

Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2012-2013

Examen Final - Part 1

- Feu els problemes en fulls separats.
- Justifiqueu detalladament les respostes.

(1) Considereu la corona $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y \leq x^2 + y^2 \leq 2y + 3\}$.

- (a) Representeu-la gràficament.
- (b) És A tancat? És A compacte?
- (c) Definiu interior i frontera d'un conjunt. Determineu si el punt $(0, 0)$ és interior a A o de la frontera d' A .
- (d) Proveu que la funció

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

és contínua en A . Pren un valor màxim sobre A ?

- (2) (a) Per a funcions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definiu els conceptes de derivada direccional i de diferencial en un punt. Enuncieu i proveu la relació entre aquests dos conceptes.
- (b) Per a $m \in \mathbb{N}$, definim les funcions

$$f_m(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(x^2 + y^2)^m}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Per a quins valors de m són diferenciables en \mathbb{R}^2 ?

Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2012-2013
Examen Final - Part 2

- Feu els problemes en fulls separats.
- Justifiqueu detalladament les respostes.

(1) (a) Enuncieu el teorema de la funció implícita.

Proveu que l'equació $y^2 e^z + x \sin z + (x - y)^2 - 2y + 1 = 0$ defineix implícitament una funció $z = z(x, y)$ de classe C^∞ en un entorn del punt $p = (1, 1, 0)$.

(b) Proveu que la funció $z = z(x, y)$ de l'apartat anterior té un punt crític en $(1, 1)$ i classifiqueu-lo.

(2) (a) Calculeu

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(x+y) + xy - 1}{x^2 + y^2}.$$

(b) Considerem la funció $f(x, y, z) = 3x^2 - 6y^2 - 2z^3 + 6z$ i el conjunt

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\} :$$

Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f sobre A i calculeu-los.