Complex Analysis

Martin Azpillaga

February 14, 2014

Contents

Block I

Definitions

1. The field of complex numbers

introduction

The field of complex numbers

Let:

- $$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (a+c, b+d) \end{array}$$
- $$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (ac-bd, ad+bd) \end{array}$$

We name the field of complex numbers to:

- $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

We denote:

- $(\mathbb{R}^2, +, \cdot) \, : \, \mathbb{C}$
- $(0,1) \in \mathbb{C} \, : \, i$
- $(a,b) \in \mathbb{C} \, : \, a+bi$
- $\pi_1(\mathbb{C}) \, : \, Re$
- $\pi_2(\mathbb{C}) \, : \, Im$

Conjugation

We name complex conjugation to:

- $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a,b) & \longmapsto & (a,-b) \end{array}$$

We denote:

- $f((a,b)) \, : \, \overline{(a,b)}$

Norm

We name complex norm to:

$$\cdot \begin{array}{rcl} f\ :\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & a^2+b^2 \end{array}$$

We denote:

$$\cdot\ f((a,b))\ :\ |(a,b)|$$

Polar form

We name polar form to:

$$\cdot \begin{array}{rcl} f\ :\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi) \\ (a,b) & \longmapsto & (\sqrt{|(a,b)|}, \arctan(\frac{b}{a})) \end{array}$$

We denote:

$$\cdot\ f((a,b))\ :\ \text{polar form of } (a,b)$$

Unit sphere projection

We name unit sphere projection to:

$$\cdot \begin{array}{rcl} f\ :\mathbb{C} & \longrightarrow & S^1 \\ z & \longmapsto & \frac{z}{|z|} \end{array}$$

We denote:

$$\cdot\ f(z)\ :\ \pi(z)$$

Roots of unity

Let:

- $z \in \mathbb{C}$

Then, z is a root of unity if:

- $\exists\, n \in \mathbb{N} \;\shortparallel\; z^n = 1$

We denote:

- $\{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ root of unity } \} \;:\; S^1$

Disk

Let:

- $p \in \mathbb{C}$
- $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

We name Disk centered in p and radius r to:

- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| < r\}$

We denote:

- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| < r\} \;:\; D^1$

Block II

Propositions

1. The field of complex numbers

introduction

go

Block III

Examples

1. Holomorphic functions

introduction

go

Block IV

Problems

PROBLEMES D'ANÀLISI COMPLEXA
2n quadrimestre del curs 2013-2014.

Llista 1: Els nombres complexos

B.1. Expresseu en la forma $a+ib$ els següents nombres:

(a) $(2+3i)(4+i)$ (c) $\frac{1}{4+i}$ (e) $\sqrt{i}$ (g) $\sqrt{9i}$
(b) $(4+2i)^2$ (d) $\frac{i}{4+i}$ (f) $\sqrt{-i}$ (h) $\sqrt{1+i}$

B.2. Si $z=x+iy$ trobeu les parts real i imaginària de les expressions següents:

(a) z^2 (b) $z(z+1)$ (c) $\frac{1}{z}$ (d) $\frac{1}{z-3}$.

B.3. És cert que

a) $\operatorname{Re}(z+w)=\operatorname{Re} z+\operatorname{Re} w$?
b) $\operatorname{Re}(zw)=(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Re} w)$?
c) $\operatorname{Re}(\frac{z}{w})=\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Re} w}$?

B.4. Trobeu la forma polar dels nombres següents i dibuixeu-los.

(a) $3(1+\sqrt{3}\,i)$ (b) $2\sqrt{3}-2i$ (c) $-2+2i$ (d) $-1-i$

B.5. Sigui $(x+iy)/(x-iy)=a+ib$. Proveu que $a^2+b^2=1$.

B.6. Proveu que si $p(z)$ és un polinomi amb coeficients reals i z és un zero de p llavors $\bar{z}$ també ho és.

B.7. Descriviu els conjunts del pla que satisfan (recordeu que $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$.)

