MATRIUS I VECTORS
Segon examen parcial
13 de gener de 2011

Exercici 1. Considereu els subespais de $\mathbb{R}^4$

$$F = \langle (1,2,0,1),\, (0,1,-1,0) \rangle, \quad H = \langle (1,0,0,4),\, (1,0,2,1),\, (0,1,1,-3) \rangle,$$

$$G_a = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + az - y = 0,\, (a-2)y + az + t = 0\}$$

(i) *(2,5 punts)* Trobeu bases, equacions i dimensions de F i de G_a.

(ii) *(2,5 punts)* Trobeu $F \cap G_a$ per a tots els paràmetres a.

(iii) *(2,5 punts)* Per a quins valors de $a \in \mathbb{R}$ es té $H = F + G_a$? Es té aleshores $H = F \oplus G_a$?

(iv) *(2,5 punts)* Trobeu un subespai K tal que $H = F \oplus K$.

Solució. (i) Els generadors de $F = \langle (1,2,0,1),\, (0,1,-1,0) \rangle$ són linealment independents i per tant formen una base de F. Així doncs $\dim(F) = 2$.

Trobar les equacions de F és trobar les relacions que ha de satisfer un vector genèric (x,y,z,t) del subespai. Llavors $(x,y,z,t) \in F$ si, i només si, els vectors (x,y,z,t), $(1,2,0,1)$, $(0,1,-1,0)$ són linealment dependents. És a dir, si, i només si,

$$rang \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 0 & -1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Com que tenim un menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, només cal imposar que els menors 3×3 que el contenen s'anul·lin, és a dir

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ t & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

D'aquí obtenim les equacions de F: $2x - y - z = 0$ i $x - t = 0$.

El subespai G_a ve definit per dues equacions que són linealment independents per a qualsevol valor $a \in \mathbb{R}$ (la matriu de coeficients sempre té rang 2), i així $\dim(G_a) = 4 - 2 = 2$. Per a trobar-ne una base només cal trobar les solucions del sistema. Com que $x = y - az$ i $t = (2-a)y - az$, un vector qualsevol de G_a serà de la forma

$$(x,y,z,t) = (y - az, y, z, (2-a)y - az) = y(1,1,0,2-a) + z(-a,0,1,-a).$$

Així $G_a = \langle (1,1,0,2-a), (-a,0,1,-a) \rangle$, i aquests vectors en són una base.

(ii) Per estudiar $F \cap G_a$, tan sòls ens cal resoldre el sistema format per les equacions dels dos subespais:

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - y + az = 0 \\ (a-2)y + az + t = 0 \end{cases}$$

Aquest sistema té per matriu associada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & a-2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

que té rang 4, si només si, $a \neq 1$ i $a \neq -1/2$. En aquest cas $F \cap G_a = \{(0,0,0,0)\}$. Si $a = 1$, la matriu té rang 3 i $F \cap G_1 = \langle (2,3,1,2) \rangle$. Si $a = -1/2$, la matriu té rang 3 i $F \cap G_{-1/2} = \langle (1,0,2,1) \rangle$.

(iii) $H = \langle (1,0,0,4), (1,0,2,1), (0,1,1,-3) \rangle$ té dimensió 3 ja que els tres vectors són linealment independents (el rang de la matriu dels tres vectors és 3). A més H té per equació

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 & 1 \\ z & 0 & 2 & 1 \\ t & 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -8x + 3y + 3z + 2t = 0.$$

Per la fórmula de Grassmann

$$\dim(F + G_a) = \dim(F) + \dim(G_a) - \dim(F \cap G_a) = 4 - \dim(F \cap G_a),$$

i així, $\dim(F + G_a) = 3$ si, i només si, $a = 1$ o $a = -1/2$.

Per concloure en quin cas $H = F + G_a$, només cal comprovar que efectivament $F + G_a \subseteq H$, i per fer-ho en tenim prou amb veure si els generadors de F i de G_a són de H o no. Clarament els generadors de F satisfan l'equació de H. Ens cal veure per quins valors de a els generadors de G_a també la satisfan:

$$(1,1,0,2-a) \in H \iff -8 + 3 + 2(2-a) = 0 \iff a = -1/2$$

$$(-a,0,1,-a) \in H \iff 8a + 3 - 2a = 0 \iff a = -1/2$$

Per tant, $H = F + G_{-1/2}$, i no és suma directa ja que $F \cap G_{-1/2} \neq \{(0,0,0,0)\}$.

(iv) Hem de trobar un subespai $K \subseteq H$ tal que $H = F + K$ i $F \cap K = \{(0,0,0,0)\}$. Com que $\dim(H) = 3$ i $\dim(F) = 2$, hem de trobar un subespai de dimensió 1, $K = \langle v \rangle$, de manera que $v \in H$ i $v \notin F$. N'hi ha prou en escollir v adequat que satisfaci l'equació de H i no satisfaci les equacions de F. Per exemple $v = (3,0,8,0)$, i $K = \langle v \rangle$.