# Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2012-2013
# Examen Final (Part 1) – Solució

**(1)** Considereu la corona $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2y \le x^2 + y^2 \le 2y + 3\}$.

(a) Representeu-la gràficament.

(b) És $A$ tancat? És $A$ compacte?

(c) Definiu interior i frontera d'un conjunt. Determineu si el punt $(0,0)$ és interior a $A$ o és de la frontera d'$A$.

(d) Proveu que la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

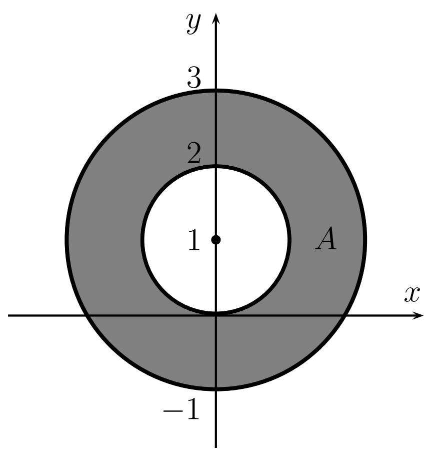
és contínua en $A$. Pren un valor màxim sobre $A$?

**Solució:**

(a) Completant quadrats resulta que $2y \le x^2+y^2 \le 2y+3$ és equivalent a $1 \le x^2+(y-1)^2 \le 4$. Per tant,

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + (y-1)^2 \le 4\} = B'((0,1);2) \setminus B((0,1);1),$$

on $B((a,b);r)$ i $B'((a,b);r)$ denoten les boles oberta i tancada en $\mathbb{R}^2$, respectivament, de centre el punt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ i radi $r > 0$. En conseqüència, el conjunt $A$ és la regió del pla delimitada per les cicumferències centrades en el punt $(0,1)$ i de radis 1 i 2, és a dir, $A$ és la regió ombrejada de la figura següent:




(b) $A$ és un conjunt tancat de $\mathbb{R}^2$ perquè és la intersecció de dos subconjunts tancats de $\mathbb{R}^2$. En efecte, $A = B'((0,1);2) \setminus B((0,1);1) = B'((0,1);2) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B((0,1);1))$, $B'((0,1);2)$ és un tancat de $\mathbb{R}^2$ (perquè és una bola tancada!) i $\mathbb{R}^2 \setminus B((0,1);1)$ també és tancat, ja que $B((0,1);1)$ és obert (perqué és una bola oberta!).

$A$ és compacte perquè és tancat (com acabem de provar) i acotat, ja que $A$ està contingut en la bola $B'((0,1);2)$.

(c) *Definició d'interior i frontera d'un conjunt*
Sigui $A$ un subconjunt de $\mathbb{R}^n$. Un punt de $\mathbb{R}^n$ és *interior* a $A$ si és el centre d'alguna bola oberta continguda en $A$. L'*interior* d'$A$ és el conjunt $A^\circ$ format per tots els punts interiors a $A$.
La *frontera* d'$A$ és el conjunt $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^2 \setminus A)} = \overline{A} \setminus A^\circ$.

$(0,0)$ és un punt de la frontera d'$A$ ja que:

- $(0,0) \in \overline{A}$, perquè $(0,0) \in A$ i $A \subset \overline{A}$.
- $(0,0) \in \overline{\mathbb{R}^2 \setminus A}$, perquè $(0,0)$ és el límit d'una successió de punts de $\mathbb{R}^2 \setminus A$. En efecte,

$$(0,0) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n), \qquad \text{on } (x_n, y_n) = (0, \tfrac{1}{n}).$$

Observeu que $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ ja que $2y_n > y_n^2 = x_n^2 + y_n^2$ (perquè $0 < y_n < 1$ i $x_n = 0$).

(d) La funció $f$ és contínua en cada punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ja que $f$ restringida a l'obert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ és una funció contínua. En efecte, aquesta restricció és contínua perquè és el quocient de dues funcions contínues en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ i la del denominador no s'anul.la en cap punt de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $f(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$, per a tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on $p(x,y) = x^4$ i $q(x,y) = x^2 + y^2$ són funcions contínues en $\mathbb{R}^2$ (ja que són funcions polinòmiques) i $q(x,y) > 0$, per a cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Per provar que $f$ és contínua en l'origen, observeu que

$$(*) \qquad 0 \le f(x,y) = x^2 \, \frac{x^2}{x^2 + y^2} \le x^2, \quad \text{per a cada } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Llavors, com que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$, la desigualtat $(*)$ implica que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, és a dir, $f$ és contínua en l'origen.

