Càlcul Diferencial en Diverses Variables **Matemàtiques**

Primer Examen Parcial Curs 2010-11

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT

ESCRIVIU ELS VOSTRES NOM, COGNOMS I GRUP EN CADA FULL

1. a) Definiu el concepte de punt adherent a un conjunt. Calculeu l'adherència del conjunt

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 - 1 < y \leq 0 \}.$$

b) Definiu el concepte de conjunt compacte. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ és la funció definida per

$$f(x, y) = (e^{x-y} \sin(x^2 y), \, \log(1 + y^2 e^{-x})),$$

proveu que $f(\overline{C})$ és compacte.

Justifiqueu detalladament les respostes.

2. Per a cada $\alpha > 0$ considereu la funció $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + x^2 y^4)}{(x^2 + y^2)^\alpha}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ i } x \leq 0, \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \ , \\ \dfrac{|\sin(xy)|^\alpha}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ i } x > 0. \end{cases}$$

Determineu els valors d'$\alpha > 0$ per als quals f_α és contínua en l'origen.

Justifiqueu detalladament la resposta.

3. a) Definiu els conceptes de derivada direccional i de diferencial. Enunucieu i proveu la relació entre aquests dos conceptes.

b) Per a cada enter $n > 0$ considereu la funció $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per

$$f_n(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^n}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(b.1) Calculeu les derivades direccionals de f_n en l'origen (quan existeixin).

(b.2) Determineu els enters $n > 0$ per als quals f_n és diferenciable en l'origen.

Justifiqueu detalladament les respostes.

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT

ESCRIVIU ELS VOSTRES NOM, COGNOMS I GRUP EN CADA FULL