2. Coordenadas y ecuaciones, razón doble

Nota En los ejercicios que siguen, si no se especifica otra cosa, el símbolo $\mathbb{P}^n$ indica un espacio proyectivo de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Si además se mencionan coordenadas o ecuaciones, éstas se entienden dadas en una referencia fijada de dicho espacio.

2.1 (a) Determineu l'equació de la recta de $\mathbb{P}^2$ que passa pels punts $(1:2:8)$ i $(-7:0:3)$.

(b) Determineu també les equacions de la recta r_1 de $\mathbb{P}^3$ que passa pels punts $(1:0:0:0)$ i $(0:1:1:0)$.

(c) Considereu la recta r_2 de $\mathbb{P}^3$:

$$x+y+z-t=0, \qquad x-y=0$$

Determineu les equacions de la recta r_3 que passa per $(2:1:1:1)$ i talla r_1 i r_2.

(d) Detemineu l'equació del pla de $\mathbb{P}^3$ determinat per r_1 i r_3.

2.2 (a) Proveu que els plans de $\mathbb{P}^3$

$$\begin{aligned} \pi_1 :&\quad 3x-3y+z-5t=0 \\ \pi_2 :&\quad 5x+3y-5z+t=0 \\ \pi_3 :&\quad 3x+3y-4z+2t=0 \end{aligned}$$

es tallen tots tres en una recta r.

(b) Determineu l'equació general d'un pla que passi per r.

2.3 Fijada en un espacio proyectivo $\mathbb{P}^4$ una referencia con coordenadas homogeneas x, y, z, t, s, se consideran los planos

$$\pi_1 : x+3z-s=0, \quad 2x+3y+t=0$$

$$\pi_2 : -x+z+2t=0, \quad 3x+y=0$$

y la recta

$$\ell : -13y+3z=0, \quad 7y+3t=0, \quad -38y+3s=0.$$

Calcular las intersecciones $\pi_1 \cap \pi_2$, $\pi_1 \cap \ell$ y $\pi_2 \cap \ell$.

Determinar razonadamente los planos π que contienen a ℓ y cortan a π_1 y π_2 en rectas.

2.4 Considerem donat a $\mathbb{P}^3$ el pla $\pi : x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0$ i la recta

$$r : ax_0 - x_1 + (1-a)x_2 = 0, \quad ax_0 - x_1 + x_2 - ax_3 = 0,$$

on $a \neq 0$. Trobeu condicions per tal que:

(a) $r \subset \pi$

(b) $r \not\subset \pi$. Quin és el punt d'intersecció?

2.5 Sigui $\{P_0, P_1, P_2, P_3; A\}$ un sistema de referència a l'espai projectiu $\mathbb{P}^3$ i $P = (a:b:c:d)$ en aquest sistema de referència. Suposem que $abcd \neq 0$. Trobeu:

(a) Les equacions de la recta PP_3.

(b) L'equació del pla PP_2P_3.

(c) La projecció de la recta PA des de P_3 sobre el pla $P_0P_1P_2$.

(d) L'expressió general de les coordenades d'un punt de la recta que passa per P i talla les rectes P_0P_1 i P_2P_3.

(e) El punt d'intersecció de la recta AP amb el pla d'equació $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

2.6 A $\mathbb{P}^2$ es consideren els sistemes de referència següents:

$$R_1 = \{(-1 : -2 : -1), (2 : 2 : 2), (0 : 0 : 3); (2 : 3 : 3)\}$$
$$R_2 = \{(-6 : -10 : -5), (-1 : -3 : 1), (3 : 4 : 7); (-4 : -9 : 3)\}$$

Determineu els punts i les rectes que tenen les mateixes coordenades en ambdós sistemes.

2.7 Sigui $ABCD$ un quadrivèrtex complet de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Demostreu que els punts $AD \cap BC$, $AB \cap CD$, $AC \cap BD$ no estan alineats. Així doncs, aquests punts determinen un triangle que anomenem *triangle diagonal*.

2.8 Demostreu el *Teorema de Pappus*: Donats sis punts de $\mathbb{P}^2$, A, A', B, B', C, C' alternativament sobre dues rectes, els punts $M = AB' \cap A'B$, $N = AC' \cap A'C$ i $P = BC' \cap B'C$ estan alineats.

