Problema 6. Demostreu que si tots els elements d'un grup G, llevat del neutre, són d'ordre 2, aleshores G és un grup abelià.

Solució. Sigui $x \in G$ i $x \neq 1$, com que x és d'odre 2 aleshores: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = x^{-1} = x^{-1}$. Per tant, cada element coincideix amb el seu invers.

Veiem que G és abelià ja que si prenem $x, y \in G$ qualsevols, tenim que: $xy = (xy)^{-1} = = y^{-1}x^{-1} = yx$. Amb això veiem que el producte és commutatiu i G és abelià.

Observació: Observem que els grups que tenen una estructura d'espai vectorial sobre el cos $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ compleixen aquesta condició.

Ara volem veure el recíproc: Els grups que satisfan aquesta condició són $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espais vectorials i, per tant, el seu ordre és una potència de 2.

Per continuar, convindria un canvi de notació, on cal definir que 0*x és el neutre de G. Els axiomes de suma de l'espai vectorial es compleixen per la pròpia definició de grup. Però a l'hora de definir el producte 1*g = g i 0*g = 0 hem de tenir en compte una propietat d'aquest cos.

En aquest cos, tenim, 1+1 = 0, per tant 0x = (1+1)x = 0 i això només es compleix si x = -x, és a dir, si cada element coincideix amb el seu invers tal i com hem vist que complien els elements de G i, d'aquesta manera, tenim el producte ben definit, ja que les regles de composició també es compleixen sense dificultats.

Finalment, en ser G finit un espai vectorial sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ el nombre d'elements de G serà la potència de 2 d'exponent igual a la dimensió de l'espai vectorial.