1. a) Trobeu el desenvolupament de Taylor d'ordre 2 de la funció $f(x,y) = e^{x-y}\sin(x+y)$ al voltant de l'origen.

b) Calculeu el límit següent:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(y,x) - 3x^2 + y^2}{x^2+y^2}.$$

Justifiqueu detalladament les respostes.

Solució:

a) Observeu que f és una funció de classe C^∞ en $\mathbb{R}^2$ perquè és el producte de les funcions $g(x,y) = e^{x-y}$ i $h(x,y) = \sin(x+y)$, que són de classe C^∞ en $\mathbb{R}^2$ ja que són composicions de funcions de classe C^∞:

- $g = \exp \circ L$, on $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és la funció exponencial i $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és la funció lineal definida per $L(x,y) = x - y$.
- $h = \sin \circ M$, on $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és la funció sinus i $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és la funció lineal definida per $M(x,y) = x + y$.

Per tant, la funció f admet desenvolupaments de Taylor de qualsevol ordre i al voltant de qualsevol punt de $\mathbb{R}^2$. Calcularem el desenvolupament de Taylor d'ordre 2 de la funció $f(x,y) = e^{x-y}\sin(x+y)$ al voltant de l'origen per dos mètodes:

Mètode 1: El desenvolupament de Taylor d'ordre 2 de la funció f al voltant de l'origen és

$$f(x,y) = p_2(x,y) + o(x^2+y^2) \quad ((x,y)\to(0,0)),$$

on

$$p_2(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\,x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\,y^2\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\,xy$$

és el polinomi de Taylor d'ordre 2 de f en l'origen. Ara

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^{x-y}(\sin(x+y) + \cos(x+y)) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= e^{x-y}(\cos(x+y) - \sin(x+y)) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= e^{x-y}(\sin(x+y) + 2\cos(x+y) - \sin(x+y)) = 2e^{x-y}\cos(x+y) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= e^{x-y}(-2\cos(x+y) + \sin(x+y) - \sin(x+y)) = -2e^{x-y}\cos(x+y) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= e^{x-y}(-2\sin(x+y) - \cos(x+y) + \cos(x+y)) = -2e^{x-y}\sin(x+y),
\end{aligned}$$

i en particular $f(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$.

En conseqüència, el desenvolupament de Taylor d'ordre 2 de f al voltant de l'origen és

$$f(x,y) = x + y + x^2 - y^2 + o(x^2+y^2) \quad ((x,y)\to(0,0)).$$

Mètode 2: Sabem que el desenvolupament de Taylor d'ordre 2 de f al voltant de l'origen és l'únic desenvolupament del tipus

$$(1) \qquad f(x,y) = p(x,y) + o(x^2+y^2) \quad ((x,y)\to(0,0)),$$

on p és un polinomi de grau més petit o igual que 2. Anem a trobar aquest desenvolupament a partir dels desenvolupaments de Taylor d'ordre 2 al voltant de l'origen de les funcions (d'una variable) exponencial (exp) i sinus, que són

$$e^t = \exp(t) = \exp(0) + \exp'(0)\,t + \frac{\exp''(0)}{2}\,t^2 + o(t^2) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad (t\to 0)$$

i

$$\sin t = \sin 0 + \sin'(0)\,t + \frac{\sin''(0)}{2}\,t^2 + o(t^2) = t + o(t^2) \quad (t\to 0).$$

Com que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x-y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y) = 0$, tenim que

$$\left.\begin{aligned} e^{x-y} &= 1 + x - y + \frac{(x-y)^2}{2} + o((x-y)^2) \\ \sin(x+y) &= x + y + o((x+y)^2) \end{aligned}\right\} \quad ((x,y)\to(0,0)).$$

Ara $|x\pm y| \le |x| + |y| \le 2\|(x,y)\|$, per tant $(x\pm y)^2 \le 4(x^2+y^2)$ i en particular

$$\left.\begin{aligned} e^{x-y} &= 1 + x - y + \frac{(x-y)^2}{2} + o(x^2+y^2) \\ \sin(x+y) &= x + y + o(x^2+y^2) \end{aligned}\right\} \quad ((x,y)\to(0,0)).$$

