1. Demostra que si m i n són enters i $m-n$ és imparell, aleshores $m+n$ és imparell. Demostra-ho directament, per contrarecíproc, i per reducció a l'absurd.

2. Demostra que per tots $a, b \in \mathbb{R}$,

(a) $|a-b| = |b-a|$.

(b) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

(c) $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}\big(a+b-|a-b|\big)$ i $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}\big(a+b+|a-b|\big)$.

3. Demostra que no existeixen enters n, m, k tals que $4m + 6n = 9^k$.

4. Demostra les següents propietats:

(a) Existeix un únic nombre real x tal que per a tot real y, $xy + x - 4 = 4y$.

(b) Per a cada real x existeix un únic real y tal que $x^2 y = x - y$.

5. Siguin $x, y \in \mathbb{R}$ tals que $y = \dfrac{3x^2 + 2y}{x^2 + 2}$. Demostra que si $x \neq 0$ aleshores $y = 3$, i digues què passa si $x = 0$.

6. Considera el següent enunciat: "*Si $x \in \mathbb{R}$ i $|x-3| < 3$, aleshores $0 < x < 6$*", i la seva possible demostració:

> **Prova:** *Sigui x un nombre real i suposem que $|x-3| < 3$. Considerem dos casos:*
>
> ***Cas 1:*** $x - 3 \geqslant 0$. *Aleshores $|x-3| = x-3$, de forma que l'assumpció $|x-3| < 3$ ens diu que $x - 3 < 3$. D'aquí se'n dedueix que $x < 6$.*
>
> ***Cas 2:*** $x - 3 < 0$. *Aleshores $|x-3| = 3-x$, de forma que l'assumpció $|x-3| < 3$ ens diu que $3 - x < 3$. D'aquí se'n dedueix que $0 < x$.*
>
> *Com que hem demostrat que $0 < x$ i que $x < 6$, resulta que $0 < x < 6$, com volíem demostrar.*

(a) Digues si la demostració és correcta o no. Justifica la resposta.

(b) Si ho és, digues quines estratègies de demostració usa. Si no ho és, però aquesta mateixa demostració es pot arreglar, fes-ho. Si no ho és i no es pot arreglar, digues com refutaries l'enunciat.

7. Demostra que si un triangle rectangle de catets a, b i hipotenusa c compleix que $c = \sqrt{2ab}$, aleshores el triangle és isòsceles.

8. Demostra (per reducció a l'absurd) que en qualsevol grup de n persones ($n \geqslant 2$), n'hi ha almenys dues que tenen el mateix nombre d'amics en el grup (aquest nombre és 0 si una persona no hi té cap amic, i $n-1$ si és amiga de tothom).

9. Demostra o dóna un contraexemple de les següents afirmacions:

(a) Per tot nombre natural n, existeix un nombre natural m tal que $n > m$.

(b) Existeix un nombre natural m tal que per tot nombre natural n, $n > m$.

(c) Per tot nombre natural m, existeix un nombre natural n tal que $n > m$.

(d) Existeix un nombre natural n tal que per tot nombre natural m, $n > m$.

10. Demostra que per a tot sencer n, $7n - 4$ és imparell si i només si $5n + 3$ és parell.

11. Per a qualsevol enter m, si dividim m^2 per 4 el romanent és 0 o 1.

12. El següent enunciat és fals: " *Siguin* $x, y \in \mathbb{R}$. *Si* $x + y = 10$, *aleshores* $y \neq 8$ *i* $x \neq 3$".

(a) Troba quin és l'error de la pretesa demostració següent:

> **Prova:** *Ho demostrem per reducció a l'absurd: Suposem que la tesi o conclusió és falsa, és a dir, que* $x = 3$ *i* $y = 8$. *Aleshores* $x + y = 3 + 8 = 11$, *però això contradiu la hipòtesi* $x + y = 10$. *Arribem doncs a contradicció, per tant la tesi és certa.*

(b) Refuta l'enunciat trobant-ne un contraexemple.

13. Demostra que el producte de un racional diferent de 0 per un irracional és irracional.

14. Demostra o refuta cadascun dels enunciats següents:

(a) Tot nombre natural múltiple de 2 és múltiple de 4.

(b) En tot triangle els dos angles aguts són iguals.

(c) Tot nombre real x satisfà $x^2 + 2 > 5$.