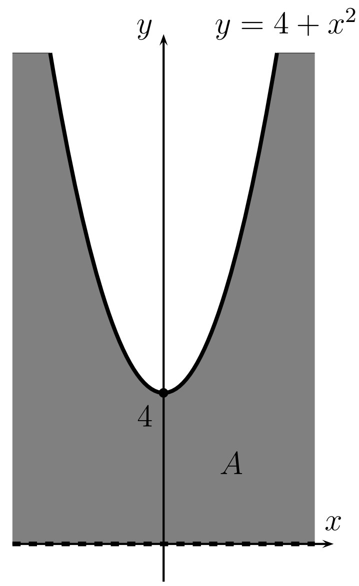
Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2012-2013
Examen de Reavaluació – Solució

(1) Representeu gràficament el conjunt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < y \leq 4 + x^2\}$, i determineu el seu interior, la seva adherència i la seva frontera.

Solució:

Observeu que $y = 0$ és l'eix d'abcisses, mentre que $y = 4 + x^2$ és la paràbola que s'obté al aplicar la translació de vector $(0, 4)$ a la paràbola $y = x^2$. Així doncs, A és la regió del pla compresa entre l'eix d'abcisses i la paràbola $y = 4 + x^2$. Observeu que A no conté cap punt de l'eix d'abcisses, mentre que tots els punts de la paràbola $y = 4 + x^2$ pertànyen a A. En definitiva, A és la regió ombrejada en la figura següent:



• L'adherència d'A, $\overline{A}$, és el conjunt $C = \{ \, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq 4 + x^2 \, \}$:

$\overline{A} \subset C$: Observeu que $A \subset C$. A més a més, C és un conjunt tancat perquè és la intersecció de dos tancats de $\mathbb{R}^2$: $C = C_1 \cap C_2$, on $C_1 = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ i $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq 4 + x^2\}$. Ara C_1 és tancat en $\mathbb{R}^2$ ja que és el producte cartesià de $\mathbb{R}$ i l'interval $[0, +\infty)$, que són tancats en $\mathbb{R}$. D'altra banda, C_2 és tancat perquè és l'antiimatge d'un conjunt tancat de $\mathbb{R}$ per una funció contínua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $C_2 = f^{-1}([0, +\infty))$, on $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és la funció definida per $f(x, y) = 4 + x^2 - y$, que és contínua (és una funció polinòmica !!).

Com que $\overline{A}$ és el tancat més petit que conté a A, deduïm que $\overline{A} \subset C$.

$C \subset \overline{A}$: Observeu que $C = A \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$. Com que $A \subset \overline{A}$, només cal comprovar que $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \overline{A}$. En efecte, si $x \in \mathbb{R}$ llavors $(x, 0) \in \overline{A}$, ja que $(x, 0) = \lim_{n \to \infty} (x_n, y_n)$, on $(x_n, y_n) = (x, 1/n)$, que és un punt d'A (perquè $0 < y_n = \frac{1}{n} < 4 \leq 4 + x_n^2$).

• L'interior d'A, A°, és el conjunt $U = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < y < 4 + x^2 \,\}$:

$U \subset A^\circ$: Observeu que $U \subset A$. A més a més, U és un conjunt obert perquè és la intersecció de dos oberts de $\mathbb{R}^2$: $U = U_1 \cap U_2$, on $U_1 = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ i $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y < 4 + x^2\}$. Ara U_1 és obert en $\mathbb{R}^2$ ja que és el producte cartesià de $\mathbb{R}$ i l'interval $(0, +\infty)$, que són oberts en $\mathbb{R}$. D'altra banda, U_2 és obert perquè és l'antiimatge d'un conjunt obert de $\mathbb{R}$ per la funció contínua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que hem considerat abans: $U_2 = f^{-1}((0, +\infty))$.

Com que A° és l'obert més gran contingut en A, deduïm que $U \subset A^\circ$.

