

Exercici 37. Calculeu totes les classes de conjugació del grup diedral $D_{2,4}$.

Solució.

• Sigui G un grup i $x, y \in G$ dos elements; Diem que x és conjugat de y si existeix $g \in G$ tal que $gxg^{-1} = y$; I definim la classe de conjugació de y com el conjunt

$$[y] = \{x \in D_{2,4} \mid \exists g \in D_{2,4}, y = gxg^{-1}\}.$$

• El grup diedral $D_{2,4}$ és format pels

$$Id, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2, \sigma\rho^3$$

Doncs, procedim a combinar els elements del diedral entre si amb els seus inversos tal com ens diu la definició:

gxg^{-1}	$Id \sqcap Id$	$\rho \sqcap \rho^3$	$\rho^2 \sqcap \rho^2$	$\rho^3 \sqcap \rho$	$\sigma \sqcap \sigma$	$\sigma\rho \sqcap \rho^3\sigma$	$\sigma\rho^2 \sqcap \sigma\rho^2$	$\sigma\rho^3 \sqcap \sigma\rho$
Id	Id	Id	Id	Id	Id	Id	Id	Id
ρ	ρ	ρ	ρ	ρ	ρ^3	ρ^3	ρ^3	ρ^3
ρ^2	ρ^2	ρ^2	ρ^2	ρ^2	ρ^2	ρ^2	ρ^2	ρ^2
ρ^3	ρ^3	ρ^3	ρ^3	ρ^3	ρ	ρ	ρ	ρ
σ	σ	$\sigma\rho^2$	σ	$\sigma\rho^2$	σ	$\sigma\rho^2$	σ	$\sigma\rho^2$
$\sigma\rho$	$\sigma\rho$	$\sigma\rho^3$	$\sigma\rho$	$\sigma\rho^3$	$\sigma\rho^3$	$\sigma\rho$	$\sigma\rho^3$	$\sigma\rho$
$\sigma\rho^2$	$\sigma\rho^2$	σ	$\sigma\rho^2$	σ	$\sigma\rho^2$	σ	$\sigma\rho^2$	σ
$\sigma\rho^3$	$\sigma\rho^3$	$\sigma\rho$	$\sigma\rho^3$	$\sigma\rho$	$\sigma\rho$	$\sigma\rho^3$	$\sigma\rho$	$\sigma\rho^3$

Per tant, les classes de conjugació del diedral són:

$$[Id] = \{Id\},$$

$$[\rho] = [\rho^3] = \{\rho, \rho^3\},$$

$$[\rho^2] = \{\rho^2\},$$

$$[\sigma] = [\sigma\rho^2] = \{\sigma, \sigma\rho^2\},$$

$$[\sigma\rho] = [\sigma\rho^3] = \{\sigma\rho, \sigma\rho^3\}.$$