Problema 25. Sigui $GL(2,\mathbb{C})$ el grup de matrius 2×2, invertibles, i de coeficients complexos.

Considerem $T \subset GL(2,\mathbb{C})$ el subgrup de matrius diagonals i $D = \langle T, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\rangle \subset GL(2,\mathbb{C})$ el subgrup generat per les matrius diagonals i $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(a)Demostreu que T és un subgrup normal de D.

(b)Descriviu un isomorfisme entre D/T i $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c)Estudieu si D és normal en $GL(2,\mathbb{C})$.

Solucio. Primer de tot volem fer notar que el conjunt D donat és el conjunt format per les matrius diagonals i les matrius diagonal secundaria, ja que el producte de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ per una matriu diagonal dóna una matriu diagonal secundaria ja que inverteix files o columnes segons per on es multipliqui, i la inversa d'una matriu diagonal és una altra matriu diagonal. El mateix passa per a les matrius diagonal secundaria.

a)T$\triangleleft$D

Dem:

Hem de veure que $\forall$d $\in D$ es compleix que $\forall t \in T, dtd^{-1} \in T$.

t sempre serà de la forma: $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$

Considerem tots els possibles casos de d:

1.

$d = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in T \subseteq D$;

$d^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$.

Aleshores, $dtd^{-1} = \begin{pmatrix} xa\frac{1}{x} & 0 \\ 0 & yb\frac{1}{y} \end{pmatrix} \in T.$

2.

$d = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \in D.$

Tenim que $d^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix}$

Aleshores, $dtd^{-1} = \begin{pmatrix} xb\frac{1}{y} & 0 \\ 0 & ya\frac{1}{x} \end{pmatrix} \in T.$

Per tant, hem provat que $T \triangleleft D$.

b)

Descriviu un isomorfisme entre D/T i $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dem:

Comencem per veure que el conjunt D/T només té dos elements.

Els elements de T estan relacionats només entre si, per tant, els elements de $D-T$ no ho estan amb els de T. Falta veure que els elements de $D-T$ estan relacionats entre si.

Dos elements $x, y \in D-T$ estan relacionats si i només si $xy^{-1} \in T$, i això es compleix per què el producte de dues matrius diagonal secundaria és sempre una matriu diagonal.

Per tant, tenim que el conjut $D/T = \left\{\overline{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}, \overline{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}\right\}$

Definim ara l'aplicació f:

$$D-T \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\overline{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \longmapsto \overline{0}$$

$$\overline{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \longmapsto \overline{1}$$

Veiem ara que f es un isomorfisme de grups. L'aplicació f és bijectiva per construcció. Manca veure que es tracta d'un homomorfisme; és a dir que compleix $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Considerem els tres casos següents.

i)

$a = b = \overline{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$

$f(ab) = f(\overline{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}) = \overline{0}$

$f(a) = f(b) = \overline{0}$

$f(ab) = \overline{0} = \overline{0} + \overline{0} = f(a) + f(b)$

ii)

$a = b = \overline{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}$

$f(ab) = f(\overline{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}) = \overline{0}$

$f(a) = f(b) = \overline{1}$

$f(ab) = \overline{0} = \overline{1} + \overline{1} = f(a) + f(b)$

iii)

$a = \overline{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$

$b = \overline{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}$

$f(ab) = f(\overline{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}) = \overline{1}$

$f(a) = \overline{0}$

$f(b) = \overline{1}$

$f(ab) = \overline{1} = \overline{0} + \overline{1} = f(a) + f(b)$

El cas on b és la classe de la identitat i a és la classe de $\overline{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}$ és anàleg al tercer cas, ja que el producte pel neutre és commutatiu en tots els grups.

Per tant, hem vist que f és un isomorfisme de grups.

c) Estudieu si D és normal en $GL(2, \mathbb{C})$.

Considerem $g = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$.

Tenim que $g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$,

i prenem $d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in D$.

Aleshores $gdg^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \notin D$.

Per tant, D no és normal en $GL(2, \mathbb{C})$.