UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika

Marcel Blagotinšek, Peter Milivojević

Maximum number of edges in a connected graph with n vertices and diameter d

Skupinski projekt

Poročilo

Advisers: doc. dr. Janoš Vidali,
prof. dr. Riste Škrekovski

Ljubljana, 2023

1. Navodilo naloge

A connected graph with diameter d on n vertices with the minimal number of edges will be a tree and henceforth, it will have $n-1$ edges. It will be harder to answer which graphs on a fixed number of vertices n and fixed diameter d have the maximal number of edges. We want to analyse the structure of such graphs. So, for a fixed number of vertices n and a fixed diameter d, when these two values are small, apply an exhaustive search. Next, for larger n and d, apply some metaheuristic. Try to obtain some specific properties of these graphs. Verify for how large n and d your exhaustive search and your metaheuristic implementations are efficent.

2. Opis problema

Želiva poiskati povezane grafe na n vozliščih s premerom d, ki bodo imeli maksimalno število povezav. Najin cilj je, na podlagi testiranja oz. generiranja, pridobiti kar se da dober vpogled v strukturo teh grafov in posledično ugotoviti, če za njih veljajo kakšne posebne lastnosti. Za majhne vrednosti n in d, se bova problema lotila z generiranjem grafov, za večje pa bova uporabila metodo simulated annealing. Ugotavljala bova tudi efektivnost najinih metod v odvisnosti od vrednosti n in d.

3. Potek Dela

Ideja prve faze projekta t.i. exhaustive search-a je, da z generiranjem vseh možnih povezanih grafov na n vozliščih s premerom d, poiščeva tiste, ki imajo maksimalno število povezav. To bova počela za majhne vrednosti n in d. Kako majhne, bo odvisno od časovne zahtevnosti samega algoritma, kajti je pričakovati, da bo že pri ne malo od 5 večjih vrednostih n algoritem počasen. Na podlagi generiranja grafov za različne n in d bova poskušala ugotoviti kakšne lastnosti, tako strukturne kot vizualne, lahko pripiševa tem grafom. Naraščanje/padanje števila povezav v odvisnosti od števila vozlišč oz. premetra bova prikazala tudi s pomočjo grafa, ki se bo morda obnašal podobno kot kakšna znana funkcija, kar bo vsekakor pomagalo pri oceni števila povezav za večje vrednosti n in d. Kot omenjeno bova poskusila najti kakšno formulo za maksimalno število povezav pri številu vozlišč n in premeru d. Tako pridobljene formule, četudi bo morda držala, ne bova dokazovala in jo bova posledično uporabila kot oceno v primeru generiranja grafov. Na koncu bova poleg ugotovitev glede lastnosti grafov v poročilu zapisala tudi pri kako velikih vrednostih n in d je najin algoritem prenehal učinkovito delovati. V drugi fazi projekta se bova problema lotila z metahevristično metodo simulated annealing. Začela bova z nekim začetnim povezanim grafom G, ki bo ustrezal pogojem n in d, nato pa bova dodala povezavo iz množice povezav komplementa grafa G. V kolikor bo premer grafa $G+e$ ostal isti, imamo nov graf, ki ima isti premer vendar povezavo več. Če bo premer novega grafa manjši od d, pa bova poiskala vozlišči u in v na maksimalni razdalji in odstranjevala povezave iz poti med u in v toliko časa, dokler ne bo premer spet d. Seveda se lahko zgodi, da bo premer večji od d, takrat pa bova spet poiskala vozlišči u in v na maksimalni razdalji in dodajala neke povezave na poti med u in v toliko časa, dokler ne bo premer spet d. Povezave bova morala dodajati med ustreznimi vozlišči. Torej, če bo nov premer $d-1$, bova dodala povezavo med vozliščema na oddaljenosti 2. Pri tem se zavedava, da z neko verjetnostjo v nekem koraku vzameva graf z manj povezavami, ki pa je morda boljše izhodišče za naprej. Tudi tukaj bova začela na manjših vrednostih, in s tem preveriva, če najin algoritem deluje, nato

pa n in d povečujeva. Tudi v drugi fazi projekta bova pozorna na efektivnost oz. časovno zahtevnost, ter bova ugotovitve glede tega zapisala v poročilu.
Algoritme in programe bova v obeh fazah pisala v CoCalc Jupyter notebook-u.

