

1. Proveu que les equacions següents tenen una solució única:

(a) $x + \log x = 0$.

(b) $2^{-x} - x = 0$.

2. Proveu que l'equació $x^3 - 3x + k = 0$, per $k \in \mathbb{R}$, té com a molt una solució en $[-1, 1]$.
Per a quins valors de k hi ha exactament una solució en $[-1, 1]$?

3. Fent servir el teorema del valor mitjà demostreu les desigualtats següents:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2},$$

per a cada $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $0 \leq a < b$.