Càlcul Diferencial en Diverses Variables - 2011-2012
Segon Parcial

- **Feu els problemes en fulls separats.**
- **Justifiqueu detalladament les respostes.**

(1) (a) Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció de classe C^2. Si $p \in \mathbb{R}^n$ és un punt crític de f tal que la diferencial segona de f en p és una forma definida positiva, proveu que f té un mínim local en el punt p.

(b) Siguin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dues funcions de classe C^2 en $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$, respectivament. Definim

$$F(x,y) = f(y + xg(y^2,x)) - x^2.$$

(i) Calculeu les derivades parcials de primer ordre de F en termes de f, g i les seves derivades parcials.

(ii) Sabent que $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$ i $g(0,0) = 3$, proveu que F té un extrem local en el punt $(0,0)$. De quin tipus és?

Solució:

(a) Les hipòtesis que f és de classe C^2 i p és un punt crític de f impliquen que el desenvolupament de Taylor de f de segon ordre en el punt p és

$$f(p+x) = f(p) + \frac{1}{2}D^2 f(p)(x) + g(x)\|x\|^2 \quad (x \to 0), \tag{1}$$

on g és una funció que compleix

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \tag{2}$$

i $D^2 f(p)$ ($d^2 f_p$ utilitzant una altra notació) és la diferencial segona de f en p, és a dir, $D^2 f(p)(x) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) x_i x_j$.

A més a més sabem que $D^2 f(p)$ és una forma definida positiva, és a dir, $D^2 f(p)(x) > 0$, per a tot $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Aleshores el valor mínim de $D^2 f(p)$ sobre l'esfera unitat $S = \{\, x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1 \,\}$ (que existeix pel teorema de Weierstrass, ja que S és compacte i $D^2 f(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és contínua, perquè és un polinomi) ha de ser estrictament positiu. Així doncs,

$$M = \min_{x\in S} D^2 f(p)(x) > 0.$$

Per tant, utilitzant la definició de $D^2 f(p)$ obtenim que

$$D^2 f(p)(x) = D^2 f(p)(\|x\| \tfrac{x}{\|x\|}) = \|x\|^2 D^2 f(p)(\tfrac{x}{\|x\|}) \geq M \, \|x\|^2 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Ara la condició (2) assegura l'existència de $\delta > 0$ tal que $|g(x)| < \frac{M}{4}$, si $0 < \|x\| < \delta$. En conseqüència, (1) implica que

$$f(p+x) - f(p) = \frac{1}{2}D^2 f(p)(x) + g(x)\|x\|^2 \geq \left(\frac{M}{2} - \frac{M}{4}\right)\|x\|^2 = \frac{M}{4}\|x\|^2 > 0,$$

si $0 < \|x\| < \delta$, i acabem de provar que p és un mínim local de f.

(b) (i) La funció F està definida mitjançant sumes, productes i composicions de funcions de classe C^2, i per tant és de classe C^2.
Utilitzant la regla de la cadena tenim:

(3)
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(y+xg(y^2,x))[g(y^2,x)+x(D_2g)(y^2,x)] - 2x.$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f'(y+xg(y^2,x))[1+2xy(D_1g)(y^2,x)].$$

(ii) Comprovem que $(0,0)$ és un punt crític de F. Utilitzant (3) junt amb $f'(0)=0$ tenim $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)=0$ i $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0$. Per tant $(0,0)$ és un punt crític de F.
Per classificar-lo calcularem la matriu Hessiana de F en el punt $(0,0)$. Ho farem utilitzant les equacions (3) i tenint en compte que $f'(0)=0$ per tal d'estalviar-nos càlculs.

(4)
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) &= f''(y+xg(y^2,x))[g(y^2,x)+x(D_2g)(y^2,x)]^2 \\
&\quad + f'(y+xg(y^2,x))\frac{\partial}{\partial x}[g(y^2,x)+x(D_2g)(y^2,x)] - 2. \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x,y) &= f''(y+xg(y^2,x))[g(y^2,x)+x(D_2g)(y^2,x)][1+2xy(D_1g)(y^2,x)] \\
&\quad + f'(y+xg(y^2,x))\frac{\partial}{\partial y}[g(y^2,x)+x(D_2g)(y^2,x)]. \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) &= f''(y+xg(y^2,x))[1+2xy(D_1g)(y^2,x)]^2 \\
&\quad + f'(y+xg(y^2,x))\frac{\partial}{\partial y}[1+2xy(D_1g)(y^2,x)].
\end{aligned}$$

Utilitzant (4) junt amb $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$ i $g(0,0)=3$ tenim

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = -11, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(0,0) = -3, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,0) = -1.$$

Així doncs, $H(f)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -11 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Els menors principals de $H(f)_{(0,0)}$ són $\Delta_1 = -11 < 0$ i $\Delta_2 = 2 > 0$. Per tant $H(f)_{(0,0)}$ és definida negativa, i en $(0,0)$ hi ha un màxim local.

(2) Considerem la funció $f(x,y,z) = -x\cos z + yz^2 + e^y$.

(a) Proveu que l'equació $f(x,y,z) = 0$ defineix una funció implícita $y = g(x,z)$ en un entorn del punt $(1,0,0)$.

(b) Calculeu el gradient de g en el punt $(1,0)$.

(c) Per a quins valors reals de α, la funció

$$F(x,y,z) = (-x\cos z + yz^2 + e^y, x^2 + \alpha y, x + \alpha z)$$

és un difeomorfisme en un entorn del punt $(1,0,0)$.

