MATRIUS I VECTORS
Examen parcial
5 de novembre de 2010

Exercici 1. **(i)** Trobeu a per tal que el rang de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ sigui 3.

(ii) Calculeu matrius invertibles P, Q tals que $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pel valor de a que hagueu trobar a (i).

Resolució. (i) Tenim que $\det(A) = -a$ i que $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Per tant, $\mathrm{rg}(A) = 3 \Leftrightarrow a = 0$.

Trobarem primer la forma escalonada reduïda per files. Els canvis que fem són, per aquest ordre: $F_4 \rightsquigarrow F_4 + F_1$; $F_1 \rightsquigarrow F_1 - F_3$; $F_3 \rightsquigarrow F_3 - 2F_1$; $F_4 \rightsquigarrow F_4 - F_2$; $F_1 \rightsquigarrow F_1 + F_3$; $F_2 \rightsquigarrow F_2 + 2F_3$; $F_3 \rightsquigarrow -F_3$., on F_j indica la fila j. Obtenim així la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trobar el producte de les matrius elementals de cada un d'aquests canvis els podem anar aplicant a la matriu identitat, de forma anàloga a com es fa per trobar la matriu inversa per Gauss:

$$(A \mid I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

I tenim

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{amb} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fem ara un canvi per columnes: $C_4 \rightsquigarrow C_4 - 4C_1 - 12C_2 + 7C_3$. Això equival a multiplicar per la dreta amb la matriu obtinguda fent aquests canvis a la identitat. Per tant,

$$PAQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observació. Les matrius invertible P i Q que compleixen l'enunciat no són úniques.

Exercici 2. Sigui $A_n = (a_i^j) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida per $(a_i^j) = \begin{cases} -i & i = j-1 \\ j & i = j+1 \\ 0 & \text{altres casos} \end{cases}$

(i) Escriviu A_n en forma matricial i demostreu que és antisimètrica.

(ii) Demostreu que $\det(A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ senar} \\ \prod_{p=1}^{n/2}(2p-1)^2 & \text{si } n \text{ parell.} \end{cases}$

(iii) Discutiu el rang de A_n segons el valor de n.

(iv) Calculeu les matrius A_4^{-1} i A_{125}^{-1} quan sigui possible.

Resolució. (i)

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2-n & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-n & 0 \end{pmatrix}$$

Aquesta forma matricial mostra ja que A és antisimètrica. Un raonament més formal el podem fer de la següent manera: si $i-j \neq \pm 1$, tenim $a_i^j = 0 = -a_j^i$;

si $i-j=1,\ a_i^j = -1, a_j^i = 1 \Rightarrow a_i^j = -a_j^i$, si $i-j=-1,\ a_i^j = 1, a_j^i = -1 \Rightarrow a_i^j = -a_j^i$

(ii) Hem vist anteriorment que les matrius antisimètriques d'ordre senar tenen determinant 0. En general, desenvolupant pels termes de la última columna i després de la última fila:

$$\det(A_n) = (-1)^{n-1}(-1)^{n-1}(n-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)^2 \det(A_{n-2})$$

Si $n = 2k+1$, tenim

$$\det(A_n) = (2k)^2(2k-2)^2(2k-4)^2 \dots (n-2(k-1))^2 \det(A_1) = 0$$

ja que $A_1 = (0)$. Si $n = 2k$, tenim

$$\det(A_n) = (2k-1)^2(2k-3)^2(2k-5)^2 \dots 3^2 \det(A_2) = \prod_{p=1}^{k}(2p-1)^2$$

ja que $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 = 1^2$.

(iii)
Si n és parell, $\det(A_n) \neq 0$ i, per tant, el seu rang és n.
Si n és senar, el menor format per les $n-1$ primeres columnes i $n-1$ primeres files és A_{n-1} i

$$\det(A_n) = 0, \ \det(A_{n-1}) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(A_n) = n-1$$

(iv)
A_{125} té determinant nul i, per tant, no té inversa.
Per trobar la inversa de A_4 podem fer transformacions de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$