Problema 36. Demostreu que les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

són elements conjugats en el grup $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, però que no ho són en $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Recordem els següents conceptes que usarem en la resolució de l'exercici:

- Dos elements $a, b \in G$ s'anomenen conjugats si existeix un tercer element $g \in G$ tal que $a = gbg^{-1}$.
- $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \det(M) \in \mathbb{R}^*\}$.
- $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$.

Solució. Siguin

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerem $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriu invertible de coeficients reals. Per tant,

$det(A) = ad - bc \neq 0$ i $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

B i C són conjugats en $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ si existeix A tal que $ACA^{-1} = B$. Tenim que

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Aleshores,

$$ACA^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} ad + bd - bc & -b^2 \\ d^2 & -bc - bd + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

De la igualtat de matrius obtenim les igualtats següents

$$\begin{cases} ad + bd - bc = ad - bc \\ -b^2 = ad - bc \\ d^2 = 0 \\ -bc - bd + ad = ad - bc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bd = 0 \\ -b^2 = ad - bc \\ d = 0 \\ -bd = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ -b^2 = -bc \\ b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = c \neq 0 \end{cases}$$

Observem que b ha de ser diferent de zero. Si no ho fos, $det(A) = ad - bc = 0$, i A no seria una matriu del grup lineal.

Així doncs, hem trobat que totes les matrius A que satisfan $ACA^{-1} = B$ són de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0.$$

El seu determinant és igual a $-b^2$, on $-b^2 < 0$. Per tant, observem que si B i C són

conjugades per una matriu A de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, amb $b \neq 0$, llavors

- $det(A) = -b^2 \neq 0 \Rightarrow A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.
- $det(A) = -b^2 \neq 1 \Rightarrow A \notin \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Per tant hem vist que B i C no són conjugades en $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Per acabar de veure que sí que ho són en $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, és suficient donar un exemple de matriu A que conjugui.

Considerem $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Comprovem que es compleix $ACA^{-1} = B$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$