Respostes i algunes solucions dels laboratoris

Laboratori 1: Subconjunts de $\mathbb{R}$

Ex.1

(a) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 3)$.

(b) $x \in (-\infty, -3/2)$.

Ex.2

(a) $\{1\}$.

(b) $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.

(c) $\{2, 3\}$.

(d) $\{4, 6\}$.

(e) $\{2, 3, 4, 6\}$.

(f) $\mathbb{N}$.

(g) $\varnothing$.

(h) $(-\infty, 6) \cup \bigcup_{n=6}^{\infty} (n, n+1)$.

(i) $\varnothing$.

Ex.3

(i) A.

(ii) B.

(iii) $[-n, +\infty)$.

(iv) $[0, n]$.

(v) C_n.

(vi) B.

Laboratori 2: Funcions

Ex.1

(a) Bijectiva.

(b) NO és injectiva, SI és exhaustiva.

(c) NO és exhaustiva, SI és injectiva.

Ex.2

(a) $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = (1, +\infty)$.

(b) $f^{-1}(1/2) = \{-1, 0, 1\}$.

(c) $D(f \circ g) = (1, +\infty)$, $D(g \circ f) = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \bigcup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.

$(f \circ g)(x) = \left|\frac{x-3}{2(x-1)}\right|$, $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-3/2}}$.

Ex.3

(a) $f^{-1}([0,1]) = [1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{3}]$.

$f^{-1}([-1,0]) = [1-\sqrt{2}, 0] \cup [2, 1+\sqrt{2}]$.

(b) $f([0,1]) = [-2,-1]$, $f([-1,0]) = [-1,2]$.

(c) NO és injectiva, NO és exhaustiva.

Laboratori 3: Funcions elementals. Límits de funcions

Ex.1

Domini: $D(f) = (-1, \frac{1}{e} - 1]$.

Recorregut: $R(f) = [0, \infty)$.

Funció inversa: $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{e^{e^{y^2}}} - 1 = e^{-e^{y^2}} - 1$.

Ex.2

(a) $D(f) = [0, \infty)$, $R(f) = [1, \infty)$.

(b) SI és injectiva, $f : D(f) \to \mathbb{R}$ NO és exhaustiva, $f : D(f) \to R(f)$ és bijectiva.

Ex.3

Imiteu la demostració de $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$ feta a classe !!

Laboratori 4: Límits de funcions

(a) 0.

(b) 2/3.

(c) $+\infty$.

(d) $-\infty$.

(e) -2.

(f) 1.

(g) -1.

(h) $+\infty$.

Laboratori 5: Continuïtat

1. La única discontinuïtat de f està en $x = 1$. Aquesta discontinuïtat no és evitable i tampoc de salt.

2. $a > 0$ i $b = -1$.

3. $a > 0$.

Laboratori 6: Continuïtat: Teorema de Bolzano

1. (a) Com que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció contínua tal que $p(0) = 1 > 0$ i $p(2) = -5 < 0$, el teorema de Bolzano assegura que existeix $x_0 \in (0, 2)$ tal que $p(x_0) = 0$.

   (b) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

2. (a) Les solucions de l'equació $2^x = 3x$ són els zeros de la funció $f(x) = 2^x - 3x$.
   Ara $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció contínua que compleix que $f(3) = -1 < 0$ i $f(4) = 4 > 0$.
   Per tant, aplicant el teorema de Bolzano, obtenim que f té algun zero a l'interval $(3, 4)$.

   (b) La continuïtat de f i el fet que $f(0) = 1 > 0$ i $f(1) = -1 < 0$ asseguren, pel teorema de Bolzano, que f té algun zero a l'interval $(0, 1)$. Per tant, tenint en compte (a), deduïm que l'equació $2^x = 3x$ té almenys dues solucions reals.

3. (a) Com que $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ és una funció contínua complint que $f(1) = -1 < 0 < 1 = f(1)$, el teorema de Bolzano assegura que existeix $x_0 \in (-1, 1)$ tal que $f(x_0) = 0$.

   (b) Les solucions de l'equació $x^2 + (f(x))^2 = 1$ són els zeros de la funció $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida per $g(x) = x^2 + (f(x))^2 - 1$. Com que $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ és una funció contínua, també ho és $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. A més a més, $g(\pm 1) = 1 > 0 > x_0^2 - 1 = g(x_0)$ i per tant el teorema de Bolzano implica que existeixen $x_1 \in (-1, x_0)$ i $x_2 \in (x_0, 1)$ tals que $f(x_1) = 0$ i $f(x_2) = 0$.

Laboratori 7: Derivació

1. (a) Recta tangent: $y = x$; Recta normal: $y = -x$.
   (b) Recta tangent: $y = 1$; Recta normal: $x = 0$.

2. (a) $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$.
   (b) $a = b = 0$.

3. (a) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   (b) No existeix perquè $\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = -\infty$.
   (c) 0.
   (d) 0.
   (e) 0.
   (f) e^4.