4. Koda

Komentirana koda programov je dostopna na povezavi.

5. Ugotovitve

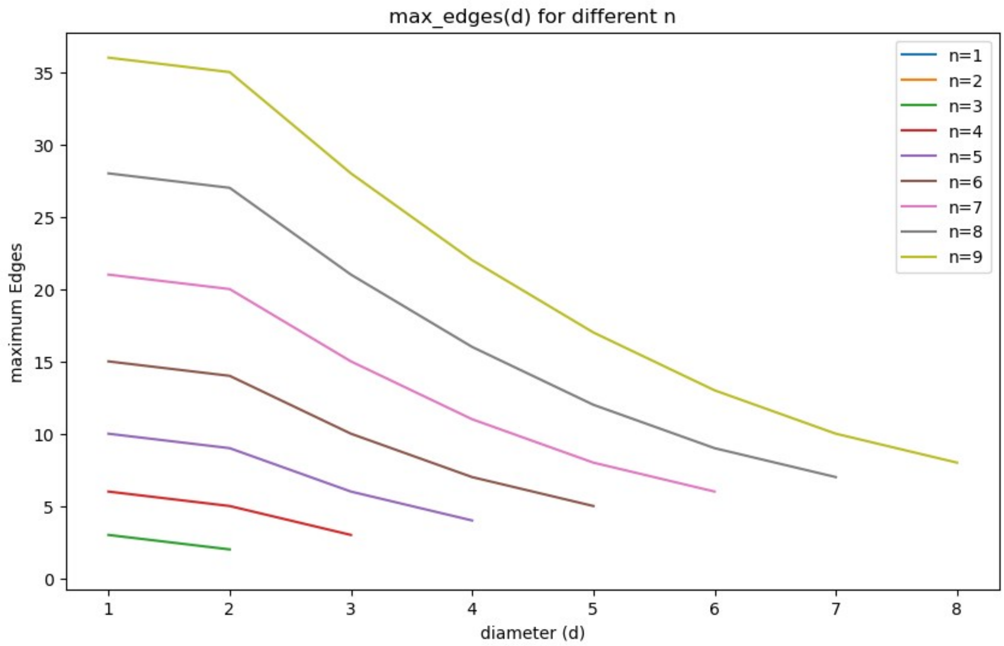
5.1. 1. faza - ugotovitve:

Za $d = 1$ ugotovimo, da je ne glede na izbiro števila vozlišč n, iskani graf ravno polni graf in ima posledično $\frac{n(n-1)}{2}$ povezav. V nasledjem koraku hitro ugotovimo, da se pri $d = 2$ število povezav zmanjša le za 1, saj se z odstranitvijo katere koli poljubne povezave v polnem grafu premer poveča na $d = 2$ in ker smo za to potrebovali odstraniti le eno samo povezavo je največje možno število povezav v grafu z n točkami in premerom $d = 2$ enako $\frac{n(n-1)}{2} - 1$. Podobno opazimo, da so grafi za premere $d = n - 1$ ravno drevesa s stopnjo 2 in je zato število povezav enako $n - 1$. Tako nas pri dani nalogi v resnici zanimajo predvsem grafi z $d \in \{3, \ldots, n-2\}$.
V prvi fazi sva pričela reševati z opazovanjem in računanjem grafov z manjšim številom vozlišč n, pri tem sva si pomagala tudi s kodo iz 4.1.

