3. Proyectividades

3.1 Siguin en $\mathbb{P}^3$ tres rectes r , s i t no coplanàries dos a dos i l_1, l_2, l_3, l_4 quatre rectes diferents tallant a r, s i t. Siguin P_i, Q_i, R_i les interseccions de l_i amb r, s i t respectivament, $i = 1, 2, 3, 4$. Demostreu que:

$$(P_1, P_2, P_3, P_4) = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = (R_1, R_2, R_3, R_4)$$

3.2 Es consideren, en un espai projectiu $\mathbb{P}^3$ de dimensió 3, dues rectes disjuntes r i s i rectes ℓ_i , $i = 1 \ldots, 4$, tals que

$$\ell_1 \cap r,\ \ \ell_2 \cap r,\ \ \ell_3 \cap r,\ \ \ell_4 \cap r$$

i

$$\ell_1 \cap s,\ \ \ell_2 \cap s,\ \ \ell_3 \cap s,\ \ \ell_4 \cap s$$

són quaternes de punts diferents amb igual raó doble. Es demana demostrar que tota recta que talla a ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, talla també a ℓ_4.

3.3 En un pla projectiu es consideren dos punts diferents O i O', i rectes r, s, t per O i r', s', t' per O', diferents dues a dues i diferents de OO'. Demostreu que els punts $r \cap r'$, $s \cap s'$ i $t \cap t'$ estan alineats si i només si

$$(r, s, t, OO') = (r', s', t', OO').$$

3.4 Considerem en $\mathbb{P}^2$ un triangle ABC i una recta l que no passa per cap dels punts A, B, C. Anomenem A',B',C' els punts en què l talla els costats oposats dels vèrtexs A,B,C, respectivament. Sigui O un punt de l, diferent de A',B',C'. Proveu: $(l, OA, OB, OC) = (O, A', B', C')$.

3.5 Sea L una recta en un plano proyectivo y $A, B, C \in L$ tres puntos distintos de la misma. Sean por otra parte P, Q, R tres puntos distintos de dicho plano, no pertenecientes a L. Demostrar que se tiene la igualdad de razones dobles

$$(PA, PB, PC, PR) = (QA, QB, QC, QR)$$

si y sólo si los puntos P, Q, R están alineados.

3.6 **Homografies de $\mathbb{P}^1$.**

Sigui $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ una homografia. Considerant a $\mathbb{P}^1$ una referència, la matriu de φ serà de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ amb $ad - bc \neq 0$, és a dir, si $P = (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$, llavors $\varphi(P) = (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1)$.

(a) Si la coordenada absoluta de P és $x \neq \infty$, demostreu que la coordenada absoluta de $\varphi(P)$ és $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ (amb les regles usuals de càlcul amb ∞). Demostreu que no es pot donar que $ax + b = 0$ i $cx + d = 0$ alhora (és a dir, numerador i denominador no es poden anul.lar al mateix temps). Aquesta s'anomena l'equació de φ en coordenades absolutes.

(b) Busqueu la imatge del punt que té com a coordenada absoluta ∞.

(c) Si x és la coordenada absoluta de P i x' la de $\varphi(P)$, escrivim l'equació de φ amb coordenada absoluta de la forma:

$$Axx' + B_1x + B_2x' + C = 0$$

on $A = c, B_1 = -a, B_2 = d, C = -b$ i tenim $AC - B_1B_2 \neq 0$.
Demostreu que l'equació dels punts fixos de φ és $Ax^2 + (B_1 + B_2)x + C = 0$ i que ∞ és fix si i només si $A = 0$.

(d) Trobeu condicions sobre A, B, C, per a que φ tingui:
- dos punts fixos (homografia hiperbòlica)
- un sol punt fix (homografia parabòlica)
- cap punt fix (homografia el.líptica)

(e) Una homografia $\phi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ és una involució si i només si $\phi^2 = I$ i $\phi \neq I$. Proveu que φ és una involució si i només si $B_1 = B_2$. Deduïu que φ és una involució si i només si la matriu M de φ té traça 0.