2.9 Considerem a $\mathbb{P}^2$ dos triangles ABC i $A'B'C'$ tals que les rectes AA', BB', CC' tallen les rectes BC, CA, AB, respectivament en tres punts alineats. Demostreu que les tres rectes que uneixen A', B', C' amb les interseccions $BC \cap B'C'$, $AC \cap A'C'$, $AB \cap A'B'$ són concurrents.

2.10 Donades dues rectes diferents r, s del pla projectiu, es consideren quatre punts diferents A_1, A_2, A_3, A_4 de r i les seves respectives projeccions B_1, B_2, B_3, B_4 sobre la recta s des d'un punt P, $P \notin r \cup s$. Proveu que $P, A_1B_4 \cap A_3B_2, A_4B_1 \cap A_2B_3$ estan alineats.

2.11 Calculeu la raó doble dels quatre punts de $\mathbb{P}^3$: $(1 : 1 : -1 : 1)$, $(0 : 1 : 1 : -1)$, $(2 : 1 : -3 : 3)$, $(4 : 3 : -5 : 5)$.

2.12 Calculeu:

(a) La raó doble de les quatre rectes r_1, r_2, r_3, r_4 de $\mathbb{P}^2$ que pertanyen al feix de rectes pel punt $(0 : 0 : 1)$ i passen respectivament per $(1 : -1 : 1)$, $(-1 : 2 : 2)$, $(2 : 2 : 3)$ i $(4 : 2 : -1)$.

(b) La raó doble dels plans de $\mathbb{P}^3$: $x + 2y + t = 0$, $x - y - z + t = 0$, $x + 5y + z + t = 0$ i $3x - 2z + 3t = 0$.

2.13 Sigui ABC un triangle del pla projectiu $\mathbb{P}^2$ i P un punt que no pertany a cap costat del triangle. Sigui $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Demostreu que existeix una única recta r pel punt P que talla els costats del triangle en punts $AB \cap r$, $AC \cap r$ i $BC \cap r$ tals que

$$(P, AB \cap r, AC \cap r, BC \cap r) = \lambda.$$

2.14 Trobeu el parell de punts de $\mathbb{P}^1$ que està separat harmònicament del parell de punts $\{(1 : 0), (0 : 1)\}$ i, a la vegada, separat harmònicament del parell de punts $\{(1 : 1), (4 : 1)\}$.

2.15 Es consideren en un pla projectiu $\mathbb{P}^2$ un triangle ABC, un punt O que no pertany a cap dels seus costats i α, β, γ elements del cos base. Prenem $A' = OA \cap BC$, $B' = OB \cap AC$, $C' = OC \cap AB$ i els punts $M \in OA$, $N \in OB$, $T \in OC$ definits per les relacions

$$(A, A', O, M) = \alpha, \quad (B, B', O, N) = \beta, \quad (C, C', O, T) = \gamma.$$

Demostreu que M, N, T estan alineats si i només si

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 + \alpha\beta\gamma.$$

2.16 En un pla projectiu amb una referència donada, es consideren les rectes d'equacions $\ell_1 : \{z_0 = 0\}$, $\ell_2 : \{z_1 = 0\}$, $\ell_3 : \{z_0 = z_1\}$ i $\ell_4 : \{z_2 = 0\}$. Trobeu les rectes que passen pel punt $p = (2 : -1 : 1)$ i que tallen a ℓ_1, ℓ_2 i a ℓ_3, ℓ_4 en punts separats harmònicament.

2.17 Demostreu que per qualssevol punts A, B, C, D, E d'una recta projectiva, diferents dos a dos, es verifica la següent relació entre raons dobles:

$$(A, B, C, D)(A, B, D, E)(A, B, E, C) = 1.$$

2.18 Sigui $ABCD$ un quadrivèrtex de $\mathbb{P}^2$ i sigui $D_1D_2D_3$ el triangle diagonal ($D_1 = AD \cap BC$, $D_2 = AC \cap BD$, $D_3 = AB \cap CD$). Anomenem $\bar{D}_3 = CD \cap D_1D_2$. Proveu: $(C, D, \bar{D}_3, D_3) = -1$.

