Problema 29. Determineu, llevat d'isomorfisme, tots els grups d'ordre menor o igual que 8:

Solució. En cas que G tingui un sol element, G és el grup trivial:

$$\#G = 1 \Rightarrow G = \{e\}$$

Tot grup G d'ordre primer p és cíclic, i per tant isomorf al grup C_p, així doncs:

$$\#G = 2 \Rightarrow G \simeq C_2$$
$$\#G = 3 \Rightarrow G \simeq C_3$$
$$\#G = 5 \Rightarrow G \simeq C_5$$
$$\#G = 7 \Rightarrow G \simeq C_7$$

$\#G = 4$

1)Hi ha un element d'ordre 4:

$$G \simeq C_4$$

2)Tots els elements llevat del neutre son d'ordre 2:

En aquest cas G és abelià i per tant producte de grups ciclics.

$$G \simeq C_2 \times C_2$$

$\#G = 6$

1)Hi ha un element d'ordre 6:

$$G \simeq C_6$$

2)No hi ha cap element d'ordre 3:

Per hipòtesi han de ser tots els elements d'ordre 2, per tant G és abelià, i G descompon en grups ciclics, que en aquest cas han de ser d'ordre 2, però al no ser $\#G$ una potencia de 2 aquest cas no es pot donar.

3)Hi ha un element d'ordre 3:

Sigui $a \in G$ un element d'ordre 3: $< a > \lhd G$, ja que $[G :< a >] = 2$, i

$G/ < a >= \{\bar{a}, \bar{b}\}$

$G =< a, b >= \{e, a, a^2, b, ba, ba^2\}$

Cas abelià:

$\# < ab >= \# < a > \# < b >= 6$

Així doncs tenim un element d'ordre 6 amb lo que:

$$G \simeq C_6$$

Cas no abelià:

$bab^{-1} \in < a >$ per que a és normal

$bab^{-1} \in \{e, a, a^2\}$

Si $bab^{-1} = e \Rightarrow a = e$ No es pot donar.

Si $bab^{-1} = a \Rightarrow ba = ab$ i G abelia: no es pot donar.

Si $bab^{-1} = a^2 \Rightarrow bab^{-1} = a^{-1}$ i mirant la caracterització del grup Dihedral:

$$G \simeq D_{2,3} \simeq S_3$$

$\#G = 8$

1)Té un element d'ordre 8:

$$G \simeq C_8$$

2)No té cap element d'ordre 4:

En aquest cas G és abelià i per tant producte de grups cíclics.

$$G \simeq C_2 \times C_2 \times C_2$$

3)Té un element d'ordre 4:

Sigui $a \in G$ tal que $\# < a >= 4$

$[G :< a >] = 2 \Rightarrow < a > \lhd G$

$G/ < a >= \{\bar{a}, \bar{b}\} \Rightarrow G =< a, b >$ on $\# < a >= 4$ i $\# < b >\in \{2, 4\}$

Cas abelià: G és producte de grups ciclics:

$$G \simeq C_4 \times C_2$$

Cas no abelià:

$bab^{-1} \in < a >$ per que a és normal

$bab^{-1} \in \{e, a, a^2, a^3\}$

$\# < bab^{-1} >= \# < a >= 4 \Rightarrow bab^{-1} \in \{a, a^3\}$

Cas $bab^{-1} = a$:

$bab^{-1}b = ab \Rightarrow ba = ab$ No es pot donar.

Cas $bab^{-1} = a^3$:

Utilitzant les caracteritzacions del grup dels quaternions i del grup dihedral, classifiquem G:

Si $G =< a, b >$ i $\# < a >= 4$ i $\# < b >= 4$

$$G \simeq H_8$$

Si $G =< a, b >$ i $\# < a >= 4$ i $\# < b >= 2$

$$G \simeq D_{2,4}$$