Solució:

(a) Aplicarem el teorema de la funció implícita. La funció f és de classe C^∞ en $\mathbb{R}^3$ i $f(1,0,0) = 0$. A més es compleix $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,0) = [z^2 + e^y]_{(1,0,0)} = 1 \neq 0$. Per tant, pel teorema de la funció implícita sabem que existeix una funció $y = g(x,z)$ de classe C^∞ en un entorn de $(1,0)$, complint

$$-x\cos z + g(x,z)z^2 + e^{g(x,z)} = 0.$$

(b) Per l'apartat anterior sabem que

$$\frac{\partial}{\partial x}(-x\cos z + g(x,z)z^2 + e^{g(x,z)}) = -\cos z + z^2\frac{\partial g}{\partial x}(x,z) + e^{g(x,z)}\frac{\partial g}{\partial x}(x,z) = 0.$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(-x\cos z + g(x,z)z^2 + e^{g(x,z)}) = x\sin z + 2zg(x,z) + z^2\frac{\partial g}{\partial z}(x,z) + e^{g(x,z)}\frac{\partial g}{\partial z}(x,z) = 0.$$

Evaluant l'expressió anterior amb $x = 1$, $z = 0$ i $g(1,0) = 0$ s'obté $\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) = 1$, $\frac{\partial g}{\partial z}(1,0) = 0$. Per tant $\nabla g(1,0) = (1,0)$.

(c) Aplicarem el teorema de la funció inversa a la funció F. Les tres components de F són funcions de classe C^∞ en $\mathbb{R}^3$. Per tant, F és un difeomorfisme local en un entorn del punt $(1,0,0)$ si i només si $\det(JF)_p \neq 0$, és a dir:

$$\det\begin{pmatrix} -\cos z & z^2 + e^y & x\sin z + 2yz \\ 2x & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}_{(1,0,0)} = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha(-\alpha - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0,\ -2.$$

(3) Sigui S la superfície d'equació $x^2 - y^2 + z^3 = 1$.

(a) Existeix algun punt o punts de S a distància màxima de l'origen?
Justifiqueu la resposta i, si és afirmativa, trobeu tots aquests punts.

(b) Existeix algun punt o punts de S a distància mínima de l'origen?
Justifiqueu la resposta i, si és afirmativa, trobeu tots aquests punts.

Solució:

(a) La distància d'un punt $p = (x, y, z)$ a l'origen $O = (0, 0, 0)$ ve donada per $d(p, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Donat que els punts $p_t = (t, t, 1) \in S$, per a tot $t \in \mathbb{R}$, i $d(p_t, O) = \sqrt{2t^2 + 1} \to \infty$ si $t \to \infty$, no hi ha punts on s'assoleixi la distància màxima.

(b) El conjunt S és tancat en $\mathbb{R}^3$ ja que $S = f^{-1}\{1\}$, on $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^3$ és contínua en $\mathbb{R}^3$.

Donat que S és un conjunt tancat de $\mathbb{R}^n$, sabem que existeix almenys un punt de S a distància mínima de l'origen.

Per calcular aquests punts aplicarem el teorema dels multiplicadors de Lagrange a la funció $x^2 + y^2 + z^2$ amb la condició $x^2 - y^2 + z^3 - 1 = 0$. Observeu que, per simplificar els càlculs, en lloc de buscar el valor mínim de la funció $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sobre S, busquem el valor mínim de $x^2 + y^2 + z^2$ sobre S. En aquest cas ho podem fer ja que la

$$0 \leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \iff 0 \leq x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \leq x^2 + y^2 + z^2$$

i per tant els punts on els valors mínims s'assoleixim serán els mateixos.

Sabem que aquests punts on el valor mínim s'assoleix són punts crítics de la funció

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 - y^2 + z^3 - 1).$$

Per tant es complirà

$$\left.\begin{array}{ll} 2x - 2\lambda x & = 0 \\ 2y + 2\lambda y & = 0 \\ 2z - 3\lambda z^2 & = 0 \\ x^2 - y^2 + z^3 - 1 & = 0 \end{array}\right\} \equiv \left.\begin{array}{ll} x(1-\lambda) & = 0 \\ y(1+\lambda) & = 0 \\ z(2 - 3\lambda z) & = 0 \\ x^2 - y^2 + z^3 - 1 & = 0 \end{array}\right\}$$

Les dues primeres equacions ens donen 3 possibilitats:

(i) $\underline{x = 0, y = 0}$: La quarta equació ens dóna $z = 1$, i un primer punt $p_1 = (0, 0, 1)$.

(ii) $\underline{x = 0, \lambda = -1}$: Aquesta opció junt amb la tercera equació ens dóna dos possibles valors de z: $z = 0$, $z = -2/3$. Si $z = 0$, la quarta equació queda $-y^2 - 1 = 0$ que no té solució. Si $z = -2/3$ obtenim $-y^2 - 35/27 = 0$ que tampoc té solució.

(iii) $\underline{\lambda = 1, y = 0}$: Aquesta opció junt amb la tercera equació ens dóna dos possibles valors de z: $z = 0$, $z = 2/3$. Si $z = 0$, la quarta equació queda $x^2 - 1 = 0$, que dóna dos punt més: $p_2 = (1, 0, 0)$ i $p_3 = (-1, 0, 0)$. Si $z = 2/3$ obtenim $x^2 - 19/27 = 0$, que dóna dos punt més: $p_4 = (\sqrt{19/27}, 0, 2/3)$ i $p_5 = (-\sqrt{19/27}, 0, 2/3)$.

Avaluant la funció $d(p, O)$ en tots aquests punts tenim:

$$d(p_1, O) = d(p_2, O) = d(p_3, O) = 1, \qquad d(p_4, O) = d(p_5, O) = \sqrt{31/27} > 1.$$

Per tant, els punts de S a distància mínima de l'origen són $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$ i $(0, 0, 1)$.