Problema 36. Considerem l'anell $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\,\right] \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Trobeu les unitats d'aquest anell.

(b) Proveu que 2, $1+2\sqrt{-3}$ i $1+\sqrt{-3}$ són elements irreductibles. És $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ un domini de factorització única?

(c) Demostreu que l'ideal $(7, 2+\sqrt{-3}\,)$ és primer.

Solució.

a) Un element de l'anell és una unitat si, i només si, la norma d'aquest element és ± 1.

Sigui u un element de l'anell $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$. És de la forma $u = a + b\sqrt{-3}$.

$N(u) = N(a+b\sqrt{-3}) = (a+b\sqrt{-3})(a-b\sqrt{-3}) = a^2+3b^2$, amb $a, b \in \mathbb{Z}$.

$a^2+3b^2 = \pm 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$ i $b = 0$.

Per tant, $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]^* = \{\pm 1\}$.

b) Un element $p \in A$ es diu que és irreductible si $p \neq 0$, $p \notin A^*$ i els seus únics divisors són els trivials (és a dir, si $p = ab \Rightarrow a \in A^*$ o $b \in A^*$).

Anem a comprovar que aquests tres elements són irreductibles.

- 2 : És clar que $2 \notin \{\pm 1\}$. Així, $2 = ab$. Aplicant norma tenim $4 = N(a)\cdot N(b)$ i, per tant, $N(a) \in \{1, 2, 4\}$. Raonarem per casos:
  - Si $N(a) = 1 \Rightarrow a \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]^*$.
  - Si $N(a) = 2, a = x + y\sqrt{-3} \Rightarrow N(a) = x^2+3y^2 = 2$, que no té solucions a $\mathbb{Z} \Rightarrow N(a) \neq 2$.
  - Si $N(a) = 4 \Rightarrow 4\cdot N(b) = 4 \Rightarrow N(b) = 1 \Rightarrow b \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]^*$.
- $1+2\sqrt{-3}$: És clar que $1+2\sqrt{-3} \notin \{\pm 1\}$. Així, $1+2\sqrt{-3} = ab$. Aplicant norma tenim $13 = N(a)\cdot N(b)$ i, per tant, $N(a) \in \{1, 13\}$. Distingim dos casos:
  - Si $N(a) = 1 \Rightarrow a \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]^*$.
  - Si $N(a) = 13 \Rightarrow 13\cdot N(b) = 13 \Rightarrow N(b) = 1 \Rightarrow b \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]^*$.
- $1+\sqrt{-3}$: És clar que $1+\sqrt{-3} \notin \{\pm 1\}$. Així, $1+\sqrt{-3} = ab$. Aplicant norma tenim $4 = N(a)\cdot N(b)$ i, per tant, $N(a) \in \{1, 2, 4\}$. Distingim tres casos:
  - Si $N(a) = 1 \Rightarrow a \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]^*$.
  - Si $N(a) = 2, a = x + y\sqrt{-3} \Rightarrow N(a) = x^2+3y^2 = 2$, que no té solucions a $\mathbb{Z} \Rightarrow N(a) \neq 2$.
  - Si $N(a) = 4 \Rightarrow 4\cdot N(b) = 4 \Rightarrow N(b) = 1 \Rightarrow b \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]^*$.

Per tant 2, $1+2\sqrt{-3}$ i $1+\sqrt{-3}$ són elements irreductibles.

$\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ no és un domini de factorització única. Per exemple, tenim:

$(1+\sqrt{-3})\cdot(1+\sqrt{-3}) = 2\cdot 2 = 4$, on 2, $1+\sqrt{-3}$ i $1-\sqrt{-3}$ són irreductibles.

c) Per veure si l'ideal $(7, 2+\sqrt{-3})$ és primer recordem la següent proposició:

Un ideal I d'un anell A és primer $\Leftrightarrow \forall x, y \in A$, si $x \cdot y \in I \Rightarrow x \in I$ o $y \in I$.

L'ideal ve donat per: $(7, 2+\sqrt{-3}) = \{7 \cdot \lambda + (2+\sqrt{-3}) \cdot \mu \mid \lambda, \mu \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]\}$.

Observem que $N(2+\sqrt{-3}) = 7$ i, per tant, l'ideal $(7, 2+\sqrt{-3}) = (2+\sqrt{-3})$. Volem veure doncs que $(2+\sqrt{-3})$ és primer. Ho serà si, i només si, $\frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]}{(2+\sqrt{-3})}$ és domini d'integritat.

Recordem que un anell és un domini d'integritat si, i només si, l'anell no té divisors de 0 llevat del mateix 0, és a dir, si per tot element de l'anell no n'existeix un altre tal que el seu producte doni 0.

A $\frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]}{(2+\sqrt{-3})}$, $\overline{0} = \overline{2+\sqrt{-3}} \Leftrightarrow \overline{\sqrt{-3}} = \overline{-2}$. Per tant, tot element de $\frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]}{(2+\sqrt{-3})}$ és de la forma $\overline{a-2b}$.

Ara veurem si l'anell $\frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]}{(2+\sqrt{-3})}$ té divisors de 0, tenint en compte que si el producte de dos elements de l'anell és 0, llavors un dels dos factors ha de ser 0.

Considerem $\overline{(a-2b)}, \overline{(x-2y)} \in \frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]}{(2+\sqrt{-3})}$, tals que $\overline{(a-2b)} \cdot \overline{(x-2y)} = \overline{0} = \overline{(2+\sqrt{-3})}$.

Llavors $(a-2b) \cdot (x-2y) = (2+\sqrt{-3}) \cdot (\alpha + \beta\sqrt{-3}) = (2\alpha - 3\beta) + (\alpha + 2\beta)\sqrt{-3}$.

El primer terme és enter i, igualant coeficients, tenim que $(a-2b) \cdot (x-2y) = (2\alpha - 3\beta) \Leftrightarrow (\alpha + 2\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2\beta$.

Substituint el valor trobat d'α a l'expressió anterior, obtenim que $(a-2b) \cdot (x-2y) = -7\beta \in (7) \in \mathbb{Z}$. Aleshores, com que el 7 és un primer, podem diferenciar dues opcions. O $7 \mid (a-2b)$ o bé $7 \mid (x-2y)$.

Prenent classes veiem que, si $7|(a-2b)$, com que $7 \in (2+\sqrt{-3})$, llavors $(a-2b) \in (2+\sqrt{-3}) \Rightarrow \overline{a-2b} = \overline{0}$. I anàlogament passarà amb $7|(x-2y)$. Per tant, com que un dels dos ha de ser múltiple de 7, un d'aquests serà 0.

Així, $\frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]}{(2+\sqrt{-3})}$ és un domini d'integritat, ja que tot divisor de zero és el zero. D'aquesta manera, l'ideal $(2+\sqrt{-3})$ és primer i, per tant, $(7, 2+\sqrt{-3})$ també ho és.