Problemas de Algebra Lineal. Grupo tarde. Curso 2010-11

Capítulo 3. Diagonalización

1. Problemas con matrices explícitas

71. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prueba que A es diagonalizable y halla una base de $\mathbf{R}^3$ formada por vectores propios de A.

72. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 3 & -1 & b \\ -2 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Determina a, b, c de modo que $(2, 0, -1)$ sea un vector propio de valor propio -1. Halla en tal caso los otros valores propios de A.

73. Determina la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ 3 & c & f \end{pmatrix}$$

de modo que los vectores $(1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$, $(0, 1, -1)$ sean vectores propios. ¿Cuáles son los valores propios?
(Solución: $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, y los valores propios son $\{6, -4, 0\}$.)

74. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ el cuerpo de escalares. Para cada una de las matrices A siguientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & p \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

(1) Calcula su polinomio característico y sus valores propios.
(2) Para cada valor propio λ de A, halla la dimensión del subespacio de vectores propios de valor propio λ, $E_\lambda := \mathrm{Ker}(A - \lambda\mathbf{1})$.
(3) Estudia si la matriz A es diagonalizable y determina su forma diagonal en caso afirmativo.
(4) En el caso de que A sea diagonalizable, halla una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A.

Considera primero el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y a continuación el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Cuando hay parámetros discute según su valor.

75. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ el cuerpo de escalares. Para cada una de las matrices A siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -p \\ p & 1 \end{pmatrix},$$

(1) Calcula su polinomio característico y sus valores propios.
(2) Para cada valor propio λ de A, halla la dimensión del subespacio de vectores propios de valor propio λ, $E_\lambda := \mathrm{Ker}(A - \lambda\mathbf{1})$.

(3) Estudia si la matriz A es diagonalizable y determina su forma diagonal en caso afirmativo.
(4) En el caso de que A sea diagonalizable, halla una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A.

Considera primero el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y a continuación el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Cuando hay parámetros discute según su valor.

76. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ el cuerpo de escalares. Para cada una de las matrices A siguientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & p & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -p & 0 \\ p & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

(1) Calcula su polinomio característico y sus valores propios.
(2) Para cada valor propio λ de A, halla la dimensión del subespacio de vectores propios de valor propio λ, $E_\lambda := \mathrm{Ker}(A - \lambda\mathbf{1})$.
(3) Estudia si la matriz A es diagonalizable y determina su forma diagonal en caso afirmativo.
(4) En el caso de que A sea diagonalizable, halla una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A.

Considera primero el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y a continuación el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Cuando hay parámetros discute según su valor.

77. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Estudia si A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y, en caso afirmativo, halla una base de vectores propios.

78. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Determina los valores de $a, b \in \mathbb{C}$ de modo que A sea diagonalizable sobre $\mathbb{C}$. Halla para estos valores la forma diagonal de A.

79. Sea E un espacio vectorial complejo de dimensión n y sea $(e_1, \ldots, e_n)$ una base de E. Fijada una permutación σ del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ designemos por $f_\sigma : E \to E$ el endomorfismo tal que $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Demuestra que f_σ es diagonalizable.

En el caso particular en que $n = 5$ y $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, halla la matriz de f en la base canónica, una forma diagonal de f_σ y la base en la que diagonaliza.

80. Sea A la matriz definida por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Estudia si A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

81. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Discute en función del parámetro a si la matriz A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$. De la discusión anterior, ¿qué deducimos para los valores $a = 0, 1, 4$?

2. Problemas con matrices no dadas explícitamente

82. Sea A una matriz cuyo polinomio característico es $p(t) = (t^2+1)(t-2)(t-3)$. Estudia si A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$. En caso afirmativo, halla la forma diagonal de A.

83. Sean u, v dos vectores propios no nulos de una matriz A con valores propios 1 y 2 respectivamente. Prueba, usando únicamente las definiciones, que u y v son linealmente independientes.

