Àlgebra Lineal, Curs 2010-11, Grup tarda
Examen final. 10 de juny de 2011

1.(4/20) Sean $F = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$, $E = \mathbb{R}(3,3)$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in E$. Sean $f : F \longrightarrow E$ la aplicación lineal definida por

$$f(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = a_0 I + a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3,$$

y $g : E \longrightarrow E$ la aplicación lineal definida por

$$g(A) = A - {}^tA, \quad \forall A \in E$$

donde ${}^tA$ denota la matriz transpuesta de la matriz A.

(1) Halla bases de $\operatorname{Im} f$ y $\operatorname{Ker} f$. Halla las dimensiones de $\operatorname{Im} g$ y $\operatorname{Ker} g$.

SOLUCION: Las potencias de N son $N^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}$, $N^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$, por tanto

$$f(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = a_0 \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0&0&0 \\ a_1&a_0&0 \\ a_2&a_1&a_0 \end{pmatrix}.$$

De aquí deducimos que

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0,$$

por tanto $\operatorname{Ker} f = \{a_3 t^3; a_3 \in \mathbb{R}\}$, y una base de $\operatorname{Ker} f$ es $\{t^3\}$.

Por otro lado tenemos que:

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} a_0&0&0 \\ a_1&a_0&0 \\ a_2&a_1&a_0 \end{pmatrix};\ a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

y una base de $\operatorname{Im} f$ es $\{I, N, N^2\}$

En cuanto a la aplicación g, se tiene que $A \in \operatorname{Ker} g$ si y solo si $A = {}^tA$, es decir, si y solo si A es una matriz simétrica,

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}, \quad a_1^2 = a_2^1,\ a_2^3 = a_3^2,\ a_1^3 = a_3^1.$$

Por tanto $\dim \operatorname{Ker} g = 6$.

Por la fórmula de las dimensiones, tenemos que $\dim E = \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} g$, por lo tanto $\dim \operatorname{Im} g = 9 - 6 = 3$.

(2) Halla una base de $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$, y la dimensión de $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

SOLUCION: Se cumple

$$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \left\{ \begin{pmatrix} a_0&0&0 \\ a_1&a_0&0 \\ a_2&a_1&a_0 \end{pmatrix}; a_1 = 0, a_2 = 0 \right\} = \{a_0 \cdot I;\ a_0 \in \mathbb{R}\}$$

por tanto $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = 1$ y $\{I\}$ es una base de $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$.

Para calcular la dimensión de $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$, usamos la fórmula de Grassmann:

$$\dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = 3 + 6 - 1 = 8$$

(3) Halla una base de $\operatorname{Im} f / (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g)$.

SOLUCION: La base $\{I\}$ de $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$ se amplia a la base $\{I, N, N^2\}$ de $\operatorname{Im} f$, por tanto las clases de equivalencia de $\{[N], [N^2]\}$ forman una base de $\operatorname{Im} f / (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g)$.

(4) Prueba que la suma $\operatorname{Im} g + \operatorname{Im} f$ es directa y determina su dimensión.

SOLUCION: Para ver que la suma $\operatorname{Im} g + \operatorname{Im} f$ es directa es suficiente probar que $\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. Sea $A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} g$. Entonces, si $A \in \operatorname{Im} f$ existe $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \in E$ tal que

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_2-x_4 & x_3-x_7 \\ x_4-x_2 & 0 & x_6-x_8 \\ x_7-x_3 & x_8-x_6 & 0 \end{pmatrix},$$

por tanto $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, de donde deducimos que $A = 0$, por tanto la suma es directa.

Aplicando la fórmula de Grassmann obtenemos

$$\dim(\operatorname{Im} g + \operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Im} g) + \dim(\operatorname{Im} f) = 3 + 3 = 6.$$

2. (2/20) Sean $E = \mathbb{R}(3,3)$, y $g : E \longrightarrow E$ la aplicación lineal definida por

$$g(A) = A - {}^tA, \quad \forall A \in E$$

(1) Halla la dimensión del núcleo de la aplicación traspuesta g^*. Prueba que la aplicación $\operatorname{tr} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es de $\operatorname{Ker} g^*$.