Napisani algoritem je z uporabo funkcije nauty geng generiral vse povezane grafe na n vozliščih, izločeval tiste, katerih premer ni bil enak d, ter posodabljal spremenljivko z maksimalnim številom povezav ter tem povezavam ustreznemu grafu. Podatke o največjem možnem številu povezav za grafe do 10 vozlišč sva zbrala v tabeli 1 in vrednosti prikazala na spodnjem grafu.

n\d	**Število povezav**								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2	1								
3	3	2							
4	6	5	3						
5	10	9	6	4					
6	15	14	10	7	5				
7	21	20	15	11	8	6			
8	28	27	21	16	12	9	7		
9	36	35	28	22	17	13	10	8	
10	45	44	36	29	23	18	14	11	9

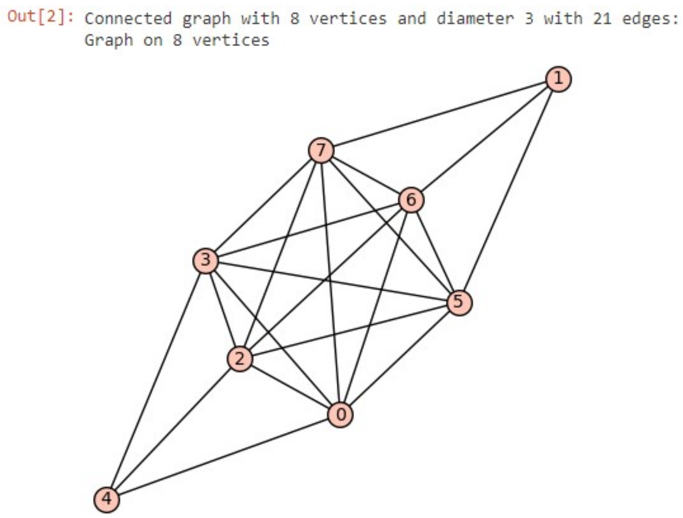
Tabela 1. Število povezav glede na število vozlišč in premer.



Slika 1. Maksimalno število povezav v odvisnosti od d pri različnih n.

Z opazovanjem tabele sva na podlagi vzorca uspela za grafe z $d > 1$ zapisati formulo, ki nama pove maksimalno število povezav v grafu z n vozlišči in premerom d t.j. $\frac{(n-d+1)(n-d)}{2} + n - 2$. Te formule ne bova dokazovala in jo bova v nadaljnem raziskovanju uporabljala kot oceno, saj vanjo brez dokaza ne moreva biti popolnoma prepričana.

Z nadaljnim opazovanjem generiranih grafov sva opazila, da vsi grafi vsebujejo poln podgraf velikosti $n - d + 1$. Na grafu prikazanem spodaj se to lepo vidi.



Slika 2. Graf z 8 vozlišči in premerom 3, ki vsebuje poln podgraf velikosti 6.

Glede učinkovitosti sva ugotovila, da je najin algoritem učinkovit za grafe z številom vozlišč do 9. Od tod naprej traja enostavno preveč časa. Že pri številu vozlišč enako 8, je povezanih grafov kar 251548592.

5.2. 2. faza - testiranje:

