Problema 5. Demostreu que, per a $n \geq 2$, el subconjunt de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ format per les matrius simètriques no és un subgrup de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$.

Definim aquest subconjunt de la següent manera:

$$\mathrm{S}(n,\mathbb{Z}) \quad := \{M \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{Z}) : (\det(M) \in \mathbb{Z}^*) \wedge \left(M = M^T\right)\}$$

Solució. Per demostrar que aquest subconjunt no és un subgrup de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, veurem que el producte de matrius simètriques no és necessàriament una matriu simètrica (no es compleix l'operació interna). Veurem el cas particular per a n=2 i després generalitzarem per a n$\geq$ 2.

n=2:

Considerem dues matrius $A, B \in S$ tals que $AB \neq (AB)^T$. Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observem que A i B són dues matrius simètriques i amb determinant igual a 1, per tant formen part del nostre subconjunt S. No obstant, la matriu resultant de fer el producte A·B no és una matriu simètrica i, per tant, no pertany a S.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \notin S$$

n $\geq$2:

Per acabar de demostrar que S no és un subgrup de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, hem de trobar dues matrius d'ordre n (amb $n \geq 2$) el producte de les quals no doni com a resultat una matriu simètrica. Així, per exemple, siguin $A_n, B_n \in S$ tals que:

$$A_n = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right), \qquad B_n = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right)$$

on les matrius A i B són les definides en l'apartat anterior. Si realitzem el producte d'aquestes dues matrius obtenim el següent resultat:

$$A_n \cdot B_n = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A \cdot B & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right) \notin S.$$

Per tant, com que $A \cdot B$ no era simètrica (cas n=2), $A_n \cdot B_n$ no és simètrica. És a dir, aquesta matriu no pertany al suconjunt S. Això implica que S no és un subgrup de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ quan $n \geq 2$, ja que no es compleix la propietat de l'operació interna.