Problema 41. En aquest exercici calcularem els subgrups de Sylow del grup simètric S_4.

(a) Calculeu els 3-subgrups de Sylow de S_4. De quin ordre són?

(b) Descriviu els elements de S_4 que són d'ordre una potència de 2 i recordeu que aquests elements estan continguts en un 2-subgrup de Sylow. Deduïu que un 2-subgrup de Sylow conté un subgrup cíclic d'ordre 4. Expliciteu els 2-subgrups de Sylow de S_4.

Solució. (a)

Sabem que $\#S_4 = 4! = 24 = 2^3 \cdot 3$.

Ara, pel primer teorema de Sylow, existeixen, com a mínim,

un 2-subgrup de Sylow d'ordre 2^3 i un 3-subgrup de Sylow d'ordre 3.

Pel 3r teorema de Sylow, si n_3 denota el nombre de 3-subgrups de Sylow de S_4, tenim que $n_3|8$ i $n_3 \equiv 1 \pmod 3$.

Amb aquestes dades, podem escriure el següent.

$\exists k, t \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n_3 - 1 = 3k$$

,

$$2^3 = n_3 t$$

Per la 2a condició obtinguda, els n_3 possibles són 1,2,4,8, i de tots aquests, només $n_3 = 4$ i $n_3 = 1$ compleixen la 1a condició. Per tant, hi ha quatre 3-subgrups de Sylow a S_4.

Sabem que aquests 3-Sylows són d'ordre 3; és a dir, són d'ordre primer, i en conseqüència són cíclics (i simples). Aleshores, S_4 té quatre 3-Sylows cíclics d'ordre 3, que són:

$$H_1 =< (1,2,3) >, H_2 =< (2,3,4) >, H_3 =< (1,3,4) >, H_4 =< (1,2,4) >$$

.

(b)

i)

Totes les transposicions són d'ordre 2, per tant:

$(1,2), (2,3), (3,4), (1,3), (2,4), (1,4)$ són d'ordre 2.

La composició de dues transposicions disjuntes també és d'ordre 2, per tant:

$((1,2)(3,4)), ((1,3),(2,4)), ((1,4),(2,3))$ són d'ordre 2.

Encara resten:

$(1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,2,3), (1,4,3,2)$ que són d'ordre 4.

Els 9 elements restants són el neutre (ordre 1) i 8 elements d'ordre 3.

ii)

Pel 2n teorema de Sylow, tot p-subgrup d'un grup G està contingut en un p-subgrup de Sylow de G. En aquest cas, tot 2-subgrup de S_4 està contingut en un 2-subgrup de Sylow de S_4. Aleshores, ja que un subgrup cíclic d'ordre 4 és un 2-subgrup de S_4, aquest està contingut en un 2-subgrup de Sylow de S_4. Aplicant ara la segona part del 2n teorema de Sylow, tenim que tots els 2-subgrups de Sylow de S_4 són conjugats, de manera que si H_1 és el 2-subgrup de Sylow tal que $C_4 \subseteq H_1$ i H_2 és un altre 2-subgrup de Sylow, podem afirmar el següent:

$\exists g \in S_4$ t.q. $H_2 = gH_1g^{-1}$

En particular, si $< h >= \{h, h^2, h^3, h^4 = e\}$ és el subgrup cíclic d'ordre 4 de H_1, tenim que $< ghg^{-1} >= \{ghg^{-1}, gh^2g^{-1}, gh^3g^{-1}, gh^4g^{-1} = e\} \subseteq H_2$ és un subgrup cíclic d'ordre 4 de H_2, ja que $(ghg^{-1})^i = gh^ig^{-1}$.

iii)

Hem vist a l'apartat anterior que els 2-subgrups de Sylow de S_4 tenen ordre 8. Pel 3r teorema de Sylow, el nombre de 2-subgrups de Sylow n_2 compleix:

$$n_2|3$$

,

$$n_2 \equiv 1(mod 2)$$

Veiem, aleshores, que el nombre de 2-Sylows és 1 o 3.

Trobem ara: $H_1 =< (1,2,3,4) = \sigma, (2,4) = \rho >=$
$\{e, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2), (2,4), (1,4)(2,3), (1,3), (1,2)(3,4)\}$

Ara, conjugant, obtenim que

$H_2 = (1,4)H_1(4,1) =< (1,4)(1,2,3,4)(4,1), (1,4)(2,4)(4,1) >=$
$\{e, (4,2,3,1), (4,3)(2,1), (4,1,3,2), (2,1), (1,4)(2,3), (4,3), (4,2)(3,1)\}$

Però n'hi ha d'haver un tercer. Tornant a conjugar obtenim que

$H_3 = (1,2)H_1(2,1) =< (1,2)(1,2,3,4)(2,1), (1,2)(2,4)(2,1) >=$
$\{e, (2,1,3,4), (2,3)(1,4), (2,4,3,1), (1,4), (2,4)(1,3), (2,3), (1,2)(3,4)\}$

Observació. Veiem que aquests 2-subgrups de Sylow són isomorfs a $D_{2,4}$.