Laboratori 8: Creixement

1. (a) f és estrictament decreixent en $(-\infty, -2]$ i en $[-1, 0]$.
   f és estrictament creixent en $[-2, -1]$ i en $[0, +\infty)$.
   (b) Els extrems relatius de f són:
   - $x = -2$ i $x = 0$, que són mínims relatius de f.
   - $x = -1$, que és màxim relatiu de f.

   (c) f no té valor màxim en $\mathbb{R}$, ja que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   El valor mínim de f en $\mathbb{R}$ és 3, i els mínims absoluts de f en $\mathbb{R}$ són $x = -2$ i $x = 0$.
   El valor màxim en $[-1, 1]$ és 12, i l'únic màxim absolut de f en $[-1, 1]$ és $x = 1$.
   El valor mínim de f en $[-1, 1]$ és 3, i l'únic mínim absolut de f en $[-1, 1]$ és $x = 0$.

2. Com que f és estrictament decreixent en $[0, \pi]$,
$$\max_{x\in[0,\pi]} f(x) = f(0) = 1 \qquad \text{i} \qquad \min_{x\in[0,\pi]} f(x) = f(\pi) = -1 - \pi.$$
   Aleshores, com que f és contínua en $[0, \pi]$, deduïm (utilitzant els teoremes de Bolzano i Weierstrass) que $f([0, \pi]) = [-1 - \pi, 1]$.

3. f és estrictament creixent en $(0, e^{-2}]$ i en $[1, +\infty)$.
   f és estrictament decreixent en $[e^{-2}, 1]$.
   f no té valor màxim en $(0, +\infty)$, ja que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   El valor mínim de f en $(0, +\infty)$ és 0, i l'únic mínim absolut de f en $(0, +\infty)$ és $x = 1$.

Laboratori 8: Teorema de Rolle i aplicacions

1. (a) Ens demanen provar que la funció $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida per $f(x) = x + \log x$, té un únic zero:

    - f té almenys un zero: Observeu que f és una funció contínua que compleix

    $$f(1) = 1 - \log 1 = 1 > 0.$$

    A més a més, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ i per tant existeix $0 < a < 1$ tal que $f(a) < 0$. Aleshores el teorema de Bolzano assegura que f té almenys un zero a l'interval $(a, 1)$.

    - f té com a molt un zero: f és una funció derivable i $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$, per a tot $x > 0$. Com que f' no té cap zero, f té com a molt un zero, pel teorema de Rolle.

   (b) Ens demanen provar que la funció $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida per $g(x) = 2^{-x}x - x$, té un únic zero:

    - f té almenys un zero: Com que f és una funció contínua complint

    $$g(0) = 2^0 - 0 = 1 > 0 \qquad \text{i} \qquad g(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0,$$

    el teorema de Bolzano assegura que g té almenys un zero a l'interval $(0, 1)$.

    - f té com a molt un zero: g és una funció derivable i $g'(x) = -(\log 2)2^{-x} - 1 < 0$, per a tot $x > 0$. Com que g' no té cap zero, g té com a molt un zero, pel teorema de Rolle.

2. - Primer ens demanen provar que, per cada $k \in \mathbb{R}$, la funció $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida per $f_k(x) = x^3 - 3x + k$, té com a molt un zero en $[-1, 1]$. En efecte, com que f_k és derivable i $f_k'(x) = 3(x^2 - 1)$ només té com a zeros els punts $x = \pm 1$, f_k' no té cap zero en l'interval $(-1, 1)$, i per tant el teorema de Rolle implica que f_k té com a molt un zero en $[-1, 1]$.
   - Després ens pregunten per a quins k's f_k té exactament un zero en $[-1, 1]$, és a dir, f_k compleix que $0 \in f_k([-1, 1])$. Com que f_k és derivable i $f_k'(x) = 3(x^2 - 1) \leq 0$, per a tot $x \in [-1, 1]$, resulta que f_k és decreixent en $[-1, 1]$, i per tant

   $$f_k([-1, 1]) = \left[\min_{x \in [-1,1]} f_k(x), \max_{x \in [-1,1]} f_k(x)\right] = [f_k(1), f_k(-1)] = [k - 2, k + 2],$$

   com a conseqüència dels teoremes de Bolzano i de Weierstrass. Així doncs, $0 \in f_k([-1, 1])$ si i només si $k - 2 \leq 0 \leq k + 2$, és a dir, si i només si $-2 \leq k \leq 2$.

   En conclusió, l'equació $x^3 - 3x + k = 0$ té exactament una solució en $[-1, 1]$ si i només si $-2 \leq k \leq 2$.

3. La funció $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és derivable i $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. Per tant, el teorema del valor mitjà assegura que per a cada $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < 0 < b$, existeix $c \in (a, b)$ tal que

$$\arctan b - \arctan a = \arctan'(c)\,(b - a) = \frac{b - a}{1 + c^2}.$$

Observeu que $0 < 1+a^2 < 1+c^2 < 1+b^2$, ja que $0 \leq a < c < b$, i per tant $\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$. Multiplicant aquesta desigualtat per $b-a > 0$ obtenim que $\frac{b-a}{1+b^2} < \frac{b-a}{1+c^2} < \frac{b-a}{1+a^2}$ i això vol dir que

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$