SOLUCION: Se cumple $\operatorname{Ker} g^* = (\operatorname{Im} g)^\perp$, por tanto

$$\dim \operatorname{Ker} g^* = \dim E - \dim \operatorname{Im} g = \dim \operatorname{Ker} g = 6.$$

Una prueba alternativa es como sigue. Puesto que, en bases convenientes, la matriz de g^* es la traspuesta de la matriz de g, resulta $\operatorname{rg} g = \operatorname{rg} g^*$, y por tanto $\dim \operatorname{Ker} g^* = \dim \operatorname{Ker} g = 6$.

Veamos que $\operatorname{tr} \in \operatorname{Ker} g^*$. En efecto,

$$g^*(\operatorname{tr})(A) = \operatorname{tr}(g(A)) = \operatorname{tr}(A - {}^tA) = \operatorname{tr} A - \operatorname{tr}({}^tA) = 0.$$

(2) Sea $w_{ij} \in E^*$ la forma lineal definida por $w_{ij}(A) = a_i^j + a_j^i$, para $1 \le i \le j \le 3$, donde $A = (a_i^j) \in E$. Prueba que $\{w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{22}, w_{23}, w_{33}\}$ es una base de $\operatorname{Ker} g^*$.

SOLUCION: Veamos en primer lugar que $w_{ij} \in \operatorname{Ker} g^*$. En efecto, para todo i, j se tiene

$$g^*(w_{ij})(A) = w_{ij}(g(A)) = w_{ij}(A - {}^tA) = w_{ij}(A) - w_{ij}({}^tA) = (a_i^j + a_j^i) - (a_j^i + a_i^j) = 0.$$

Por otra parte, puesto que $\dim \operatorname{Ker} g^* = 6$, basta ver que $\{w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{22}, w_{23}, w_{33}\}$ es linealmente independiente. En efecto, si $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$, $i \le j$ son escalares tales que

$$w := \lambda_{11} w_{11} + \lambda_{12} w_{12} + \lambda_{13} w_{13} + \lambda_{22} w_{22} + \lambda_{23} w_{23} + \lambda_{33} w_{33} = 0,$$

entonces, para toda matriz $A = (a_i^j)$ se cumple $w(A) = 0$, es decir,

$$2\lambda_{11} a_1^1 + \lambda_{12} a_1^2 + \lambda_{12} a_2^1 + \lambda_{13} a_1^3 + \lambda_{13} a_3^1 + 2\lambda_{22} a_2^2 + \lambda_{23} a_2^3 + \lambda_{23} a_3^2 + 2\lambda_{33} a_3^3 = 0,$$

para todo a_i^j, por tanto $\lambda_{ij} = 0$ para todo $i \le j$.

3.(3/20) Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbf{K}$.

(1) Define las coordenadas de un vector $x \in E$ en una base de $\mathbf{u} := \{u_1, \ldots, u_n\}$ de E. Prueba que las coordenadas X de un vector x son únicas y definen un isomorfismo $E \longrightarrow \mathbf{K}^n$, $x \mapsto X$.

SOLUCION:

Teorema 1. Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ una base ordenada de E, y $x \in E$. Existe una única familia de escalares $(X^1, X^2, \ldots, X^n)$ tal que

$$x = X^1 u_1 + X^2 u_2 + \cdots + X^n u_n.$$

La familia de escalares $(X^1, X^2, \ldots, X^n) \in \mathbf{K}^n$, que se identifica con la matriz de una sola columna $\begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$ se llama el *vector de coordenadas* de x en la base $\mathbf{u}$. La aplicación

$$M_{\mathbf{u}} : E \longrightarrow \mathbf{K}^n, \quad x \mapsto (X^1, \ldots, X^n)$$

es una aplicación lineal biyectiva, cuya inversa es

$$L_{\mathbf{u}} : \mathbf{K}^n \longrightarrow E, \quad X = (X^1, \ldots, X^n) \mapsto \mathbf{u} \cdot X = \sum_i X^i u_i.$$

Demostración. La existencia de la familia de escalares $(X^1, X^2, \ldots, X^n)$ tal que

$$x = X^1 u_1 + X^2 u_2 + \cdots + X^n u_n$$

se sigue de que una base es un conjunto de generadores de E, por tanto todo vector $x \in E$ se expresa como comnbinación lineal de los vectores la base.

