Respostes dels exercicis

1. Preliminars

Ex. 1

(a) $x \in (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$.

(b) $x \in (-\infty, -2] \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup [2, +\infty)$.

(c) $x \in (\frac{3}{2}, +\infty)$.

Ex. 2

(a) $A = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, $B = (-1, \frac{1}{3})$.

(b) $A \cup B = \varnothing$, $A \cup B = (-\infty, -3] \cup (-1, \frac{1}{3}) \cup [3, +\infty)$,
$A^c = (-3, 3)$, $B^c = (-\infty, -1] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$.

Ex. 3: $x \in (-\infty, -1) \cup [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1) \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

Ex. 4: (a) $x = -1, 3$. (b) $x = -1 \pm \sqrt{5}$. (c) $x = -4, 2$. (d) $x = \pm 5$.

Ex. 5: $x \in [-2\sqrt{2}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}] \cup (0 + \infty)$.

Ex. 6: (a) $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. (b) $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$. (c) $x \in \mathbb{R}$. (d) $x \in (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

Ex. 7

(a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\frac{\pi}{2} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2})$.

(b) $D(f) = \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{6} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}((2k-1)\frac{\pi}{6}, (2k+1)\frac{\pi}{6})$.

(c) $D(f) = (-1, 1)$.

(d) $D(f) = [-2, -1) \cup (1, 2]$.

Ex. 8

(a) $D(f) = [-1, 1]$ i $R(f) = [0, 1]$.

(b) $(f_{/[0,1]})^{-1} : y \in [0, 1] \longmapsto \sqrt{1-y^2} \in \mathbb{R}$ i $(f_{/[-1,0]})^{-1} : y \in [0, 1] \longmapsto -\sqrt{1-y^2} \in \mathbb{R}$.

Ex. 9

(a) $D(f) = [-3, -1) \cup (1, 3]$ i $R(f) = [0, +\infty)$.

(b) $D(f) \cap (0, +\infty) = (1, 3]$ i $(f_{/(1,3]})^{-1} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ està definida per $(f_{/(1,3]})^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y^2+9}{y^2+1}}$.

Ex. 10

(a) $f^{-1}([-1,1]) = [-\sqrt{5},-2) \cup [-\sqrt{3},\sqrt{3}] \cup (2,\sqrt{5}]$ i $f^{-1}([0,1]) = [-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

(b) $D(f\circ f) = \mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{\frac{7}{2}}, \pm\sqrt{\frac{9}{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}\} = (-\infty,-\frac{3}{\sqrt{2}})\cup(-\frac{3}{\sqrt{2}},-\sqrt{\frac{7}{2}})\cup(\sqrt{\frac{7}{2}},\frac{3}{\sqrt{2}})\cup(\frac{3}{\sqrt{2}},+\infty)$ i $f\circ f : D(f\circ f) \to \mathbb{R}$ està definida per $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = \dfrac{(4-x^2)^2}{4(4-x^2)^2-1}$.

(c) f no és injectiva (perquè f és una funció parella); f no és exhaustiva (perquè $0 \notin R(f)$).

Ex. 11

(a) $D(f) = (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$.

(b) $f^{-1}(0) = \{\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\}$ i per tant f no és injectiva.

(c) $D(f) \cap [0,+\infty) = (2,+\infty)$ i $(f_{/(2,+\infty)})^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ està definida per

$$(f_{/(2,+\infty)})^{-1}(y) = \frac{1+\sqrt{9+2e^{2y}}}{2}.$$

Ex. 12: $f^{-1}((-\infty,1]) = [\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}]$.

Ex. 13

(a) $D(f) = [0,\infty)$, $R(f) = [1,\infty)$.

(b) f és injectiva, però $f : D(f) \to \mathbb{R}$ no és exhaustiva i per tant no és bijectiva (encara que $f : D(f) \to R(f)$ és bijectiva).

Ex. 14

(a) $D(f) = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

(b) Si.

(c) $R(f) = (1+\infty)$.

