y) - f_\alpha(0,0)}{\|(x,y)\|} = 0$, i per tant f_α és diferenciable en $(0,0)$.

En conclusió, f_α és diferenciable si i només si $\alpha < 3/2$.