1. a) Calculeu el polinomi de Taylor d'ordre n en l'origen de la funció $f(x) = e^x - \cos x$.

b) Calculeu el límit

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - \cos x)^{2m}}{x^4}$$

per a cada valor de $m \in \mathbb{N}$.

c) Calculeu el valor de $\sqrt{e} - \cos(1/2)$ amb un error més petit que 10^{-2}.

(Podeu utilitzar que $e < 3$.)

Justifiqueu detalladament les respostes.

Solució:

a) Com que les funcions exponencial i cosinus són indefinidament derivables en $\mathbb{R}$, f també és una funció indefinidament derivable en $\mathbb{R}$ i per tant, per a cada enter $n \geq 0$, podem considerar el polinomi de Taylor de f d'ordre n en l'origen que és

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j.$$

Ara tenim que $f^{(j)}(0) = \exp^{(j)}(0) - \cos^{(j)}(0) = e^0 - \cos^{(j)}(0) = 1 - \cos^{(j)}(0)$.
A més a més, $\cos'(x) = -\sin x$, $\cos''(x) = -\cos x$, $\cos'''(x) = \sin x$ i $\cos^{(4)}(x) = \cos x$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. Això mostra que $\cos^{(j+4)}(x) = \cos^{(j)}(x)$, per a tot $x \in \mathbb{R}$ i $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$, i en conseqüència

$$(*) \qquad \cos^{(j)}(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{si } j = 4k,\ k \geq 0, \\ -\sin x, & \text{si } j = 4k+1,\ k \geq 0, \\ -\cos x, & \text{si } j = 4k+2,\ k \geq 0, \\ \sin x, & \text{si } j = 4k+3,\ k \geq 0, \end{cases}$$

per a cada $x \in \mathbb{R}$. En particular,

$$\cos^{(j)}(0) = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & \text{si } j = 4k,\ k \geq 0, \\ 0, & \text{si } j = 4k+1,\ k \geq 0, \\ -1, & \text{si } j = 4k+2,\ k \geq 0, \\ 0, & \text{si } j = 4k+3,\ k \geq 0 \end{array} \right\} = \cos\left(\frac{j\pi}{2}\right).$$

Per tant,

$$f^{(j)}(0) = 1 - \cos\left(\frac{j\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 - 1 = 0, & \text{si } j \text{ és multiple de 4}, \\ 1 - 0 = 1, & \text{si } j \text{ és senar}, \\ 1 + 1 = 2, & \text{si } j \text{ és parell però no és multiple de 4}. \end{cases}$$

En conclusió, el polinomi de Taylor d'ordre n de f en l'origen és

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1 - \cos\left(\frac{j\pi}{2}\right)}{j!} x^j.$$

b) El límit de l'enunciat és una indeterminació del tipus $0/0$ ja que

$$\lim_{x\to 0} (e^x - \cos x)^{2m} = \lim_{x\to 0} x^4 = 0.$$

Anem a resoldre aquesta indeterminació fent un desenvolupament asimptòtic de la funció de l'apartat anterior $f(x) = e^x - \cos x$ al voltant de l'origen.

Com que f és derivable en 0, tenim que

$$e^x - \cos x = f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = x + o(x) \quad (x \to 0)$$

(Observeu que això també és la versió "asimptòtica" de la fórmula de Taylor :

$$f(x) = p_1(x) + o(x) \ \ (x \to 0).)$$

Així doncs, tenim que $e^x - \cos x = x + o(x) = x(1 + o(1))$ i per tant

$$(e^x - \cos x)^{2m} = x^{2m}(1 + o(1))^{2m} \quad (x \to 0).$$

En conseqüència,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - \cos x)^{2m}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2m}(1 + o(1))^{2m}}{x^4} = \lim_{x\to 0} x^{2m-4}(1+o(1))^{2m} = \begin{cases} 0, & \text{si } m > 2, \\ 1, & \text{si } m = 2, \\ +\infty, & \text{si } m = 1, \end{cases}$$

ja que $\lim\limits_{x\to 0}(1 + o(1))^{2m} = 1$, per a cada $m \in \mathbb{N}$, i

$$\lim_{x\to 0} x^{2m-4} = \begin{cases} 0, & \text{si } 2m - 4 > 0, \text{ és a dir, si } m > 2, \\ 1, & \text{si } 2m - 4 = 0, \text{ és a dir, si } m = 2, \\ +\infty, & \text{si } 2m - 4 < 0, \text{ és a dir, si } m = 1. \end{cases}$$

c) Observeu que $\sqrt{e} - \cos(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}} - \cos(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$, on f és la funció de l'apartat a). Aproximarem $f(\frac{1}{2})$ pel valor en $\frac{1}{2}$ d'un polinomi de Taylor de f en l'origen, p_n, que hem de determinar.

