Problema 51. Determineu tots els grups abelians G d'ordre 24, que no contentenen cap element d'ordre més gran que 12:

Observació 1. Si $G = \prod_{i=1}^{m} G_i$ siendo n_i el orden de cada G_i, se cumple:

$$\forall a \in G : \#a \leq mcm(n_i)$$

Veamoslo comprobando que $\forall a = (a_i) \in G : a^{mcm(n_i)} = e$:

$$\#a_i | \#G_i \to \#a_i | n_i \to \#a_i | mcm(n_i) \to a_i^{mcm(n_i)} = e_i.$$

$$a^{mcm(n_i)} = (a_i^{mcm(n_i)}) = (e_i) = e.$$

Solució. $\#G = 24 = 2^3 * 3$. Tenemos tres descomposiciones en factores elementales posibles:

$$(24) : G = C_{24}$$

G es cíclico y su generador tiene orden 24. G no pertenece al conjuto que buscamos.

$$(2, 12) : G_2 = C_2 \times C_{12}$$

$mcm(2, 12) = 12$. Por la observación, $\nexists\, a \in G_2$ tal que $\#a > 12$.

$$(2, 2, 6) : G_3 = C_2 \times C_2 \times C_6$$

$mcm(2, 2, 6) = 6$. Por la observación, $\nexists\, a \in G_3$ tal que $\#a > 12$.

Los grupos que buscábamos son el G_2 y el G_3.