**Exercici 12**.Determineu la signatura de totes les permutacions de $S_3$. Determineu tots els subgrups de $S_3$.

**Solució.**

• Tota permutació es pot expressar com el producte de transposicions.

• Es diu que una permutació és parella si es pot escriure com el producte d'una quantitat parella de transposicions; Contràriament, direm que és senar. Si és parella, es denomina amb +1 i si és senar amb -1.

$S_3$ és el conjunt de permutacions:

$\cdot Id \to Parella$, perquè $(-1)^0 = 1$.

$\cdot\ s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \to$ Senar, perquè $(-1)^1 = -1$.

$\cdot\ s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \to$ Senar, perquè $(-1)^1 = -1$.

$\cdot\ s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \to$ Senar , perquè $(-1)^1 = -1$.

$\cdot\ P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \to$ Parella, perquè $(-1)^2 = 1$.

$\cdot\ P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \to$ Parella, perquè $(-1)^2 = 1$.

<u>Subgrups de $S_3$</u>

• Sigui $(G, \cdot)$ un grup i $H \subseteq G$. Aleshores $H$ és un subgrup si:

1. e $\in H$,
2. $\forall$ a, b $\in H \to$ a·b $\in H$,
3. $\forall$ a $\in H \to a^{-1} \in H$.

$$\mathbf{S_3 = \{Id, s_1, s_2, s_3, P_1, P_2\}}$$

| $S_3$ | $Id$ | $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Id$ | $Id$ | $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
| $P_1$ | $P_1$ | $P_2$ | $Id$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ |
| $P_2$ | $P_2$ | $Id$ | $P_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_1$ |
| $s_1$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $Id$ | $P_1$ | $P_2$ |
| $s_2$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_1$ | $P_2$ | $Id$ | $P_1$ |
| $s_3$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $P_1$ | $P_2$ | $Id$ |

Subgrups d'ordre 1: $\{\text{Id}\}$.

Subgrups d'ordre 2: $\{\text{Id},\ s_1\ \}$, $\{\text{Id},\ s_2\ \}$, $\{\text{Id},\ s_3\ \}$.

Subgrups d'ordre 3: $\{\text{Id},\ P_1, P_2\ \}$.

Subgrups d'ordre 6: $S_3$.