2 Per a cada $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$, sigui $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció definida per

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+b}{\sqrt{x^6+2x^4+4}-\sqrt{x^6+x^4+1}}, & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{\sin(x^a)}{x^2}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(a) Determineu els valors d'$a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$ per als quals $f_{a,b}$ és contínua en $x = 0$.

(b) Calculeu $\lim_{x\to-\infty} f_{a,b}(x)$ i $\lim_{x\to+\infty} f_{a,b}(x)$.

Justifiqueu detalladament les respostes.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f_{a,b}(x) = f_{a,b}(0) = b$.

Per altra banda, com $a > 0$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^a)}{x^a} = 1$. Per tant,

$$\lim_{x\to 0^+} f_{a,b}(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^a)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} x^{a-2} = \begin{cases} 0, & \text{si } a > 2, \\ 1, & \text{si } a = 2, \\ +\infty, & \text{si } a < 2. \end{cases}$$

Consequentment, $f_{a,b}$ és contínua en $x = 0$ si i només si, $a > 2$ i $b = 0$, o bé $a = 2$ i $b = 1$.

(b) Donat que $|\sin x| \leq 1$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, tenim

$$0 \leq |f_{a,b}(x)| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Com que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, el lema del sandvitx i l'acotació anterior, ens prova que també $\lim_{x\to+\infty} f_{a,b}(x) = 0$, per a tot $a > 0$. Finalment, racionalitzant,

$$\lim_{x\to-\infty} f_{a,b}(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+b}{\sqrt{x^6+2x^4+4}-\sqrt{x^6+x^4+1}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+b)(\sqrt{x^6+2x^4+4}+\sqrt{x^6+x^4+1})}{x^4+3} =$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+b)|x|^3(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^6}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}})}{x^4+3}$$
$$= -2.$$