En conseqüència, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és una funció contínua, i, com que $A$ és un subconjunt compacte de $\mathbb{R}^2$ (ho hem provat en (b)), deduïm, pel teorema de Weierstrass, que $f$ pren un valor màxim sobre $A$.

**(2)** (a) Per a funcions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiu els conceptes de derivada direccional i de diferencial en un punt. Enuncieu i proveu la relació entre aquests dos conceptes.

(b) Per a $m \in \mathbb{N}$, definim les funcions

$$f_m(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(x^2+y^2)^m}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Per a quins valors de $m$ són diferenciables en $\mathbb{R}^2$?

**Solució:**

(a) *Conceptes de derivada direccional i de diferencial en un punt per a funcions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:*
Siguin $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció i $a$ un punt de $\mathbb{R}^n$.
La *derivada direccional* de $f$ en $a$ segons la direcció del vector unitari $u \in \mathbb{R}^n$ és el límit

$$D_u f(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t},$$

quan aquest límit existeix i és finit.
Diem que $f$ és *diferenciable* en $a$ quan existeix una aplicació lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

(1) $$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Aquesta aplicació lineal $L$ que, si existeix és única, es diu *diferencial* de $f$ en $a$ i es denota per $df_a$ o bé per $Df(a)$.

*Relació entre els dos conceptes:*
Si $f$ és diferenciable en $a$, llavors existeixen les derivades direccionals en $a$ segons qualsevol direcció i $D_u f(a) = Df(a)(u)$, per a cada vector unitari $u \in \mathbb{R}^n$.
*Demostració:*
Si $f$ és diferenciable en $a$, llavors es compleix (1) amb $L = Df(a)$ i per tant el corresponent límit en $a$ segons la recta $x = a + tu$ també val 0, és a dir,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a) - Df(a)(tu)}{|t|} = 0.$$

Però això és equivalent a

$$0 = \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(a+tu) - f(a) - Df(a)(tu)}{|t|} \right| = \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(a+tu) - f(a) - Df(a)(tu)}{t} \right|.$$

Com que $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és lineal obtenim que

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} - Df(a)(u) \right| = 0,$$

i això vol dir que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = Df(a)(u),$$

que és el que voliem provar.

(b) Primer observeu que $f_m$ és diferenciable en cada punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perquè $f_m$ restringida a l'obert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ és el quocient de dues funcions diferenciables en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ i la del denominador no s'anul.la en cap punt de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $f_m(x,y) = \frac{p(x,y)}{q_m(x,y)}$, per a tot

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on $p(x,y) = y^5$ i $q_m(x,y) = (x^2+y^2)^m$ són funcions diferenciables en $\mathbb{R}^2$ (ja que són funcions polinòmiques) i $q_m(x,y) > 0$, per a cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Anem doncs a estudiar la diferenciabilitat de $f_m$ en $(0,0)$. Primer observeu que

$$\frac{\partial f_m}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy} f_m(0,y)\bigg|_{y=0} = 0, \qquad \text{ja que } f_m(0,y) = 0, \text{ per a tot } y \in \mathbb{R}.$$

D'altra banda,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_m(x,0) - f_m(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^{2m+1}} = \lim_{x\to 0} x^{4-2m} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } m > 2, \\ 1, & \text{si } m = 2, \\ 0, & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

Per tant, $f_m$ té derivada parcial respecte la primera variable en l'origen si i només si $m = 1, 2$. I els valors d'aquestes dues derivades parcials són: $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = 0$ i $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = 1$.
Així doncs, deduïm que:

- Per a cada $m > 2$, $f_m$ no és diferenciable en $(0,0)$.
- Per a $m = 1, 2$, $f_m$ és diferenciable en $(0,0)$ si i només si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g_m(x,y) = 0$, on

$$g_m(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f_1(x,y)}{\|(x,y)\|} = \dfrac{x^5}{\|(x,y)\|^3}, & \text{si } m = 1, \\[2ex] \dfrac{f_2(x,y) - x}{\|(x,y)\|} = \dfrac{x^5 - x(x^2+y^2)^2}{\|(x,y)\|^5} = \dfrac{-x(2x^2y^2 + y^4)}{\|(x,y)\|^5}, & \text{si } m = 2. \end{cases}$$

Ara

$$|g_1(x,y)| = \frac{|x|^5}{\|(x,y)\|^3} \le \frac{\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^3} = \|(x,y)\|^2 \quad \text{i} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|^2 = 0.$$

Per tant, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g_1(x,y) = 0$, i en conseqüència $f_1$ és diferenciable en $(0,0)$.