84. Sea A una matriz cuyo polinomio característico es $-(t-1)^2(t+2)^3$, y tal que

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I) = a, \quad \dim \operatorname{Ker}(A + 2I) = 3.$$

¿Para que valores de a es A diagonalizable? Escribe la forma diagonal de A para esos valores de a. ¿ Para que valores de a es cierto que $\mathbb{R}^5 = \operatorname{Ker}(A - I) \oplus \operatorname{Ker}(A + 2I)$?.

85. Sean E un espacio vectorial de dimensión finita y $f : E \longrightarrow E$ un proyector, es decir, un endomorfismo tal que $f^2 = f$.

(1) Prueba que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - Id)$.
(2) Prueba que f es diagonalizable y halla sus posibles formas diagonales.
(3) Estudia el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base canónica es $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

86. Sean E un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K, y $f : E \longrightarrow E$ un endomorfismo idempotente, es decir, tal que $f^2 = Id_E$.

(1) Prueba que $E = \operatorname{Ker}(f + Id) \oplus \operatorname{Ker}(f - Id)$.
(2) Prueba que f es diagonalizable y halla sus posibles formas diagonales.
(3) Estudia el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$.
(4) Estudia el endomorfismo de $\mathbb{R}(n, n)$ definido por la trasposición $A \mapsto A^t$

87. Sea A una matriz cuadrada con coeficientes reales tal que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$. ¿Es A diagonalizable sobre $\mathbb{R}$?

88. Sea A una matriz cuadrada con coeficientes complejos tal que $A^5 = I$ Prueba que A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.

89. Sea A una matriz cuadrada con coeficientes racionales tal que $(A^2 - 4)(A^2 - I) = 0$. Prueba que A es diagonalizable sobre $\mathbb{Q}$.

90. Sean A una matriz cuadrada, y $P(t)$, $Q(t)$ dos polinomios primos entre sí tales que $(P \cdot Q)(A) = 0$.
(1) Prueba que $\operatorname{Im} P(A) = \operatorname{Ker} Q(A)$, e $\operatorname{Im} Q(A) = \operatorname{Ker} P(A)$. (Indicación: Bézout.)

(2) Prueba que si A es una matriz diagonalizable, con valores propios $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, entonces

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 \mathbf{1}) = \mathrm{Im}(A - \lambda_2 \mathbf{1}) \cdot \cdots \cdot (A - \lambda_r \mathbf{1}).$$

Observación: Esta fórmula es un método para calcular autoespacios de matrices diagonalizables.
(3) Sea f un endomorfismo diagonalizable con solo 2 valores propios, uno de los cuales es nulo (por ejemplo, un proyector, problema 85). Prueba que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

3. Potencias de matrices y matrices que son solución de una ecuación matricial

91. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Halla para qué valores de a la matriz A es diagonalizable. Para estos valores de a calcula la forma diagonal de A^p para todo $p \in \mathbb{Z}$.
(Solución: Sólo para $a = 6$. $D_{A^p} = ((-2)^p, (-2)^p, 2^p)$.)

92. Sea A la matriz definida por

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ es un parámetro.
(i) Estudia, en función del parámetro λ, si la matriz A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.
(ii) Para $\lambda = 0$ halla una base de $\mathbb{C}^3$ formada por vectores propios de A.
(iii) Para $\lambda = 0$ halla una matriz (compleja) B tal que $B^2 = A$.

93. Sea A la matriz definida por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Halla una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.
(2) Halla, si es posible, una matriz B tal que $B^2 = A$.
(3) Halla 8 soluciones distintas de la ecuación

$$B^2 + 2B - I = A,$$

en la incógnita $B \in \mathbb{R}(3,3)$. (Puedes dejar los resultados en forma de productos de matrices, de forma que queden claros cuales son los valores propios de B.)

94. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando que la matriz

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

satisface $A \cdot U = Diag(1, 1, -1, -1, 2) \cdot U$, halla 32 soluciones de la ecuación

$$X^2 + X - I = A$$

en la incógnita $X \in \mathbb{R}(5,5)$.

