Eercici 23. Sigui $A[X]$ l'anell de polinomis en una indeterminada sobre l'anell A. Prenem $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n \in A[X]$ un polinomi de grau n, amb $a_0, \ldots, a_n \in A$. Demostreu que

(a) f és una unitat en $A[X]$ si, i només si, a_0 és una unitat en A i $a_1, \ldots, a_n$ són nilpotents.

(b) f és nilpotent si, i només si, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sén nilpotents.

(c) f és divisor de zero en $A[X]$ si, i només si, existeix $a \in A - \{0\}$ tal que $af = 0$.

Solució.

(a) Sigui A un anell.

$\Leftarrow$) $a_0 \in A^* \Rightarrow a_0 \in (A[X])^*$. Sabem que $a_1, ..., a_n$ són nilpotents, és a dir, $a_1, a_2, ..., a_n \in \eta(A)$. Per tant, $a_1, a_2, ..., a_n \in \eta(A) \Rightarrow a_1x, ..., a_nx^n \in \eta(A[X])$.

I, tenim $f = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in (A[X])^*$, perqué la suma d'un element nilpotent i un unitat és unitat.

$\Rightarrow$) Sigui $f \in (A[X])^*$, volem vuere que $a_0 \in A^*, a_1, ..., a_n \in \eta(A) = \bigcap_{p \text{ ideal primer}} p.$

Sigui p ideal primer. Considerem l'aplicació:

$$A[X] \longrightarrow (A/p)[X]$$

$$f = \sum a_ix^i \longrightarrow \bar{f} = \sum \bar{a}_ix^i$$

on $f \in (A[X])^*$ i $\bar{f} \in (A/p[X])^*$.

Per tant, $\bar{f} \in (A/p[X])^* \Rightarrow \bar{a_1} = ... = \bar{a_n} = 0$, on $\bar{a_1}, ..., \bar{a_n} \in A/p$.

Llavors, $\bar{a_1} = ... = \bar{a_n} = 0 \Rightarrow a_1, ..., a_n \in p$, $\forall p$ ideal primer.

(b)

$\Leftarrow$) La implicació és inmediata. Ja que $a_0, a_1, ..., a_n \in \eta(A)$, i per tant, $a_0 + a_1x + ..., a_nx^n \in \eta(A[X])$.

$\Rightarrow$) Per la definició de nilpotent, tenim $f = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \Rightarrow \exists k > 0$ tal que $f^k = 0$.

Ara, $f^k = (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)^k = a_0^k + y = 0$, on y té termes de grau mes gran que zero, per tant $a_0^k + y = 0 \Rightarrow a_0^k = 0 \Rightarrow a_0 \in \eta([A])$.

Apliquem la definició anterior, tenim $\eta(A[x]) \ni (f - a_0) = a_1x + ... + a_nx^n = x(a_1 + ... + a_nx^n) \Rightarrow \exists k > 0$ tal que $(x(a_1 + ... + a_nx^n))^k = x^k(a_1 + ... + a_nx^n)^k = 0 \Rightarrow (a_1 + ... + a_nx^n)^k = 0 \Rightarrow a_1 \in \eta(A)$.

Repetim els procesos anteriors, successivament obtenim que $a_0, ..., a_n$ són nilpotents.

(c)

$\Leftarrow$) La implició és directa.

$\Rightarrow$) Sigui $0 \neq g = b_0 + ... + b_mx^m$ un polinomi de grau minim tal que $fg = 0$.

Llavors, $fg = 0 \Rightarrow a_nb_m = 0 \Rightarrow a_ng$ té grau menor que el de g.

Per tant $\left.\begin{array}{c} grau(a_n g) < grau(g) \\ f(a_n g) = a_n(fg) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n g = 0 \Rightarrow a_n b_i = 0$, on $0 \leq i \leq m$.

Volem veure que $(a_{n-k})g = 0$, on $0 \leq k \leq n$. Veiem per inducció.

$k = 0, a_n g = 0$ cert.

Ara, suposem que es cert per $a_{n-r}g = 0$ per $0 \leq r \leq k-1$, i veiem que és cert per $a_{n-k}g = 0$.

$0 = fg = (a_0 + ... + a_{n-k}x^{n-k} + a_{n-(k-1)}x^{n-(k-1)} + ... + a_n x^n)g$, per la hipotesi d'inducció, tenim

$$(a_0 + ... + a_{n-k}x^{n-k} + a_{n-(k-1)}x^{n-(k-1)} + ... + a_n x^n)g = (a_0 + ... + a_{n-k}x^{n-k})g$$

Per tant, el coeficient de x^{n+m-k} és $a_{n-k}b_m = 0 \Rightarrow a_{n-k}g = 0$

Conclusió, $a_i g = 0$, per $0 \leq i \leq n$, aleshores $\left.\begin{array}{c} a_i b_m = 00 \leq i \leq n \\ (a_0 + ... + a_n x^n)b_m = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow fb_m = 0$