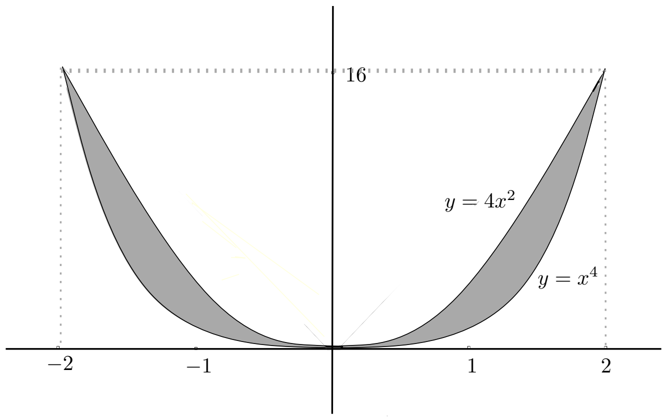
Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2011-2012
Primer Parcial Resolt

(1) (a) Dibuixeu el conjunt $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \le y \le 4x^2\}$. És compacte?

(b) Demostreu que si K és un compacte de $\mathbb{R}^n$ i $f : K \to \mathbb{R}$ és contínua, llavors f assoleix un valor màxim en K.

Solució: (a) En els punts de tall de les gràfiques de $y = x^4$ i $y = 4x^2$ es compleix l'equació $x^4 = 4x^2$, que té per solucions $x = 0$, $x = \pm 2$. A més es compleix $x^4 \le 4x^2$ si i només $|x| \le 2$, i per tant la regió és:



Recordem que un conjunt $K \subset \mathbb{R}^n$ és compacte si i només si és tancat i acotat.

Per veure que A és tancat utilitzarem que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és contínua i B és tancat en $\mathbb{R}^m$, llavors $A = f^{-1}(B)$ és tancat en $\mathbb{R}^n$.

Donat que les funcions polinòmiques són contínues en $\mathbb{R}^2$, tenim que la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida per $f(x,y) = (x^4 - y, y - 4x^2)$, és contínua en $\mathbb{R}^2$. Utilitzant que $A = f^{-1}((-\infty, 0] \times (-\infty, 0])$ i que $B = (-\infty, 0] \times (-\infty, 0]$ és tancat en $\mathbb{R}^2$, A també es tancat a $\mathbb{R}^2$.

Provem ara que A és acotat. Per fer-ho veurem que si $(x,y) \in A$, llavors existeix una constant C tal que $|x|, |y| \le C$.

Si $(x,y) \in A$, llavors es compleix $x^4 \le 4x^2$ i per tant $x^2(x^2 - 4) \le 0$. Utilitzant que $x^2 \ge 0$ aquesta desigualtat és compirà si $x = 0$ o bé si $x^2 - 4 \le 0$, és a dir quan $|x| \le 2$. Així doncs es compleix $0 \le x^4 \le y \le 4x^2 \le 16$, que prova que $|y| \le 16$. Triant $C = 16$, queda provat que A és acotat.

Conclusió: • A és tancat i acotat, i per tant A és compacte.

(b) Com que K és compacte i $f : K \to \mathbb{R}$ és una funció contínua, $f(K)$ és un subconjunt compacte de $\mathbb{R}$, i per tant tancat i acotat. En particular, $f(K)$ està acotat superiorment, i en conseqüència existeix $s = \sup f(K)$. Volem veure que $s = \max f(K)$. Com que $s = \sup f(K)$, existeix una successió $\{x^{(j)}\}_j$ de punts de K tal que $s = \lim f(x^{(j)})$, i per tant $s \in f(K)$, per ser $f(K)$ tancat. I això vol dir que $s = \max f(K)$.

(2) [3 punts] Per a quins valors de $p > 0$, la funció

$$f_p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|^p}{(x^2+|y|)^3}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

és contínua en $\mathbb{R}^2$?

