1. Considereu la funció definida per $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(a) Calculeu el domini de f, $D(f)$.

(b) És $f : D(f) \to \mathbb{R}$ exhaustiva?

(c) És f és injectiva? És $f_{/D(f)\cap[0,+\infty)}$ injectiva?

(d) Calculeu $f^{-1}([2,3])$.

(e) Calculeu $f((0,1))$.

Justifiqueu detalladament les respostes.

Solución:

(a) Observar que $f(x) = f_3(f_2(f_1(x)))$, on $f_1(x) = 1 - x^2$, $f_2(x) = \sqrt{x}$ y $f_3(x) = 1/x$. Por tanto,

$$\begin{aligned} D(f) &= \{\, x \in D(f_1) = \mathbb{R} \,:\, f_1(x) \in D(f_2) = [0,+\infty),\; f_2(f_1(x)) \in D(f_3) = \mathbb{R}\setminus\{0\}\,\} \\ &= \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, 1 - x^2 > 0 \,\} = (-1,1). \end{aligned}$$

(b) Claramente $f(x) > 0$ y, por tanto no es exhaustiva pues $R(f) \subset (0,\infty)$ y, en consecuencia, no es $\mathbb{R}$.

(c)

(c1) La función es par y puesto que el dominio es $(-1,1)$, tenemos que si $x, -x \in (-1,1)$, $f(x) = f(-x)$ y, por tanto, no es inyectiva.

(c2) Si no restringimos al dominio $(0,1)$ el argumento anterior no es válido. Ahora bien,

$$f(a) = f(b) \implies \sqrt{1-a^2} = \sqrt{1-b^2} \implies 1 - a^2 = 1 - b^2 \implies a^2 = b^2,$$

y puesto que la función x^2 es inyectiva en $(0,1)$ obtenemos que $a = b$. Luego en este dominio la función sí es inyectiva.

(d)

$$\begin{aligned} f^{-1}([2,3]) &= \left\{x \in (-1,1); 2 \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \le 3\right\} = \left\{x \in (-1,1); \frac{1}{3} \le \sqrt{1-x^2} \le \frac{1}{2}\right\} \\ &= \left\{x \in (-1,1); \frac{1}{9} \le 1 - x^2 \le \frac{1}{4}\right\} = \left\{x \in (-1,1); \frac{3}{4} \le x^2 \le \frac{8}{9}\right\} \\ &= \left[-\frac{\sqrt{8}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{8}}{3}\right] \end{aligned}$$

(d) Usaremos los recorridos de las funciones elementales f_1, f_2 y f_3: sabemos que $f_1((0,1)) = (0,1)$, $f_2((0,1)) = (0,1)$ y $f_3((0,1)) = (1,\infty)$ y, por tanto

$$f((0,1)) = f_3(f_2(f_1((0,1)))) = f_3(f_2((0,1)) = f_3((0,1)) = (1,\infty).$$