1. a) Definiu el concepte de punt adherent a un conjunt. Calculeu l'adherència del conjunt

$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 - 1 < y \leq 0 \}.$$

b) Definiu el concepte de conjunt compacte. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ és la funció definida per

$$f(x,y) = (e^{x-y} \sin(x^2 y), \, \log(1 + y^2 e^{-x})),$$

proveu que $f(\overline{C})$ és compacte.

Justifiqueu detalladament les respostes.

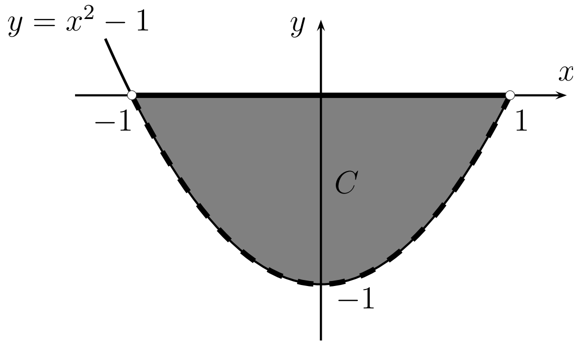
Solució:

a) *Concepte de punt adherent a un conjunt:* Donem dues definicions equivalents:

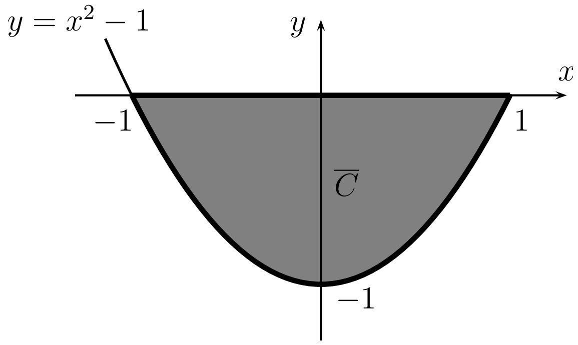
Definició 1: Un punt $a \in \mathbb{R}^n$ és *adherent* a un conjunt $C \subset \mathbb{R}^n$ quan $B(a,r) \cap C \neq \varnothing$, per a cada $r > 0$.

Definició 2: Un punt $a \in \mathbb{R}^n$ és *adherent* a un conjunt $C \subset \mathbb{R}^n$ quan a és el límit d'una successió de punts de C.

El conjunt C està dibuixat en la figura següent:



Per tant, $\overline{C}$ ha de ser el conjunt següent:



Així doncs, volem demostrar que

$$\overline{C} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 - 1 \leq y \leq 0 \}.$$

Per fer això provarem les dues inclusions següents:

- $\overline{C} \subset \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \leq y \leq 0 \}$:
  Sigui $(x,y) \in \overline{C}$. Aleshores, per la definició 2, $(x,y) = \lim(x_n, y_n)$, essent $\{(x_n, y_n)\}_n$ una successió de punts de C. Com que $(x_n, y_n) \in C$, tenim que $x_n^2 - 1 < y_n \leq 0$, i passant al límit obtenim que $x^2 - 1 = \lim x_n^2 - 1 \leq y = \lim y_n \leq 0$, és a dir, $x^2 - 1 \leq y \leq 0$, com voliem demostrar.

- $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \leq y \leq 0 \} \subset \overline{C}$:
  Sigui $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2 - 1 \leq y \leq 0$. Si $x^2 - 1 < y \leq 0$ llavors $(x,y) \in C \subset \overline{C}$. Suposem doncs que $x^2 - 1 = y \leq 0$, és a dir, $y = x^2 - 1$ i $x \in [-1, 1]$. Aleshores $(x,y) = \lim(x_n, y_n)$, essent $(x_n, y_n) = (\frac{n}{n+1}x, (\frac{n}{n+1})^2 y)$. Com que $(x_n, y_n) \in C$, ja que

  $$x_n^2 - 1 = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 x^2 - 1 < \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 (x^2 - 1) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 y = y_n,$$

  hem provat que $(x,y) \in \overline{C}$, per la definició 2.

b) *Concepte de conjunt compacte:* Un conjunt $C \subset \mathbb{R}^n$ és *compacte* quan cada successió de punts de C admet alguna successió parcial que té per límit un punt de C.