$A^\circ \subset U$: Com que $A^\circ \subset A = U \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 4 + x^2\}$, només cal comprovar que $(x, 4 + x^2) \notin A^\circ$, per a cada $x \in \mathbb{R}$. En efecte, si $x \in \mathbb{R}$ llavors $(x, 4 + x^2) \notin A^\circ$ perquè, per a cada $r > 0$, la bola oberta centrada en $(x, 4 + x^2)$ i de radi r, $B((x, 4 + x^2); r)$, conté algun punt de $\mathbb{R}^2 \setminus A$, com, per exemple, $(x, y_r(x)) = (x, 4 + x^2 + \frac{r}{2})$. És clar que $(x, y_r(x)) \in B((x, 4 + x^2); r)$, ja que la distància entre $(x, 4 + x^2)$ i $(x, y_r(x))$ és igual a $\frac{r}{2} < r$. D'altra banda, $(x, y_r(x)) \notin A$, ja que $y_r(x) > 4 + x^2$.

• La frontera d'A, $\mathrm{Fr}\, A$, és el conjunt format pels punts de l'eix d'abscisses i pels punts de la paràbola $y = 4 + x^2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}\, A = \overline{A} \setminus A^\circ = C \setminus U &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 0 \text{ o bé } y = 4 + x^2\} \\ &= \{(x,0) \,:\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 4 + x^2) \,:\, x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(2) (a) Enuncieu el teorema de la funció inversa.
Proveu que la funció $f(x,y) = (1 - e^{x-y}, \sin(y - x^2))$ és un difeomorfisme de classe C^∞ en un entorn del punt $p = (1,1)$.

(b) Proveu que el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{rcl} ye^u + x\cos v & = & 0 \\ xu - yv & = & 0 \end{array}\right\}$$

defineix implícitament funcions $u(x,y)$ i $v(x,y)$ de classe C^∞ en un entorn del punt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, -1, 0, 0)$.
Calculeu $(\nabla u)(1,-1)$.

Solució:

(a) Teorema de la funció inversa
Siguin $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt obert, $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funció de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ i $a \in U$. Si la diferencial de f en a, $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, és un isomorfisme lineal, o equivalentment, si $det Df(a) \neq 0$, llavors f és un difeomorfisme local de classe C^k en a, és a dir, existeix un entorn obert $V \subset U$ d'a tal que $W = f(V)$ és un subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$ i f és un difeomorfisme de classe C^k entre V i W (això vol dir que $f_{/V} : V \to W$ és bijectiva i de classe C^k, i la seva inversa $(f_{/V})^{-1} : W \to V$ també és de classe C^k).

Només cal comprovar que la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y) = (1-e^{x-y}, \sin(y-x^2))$ compleix les hipòtesis del teorema de la funció inversa en el punt $p = (1,1)$.

- La funció f és de classe C^∞ en $\mathbb{R}^2$: les funcions polinòmiques són funcions de classe C^∞ en $\mathbb{R}^2$, i $g(t) = e^t$ i $h(t) = \sin t$ són funcions de classe C^∞ en $\mathbb{R}$. Per tant les composicions e^{x-y} i $\sin(y - x^2)$ són de classe C^∞ en $\mathbb{R}^2$, i f també ho és.
- Calculem $det(Df(p)) = det(df_p)$.

$$det(Df(p)) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}_p = det \begin{pmatrix} -e^{x-y} & e^{x-y} \\ -2x\cos(y - x^2) & \cos(y - x^2) \end{pmatrix}_{(1,1)}$$

$$= det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

(b) Comprovem que es compleixen les hipòtesis del teorema de la funció implícita.

