Problema 1.a)

Llamamos (a_i^j), (b_i^j) y (c_i^j) a los elementos genericos de A, B y A+B respectivamente.

La traza de una matriz es la suma de los elementos de su diagonal, es decir:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n'} a_i^i \quad tr(B) = \sum_{i=1}^{n''} b_i^i$$

$$tr(A) + tr(B) = \sum_{i=1}^{n'} a_i^i + \sum_{i=1}^{n''} b_i^i$$

donde n' y n" corresponden al orden de cada matriz. El enunciado nos da la informacion de que ambas son cuadradas y tienen orden n asi que podemos considerar que $n' = n'' = n$ y asi unirlos en un unico sumatorio.

$$tr(A) + tr(B) = \sum_{i=1}^{n} (a_i^i + b_i^i).$$

Por otro lado la traza de A+B es:

$$tr(A + B) = \sum_{i=1}^{n} c_i^i$$

$$c_i^i = a_i^i + b_i^i$$

$$tr(A + B) = \sum_{i=1}^{n} (a_i^i + b_i^i)$$

tanto el orden(n) como los sumandos coinciden en ambos casos por lo que $tr(A)+tr(B) = tr(A + B)$ c.v.d

Problema 1.b)

Esta proposicion es falsa

Tomemos por ejemplo las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \ y, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$tr(A)tr(B) = 2 * 2 = 4$$

$$AB = \begin{pmatrix} 18 & 1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$tr(AB) = 21$$

$$tr(A)tr(B) \neq tr(AB)$$

Queda refutado.

Problema 2.

El teorema indica que para cualquier sistema, se puede encontrar el tipo de sistema que es (SCD,SCI,SI) fijandose en los rangos de la matriz asociada, la matriz ampliada y el numero de incognitas. Si llamamos A a la matriz asociada, A' a la matriz ampliada, y n al numero de incognitas el teorema dice que:

$$Si, rg(A) = rg(A') = n \to SCD$$
$$Si, rg(A) = rg(A') < n \to SCI$$
$$Si, rg(A) < rg(A') \to SI$$

Este enunciado se cumple tanto para la matriz original como para todas sus equivalentes, por tanto antes de todo usaremos el teorema de Gauss-Jordan para que siempre tengamos una matriz escalonada reducida.

En el caso general toda matriz se podra expresar de esta forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & i_1^1 & \dots & i_n^1 \\ 0 & \ddots & \dots & 0 & i_1^2 & \dots & i_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i_1^r & \dots & i_n^r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuacion Ax = b quedara asi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & i_1^1 & \dots & i_n^1 \\ 0 & \ddots & \dots & 0 & i_1^2 & \dots & i_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i_1^r & \dots & i_n^r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ (x_{r+1}, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \\ (1, 0) \end{pmatrix}$$

El rango de A por definicion es la cantidad de pivotes que tiene, en este caso tiene r pivotes por tanto rg(A) = r En cambio, en la matriz ampliada al añadirle la columna b a A, nos queda que el rango de la matriz ampliada A' puede ser:

El mismo que A si el ultimo elemento de b es 0. rg(B) = r

Uno mas que A si el ultimo elemento de b es 1. rg(B) = r+1

En el primer caso el sistema siempre tendra solucion, pero en cambio en el segundo, siempre nos quedara una mentira en la ultima ecuacion, (0=1), y el sistema no tendra solucion: Si rg(A) $\neq$ rg(A') $\to$ SI. c.v.d

Ya hemos demostrado que el teorema se cumple en el caso de incompatibildad ahora provemos con los compatibles. Suposemos el caso donde rg(A) $<$ numero de incognitas:

Esto implica que habra menos filas diferentes de 0 en A que en x. Dicho de otro modo, hay mas incognitas que ecuaciones diferentes de 0. Como la cantidad de filas de la Matriz A corresponde a la cantidad de ecuaciones y las columnas corresponden a la cantidad de incognitas, A tendra más columnas que filas(las ecuaciones cero se pueden eliminar) y por tanto al aplicar Gauss nos saldran obligatoriamente las columnas i_x^x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & i_1^1 & \dots & i_n^1 \\ 0 & \ddots & \dots & 0 & i_1^2 & \dots & i_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i_1^r & \dots & i_n^r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto si intentamos solucionar el sistema en este punto, veremos que:

$$x_1 = b_1 - i_1^1 - \ldots - i_n^1$$

$$x_2 = b_2 - i_1^2 - \ldots - i_n^2$$

$$x_m = b_m - i_1^m - \ldots - i_n^m$$

donde la cantidad de i's indicara la cantidad de incognitas más que ecuaciones que hay.

Por lo tanto el valor de las incognitas existe, pero depende de unas variables arbitrarias, por lo que hay infinitas soluciones : En el caso de rg(A)=rg(A') $<$ numero de inconitas $\rightarrow$ SCI c.v.d

Por ultimo tomamos el caso en el que rg(A) $=$ numero de incognitas. En este caso claramente, las filas y las columnas de A coinciden, por lo que al aplicar Gauss nos quedara una matriz totalmente escalonada reducida y sin columnas i_x^x

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$$

y las soluciones seran:

$$x_1 = b_1$$

$$x_2 = b_2$$

$$x_r = b_r$$

Cada incognita tiene una unica solucion determinada: si rg(A)=rg(A')=numero de incognitas $\rightarrow$ SCD c.v.d