Recordeu que els conjunts compactes de $\mathbb{R}^n$ es caracteritzen com els subconjunts de $\mathbb{R}^n$ que són simultàniament tancats i acotats. En el nostre cas, $\overline{C}$ és un conjunt tancat (ja que $\overline{\overline{C}} = \overline{C}$) i acotat (ja que, com que $\overline{C} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 1 \leq y \leq 0 \}$, tot punt $(x,y) \in \overline{C}$ compleix que $-1 \leq y \leq 0$ i que $x^2 \leq 1$, és a dir, $-1 \leq x \leq 1$). Per tant, $\overline{C}$ és un conjunt compacte.

D'altra banda, f és una funció contínua ja que les seves funcions components o coordenades $f_1(x,y) = e^{x-y} \sin(x^2 y)$ i $f_2(x,y) = \log(1 + y^2 e^{-x})$ són funcions contínues:

- $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és contínua perquè és el producte de les funcions contínues

  $$g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ definides per } g(x,y) = e^{x-y} \text{ i } h(x,y) = \sin(x^2 y).$$

  Les funcions g i h són contínues perquè són composicions de funcions contínues. Concretament, $g = \exp \circ p$ i $h_1 = \sin \circ q$, essent $\exp, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les funcions exponencial i sinus i $p, q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ els polinomis $p(x,y) = x - y$ i $q(x,y) = x^2 y$.

- $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és contínua perquè és composició de funcions contínues: $f_2 = \varphi \circ k$, on $\varphi : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ i $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ són les funcions definides per $\varphi(t) = \log(1 + t)$ i $k(x,y) = y^2 e^{-x}$ (Observeu que $k(\mathbb{R}^2) \subset [0, +\infty) \subset (-1, +\infty)$). És obvi que φ és contínua. La funció k és contínua ja que és el producte de les funcions contínues $k_1(x,y) = y^2$ (que és un polinomi) i $k_2(x,y) = e^{-x}$ (que és contínua perquè és la composició del polinomi $r(x,y) = -x$ i $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que són funcions contínues).

Finalment, com que la imatge per una funció contínua d'un conjunt compacte és un conjunt compacte, concloem que $f(\overline{C})$ és compacte.

2. Per a cada $\alpha > 0$ considereu la funció $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2y^4)}{(x^2+y^2)^\alpha}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \text{ i } x \leq 0, \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0)\ , \\ \dfrac{|\sin(xy)|^\alpha}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \text{ i } x > 0. \end{cases}$$

Determineu els valors d'$\alpha > 0$ per als quals f_α és contínua en l'origen.

Justifiqueu detalladament la resposta.

Solució:

Recordeu que f_α és contínua en l'origen si i només si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = f_\alpha(0,0)$.

Però $f_\alpha(0,0) = 0$, i per tant f_α és contínua en l'origen si i només si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = 0. \tag{1}$$

Ara, com que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = E_0 \cup E_1 \cup E_2$, amb $E_0 = [(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \{0\}] \cup [\{0\} \times (\mathbb{R}\setminus\{0\})]$, $E_1 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x < 0,\, y \neq 0 \,\}$ i $E_2 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x > 0,\, y \neq 0 \,\}$, i $(0,0)$ és un punt d'acumulació de tots els E_j's, resulta que (1) és equivalent a que es compleixin les condicions

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E_j}} f_\alpha(x,y) = 0, \tag{L$_j$}$$

per a $j = 0, 1, 2$.

Com que $f_\alpha(x,y) = 0$, per a tot $(x,y) \in E_0$ i cada $\alpha > 0$, és obvi que la condició (L_0) es compleix per a cada $\alpha > 0$.

Per a quins α's es compleix la condició (L_1) ?

Si $(x,y) \in E_1$ llavors $f_\alpha(x,y) = g(x,y)\, h_\alpha(x,y)$, amb

$$g(x,y) = \frac{\log(1+x^2y^4)}{x^2y^4} \quad \text{ i } \quad h_\alpha(x,y) = \frac{x^2y^4}{(x^2+y^2)^\alpha}.$$

Ara $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 1$, ja que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^4 = 0$ i $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\log(1+t)}{t} = 1$.