Veamos la unicidad. Si $x = \sum_i Y^i u_i$ es otra expresión de x como combinación lineal de los vectores de la base, entonces

$$0 = x - x = \sum_i X^i u_i - \sum_i Y^i u_i = \sum_i (X^i - Y^i) u_i,$$

puesto que los vectores $(u_i)_{1 \le i \le n}$ son linealmente independientes, se obtiene $X^i - Y^i = 0$, es decir, $X^i = Y^i$, para todo i.

Veamos la biyectividad de $M_{\mathbf{u}}$. Efectivamente, sea $x \in E$, y sea $M_{\mathbf{u}}(x) = (X^1, X^2, \ldots, X^n)$, entonces

$$x = X^1 u_1 + X^2 u_2 + \cdots + X^n u_n,$$

y

$$L_{\mathbf{u}}(M_{\mathbf{u}}(x)) = \sum_i X^i u_i = x$$

por tanto $L_{\mathbf{u}} \circ M_{\mathbf{u}} = Id$. Por otra parte, si $(X^1, X^2, \ldots, X^n) \in \mathbf{K}^n$, las coordenadas de $L_{\mathbf{u}}(X^1, X^2, \ldots, X^n) = \sum X^i u_i$ son $(X^1, X^2, \ldots, X^n)$, por tanto

$$M_{\mathbf{u}}(L_{\mathbf{u}}(X^1, X^2, \ldots, X^n)) = (X^1, X^2, \ldots, X^n),$$

es decir $M_{\mathbf{u}} \circ L_{\mathbf{u}} = Id$. En consecuencia $L_{\mathbf{u}}$ es la inversa de $M_{\mathbf{u}}$ y $M_{\mathbf{u}}$ es biyectiva.

Veamos la linealidad de $M_{\mathbf{u}}$. Si $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbf{K}$, $x = \sum_i X^i u_i$, $y = \sum_i Y^i u_i$, entonces

$$x + \alpha y = \sum_i X^i u_i + \alpha \sum_i Y^i u_i = \sum_i X^i u_i + \sum_i \alpha Y^i u_i = \sum_i (X^i + \alpha Y^i) u_i,$$

por tanto

$$M_{\mathbf{u}}(x + \alpha y) = (X^1 + \alpha Y^1, \ldots, X^n + \alpha Y^n) = (X^1, \ldots, X^n) + \alpha (Y^1, \ldots, Y^n) = M_{\mathbf{u}}(x) + \alpha M_{\mathbf{u}}(y),$$

lo que prueba la linealidad de $M_{\mathbf{u}}$. $\square$

(2) Define aplicación lineal de E a F. Prueba que una aplicación lineal está determinada por sus valores en una base de E. Define la matriz de una aplicación lineal de E a F. Indica como se usa la matriz de una aplicación lineal para determinar las coordenadas de la imagen de un vector. Justifica la respuesta.

SOLUCION:

Definición 2. Sean E, F dos espacios vectoriales sobre K. Una aplicación $f : E \longrightarrow F$ se llama *aplicación lineal* si $f(u + \alpha v) = f(u) + \alpha f(v)$, para todo $u, v \in E$, $\alpha \in K$.

Puesto que las aplicaciones lineales preservan la suma y el producto por escalares también preservan las combinaciones lineales.

Proposición 3. Si $f : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal entonces

$$f(\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_r \cdot u_r) = \lambda_1 \cdot f(u_1) + \cdots + \lambda_r \cdot f(u_r),$$

para todo $u_1, \ldots, u_r \in E$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{K}$.

