

**EXERCICIS DE CàLCUL DIFERENCIAL EN DIVERSES VARIABLES**  
**Primer quadrimestre del curs 2012-2013**

Llista 3: Funcions: diferenciabilitat

1. Calculeu les derivades parcials, el gradient i la derivada direccional en la direcció  $v = (3/4, -4/5)$  de la funció  $f(x, y) = x^2 \sin(xy)$  en  $p = (1, \pi)$ .
2. Estudieu l'existència de les derivades direccional i la diferenciabilitat en  $(0, 0)$  de la funció

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

En quins punts de  $\mathbb{R}^2$  és diferenciable la funció  $f$ ?

3. Per a cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ , sigui  $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la funció definida per

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2|y|)^\alpha}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Per a quins valors d' $\alpha$  la funció  $f_\alpha$  és contínua en l'origen?
- (b) Per a quins valors d' $\alpha$  la funció  $f_\alpha$  és diferenciable en l'origen?

4. Per a cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  considereu la funcions  $f_\alpha, g_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definides per

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^\alpha}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases},$$
$$g_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y)}{(x^2 + y^2)^\alpha}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Estudieu la continuïtat i diferenciabilitat en l'origen de les funcions  $f_\alpha$  i  $g_\alpha$ .

5. Siguin  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funció diferenciable i  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable. Calculeu les derivades parcials de la funció  $h$  en termes de les derivades parcials de  $f$  i  $g$  en els següents casos.
  - (a)  $h(x, y) = (f(y, x))^3$
  - (b)  $h(x, y) = f(x + y^2, x - y)$
  - (c)  $h(x, y) = \sin(x^2 f(x, y))$
  - (d)  $h(x, y) = f(x^3 y, xy) g(x^2 - y^2)$
  - (e)  $h(x, y) = f(g(2x + 4y), g(3x - 5y))$
  - (f)  $h(x, y) = (g(f(e^{2x+y}, 1)))^2$
6. Siguin  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  i  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  les funcions definides per  $F(x, y, z) = (x + y^2, x^2 + xz)$  i  $G(x, y) = (xy, x^2 + y)$ . Calculeu les matrius jacobianes de  $F$  en el punt  $(1, 1, -1)$ , de  $G$  en el punt  $(2, 0)$  i de la composició  $G \circ F$  en el punt  $(1, 1, -1)$ .
7. Quina és la màxima pendent en el punt  $(1, 1, 8)$  d'un edifici que té forma de parabolòide el·líptic  $z = 15 - 4x^2 - 3y^2$ ?