Com que f és indefinidament derivable en $\mathbb{R}$, la fórmula de Taylor amb resta de Lagrange ens diu que per a cada enter $n \geq 0$ existeix un punt $c_n \in (0, \frac{1}{2})$ tal que

$$R_n(\tfrac{1}{2}) := f_n(\tfrac{1}{2}) - p_n(\tfrac{1}{2}) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} \frac{1}{2^{n+1}},$$

on p_n és el polinomi de Taylor de f en l'origen d'ordre n que hem calculat a l'apartat a). Intentem trobar el nombre n "més petit possible" tal que $|R_n(1/2)| < 10^{-2}$. Anem doncs a trobar una cota explícita de $|R_n(\frac{1}{2})|$ en termes de n.

Observeu que $f^{(n+1)}(c_n) = e^{c_n} - \cos^{(n+1)}(c_n)$ i per tant $|f^{(n+1)}(c_n)| \leq e^{c_n} + |\cos^{(n+1)}(c_n)|$, ja que $e^{c_n} > 0$. Ara, com que les funcions exponencial i arrel quadrada són estrictament creixents, $c_n < \frac{1}{2}$ i $e < 3$ tenim que $e^{c_n} < e^{1/2} = \sqrt{e} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$.

D'altra banda, la identitat $(*)$ de l'apartat (a) mostra que $|\cos^{(n+1)}(c_n)| \leq 1$, per a tot enter $n \geq 0$, ja que $|\pm \cos x| \leq 1$ i $|\pm \sin x| \leq 1$, per a tot $x \in \mathbb{R}$.

En conseqüència,

$$|R_n(\tfrac{1}{2})| = \frac{|f^{(n+1)}(c_n)|}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{3}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Així doncs, si trobem n de forma que $\frac{3}{2^{n+1}(n+1)!} < 10^{-2}$, llavors $p_n(\frac{1}{2})$ serà una aproximació del valor $\sqrt{e} - \cos(\frac{1}{2})$ amb un error inferior a 10^{-2}. L'enter $n \geq 0$ més petit que compleix $\frac{3}{2^{n+1}(n+1)!} < 10^{-2} = \frac{1}{10^2}$ o, equivalentment, $300 < 2^{n+1}(n+1)!$ és $n = 3$ segons mostra la taula següent:

n	0	1	2	3
$2^{n+1}(n+1)!$	2	8	48	384

En conclusió, com que $p_3(x) = x+x^2+\frac{x^3}{6}$, resulta que $p_3(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{6\cdot 2^3} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{48} = \frac{37}{48}$ és una aproximació del valor $\sqrt{e} - \cos(\frac{1}{2})$ amb un error inferior a 10^{-2}.

2. Demostreu que l'equació $x^2 - x\cos x + \sin x = 1$ té exactament dues solucions reals. Justifiqueu detalladament la resposta.

Solució:

Les solucions reals de l'equació $x^2 - x\cos x + \sin x = 1$ són els zeros de la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^2 - x\cos x + \sin x - 1$. Així doncs volem demostrar que f té exactament 2 zeros.

f té com a molt 2 zeros:

Observeu que f és derivable (ja que és suma i producte de funcions derivables) i la seva derivada és $f'(x) = 2x - \cos x + x\sin x + \cos x = x(2 + \sin x)$. A partir d'aqui podem raonar de dues formes:

1. *Utilitzant el teorema de Rolle:*
   Com que $\sin x \geq -1$, $2 + \sin x > 0$, per a tot $x \in \mathbb{R}$, i, per tant, f' només té un zero (en l'origen). Alehores, pel teorema de Rolle, f té com a molt 2 zeros. En efecte, si f tingués tres zeros, $x_1 < x_2 < x_3$, $f(x_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, pel teorema de Rolle existirien $y_1 < y_2$ complint $f'(y_1) = f'(y_2) = 0$, el que és contradictori amb el fet que f' té un únic zero.
2. *Utilitzant monotonia:*
   Com que $\sin x \geq -1$, $2 + \sin x > 0$, per a tot $x \in \mathbb{R}$, i tenim que $f'(x) > 0$, si $x > 0$, i $f'(x) < 0$, si $x < 0$.
   Per tant, f és estrictament creixent en $[0, +\infty)$ i és estrictament decreixent en $(-\infty, 0]$. En particular, f té com a molt un zero en cadascun dels intervals $[0, +\infty)$ i $(-\infty, 0]$, i per tant f té com a molt dos zeros.

f té almenys 2 zeros:

Observeu que $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} > 0$, $f(0) = -1 < 0$ i $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4} > 0$. Per tant, com que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és contínua (ja que és derivable), el teorema de Bolzano ens diu que existeixen $z_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $z_2 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ complint $f(z_1) = f(z_2) = 0$. En conseqüència, f té almenys 2 zeros.