Demostración. Si $x = \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_r \cdot u_r \in E$, se tiene $x = (\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_{r-1} \cdot u_{r-1}) + \lambda_r u_r$. Ahora, razonamos por inducción sobre r. El caso $r = 1$ se sigue de la definición de linealidad. Sea $r > 1$. Usando la hipótesis de inducción y la definición de linealidad se obtiene

$$f(x) = f(\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_{r-1} \cdot u_{r-1}) + f(\lambda_r u_r) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_{r-1} f(u_{r-1}) + \lambda_r f(u_r).$$

$\square$

Debido a la propiedad anterior, toda aplicación lineal queda determinada por su valor sobre una base.

Proposición 4. Sea E y F dos espacios vectoriales. Supongamos que $\mathbf{u} = \{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es una base de E. Sean $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y $w_i := f(u_i)$, para todo i. Sean $x \in E$, y $(X^1, \ldots, X^n) \in \mathbf{K}^n$ las coordenadas de x en la base $\mathbf{u}$. Entonces

$$f(x) = \sum_i X^i w_i.$$

Demostración. Se sigue de la proposición 3, teniendo en cuenta que $x = \sum_i X^i u_i$, y $w_i = f(u_i)$. $\square$

Definición 5. Sean E y F dos espacios vectoriales sobre $\mathbf{K}$ de dimensión finita, $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Sean $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ una base ordenada de E, y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ una base ordenada de F. La *matriz de f en las bases* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es la matriz de tipo $m \times n$ cuya columna i-ésima son las coordenadas de $f(u_i)$ en la base $\mathbf{v}$, es decir, la matriz

$$M_{\mathbf{v}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) := \begin{pmatrix} M_{\mathbf{v}}(f(u_1) & \cdots & M_{\mathbf{v}}(f(u_n)) \end{pmatrix}.$$

Denotaremos esta matriz por $M_{\mathbf{v}}(f; \mathbf{u})$.

La matriz de la aplicación lineal permite el cálculo de las imágenes de los vectores utilizando coordenadas por la fórmula siguiente:

Proposición 6. Con las hipótesis de la definición anterior, para todo $x \in E$,

$$M_{\mathbf{v}}(f(x)) = M_{\mathbf{v}}(f; \mathbf{u}) \cdot M_{\mathbf{u}}(x).$$

Demostración. Si $x \in E$, y

$$M_{\mathbf{u}}(x) = \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$$

son sus coordenadas en la base $\mathbf{u}$, por la proposición 3 se tiene

$$f(x) = \sum_i X^i \cdot f(u_i).$$

Para calcular las coordenadas de $f(x)$ en la base $\mathbf{v}$ usamos la linealidad de $M_{\mathbf{v}}$ (ver Teorema 1)

$$M_{\mathbf{v}}(f(x)) = \sum_i M_{\mathbf{v}}(f(u_i)) \cdot X^i = \begin{pmatrix} M_{\mathbf{v}}(f(u_1)) & \dots & M_{\mathbf{v}}(f(u_n)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

$$= M_{\mathbf{v}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = M_{\mathbf{v}}(f; \mathbf{u}) \cdot M_{\mathbf{u}}(x).$$

□

(3) Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos bases de E, y sea P la matriz de la aplicación identidad de E en las bases $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Indica como se usa la matriz P para pasar de las coordenadas de un vector $x \in E$ en la base $\mathbf{u}$ a las coordenadas del mismo vector x a la base $\mathbf{v}$. Justifica la respuesta.

SOLUCION: Sean E un espacio vectorial de dimensión n, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos bases de E. Para cada vector $x \in E$ tenemos dos vectores de coordenadas $X = M_{\mathbf{u}}(x) \in \mathbf{K}^n$ e $Y = M_{\mathbf{v}}(x) \in \mathbf{K}^n$, tales que

$$\mathbf{u} \cdot X = x = \mathbf{v} \cdot Y.$$

Por la proposición 6 se cumple

$$M_{\mathbf{v}}(x) = M_{\mathbf{v}}(Id_E, \mathbf{u}) \cdot M_{\mathbf{u}}(x),$$

Sea $P = M_{\mathbf{v}}(Id_E, \mathbf{u})$, la matriz de la aplicación identidad de E en las bases $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, entonces $Y = PX$.