(El darrer límit és la definició de la derivada de la funció logaritme en el punt $a = 1$).

Per tant, la condició (L_1) és equivalent a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E_1}} h_\alpha(x,y) = 0. \tag{L$'_1$}$$

Observeu que $0 \leq h_\alpha(x,y) \leq \|(x,y)\|^{6-2\alpha}$, per a tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(Aqui hem utilitzat les desigualtats trivials $x^2 \leq \|(x,y)\|^2$ i $y^4 \leq \|(x,y)\|^4$.)

Quan $6 - 2\alpha > 0$, és a dir, quan $\alpha < 3$, és clar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|^{6-2\alpha} = 0$,

i per tant la desigualtat anterior implica que es compleix la condició (L'_1).

D'altra banda, si $\alpha \geq 3$ llavors no es compleix (L_1') perquè el límit de h_α en l'origen segons la semirrecta $R_1 = \{ (x,x) \,:\, x < 0 \}$, que està continguda en E_1, no és 0:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R_1}} h_\alpha(x,y) = \lim_{x\to 0^-} h_\alpha(x,x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x^2)^{3-\alpha}}{2^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \alpha > 3,\\ \frac{1}{8}, & \text{si } \alpha = 3.\end{cases}$$

En conseqüència, la condició (L_1) es compleix si i només si $0 < \alpha < 3$.

Per a quins α's es compleix la condició (L_2)?

Si $(x,y) \in E_2$ llavors $f_\alpha(x,y) = |G(x,y)|^\alpha \, H_\alpha(x,y)$, amb

$$G(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy} \quad \text{i} \quad H_\alpha(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}.$$

Ara $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |G(x,y)|^\alpha = 1$ perquè $\lim_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y) = 1$, ja que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

(El darrer límit és la definició de la derivada de la funció sinus en l'origen).

Observeu que $0 \leq H_\alpha(x,y) \leq \|(x,y)\|^{2\alpha-2}$, per a tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(Aqui hem utilitzat que $\alpha > 0$ i les desigualtats trivials $|x| \leq \|(x,y)\|$ i $|y| \leq \|(x,y)\|$.)

Per tant, la condició (L_2) és equivalent a

$$(\mathrm{L}_2') \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E_2}} H_\alpha(x,y) = 0.$$

Quan $2\alpha - 2 > 0$, és a dir, quan $\alpha > 1$, és clar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|^{2\alpha-2} = 0$,

i per tant la desigualtat anterior implica que es compleix la condició (L_2').

D'altra banda, si $0 < \alpha \leq 1$ llavors no es compleix (L_2') perquè el límit de H_α en l'origen segons la semirrecta $R_2 = \{ (x,x) \,:\, x > 0 \}$, que està continguda en E_2, no és 0:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R_2}} H_\alpha(x,y) = \lim_{x\to 0^+} H_\alpha(x,x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x^2)^{\alpha-1}}{2} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } 0 < \alpha \leq 1,\\ \frac{1}{2}, & \text{si } \alpha = 1.\end{cases}$$

En conseqüència, la condició (L_2) es compleix si i només si $\alpha > 1$.

En conclusió, f_α és contínua en l'origen si i només si $1 < \alpha < 3$.

3. a) Definiu els conceptes de derivada direccional i de diferencial. Enuncieu i proveu la relació entre aquests dos conceptes.

b) Per a cada enter $n > 0$ considereu la funció $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per

$$f_n(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^n}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b.1) Calculeu les derivades direccionals de f_n en l'origen (quan existeixin).

(b.2) Determineu els enters $n > 0$ per als quals f_n és diferenciable en l'origen.

Justifiqueu detalladament les respostes.

Solució:

a) *Conceptes de derivada direccional i de diferencial:*

Siguin U un subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ i $f : U \to \mathbb{R}$.

