Problema 21. Sigui K un cos. Demostreu que el centre de $\mathrm{GL}(n, K)$ és format per les matrius de la forma $M = \lambda \mathrm{Id}$, per a algun $\lambda \in K^*$.

Recordem que, si G és un grup, el seu centre és $Z(G) := \{g \in G : \, gh = hg, \text{ per a tot } h \in G\}$.

Solució. Definim el grup lineal com:

$$\mathrm{GL}(n, K) := \{M \in \mathrm{M}_{n\times n}(K) \mid \det(M) \in K^*\};$$

i el seu centre el definim així:

$$Z := \{M \in \mathrm{GL}(n, K) \mid MA = AM, \; \forall \mathrm{A} \in \mathrm{GL}(n, K)\}.$$

Per tant, hem de trobar totes les matrius invertibles que commuten amb la resta de matrius del grup lineal. Començarem per les matrius senzilles de dimensió 2, i després veurem el cas general de dimensió n.

Cas n=2:

Considerem $M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Z$. Com que M_2 és del centre, ha de commutar amb qualsevol matriu del grup lineal de dimensió 2. Imposem aquesta condició amb dues matrius concretes $A_2, B_2 \in GL(2, K)$:

Siguin

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

llavors:

$$M_2 A_2 = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}, \; A_2 M_2 = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Com que $M_2A_2 = A_2M_2$ ja que M_2 és del centre, tenim que:

$$\begin{cases} b = c \\ a = d \\ d = a \\ c = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = b \\ d = a \end{cases} \Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Ara considerem M_2 d'aquesta forma que hem trobat, i repetim el procés amb B_2:

$$M_2 B_2 = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ a+b & -a \end{pmatrix}, \; B_2 M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ a-b & b-a \end{pmatrix}.$$

i puig que $M_2B_2 = B_2M_2$ obtenim:

$$\begin{cases} a+b = a \\ -b = b \\ a+b = a-b \\ -a = b-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = a \end{cases} \Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Per tant, $M_2 = aId$. I tenint en compte que el determinant de M_2 ha de ser invertible (degut a que M_2 és del centre), tenim que a és invertible i, per tant, $M_2 = \lambda Id$, on $\lambda = a \in K^*$.

D'altra banda, si tenim una matriu M de dimensió 2 de la forma $M = \lambda Id$, amb $\lambda \in K^*$, M és del centre del grup lineal trivialment.

Anem a veure el cas general, amb matrius de dimensió n:

Cas n:

Considerem $M_n = (m_s^r) \in Z$, amb $r, s = \{1, \ldots, n\}$. Sabem que ha de commutar amb qualsevol matriu del grup lineal de dimensió n, ja que és del centre. Imposem aquesta condició amb una matriu concreta $A_n \in GL(n, K)$.

Siguin

$$M_n = \begin{pmatrix} m_1^1 & \ldots & m_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ m_1^n & \ldots & m_n^n \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & & & & & & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & \ldots & \ldots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & \vdots & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & \vdots & & 1 & \vdots & & & \\ & & & 1 & \ldots & \ldots & 0 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & & & & & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

on els 0's de la diagonal de la matriu A_n estàn situats a les posicions (i, i) i (j, j), i els 1's fora d'aquesta a les posicions (i, j) i (j, i). Considerem que $1 \leq i < j \leq n$.

Llavors, fent $M_n A_n$ obtenim la matriu A_n amb les columnes i i j intercanviades i, quan calculem $A_n M_n$, el que s'intercanvia de la matriu A_n són les files i i j. Com que s'ha de complir que $M_n A_n = A_n M_n$, obtenim que, pels i, j que hem fixat a la matriu A_n, els següents elements de M_n han canviat:

$$\begin{cases} m_i^i = m_j^j, \\ m_j^i = m_i^j, \\ m_k^i = m_k^j, & \forall k \neq \{i, j\}, \\ m_i^l = m_k^l, & \forall l \neq \{i, j\}. \end{cases}$$

Per tant, M_n ara és d'aquesta forma (en negreta els elements que han canviat):

$$M_n = \begin{pmatrix} m_1^1 & \ldots & m_i^1 & \ldots & \ldots & \mathbf{m_i^1} & \ldots & m_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ m_1^i & \ldots & m_i^i & \ldots & \ldots & m_j^i & \ldots & m_n^i \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ m_1^{j-1} & \ldots & m_i^{j-1} & \ldots & m_{j-1}^{j-1} & \mathbf{m_i^{j-1}} & \ldots & m_n^{j-1} \\ \mathbf{m_1^i} & \ldots & \mathbf{m_j^i} & \ldots & \ldots & \mathbf{m_i^i} & \ldots & \mathbf{m_n^i} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1^n & \ldots & m_i^n & \ldots & \ldots & \mathbf{m_i^n} & \ldots & m_n^n \end{pmatrix},$$

Ara, considerem una matriu $B_n \in GL(n,K)$ igual a la identitat però amb -1's sobre la diagonal:

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & & \dots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & & \dots & & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i la nova matriu M_n. Es compleix $M_nB_n = B_nM_n$, ja que M_n és del centre i B_n del grup lineal. En aquest moment hem de distingir dos casos, segons la posició de la i i de la j de la matriu A_n:

- *Cas 1*: $i = 1$, $j = n$ o $i = 1$ i $j = n$. En aquest cas, quan imposem que el producte de M_n i B_n commuta, resulta que tots els elements de la diagonal són iguals ($m_r^r = m_s^s, \forall r \neq s$), i que els de fora de la diagonal són tots zero ($m_s^r = 0, \forall r \neq s$). Per tant, $M_n = m_1^1 Id$. Com que $m_1^1 \in K^*$, ja que sinó el determinant de M_n seria zero (contradint que M_n pertany al grup lineal), podem posar $m_1^1 = \lambda$ i, per tant, $M_n = \lambda Id, \lambda \in K^*$.

  $\square$

- *Cas 2*: $\{i,j\} \neq \{1,n\}$. Obtenim el mateix resultat que abans, però a M_n ens queda l'últim element de la primera fila, m_n^1, que encara no hem demostrat que sigui zero.

  Considerem també la matriu $C_n \in GL(n,K)$, igual a la identitat però amb un -1 al final de la primera columna:

$$M_n = \begin{pmatrix} m_1^1 & 0 & \dots & 0 & m_n^1 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & m_1^1 \end{pmatrix}, \quad C_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

  S'ha de complir $M_nC_n = C_nM_n$:

$$M_nC_n = \begin{pmatrix} m_1^1 - m_n^1 & 0 & \dots & 0 & m_n^1 \\ 0 & m_1^1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ -m_1^1 & 0 & \dots & 0 & m_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^1 & 0 & \dots & 0 & m_n^1 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & m_1^1 & 0 \\ -m_1^1 & 0 & \dots & 0 & -m_n^1 + m_1^1 \end{pmatrix} = C_nM_n.$$

  Per a que la igualtat sigui certa, $m_n^1 = 0$, de manera que M_n queda de la forma que volíem:

$$M_n = \lambda Id, \text{ amb } \lambda = m_1^1 \in K^*, \text{ ja que } m_1^1 \neq 0 \text{ (doncs } det(M_n) = (m_1^1)^n \neq 0).$$

  $\square$

Observem que si tenim una matriu M de dimensió n de la forma $M = \lambda Id$, amb $\lambda \in K^*$, M és del centre de $GL(n,K)$ trivialment.