28. Quines de les següents afirmacions són certes i quines falses ? Justifica les respostes.

(a) $3 \in (3,5]$.

(b) $11 \notin (-\infty, \pi^2]$.

(c) $7 \in \{2,3,\ldots,11\}$.

(d) $\pi \in (2,\infty)$.

(e) $-1.3 \in \{\ldots -3,-2,-1\}$.

(f) $[1,2] \subseteq \{0,1,2,3\}$.

(g) $\{-1,0,1\} \subseteq [-1,1]$.

(h) $[5,7] \nsubseteq (4,\infty)$.

(i) $\{2,4,6,8,\ldots\} \subseteq [2,\infty)$.

(j) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3\}$.

29. D'entre els següents conjunts, quin és subconjunt de quin ?

$C = \big\{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}\,(n = k^4)\big\}$ $\qquad E = \big\{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}\,(n = 2k)\big\}$

$N = \big\{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}\,(n = k^8)\big\}$ $\qquad D = \big\{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}\,(n = k - 5)\big\}$

30. Siguin $C = \{a,b,c,d,e,f\}$, $D = \{a,c,e\}$, $E = \{d,e,f\}$ i $F = \{a,b\}$. Troba:

(a) $C \smallsetminus (D \cup E)$.

(b) $(C \smallsetminus D) \cup E$.

(c) $F \smallsetminus (C \smallsetminus E)$.

(d) $F \cap (D \cup E)$.

(e) $(F \cap D) \cup E$.

(f) $(C \smallsetminus D) \cup (F \cap E)$.

31. Considera el següent conjunt de números reals: $A = \big\{x \in \mathbb{R} : |2x+1| \geqslant 5\big\}$.

(a) Aplica la definició de valor absolut d'un nombre real i expressa el conjunt A com la unió de dos intervals.

(b) Observa que elevant al quadrat els dos membres de la desigualtat, el conjunt A el podem expressar com $A = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 + 4x + 1 \geqslant 25\}$. Usa aquesta expressió per obtenir A com a unió dels dos conjunts que has trobat a l'apartat **(a)**.

32. Demostra, justificant tots els passos del teu raonament, que si A, B, C són conjunts qualssevol, aleshores $(B \cup A) \cap B = (B \cap C) \cup B$.

33. Siguin A, B, C conjunts qualssevol.

(a) Demostra que $(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$.

(b) Demostra que $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ si i només si $A \subseteq C$.

34. Troba $\bigcup_{k \geqslant 1} B_k$ i $\bigcap_{k \geqslant 1} B_k$ quan, per a cada $k \geqslant 1$, $B_k := \big(-\frac{1}{k}, 1\big] \cup \big(2, \frac{4k-1}{k}\big]$.

35. Si $X = \{1, 2, \{5\}, 9\}$, indica quines de les següents relacions són certes i quines són falses (cal raonar-ho).

(a) $\{1, 2\} \subseteq X$.

(b) $\{2, 9\} \in \mathcal{P}(X)$.

(c) $\{\{9\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

(d) $\{5\} \in \mathcal{P}(X)$.

(e) $\{5\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

(f) $\{\{5\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

(g) $\{2, 5\} \in \mathcal{P}(X)$.

(h) $\{2, 5\} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(i) $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(j) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(X)$.

36. Considera els conjunts

$$X = \{1, \{2\}, 3, 4\} \qquad Y = \{1, 2, \{3\}, 4\} \qquad Z = \{1, 2, 3, \emptyset\}.$$

Calcula els conjunts següents:

(a) $\mathcal{P}(X \cap Y)$ **(b)** $\mathcal{P}(X \setminus Y)$ **(c)** $\mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}(Z)$

37. Escriu en llenguatge informal i de la manera més entenedora possible, usant el mínim nombre possible de símbols, els enunciats següents.