La *derivada direccional* de f en a segons la direcció del vector unitari $u \in \mathbb{R}^n$ és el límit

$$D_u f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t},$$

quan aquest límit existeix i és finit.

Diem que f és *diferenciable* en a quan existeix una aplicació lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0. \tag{2}$$

Aquesta aplicació lineal L que, si existeix és única, es diu *diferencial* de f en a i es denota per df_a o bé per $Df(a)$.

Relació entre els dos conceptes:

Si f és diferenciable en a, llavors existeixen les derivades direccionals en a segons qualsevol direcció i $D_u f(a) = Df(a)(u)$, per a cada vector unitari $u \in \mathbb{R}^n$.

Demostració:

Si f és diferenciable en a, llavors es compleix (2) amb $L = Df(a)$ i per tant el corresponent límit en a segons la recta $x = a + tu$ també val 0, és a dir,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a) - Df(a)(tu)}{|t|} = 0.$$

Però això és equivalent a

$$0 = \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(a+tu) - f(a) - Df(a)(tu)}{|t|} \right| = \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(a+tu) - f(a) - Df(a)(tu)}{t} \right|.$$

Com que $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és lineal obtenim que

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} - Df(a)(u) \right| = 0,$$

i això vol dir que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = Df(a)(u),$$

que és el que voliem provar.

(b.1) Sigui $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector unitari. Aleshores el límit

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_n(tu_1, tu_2) - f_n(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{2n}(u_1 u_2)^n}{t(t^2u_1^2 + t^2u_2^2)^2} = \lim_{t\to 0} t^{2n-5}(u_1u_2)^n$$

val 0 si $u_1 = 0$ o bé $u_2 = 0$ o bé $2n - 5 > 0$, és a dir, $n \geq 3$ (recordeu que n és enter).

Si $u_1 \neq 0$ i $u_2 \neq 0$ i $2n - 5 \leq 0$ llavors $2n - 5$ és un enter senar negatiu i per tant el límit anterior no existeix, ja que els dos límits laterals corresponents no coincideixen:

$$\lim_{t\to 0^-} t^{2n-5}(u_1u_2)^n = \begin{cases} -\infty, & \text{si } (u_1u_2)^n > 0, \\ +\infty, & \text{si } (u_1u_2)^n < 0, \end{cases}$$

mentre que

$$\lim_{t\to 0^+} t^{2n-5}(u_1u_2)^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } (u_1u_2)^n > 0, \\ -\infty, & \text{si } (u_1u_2)^n < 0. \end{cases}$$

En conclusió, la derivada direccional de f_n en l'origen segons la direcció d'u, $D_u f_n(0,0)$, existeix si i només si $u_1 = 0$ o bé $u_2 = 0$ o bé $n \geq 3$, i en tals casos $D_u f_n(0,0) = 0$.

(b.2) Sabem que si f_n és diferenciable en l'origen ha de tenir les derivades direccionals en l'origen segons totes les direccions, i per tant $n \geq 3$ i $Df_n(0,0)(u) = D_u f_n(0,0) = 0$, per a tot vector unitari $u \in \mathbb{R}^n$, segons hem vist en (b.1). Llavors, com que $Df_n(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és lineal, deduïm que $Df_n(0,0)(v) = 0$, per a tot $v \in \mathbb{R}^2$.

Suposem doncs que $n \geq 3$. Pel que acabem d'argumentar, f_n és diferenciable en l'origen si i només si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_n(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0. \tag{3}$$

Però

$$\left| \frac{f_n(x,y)}{\|(x,y)\|} \right| = \frac{(|x||y|)^n}{\|(x,y)\|^5} \leq \|(x,y)\|^{2n-5}, \quad \text{per a cada } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(Aqui hem fet servir les desigualtats trivials $|x| \leq \|(x,y)\|$ i $|y| \leq \|(x,y)\|$.)

Com que $n \geq 3$, tenim que $2n - 5 \geq 1$ i per tant $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|^{2n-5} = 0$. Això i la desigualtat anterior asseguren que es compleix (3), és a dir, f_n és diferenciable en l'origen.

En conclusió, f_n és diferenciable en l'origen si i només si $n \geq 3$.