Exercici 47. Sigui G un grup d'ordre pqr, amb p, q, r nombres primers. Demostreu que g és resoluble.

Solució:

(a) Si $p = q = r$, llavors tenim que l'ordre de G és p^3, per tant G és un p-grup i aleshores resoluble (vist a teoria).

(b) Si $p = r$ i $q > p$ és veu a l'exercici 48 (c) que G és resoluble. Si $p < q$ tenim que:

$$\begin{cases} n_p = 1 \\ n_p = q \end{cases}$$

a més, $n_p \equiv 1 mod(p)$. Per tant, $n_p = 1$ i tenim un únic p-subgrup de Sylow, H, que ha de ser normal. Sabem que H és un p-grup, doncs $|H| = p^2$ i per tant, és resoluble. D'altra banda, el quocient G/H és cíclic i per tant, també és resoluble, doncs $|G/H| = q$ amb q primer. Finalment, com G/H i H són resolubles $\Rightarrow$ G ha de ser resoluble.

(c) Si p,q i r son diferents dos a dos, suposem $p > q > r$. Pel primer teorema de Sylow sabem que G ha de tenir subgrups d'ordre p, q, i r i pel tercer teorema de Sylow sabem que el nombre de p-subgrups de Sylow ha de dividir qr. Per tant,

$$\begin{cases} n_p = 1 \\ n_p = q \\ n_p = r \\ n_p = qr \end{cases}$$

D'altra banda, el mateix teorema ens diu que $n_p \equiv 1 \quad mod(p)$ i, per tant, les úniques possiblitats són $n_p = 1$ o $n_p = qr$. De la mateixa manera trobem que el nombre total de q-Sylows i el nombre total de r-Sylows pot ser :

$$\begin{cases} n_q = 1 \\ n_q = p \\ n_q = pr \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_r = 1 \\ n_r = p \\ n_r = q \\ n_r = pq \end{cases}$$

Suposem que ni n_p, ni n_q ni n_r són 1. Aleshores $n_p = qr, n_q \geq p$ i $n_r \geq q$. Notem que en aquest cas dos subgrups de Sylow diferents només tenen en comú l'element neutre, doncs si H i H' són dos subgrups de Sylow d'ordre primer, $H \cap H'$ és un subgrup de H, i per tant, o bé $|H \cap H'| = 1$ o bé$|H \cap H'| = |H|$ i $H = H'$. Així doncs, el nombre total d'elements és $|G| \geq qr(p-1) + p(q-1) + q(r-1) + 1 = pqr + pq - p - q + 1 > pqr = |G|$ (a l'última desigualtat utilitzem que $pq - p - q \geq 0$ si p > q > 1).

Per tant, hem arribat a una contradicció. Així doncs, al menys per a un tipus de subgrups de Sylow, diguem els r-Sylows, ha de ser $n_r = 1$. Per tant, només tenim un r-Sylow, que anomenem H i ha de ser normal. A més, donat que $|H| = r$, H és cíclic i això implica que és resoluble. Per altra banda $|G/H| = (G : H) = |G|/|H| = qpiG/H$ és resoluble (vist a l'exercici anterior 46).

Per últim,si G/H resoluble i H resoluble $\Rightarrow$ G és resoluble(vist a teoria).