4.(6/20) Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) (1/20) Halla el polinomio característico de A. Determina los valores propios de A y sus multiplicidades en función de $a \in \mathbb{C}$. (Es necesario distinguir los tres casos $a = 1$, $a = 2$ y $a \neq 1, 2$.)

SOLUCION:

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} a-t & a-1 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)(a-t)(1-t) = -t^3 + (a+3)t^2 + (-2-3a)t + 2a$$

- $a \neq 2, 1$: Tenemos los vaps $a, 1, 2$ los tres con multiplicidad algebraica 1.
- $a = 2$: Tenemos el vap 2 con multiplicidad 2, y el vap 1 con multiplicidad 1.

- $a = 1$: Tenemos el vap 1 con multiplicidad 2 y el vap 2 con multiplicidad 1.

(2) (1/20) Para $a = -1$ halla la inversa de A en función de I, A, A^2 (sin calcular explícitamente A^{-1} ni A^2).

SOLUCION:
Si $a = -1$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

y $\chi_A(t) = -t^3 + 2t^2 + t - 2$.
Aplicamos el teorema de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, de donde resulta

$$-A^3 + 2A^2 + A - 2I = 0$$

y por tanto

$$A\frac{-A^2 + 2A + I}{2} = I$$

lo que implica

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}I$$

(3) (1/20) Determina para qué valores de $a \in \mathbb{C}$ la matriz A es diagonalizable. Determina la forma de Jordan y el polinomio mínimo de A, para todo $a \in \mathbb{C}$.

SOLUCION:

- $a \neq 2, 1$: En este caso no hay vaps múltiples. Por lo tanto A diagonaliza, y su forma diagonal es $Diag(a, 2, 1)$. El polinomio mínimo es $\phi_A(t) = (t - a)(t - 2)(t - 1)$.

- $a = 2$: En este caso, la multiplicidad algebraica del vap 2 es $m_2 = 2$ y hemos de calcular su multiplicidad geométrica $d_2 = \dim \operatorname{Ker}(A - 2)$. Puesto que

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

resulta rg $(A-2) = 2$, y por lo tanto $d_2 = \dim \operatorname{Ker}(A-2) = 3-2 = 1$ y com $d_2 < m_2$, la matriz A no es diagonalizable. La forma de Jordan de A es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y su polinomio mínimo $\phi_A(t) = (t - 2)^2(t - 1)$.

- $a = 1$: En este caso, la multiplicidad algebraica del vap 1 es $m_1 = 2$ y hemos de calcular su multiplicidad geométrica $d_1 = \dim \operatorname{Ker}(A - 1)$.Puesto que

$$A - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

resulta rg$(A - 1) = 1$, y por lo tanto $d_1 = \dim \operatorname{Ker}(A - 1) = 3 - 1 = 2$, de donde deducimos que A es diagonalizable. La forma de Jordan de A es $Diag(2, 1, 1)$ y el polinomio mínimo $\phi_A(t) = (t - 2)(t - 1)$.

(4) (2/20) Para $a = 1$, determina una matriz B tal que $B^4 = A$.

SOLUCION:

Recordemos que en el caso $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonalizable con valores propios $\lambda_1 = 1$, de multiplicidad $m_1 = 2$, y $\lambda_2 = 2$, de multiplicidad $m_2 = 1$, por tanto existe una matriz inversible S tal que

$$A = SDS^{-1}, \quad D = Diag(1, 1, 2).$$

Sea B una matriz de E, entonces

$$B^4 = A \Leftrightarrow S^{-1}B^4S = S^{-1}AS \Leftrightarrow (S^{-1}BS)^4 = D$$

Si defininimos B de modo que

$$B = SDiag(1, 1, \sqrt[4]{2})S^{-1}$$

entonces

$$(S^{-1}BS)^4 = (Diag(1, 1, \sqrt[4]{2}))^4 = Diag(1, 1, 2),$$

por tanto $B^4 = A$. Para hallar S hemos de calcular una base de $\mathbb{R}^3$ formada por veps de A:

- **veps de vap 1:** Hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$(A - 1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Por tanto una base de $\operatorname{Ker}(A - 1)$ es $\{v_1 := (1, -1, 0), v_2 := (0, 1, -1)\}$.

