CÀLCUL INTEGRAL EN DIVERSES VARIABLES. PRIMAVERA 2013

Llista 4: Integrals de línia. Teorema de Green

1. Es considera la corba plana definida per $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$. Calculeu:

a) La longitud de la corba. b) La integral de $f(x, y) = y^2$ sobre γ.

c) La integral de $F(x, y) = (2 - y, x)$ sobre γ.

2. Calculeu el treball realitzat pel camp de forces F en moure una partícula al llarg d'una corba γ, essent:

a) $F(x, y, z) = (xy, xz, yz), \quad \gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 4\}$

b) $F(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y), \quad \gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = y\}$

c) $F(x, y, z) = (2xy+z^3, x^2, 3xz^2), \quad \gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2+(y-1)^2+z^2 = 3, \quad z = 1\}$

3. Sobre el quadrant $x > 0, y > 0$, comproveu que $F(x, y) = (x^2+y^2)\left(\dfrac{3x^2 - y^2}{x^2y}, \dfrac{3y^2 - x^2}{y^2x}\right)$ és un gradient. Calculeu $\displaystyle\int_\gamma F.\, d\gamma$ essent $\gamma(t) = (t + \cos^2(t), 1 + \sin^2(t)),\ t \in [0, \pi/2]$.

4. Sigui C la circumferència amb centre en $(1/2, 0)$ i radi $1/2$. Sigui γ l'arc de C, orientat en sentit antihorari, i tal que $y \geq \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Calculeu la circulació del camp $F(x, y) = (x^2 \sin(x^3),\ ye^{-y^2})$ al llarg de la corba γ.

5. Comproveu el teorema de Green per al camp $F(x, y) = (x^2y, x)$, essent D el domini regular $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y \leq 1,\ x - y \leq 1,\ x \geq 0\}$

6. a) Sigui G un domini regular d'$\mathbf{R}^2$. Comproveu que $\mu(G) = \displaystyle\int_{\partial^+(G)} x\, dy$, i calculeu l'àrea de la regió del primer quadrant limitada per les equacions $4y = x,\ 4x = y, \quad xy = 4$.

b) Sigui $F(x,y) = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x)$ definit en un domini regular $D \subset \mathbf{R}^2$. Comproveu que $\mu(D) = \displaystyle\int_{\partial^+ D} F \cdot d\gamma$, i calculeu l'àrea de $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(y+1)^2}{b^2} < 1\}$

7. Sigui $F(x,y) = \left(e^x + \dfrac{y}{e^x - y}, \quad \dfrac{1}{y - e^x} + y\right)$ el camp definit en el conjunt dels punts $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tals que $e^x - y \neq 0$. Calculeu la circulació d'F al llarg del segment que uneix els punts $(0,2)$ i $(1,3)$.

8. Calculeu la circulació del camp $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{(x+1)^2 + y^2}\, , \, \dfrac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}\right)$ al llarg de l'el·lipse $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 4$, recorreguda en sentit antihorari.

9. Sigui $F(x,y) = \left(\dfrac{1}{2(x+1)^2} - y^2 x, \quad y(x + \sin y)\right)$.
Sigui $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$, i γ la corba, part de la vora de D, orientada positivament en relació amb D, continguda en $y > 0$.
Calculeu la integral de línia del camp F sobre γ.