

# Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2011-2012

## Segon Parcial

- Feu els problemes en fulls separats.
- Justifiqueu detalladament les respostes.

- (1) (a) Sigui  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funció de classe  $C^2$ . Si  $p \in \mathbb{R}^n$  és un punt crític de  $f$  tal que la diferencial segona de  $f$  en  $p$  és una forma definida positiva, proveu que  $f$  té un mínim local en el punt  $p$ .
- (b) Siguin  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dues funcions de classe  $C^2$  en  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{R}^2$ , respectivament. Definim

$$F(x, y) = f(y + xg(y^2, x)) - x^2.$$

- (i) Calculeu les derivades parcials de primer ordre de  $F$  en termes de  $f$ ,  $g$  i les seves derivades parcials.
- (ii) Sabent que  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = -1$  i  $g(0, 0) = 3$ , proveu que  $F$  té un extrem local en el punt  $(0, 0)$ . De quin tipus és?
- (2) Considerem la funció  $f(x, y, z) = -x \cos z + yz^2 + e^y$ .
- (a) Proveu que l'equació  $f(x, y, z) = 0$  defineix una funció implícita  $y = g(x, z)$  en un entorn del punt  $(1, 0, 0)$ .
- (b) Calculeu el gradient de  $g$  en el punt  $(1, 0)$ .
- (c) Per a quins valors reals de  $\alpha$ , la funció

$$F_\alpha(x, y, z) = (-x \cos z + yz^2 + e^y, x^2 + \alpha y, x + \alpha z)$$

té inversa diferenciable en un entorn del punt  $(1, 0, 0)$ ?

- (3) Sigui  $S$  la superfície d'equació  $x^2 - y^2 + z^3 = 1$ .
- (a) Existeix algun punt o punts de  $S$  a distància màxima de l'origen?  
Justifiqueu la resposta i, si és afirmativa, trobeu tots aquests punts.
- (b) Existeix algun punt o punts de  $S$  a distància mínima de l'origen?  
Justifiqueu la resposta i, si és afirmativa, trobeu tots aquests punts.