- **vep de vap 2:** Hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$(A - 2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Por tanto un vep de vap 2 es: $v_3 = (0, 0, 1)$.

En definitiva tenemos que :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y una solución del problema es

$$B = SDiag(1, 1, \sqrt[4]{2})S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt[4]{2} - 1 & \sqrt[4]{2} - 1 & \sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$$

(5) (1/20) Para $a = 2$, halla una base de Jordan para A. Halla A^p, para todo $p \in \mathbb{N}$.

<u>**SOLUCION:**</u>

En este caso $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- **vep de vap 1:** Hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$(A-1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Por tanto un vep de vap 1 es: $v_3 = (1, -1, 0)$.
- **vap 2:** En este caso tenemos

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A-2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  El vector $v_1 = (1, 0, 0)$ satisface

$$v_1 \in \mathrm{Ker}\,(A-2)^2, \quad v_1 \notin \mathrm{Ker}\,(A-2).$$

  Definimos $v_2 := (A-2)v_1 = (0, 0, 1)$.

La matriz de cambio de base es:

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y en esta base, la matriz del endomorfismo L_A es:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo cual $A = SJS^{-1}$ y

$$A^p = SJ^pS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ p2^{p-1} & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^p & 2^p - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p2^{p-1} & p2^{p-1} & 2^p \end{pmatrix}$$

5. (3/20) Sea $A \in \mathbb{C}(15, 15)$ tal que

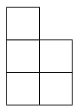
(a) El polinomio mínimo de A es $(t-1)^2 p(t)$, con $p(1) \neq 0$, y las únicas raíces de $p(t)$ son 0 y -1.
(b) tr $A = 0$, tr$A^2 = 10$, rg$(A) = 13$, $\dim\ker A^2 = 4$, rg$(A-1)(A+1) = 11$.

Halla el polinomio característico, el polinomio mínimo y la forma de Jordan de A.

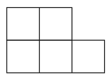
SOLUCION: Como $\{1, 0, -1\}$ son las únicas raíces del polinomio mínimo, $\{-1, 0, 1\}$ son exactamente los vaps de A. Sean a, b, c sus multiplicidades algebraicas, entonces $a+b+c = 15$. Además $0 = \text{tr } A = -a + c$. Por otra parte, los valores propios de A^2 son los cuadrados de los valores propios de A. Por tanto los valores propios de A^2 son $(-1)^2 = 1^2$, con multiplicidad $a + c$, y $0^2 = 0$ con multiplicidad b. Por tanto, de $10 = \text{tr } A^2 = a + c$. De aquí deducimos que $a = b = c = 5$, por tanto,

$$\chi_A(t) = t^5(t-1)^5(t+1)^5.$$

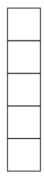
A continuación estudiamos cada vap:
vap 0: En este caso tenemos que $\dim \text{Ker}\, A = 15 - \text{rg}(A) = 15 - 13 = 2$ y $\dim \ker A^2 = 4$, con lo cual el correspondiente bloque de Jordan tiene un diagrama de la forma:


.

vap 1 y vap -1: El polinomio mínimo nos dice que la altura máxima de los bloques de Jordan para el vap 1 es 2.
Además $\text{rg}(A-1)(A+1) = 11 \Rightarrow \dim \text{Ker}\,(A-1) + \dim \text{Ker}\,(A+1) = 4$, con lo cual sólo podemos tener las siguientes bloques de Jordan:
Para el vap 1:


.

