**Exercici 9.** Sigui $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ el conjunt de les arrels $n$-èssimes de la unitat complexes. Demostreu que $\mu_n$ amb el producte de $\mathbb{C}$ és un grup cíclic.

Per veure que $(\mu_n\ ,\ \cdot)$ és un grup cíclic, veurem primer si és un grup i desprès comprovarem la seva condició de cíclic:

**1**. Veiem què és grup. Per fer això, serà suficient demostrar què és un subgrup de $(\mathbb{C}\ ,\ \cdot)$ :

**i**. $\mu_n \subseteq \mathbb{C}$. Directe per definició de $\mu_n$.

**ii**. $\mu_n$ subgrup de $\mathbb{C} \Leftrightarrow \forall$ x,y $\in \mu_n$, $xy^{-1} \in \mu_n$.

*Demostració de ii.* Notem que $y^{-1}$ sempre té sentit a $\mu_n$, doncs $0 \notin \mu_n$, i que $y^{-1} = \frac{1}{y}$, doncs $\frac{1}{y} \cdot y = 1$, què és el neutre del producte a $\mathbb{C}$.

Considerem x,y $\in \mu_n \rightarrow \begin{cases} x^n = 1 \\ y^n = 1 \end{cases}$ , aleshores,

$xy^{-1} \in \mu_n \Leftrightarrow \left(xy^{-1}\right)^n = 1;\ \ \left(xy^{-1}\right)^n = y^{-n}x^n = \frac{x^n}{y^n} = \frac{1}{1} = 1,$

per tant, $xy^{-1} \in \mu_n, \mu_n$ és un subgrup de $\mathbb{C}$ i $\mu_n$ és un grup.

**2**. Veiem ara què és cíclic:

*Demostració de 2.* Sabem que per a tot $z \in \mathbb{C}$ , $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos(\frac{\theta+2\pi k}{n}) + isin(\frac{\theta+2\pi k}{n})\right)$ amb $k$=1,...,n.

En el cas $1 = 1 + 0i$ tenim que

$\sqrt[n]{1} = cos\frac{2\pi k}{n} + i$ sin $\frac{2\pi k}{n}$ amb $k$=1,...,n.

Afirmem que g = cos $\frac{2\pi}{n} + i$ sin $\frac{2\pi}{n}$ genera $\mu_n$, és a dir que $g^k = z_k$ on $z_k$ =cos$\frac{2\pi k}{n}$ + $i$ sin $\frac{2\pi k}{n}$.

Demostrem per inducció.

**i**.
$g^1 = cos\frac{2\pi}{n} + i$ sin $\frac{2\pi}{n}$,
$g^2 = (cos\frac{2\pi}{n} + i$ sin $\frac{2\pi}{n})^2$ =cos$^2\frac{2\pi}{n}$−sin$^2\frac{2\pi}{n} + \left(2cos\frac{2\pi}{n}sin\frac{2\pi}{n}\right)i = cos\frac{2\pi 2}{n} + i$ sin $\frac{2\pi 2}{n}$.

**ii**. Suposem cert per $g^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$.

**iii**. Provem per $k$+1:

$(\cos\frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n})^{k+1} = (\cos\frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n})^k(\cos\frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}) =$

$= (\cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n})(\cos\frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}) =$

$= (\cos\frac{2\pi k}{n})(\cos\frac{2\pi}{n}) - (\sin\frac{2\pi k}{n})(\sin\frac{2\pi}{n}) + ((\cos\frac{2\pi k}{n})(\sin\frac{2\pi}{n}) + (\sin\frac{2\pi k}{n})(\cos\frac{2\pi}{n})i) =$

$=\cos(\frac{2\pi k}{n} + \frac{2\pi}{n})+\sin(\frac{2\pi k}{n} + \frac{2\pi}{n}) = \cos\,(\frac{2\pi(k+1)}{n})+ \sin\,(\frac{2\pi(k+1)}{n})i.$

Per tant $g = cos\frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ genera $\mu_n$ i, per tant, $\mu_n$ és un grup cíclic, subgrup de $(\mathbb{C}, \cdot)$.