Veamos si los vectores $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ son linealmente independientes.
La matriz A formada por las columnas $(v_1|v_2|...|v_k)$ equivale a:

$$A : (u_1|u_1 - u_2|...|u_1 - \sum_{i=2}^{k} u_i)$$

Efectuamos las siguientes operaciones elementales sobre la matriz en este orden:

i) $\forall$ i $\in$ 1...k-1, $C_i = C_i - C_{i+1}$
ii) $C_k = C_k + \sum_{i=1}^{k-1} C_i$
iii) $\forall$ i $\in$ 2...k, $C_i \overset{\leftarrow}{\rightarrow} C_{i-1}$

$$(u_1|u_1 - u_2|...|u_1 - \sum_{i=2}^{k} u_i) \approx (u_2|u_3|...|u_k|u_1 - \sum_{i=2}^{k} u_i) \approx (u_2|u_3|...|u_k|u_1)$$

$$(u_2|u_3|...|u_k|u_1) \approx (u_1|u_2|...|u_k)$$

Por hipótesi:

$$\{u_1, u_2, ..., u_k\} lin.ind \to rg(u_1|u_2|...|u_k) = k$$

Y sabemos que el rango de una matriz y todas sus equivalentes siempre coincide. Por tanto:

$$rg(v_1|v_2|...|v_k) = rg(u_1|u_2|...|u_k) = k$$

$\{v_1, v_2, ..., v_k\} \in \mathbb{R}^n$son linealmente independientes.