2.19 En un pla projectiu es consideren un triangle T de vèrtexs A_0, A_1, A_2, un punt p que no pertany a cap dels costats de T i una recta r que no conté ni p ni cap dels vèrtexs de T. Per $i = 0, 1, 2$, es prenen A'_i la projecció de p des de A_i sobre el costat oposat, i q_i la projecció de p des de A_i sobre r. Demostreu que

$$(p, A_0, A'_0, q_0) + (p, A_1, A'_1, q_1) + (p, A_2, A'_2, q_2) = 1.$$

2.20 Demostreu el *Teorema de Ceva*: Donats un triangle $O_1O_2O_3$ i tres punts $A_1 \in O_2O_3$, $A_2 \in O_1O_3$, $A_3 \in O_1O_2$ diferents dels vèrtexos, les rectes O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3 són concurrents si i només si el producte

$$(O_2, O_3, I_1, A_1)(O_3, O_1, I_2, A_2)(O_1, O_2, I_3, A_3) = 1$$

amb I_1, I_2, I_3 les projeccions des d'un punt fora del triangle de cada vèrtex sobre el seu costat oposat.

2.21 Demostreu el *Teorema de Menelao*: En les mateixes condicions del *Teorema de Ceva* proveu que A_1, A_2, A_3 estan alineats si i només si

$$(O_2, O_3, I_1, A_1)(O_3, O_1, I_2, A_2)(O_1, O_2, I_3, A_3) = -1.$$

2.22 Donats un triangle $O_1O_2O_3$ i dues rectes diferents r, s que no passin pels vèrtexs del triangle i que tallin al costat oposat de O_i en punts R_i, S_i, respectivament, per $i = 1, 2, 3$, demostreu la igualtat

$$(O_1, O_2, R_3, S_3)(O_2, O_3, R_1, S_1)(O_3, O_1, R_2, S_2) = 1.$$

2.23 Demostreu que la raó doble dels quatre punts en què una recta talla les cares d'un tetraedre és igual a la raó doble dels plans determinats per la recta i els vèrtexos del tetraedre en un ordre convenient.

2.24 Siguin π_1 i π_2 plans de $\mathbb{P}^3$ i p un punt exterior a ambdós plans. Donades les rectes r_1 i r_2 per p considerem els punts A_1, B_1, A_2 i B_2 obtinguts tallant r_1 i r_2 amb π_1 i π_2 respectivament. Demostreu que els punts $A_1B_2 \cap A_2B_1$ obtinguts en variar r_1 i r_2 són coplanaris.

2.25 Sean dados tres puntos independientes P_1, P_2, P_3 del plano $\mathbb{P}^2$. Sea $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Para una recta cualquiera s que no contenga ninguno de los P_i se definen las rectas $s_i = (s \cap (P_j \vee P_k)) \vee P_i$ y $\bar{s}_i$ la cuarta armónica de $P_i \vee P_j$, $P_i \vee P_k$ y s_i (en el haz por P_i). Probar que $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\bar{s}_3$ son concurrentes.

2.26 Siguin l_1, l_2 rectes del pla projectiu que es tallen en un punt O. Siguin A, B i C tres punts independents, cap d'ells en $l_1 \cup l_2$ i de manera que cap dels costats del triangle que determinen passi per O. Siguin r_A, r_B, r_C, respectivament, els quarts harmònics de OA, OB, OC respecte de l_1, l_2. Proveu que $r_A \cap BC$, $r_B \cap AC$ i $r_C \cap AB$ són punts alineats.

2.27 Considerem en el pla projectiu real un triangle A, B, C i dos punts M, N que no pertanyen a cap dels costats del triangle. Siguin $l = M \vee N$ i $A' = l \cap BC$, $B' = l \cap AC$ i $C' = l \cap AB$. Si $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ són, respectivament, els quarts harmònics de A', B', C' respecte de M, N, demostreu que les rectes $A\bar{A}, B\bar{B}$ i $C\bar{C}$ són concurrents.

2.28 Se considera en un plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ un cuadrilátero de vértices A, B, C, D, E, F con E, F opuestos. Demostrar que para cada $x \in E \vee F$, $x \neq E, F$ existe un único $x' \in E \vee F$, $x' \neq x$ tal, que $(Ax, Bx, Cx, Dx) = (Ax', Bx', Cx', Dx')$.