Problema 1. Determineu si els conjunts següents amb les operacions que s'indiquen són o no grups.

1. El conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$ amb la suma.

   $(\mathbb{N}, +)$ no és un grup, ja que contradiu la propietat de l'existència de l'element oposat. Per exemple, si prenem $2 \in \mathbb{N}$, el seu oposat respecte la suma seria -2, que no pertany a $\mathbb{N}$.

2. El conjunt dels nombres racionals $\mathbb{Q}$ amb la suma; el mateix conjunt, però amb el producte.

   $(\mathbb{Q}, +)$ és grup. Veiem que compleix les propietats:

   - Associativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{Q},\ a + (b + c) = (a + b) + c$, es compleix als racionals.
   - Element neutre: $\forall a \in \mathbb{Q},\ 0 + a = a + 0 = a,\ 0$ és l'element neutre.
   - Element invers: $\forall a \in \mathbb{Q},\ a + (-a) = 0,\ -a$ és l'element invers.

   $(\mathbb{Q}, \cdot)$ no és un grup, ja que contradiu la propietat de l'existència de l'element invers amb el 0:

   Sigui $a = 0,\ a \in \mathbb{Q}$; $1 = a \cdot a^{-1} = 0 \cdot a^{-1} = 0$, contradicció.

3. El conjunt $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ amb el producte en $\mathbb{C}$.

   $(S^1, \cdot)$ és grup. $S^1 \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$, que és grup amb el producte. Veiem que el producte és intern:

   Siguin $z_1, z_2 \in S_1$.

   $z_1 = a + bi$

   $z_2 = c + di$

   $|z_1| = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$
   $|z_2| = \sqrt{(c + di)(c - di)} = \sqrt{c^2 + d^2} = 1$

   $z_1 \cdot z_2 = ac - db + (ad + cb)i$

   $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(ac - db)^2 + (ad + cb)^2} = \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + d^2b^2 + a^2d^2 + 2abcd + c^2b^2} =$
   $= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} =$
   $= |z_1| \cdot |z_2| = 1$

   Per tant, $z_1 \cdot z_2 \in S_1$. Veiem que compleix les propietats:

   - Associativa: com el producte és associatiu a $\mathbb{C}$, a S_1 també.

- Element neutre: a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, el neutre és $e = 1 + 0 \cdot i = 1$. Vegem que 1 és també neutre a S^1.

  Sigui $z \in S^1, |z| = 1$. Per la mateixa raó d'abans, $S^1 \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$, i com $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ és grup, $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$. Falta veure que $1 \in S^1$. En efecte, $|1|^2 = |1 + 0 \cdot i|^2 = 1^2 + 0^2 = 1$.

- Element invers: sigui $z \in S^1, z = a + bi$. Com z és unitari, sabem que el seu invers en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ és el seu conjugat $a - bi$, doncs $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 1$. Falta veure si $a - bi \in S^1$.

  En efecte, $|\bar{z}|^2 = |a - bi|^2 = (a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2 = 1$.

4. El conjunt dels polinomis $P_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : gr(p(x)) \leq n\}$ amb la suma habitual; el mateix conjunt, però amb el producte habitual.

   $(P_n, +)$ és grup.

   Siguin $a(x), b(x) \in P_n$. Sabem que el grau dels polinomis no augmenta per la suma:

   $$gr(a(x) + b(x)) = max\{gr(a(x)), gr(b(x))\} \leq n,$$

   Per tant la suma és interna: $a(x) + b(x) \in P_n$

   Veiem que compleix les propietats:

   - Associativa: $\forall a(x), b(x), c(x) \in P_n$, la suma
     $$(a(x) + b(x)) + c(x) = a(x) + (b(x) + c(x))$$
     és associativa ja que són polinomis.
   - Element neutre: $\forall a(x) \in P_n,\ a(x) + 0 = a(x), 0$ és l'element neutre.
   - Element invers: $\forall a(x) \in P_n,\ a(x) + (-a(x)) = 0,\ -a(x)$ és l'element oposat (polinomi $a(x)$ amb els signes canviats).

   $(P_n, \cdot)$ no és un grup, ja que contradiu la propietat de l'element invers amb el 0.

5. Sigui E un espai vectorial sobre un cos K; el conjunt dels endomorfismes $End(E) = \{f : E \to E \text{ } aplicacions\ lineals\}$ amb la composició.

   $(End(E), \circ)$ és un grup trivial quan $E = \{0\}$. Si $E \neq \{0\}$ no és un grup ja que l'aplicació, en general, no és necessàriament bijectiva i pot ser que els elements no tinguin invers. Per exemple, l'aplicació:

   $$\begin{aligned} f : E &\to E \\ \vec{u} &\mapsto \vec{0} \end{aligned}$$

   no és injectiva, doncs $Ker f = E$ i per tant no és bijectiva.

6. Sigui E un espai vectorial sobre un cos K ; el conjunt dels endomorfismes de E que tenen invers, que denotarem per $Aut(E)$, amb la composició.

   $(Aut(E), \circ)$ és grup. L'operació és interna perquè la composició d'aplicacions bijectives és bijectiva. Veiem que compleix les propietats:

   - Associativa: com la composició a $End(E)$ és associativa i $Aut(E) \subseteq End(E)$, també és associativa a $Aut(E)$.
   - Element neutre: $\forall A \in Aut(E)$, $Id \circ A = A \circ Id = A$, Id és l'element neutre (aplicació identitat), i sabem per l'àlgebra lineal que és bijectiva i, per tant, $Id \in Aut(E)$.
   - Element invers: es compleix perquè ja ho suposem a la defició del grup $(Aut(E), \circ)$