II. Espacios afines y espacios proyectivos

(II.1) Completación proyectiva de un espacio afín. Aproximación heurística de la relación entre espacios afines y espacios proyectivos: a) $\mathbb{A}^n$ y el complemento $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ del hiperplano $\{z_0 = 0\}$ de $\mathbb{P}^n$; b) el plano proyectivo $\mathbb{P}^2_K$ visto como el conjunto de las rectas por el origen en K^3 y el plano afín $\mathbb{A}^2_K$ y su espacio director encarnados respectivamente en el plano $\{z = 1\}$ y el subespacio $\{z = 0\}$ de K^3.

Hecho(1). Estructura canónica de espacio afín de dimensión n sobre K para el complemento A de un hiperplano H de un espacio proyectivo de dimensión n sobre K, e isomorfismo (proyectividad) canónico del espacio proyectivo de las direcciones de A, proyectivizado del espacio director de A, con el hiperplano H.

Hecho(2). Completación proyectiva $\hat{A}$ de un espacio afín A de dimensión n sobre K: existencia de un espacio proyectivo $\hat{A}$ de dimensión n sobre K y un hiperplano $\hat{A}_\infty$ del mismo, canónicamente asociados a A y un isomorfismo (afinidad) canónico de A con el complemento $\hat{A} \backslash \hat{A}_\infty$; en particular isomorfismo (proyectividad) canónico del espacio proyectivo de las direcciones de A con el hiperplano $\hat{A}_\infty$ (hiperplano del infinito) de $\hat{A}$.

Hecho(3). Biyección canónica entre el conjunto de los subespacios afines B de A y el conjunto de los subespacios proyectivos P' de $\hat{A} = A \sqcup \hat{A}_\infty$ que no están contenidos en $\hat{A}_\infty$, enviando B a su completación proyectiva $\hat{B} = B \sqcup \hat{B}_\infty$ y enviando P' a su restricción afín $P' \cap A$, y la igualdad $\hat{B}_\infty = \hat{B} \cap \hat{A}_\infty$.

Ejemplos: 1) las rectas L de A y su punto del infinito $\hat{L}_\infty = \hat{L} \cap \hat{A}_\infty$. 2) Expresión proyectiva del paralelismo de dos subespacios afines B_1 y B_2 de un espacio afín A. 3) Comparación del paisaje afín y el paisaje proyectivo en el caso de un trío de rectas en el plano afín, dos de ellas paralelas entre sí, y la tercera no paralela a las mismas.

Hecho(4). Isomorfismo canónico entre el grupo de las afinidades de A y el grupo de las proyectividades de $\hat{A}$ que dejan invariante el hiperplano $\hat{A}_\infty$, enviando una afinidad f de A a su completación proyectiva $\hat{f} = f \sqcup \hat{f}_\infty$, con $\hat{f}_\infty = \mathbb{P}(\varphi_f)$, y enviando la proyectividad $\mathcal{F}$ de $\hat{A}$ con $\mathcal{F}(\hat{A}_\infty) = \hat{A}_\infty$ a su restricción afín $\mathcal{F}|A$.

Ejemplo: La correspondencia en el caso de una recta afín y su completación proyectiva, traslaciones no idénticas vs. homografías parabólicas y homotecias no idénticas vs. homografías hiperbólicas.

(II.2) Coordenadas afines y coordenadas homogéneas.
Hecho(5). Referencia proyectiva de $\hat{A}$ asociada a una referencia afín de A , y la relación entre las coordenadas (afines) de A en la referencia de A y las coordenadas (homogéneas) de $\hat{A}$ en la referencia de $\hat{A}$.

Ejemplo: Visualización de los detalles en el caso de la dimensión 2, Razón simple en A vs razón doble en $\hat{A}$, para ambas acepciones de la primera (razón simple clásica y razón simple al uso de la asignatura de Geometría Lineal).

Ejemplo: El punto medio o baricentro de dos puntos distintos de A como el cuarto armónico respecto de ambos, del punto del infinito de la recta que generan.

Visualización: Construcción gráfica de todas las paralelas una recta L dada, conociendo un par de puntos distintos y el punto medio de ambos en L y recíprocamente, construcción graf́ica del punto medio de cualquier par de puntos de L conociendo una recta paralela a L, distinta de ella misma, todo ello como aplicación de la construcción gráfica del cuarto armónico vía el teorema del cuadrilátero completo.

La correspondencia entre variedades lineales de A y de $\hat{A}$ respectivamente (*Hecho(3)*) y el cálculo con coordenadas: homogeneización y deshomogeneización de ecuaciones lineales.

Ejemplos: 1) La ecuación de la recta paralela a una recta dada por un punto dado del plano, calculada al modo proyectivo. 2) La ecuación de la recta del plano afín que pasa por dos puntos dados, obtenida al modo proyectivo.

La correspondencia entre afinidades de A y proyectvidades de $\hat{A}$ (*Hecho(4)*) y el cálculo con coordenadas. La forma de escritura 'compacta' o matricial para las ecuaciones de una afinidad, recuperada por esta vía.