Siguin $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ i sigui la funció

$$f(x) = \begin{cases} e^{\alpha|x|^\beta}, & \text{si } x < 0, \\ x^\gamma \log \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Determineu per a quins $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ és possible definir el valor $f(0)$ de manera que la funció f sigui

(a) contínua a tot $\mathbb{R}$.

(b) derivable a tot $\mathbb{R}$.

Justifiqueu detalladament les respostes.

Solució:

Primer observem que f és una funció derivable (i per tant contínua) en tot punt $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$:

- $f_{/(-\infty,0)}$ és una funció derivable, i per tant f és derivable en tot punt $x < 0$:

  En efecte, $f_{/(-\infty,0)} = \exp \circ g_2 \circ g_1$, on $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_2 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ i $g_1 : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ són les funcions definides per $\exp(x) = e^x$, $g_2(x) = \alpha x^\beta$ i $g_1(x) = -x$. Com que exp, g_2 i g_1 són derivables, la regla de la cadena assegura que $f_{/(-\infty,0)}$ és derivable.

- $f_{/(0,+\infty)}$ és una funció derivable, i per tant f és derivable en tot punt $x > 0$:

  En efecte, $f_{/(0,+\infty)} = h_1 \cdot (\log \circ h_2)$, on $h_1, h_2 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ són les funcions definides per $h_1(x) = x^\gamma$ i $h_2(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ara $\log \circ h_2$ és derivable per la regla de la cadena, ja que h_2 i log són funcions derivables. A més a més, és clar que h_1 és derivable. En conseqüència, $f_{/(0,+\infty)}$ és derivable perquè és el producte de dues funcions derivables.

(a) Volem determinar per a quins $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ és possible definir el valor $f(0)$ de manera que la funció f sigui contínua tot $\mathbb{R}$. Com que sabem que f és contínua en tot punt $x \neq 0$, això equival a determinar per a quins $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ és possible definir el valor $f(0) \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

En altres paraules, volem determinar per a quins $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ els dos límits laterals de f en l'origen existeixen, són finits i els seus valors coincideixen (aquest valor comú serà $f(0)$).

Ara

$$\lim_{x \to 0^-} |x|^\beta = \lim_{t \to 0^+} t^\beta = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } \beta > 0 \\ 1, & \text{si } \beta = 0 \\ +\infty, & \text{si } \beta < 0 \end{array} \right\} \text{ i per tant } \lim_{x \to 0^-} \alpha|x|^\beta = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha = 0 \text{ o } \beta > 0, \\ \alpha, & \text{si } \beta = 0, \\ +\infty, & \text{si } \alpha > 0 \text{ i } \beta < 0, \\ -\infty, & \text{si } \alpha < 0 \text{ i } \beta < 0. \end{cases}$$

En conseqüència,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\alpha|x|^\beta} = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = 0 \text{ o } \beta > 0, \\ e^\alpha, & \text{si } \beta = 0, \\ +\infty, & \text{si } \alpha > 0 \text{ i } \beta < 0, \\ 0, & \text{si } \alpha < 0 \text{ i } \beta < 0. \end{cases}$$

A més a més, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^\gamma \log\dfrac{1}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x^\gamma \log(1+x^2) \overset{(*)}{=} \begin{cases} 0, & \text{si } \gamma > -2, \\ -1, & \text{si } \gamma = -2, \\ -\infty, & \text{si } \gamma < -2. \end{cases}$

Així doncs:
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \in \mathbb{R} \text{ si i només si } \alpha < 0,\ \beta < 0 \text{ i } \gamma > -2,$$
$$\text{i en tal cas } \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

En conclusió, només és possible definir $f(0)$ de manera que f sigui contínua a tot $\mathbb{R}$ quan $\alpha < 0$, $\beta < 0$ i $\gamma > -2$, i en aquest cas $f(0) = 0$.

(b) Com que si f és derivable a tot $\mathbb{R}$, també és contínua a tot $\mathbb{R}$, per l'apartat (a), els paràmetres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tals que és possible definir $f(0)$ de forma que f sigui derivable a tot $\mathbb{R}$ han de complir que $\alpha < 0$, $\beta < 0$ i $\gamma > -2$, i $f(0) = 0$. Suposem doncs que $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\gamma > -2$ i $f(0) = 0$. Sabem que f és derivable en tot punt $x \neq 0$. Per tant, f és derivable a tot $\mathbb{R}$ si i només si f és derivable en $x = 0$, és a dir, existeix $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ i és finit, o equivalentment existeixen els límits laterals $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x}$ i $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$, són finits i els seus valors coincideixen.

Ara
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\alpha(-x)^\beta}}{x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{\alpha y^\beta}}{-y} = \lim_{y\to 0^+} -\left(\frac{e^{y^\beta}}{y^{1/\alpha}}\right)^\alpha = \lim_{t\to +\infty} -\left(\frac{e^t}{t^{1/(\alpha\beta)}}\right)^\alpha = 0,$$
si $\alpha < 0$ i $\beta < 0$. D'altra banda,
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\gamma-1} \log\frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x^{\gamma-1}\log(1+x^2) \overset{(*)}{=} \begin{cases} 0, & \text{si } \gamma > -1, \\ -1, & \text{si } \gamma = -1, \\ -\infty, & \text{si } \gamma < -1. \end{cases}$$

Així doncs:
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \text{ si i només si } \alpha < 0,\ \beta < 0 \text{ i } \gamma > -1,$$
$$\text{i en tal cas } \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

En conclusió, només és possible definir $f(0)$ de manera que f sigui derivable a tot $\mathbb{R}$ quan $\alpha < 0$, $\beta < 0$ i $\gamma > -1$, i en aquest cas $f(0) = 0$ i $f'(0) = 0$.

(*) Càlcul del límit $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a \log(1+x^2)$, per $a \in \mathbb{R}$: Ho fem per dos mètodes.

Mètode 1: Per la definició de derivada tenim que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h} = \log'(1) = 1$, i per tant
$$\lim_{x\to 0^+} x^a \log(1+x^2) = \lim_{x\to 0^+} x^{a+2} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} = \begin{cases} 0, & \text{si } a > -2, \\ 1, & \text{si } a = -2, \\ +\infty, & \text{si } a < -2. \end{cases}$$

Mètode 2: Com que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{si } a > 0 \\ 1, & \text{si } a = 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0 \end{array}\right\}$ i $\lim\limits_{x\to 0} \log(1+x^2) = 0$, deduïm que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a \log(1+x^2) = 0$, si $a \geq 0$. Quan $a < 0$ el límit a calcular és una indeterminació del tipus $(+\infty)\cdot 0$, que es pot reduïr a una del tipus $0/0$ i resoldre-la utilitzant la regla de L'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0^+} x^a \log(1+x^2) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2)}{x^{-a}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{-ax^{-a-1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{2}{a}\frac{x^{a+2}}{1+x^2} = \begin{cases} 0, & \text{si } a > -2, \\ 1, & \text{si } a = -2, \\ +\infty, & \text{si } a < -2. \end{cases}$$