Problema 25. Sigui A un anell commutatiu.

(a) Demostreu que $A - A^*$ (el conjunt complementari de les unitats) és un ideal si, i només si, A té un únic ideal maximal.

Solució. $\Longrightarrow$ Vegem que si $A - A^*$ és un ideal, aleshores $A - A^*$ és l'únic ideal maximal.

Suposem que $A - A^*$ és un ideal i que no és maximal; aleshores existeix $x \in A - A^*$ tal que

$$A - A^* \subsetneq A - A^* + (x) \subsetneq A.$$

Observem que, si $x \notin A - A^*$ aleshores $x \in A^*$. Ja hem vist que si $I \subset A$ és un ideal, si existeix $u \in A^*, u \in I \Rightarrow I = A$; per tant, com que hem vist que $x \in A^*$ i tenim un ideal que conté $(A - A^* + (x)) \Rightarrow A - A^* + (x) = A$. Arribem doncs a una contradicció.

Fins aquí, hem demostrat que $A - A^*$ és maximal. Falta veure que és l'únic.

Suposem que existeix un ideal maximal B tal que $B \neq A - A^*$. Pel fet de ser maximal, no existeix u tal que $u \in A^*$ i $u \in B$. Com que B és un ideal maximal, només pot contenir elements no-unitats; o sigui, si $x \in B$, llavors x no és unitat, de manera que $x \in A - A^*$. Això demostra que $B \subseteq A - A^*$ i, si B és maximal, $B = A - A^*$.

Arribem doncs a una contradicció.

Finalment, doncs, si $A - A^*$ és un ideal aleshores $A - A^*$ és l'únic ideal maximal.

$\Longleftarrow$ Vegem que si M és l'únic ideal maximal de A, aleshores $A - A^*$ és un ideal.

Vegem que $M = A - A^*$, demostrem les dues inclusions:

$\subseteq$ Ja hem vist que per a tot $I \neq A \Rightarrow I \cap A^* = \emptyset$, per tant, sent M un ideal ha d'estar contingut en el complementari de les unitats $A - A^*$. Hem vist doncs que $M \subseteq A - A^*$.

$\supseteq$ Si $a \in A - A^* \Rightarrow a \in M$, ja que suposem que M és l'únic ideal maximal i tot element no invertible està en algun ideal maximal. Aleshores $A - A^* \subseteq M$.

(b) Demostreu que A té un únic ideal primer si, i només si, tot element de A és invertible o nilpotent.

Solució. $\Longrightarrow$ Si A té un únic ideal primer $\Rightarrow$ tot element de A és invertible o nilpotent.

Sabem que si I és ideal maximal $\Rightarrow$ I és ideal primer.

Altrament, l'ideal dels element nilpotents $(\eta(A)) = \bigcap P$, on P són els primers de A.

Si només tenim un ideal P primer aleshores tenim un ideal maximal P i, per tant, $P = A - A^*$. D'altra banda, ja hem vist que $\eta(A) = \bigcap P = P$ que són nilpotents, per tant, la resta d'elements de A estan continguts a A^* (invertibles).

$\Longleftarrow$ Siguin p, q dos primers de A. Sigui $a \in p$ aleshores, $a \notin A^* \Rightarrow a \in \eta(A) = \bigcap P$ (P és un ideal primer de A) $\Rightarrow a \in \eta(A) \subset (p \cap q) \Rightarrow a \in q$; per tant $p \subseteq q$.

Anàlogament es demostra que $q \subseteq p$; d'on $p = q$.

Queda demostrat doncs que A té un únic ideal primer.