- Les funcions $f(x,y,u,v) = ye^u + x\cos v$ i $g(x,y,u,v) = xu - yv$ són de classe C^∞ en $\mathbb{R}^4$, ja que són sumes de productes de funcions polinomiques, exponencials i trigonomètriques que són de classe C^∞ en $\mathbb{R}^4$.
- $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, -1, 0, 0)$ és una solució del sistema. Només cal evaluar.
- Es compleix

$$det\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}(p)\right) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}_p = det \begin{pmatrix} ye^u & -x\sin v \\ x & -y \end{pmatrix}_{(1,-1,0,0)}$$

$$= det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Per tant, pel teorema de la funció implícita, existeixen funcions $u = u(x, y)$ i $v = v(x, y)$ de classe C^∞ en un entorn V del punt $q = (1, -1)$ que compleixen

(1)
$$\left.\begin{array}{rcl} ye^{u(x,y)} + x\cos(v(x,y)) & = & 0 \\ xu(x,y) - yv(x,y) & = & 0 \end{array}\right\}$$

per a tot $(x, y) \in V$, i $u(1, -1) = 0$, $v(1, -1) = 0$.

Calculem $\nabla u(1, -1)$. Per fer-ho calcularem les derivades del termes que apareixen en (1) i avaluarem les expressions en el punt $(1, -1)$, utilitzant que $u(1, -1) = v(1, -1) = 0$.

$$\left.\begin{array}{rcl} y\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}e^{u(x,y)} + \cos(v(x,y)) - x\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}\sin(v(x,y)) & = & 0 \\ u(x,y) + x\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} - y\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,-1) + 1 & = & 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,-1) + \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,-1) & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1,-1) = 1.$$

Fixeu-vos que en aquest cas no calia calcular la parcial respecte de x dels termes de la segona equació.

$$\left.\begin{array}{rcl} e^{u(x,y)} + y\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}e^{u(x,y)} - x\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}\sin(v(x,y)) & = & 0 \\ x\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} - v(x,y) - y\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 - \dfrac{\partial u}{\partial y}(1,-1) & = & 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(1,-1) + \dfrac{\partial v}{\partial y}(1,-1) & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(1,-1) = 1.$$

Com abans, no calia calcular la parcial respecte de x dels termes de la segona equació.

Per tant $\nabla u(1, -1) = (1, 1)$.

(3) (a) Proveu que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció diferenciable que té un extrem local en un punt $a \in \mathbb{R}^n$, llavors la seva diferencial en a és nul·la.

(b) Per a $m \in \mathbb{N}$, definim les funcions

$$f_m(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)^m}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Per a quins valors de m són diferenciables en $\mathbb{R}^2$?

Solució:

(a) Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable que té un extrem local en un punt $a \in \mathbb{R}^n$. Volem provar que la diferencial de f en a és nul·la, és a dir,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0, \qquad \text{per a } j = 1, \ldots, n.$$

Suposem que a és un màxim (mínim) relatiu de f i sigui $j = 1, 2, \ldots, n$. Aleshores existeix $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$, per a tot $x \in B(a,r)$. En particular,

$$f(a + te_j) \leq f(a) \quad (f(a+te_j) \geq f(a)), \qquad \text{per a tot } t \in \mathbb{R},\ |t| < r,$$

on e_j és el punt de $\mathbb{R}^n$ que té totes les coordenades nul·les excepte la j-èssima que és igual a 1. Per tant, la funció $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida per $g(t) = f(a + te_j)$, té un màxim (mínim) relatiu en l'origen. A més a més, g és derivable en l'origen i

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a),$$

ja que f és diferenciable. En conseqüència,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = g'(0) = 0.$$

(b) Primer observeu que f_m és diferenciable en cada punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perquè f_m restringida a l'obert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ és el quocient de dues funcions diferenciables en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ i la del denominador no s'anul.la en cap punt de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $f_m(x,y) = \frac{p_m(x,y)}{q(x,y)}$, per a tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on $p_m(x,y) = (x-y)^m$ i $q(x,y) = x^2 + y^2$ són funcions diferenciables en $\mathbb{R}^2$ (ja que són funcions polinòmiques) i $q(x,y) > 0$, per a cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Anem doncs a estudiar la diferenciabilitat de f_m en $(0,0)$. Observeu que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_m(x,0) - f_m(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} x^{m-3} = \begin{cases} 0, & \text{si } m > 3, \\ 1, & \text{si } m = 3, \\ \text{no existeix}, & \text{si } m = 2, \\ +\infty, & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

