

CÀLCUL INTEGRAL EN DIVERSES VARIABLES

EXAMEN PARCIAL

Març 2012

1. a) (3 punts) Si $E \subset \mathbf{R}^n$ és un conjunt mesurable, i $f : E \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ una funció mesurable, definiu, quan tingui sentit, $\int_E f$.

b) (3'5 punts) Sigui $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definida com $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ 3, & \text{si } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$

Justifiqueu l'existència i calculeu $\int_{[0,1]} f$.

c) (3'5 punts) Enuncieu el teorema de Fubini en \mathbf{R}^2 .

2. a) (5 punts) Proveu que les equacions $u = x - y$, $v = e^x + e^y$, defineixen un canvi de variables entre \mathbf{R}^2 i $\mathbf{R} \times (0, +\infty)$.

b) (5 punts) Calculeu $\int_A f$, essent la funció $f(x, y) = (x - y)(e^x + e^y)^2$, i el conjunt mesurable $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x - y < 2, 8 < e^x + e^y - x + y < 10\}$

3. a) (3 punts) Expliqueu el canvi a coordenades cilíndriques en \mathbf{R}^3 .

b) (7 punts) Estudieu, en termes del paràmetre $a \in \mathbf{R}$, la integrabilitat de la funció

$$f_a(x, y, z) = \frac{z}{|x^2 + y^2 + z^2 - 2|^a}$$

sobre el conjunt mesurable $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0, 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 3\}$

ENTREGUEU ELS EXERCICIS EN FULLS SEPARATS

POSEU EL NOM EN TOTS ELS FULLS