**MATRIUS I VECTORS**
**Segon examen parcial**
13 de gener de 2011

**Exercici 1.** Considereu els subespais de $\mathbb{R}^4$

$$F = \langle (1,2,0,1),\, (0,1,-1,0) \rangle, \quad H = \langle (1,0,0,4),\, (1,0,2,1),\, (0,1,1,-3) \rangle,$$

$$G_a = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + az - y = 0,\ (a-2)y + az + t = 0 \}$$

(i) *(2,5 punts)* Trobeu bases, equacions i dimensions de $F$ i de $G_a$.

(ii) *(2,5 punts)* Trobeu $F \cap G_a$ per a tots els paràmetres $a$.

(iii) *(2,5 punts)* Per a quins valors de $a \in \mathbb{R}$ es té $H = F + G_a$ ? Es té aleshores $H = F \oplus G_a$ ?

(iv) *(2,5 punts)* Trobeu un subespai $K$ tal que $H = F \oplus K$.

**Exercici 2.** Considereu els vectors $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,0,1)$ i $u_3 = (0,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ i els vectors $w_1 = (1,1,1,0)$, $w_2 = (1,1,0,1)$, $w_3 = (1,0,1,1)$ i $w_4 = (0,1,1,1)$ de $\mathbb{R}^4$. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'aplicació definida per

$$f(u_1) = w_1 + w_3 - w_4,\ f(u_2) = w_2 - w_3 + w_4,\ 2u_1 + 2u_2 - u_3 \in \operatorname{Nuc} f$$

(i) *(4 punts)* Trobeu la matriu de $f$ en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$ respectivament.

(ii) *(3 punts)* Calculeu les dimensions i bases de $\operatorname{Nuc} f$ i de $\operatorname{Im} f$.

(iii) *(3 punts)* Sigui $v = (1,1,1)$. Calculeu $f(v)$ i $f^{-1}(f(v))$.

**TEORIA**

**Tema**. Definició de coordenades d'un vector. Canvi de les coordenades d'un vector al canviar la base. *(7 punts)*

**Qüestió 1**. Comproveu que

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2xz = 0 \}$$

és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$. *(1 punts)*

**Qüestió 2**. Definició de nucli d'una aplicació lineal i demostració de que és un subespai. *(1 punts)*

**Qüestió 3**. *(1 punts)* Esbrineu quines de les següents afirmacions són certes i quines no. Demostreu les certes i doneu un contraexemple a les que no ho siguin:

(a) Tota aplicació lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^5$ és injectiva.

(b) Existeix una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i una aplicació lineal $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $gf$ és isomorfisme.