CÀLCUL INTEGRAL EN DIVERSES VARIABLES. PRIMAVERA 2013

Llista 2: Funcions de dues variables integrables Lebesgue

1. Sigui $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{(x^2+y^2)} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{(x^2+y^2)}$

a) Comproveu que les integrals iterades en $[0,1]\times[0,1]$ no coïncideixen (per tant la funció no és integrable).

b) Quant valen $\displaystyle\int_{[0,1]^2} f^+$ i $\displaystyle\int_{[0,1]^2} f^-$?

2. Calculeu $\displaystyle\int_A f$ essent:

a) $f(x,y) = |x+y|, \quad A = [-1,1]\times[0,1]$

b) $f(x,y) = xy, \quad A = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1,\ x^2+y^2-2x\le 0,\ y\ge 0\}$

c) $f(x,y) = |\max(x,y)|, \quad A = [-1,1]^2$

3. Estudieu la integrabilitat Lebesgue de les funcions:

a) $f(x,y) = (2x-y)^\alpha,\ \alpha\in\mathbf{R}, \quad$ en $\ A = \{(x,y) \mid 0<x<1,\ 0<y<2x\}$

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{|1-x^2-y^2|^\alpha}, \quad \alpha\in\mathbf{R}$, en $\ \mathbf{R}^2\setminus D(0;1)$

c) $\dfrac{x+y}{1+(x^2+y^2)^\alpha}, \quad \alpha\in\mathbf{R}$, en $\ \{(x,y) \mid x\ge 0,\ y\ge 0\}$

d) $\dfrac{|x|^\alpha y^\beta}{\sin^\alpha(x^2+y^2)}, \quad \alpha,\beta\in\mathbf{R}$, en $\ \{(x,y) \mid y>0,\ x^2+y^2<1,\ x+y>0\}$

4. a) Proveu que les equacions $\ u = x-y, \quad v = e^x+e^y,\ $ defineixen un canvi de variables entre $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}\times(0,+\infty)$.

b) Calculeu $\displaystyle\int_A f$, essent $\ f(x,y) = (x-y)(e^x+e^y)^2,\ $ i A el conjunt mesurable

$A = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 1<x-y<2,\ 8<e^x+e^y-x+y<10\}$

5. Calculeu $\displaystyle\int_A f$ essent:

a) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $\;A = (0,+\infty)^2$. Deduïu el valor de $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}$

b) $f(x,y) = 1$, $\;A = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ y \geq 0,\ y \geq x\}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x(y-3)^2}{(x^2+(y-3)^2)^{1/2}}$ i $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + (y-3)^2 \leq 4,\ y \geq 4,\ x \geq 0\}$

d) $f(x,y) = |x^2 y|$, i $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq y\}$

e) $f(x,y) = 1 + x\sqrt{y}$, $\;A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1,\ x^2 + (y-1)^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$

6. Sigui $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 < y < 10\,x^2,\ \dfrac{y^2}{2} < x < 6\,y^2\}$.

Proveu que les equacions $u = \dfrac{y^2}{x}$, $v = \dfrac{x^2}{y}$, defineixen un canvi de variables en $(0,+\infty)^2$.

Si $f(x,y) = exp(-\dfrac{x^3+y^3}{xy})$, calculeu $\displaystyle\int_A f$.