Problema 26. Considerem el grup diedral $D_{2\cdot n}$.

(a) Expliciteu tots els subgrups de $D_{2\cdot 4}$ i digueu quins són normals.

(b) Demostreu que $D_{2\cdot n}$ té un subgrup normal d'ordre n, que és cíclic.

(c) Demostreu que $D_{2\cdot 3} \simeq S_3$.

Solució.

(a)

$D_{2\cdot 4} =< \rho, \sigma >$, on $\rho^4 = e$, $\sigma^2 = e$, $\sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$, $\rho^2 \neq e$ i $\sigma \neq e$

Per construir $< \rho, \sigma >$ hem de fer tots els productes entre ells i entre els seus inversos. Si fem servir la propietat $\rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$, es dedueix fàcilment $(\rho\sigma)^{-1} = \rho\sigma$, $(\rho^2\sigma)^{-1} = \rho^2\sigma$ i $(\rho^3\sigma)^{-1} = \rho^3\sigma$, per tant es comprova que totes les combinacions donen lloc a:

$D_{2\cdot 4} = \{e, \sigma, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma\}$.

Observem que l'ordre de $D_{2\cdot 4}$ és 8; per tant, pel teorema de Lagrange, només podem tenir subgrups d'ordres 1, 2, 4 i 8. Comencem pels subgrups cíclics a partir d'elements de $D_{2\cdot 4}$:

$< e >= \{e\}$ (ordre 1)

$< \sigma >= \{e, \sigma\}$ (ordre 2)

$< \rho >= \{e, \rho, \rho^2, \rho^3\} =< \rho^3 >$ (ordre 4)

$< \rho^2 >= \{e, \rho^2\}$ (ordre 2)

$< \rho\sigma >= \{e, \rho\sigma\}$ (ordre 2)

$< \rho^2\sigma >= \{e, \rho^2\sigma\}$ (ordre 2)

$< \rho^3\sigma >= \{e, \rho^3\sigma\}$ (ordre2)

Com que l'ordre de $< \rho >$ és 4, qualsevol subconjunt que contingui ρ i un element no pertanyent a $< \rho >$ ens generarà tot $D_{2\cdot 4}$ (1)

Construïm, doncs, la resta de possibles subgrups.

Amb σ: $< \sigma, \rho^2 >= \{e, \sigma, \rho^2, \sigma\rho^2\} =< \sigma, \rho^2\sigma >$ (ordre 4).

Els altres dos, $< \sigma, \rho\sigma >$ i $< \sigma, \rho^3\sigma >$, ens generen el total.

Amb ρ^2: $< \rho^2, \rho\sigma >= \{e, \rho^2, \rho\sigma, \rho^3\sigma\} =< \rho^2, \rho^3\sigma >$ (ordre 4)

Si fem $< \rho^2, \rho^2\sigma >$ torna a sortir $< \sigma, \rho^2 >$.

Amb $\rho\sigma$: $< \rho\sigma, \rho^2\sigma >= D_{2\cdot 4}$ i $< \rho^2, \rho\sigma >$ l'hem vist abans estudiant ρ^2.

Per tant amb $\rho\sigma$ només resta veure $< \rho\sigma, \rho^3\sigma >=< \rho^2, \rho\sigma >$, vist abans.

Finalment, $< \rho^2\sigma, \rho^3\sigma >$ torna a generar el total i aquests son tots els subgrups possibles (per cardinalitat, com hem comentat a (1)).

Tenim, doncs, tres subgrups d'ordre 4 i cinc subgrups d'ordre 2.

Per determinar els subgrups normals, clarament tenim que els d'ordre 4 són normals com a conseqüencia del teorema de Lagrange, ja que el seu índex és 2 i tot subgrup d'índex 2 és normal per l'exercici 19.

Pel que respecta als subgrups d'ordre 2, l'únic que és normal a $D_{2\cdot 4}$ és $< \rho^2 >$.

(b)

Sabem que $D_{2\cdot n}$ sempre conté a $< \rho >$, que té ordre n i és cíclic. D'altra banda, sabem pel teorema de Lagrange que si G es un grup finit, i H⊆G és un subgrup de G, llavors l'ordre d'H divideix l'ordre de G. En particular tenim la igualtat $|G| = |H| \cdot [G : H]$, on $[G : H]$ és l'índex de H en G. Per tant, si ho apliquem al cas particular on G=$D_{2\cdot n}$ i H=$< \rho >$, tenim $2n = n \cdot [G : H]$ i resulta que l'índex de H en G és 2 i per tant $< \rho >$ és normal en $D_{2\cdot n}$ (per l'exercici 19).

(c)

Per aquest apartat farem servir la notació anterior per als elements de $D_{2\cdot 3}$ i la notació de permutacions habitual per als elements de S_3.

Donarem explícitament un morfisme de grups entre $D_{2\cdot 3}$ i S_3. Tot i que en podem trobar més d'un, hem triat el següent:

Sigui f: $D_{2\cdot 3} \longrightarrow S_3$

$f(e) = Id$

$f(\sigma) = (12)$

$f(\rho) = (123)$

$f(\rho^2) = (132)$

$f(\rho\sigma) = (13)$

$f(\rho^2\sigma) = (23)$

Comprovem que f és, de fet, un isomomorfisme de grups.

f homomorfisme:

$f(e) = e$ per definició.

$f(\rho)f(\sigma)$ =(123)(12)=(13)=$f(\rho\sigma)$.

$f(\rho^2)f(\sigma)$ =(132)(12)=(23)=$f(\rho^2\sigma)$, etc.

f bijectiva:

f és clarament injectiva ja que $Ker(f) = e$, i f és exhaustiva per construcció (tot element de S_3 té antiimatge en $D_{2\cdot 3}$ per f).