Para el vap -1:


.

La forma de Jordan es:

$$J(0,3) \oplus J(0,2) \oplus J(1,2) \oplus J(1,2) \oplus J(1,1) \oplus J(-1,5).$$

El polinomio mínimo es: $\phi_A(t) = t^3(t-1)^2(t+1)^5$.

6.(2/20) Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$.

(1) Sea $P(t) = Q_1(t)Q_2(t)$ una descomposición de un polinomio $P \in \mathbb{C}[t]$ en factores primos entre si. Enuncia y demuestra la fórmula que calcula $\text{Ker}\, P(f)$ en función de $\text{Ker}\, Q_1(f)$ y $\text{Ker}\, Q_2(f)$.

SOLUCION:

Teorema 7. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial E (no necesariamente de dimensión finita). Si $Q_1(t), Q_2(t)$ son dos polinomios primos entre sí, y $P = Q_1Q_2$, entonces

$$\text{Ker}\, P(f) = \text{Ker}\, Q_1(f) \oplus \text{Ker}\, Q_2(f).$$

Demostración. Por la identidad de Bezout existen polinomios A_1, A_2 tales que

$$1 = Q_1A_1 + Q_2A_2.$$

Veamos que la suma es directa. Si $v \in \operatorname{Ker} Q_1(f) \cap \operatorname{Ker} Q_2(f)$, puesto que $1 = Q_1A_1 + Q_2A_2$, se tiene

$$v = A_1(f)(Q_1(f)(v)) + A_2(f)(Q_2(f)(v)) = 0.$$

Por tanto $v = 0$.

Veamos que

$$\operatorname{Ker} Q_1(f) + \operatorname{Ker} Q_1(f) = \operatorname{Ker}(Q_1 \cdot Q_2)(f).$$

Las inclusiones $\operatorname{Ker} Q_i(f) \subset \operatorname{Ker}(Q_1 \cdot Q_2)(f)$, para $i = 1, 2$, son obvias, por tanto

$$\operatorname{Ker} Q_1(f) + \operatorname{Ker} Q_1(f) \subset \operatorname{Ker}(Q_1 \cdot Q_2)(f).$$

Recíprocamente, si $v \in \operatorname{Ker}(Q_1 \cdot Q_2)(f)$, se tiene

$$v = Q_1(f) \circ A_1(f)(v) + Q_2(f) \circ A_2(f)(v),$$

donde

$$Q_2(f)(Q_1(f) \circ A_1(f)(v)) = 0, \quad Q_1(f)(Q_2(f) \circ A_2(f)(v)) = 0,$$

por tanto $v \in \operatorname{Ker} Q_2(f) + \operatorname{Ker} Q_1(f)$. □

(2) Prueba que si existe un polinomio $P(t)$ con raíces simples tal que $P(f) = 0$ entonces f es diagonalizable.

<u>SOLUCION:</u>

Corolario 8. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial E. Si $Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_r(t)$ son r polinomios coprimos dos a dos, y $P = \prod_i Q_i$, entonces

$$\operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker} Q_1(f) \oplus \operatorname{Ker} Q_2(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} Q_r(f).$$

Demostración. Razonamos por inducción sobre r. Para $r = 2$ es el resultado 7 anterior.

Si $r > 2$, entonces Q_1 y el producto $Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_r$ son primos entre sí, por el lema de Euclides. Por el caso $r = 2$, y la hipótesis de inducción para $Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_r$, resulta

$$\operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker} Q_1(f) \oplus \operatorname{Ker}(Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_r)(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} Q_i(f).$$

□

Corolario 9. Sean f un endomorfismo de un espacio vectorial E y $P(t) = \prod_{i=1}^{r} (t - \lambda_i)$ un polinomio de grado r con r raíces distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Si $P(f) = 0$ entonces f es diagonalizable.

Demostración. Por el corolario 8 se obtiene $E = \operatorname{Ker} P(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(f - \lambda_i)$ y por tanto f es diagonalizable. □