D'altra banda, $f_2$ no és diferenciable en $(0,0)$ ja que, si ho fos, el límit de $g_2$ en $(0,0)$ segons la semirecta $y = x$, $x > 0$, seria igual a 0, però això és fals perquè

$$\lim_{x\to 0^+} g_2(x,x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-3x^5}{2^{5/2}|x|^5} = \frac{-3}{2^{5/2}}.$$

En conclusió, $f_m$ és diferenciable en $\mathbb{R}^2$ si i només si $m = 1$.

# Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2012-2013
# Examen Final (Part 2) – Solució

**(1)** (a) Enuncieu el teorema de la funció implícita.
Proveu que l'equació $y^2e^z + x\sin z + (x-y)^2 - 2y + 1 = 0$ defineix implícitament una funció $z = z(x,y)$ de classe $C^\infty$ en un entorn del punt $p = (1,1,0)$.
(b) Proveu que la funció $z = z(x,y)$ de l'apartat anterior té un punt crític en $(1,1)$ i classifiqueu-lo.

**Solució:**

(a) Teorema de la funció implícita
*Siguin $U \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un conjunt obert i*

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x,y) &\longrightarrow f(x,y) = (f_1(x,y), \ldots, f_m(x,y)) \end{aligned}$$

*una funció de classe $C^k$ ($1 \le k \le \infty$). Si un punt $(x_0,y_0) \in U$ compleix que $f(x_0,y_0) = 0$ i*

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(x_0,y_0) \neq 0,$$

*aleshores existeixen un entorn obert $W \subset U$ del punt $(x_0,y_0)$, un entorn obert $V \subset \mathbb{R}^n$ del punt $x_0$ i una funció $g : V \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^k$ tals que*

$$\{\, (x,y) \in W \;:\; f(x,y) = 0 \,\} = \{\, (x, g(x)) \;:\; x \in V \,\},$$

*és a dir, els zeros de la funció $f$ en $W$ són els punts de la gràfica de $g$, o equivalentment, en un llenguatge més clàssic, les solucions del sistema d'equacions*

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0 \end{cases}$$

*en $W$ són els punts de la forma*

$$(x_1,\ldots,x_n, g_1(x_1,\ldots,x_n), \ldots, g_m(x_1,\ldots,x_n)), \quad \text{amb} \quad (x_1,\ldots,x_n) \in V.$$

*Comentari:* La tesi del teorema de la funció implícita es resumeix dient que l'equació $f(x,y) = 0$ defineix una funció implícita $y = g(x)$ (de classe $C^k$) en un entorn del punt $(x_0,y_0)$.

Comprovem que la funció $f(x,y,z) = y^2e^z + x\sin z + (x-y)^2 - 2y + 1$ compleix les hipòtesis del teorema de la funció implícita en el punt $p = (1,1,0)$.

(i) La funció $f(x,y,z) = y^2e^z + x\sin z + (x-y)^2 - 2y + 1$ és de classe $C^\infty$ en $\mathbb{R}^3$, ja que és suma de productes de funcions polinomiques, exponencials i trigonomètriques que són de classe $C^\infty$ en $\mathbb{R}^3$ .
(ii) $f(1,1,0) = 0$. Només cal evaluar.
(iii) $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,0) = (y^2e^z + x\cos z)_{x=1,y=1,z=0} = 2 \neq 0.$

Per tant existeix una funció $z = z(x, y)$ de classe $C^\infty$ en un entorn $V$ del punt $p = (1, 1)$ que compleix

$$y^2 e^{z(x,y)} + x \sin z(x, y) + (x - y)^2 - 2y + 1 = 0 \tag{2}$$

per a tot $(x, y) \in V$ i $z(1, 1) = 0$.

(b) Per calcular les derivades parcials de $z(x, y)$ en el punt $(1, 1)$ utilitzarem (2). Per simplificar les notacions escriurem $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$, $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$, $z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ i $z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (la igualtat de les derivades creuades es deguda a que la funció $z$ és de classe $C^2$ en $V$) .
Calculant la derivada parcial respecte de $x$ del terme que apareix en (2) tenim:

$$y^2 z_x(x, y) e^{z(x,y)} + \sin z(x, y) + x z_x(x, y) \cos z(x, y) + 2(x - y) = 0. \tag{3}$$

