Martin Azpillaga Aldalur

Solución

Tenemos $F, G \in \mathbb{R}^4$ donde:

$$F =< (1,2,3,4),(2,2,2,6),(0,2,4,4) >$$

$$G =< (1,0,-1,2),(2,3,0,1) >$$

Veamos la dimension de cada subespacio. Para ello, analizaremos el rango de la matriz que se crea tomando como columnas los vectores de los subespacios:

Por un lado, $rg(f_1|f_2|f_3) = 3$ ya que,

$$Det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por otro, $rg(g_1|g_2) = 2$ ya que,

$$Det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto:

$$\dim F = 3, \dim G = 2$$

Como $DimF = 3$, dentro R^4, estará condicionada por una única ecuacion. Esta dada por el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & x \\ 2 & 2 & 2 & y \\ 3 & 2 & 4 & z \\ 4 & 6 & 4 & t \end{vmatrix} = 0$$

$$4x - 8y + 4z = 0 \cong x - 2y + z = 0$$

En cambio, G estara condicionada por dos ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 3 & y \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$(1) : 3x - 2y + 3z = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 3 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$(2) : -6x + 3y + 3t = 0 \cong -2x + y + t = 0$$

El espacio definido por la interseccion estará condicionado por las ecuaciones de uno y otro es decir:

$$F \cap G : \left[\begin{array}{lllll} x & -2y & +z & & = 0 \\ 3x & -2y & +3z & & = 0 \\ -2x & +y & & +t & = 0 \end{array}\right.$$

Ninguna ecuacion es combinacion lineal de los demas, por tanto la dimension de $F \cap G = 1$

Para saber la dimension de la suma usaremos la formula de Grassman:

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

$$\dim F + G = 3 + 2 - 1 = 4$$

Vemos que $F + G = \mathbb{R}^4$ por tanto, no tiene ninguna ecuacion implicita que condicione el espacio.

Nos falta dar bases de cada uno de los subespacios: Para F y G podemos utilizar los mismos que nos da el enunciado, ya que sus vectores generan todo el espacio y son independientes entre si.

Para la interseccion resolvemos la siguiente ecuacion lineal, donde a, b, c, d son las coordenadas del vector base:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F \cap G : \{(1, 0, -1, 2)\}$$

y para la suma utilizaremos la base canónica:

$$F + G : \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$