95. Diagonaliza la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y halla una matriz B tal que $B^3 = A$. Calcula A^{2011}.

4. Aplicaciones

96. Consideremos una sucesión $(a_n)_n$ tal que

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n; \quad n \geq 0.$$

(i) Halla el término general de la sucesión en función de los términos iniciales a_0, a_1.
(ii) Halla a_n si $a_0 = 0, a_1 = 1$.
(iii) Resuelve el siguiente "Problema de Fibonacci": *Un criador de conejos tiene una pareja de conejos recién nacidos. Se supone que*

(1) Cada pareja adulta cria una nueva pareja cada mes.
(2) Una pareja es adulta a los dos meses de edad.
(3) Los conejos son inmortales.

¿Cuántos conejos habrán al cabo de n meses?
(iv) Calcula el determinante D_n de la matriz A_n de tipo $n \times n$ definida por

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

97. Prueba que

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

satisface la ley de recurrencia $D_{n+2} = 5D_{n+1} - 6D_n$. Prueba a partir de aquí la fórmula $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$ usando el método de diagonalización.

98. Encuentra el término general de la sucesión

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$$

en función de los términos iniciales a_0, a_1.

99. En una cierta región, y según datos de los últimos cincuenta años, si un día hace sol, hay un 70% de probabilidades de que al día siguiente haga sol, pero, si un día está nublado, hay un 80% de probabilidades de que al día siguiente también esté nublado. Calcula la probabilidad, $p_s^{(k)}$, de que dentro de k días haga sol en los casos siguientes:

(1) suponiendo que hoy hace sol,
(2) suponiendo que hoy está nublado,

(3) suponiendo que la probabilidad para hoy es $p = (p_s, p_n)$, con $p_s + p_n = 1$.
Calcula el límite de $p_s^{(k)}$ cuando k tiende a ∞ en los tres casos.
A la larga, ¿ qué tanto por ciento de días de sol y qué tanto por ciento de días nublados hay en esta región?

100. Juan puede estar triste o contento. Si un determinado día está contento, también lo está al dia siguiente, cuatro de cada cinco ocasiones en que esto ocurre. Si un día está triste, también lo está al día siguiente en una de cada tres ocasiones. A la larga, ¿cuál es la probabilidad de que Juan esté contento en un determinado día?

101. Un país está dividido en tres regiones demográficas. Se ha determinado que cada año el 5% de los residentes en la región 1 se cambia a la región 2 y otro 5% a la región 3. De los residentes en la región 2, el 15% se cambia a la región 1 y el 10% a la región 3. Y, de los residentes en la región 3, el 10% se cambia a la región 1 y el 5% a la región 2.
¿Qué porcentaje de población residirá en cada región después de un largo período de tiempo?

102. Un tipo de escarabajos vive exactamente 3 años y se reproducen solo en el tercer año. Se ha observado que solo una fracción q de los escarabajos nacidos el primer año sobreviven al segundo, y solo una fracción p de los que han sobrevivido al segundo, sobreviven al tercero. Finalmente también se ha observado que por cada escarabajo que llega al tecer año, nacen λ. Si designamos por a_k, b_k, c_k los escarabajos vivos el k-ésimo año de edades $1, 2, 3$ años respectivamente, demuestra que existe una matriz A tal que

$$A \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix}$$

Prueba que hay una relación cíclica en la proporción de escarabajos de edades $1, 2, 3$ años. Demuestra que si $pq\lambda < 1$ la población de escarabajos disminuye, pero si $pq\lambda > 1$ la población aumenta. ¿Qué pasa si $pq\lambda = 1$?

103. Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_1' & = 4f_1 + f_2 \\ f_2' & = f_1 + 4f_2 \end{array} \right. .$$

104. Resuelve la ecuación diferencial $f'' - 3f' + 2f = 0$.

105. Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_1' & = f_2 + f_3 \\ f_2' & = f_1 + f_3 \\ f_3' & = f_1 + f_2 \end{array} \right. .$$