Solució: Les funcions x i $|y|^p$ amb $p > 0$ són contínues en $\mathbb{R}^2$. Donat que la suma i el producte de funcions contínues en un conjunt és també una funció contínua, les funcions $x|y|^p$ i $(x^2+|y|)^3$ són contínues a $\mathbb{R}^2$. Sabem també que el quocient de dues funcions contínues en un conjunt és una funció contínua en els punts on el denominador no s'anul·la, i per tant f_p és contínua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Estudiem la continuïtat de f_p en el punt $(0,0)$.

Utilitzant que $|x| \leq (x^2+|y|)^{1/2}$ i que $|y| \leq x^2+|y|$ tenim que

$$0 \leq |f_p(x,y) - f_p(0,0)| \leq (x^2+|y|)^{1/2+p-3} = (x^2+|y|)^{p-5/2}.$$

Si $p > 5/2$, llavors la funció $(x^2+|y|)^{p-5/2}$ és contínua en $\mathbb{R}^2$ (és composició de dues funcions contínues, $t = x^2+|y|$ amb $t^{p-5/2}$) i per tant $(x^2+|y|)^{p-5/2} \to 0$ si $(x,y) \to (0,0)$. Per la regla del sandwich es compleix $f_p(x,y) - f_p(0,0) \to 0$ si $(x,y) \to (0,0)$, i així doncs f_p és contínua en $(0,0)$.

Si $0 < p \leq 5/2$, triant $x = \alpha t$, $y = \beta t^2$ amb $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, tenim

$$\lim_{t\to 0} f_p(\alpha t, \beta t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha|\beta|^p t|t|^{2p}}{(\alpha^2+|\beta|)^3 t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha|\beta|^p}{(\alpha^2+|\beta|)^3} \frac{|t|^{2p}}{t^5},$$

que no existeix si $\alpha, \beta \neq 0$.

Si f_p fos contínua en $(0,0)$, llavors tots els límits direccionals tindríen que valer $f_p(0,0) = 0$. Com això no succeeix, la funció f_p no és contínua en $(0,0)$.

<u>Conclusió:</u>
- Si $p > 5/2$, llavors f_p és contínua en $\mathbb{R}^2$.
- Si $0 < p \leq 5/2$, llavors f_p és contínua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, però no en $(0,0)$.

(3) [4 punts]

(a) Per funcions escalars, definiu els conceptes de derivada direccional i funció diferenciable en un punt.

Enuncieu i demostreu la relació entre els dos conceptes.

(b) Per a $m \in \mathbb{N}$ definim les funcions

$$f_m(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^7}{(x^2+y^2)^m}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Per a quins valors de m són diferenciables en $\mathbb{R}^2$?

(ii) Quina és la direcció de màxim creixement de f_1 en $(1,1)$?

Solució:

(a) *Conceptes de derivada direccional i de diferencial:*

Siguin U un subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ i $f : U \to \mathbb{R}$.

La *derivada direccional* de f en a segons la direcció del vector unitari $u \in \mathbb{R}^n$ és el límit

$$D_u f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t},$$

quan aquest límit existeix i és finit.

Diem que f és *diferenciable* en a quan existeix una aplicació lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0. \tag{1}$$

Aquesta aplicació lineal L que, si existeix és única, es diu *diferencial* de f en a i es denota per df_a o bé per $Df(a)$.

Relació entre els dos conceptes:

Si f és diferenciable en a, llavors existeixen les derivades direccionals en a segons qualsevol direcció i $D_u f(a) = Df(a)(u)$, per a cada vector unitari $u \in \mathbb{R}^n$.

