MODELS I SISTEMES DINÀMICS

Llista 1: Aplicacions unidimensionals

B.1. Trobeu els punts fixos i les òrbites de període 2 de les següents funcions. En el cas que apareixin paràmetres, feu-ho en funció d'aquests.

(a) * $f(x) = 2x(1-x)$, on $x \in \mathbb{R}$.

(b) * $f_c(x) = x^2 + c$, on $x, c \in \mathbb{R}$ (només punts fixos).

(c) $f(x) = x^2 + 1$, on $x \in \mathbb{R}$.

(d) $f_{a,b}(x) = ax + b$, on $a, b, x \in \mathbb{R}$.

(e) $f(x) = 2x^2 - 5x$, on $x \in \mathbb{R}$.

B.2. Fent servir anàlisi gràfic, dibuixeu el retrat de fases de

(a) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = x(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) $f_a(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$, pels diferents valors de $a \in \mathbb{R}$.

B.3. * Trobeu els punts fixos atractors i les seves conques d'atracció per a la funció $f(x) = \frac{3x - x^3}{2}$, per $|x| \leq \sqrt{3}$.

B.4. Per a la funció logística $f_a(x) = ax(1-x)$, calculeu els punts fixos i els cicles de període 2 en funció del paràmetre, i determineu-ne l'estabilitat.

1. Estudieu el comportament asimptòtic de la successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pels diferents valors de x_0 indicats.

(a) * $x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n}}{2}$, $x_0 \geq 0$.

(b) $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n}$, $x_0 \geq 2$.

2. Donada la successió $x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$,

(a) Trobeu el límit $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ per a $x_0 \geq 0$.

(b) Descriviu el conjunt dels $x_0 < 0$ pels quals el límit $\lim_{n\to\infty} x_n$ existeix i no és igual a L, o bé no existeix. (Per exemple $x_0 = -1$).

3. **(Examen 2011)** Considereu el sistema dinàmic real definit per $x_{n+1} = \frac{x_n}{4} + x_n^3$. Trobeu el comportament asimptòtic de les òrbites per a tota condició inicial $x_0 \in \mathbb{R}$. Justifiqueu rigorosament les vostres afirmacions.

4. Demostreu rigurosament que $f(x) = \sin(x)$ té $x = 0$ com atractor global.

5. Demostreu que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és derivable, x_0 és un punt fix i $|f'(x_0)| > 1$ llavors x_0 és un punt fix repulsor.

6. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ i sigui x_0 un punt fix tal que $f'(x_0) = 1$. Doneu criteris sobre les derivades d'ordre superior, per determinar el retrat de fase local al voltant de x_0. Apliqueu-ho a determinar l'estabilitat dels punts fixos de $x^3 - x$.

7. **(Iteració d'homeomorfismes de $\mathbb{R}$)** Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció estrictament decreixent. Demostreu que per a tot $x \in \mathbb{R}$, l'òrbita de x convergeix a un punt fix, a una òrbita periòdica de període 2, o bé tendeix a infinit. *Indicació: observeu que f^2 és creixent.*

8. Sigui $f(x) = \cos(x)$. Demostreu que

(a) per a tot $x_0 \in \mathbb{R}$ es té que $x_2 \in [0, 1]$;

(b) f té un punt fix p localment atractor;

(c) f no té òrbites periòdiques;

(d) p és atractor global.

9. * Analitzeu el comportament asimptòtic de les òrbites de $x_{n+1} = r\frac{x_n}{1+x_n^2}$, amb r un paràmetre positiu. Trobeu i classifiqueu tots els punts fixos com a funcions de r. Poden haver-hi òrbites periòdiques de període 2?

10. * Sigui $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una funció $\mathcal{C}^\infty$ amb $f(0) = 0$, i sigui $p > 0$ un punt fix tal que $f'(p) \geq 0$. Suposeu a més que $f'(x)$ és estrictament decreixent. Demostreu que totes les òrbites amb condició inicial $x_0 > 0$ convergeixen a p.

11. * Considereu la iteració cúbica $x_{n+1} = f(x_n)$ on $f(x) = rx - x^3$.

(a) Trobeu els punts fixos. Per a quins valors de r existeixen? Per a aquins valors són estables?