Avaluant aquesta expressió en el punt $(x, y) = (1, 1)$ i utilitzant que $z(1, 1) = 0$, s'obté $2z_x(1, 1) = 0$ i per tant $z_x(1, 1) = 0$.
Calculant la derivada parcial respecte de $y$ del terme que apareix en (2) tenim:

$$2y e^{z(x,y)} + y^2 z_y(x, y) e^{z(x,y)} + x z_y(x, y) \cos z(x, y) - 2(x - y) - 2 = 0, \tag{4}$$

i avaluant en $(1, 1)$ també s'obté $2z_y(1, 1) = 0$ i per tant $z_y(1, 1) = 0$
Així doncs el punt $(1, 1)$ és un punt crític de $z(x, y)$.
Per classificar-lo calcularem la matriu Hessiana de $z$ en el punt $(1, 1)$. Les derivades parcials de l'expressió (3) avaluades en el punt $(1, 1)$ ens donaran els valors de $z_{xx}(1, 1)$ i $z_{xy}(1, 1)$. La derivada parcial respecte de $y$ de l'expressió (4) avaluada en el punt $(1, 1)$ ens donarà el valor de $z_{yy}(1, 1)$.
Els càlculs obtinguts, escrits de forma simplificada, són:

$$\begin{aligned}
&y^2 (z_x)^2 e^z + y^2 z_{xx} e^z + 2z_x \cos z - x(z_x)^2 \sin z + x z_{xx} \cos z + 2 = 0, \quad z_{xx}(1, 1) = -1\\
&2y z_x e^z + y^2 z_x z_y e^z + y^2 z_{xy} e^z + z_y \cos z - x z_x z_y \sin z + x z_{xy} \cos z - 2 = 0, \quad z_{xy}(1, 1) = 1\\
&2e^z + 4y z_y e^z + y^2 (z_y)^2 e^z + y^2 z_{yy} e^z - x(z_y)^2 \sin z + x z_{yy} \cos z + 2 = 0, \quad z_{yy}(1, 1) = -2.
\end{aligned}$$

Per tant la matriu Hessiana de la funció $z$ en el punt $(1, 1)$ i els seus menors principals són:

$$Hz(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \Delta_1 = -1 < 0 \\ \Delta_2 = 1 > 0 \end{matrix}.$$

Així doncs, $Hz(1, 1)$ és definida negativa i per tant $z$ té un màxim local en el punt $(1, 1)$.

**(2)** (a) Calculeu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x+y)+xy-1}{x^2+y^2}.$$

(b) Considerem la funció $f(x,y,z) = 3x^2 - 6y^2 - 2z^3 + 6z$ i el conjunt

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}.$$

Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de $f$ sobre $A$ i calculeu-los.

**Solució:**

(a) Utilitzant $|x+y| \leq |x|+|y| \leq 2\|(x,y)\|$, junt amb els desenvolupament de Taylor $\cos t = 1 - t^2 + o_{t\to 0}(t^2)$ s'obté

$$\cos(x+y) = 1 - \frac{(x+y)^2}{2} + o_{(x,y)\to(0,0)}(|x+y|^2) = 1 - \frac{x^2+2xy+y^2}{2} + o_{(x,y)\to(0,0)}(\|(x,y)\|^2).$$

per tant

$$\frac{\cos(x+y)+xy-1}{x^2+y^2} = \frac{-x^2/2 - y^2/2 + o_{(x,y)\to(0,0)}(\|(x,y)\|^2)}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2} + \frac{o_{(x,y)\to(0,0)}(\|(x,y)\|^2)}{x^2+y^2}.$$

Així doncs

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x+y)+xy-1}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}.$$

(b)
- Justificació de l'existència d'extrems: Donat que $f$ és contínua en $\mathbb{R}^3$, si provem que $A$ és compacte, llavors pel teorema de Weierstrass sabem que $f$ té extrems absoluts sobre $A$.
  Per veure que el conjunt $A$ és compacte demostrarem que és tancat i acotat.
  Que $A$ és tancat es dedueix del fet que si $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ és contínua i $B \subset \mathbb{R}^2$ és tancat llavors $g^{-1}(B)$ és tancat a $\mathbb{R}^3$, aplicat a la funció $g(x,y,z) = (x^2+y^2-4, z)$ i $B = (-\infty, 0] \times [0,3]$).
  Que $A$ és acotat és dedueix del fet que per a tot $(x,y,z) \in A$ es compleix $x^2 + y^2 + z^2 \leq 13$, i per tant $A$ està contingut en la bola tancada de centre l'origen i radi $\sqrt{13}$.
- Càlcul dels extrems:
  El conjunt $A$ és un cilindre circular recte sòlid de base el disc tancat $x^2+y^2 \leq 4$, $z = 0$ i d'alçada 3.
  Els extrems absoluts poden pertànyer a:
  (i) l'interior del cilindre $A^\circ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4, 0 < z < 3\}$. En aquest cas els extrems absoluts també seran extrems locals de $f$ i per tant seran punts crítics de $f$.
  Donat que $\nabla f = (6x, -12y, -6z^2+6)$, els punts crítics de $f$ són $(0,0,\pm 1)$, i l'únic que pertany a $A$ és $(0,0,1)$.
  (ii) la tapa lateral oberta $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4, 0 < z < 3\}$.

