Problema 34. Demostreu que, si G és un grup, llavors

$$G/Z(G) \simeq \mathrm{Int}(G).$$

En particular, si $Z(G) = \{1\}$, llavors $\mathrm{Int}(G) \simeq G$. Quin és el grup $\mathrm{Int}(G)$ quan G és abelià?

Nota 1: Es denota per $\mathrm{Int}(G)$ el conjunt d'automorfismes interns de G, és a dir, dels automorfismes φ_g definits per $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$, per a $h \in G$ i $g \in G$.

Nota 2: Sabem que si G és un grup, el seu centre, $Z(G) := \{g \in G : gh = hg, \text{ per a tot } h \in G\}$, és un subgrup normal de G.

Solució. Sigui f l'aplicació següent:

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow \mathrm{Int}(G). \\ g &\longmapsto \varphi_g \end{aligned}$$

Si demostrem que:

(1) f és morfisme de grups,

(2) $\mathrm{Int}(G) = Im(f)$,

(3) $Z(G) = Ker(f)$,

podem aplicar el teorema d'isomorfia, que proporciona l'existència d'un isomorfisme $\tilde{f}$ entre $G/Z(G)$ i $\mathrm{Int}(G)$ tal que $\tilde{f}(g) = \varphi_g$; d'aquesta manera, obtenim que $G/Z(G) \simeq \mathrm{Int}(G)$.

(1) f **és morfisme de grups**: Volem demostrar que $f(g_1g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$, $g_1, g_2 \in G$. Tenim que:

$$\begin{aligned} f(g_1g_2) &= \varphi_{g_1g_2}, \\ f(g_1) \circ f(g_2) &= \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}. \end{aligned}$$

Hem de veure que són iguals:

$$\forall h \in G,\ \varphi_{g_1g_2}(h) = g_1g_2hg_2^{-1}g_1^{-1} = \varphi_{g_1}(g_2hg_2^{-1}) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(h)) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(h).$$

Demostrada la igualtat anterior, tenim que f és morfisme de grups.

(2) $\mathrm{Int}(G) = Im(f)$.

Per definició, $\mathrm{Int}(G) = \{\varphi_g : g \in G\}$, de manera que, per la seva pròpia definició, f és exhaustiva.

(3) $Z(G) = Ker(f)$.

$g \in Ker(f) \Leftrightarrow \varphi_g = Id \Leftrightarrow \varphi_g(h) = h, \forall h \in G \Leftrightarrow ghg^{-1} = h, \forall h \in G \Leftrightarrow gh = hg, \forall h \in G \Leftrightarrow g \in Z(G)$.

Cas particular: $Z(G) = \{1\}$.

Si $Z(G) = \{1\}$, llavors $G/Z(G) \simeq G$ (isomorfisme: $G \xrightarrow{Id} G$ és exhaustiu i $Ker(Id) = \{1\}$).

Cas particular: G abelià.

Quan G és abelià, $G = Z(G)$ i $|G/Z(G)| = 1$. $\mathrm{Int}(G)$ està format per un únic element que ha de ser necessàriament l'automorfisme indentitat, present en tots els subgrups d'automorfismes.