7. Cónicas y cuádricas afines

7.1 En un pla afí real amb una referència afí fixada, trobeu les equacions de les paràboles que són tangents a la recta $y = 0$ en el punt $(1, 0)$ i a la recta $x - y + 1 = 0$ en el punt $(0, 1)$.

7.2 En un plano afín real, con una referencia fijada, escribir las ecuaciones de las hipérbolas que tienen como asíntotas dos rectas $a_1x + b_1y = c_1$ y $a_2x + b_1y = c_2$ concurrentes dadas.

7.3 Sigui T un triangle en el pla afí real i P el seu baricentre. Proveu que existeix una única cònica amb centre P circumscrita a T i classifiqueu-la des del punt de vista afí.

7.4 A un pla afí real es considera un paral·lelogram inscrit en una el·lipse. Demostreu que el punt d'intersecció de les diagonals del paral·lelogram és el centre de l'el·lipse.

7.5 Dado un trapecio no paralelogramo de un plano afín real, demostrar que existe una única parábola circunscrita a éste.

7.6 Determinar el tipo afín de la cónica C, de un plano afín real, que en una referencia afín tiene ecuación

$$x^2 + xy + y^2 + x = 0.$$

Determinar los restantes vértices de los paralelogramos inscritos en C que tienen vértices $(0, 0)$ y $(-1, 1)$.

7.7 Es consideren en el pla $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ dues rectes no paral.leles r i s i un punt P, $P \notin r \cup s$. Demostreu que el lloc geomètric dels punts mitjos de les interseccions amb r i s d'una recta variable per P és una hipèrbola que passa per P i $O = r \cap s$.

7.8 Es considera el pla afí $\mathbb{A}^2$ i en ell un sistema de coordenades afins fixat. Siguin $O = (1, 2)$, $O' = (2, 1)$ i $P = (a, b)$ amb $a, b \neq 0$. Sigui Q el lloc dels punts d'intersecciò de dues rectes variables $l \in O^*$ i $l' \in {O'}^*$ que, respectivament, tallen els eixos de coordenades $y = 0$ i $x = 0$ en punts alineats amb P. Determineu P per tal que Q sigui una hipérbola d'asímptotes paral.leles als eixos de coordenades.

7.9 Siguin C una hipèrbola del pla afí $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ i $p \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ un punt diferent del centre O de C. Demostreu que els punts mitjos de les cordes de C per p es troben sobre una cònica C' que passa per p i per O. Determineu el tipus afí de C' en funció de la posició de p.

7.10 Es considera un triangle ABC del pla afí real i l'afinitat $f : AB \longrightarrow AC$ definida per $f(A) = C$ i $f(B) = A$. Demostreu que el lloc dels punts $CP \cap Bf(P)$, en variar $P \in AB$, és una cònica no degenerada Q. Determineu el tipus afí de Q.

7.11 Es considera una quàdrica no degenerada Q de $\mathbb{A}^3$ i un punt propi $O \notin Q$ que no és el centre de Q. Proveu que les cordes de Q tals que el seu punt mig és O descriuen el pla que passa per O i és paral.lel al pla polar de O respecte de Q.

7.12 Sigui Q una quàdrica no degenerada amb centre de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ i $p, q \in Q$, $p \neq q$. Demostreu que els plans tangents a Q en p i q són paral.lels si i només si la recta $p \vee q$ és un diàmetre de Q. (Nota: diàmetres d'una quàdrica = rectes pel seu centre).

7.13 Sigui Q una quàdrica no degenerada de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Demostreu que si dos plans diferents per un punt O de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tallen Q en còniques no degenerades amb centre O, llavors Q és una quàdrica amb centre O.

7.14 Determineu el tipus afí de les següents quàdriques de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

$$bx^2 + (2b + a)y^2 + bz^2 + 2bxy - 2byz - b = 0.$$

en funció d'a i b.

7.15 Classifiqueu afinment les quàdriques de la família:

$$by^2 + az^2 + 2axy - 2by - b = 0$$

segons els valors dels paràmetres a i b.

7.16 Es considera la família de quàdriques de l'espai afí real

$$(a + b)x^2 + (a - 5b)y^2 + az^2 + (2a - 4b)xy + 2axz + 2ayz - b = 0$$

Determineu les que són degenerades i classifiqueu aquestes des del punt de vista afí. Determineu també els centres de les no degenerades.

7.17 Sigui Q la quàdrica de l'espai afí real de dimensió tres que en certa referència té equació:

$$-z^2 + 2xy + 2z = 0.$$

(a) Determineu-ne el tipus afí.

(b) Trobeu els plans que tallen Q en paràboles que passen pels punts $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 2)$.

7.18 Sigui Q la quàdrica de l'espai afí real de dimensió tres:

$$-y^2 + 2xy + 2yz + 2z + 1 = 0.$$

(a) Determineu el seu tipus afí.

(b) Trobeu, si existeix, l'equació del pla que passa pel punt $p = (1, 1, 1)$ i que talla Q en una cònica no degenerada de centre p.

7.19 En l'espai afí de dimensió 3 es dóna la quàdrica Q que en certa referència té equació:

$$x^2 + 2x + 2yz = 0.$$

(a) Classifiqueu Q.

(b) Trobeu els plans π que passen pel punt $(1, 1, -2)$ i tallen Q en un parell de rectes paral·leles.

7.20 Fixada en l'espai afí $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ una referència, sigui Q la quàdrica donada per l'equació:

$$-2xy + 2xz + 2yz + 2z^2 = 1.$$

(a) Determineu-ne el tipus afí.

(b) Trobeu les generatrius de Q paral·leles al primer eix de coordenades.

7.21 Considerem la quàdrica Q de l'espai afí real $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que en certa referència te equació

$$x^2 - 2xz + 2y - 1 = 0.$$

(a) Determineu el tipus afí de Q.

(b) Trobeu les rectes contingudes en Q.

7.22 Fixada una referència a l'espai afí $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ considerem la quàdrica afí Q definida per l'equació

$$x^2 + 2yz + 2z - 1 = 0.$$

(a) Classifiqueu Q.

(b) Demostreu que les seccions de Q pels plans paral·lels al pla $y = z$ són còniques no degenerades amb centre i determineu el lloc geomètric dels centres així obtinguts.

7.23 Sigui Q la quàdrica de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que en una certa referència té equació

$$z - x - 4xy = 0.$$

(i) Determineu el tipus afí de Q.

(ii) Demostreu que les rectes que tallen Q en parells de punts amb punt mig $(1, 0, 0)$ estan sobre un pla. Determineu-lo.

7.24 Fijada en un espacio afín $\mathbb{A}_3$ una referencia, se consideran las rectas

$$\ell_1 : x - 1 = 0, \quad y - 1 = 0,$$
$$\ell_2 : x = 0, \quad z - 1 = 0$$

y el plano

$$\pi : x + y + z = 0.$$

Demostrar que las rectas de $\mathbb{A}_3$ que cortan a ℓ_1 y ℓ_2 y son paralelas a π están contenidas en cuádrica

$$Q : x^2 + xy + xz - 3x - z + 1 = 0.$$

Determinar el tipo afín de Q.