Demostració:

Si f és diferenciable en a, llavors es compleix (1) amb $L = Df(a)$ i per tant el corresponent límit en a segons la recta $x = a + tu$ també val 0, és a dir,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a) - Df(a)(tu)}{|t|} = 0.$$

Però això és equivalent a

$$0 = \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(a+tu) - f(a) - Df(a)(tu)}{|t|} \right| = \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(a+tu) - f(a) - Df(a)(tu)}{t} \right|.$$

Com que $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és lineal obtenim que

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} - Df(a)(u) \right| = 0,$$

i això vol dir que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = Df(a)(u),$$

que és el que voliem provar.

(b) i. Les funcions $g(x,y) = x^7$ i $h_m(x,y) = (x^2+y^2)^m$ amb $m \in \mathbb{N}$, són funcions polinòmiques i per tant diferenciables en tot $\mathbb{R}^2$. Donat que el h_m només s'anul·la en $(0,0)$, la funció $f = g/h_m$ és diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De fet, g i h_m són de classe C^1 en $\mathbb{R}^2$ i per tant el quocient és de classe C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Per estudiar la diferenciabilitat de f en el punt $(0,0)$, calculem primer les derivades parcials en aquest punt. Recordeu que si les derivades parcials no existeixen, llavors la funció no és diferenciable.

La funció $F_m(x) = f_m(x,0) = x^{7-2m}$ si $x \neq 0$, i $F_m(0) = 0$, és derivable en $a = 0$ només quan $7 - 2m \geq 1$ (en la resta de casos ni tan sols és contínua en $a = 0$). Per tant, si $m = 1,2$ tenim $\dfrac{\partial f_m}{\partial x}(0,0) = F_m'(0) = 0$, i si $m = 3$ llavors $\dfrac{\partial f_3}{\partial x}(0,0) = F_3'(0) = 1$. Si $m \geq 4$ la derivada parcial en $(0,0)$ no existeix i per tant f_m no és diferenciable en $(0,0)$.

La funció $G_m(y) = f_m(0,y) = 0$, i en aquest cas $\dfrac{\partial f_m}{\partial y}(0,0) = G_m'(0) = 0$ per a tot m.

Recordem ara que per a $m = 1,2,3$, f_m és diferenciable en $(0,0)$, si i només si, es compleix

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_m(x,y) - f_m(0,0) - \frac{\partial f_m}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f_m}{\partial x}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \tag{2}$$

Si $m = 1,2$, el límit (2) és $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^7}{(x^2+y^2)^{m+1/2}}$, que val 0, ja que

$$0 \leq \left| \frac{x^7}{(x^2+y^2)^{m+1/2}} \right| \leq (x^2+y^2)^{3-m} \to 0, \qquad \text{si} \quad (x,y) \to (0,0).$$

Quan $m = 3$, el límit (2) és $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^7 - x(x^2+y^2)^3}{(x^2+y^2)^{7/2}}$. Donat que el límit de la funció anterior segons la recta $y = x$ no existeix, el límit no pot ser 0 i per tant la funció f_3 no és diferenciable en $(0,0)$.

Conclusió:	• Si $m = 1,2$, la funció f_m és diferenciable en $\mathbb{R}^2$. • Si $m \geq 3$, la funció f_m és diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, però no en $(0,0)$.

ii. En l'apartat anterior hem vist que la funció $f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^7}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ és de classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, i per tant diferenciable en $(1,1)$. Així doncs, la direcció de màxim creixement de f_1 en el punt $(1,1)$ es la del gradient de f_1 en aquest punt.

Les derivades parcials de f_1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ són

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} = \frac{7x^6(x^2+y^2) - 2x^8}{(x^2+y^2)^2} = \frac{5x^8 + 7x^6y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = \frac{-2x^7y}{(x^2+y^2)^2},$$

i el gradient de f_1 en el punt $(1,1)$ és $\nabla f_1(1,1) = (3, -1/2)$.

Conclusió: • La direcció de màxim creixement de f_1 en el punt $(1,1)$ és $(6,-1)$, o bé si es vol expressar amb un vector unitari $(6/\sqrt{37}, -1/\sqrt{37})$.