Tascateoria – 3

Nomicognoms : Martin_Azpillaga

1.

1.1 Sabemos que un espacio vectorial es un conjunto no vacio de vectores y que tiene definidas dos operaciones (+) la suma y ($\cdot$) el producto. Un subespacio del mismo, es cualquier subconjunto no vacio que siga preservando ambas operaciones.

Si llamamos $\mathbb{R}^n$ al espacio y E a uno de sus subconjuntos no vacio, E sera un subespacio de $\mathbb{R}^n$ si y solo si:

$$(+) \quad \forall u, v \in E, \quad u + v \in E$$
$$(\cdot) \quad \forall u \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda u \in E$$

1.2 Se llama generadores al subconjunto de vectores del subespacio con cuyas combinaciones se puede expresar cualquier vector del subespacio.

LLamamos E al subespacio y G al subconjunto de vectores elegido. G sera generador de E si y solo si:

$$\forall u \in E \quad u \in < G >$$

En estos casos ya que todo el subespacio es combinacion de G se utiliza la siguiente notacion, que visualiza mejor que E esta generado por G:

$$E =< G >$$

Si ademas el subconjunto esta formado por vectores linealmente independientes entre si, este subconjunto sera base del subespacio. Es decir, una base de un subespacio es un subconjunto de vectores linealmente independientes con cuyas combinaciones se genera todo el subespacio.

1.3 Demostremos ahora que cualquier subespacio excepto $\vec{0}$ tiene una base:
Sea E un subespacio de R^n y $v_1, ...v_k$ vectores del subespacio E:

$$v_1 \neq \vec{0} \quad \begin{array}{r} i) \ < v_1 > = E \\ ii) \ < v_1 > \subset E \end{array}$$

En el caso i) habremos acabado y en el caso ii) tendremos que continuar:

$$v_2 \notin < v_1 > \quad \begin{array}{r} i) \ < v_1, v_2 > = E \\ ii) \ < v_1, v_2 > \subset E \end{array}$$

Tal como antes, en el caso i) habriamos acabado y en el caso ii) repetiriamos el proceso hasta encontrarnos con un caso i).

La propiedad: $\mathbb{R}^n$ tiene como maximo n vectores linealmente independientes nos asegura que el proceso se acabara en algun momento. Ya que el mayor subespacio de R^n es el mismo, el cual tendria la base de n vectores.

c.v.d.

1.4 Veamos que toda base de un subespacio concreto tiene el mismo numero de vectores. Sean $< u_1, ...u_k >$ y $< v_1, ..., v_l >$ bases del subespacio E. Entonces:

$$< u_1, ..., u_k >= E =< v_1, ..., v_l > \rightarrow < u_1, ..., u_k >=< v_1, ..., v_l >$$

Como ambos pueden expresar cualquier vector del mismo subespacio podremos expresar los vectores v como combinacion de vectores u:

$$v_j = \sum_{i=1}^{k} a_j^i u_i$$

Aunque ampliemos el conjunto $< u_1, ...u_k >$ hasta que sea una base de $\mathbb{R}^n$ esto no modificara las coordenadas que tengan los vectores v en la nueva base, ya que son suficientes los vectores $< u_1, ...u_k >$ para expresarlos.

$$\{u_1, ...u_k, w_{k+1}, ..., w_n\}_B de \mathbb{R}^n$$

$$v_j = \sum_{i=1}^{k} a_j^i u_i + \sum_{i=k+1}^{n} 0 w_i$$

Por tanto, l no puede ser mayor que k, ya que si no $< v_1, ..., v_l >$ abarcaria un espacio mayor que $< u_1, ..., u_k >$ y eso contradiria la hipotesis. Analogamente para k.

$$l <= k \wedge k <= l \rightarrow k = l$$

$$c.v.d$$

Justamente, a esta cantidad se le llama la dimension del subespacio el cual se denomina con $dim(subespacio)$ y hace referencia a la cantidad de vectores que forman su base.

$$E =< u_1, ..., u_k > \rightarrow \ dim(E) = k$$

2.

$$\Rightarrow$$

Sea E un subespacio de R^n y el conjunto $< u_1, ...u_k >$ una base del mismo. Esto impone que cualquier vector restante de E es linealmente dependiente de la base.

$$E =< u_1, ...u_k >$$

$$v \in E \leftrightarrow v \in < u_1, ...u_k >$$

Por tanto el rango de la matriz formada por las columnas de la base mas cualquiera que le anadamos no aumenta.

$$rg(u_1|...|u_k) = rg(u_1|...|u_k|v)$$

Lo que resulta que todos los determinantes de mayor orden que k tendran que valer 0. Imponiende esto, nos surgiran condiciones que tendra que cumplir v, un vector arbitrario, para que pertenezca a E.

A estas condiciones se les llama ecuaciones implicitas y el conjunto de las mismas siempre forma un sistema homogeneo.

Todo subespacio impondra sus condiciones desde ninguno (el subespacio es el mismo R^n) hasta n (Todas las coordenadas han de ser 0. El subespacio es $\{\vec{0}\}$).

$$c.v.d.$$

$$\Leftarrow$$

En un espacio vectorial podemos imponer condiciones a las coordenadas de cada vector usando ecuaciones implicitas. Juntando varias de las mismas lograremos un sistema de ecuaciones lineales homogenea.

Sea R^n el espacio y $x^1, x^2, ..., x^n$ las coordenadas de un vector arbritrario, que logicamente no pueden superar en cantidad a n. Un sistema de ecuaciones implicitas seria:

$$\begin{array}{cc} a_1^1x^1 + ... + a_1^nx^n & = 0 \\ a_2^1x^1 + ... + a_2^nx^n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_k^1x^1 + ... + a_k^nx^n & = 0 \end{array}$$

Veamos que efectivamente las soluciones del sistema homogeneo siempre forman un subespacio.

LLamaremos E al subespacio:

i) No es un subconjunto vacio, ya que el vector 0 siempre es solucion de un sistema homogeneo

$$E \neq \emptyset \quad \vec{0} \in E$$

ii) (+) Sean s y r soluciones del sistema. Si el sistema es SCD ambos seran cero y por tanto s+r pertenecera al subespacio. Si es SCI s+r siempre se podra expresar a partir de la solucion general del sistema.

$$s, r \in E \rightarrow \begin{array}{c} i)E = \{\vec{0}\} \rightarrow s, r = \vec{0} \quad s + r = \vec{0} \quad s + r \in E \\ ii)\{\vec{0}\} \subset E \rightarrow s + r \in E \end{array}$$

Por tanto la suma se conserva.

iii) $(\cdot)$ Sabemos que el producto de un escalar por una solucion del sistema sigue siendo solucion del mismo.

$$s \in E \rightarrow \lambda s \in E$$

El producto se conserva

$$E \subset \mathbb{R}^n$$

$$c.v.d.$$