Com que $f_m(0,y) = (-1)^m f_m(y,0)$, deduïm que

$$\lim_{y \to 0} \frac{f_m(0,y) - f_m(0,0)}{y} = \begin{cases} 0, & \text{si } m > 3, \\ -1, & \text{si } m = 3, \\ \text{no existeix}, & \text{si } m = 2, \\ -\infty, & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

Per tant,

$$\frac{\partial f_m}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f_m}{\partial y}(0,0) = 0, \quad \text{si } m > 3, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0) = 1 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(0,0) = -1,$$

mentre que no existeixen cap de les derivades parcials de primer ordre de f_1 i f_2 en l'origen. Així doncs, deduïm que:

- Les funcions f_1 i f_2 no són diferenciables en $(0,0)$.
- Per a $m \geq 3$, f_m és diferenciable en $(0,0)$ si i només si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_m(x,y) = 0$, on

$$g_m(x,y) = \frac{f_m(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{(x-y)^m}{\|(x,y)\|^3}, \quad \text{si } m > 3,$$

i

$$g_3(x,y) = \frac{f_3(x,y) - (x-y)}{\|(x,y)\|} = \frac{(x-y)^3 - (x^2+y^2)(x-y)}{\|(x,y)\|^3} = \frac{2xy(y-x)}{\|(x,y)\|^3},$$

ja que $(x-y)^3 = (x-y)^2(x-y) = (x^2+y^2-2xy)(x-y)$.

Ara, si $m > 3$, tenim que

$$|g_m(x,y)| = \frac{|x-y|^m}{\|(x,y)\|^3} \leq \frac{(|x|+|y|)^m}{\|(x,y)\|^3} \leq 2^m \|(x,y)\|^{m-3} \quad \text{i} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|^{m-3} = 0.$$

Per tant, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_m(x,y) = 0$, quan $m > 3$, i en conseqüència f_m és diferenciable en $(0,0)$, per a cada $m > 3$.

D'altra banda, f_3 no és diferenciable en $(0,0)$ ja que, si ho fos, el límit de g_3 en $(0,0)$ segons la semirecta $y = -x$, $x > 0$, seria igual a 0, però això és fals perquè

$$\lim_{x\to 0^+} g_3(x,-x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4x^3}{2^{3/2}|x|^3} = \sqrt{2}.$$

En conclusió, f_m és diferenciable en $\mathbb{R}^2$ si i només si $m > 3$.

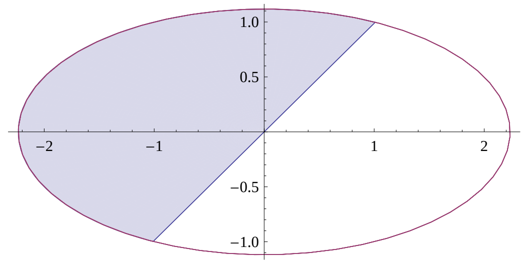
(4) Donada la funció $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$ i el conjunt

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 5, y - x \geq 0\}.$$

Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f sobre A i calculeu-los.

Solució:

El conjunt A és la intersecció de la regió el·líptica $x^2+4y^2-5 \leq 0$ amb el semiplà $y-x \geq 0$.



