III. Cuádricas de un espacio proyectivo

(III.1) Formas bilineales simétricas y cuádricas proyectivas. Formas bilineales simétricas en espacios vectoriales. Núcleo y rango. Formas bilineales no degeneradas. Matriz en una base dada, y fórmula para el cambio de base. El morfismo $\lambda : E \to E^*$ asociado a una forma bilineal simétrica de E.

Definición: cuádrica $Q =< \psi >$ de un espacio proyectivo $P = \mathbb{P}(E)$ sobre un cuerpo K de característica diferente de 2. El conjunto de puntos $|Q|$ de una cuádrica Q. Matriz y ecuación (determinadas salvo un factor escalar no nulo) de una cuádrica en una referencia dada.

(III.2) Rango y vértice de una cuádrica. Cuádricas degeneradas y cuádricas no degeneradas. Ecuaciones del vértice. La inclusión del vértice en el conjunto de puntos de la cuádrica.

(III.3) Ecuaciones diagonales. Cuádricas de rango 1 ó 2. Cuádricas de una recta. Reducción a forma diagonal de la ecuación de una cuádrica. Las cuádricas de rango 1 (hiperplanos dobles) y las cuádricas de rango 2 (pares de hiperplanos o pares de hiperplanos imaginarios conjugados). Aplicación a las cuádricas de una recta proyectiva: no degeneradas (pares de puntos o pares de puntos imaginarios conjugados) y degeneradas (puntos dobles).

(III.4) Conjugación, polaridad y tangencia. Conjugación de puntos respecto de una cuádrica. Expresión en coordenadas. Los puntos autoconjugados o puntos de la cuádrica. Los puntos del vértice, o puntos conjugados con todo el espacio proyectivo. Las variedades lineales contenidas en la cuádrica, o variedades lineales con todos sus puntos mutuamente conjugados. El caso particular de las cuádricas en una recta proyectiva y la relación con la conjugación armónica de puntos.

Subespacio polar P'_{pol} de un subespacio $P' \subset P$ respecto de una cuádrica Q de P. Fórmula para la dimensión de P'_{pol}. 1) El caso particular dim $P' = 0$: El hiperplano polar H_x de un punto $x \in P$ no peteneciente al vértice $V(Q)$ de Q, y su ecuación. 2) El caso particular de las cuádricas no degeneradas: la polaridad $P \to P^\vee$, $x \mapsto H_x$ asociada a una cuádrica no degenerada, y sus ecuaciones.

Restricción $Q|P'$ de una cuádrica Q de P a un subespacio proyectivo $P' \subset P$ no contenido en $|Q|$. Cálculo con coordenadas. Conjugación y restricción. Posiciones relativas de una cuádrica Q de P con cada una de las rectas $L \subset P$ que pasan por un punto $x \in Q$ fijado. Rectas transversales y rectas tangentes a Q en x. Puntos no singulares (o no pertenecientes al vértice $V(Q)$) y puntos singulares (o perteneciantes al vértice $V(Q)$) de una cuádrica. En puntos singulares, toda recta por el punto es tangente a la cuádrica en el mismo. En puntos no singulares, el hiperplano polar H_x es la reunión de las rectas tangentes a Q en x y se denomina por ello el hiperplano tangente de Q en x.

Construcción gráfica de polares, polos y rectas tangentes respecto de una cónica no degenerada en un plano proyectivo.

(III.5) Clasificación proyectiva de cuádricas y ecuaciones reducidas. Transporte de cuádricas por proyectividades (imagen recṕroca) y equivalencia proyectiva de cuádricas. La equivalencia proyectiva de dos cuádricas, vista como la posibilidad de describirlas mediante una misma ecuación, en referencias apropiadas.

Teorema de clasificación de las cuádricas sobre cuerpo algebraicamente cerrado: dos cuádricas en un espacio proyectivo sobre un cuerpo algebraicamente cerrado son proyectivamente equivalentes si y solamente si tienen el mismo rango. Ecuaciones reducidas de la cuádricas en un espacio proyectivo sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

Indice de una cuádrica Q en un espacio proyectivo P sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y su relación con la máxima dimensión de un subespacio proyectivo de P contenido en (resp. disjunto con) el conjunto $|Q|$ de los puntos de Q. Teorema de clasificación de las cuádricas sobre el cuerpo de los números reales: dos cuádricas en un espacio proyectivo sobre $\mathbb{R}$ son proyectivamente equivalentes si y solamente si tienen el mismo rango y el mísmo índice. Ecuaciones reducidas de la cuádricas en un espacio proyectivo sobre $\mathbb{R}$.