

Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2012-2013

Examen Parcial

- Feu els problemes en fulls separats.
- Justifiqueu detalladament les respostes.

- (1) (a) Considereu el conjunt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 1 \leq x^2 \leq y + 1\}$.
- (i) Representeu-lo gràficament.
 - (ii) Proveu que A és tancat. És compacte?
 - (iii) Proveu que l'origen de coordenades és un punt interior a A .
 - (iv) Trobeu un punt de la frontera de A .
- (b) Demostreu que si K és un compacte de \mathbb{R}^n i $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ és contínua, llavors $f(K)$ és compacte en \mathbb{R}^m .

- (2) (a) Per a $m \in \mathbb{N}$, estudieu la continuïtat en \mathbb{R}^2 de la funció

$$f_m(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^m}{x^2 + y^6}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (b) Estudieu la continuïtat en $(0, 0)$ de la funció

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x - y}, & \text{si } x - y \neq 0, \\ 0, & \text{si } x - y = 0. \end{cases}$$

- (3) (a) Per a funcions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definiu el concepte de funció diferenciable en un punt. Proveu que si f és diferenciable en un punt $a \in \mathbb{R}^n$, llavors f és contínua en a . És cert el recíproc?
- (b) Estudieu la diferenciabilitat de la funció

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^5}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$