I. Espacios proyectivos

(I.1) Proyectivización de un espacio vectorial. Espacios proyectivos. Proyectivización $\mathbb{P}(E)$ de un espacio vectorial E sobre un cuerpo K. Espacio proyectivo sobre un cuerpo K. Dimensión de un espacio proyectivo. Espacios proyectivos de dimensiones -1 y 0. Rectas y planos. Espacio proyectivo ordinario $\mathbb{P}^n_K$ de dimensión n sobre un cuerpo K. Los puntos de este último, proporciones $(z_0 : z_1 : .. : z_n)$ de elementos, no todos nulos, de K.

(I.2) Subespacios proyectivos (variedades lineales). Subespacios proyectivos de un espacio proyectivo. La correspondencia biyectiva entre el retículo de subespacios proyectivos de $\mathbb{P}(E)$ y el retículo de subespacios vectoriales de E. Hiperplanos. Intersección de una familia de subespacios proyectivos. Suma de dos subespacios proyectivos, resp. de una familia finita de subespacios proyectivos. Fórmula de Grassmann. Casos particulares: incremento en una unidad de la dimensión de un subespacio por la adición de un punto no perteneciente al mismo, y descenso en una unidad de la dimensión de un subespacio por la sección con un hiperplano que no lo contenga. Ejemplo: posiciones relativas (suma e intersección) de dos subespacios proyectivos de un plano, resp. de un espacio proyectivo de dimensión 3.

Ejemplo: el teorema de Desargues, I/II.

(I.3) Referencias proyectivas y coordenadas homogéneas. Dependencia lineal e independencia lineal de un sistema finito de puntos de un espacio proyectivo. Referencias proyectivas. Relación entre referencias del espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ y bases del espacio vectorial E: referencia asociada a una base y bases adaptadas a una referencia. Coordenadas homogéneas $(z_0 : z_1 : .. : z_n)$ de un punto de un espacio proyectivo en una referencia dada. Ejemplo, los puntos de la propia referencia: vértices y punto unidad de una referencia. Cambio de coordenadas.

Subespacios proyectivos y cálculo con coordenadas: expresión en forma paramétrica (explícita) y caracterización en forma implícita (mediante ecuaciones) de los puntos de un subespacio proyectivo en una referencia dada. Justificación del sinónimo 'variedades lineales' para los subespacios proyectivos de un espacio proyectivo. El paso entre de una otra forma de expresión: la solución general del sistema, resp. la obtención de un sistema de $n - r$ ecuaciones lineales homogéneas describiendo el subespcio proyectivo $p_0 \vee_1 \vee .. \vee p_r$ generado por $r + 1$ puntos linealmente independientes $p_0, p_1, .., p_r$.

(I.4) Razón doble. Coordenada absoluta de un punto de la recta proyectiva ordinaria, y coordenada absoluta de un punto en una recta proyectiva respecto de una referencia de la misma. Razón doble de cuatro puntos ordenados alineados en un espacio proyectivo, supuestos los tres primeros puntos distintos dos a dos. Cálculo de la razón doble en términos de las coordenadas de los puntos en una referencia dada, en dimensión 1 en primer lugar, y en dimensión n arbitraria después. Extensión de la definición de la razón doble al supuesto más general de cuatro puntos ordenados alineados, asumiendo solamente que no colapsan tres de ellos, o los cuatro, en un solo punto.

Variación de la razón doble con las permutaciones de los puntos. Cuaternas armónicas (bajo el supuesto de que la característica del cuerpo K sea diferente de 2). Cuadriláteros y cuadrivértices, sus vértices, lados, y triángulos diagonales respectivos. El teorema del cuadrilátero completo. Construcción gráfica del cuarto armónico de tres puntos ordenados, distintos, alineados, en un plano proyectivo.

(I.5) Dualidad. Recordatorio de Algebra Lineal, sobre el espacio vectorial dual de un espacio vectorial de dimensión finita, el teorema de bidualidad, las bases duales, y la correspondencia de ortogonalidad entre subespacios de un espacio y subespacios de su dual. El espacio proyectivo dual $P^\vee = \mathbb{P}(E^*)$ de un espacio proyectivo $P = \mathbb{P}(E)$ de dimensión finita. La identificación $P = P^{\vee\vee}$ de un espacio proyectivo P de dimensión finita con su bidual. La correspondencia entre los subespacios de dimensión r de un espacio proyectivo de dimensión n y los subespacios de dimensión $n-r$ de su espacio dual, y las propiedades de la misma. El Principio de Dualidad en Geometría Proyectiva Lineal. Ejemplos: el teorema de Desargues, II/II. La identificación de los puntos del espacio dual $P^\vee$ de un espacio proyectivo P con los hiperplanos de P. Referencias duales y coordenadas duales en P y $P^\vee$, respectivamente. Los coeficientes $a_0, ...a_n$ de la ecuación $a_0z_0 + .. + a_nz_n = 0$ de un hiperplano en una referencia de P dada dan las coordenadas $(a_0 : .. : a_n)$ de este, en la referencia dual del espacio proyectivo dual $P^\vee$.

(I.6) Proyectividades. Proyectivización $P(\varphi)$ de un isomorfismo φ de espacios vectoriales. Proyectividad o isomorfismo de espacios proyectivos sobre un mismo cuerpo K. Ejemplo 1: el paso de los puntos de un espacio proyectivo P de dimensión n sobre un cuerpo K a sus coordenadas homogéneas en una referencia fijada es una proyectividad de P con $\mathbb{P}^n_K$. Ejemplo 2: Perspectiva de centro el subespacio P_0 de un espacio proyectivo P entre subespacios suplementarios cualesquiera P_1 y P_2 de P_0 en P. El grupo proyectivo $Aut(P) = PGL(E)$ de un espacio proyectivo $P = \mathbb{P}(E)$

Transporte de subespacios proyectivos por una proyectividad. Estructura del conjunto de los puntos fijos de una proyectividad de un espacio proyectivo.

Proyectividades y referencias: existencia y unicidad de la proyectividad que envía una referencia a otra dada, ambas escogidas arbitrariamente.

Proyectividades y coordenadas: ecuaciones de una proyectividad en referencias dadas en los espacios proyectivos de salida y de llegada.

Proyectividades y razón doble: conservación de la razón doble por las proyectividades. Ampliación: Existencia y unicidad de proyectividad entre dos rectas L y L', que envía cuatro puntos A,B,C,D de L, los tres primeros dos a dos distintos, a cuatro puntos A',B',C',D' de L' en las mismas condiciones, cuando ambas cuaternas tienen la misma razón doble.

Proyectividades de una recta proyectiva: homografías elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

Proyectividad dual $f^\vee : P^\vee \to P^\vee$ de una proyectividad $f : P \to P$. Bajo la identificación de los puntos de $P^\vee$ con los hiperplanos de P, la aplicación $f^\vee$ envía un hiperplano H a su imagen recíproca $f^{-1}(H)$ por f. Aplicación al cálculo de los hiperplanos invariantes por una proyectividad de un espacio proyectivo P.