n\d	Število povezav																																											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
2	1																																											
3	3	2																																										
4	6	5	3																																									
5	10	9	6	4																																								
6	15	14	10	7	5																																							
7	21	20	15	11	8	6																																						
8	28	27	21	16	12	9	7																																					
9	36	35	28	22	17	13	10	8																																				
10	45	44	36	29	23	18	14	11	9																																			
11	55	54	45	37	30	23	19	15	12	10																																		
12	66	65	55	46	38	30	22	20	16	13	11																																	
13	78	77	66	56	47	31	30	23	20	17	14	12																																
14	91	90	78	67	53	48	39	29	27	20	17	15	13																															
15	105	104	91	79	65	46	49	41	27	24	21	19	16	14																														
16	120	119	105	92	76	63	47	38	32	35	29	24	20	17	15																													
17	136	135	120	103	93	58	52	55	45	34	32	27	23	21	18	16																												
18	153	152	136	121	107	63	58	61	45	42	39	31	26	24	22	19	17																											
19	171	170	153	133	116	90	63	62	57	43	39	37	31	28	27	22	20	18																										
20	190	189	171	154	126	107	82	68	61	56	51	40	42	31	28	26	23	21	19																									
21	210	209	190	172	155	133	99	75	62	69	50	57	45	39	32	31	27	24	22	20																								
22	231	230	210	179	146	144	104	87	75	64	77	57	49	39	35	37	30	28	25	23	21																							
23	253	252	231	203	192	169	157	99	72	74	68	62	54	49	43	41	36	31	28	26	24	22																						
24	276	275	253	226	207	123	147	105	100	91	69	69	57	56	48	41	41	36	37	30	27	25	23																					
25	300	299	276	248	219	213	148	112	111	100	73	79	58	62	54	50	44	39	37	33	30	28	26	24																				
26	325	324	300	262	237	146	156	174	140	91	92	90	77	71	69	51	46	48	42	37	34	32	29	27	25																			
27	351	350	325	294	210	172	173	135	124	113	123	88	93	67	67	54	60	47	44	44	39	35	33	30	28	26																		
28	378	377	351	314	223	222	151	190	180	127	134	88	79	79	76	66	63	58	50	43	45	39	36	33	31	29	27																	
29	406	405	378	343	281	194	168	200	159	115	137	102	81	87	71	74	65	57	58	51	47	42	40	39	34	32	30	28																
30	435	434	406	364	294	321	186	163	152	145	122	109	96	99	89	82	71	59	56	53	60	49	42	40	38	36	33	31	29															
31	465	464	435	392	286	241	248	175	147	178	124	109	104	90	103	89	90	75	65	56	51	53	47	43	41	41	37	34	32	30														
32	496	495	465	412	363	281	231	184	178	191	209	133	135	118	100	85	85	76	74	66	60	58	54	47	47	41	42	37	35	33	31													
33	528	527	496	450	390	256	239	202	208	211	172	134	132	107	100	97	86	100	78	66	66	63	57	60	47	46	43	41	38	36	34	32												
34	561	560	528	489	370	309	261	224	187	205	145	204	120	117	117	115	92	92	87	102	72	67	69	54	52	51	49	46	42	40	37	35	33											
35	595	594	561	480	399	328	293	219	240	187	158	138	138	139	123	107	97	91	79	78	83	72	65	62	60	54	52	48	45	43	41	38	36	34										
36	630	629	595	547	394	295	281	239	282	192	157	158	163	135	136	114	108	98	89	78	79	76	69	69	60	60	55	51	49	46	44	41	40	37	35									
37	666	665	630	579	390	435	288	245	236	195	203	196	147	138	133	123	121	100	108	96	80	82	74	77	78	62	63	54	51	50	49	45	43	40	38	36								
38	703	702	666	599	514	363	326	306	219	215	197	160	151	164	133	132	109	111	119	99	90	88	81	83	71	64	65	64	59	53	50	50	45	43	41	39	37							
39	741	740	703	650	530	360	330	277	259	218	219	257	178	159	156	133	116	118	106	108	108	104	90	81	74	79	77	64	60	59	54	51	48	47	44	42	40	38						
40	780	779	741	656	493	480	318	304	256	283	204	200	176	224	176	145	123	147	117	117	102	103	89	88	85	82	90	67	62	64	58	63	57	49	48	46	43	41	39					
41	820	819	780	695	564	489	356	316	283	342	248	237	212	162	178	147	177	122	135	126	133	108	99	91	99	81	95	71	71	67	64	61	55	54	51	49	46	45	42	40				
42	861	860	816	722	561	459	370	351	271	296	225	221	194	184	186	165	138	153	148	134	111	103	103	100	101	90	85	80	72	74	67	68	60	57	54	51	50	47	45	43	41			
43	903	902	852	737	661	477	390	361	296	249	267	243	206	237	210	176	151	172	138	142	126	116	114	105	91	97	91	83	82	86	71	69	63	60	58	54	53	52	48	46	44	42		
44	946	945	886	770	569	506	419	379	309	297	246	295	196	221	178	196	168	162	146	141	138	119	127	102	105	98	96	99	86	74	75	69	70	64	61	57	56	54	51	49	47	45	43	
45	990	989	920	815	639	463	495	382	335	307	279	257	225	237	202	254	158	165	169	150	132	131	124	116	109	102	96	85	88	82	78	76	72	71	66	61	59	57	55	53	50	48	46	44