(a) $\forall a \in \mathbb{Z}\, \exists a' \in \mathbb{Z}\, \exists a'' \in \mathbb{N}\, (a' < a \wedge a < a'')$

(b) $\exists z \in \mathbb{Z}\, (z < 0 \wedge z^2 > 0)$

(c) $\forall x \forall y (x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \to x^2 + y^2 \geqslant 2xy)$

(d) $\exists x (x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge x^3 < x^2)$

(e) $\forall y \big(y \in \mathbb{R} \to \exists x (x \in \mathbb{R} \wedge x^3 = y + 1)\big)$

Són certes aquestes propietats ?

38. Identifica els següents conjunts. Justifica la resposta.

(a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, \forall p \in \mathbb{Q}\, (p \cdot x = -x)\}$.

(b) $B = \{x \in \mathbb{N} \,:\, \exists m \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N}\, (k \neq 0 \to k \cdot x < m)\}$.

39. Escriu amb símbols la següent propietat:

> L'arrel quadrada de qualsevol nombre real comprès estrictament entre 0 i 1 està compresa estrictament entre 0 i 1 i és més gran que el propi nombre.

Pots usar només els símbols $\forall$, $\exists$, (,) , $\neg$, $\to$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $=$, $\in$, $\cdot$, $<$, $\leqslant$, $\mathbb{R}$.

40. Formula, en símbols i en llenguatge natural, la negació dels enunciats del problema 37.

41. Direm que un nombre real a és *immadur* quan és irracional i per qualsevol enter $n < a$ hi ha un nombre real $b > 0$ tal que $n^3 + b < a$. Caracteritza els nombres madurs.

42. Per a cada una de les parelles de conjunts que hi ha a continuació, digues si hi ha alguna inclusió entre els dos conjunts, i calcula la intersecció i la unió entre ells.

(a) $X = \{x \in \mathbb{N} : x > 3\}$, $Y = \{y \in \mathbb{N} : y^2 > 4\}$

(b) $X = \{x \in \mathbb{Z} : x^3 - x^2 - 6x = 0\}$, $Y = \{-2, 3\}$

(f) $X = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 1\}$, $Y = \{x \in [0, 4] : \sin x > 0\}$

(g) $X = \{x \in \mathbb{R} : x^3 \leqslant 1\}$, $Y = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 1 < 0\}$

43. Expressa, usant intervals, el següent conjunt de nombres reals:

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x-2}{x+5} \right| \geqslant 2 \right\}$$

Fes-ho de dues maneres: elevant al quadrat els dos termes de la desigualtat, i aplicant la definició de valor absolut. Cal que comprovis que surt el mateix conjunt.

44. Siguin A, B, C conjunts. Demostra que $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

45. Demostra o troba un contraexemple per a la propietat: Si A, B, C són conjunts, aleshores $(A \cup B) \setminus (A \cap B \cap C) = \big[A \setminus (B \cap C)\big] \cup \big[B \setminus (A \cap C)\big]$.

46. Per cada $k \in \mathbb{N}$ defineix un conjunt $E_k \subseteq \mathbb{R}$, de forma que tots els E_k siguin diferents i tals que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = [0, \infty)$ i $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k = \{1\} \cup [2, 3)$.

47. Sigui $X = \big\{1, 4, \{1, 4\}\big\}$. Explicita el conjunt $\mathcal{P}(X)$, és a dir, dóna aquest conjunt per extensió.

48. Demostra o refuta l'afirmació: $\mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \setminus Y)$.

49. Considera els següents conjunts:

$$A = \big\{ z \in \mathbb{Z} : z^2 \leqslant 20 \wedge \exists x \in \mathbb{Z}(z = 2x) \big\}$$
$$B = \big\{ z \in \mathbb{Z} : |z| < 6 \wedge \exists x \in \mathbb{Z}\big(|z| = x^2\big) \big\}$$

Dóna en forma extensional:

(a) $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

(b) $\mathcal{P}\big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big)$.