Aleshores multiplicant obtenim que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(1 + x - y + \frac{(x-y)^2}{2} + o(x^2+y^2)\right)(x + y + o(x^2+y^2)) \\ &= (1+x-y)(x+y) + (1+x-y)o(x^2+y^2) + \left(\frac{(x-y)^2}{2} + o(x^2+y^2)\right)\sin(x+y) \\ &= x + y + x^2 - y^2 + o(x^2+y^2) \quad ((x,y)\to(0,0)). \end{aligned}$$

Com que $p(x,y) = x + y + x^2 - y^2$ és un polinomi de grau 2 que compleix (1), concloem que el desenvolupament de Taylor d'ordre 2 de f al voltant de l'origen és

$$f(x,y) = x + y + x^2 - y^2 + o(x^2+y^2) \quad ((x,y)\to(0,0)).$$

b) El desenvolupament

$$f(x,y) = x + y + x^2 - y^2 + o(x^2+y^2) \quad ((x,y)\to(0,0))$$

obtingut en l'apartat a) implica que

$$f(y,x) = x + y + y^2 - x^2 + o(x^2+y^2) \quad ((x,y)\to(0,0)),$$

i per tant

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(y,x) - 3x^2 + y^2 &= x^2 - y^2 - (y^2 - x^2) - 3x^2 + y^2 + o(x^2+y^2) \\ &= -(x^2+y^2) + o(x^2+y^2) \quad ((x,y)\to(0,0)). \end{aligned}$$

En conseqüència,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(y,x) - 3x^2 + y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(-1 + \frac{o(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) = -1.$$

2. a) Enuncieu el teorema de la funció implícita.

b) Demostreu que l'equació $x\log(1+xy) + y\cos(z^2) + ze^{-x} = 0$ defineix una funció implícita $z = g(x,y)$ en un entorn del punt $(1,0,0)$, i calculeu la diferencial de g en el punt $(1,0)$.

c) És la funció $h(x,y) = (g(x^2,y), xg(x,y))$ un difeomorfisme local en el punt $(1,0)$?

Justifiqueu detalladament les respostes.

Solució:

a) TEOREMA DE LA FUNCIÓ IMPLÍCITA

Siguin $U \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un conjunt obert i

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x,y) &\longrightarrow f(x,y) = (f_1(x,y), \ldots, f_m(x,y)) \end{aligned}$$

una funció de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$. Si un punt $(a.b) \in U$ compleix que $f(a,b) = 0$ i

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(a,b) \neq 0,$$

aleshores existeixen un entorn obert $W \subset U$ del punt (a,b), un entorn obert $V \subset \mathbb{R}^n$ del punt a i una funció $g : V \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k tals que

$$\{\,(x,y) \in W \ :\ f(x,y) = 0\,\} = \{\,(x,g(x)) \ :\ x \in V\,\},$$

és a dir, els zeros de la funció f en W són els punts de la gràfica de g, o equivalentment, en un llenguatge més clàssic, les solucions del sistema d'equacions

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0 \end{cases}$$

en W són els punts de la forma

$$(x_1,\ldots,x_n,g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_n)), \quad \text{amb} \quad (x_1,\ldots,x_n) \in V.$$

Comentari: La tesi del teorema de la funció implícita es resumeix dient que l'equació $f(x,y) = 0$ defineix una funció implícita $y = g(x)$ (de classe C^k) en un entorn del punt (a,b).

b) Volem aplicar el teorema de la funció implícita a la funció

$$f(x,y,z) = x\log(1+xy) + y\cos(z^2) + ze^{-x}.$$

Observeu que f és una funció definida en l'obert

$$U = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ 1 + xy > 0\,\}$$

de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ i a valors en $\mathbb{R}$, que és de classe C^∞. Com que $(1,0,0) \in U$,

$$f(1,0,0) = \log 1 + 0 \cdot \cos 0 + 0 \cdot e^0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,0) = -2zy\sin(z^2) + e^{-x}\Big|_{(1,0,0)} = e^{-1} \neq 0,$$

el teorema de la funció implícita assegura que l'equació $f(x,y,z)=0$ defineix una funció implícita $z=g(x,y)$ (de classe C^∞) en un entorn del punt $(1,0,0)$. Concretament, existeixen un entorn obert $W\subset U$ de $(1,0,0)$, un entorn obert $V\subset\mathbb{R}^2$ de $(1,0)$ i una funció $g:V\to\mathbb{R}$ de classe C^∞ tals que

$$\{\,(x,y,z)\in W\ :\ f(x,y,z)=0\,\}=\{\,(x,y,g(x,y))\ :\ (x,y)\in V\,\}.$$

En particular, com que $(1,0,0)\in W$ i $f(1,0,0)=0$, tenim que $g(1,0)=0$.