En aquest cas, pel mètode dels multiplicadors de Lagrange sabem que s'ha de complir

$$\left.\begin{array}{rcl} 6x-2\lambda x &=& 0\\ -12y-2\lambda y &=& 0\\ -6z^2+6 &=& 0\\ x^2+y^2-4 &=& 0\\ 0<z<3 && \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} 2x(3-\lambda) &=& 0\\ 2y(6+\lambda) &=& 0\\ z^2-1 &=& 0\\ x^2+y^2-4 &=& 0\\ 0<z<3 && \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c} x=0 \quad \text{o} \quad \lambda=3\\ \text{Si} \quad x=0\\ x=0, y=\pm 2, z=1\\ \text{Si} \quad \lambda=3\\ x=\pm 2, y=0, z=1 \end{array}$$

(Les coordenades $(x,y,z)$ de les 8 solucions $(x,y,z,\lambda)$ del sistema anterior excloent la condició $0<z<3$ són $(0,\pm 2,\pm 1)$, $\quad(\pm 2,0,\pm 1)$, de les quals 4 compleixen $0<z<3$, que són $(0,\pm 2,1)$, $\quad(\pm 2,0,1)$).

(iii) la tapa inferior del cilindre $F_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4, z=0\}$.
En aquest cas la funció $f$ restringida a la tapa és $h(x,y)=f(x,y,0)=3x^2-6y^2$. Per tant tenim un problema d'extrems de 2 variables. L'únic punt crític de $h$ en el disc $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<4\}$ és el $(0,0)$, i per tant cal afegir a la lista de punts el punt $(0,0,0)$. Pel mètode dels multiplicadors de Lagrange, els únics punts que cal considerar sobre la circumfèrencia $x^2+y^2=4$, $z=0$ han de complir

$$\left.\begin{array}{rcl} 6x-2\lambda x &=& 0\\ -12y-2\lambda y &=& 0\\ x^2+y^2-4 &=& 0\\ z=0 && \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} 2x(3-\lambda) &=& 0\\ 2y(6+\lambda) &=& 0\\ x^2+y^2-4 &=& 0\\ z=0 && \end{array}\right\}.$$

Aquests punts són $(0,\pm 2,0)$ i $(\pm 2,0,0)$.

(iv) la tapa superior del cilindre $F_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4, z=3\}$.
En aquest cas la funció $f$ restringida a la tapa és $h(x,y)=f(x,y,3)=3x^2-6y^2-36$ i per tant tenim un problema d'extrems de 2 variables semblant al de la tapa inferior. Fent els càlculs s'obté que els punts que cal considerar són $(0,\pm 2,3)$ i $(\pm 2,0,3)$.

Per acabar només ens falta avaluar la funció $f$ en aquests punts i triar els valors més gran i més petit.
$f(0,0,1)=4$, $f(0,\pm 2,1)=-20$, $f(\pm 2,0,1)=16$, $f(0,\pm 2,0)=-24$, $f(\pm 2,0,0)=12$,$f(0,0,0)=0$, $f(0,0,3)=-36$, $f(0,\pm 2,3)=-60$ i $f(\pm 2,0,3)=-24$.
Per tant el valor màxim de $f$ sobre $A$ és 16 i el valor mínim és $-60$.

**Observació:** Els valors extrems de $f$ sobre les circumferències de les tapes es poden fer directament.
Si $x^2+y^2-4=0, z=0$, $h(x,y)=3x^2-6y^2=9x^2-24=H_i(x)$ que per a $-2\le x\le 2$ compleix $-24=H(0)\le H(x)\le 12=H(\pm 2)$.
Si $x^2+y^2-4=0, z=3$, $h(x,y)=3x^2-6y^2-36=9x^2-60=H_s(x)$ que per a $-2\le x\le 2$ compleix $-60=H(0)\le H(x)\le -24=H(\pm 2)$.