- Justificació de l'existència d'extrems: Donat que f és contínua en $\mathbb{R}^2$, si provem que A és compacte, llavors pel teorema de Weierstrass sabem que f té extrems absoluts sobre A.
  Per veure que el conjunt A és compacte demostrarem que és tancat i acotat.
  Que A és tancat es dedueix del fet que si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ és contínua i $B \subset \mathbb{R}^2$ és tancat llavors $g^{-1}(B)$ és tancat a $\mathbb{R}^2$, aplicat a la funció $g(x,y) = (x^2 + 4y^2 - 5, y - x)$ (les seves components són funcions polinomiques i per tant de classe C^∞ en $\mathbb{R}^2$) i $B = (-\infty, 0] \times [0, +\infty)$.
  Que A és acotat és dedueix del fet que per a tot $(x,y) \in A$ es compleix $x^2 + y^2 \leq x^2 + 4y^2 \leq 5$, i per tant A està contingut en la bola tancada de centre l'origen i radi $\sqrt{5}$.
- Càlcul dels extrems:
  Els extrems absoluts poden pertànyer:
  (a) a l'obert $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 5 < 0, y - x > 0\}$ (que és l'interior d'A).
  En aquest cas els extrems absoluts també seran extrems locals de f i per tant seran punts crítics de f.
  Donat que $\nabla f(x,y) = (2x - 2xy^2, 2y - 2x^2y) = (2x(1-y^2), 2y(1-x^2))$, els 5 punts crítics de f són $(0,0)$, $(\pm 1, \pm 1)$, i cap d'ells està en U.
  (b) al tros de l'el·lipse $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 5 = 0, y - x > 0\}$.
  En aquest cas, pel mètode dels multiplicadors de Lagrange sabem que s'ha de complir

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - 2xy^2 - 2\lambda x & = & 0 \\ 2y - 2x^2y - 8\lambda y & = & 0 \\ x^2 + 4y^2 - 5 & = & 0 \\ y - x > 0 & & \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcl} 2x(1 - y^2 - \lambda) & = & 0 \\ 2y(1 - x^2 - 4\lambda) & = & 0 \\ x^2 + 4y^2 - 5 & = & 0 \\ y - x > 0 & & \end{array}\right\}$$

  De la primera equació tenim $x = 0$ o bé $1 - y^2 = \lambda$.
  Si $x = 0$, només $(0, \pm\sqrt{5/4})$ compleixen les tres primeres equacions, i dels dos l'únic que pertany a F_1 és $p_1 = (0, \sqrt{5/4})$.

Si $x \neq 0$ i $1 - y^2 = \lambda$, s'ha de complir

$$\left.\begin{array}{rcl} 2y(-3 - x^2 + 4y^2) & = & 0 \\ x^2 + 4y^2 - 5 & = & 0 \\ y - x > 0 & & \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcl} 2y(2 - 2x^2) & = & 0 \\ x^2 + 4y^2 - 5 & = & 0 \\ y - x > 0 & & \end{array}\right\}$$

De la primera equació s'obté $y = 0$ o bé $x^2 = 1$. Si $y = 0$, els punts que compleixen les dues primeres equacions són $(\pm\sqrt{5}, 0)$. Si $x = \pm 1$, els punts que les compleixen són $(\pm 1, \pm 1)$. Dels 6 punts, només $p_2 = (-\sqrt{5}, 0)$ i $p_3 = (-1, 1)$ estan en F_1.

(c) al segment obert $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 5 < 0, y - x = 0\}$.
Donat que $y = x$, en aquest cas, cal trobar els punts crítics de $g(x) = f(x, x) = 2x^2 - x^4$ per a x complint $5x^2 - 5 < 0$, és a dir $-1 < x < 1$. L'únic punt crític de g en aquest interval és $x = 0$ i per tant cal considerar el punt $p_4 = (0, 0)$.

(d) en la intersecció de l'el·lipse i de la recta,
$F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 5 = 0, y - x = 0\} = \{p_5 = (1, 1), p_6 = (-1, -1)\}$.

(els dos darrers casos es poden fer conjuntament estudiant els extrems absoluts de $f(x, x) = 2x^2 - x^4$ en l'interval $[-1, 1]$)

Avaluant en els punts $p_1, \cdots, p_6$ tenim

$$f(0, \sqrt{5/4}) = 5/4, \qquad f(-\sqrt{5}, 0) = 5, \qquad f(-1, 1) = 1$$
$$f(0, 0) = 0, \qquad f(1, 1) = 1, \qquad f(-1, -1) = 1.$$

Per tant el valor màxim de f sobre A és 5 i s'assoleix en el punt $(-\sqrt{5}, 0)$. El valor mínim de f sobre A és 0 i s'assoleix en el punt $(0, 0)$.