(b) Suposem que $f(p) = q$ i $f(q) = p$. Demostreu que p i q són solucions de l'equació
$$x(x^2 - r + 1)(x^2 - r - 1)(x^4 - rx^2 + 1) = 0$$
i feu servir aquest fet per trobar totes les òrbites periòdiques de període 2.

(c) Determineu l'estabilitat de les òrbites periòdiques de període 2 en funció de r.

(d) Dibuixeu un diagrama de bifurcació parcial, basat en la informació obtinguda.

12. Sigui $F(x) = x + 2 - \arctan x$. Demostreu que totes les òrbites del sistema dinàmic definit per F escapen a l'infinit.

Sol: Veieu que $F(x) > x$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

13. Sigui $F : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que $F'(x) > 0$ i $F''(x) > 0$.

(a) Demostreu que $F'(0) < 1$. (*Indicació: Demostreu primer que si $F'(0) \geq 1$ llavors $F'(x) > 1$ per a tot $x \in (0, 1)$.*)

(b) Si assumim a més que $F(0) = 0$, demostreu que totes les òrbites amb condició inicial $x_0 \in (0, 1)$ convergeixen a 0.

14. Sigui $F_a(x) = ax^3 + \arctan x$ on $a \in \mathbb{R}$. Trobeu els valors d'a pels quals l'origen és repulsor.

Sol: $a \leq 1/3$.

15. Sigui

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{si } x \leq 0 \\ -4x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Observeu que $x = 0$ és un punt fix i que F no és derivable en 0. Demostreu que 0 és un punt fix repulsor. (*Indicació: estudieu* F^2.)

16. Considereu la família de funcions $F_a(x) = x^2 - ax$.

(a) Calculeu els punts fixos i estudieu-ne l'estabilitat.

(b) Calculeu les òrbites periòdiques de període 2 i estudieu-ne l'estabilitat.

(c) Utilitzeu la informació obtinguda per dibuixar un diagrama de bifurcació parcial de la família F_a.

(d) **Opcional:** Feu un programa per obtenir numèricament la resta del diagrama.

17. (Examen 2011) Quin tipus de bifurcació presenta la família $f_a(x) = x + a - x^2$ en $a = 0$? Dibuixeu el diagrama de bifurcació en un entorn de $a = 0$.

18. Estudieu el diagrama de bifurcació de la funció $F_a(x) = (x + a^2 - 1)(x^2 - 2x - a) + x$. Determineu quin tipus de bifurcació succeeix en $a = -1$. Mitjançant l'anàlisi gràfic, dibuixeu el retrat de fase de F_a abans, durant i després de la bifurcació.

Sol: sella-node. Hi ha 3 branques de punts fixos $p_1(a) = 1 - a^2$; $p_2(a) = 1 + \sqrt{1+a}$; $p_3(a) = 1 - \sqrt{1+a}$.

19. * **(Examen 2011)** Sigui $E_a(x) = ae^x$ amb $a > 0$. Trobeu el valor de a pel que succeeix una bifurcació sella-node. Mitjançant l'anàlisi gràfic, dibuixeu el retrat de fases de E_a abans, durant i després de la bifurcació.

Sol: $a = 1/e$.

20. * Sigui $F_a(x) = a - x^2$. Proveu que F_a experimenta una bifurcació sella-node quan $a = a_0 = -1/4$. Dibuixeu el diagrama de bifurcació en un entorn de a_0.

21. * (**Examen 2011)** Sigui $F_a(x) = a - x^2$. Determineu el valor de a pel qual un punt fix experimenta una bifurcació de doblament de període. Estudieu l'estabilitat de l'òrbita periòdica de període 2. *Indicació: Observeu que els punts fixos són les solucions de* $x^2 + x - a = 0$ *i feu servir que* $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = (x^2 + x - a)(x^2 - x + 1 - a)$.

Sol: $a = 3/4$. L'OP és atractora per a $a \in (3/4, 5/4)$

22. (Examen 2011) Donada la família de funcions $f_a(x) = a + x - e^x$ amb $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$, trobeu el valor de a pel qual f_a experimenta una bifurcació. Digueu de quin tipus és i verifiqueu-ne les condicions. Feu un esbós del diagrama de bifurcació.