Problema 11. Siguin σ, $\tau \in S_9$ les permutacions següents:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 1 & 8 & 7 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 8 & 2 & 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu $\sigma\tau$ i $\tau\sigma$.

(b) Descomponeu σ i τ com a producte de cicles disjunts, i també com a producte de transposicions; calculeu les seves signatures.

(c) Calculeu σ^{2012}.

Solució.

(a) Se trata de componer las permutaciones en el orden correspondiente:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 4 & 9 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) Descomposición en ciclos disjuntos:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 & 5 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Descomposición en producto de transposiciones:

$$\sigma = (1\ 2)(2\ 9)(9\ 5)(5\ 7)(7\ 3)(4\ 8)$$

$$\tau = (1\ 7)(7\ 9)(9\ 4)(4\ 5)(5\ 8)(8\ 6)(6\ 2)$$

Observamos que σ es par, mientras que τ es impar.

(c) Hemos visto que σ descompone en dos ciclos disjuntos: Uno de orden 6 y el otro de orden 2. Como ambos ciclos conmutan, el orden de σ viene dado por el mínimo común múltiple de las longitudes:

$$orden(\sigma) = mcm(6, 2) = 6$$

Es decir, $\sigma^6 = Id$. Por lo tanto:

$$\sigma^{2012} = \sigma^{2010}\sigma^2 = (\sigma^6)^{335}\sigma^2 = Id^{335}\sigma^2 = \sigma^2$$

Cuya expresión explícita es:

$$\sigma^{2012} = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$