Problema 42. Sigui G un grup finit. Demostreu que si $|G| = 96$, aleshores G no és simple.

Solució. Per demostrar que G no és simple hem de veure que existeix algun subgrup normal a G que no és ni ell mateix ni la identitat.

En primer lloc, veiem que $96 = 2^5 \cdot 3$, d'on obtenim que el nombre de $p-$ *subgrups de Sylow*, $p = 2, 3$ és:

$$n_2 = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \qquad\qquad n_3 = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \\ 32 \end{cases}$$

Per el *tercer teorema de Sylow*, no pot haver-hi ni 2, ni 8, ni 32 $3-$ *subgrups de Sylow*, ja que aquests nombres no són congrus a 1 (mod 3).

Per tant, tenim que:

$$n_2 = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \qquad\qquad n_3 = \begin{cases} 1 \\ 4 \\ 16 \end{cases}$$

Si hi ha un únic $2-$ *Sylow* o un únic $3-$ *Sylow*, ja hem acabat, perquè aquest és normal a G.

Anem a analitzar el cas en què hi hagi tres $2-$ *subgrups de Sylow*.

Denotem per X el conjunt format per els $2-$ *subgrups de Sylow* ($X = \{S_1, S_2, S_3\}$) i considerem ρ l'acció conjugació de G en X.

Per a cada $g \in G$, podem definir l'aplicació $\rho_g : X \to X$ tal que $\rho_g(S_i) = gS_ig^{-1}$, $i = 1, 2, 3$.

Denotem S_X com el grup de permutacions de X, i considerem el morfisme de grups $\phi : G \to S_X$, que envia cada $g \in G$ a ρ_g.

El nucli de l'aplicació és normal a G; per tant, només cal veure que no és la identitat ni G per demostrar que G no és simple.

Per el *primer teorema d'isomorfia* sabem que $\dfrac{G}{Ker(\phi)} \cong Im(\phi) \subseteq S_X$. Per tant, l'ordre de $\dfrac{G}{Ker(\phi)}$ és igual a l'ordre de $Im(\phi)$, i a la vegada ha de ser menor o igual que l'orde de S_X que és $3! = 6$. D'aquí veiem que $|Ker(\phi)| \geq \dfrac{96}{6} = 16$. Això vol dir que el $Ker(\phi)$ no és la identitat, ja que aquesta té ordre 1. Tampoc és G, perquè l'acció no és trivial, ja que tots el $2-$ *subgrups de Sylow* són conjugats (o sigui, algun element $g \in G$ actua en X de manera diferent que la identitat).

Per tant, G no és simple. $\square$