72. Les següents relacions són relacions d'ordre. Comprova si són d'ordre total i si tenen màxim o mínim.

(a) La relació $\preccurlyeq$ en $\mathbb{N}$ definida per $n \preccurlyeq m$ si i només si $n|m$.

(b) La relació $\precsim$ en el següent conjunt d'intervals $I = \{[-a,a] : a \in \mathbb{R}^+\}$ definida per $[-a,a] \precsim [-b,b]$ si i només si $[-a,a] \subseteq [-b,b]$.

73. En el conjunt $\mathbb{Z}$ definim la relació $\approx$ de la forma següent:

$$z_1 \approx z_2 \text{ si i només si } z_1 + z_2 \text{ és parell.}$$

(a) Demostra que $\approx$ és una relació d'equivalència en $\mathbb{Z}$.

(b) Dóna l'expressió de la classe d'equivalència d'un element $z \in \mathbb{Z}$ arbitrari.

(c) Dóna la partició de $\mathbb{Z}$ que s'obté amb aquesta relació.

74. Considera la següent relació $\equiv$ en $\mathbb{Q}$: Si $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \equiv b$ si i només si $a - b \in \mathbb{Z}$.

(a) Demostra que és una relació d'equivalència.

(b) Descriu la classe d'equivalència d'un $q \in \mathbb{Q}$ arbitrari.

(c) Troba les següents classes d'equivalència: $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2/3}$, $\overline{5/3}$.

(d) Troba una manera de descriure el conjunt quocient, usant per a cada classe el representant que et sembli més adequat.

75. Definim la següent relació $\sim$ en el pla $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(x,y) \sim (x_1,y_1) \text{ si i només si } \begin{cases} x - x_1 = 3z, & \text{per algun } z \in \mathbb{Z}, \text{ i} \\ y - y_1 = 5t, & \text{per algun } t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(a) Demostra que $\sim$ és una relació d'equivalència.

(b) Formula com a conjunt la classe d'equivalència d'un punt $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ arbitrari.

(c) Escull un punt $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a l'atzar i dibuixa la seva classe d'equivalència en el pla $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

76. Considera la relació G en el conjunt dels angles entre 0 i π del pla, definida per $\alpha \, G \, \beta$ si i només si $\alpha = \beta$ o $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) > 0$. Demostra que és una relació d'equivalència i determina la partició associada.

77. Considera la relació $\sim$ en $\mathbb{Z}$ definida per: $m \sim n$ si i només si m^2 i n^2 són congruents mòdul 4. Demostra que és una relació d'equivalència i determina el conjunt quocient.

78. Sigui E la relació definida en el conjunt de les successions convergents de nombres reals per: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \, E \, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si i només si per tot $\varepsilon > 0$ existeix un $k \in \mathbb{N}$ tal que per tot $m \geqslant k$, $|a_m - b_m| < \varepsilon$. Demostra que és una relació d'equivalència i dóna una forma pràctica de descriure cadascuna de les classes i el conjunt quocient.

79. Sigui T la relació en el conjunt de polinomis $\mathbb{R}[x]$ definida per:

$$p(x)\ T\ q(x) \text{ si i només si } p(x) - q(x) = s(x) \cdot x^2 \text{ per algun } s(x) \in \mathbb{R}[x].$$

(a) Demostra que és una relació d'equivalència.

(b) Troba les classes d'equivalència dels polinomis $7x^3 + 3x^2 + 3x + 5$, $3x^2 + 5x + 3$ i $3x + 5$.

(c) Digues amb quin conjunt de polinomis es podria identificar de manera natural el conjunt quocient.

80. Determina quines de les següents famílies de subconjunts d'$\mathbb{R}$ formen una partició del conjunt especificat en cada cas.

(a) $\{[n-1, n+1)\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ és partició de $[0, \infty)$?

(b) $\{[2^n - 1, 2^{n+1} - 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ és partició de $[0, \infty)$?

(c) La família dels intervals $[p, p+2)$ de $\mathbb{R}$, tals que $p, p+2 \in \mathbb{N}$ i ambdós primers, és partició de $[3, \infty)$?

81. Sigui $n \geqslant 2$ un natural fixat. Per a cada $k = 0, \ldots, n-1$ definim el conjunt

$$A_k = \{rn + k \ : \ r \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Demostra que el conjunt $\{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ és una partició de $\mathbb{N}$ i determina la relació d'equivalència corresponent.

82. Siguin A un conjunt i $\asymp$ una relació en A. Demostra que $\asymp$ és una relació d'equivalència en A si i només si compleix les següents propietats:

i) Per tot $a \in A$, $a \asymp a$.

ii) Per tots $a, b, c \in A$, si $a \asymp b$ i $b \asymp c$ aleshores $c \asymp a$.

83. Considera la relació "n és un factor primer de m" en el conjunt $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Determina si és reflexiva, simètrica, antisimètrica, transitiva, total.

84. Les següents relacions són relacions d'ordre. Comprova si són d'ordre total i si tenen màxim o mínim.

(a) La relació d'ordre usual en el conjunt de tots els enters parells.

(b) La relació $\preccurlyeq$ en el següent conjunt d'intervals $J = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R} \text{ i } a < b\}$ definida per $[a, b] \preccurlyeq [c, d]$ si i només si $[a, b] \subseteq [c, d]$.

85. En el conjunt $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ definim la següent relació:

$$(a, b) \bowtie (c, d) \text{ si i només si } ad = cb.$$

Demostra que és una relació d'equivalència.

86. Demostra que la família d'intervals de $\mathbb{R}$, $\{[n, n+1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una partició de $\mathbb{R}$ i digues quína és la relació d'equivalència associada.

87. Determina les particions associades a les relacions d'equivalència següents en el conjunt dels noms dels dies de la setmana en català:

(a) Tenir el mateix nombre de lletres.

(b) Tenir el mateix nombre de vocals.

(c) Tenir la mateixa segona lletra.

(d) Tenir la mateixa tercera lletra.

Recorda que la **Llista 5** també inclou problemes sobre relacions.