(d) $D(f) \cap (0,+\infty) = (1,+\infty)$ i $(f_{/(1,+\infty)})^{-1} : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ està definida per

$$(f_{/(1,+\infty)})^{-1}(y) = \frac{y^2+1}{y^2-1}.$$

Ex. 15

(a) $D(f) = \mathbb{R}$. $R(f) = (0,+\infty)$ i per tant f no és exhaustiva. f és injectiva i la seva inversa és la funció $f^{-1} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida per $f^{-1}(y) = \dfrac{\log y - 1}{2}$.

(b) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} = (-\infty,-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2},+\infty)$. $R(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} = (-\infty,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},+\infty)$ i per tant f no és exhaustiva. f és injectiva i la seva inversa és la funció $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$ definida per $f^{-1}(y) = \dfrac{3-y}{2y-1}$.

2. Límits i continuïtat

Ex. 1

(a) No existeix.

(b) $\frac{1}{3}$.

(c) $-10\sqrt{5}$.

(d) No existeix.

(e) 0.

(f) 0.

(g) 0.

(h) $+\infty$.

(i) 0.

Ex. 2: $a = 3$ i $b = 2\sqrt{2} - 3$.

Ex. 3

(a) No és possible.

(b) $g(0) = -1$.

(c) $h(0) = 0$.

Ex. 4: $f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Ex. 5

(a) $f(x) = \dfrac{(x^2-4)|x+1|}{x(x-2)}$.

(b) $f(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x(x-1)}$.

Ex. 6

(a) $n \geq 2$.

(b) $n \geq 3$.

Ex. 7: La única discontinuïtat de f està en l'origen ($x = 0$) i és una discontinuïtat evitable.

Ex. 8: Per $n > -1$, $a = 0$. Per $n = -1$, $a = 1$. Per $n < -1$, no hi ha cap a.

3. La derivada i la seva interpretació geomètrica

Ex. 1: Totes les rectes R_λ són paral·leles perquè tenen el mateix pendent: $f'_\lambda(0) = 1$.

Ex. 2

(a) $f'(x) = \dfrac{10x^3 + 7x - 1}{\sqrt{5x^4 + 7x^2 - 2x + 1}}$

(b) $g'(x) = 2x \sin x \tan x + x^2 \cos x \tan x + x^2 \sin x \sec^2 x$

(c) $f'(x) = -3\sin(3x)e^{\cos(3x)}$

(d) $g'(x) = \dfrac{2x(\frac{1}{3} + x^{2/3})}{(1 + x^{2/3})^2}$

(e) $f'(x) = 4((x^3-4)^2+7)^3 2(x^3-4)3x^2 \log(\cos^3(5x)) - 15((x^3-4)^2+7)^4 \tan(5x)$

(f) $g'(x) = 16(4 + (4 + (4 + x^2)^2)^2)(4 + (4 + x^2)^2)(4 + x^2)x$

Ex. 3: (a) $y = -\frac{\pi\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6})$ (b) $y - \frac{2\pi}{3} = (2 + \frac{8\pi}{\sqrt{3}})(x - \frac{\pi}{3})$

Ex. 4: (a) $x = 0$ (b) $y = \frac{6}{\pi}(1 - x)$

Ex. 5

(a) $f'(x) = (\log(\log x) + \frac{1}{\log x} - 2\frac{\log x}{x})\frac{(\log x)^x}{x^{\log x}}$

(b) $f'(x) = (2\cos(2x)\log x + \frac{\sin(2x)}{x})x^{\sin(2x)}$

(c) $f'(x) = (7e^x \log(x^3+4) + \frac{21x^2e^x}{x^3+4})(x^3+4)^{7e^x}$

Ex. 6:

- f és derivable en tot punt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ i $f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0, \\ 2x + b, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$
- f és derivable en $x = 0$ si i només si $a = 0$ i $b = -1$, i en tal cas $f'(0) = -1$.
- f és derivable en $x = 1$ si i només si $b = -2$ i $c = -1$, i en tal cas $f'(1) = 0$.

Ex. 7

(a) $\alpha > 0$.

(b) $\alpha > 1$ i $f'_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha-2}(\alpha x \sin(1/x) - \cos(1/x)), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(c) $\alpha > 2$.

