1.pdf

MODELS I SISTEMES DINÀMICS

Llista 1: Aplicacions unidimensionals

B.1. Trobeu els punts fixos i les òrbites de període 2 de les següents funcions. En el cas que apareixin paràmetres, feu-ho en funció d'aquests.

(a) * $f(x) = 2x(1-x)$, on $x \in \mathbb{R}$.

(b) * $f_c(x) = x^2 + c$, on $x, c \in \mathbb{R}$ (només punts fixos).

(c) $f(x) = x^2 + 1$, on $x \in \mathbb{R}$.

(d) $f_{a,b}(x) = ax + b$, on $a, b, x \in \mathbb{R}$.

(e) $f(x) = 2x^2 - 5x$, on $x \in \mathbb{R}$.

B.2. Fent servir anàlisi gràfic, dibuixeu el retrat de fases de

(a) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = x(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) $f_a(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$, pels diferents valors de $a \in \mathbb{R}$.

B.3. * Trobeu els punts fixos atractors i les seves conques d'atracció per a la funció $f(x) = \frac{3x - x^3}{2}$, per $|x| \leq \sqrt{3}$.

B.4. Per a la funció logística $f_a(x) = ax(1-x)$, calculeu els punts fixos i els cicles de període 2 en funció del paràmetre, i determineu-ne l'estabilitat.

1. Estudieu el comportament asimptòtic de la successió $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, pels diferents valors de x_0 indicats.

(a) * $x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n}}{2}$, $x_0 \geq 0$.

(b) $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n}$, $x_0 \geq 2$.

2. Donada la successió $x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$,

(a) Trobeu el límit $L = \lim_{n \to \infty} x_n$ per a $x_0 \geq 0$.

(b) Descriviu el conjunt dels $x_0 < 0$ pels quals el límit $\lim_{n \to \infty} x_n$ existeix i no és igual a L, o bé no existeix. (Per exemple $x_0 = -1$).

3. **(Examen 2011)** Considereu el sistema dinàmic real definit per $x_{n+1} = \frac{x_n}{4} + x_n^3$. Trobeu el comportament asimptòtic de les òrbites per a tota condició inicial $x_0 \in \mathbb{R}$. Justifiqueu rigorosament les vostres afirmacions.

4. Demostreu rigurosament que $f(x) = \sin(x)$ té $x = 0$ com atractor global.

5. Demostreu que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és derivable, x_0 és un punt fix i $|f'(x_0)| > 1$ llavors x_0 és un punt fix repulsor.

6. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ i sigui x_0 un punt fix tal que $f'(x_0) = 1$. Doneu criteris sobre les derivades d'ordre superior, per determinar el retrat de fase local al voltant de x_0. Apliqueu-ho a determinar l'estabilitat dels punts fixos de $x^3 - x$.

.pdf