Problema 43. Proveu que tot grup d'ordre 15 és cíclic.

Solució. Sigui G un grup, $|G| = 15 = 3 \cdot 5$. Estudiarem els subgrups de G per arribar a una conclusió sobre si G és, o no, cíclic. Sabem per Lagrange que si H és un subgrup de G, aleshores l'ordre de H divideix a 15. Per tant, només podem tenir subgrups d'ordre 1, 3, 5 i 15. Els casos 1 i 15 són el neutre i el total respectivament. Anem a veure si existeixen altres subgrups.

Sabem, pels teoremes de Sylow, que existeixen 3-Sylows i 5-Sylows, doncs 3 i 5 són primers i divideixen l'ordre de G. A més, si n_3 i n_5 són el nombre de 3-Sylows i 5-Sylows respectivament, tenim:

$n_3 \mid 5$, per tant n_3 ha de ser 1 o 5. Però també tenim $n_3 \equiv 1 (\text{mod } 3)$, per tant no pot ser 5 i concluïm n_3=1.

Anàlogament, $n_5 \mid 3 \Rightarrow n_5$=1,3 però també s'ha de satisfer $n_5 \equiv 1 (\text{mod } 5)$. Per tant no pot ser 3,i resulta n_5=1.

Hem demostrat, doncs, que G té només un 3-Sylow i un 5-Sylow que, com sabem, són C_3 i C_5 ja que tot grup d'ordre primer p és cíclic d'ordre p.

Ara bé, com 3 i 5 són coprimers, el producte $C_3 \times C_5$ és cíclic. A més, com n_3 i n_5 són 1, hi ha un resultat que ens diu que G és isomorf al producte dels seus p-Sylows. Per tant, $G \cong C_3 \times C_5$ que, com acabem de dir és cíclic.