Àlgebra Lineal, Curs 2010-11, Grup tarda
Segon examen parcial. 30 de maig de 2011

1.(4/10) Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Determina para qué valores de $a \in \mathbb{C}$ la matriz A es diagonalizable. Halla la forma de Jordan de A en función de $a \in \mathbb{C}$.
(2) Para $a = 0$, halla una base de vectores propios de A.
(3) Para $a = 1$, halla una base de Jordan de $\mathbb{C}^4$ respecto de A.
(4) Para $a = 0$, estudia para qué valores de $p \in \mathbb{N}$ se cumple $A^p = A$. Para $a = 1$, halla el rango de A^p, para todo $p \geq 1$, y estudia si existe algún $p > 1$ tal que $A^p = A$.

2.(3/10) Sea A una matriz con coeficientes en $\mathbb{C}$, de tipo 10×10 tal que

$$A^{10}(A-1)^{10} = 0, \quad \mathrm{tr}\ A = 7, \quad \mathrm{rg}\ A^2 = 8, \quad \text{y} \quad \mathrm{rg}(A-1)^5 = 4.$$

(1) Halla el polinomio mínimo, el polinomio característico, y la forma Jordan de A. ¿Se cumple $A^2 = A$?
(2) Halla el rango de $A^2(A-1)^5$. Halla el rango de $A^p(A-1)$, para todo $p \in \mathbb{N}$.
(3) Sean $u, v, w \in \mathbb{C}^{10}$ tales que
   (a) $A^3u = 0, \quad A^2u \neq 0$,
   (b) $(A-1)^6v = 0, \quad (A-1)^5v \neq 0$,
   (c) $\{(A-1)^5v, w\}$ es una base de $\mathrm{Ker}\,(A-1)$.
   Halla una base de Jordan de A.

3.(3/10) Sea A una matriz de tipo $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$.

(1) (a) Define vector propio y valor propio de A.
   (b) Define el autoespacio asociado a un valor propio. Define la multiplicidad geométrica de un valor propio.
   (c) Define el polinomio característico de A. Define la multiplicidad algebraica de un valor propio.
   (d) Prueba que la multiplicidad geométrica es menor o igual que la multiplicidad algebraica.
(2) Estudia la independencia lineal de vectores propios de valores propios distintos. (Enunciado y demostración.)
(3) Enuncia y demuestra el primer criterio de diagonalizabilidad (por las multiplicidades).