

Projet 19 – Simulation de l'écoulement de fluides inertiels avec un modèle de gaz sur réseau

Sujet du projet

Ce projet porte sur les différents régimes d'écoulement d'un fluide. On s'intéressera au comportement d'un fluide frappant un obstacle dans un régime laminaire ainsi qu'inertiel. On abordera aussi la compressibilité du fluide et la vitesse du son dans celui-ci.

Importance

La modélisation de fluides est l'un des problèmes les plus importants autant de la physique mathématique que de la modélisation numérique. Bien qu'à très basse vitesse, les fluides comme l'eau se comportent de manière prévisible et régulière, notre expérience quotidienne est remplie de situations où des effets inertiels importants se produisent (par exemple, la forme des nuages, l'écoulement de l'eau dans un évier, la trainée derrière un bateau à moteur ou les vortex produits à l'extrémité des ailes des avions).



Vortex de Von Karman derrière un obstacle cylindrique



Instabilité de Kelvin-Helmholtz vue dans les nuages



Vortex à l'extrémité de l'aile d'un avion

Concrètement, ces effets modifient considérablement le comportement des fluides et affectent le design et la conception d'objets du quotidien, en particulier la forme des voitures qui est optimisée pour minimiser la trainée.

Il se trouve que cette non-linéarité dans le comportement des fluides rend très complexe l'analyse de tels phénomènes, même lorsque l'on utilise des outils numériques. La méthode que vous implémenterez constitue un outil puissant dans la modélisation de comportements complexes de fluides.

But général du projet

Implémenter un modèle *bottom-up* pour simuler un fluide et utiliser ce modèle pour simuler la transition entre les régimes laminaire et inertiel.

La méthode la plus commune pour la modélisation numérique d'un fluide est l'approche *top-down* : on commence par écrire l'équation continue (dans notre cas, l'équation de Navier-Stokes¹ qui décrit la conservation de la quantité de mouvement d'un fluide incompressible)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}^T) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

que l'on discrétise pour en obtenir une version traitable par un ordinateur.

Ici, on utilisera une approche dans l'autre sens. On simulera un modèle microscopique qui est différent de la dynamique réelle d'un fluide, mais qui respecte l'équation de Navier-Stokes lorsqu'il est moyenné convenablement.

Les méthodes de gaz sur réseaux (en anglais : *lattice gas automata*, LGA) sont un précurseur aux méthodes de Boltzmann sur réseaux (*lattice Boltzmann methods*) plus poussées [1] qui sont couramment utilisées pour modéliser des problèmes complexes de mécanique des fluides comme la suspension de bulles dans un fluide ou le déplacement d'interfaces complexes.

Livrables du projet

Vous devrez utiliser votre modèle pour simuler deux phénomènes différents, soit la propagation d'une onde sonore dans le fluide et la trainée derrière un obstacle de dimension finie

Méthodologie proposée

- Choisir un modèle microscopique pour simuler l'équation de Navier-Stokes. On vous demande d'implémenter le modèle HPP [2] ainsi qu'au moins un modèle hexagonal (par exemple l'une des variantes du modèle FHP [3]).
- Implémenter les conditions aux frontières appropriées. En particulier, décidez si vous avez besoin de conditions périodiques, de murs sans glissement ou de murs avec glissement. Comment chacune de ces conditions se traduit à l'échelle du modèle microscopique?
- Établir le lien entre les différentes propriétés macroscopiques continues du fluide et les grandeurs discrètes du modèle. Comment définissez-vous la vitesse, la densité, le nombre de Reynolds de l'écoulement?
- Pour chaque simulation, vous devrez choisir un volume d'intégration approprié pour calculer le champ de vitesse ainsi que les différentes propriétés continues du fluide. Qu'arrive-t-il si le volume choisi est trop petit? Qu'arrive-t-il s'il est trop grand? Quel lien pouvez-vous faire avec une expérience sur un fluide réel?
- Simuler la propagation d'une onde sonore dans un volume de fluide. Pour ce faire, vous pouvez initialiser le fluide avec une densité constante et une quantité de mouvement moyenne nulle. On

¹ Ici, \vec{u} est le champ de vitesse du fluide, ρ est sa masse volumique, p sa pression et μ sa viscosité dynamique.

peut placer une zone circulaire de densité plus élevée au centre du volume et étudier comment celle-ci évolue au cours du temps. À partir de cette expérience numérique, déterminer une vitesse du son dans le fluide. Cette vitesse dépend-elle de la densité du fluide? De la densité de la perturbation initiale? Si oui, comment?

- f) Simuler la trainée derrière un obstacle linéaire pour différents nombres de Reynolds. Pour ce faire, vous devrez utiliser un domaine suffisamment grand avec des conditions périodiques dans au moins une direction. Pouvez-vous observer la transition entre le régime laminaire et inertiel? Comment vos conditions aux frontières affectent-elles la situation simulée? Le fluide est-il incompressible? Dans quelles conditions?
- g) Observez-vous des irrégularités entre votre modèle et la situation attendue? Comment les deux modèles se comparent-ils à cet égard?
- h) Trouver une manière efficace de visualiser les vortex derrière l'obstacle simulé.

Sources

[1] Succi, Sauro, and Sauro Succi. *The lattice Boltzmann equation: for fluid dynamics and beyond*. Oxford university press, 2001.

[2] Hardy, J., Yves Pomeau, and O. De Pazzis. "Time evolution of a two-dimensional model system. I. Invariant states and time correlation functions." *Journal of Mathematical Physics* 14.12 (1973): 1746-1759.

[3] Frisch, Uriel, Brosl Hasslacher, and Yves Pomeau. "Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation." *Physical review letters* 56.14 (1986): 1505.

Références utiles

Wolf-Gladrow, Dieter A. *Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models: an introduction*. Springer, 2004.

Sources des images

https://en.wikipedia.org/wiki/K%C3%A1rm%C3%A1n_vortex_street#/media/File:Karmansche_Wirbelstr_kleine_Re.JPG

<http://earthsky.org/earth/kelvin-helmholtz-clouds>

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fe/Airplane_vortex_edit.jpg