Anem a calcular la diferencial de g en $(1,0)$, que és l'aplicació lineal $Dg(1,0):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida per

$$Dg(1,0)(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}(1,0)\,x+\frac{\partial g}{\partial y}(1,0)\,y.$$

Per tant, volem calcular les derivades parcials $g_x(1,0)=\frac{\partial g}{\partial x}(1,0)$ i $g_y(1,0)=\frac{\partial g}{\partial y}(1,0)$. Per fer això utilizem que $f(x,y,g(x,y))=0$, és a dir,

$$(2)\qquad x\log(1+xy)+y\cos(g(x,y)^2)+g(x,y)e^{-x}=0,\qquad \text{per a tot } (x,y)\in V.$$

Si derivem respecte x la identitat (2) obtenim que, per a tot $(x,y)\in V$, es compleix

$$(3)\quad \log(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}-2yg(x,y)g_x(x,y)\sin(g(x,y)^2)+(g_x(x,y)-g(x,y))e^{-x}=0.$$

Si derivem respecte y la identitat (2) obtenim que, per a tot $(x,y)\in V$, es compleix

$$(4)\qquad \frac{x^2}{1+xy}+\cos(g(x,y)^2)-2yg(x,y)g_y(x,y)\sin(g(x,y)^2)+g_y(x,y)e^{-x}=0.$$

Avaluant (3) i (4) en $(x,y)=(1,0)$ i tenint en compte que $g(1,0)=0$ obtenim que

$$g_x(1,0)\,e^{-1}=0\qquad\text{i}\qquad 2+g_y(1,0)\,e^{-1}=0,$$

i per tant $g_x(1,0)=0$ i $g_y(1,0)=-2e$. En conclusió, la diferencial de g en $(1,0)$ és $Dg(1,0)(x,y)=-2ey$.

c) Observeu que $h:V\to\mathbb{R}^2$ és una funció diferenciable (de fet de classe C^∞), ja que $h(x,y)=(h_1(x,y),h_2(x,y))$, on $h_1x,y)=g(x^2,y)$ i $h_2(x,y)=xg(x,y)$ són funcions diferenciables (de fet de classe C^∞) perquè són la composició i el producte de dues funcions diferenciables (de fet de classe C^∞), respectivament. A més a més, per la regla de la cadena, tenim que

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(x,y)=2x\,\dfrac{\partial g}{\partial x}(x^2,y) & \dfrac{\partial h_1}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial g}{\partial y}(x^2,y)\\
\dfrac{\partial h_2}{\partial x}(x,y)=g(x,y)+x\,\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial h_2}{\partial y}(x,y)=x\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)
\end{array}$$

Per tant, com que $g(1,0)=0$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0)=0$ i $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0)=-2e$, obtenim que

$$\det Dh(1,0)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(1,0) & \dfrac{\partial h_1}{\partial y}(1,0)\\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x}(1,0) & \dfrac{\partial h_2}{\partial y}(1,0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\,\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0)\\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -2e\\ 0 & -2e\end{vmatrix}=0.$$

En conseqüència, h no és un difeomorfisme local en el punt (1,0), ja que si ho fos, la diferencial $Dh(1,0):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ seria un isomorfisme lineal (per la regla de la cadena) i llavors $\det Dh(1,0)\neq 0$.

3. a) Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable en un punt $a \in \mathbb{R}^n$. Demostreu que si a és un extrem relatiu de f llavors

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0, \qquad \text{per a } j = 1, \ldots, n.$$

b) Calculeu els extrems relatius de la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per $f(x, y) = x(1 + y)$.

c) Calculeu els extrems absoluts de f restringida al conjunt

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1 \}.$$

Justifiqueu detalladament les respostes.

