Problema 48. Siguin p, q dos nombres primers $0 < p < q$.

(a) Demostreu que tot grup d'ordre p^2 és resoluble.

(b) Sigui G un grup d'ordre p^2q. Demostreu que G té un únic subgrup normal d'ordre p^2 o bé un únic subgrup normal d'ordre q.

(c) Demostreu que G és resoluble.

Solució. (a) Sabem que $Z(G) \triangleleft G$ i que $|Z(G)|$ pot ser igual a 1, a p o a p^2, i per ser G un p-grup no trivial, tenim que $|Z(G)| \neq 1$; per tant, tan sols resten dues opcions:

- $|Z(G)| = p$.

  Tenim que $\{e\} \triangleleft Z(G) \triangleleft G$ i $|(Z(G)/\{e\})| = |(G/Z(G))| = p$; per tant, $Z(G)/\{e\}$ i $G/Z(G)$ són abelians i G és resoluble.

- $|Z(G)| = p^2$.

  Tenim que G és abelià i, per tant, G és resoluble.

(b) Sigui $n_q := \#\{q\text{-subgrups Sylow de G}\}$. Sabem que n_q serà 1, p o p^2.

- Si $n_q = 1$ ja hem acabat.
- Si $n_q = p$, tenim que $n_p = 1$, ja que si $n_p = q$ serà $p \equiv 1 \pmod q$ i $q \equiv 1 \pmod p$, contradicció!
- Si $n_q = p^2$ i considerem el conjunt de tots els elements dels q-subgrups Sylow. Aquest conjunt conté $p^2(q-1)+1$ elements. Per tant, G, excepte el conjunt anterior, té: $p^2q - (p^2(q-1)+1) = p^2 - 1$ elements. D'aquesta manera, tan sols existeix un p-subgrup Sylow.

(c) G té un únic p-subgrup Sylow o un únic q-subgrup Sylow. Aquest subgrup és d'ordre primer o quadrat d'un primer, per tant, és resoluble. A més, el grup G quocient, aquest subgrup també és d'ordre primer o quadrat d'un primer, per tant també és resoluble. Aleshores G és resoluble.