

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT

ESCRIVIU ELS VOSTRES NOM, COGNOMS I GRUP EN CADA FULL

1. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funció de classe C^2 tal que $f(0,0) = 0$ i $\nabla f(0,0) = (2,1)$. Considereu la funció $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$g(x, y) = f(\log(1 + y^2), \log(1 + x^2)).$$

- a) Demostreu que g també és una funció de classe C^2 i calculeu el seu polinomi de Taylor d'ordre 2 en l'origen.
b) Calculeu el límit següent:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x, y) + 2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}.$$

Justifiqueu detalladament les respostes.

2. a) Enuncieu el teorema de la funció inversa.
b) Demostreu que el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x^3y + y^3u + e^{-u}v = 1 \\ e^{-x}y + yu^3 + uv^3 = 1 \end{cases}$$

defineix dues funcions implícites $u = g(x, y)$ i $v = h(x, y)$ en un entorn del punt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 1, 0, 1)$. Té la funció $F(x, y) = (g(x, y), y + h(x, y))$ inversa diferenciable en un entorn del punt $(0, 1)$?

Justifiqueu detalladament les respostes.

3. a) Calculeu els extrems relatius de la funció $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^2$.
b) Trobeu la distància del punt $(0, 0, 1)$ a la superfície $z = x^2 + 2y^2$.

Justifiqueu detalladament les respostes.

ESCRIVIU LA RESPOSTA A CADA PREGUNTA EN UN FULL DIFERENT

ESCRIVIU ELS VOSTRES NOM, COGNOMS I GRUP EN CADA FULL