Solució:

a) Suposem que a és un màxim (mínim) relatiu de f i sigui $j = 1, 2, \ldots, n$. Aleshores existeix $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$, per a tot $x \in B(a, r)$. En particular, $f(a + te_j) \leq f(a)$ $(f(a + te_j) \geq f(a))$, per a tot $t \in \mathbb{R}$, $|t| < r$, on e_j és el punt de $\mathbb{R}^n$ que té totes les coordenades nul·les excepte la j-èssima que és igual a 1. Per tant, la funció $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida per $g(t) = f(a + te_j)$, té un màxim (mínim) relatiu en l'origen.
A més a més, g és derivable en l'origen i

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a),$$

ja que f és diferenciable. En conseqüència,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = g'(0) = 0.$$

b) Primer observem que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és de classe C^∞ ja que és un polinomi. En particular, f és diferenciable i per tant tot extrem relatiu de f ha de ser un punt crític, és a dir, ha de ser solució del sistema d'equacions

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + y \\ 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \end{cases}$$

La única solució d'aquest sistema és el punt $(0, -1)$. Com que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

resulta que el punt $(0, -1)$ no és un extrem relatiu de f (és un punt de sella).
En conclusió, f no té cap extrem relatiu.

c) Com que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és una funció contínua (perquè és un polinomi) i $C \subset \mathbb{R}^2$ és compacte (ja que C és la bola tancada de radi 1 amb centre en l'origen, i per tant és tancat i acotat), el teorema de Weierstrass assegura l'existència d'algun màxim absolut i d'algun mínim absolut de $f_{/C}$. Anem doncs a calcular-los.

Observeu que $C = B \cup S$, on $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 < 1 \}$ és la bola oberta de radi 1 amb centre en l'origen i $S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 = 1 \}$.

Com que B és obert, tot extrem absolut de $f_{/C}$ que pertanyi a B ha de ser un extrem relatiu de f. Per tant, B no conté cap extrem absolut de $f_{/C}$, ja que per l'apartat a) f no té cap extrem relatiu. Així doncs, tots els extrems absoluts de $f_{/C}$ han de estar en S, i en particular han de ser extrems relatius de $f_{/S}$. Per trobar-los aplicarem el teorema dels multiplicadors de Lagrange. Podem fer-lo perquè $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és de classe C^∞ (és un polinomi) i S és el conjunt de zeros de la funció $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida per $g(x,y) = x^2+y^2-1$, que també és de classe C^∞ (és un polinomi) i compleix

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0), \quad \text{per a cada } (x,y) \in S.$$

Pel teorema dels multiplicadors de Lagrange, els extrems absoluts de $f_{/C}$ han de ser solucions del sistema d'equacions

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ x^2+y^2 = 1 \end{array} \right\}, \quad \text{és a dir,} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1+y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{array} \right.$$

on $\lambda \in \mathbb{R}$ (λ és el multiplicador de Lagrange). Multiplicant la primera i la segona equació (en creu) obtenim que $2\lambda y(1+y) = 2\lambda x^2$, és a dir,

$$2\lambda(y(1+y) - x^2) = 0,$$

que és equivalent a que es compleixi $\lambda = 0$ o bé $y(1+y) - x^2 = 0$.

Si $\lambda = 0$, les dues primeres equacions del sistema anterior diuen que $(x,y) = (0,-1)$, i aquest punt compleix la tercera equació.

Si $y(1+y) - x^2 = 0$, tenint en compte que $x^2 = 1-y^2$ (per la tercera equació del sistema anterior), es compleix que

$$0 = y(1+y) - (1-y^2) = 2y^2 + y - 1,$$

i per tant

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Finalment, tenint en compte la tercera equació, obtenim els punts $(0,-1)$ i $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

En conseqüència, els extrems absoluts de $f_{/C}$ estan entre els punts $(0,-1)$ i $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Com que

$$f(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}) = -\tfrac{3\sqrt{3}}{4} < f(0,-1) = 0 < f(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{3\sqrt{3}}{4},$$

concloem que $f_{/C}$ només té un mínim absolut, que és el punt $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, i només té un màxim absolut, que és el punt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.