Problema 30. Sigui G un grup i considerem l'aplicació $f : G \to G \times G$ definida per $f(x) := (x, x)$, per a $x \in G$. Demostreu que f és un morfisme injectiu i que $f(G)$ és un subgrup normal de $G \times G$ si, i només si, G és abelià.

Solució. És clar que f és un morfisme:

$$\forall (a, b) \in G \times G, f(ab) = (ab, ab) = (a, a)(b, b) = f(a)f(b).$$

Veiem que f és injectiva. En efecte, sigui $(x, y) \in G \times G$; $f(x) = f(y) \Leftrightarrow (x, x) = (y, y) \Leftrightarrow x = y$.

Notem que $f(G) := \{(x, x)|x \in G\}$ és un subgrup de $G \times G$. En efecte:

(i) L'element neutre és (e, e), essent e l'element neutre de G.

(ii) Donat $(x, x) \in f(G)$, l'invers és $(x, x)^{-1} = (x^{-1}, x^{-1}) \in f(G)$.

(iii) Donats (x, x) i (y, y) de $f(G)$, $(x, x)(y, y) = (xy, xy) \in f(G)$, ja que $xy \in G$.

Resta demostrar que: $f(G) \triangleleft G \times G \Leftrightarrow G$ abelià.

Veiem-ho:

$\Rightarrow$)

$f(G) \triangleleft G \times G \Leftrightarrow \forall (a, b) \in G \times G$, $\forall (k, k) \in f(G)$, $(a, b)(k, k)(a, b)^{-1} = (aka^{-1}, bkb^{-1}) \in f(G)$.

L'element (aka^{-1}, bkb^{-1}) serà de $f(G)$ si, i només si $aka^{-1} = bkb^{-1}$. Així doncs, aquesta última igualtat es compleix per a qualssevol elements a, b, k de G. En particular, per a a, b dos elements de G qualssevol i $k = a$, es compleix que $aaa^{-1} = bab^{-1}$. En operar, obtenim que $ab = ba$ i G és abelià.

$\Leftarrow$)

G és abelià, per tant $\forall (a, b) \in G \times G$, $ab = ba$.

∀a,b,k $\in G$ $(a, b)(k, k)(a, b)^{-1} = (aka^{-1}, bkb^{-1}) = (k, k)$; o sigui $\forall (a, b) \in G \times G$, $(a, b)f(G)(a, b)^{-1} \subseteq f(G)$.