CÀLCUL INTEGRAL EN DIVERSES VARIABLES. PRIMAVERA 2013

Llista 5: Integrals de superfície. Teoremes de Stokes i de Gauss

1. Calculeu l'àrea de les superfícies d'$\mathbf{R}^3$:

a) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 1/2\}$

b) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2=x^2+y^2,\ y>0,\ 1<z<2\}$

c) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z=x^2+y^2,\ 2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 6\}$

2. Sigui S la part de la superfície cilíndrica $x^2+y^2=1,\ y \geq 0,$ compresa entre el pla $z=0$ i la corba $(\cos t, \sin t, 1+t),\ t \in [0,\pi]$.
Si $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,$ i $F(x,y,z)=(1,1,1),$ calculeu $\displaystyle\int_S f\, d\sigma, \quad \int_S F \cdot d\sigma$

3. Sigui $F(x,y,z)=(xy,yz,zx)$. Comproveu el teorema de Stokes per al camp F sobre la superfície regular $S=\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ x,y,z \geq 0\},$

4. Sigui $S=(S_1,S_2)$ la superfície regular d'$\mathbf{R}^3$ orientada segons la normal exterior, S_1 definida per $x^2+y^2+(z-1)^2=1,\ \ 1 \leq z \leq 3/2,$ i S_2 per $x^2+y^2=1,\ 0 \leq z \leq 1.$
Si $F(x,y,z)=(ye^z, x^2(x^3+1), \cos(x\sin^2 y)),$ calculeu $\int_S rot\ F \cdot d\sigma$

5. Sigui la superfície $S=\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2=x^2+y^2,\ 1 \leq z \leq 4\},$ orientada segons la normal exterior. Calculeu la circulació del camp $F(x,y,z)=(xz,y^2,z)$ sobre la vora de la superfície, orientada positivament en relació amb S.

6. Calculeu el flux del camp $F(x,y,z)=\left(\dfrac{xz}{a^2}, \dfrac{yz}{b^2}, \dfrac{z^2}{c^2}\right)$ a través de la superfície regular

$S=\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ z \geq 0\}.\ \ (a,b,c>0)$

7. Siguin $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2+y^2+1,\ z \le 5\}$, orientada per la normal amb tercera component positiva, i $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid\ x^2+y^2 = 4,\ 0 \le z \le 5\}$, orientada per la normal exterior al cilindre.

Si $F(x,y,z) = (xy^2, x^2y, z(x^2+y^2))$, calculeu el flux d'$F$ a través de la superfície $S = S_1 \cup S_2$.

8. Calculeu el flux del camp $F(x,y,z) = (xz^2 + e^{y+z}, y + z^2 \sin(xz), x^2+y^2+z^2)$, a través de la superfície $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2 = 1,\ 0 \le z \le 1\}$ en el sentit de la normal exterior.

9. Siguin $S_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 4,\ -2 \le z \le 2\}$, $S_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$, orientades segons les seves normals exteriors.

Si $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(xz, yz, z^2)$, proveu que $\displaystyle\int_{S_1} F \cdot d\sigma = \int_{S_2} F \cdot d\sigma$