3mm

3.7 Siguin r, s dues rectes diferents de $\mathbb{P}^2$, $O = r \cap s$ i $\varphi : r \longrightarrow s$ una projectivitat.

(a) Proveu: φ és perspectiva $\Leftrightarrow \varphi(O) = O$.

(b) Proveu que els punts de la forma $P\varphi(Q) \cap Q\varphi(P)$ determinen una recta al variar P, Q sobre r. Aquesta recta s'anomena *eix de la projectivitat*.

(c) Deduïu de l'apartat ii) un mètode per construir gràficament la imatge $\varphi(T)$ d'un punt $T \in r$, coneguts l'eix de la projectivitat φ i la imatge d'un punt fixat $P \in r$, $P \neq O$.

(d) Doneu una caracterització dels punts d'intersecció de r i s amb l'eix de la projectivitat. Doneu una caracterització de la perspectiva en termes de l'eix de la projectivitat.

3.8 Sigui $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$, $\varphi \neq id$, una projectivitat que té tres punts fixos no alineats A, B, C.

(a) Escolliu una referència i escriviu la matriu de φ.

(b) Donat $Q \in \mathbb{P}^2$ tal que no està sobre el triangle ABC, proveu que les raons dobles següents:

$$(Q, \varphi(Q), Q\varphi(Q) \cap AB, Q\varphi(Q) \cap AC)$$
$$(Q, \varphi(Q), Q\varphi(Q) \cap AB, Q\varphi(Q) \cap BC)$$
$$(Q, \varphi(Q), Q\varphi(Q) \cap AC, Q\varphi(Q) \cap BC)$$

no depenen del punt Q escollit.

3.9 Donats dos triangles ABC i $A'B'C'$ i un punt O de manera que AA', BB', CC' són rectes diferents i concurrents en O, proveu:

(a) Existeix una i només una projectivitat que transforma A, B, C en A', B', C' respectivament i deixa O fix.

(b) Aquesta projectivitat té una recta de punts fixos.

(c) Feu servir els apartats anteriors per provar el teorema de Desargues.

3.10 **Homologia general de** $\mathbb{P}^2$. Sigui $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ una homografia que té un punt fix P i una recta r de punts fixos tal que $P \notin r$.

(a) Proveu que el feix de rectes per P és un feix de rectes fixes.

(b) Escolliu una referència en $\mathbb{P}^2$ i escriviu la matriu de φ.

(c) Donat $Q \in \mathbb{P}^2$, $Q \notin r$ i $Q \neq P$ sigui $\bar{Q} = PQ \cap r$. Proveu que $(P, \bar{Q}, Q, \varphi(Q))$ no depèn del punt Q escollit. Si anomenem λ a aquesta raó doble, diem que φ és una homologia general de centre P, eix r i raó λ.

(d) Sigui $f : E \longrightarrow E$ un representant qualsevol de φ. Proveu que f té dos valors propis, un de multiplicitat 1 i un de multiplicitat 2 i que el seu quocient és λ.

3.11 **Homologia especial de** $\mathbb{P}^2$. Sigui $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ una homografia que té una recta r de punts fixos i cap més punt fix.

(a) Proveu que existeix un feix de rectes fixes per un punt $P \in r$.
φ s'anomena homologia especial d'eix r i centre P.

(b) Escolliu una referència a $\mathbb{P}^2$ i escriviu la matriu de φ.

3.12 Es consideren en un espai projectiu $\mathbb{P}$ de dimensió tres, tres rectes L_1, L_2, L_3 disjuntes dues a dues.

i) Demostreu que existeix una referència projectiva en la qual les rectes tenen equacions:

$$L_1 = \{Y = Z = 0\}$$
$$L_2 = \{X = T = 0\}$$
$$L_3 = \{X = Y, Z = T\}$$

ii) Si R_1, R_2, R_3 són tres rectes disjuntes dues a dues de $\mathbb{P}$, demostreu que existeix una projectivitat $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ tal que $f(L_i) = R_i$, $i = 1, 2, 3$.

