MATRIUS I VECTORS
Examen parcial
5 de novembre de 2010

Exercici 1. **(i)** Trobeu a per tal que el rang de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ sigui 3. *(4 punts)*

(ii) Calculeu matrius invertibles P, Q tals que $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pel valor de a que hagueu trobar a (i). *(6 punts)*

Exercici 2. Sigui $A_n = (a_i^j) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida per $(a_i^j) = \begin{cases} -i & i = j-1 \\ j & i = j+1 \\ 0 & \text{altres casos} \end{cases}$

(i) Escriviu A_n en forma matricial i demostreu que és antisimètrica. *(2 punts)*

(ii) Demostreu que $\det(A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ senar} \\ \prod_{p=1}^{n/2}(2p-1)^2 & \text{si } n \text{ parell.} \end{cases}$ *(4 punts)*

(iii) Discutiu el rang de A_n segons el valor de n. *(2 punts)*

(iv) Calculeu les matrius A_4^{-1} i A_{125}^{-1} quan sigui possible. *(2 punts)*

TEORIA

Tema Definiu determinant d'una matriu quadrada, enuncieu les propietats més importan i demostreu alguna d'elles a partir només de la definició (no de cap altra propietat). *(7 punts)*

Qüestió 1 Siguin $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, B invertible; proveu que $\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr}(A)$. *(1 punts)*

Qüestió 2 Donada $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$, proveu que existeix sempre un sistema $Ax = b$ incompatible. *(1 punts)*

Qüestió 3 Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $Ab = \lambda b$ per una matriu columna b no nul·la, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostreu que $\det(A - \lambda I_n) = 0$. *(1 punts)*