

Problema 16. Proveu que tot domini d'integritat finit és un cos.

Solució.

Sea A un dominio de integridad finito.

$\forall b \in A$ tal que $b \neq 0$:

Defino:

$$\Phi_b : A \longrightarrow A$$

$$x \longmapsto bx$$

Como A es dominio de integridad, $\Phi_b(x) = bx = 0 \leftrightarrow x = 0$.

Por lo tanto, $\text{Ker}\Phi_b = \{0\}$ y Φ_b es inyectivo.

Además, como A es finito, Φ_b es también exhaustivo.

Como $1 \in A$, $\exists a \in A$ tal que $ba = 1$ y b es invertible.

En consecuencia, A es un cuerpo.