3.13 **Biaxial de** $\mathbb{P}^3$. Sigui $\varphi : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$, $\varphi \neq id$, una homografia que té dues rectes de punts fixos r i s, que es creuen.

(a) Proveu que hi ha dos feixos de plans fixes i determineu-ne les varietats base.

(b) Escolliu una referència i determineu la matriu de φ.

(c) Sigui $Q \in \mathbb{P}^3$, $Q \notin r$ i $Q \notin s$. Proveu que la recta $Q\varphi(Q)$ talla a r i a s, i que la raó doble $(Q, \varphi(Q), Q\varphi(Q) \cap r, Q\varphi(Q) \cap s)$ no depèn del punt Q. Diem que φ és una homografia biaxial.

3.14 Siguin r, s i t tres rectes de $\mathbb{P}^3$ que es creuen dues a dues. Estudieu les homografies de $\mathbb{P}^3$ que deixen fixes cadascuna de les tres rectes i tals que la seva restricció a t és una homografia hiperbòlica.

3.15 Es consideren a $\mathbb{P}^2$ dues rectes diferents r i s i la perspectiva $g : r \longrightarrow s$ de centre $O \notin r \cup s$. Estudieu les homografies de $\mathbb{P}^2$ que deixen O fix i tals que la seva restricció a r és g.

3.16 Siguin A , A' , B , B' els vèrtexos d'un quadrivèrtex a $\mathbb{P}^2$. Demostreu que existeix una i només una homologia especial f de $\mathbb{P}^2$ que transforma A en A' i B en B'. Trobeu el centre i l'eix de f.

3.17 Donat en el pla $\mathbb{P}^2$ un triangle ABC, determineu les homografies φ de $\mathbb{P}^2$ que deixen invariants AB i AC i tals que $\varphi|AB$ és la involució de punts fixos A i B i $\varphi|AC$ és la involució de punts fixos A i C. Determineu els punts i rectes fixes per una tal φ.

3.18 Siguin r, s dues rectes que es creuen d'un espai projectiu $\mathbb{P}_3$, de dimensió tres sobre $\mathbb{R}$, i f una projectivitat de $\mathbb{P}_3$ que deixa r i s invariants de manera que $f_{|r}$ i $f_{|s}$ són homografies parabòliques. Determineu els punts fixos i els plans invariants de f.

3.19 Sigui $\varphi : \pi_1 \longrightarrow \pi_2$ una projectivitat entre plans diferents d'un espai projectiu de dimensió 3. Demostreu que són equivalents les condicions:

(a) Existeix un punt $O \notin \pi_1 \cup \pi_2$ tal que per a tot $P \in \pi_1$ els punts $O, P, \varphi(P)$ estan alineats.

(b) Els punts de $\pi_1 \cap \pi_2$ són fixos per φ.

3.20 Sean L y T variedades lineales suplementarias de $\mathbb{P}^n$ ($L \vee T = \mathbb{P}^n$, $L \cap T = \emptyset$). Sea φ una homografía no idéntica de $\mathbb{P}^n$ que deja fijos todos los puntos de L y de T. Probar que si $p \notin L \cup T$, entonces el punto p no es fijo para φ y la recta $p \vee \varphi(p)$ corta a L y a T.

3.21 En un plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ se consideran un triángulo T, con vertices p_0, p_1, p_2, y un punto p no situado en ninguno de sus lados. Si para cada $i = 0, 1, 2$, se denota por q_i el punto intersección de la recta pp_i con el lado de T opuesto a p_i, sea h la proyectividad que deja fijo p y transforma p_i en q_i, $i = 0, 1, 2$. Demostrar que para cualquier q de $\mathbb{P}_2$, los puntos q, $h(q)$ y $h^3(q)$ están alineados.

3.22 En un plano proyectivo se tienen dos rectas r y r' que se cortan en un punto O, y puntos distintos $A, B, C \in r$ y $A', B', C' \in r'$, todos distintos de O. Se tiene también una proyectividad $f : r \to r'$ que cumple $f(O) = O$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Suponiendo que las rectas AC', BB', CA' son concurrentes, calcular (O, A, B, C).