CÀLCUL INTEGRAL EN DIVERSES VARIABLES. PRIMAVERA 2013

Llista 1: Funcions mesurables i funcions d'una variable integrables Lebesgue

1. Raoneu que són mesurables i calculeu la mesura dels conjunts:

a) $\mathbf{Q} \cap [0,1]$ i $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cap [0,1]$ en $\mathbf{R}$.

b) Si $a \in \mathbf{R}$, $\mathbf{R} \times \{a\}$ en $\mathbf{R}^2$.

c) $\bigcup_{k \geq 1} A_k$, essent $A_k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max(|x-k|, |y-k|) \leq \frac{1}{2^k}\}$

2. Sigui $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funció mesurable. Proveu:

a) $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, definida per $g(x) = f(a+x)$, $a \in \mathbf{R}^n$, és mesurable.

b) $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, definida per $h(x) = f(-x)$, és mesurable.

c) Si $n = 1$, I f és derivable, $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, és mesurable.

3. Estudieu la integrabilitat Lebesgue, segons valors d'$\alpha \in \mathbf{R}$, de les funcions:

a) $(1 - e^{-1/\sqrt{x}})x^\alpha$ en $(0, +\infty)$

b) $\dfrac{x^{\alpha-1}}{1-x} \log(1/x)$ en $(0,1)$

4. Integrabilitat Lebesgue en $(0,1)$ i en $(1,+\infty)$ de la funció $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha(1+x^{2\beta})}$ $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

5. Integrabilitat Lebesgue en $[1,+\infty)$ de la funció $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha \log^\beta x}$ $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

6. Integrabilitat Lebesgue en $[1,+\infty)$ de la funció $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}\ \sin(1/x)}{|x^2-\alpha|}$ $\alpha \in \mathbf{R}$.

7. a) Integreu per parts, per a tot $x > 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ i deduïu que la intgral impròpia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ és convergent.

b) Proveu que no és absolutament convergent. Serà convergent com a integral de Lebesgue?