Ex. 8:

- Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f_n és derivable en x i $f_n'(x) = x^{n-1}(n \log|x| + 1)$.
- f_n és derivable en $x = 0$ si i només si $n \geq 2$, i en tal cas $f_n'(0) = 0$.
- Per tant, f_n és derivable si i només si $n \geq 2$, i en tal cas

$$f_n'(x) = \begin{cases} x^{n-1}(n \log|x| + 1), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ex. 9: (a) $\frac{1}{6}$. (b) $-\frac{1}{3}$. (c) 1. (d) 1. (e) 0. (f) 0. (g) $\frac{1}{8}$. (h) 0. (i) $-\infty$. (j) $\sqrt{e}$. (k) $\frac{1}{2}$. (l) 1.

4. Creixement i convexitat. Representació gràfica de funcions

Ex. 2: $\displaystyle\max_{x\in[-2,2]} f(x) = 3$, $\displaystyle\min_{x\in[-2,2]} f(x) = -17$, $\displaystyle\max_{x\in[0,2/3]} f(x) = \frac{31}{27}$ i $\displaystyle\min_{x\in[0,2/3]} f(x) = 1$,

Ex. 4: D'entre tots els rectangles d'igual perímetre, el quadrat és el que té àrea màxima.

Ex. 6:

(a) f és estrictament creixent en $(0, e]$ i és estrictament decreixent en $[e, +\infty)$.

(b) $\pi^e < e^\pi$.

Ex. 7: L'equació $e^x = a + x$ té $\begin{cases} 0 \text{ solucions}, & \text{si } a < 1, \\ 1 \text{ solució}, & \text{si } a = 1, \\ 2 \text{ solucions}, & \text{si } a > 1. \end{cases}$

Ex. 10: (b) L'equació $e^x + \sin x = \pi$ no té cap solució negativa.

Ex. 13:

(a) Els extrems locals de f són $x = 0$ (màxim local) i $x = \frac{4}{7}$ (mínim local);
Els punts d'inflexió de f són $x = \frac{4\pm\sqrt{2}}{7}$.

(b) f només té un extrem local: $x = 0$ (màxim local); f no té cap punt d'inflexió.

Ex. 14:

(a) f és còncava en $(-\infty, \log(2a)]$ i és convexa en $[\log(2a), +\infty)$.

(b) f no té cap zero si $a \leq 0$, i només té un zero si $0 < a \leq \frac{1}{2}$.

5. Fórmula de Taylor

Ex. 1:

(a) El polinomi de Taylor d'ordre 4 en l'origen de la funció $f(x) = e^{2x}$ és

$$p(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4.$$

(b) Els polinomis de Taylor d'ordre 4 en els punts $a = 0$ i $a = 1$ de la funció $f(x) = x^5 + x^3 + x$ són

$$p(x) = x + x^3 \quad \text{i} \quad q(x) = 3 + 9(x-1) + 13(x-1)^2 + 11(x-1)^3 + \frac{5}{2}(x-1)^4,$$

respectivament.

(c) El polinomi de Taylor d'ordre 4 en el punt $a = 1$ de la funció $f(x) = x \log x$ és

$$p(x) = x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12}.$$

(d) Els polinomis de Taylor d'ordre 4 en els punts $a = 0$ i $a = 1$ de la funció $f(x) = 2x^4 - x + 1$ són tots dos iguals a $p(x) = 2x^4 - x + 1$.

Ex. 2:

(a) Per a cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tenim que

$$\cos x = 1 - \frac{\cos c_x}{2}x^2 \quad \text{i} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos d_x}{24}x^4,$$

on c_x i d_x són punts intermedis entre 0 i x.

Ex. 4: (a) $-\dfrac{1}{12}$. (b) 0. (c) 1. (d) $\dfrac{2}{\pi}$.

Ex. 5:

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2} - 1 - x^2)^m}{x^{2n}} = \begin{cases} 0, & \text{si } n < 2m, \\ 2^{-m}, & \text{si } n = 2m, \\ +\infty, & \text{si } n > 2m. \end{cases}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{(\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2})^m}{(1 - \cos x)^n} = \begin{cases} 0, & \text{si } 2n < 3m, \\ 2^n 3^{-m}, & \text{si } 2n = 3m, \\ +\infty, & \text{si } 2n > 3m \text{ i } m \text{ és parell}, \\ \text{no existeix}, & \text{si } 2n > 3m \text{ i } m \text{ és senar}. \end{cases}$$