(a) $\operatorname{Im}\frac{z-a}{z}=0, a\in\mathbb{C}^*$ (b) $|z|=\operatorname{Re} z+1$ (c) $|z-2|>|z-3|$

SOL. B.1. a) $5+14i$; b)$12+16i$; c) $4/17-i/17$; d)$1/17+4i/17$; e) $\pm\sqrt{2}/2(1+i)$; f)$\pm\sqrt{2}/2(1-i)$; g) $\pm 3\sqrt{2}/2(1+i)$; h) $\pm 2^{1/4}(\cos(\pi/8)+i\sin(\pi/8))$.
B.2 a) x^2-y^2+2ixy; b) $x^2-y^2+x+i(y+2xy)$; c) $(x-iy)/(x^2+y^2)$; d) $(x-3-iy)/((x-3)^2+y^2)$.
B.3 a) si. b) no. c) no.
B.4 a) $6(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))$; b) $4(cos(\pi/6)-i\sin(\pi/6))$; c) $2\sqrt{2}(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))$; d) $\sqrt{2}(cos(3\pi/4)-i\sin(3\pi/4))$.
B.6 Conjugueu tot el polinomi.
B.7 a) Recta que passa per 0 i a; b) Paràbola horitzontal $x=(1/2)(y^2-1)$; c) $\{\operatorname{Re} z>3/2\}$.

1. Expresseu en la forma $a+ib$ els següents nombres:

(a) $\frac{1}{i}$ (c) $\frac{1}{2+i}+\frac{1}{2-i}$ (e) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$ (g) $\sqrt[4]{-i}$
(b) $\frac{1+i}{1-i}$ (d) $\frac{1}{2+i}+\frac{4-2i}{3+i}$ (f) $(1+i)^{100}+(1-i)^{100}$ (h) $(3+4i)^{\frac{1}{2}}$

2. Si $z=x+iy$ on $x,y\in\mathbb{R}$, trobeu les parts real i imaginària de:

PROBLEMES D'ANLISI COMPLEXA
2n quadrimestre del curs 2013-2014

Llista 2: Funcions de variable complexa i equacions de Cauchy-Riemann

B.1. Trobeu els punts on la funció f és derivable (en el sentit complex), en els següents casos, i calcula'n la derivada.

(a) $\cos|z|^2$ (c) e^{iz} (e) $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+2)}$

(b) $|z|^4$ (d) $z+\frac{1}{z}$ (f) $\frac{1}{(z+\frac{1}{z})^2}$

Solució: (a) $\emptyset$; (b) $\emptyset$; (c) $\mathbb{C}$; $f'(z) = ie^{iz}$;(d) $\mathbb{C}\setminus\{0\}$; $f'(z) = 1 - |\frac{1}{z^2}$; (e) $\mathbb{C}\setminus\{1, \pm\sqrt{2}i\}$; (f) $\mathbb{C}$.

B.2. Determineu si aquestes funcions poden ser la part real d'una funció holomorfa, i en cas que ho siguin calculeu la part imaginària.

(a) $e^x \cos y$ (b) $x^3 + 6xy^2$ (c) $\log(x^2 + y^2)$

Solució: (a) $e^x \sin y$; $f(z) = e^z$; (b) No ho és; (c) $2\arctan(y/x)$; $(f(z) = \log(z^2)$.

B.3. Sigui f una funció holomorfa en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ i $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Quin angle formen les corbes $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0)$ i $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$ en un punt z_0 ?
Solució: $\pi/2$.

1. Trobeu els punts on la funció f és derivable (en el sentit complex), en els següents casos:

(a) $f(z) = |z|$
(b) $\cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$
(c) $f(z) = \operatorname{Re} z$
(d) $f(z) = z + z\bar{z}$
(e) $f(z) = \operatorname{Im} e^{\bar{z}} + i \operatorname{Re} e^z$

2. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $z_0 \in \Omega$ i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funció.

a) Identificant $\mathbb{R}^2$ amb $\mathbb{C}$ de la forma habitual, demostreu que si f és diferenciable en z_0, llavors

$$Df(z_0)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \cdot z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \cdot \bar{z} \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

on

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

b) Proveu que f és holomorfa en Ω si, i només si, f és diferenciable i $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ en Ω. En tal cas, $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$.

3. Demostreu que si f és diferenciable en un obert de $\mathbb{C}$, llavors

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \quad \text{i} \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}.$$

1. Holomorphic functions

introduction

go

Block V

Tasks