Tabela 2. max iteracij = 1000, zacetna temperatura = 1.0, stopnja hlajenja = 0.99

n\d	Število povezav																																											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
2	1																																											
3	3	2																																										
4	6	5	3																																									
5	10	9	6	4																																								
6	15	14	10	7	5																																							
7	21	20	15	11	8	6																																						
8	28	27	21	16	12	9	7																																					
9	36	35	28	22	17	13	10	8																																				
10	45	44	36	29	23	18	14	11	9																																			
11	55	54	45	37	26	24	17	15	12	10																																		
12	66	65	55	44	33	31	25	19	15	13	11																																	
13	78	77	66	56	45	35	28	22	19	16	14	12																																
14	91	90	78	67	57	46	40	33	27	20	17	15	13																															
15	105	104	91	79	66	58	39	32	28	25	21	19	16	14																														
16	120	119	105	92	80	60	47	43	37	35	26	22	20	17	15																													
17	136	135	120	106	87	72	68	53	37	37	30	25	25	20	18	16																												
18	153	152	136	115	107	84	58	71	54	44	34	31	26	26	21	19	17																											
19	171	170	153	137	95	104	77	58	55	50	47	34	30	28	24	23	20	18																										
20	190	189	171	154	129	123	103	76	61	50	47	42	35	35	30	26	24	21	19																									
21	210	209	190	165	145	131	85	75	69	61	54	57	43	36	36	32	26	25	22	20																								
22	231	230	210	191	161	150	126	95	101	74	73	59	48	42	40	33	31	28	25	23	21																							
23	253	252	231	211	162	156	115	135	99	77	63	58	47	49	46	40	34	32	28	27	24	22																						
24	276	275	253	226	190	163	123	103	82	85	77	71	54	50	46	52	41	37	32	30	27	25	23																					
25	300	299	276	254	200	177	130	161	96	98	84	72	62	57	58	48	58	40	44	32	31	29	26	24																				
26	325	324	300	272	200	194	134	129	121	104	94	80	84	74	55	49	45	48	41	45	33	32	29	27	25																			
27	351	350	325	285	268	180	143	134	119	103	101	88	71	69	68	60	60	54	46	39	39	35	33	30	28	26																		
28	378	377	351	291	271	213	158	141	119	120	116	81	93	83	66	65	63	53	56	50	42	40	36	34	32	29	27																	
29	406	405	378	332	299	287	260	160	161	143	103	97	99	86	81	67	64	63	58	53	46	46	39	37	34	32	30	28																
30	435	434	406	364	318	252	262	165	249	143	147	100	91	110	78	68	68	67	74	55	49	54	43	42	38	36	33	31	29															
31	465	464	435	401	323	231	257	228	138	157	121	120	94	91	93	78	78	68	64	59	54	54	48	44	43	38	36	34	32	30														
32	496	495	465	412	363	363	225	206	156	163	159	124	111	108	103	83	95	70	76	83	59	60	62	54	44	47	39	38	35	33	31													
33	528	527	496	426	356	289	281	223	227	180	186	150	130	124	110	89	84	81	80	69	62	68	56	57	48	51	46	41	38	37	34	32												
34	561	560	528	485	422	336	244	211	202	262	147	195	154	124	108	106	99	90	95	78	75	71	64	58	52	52	49	45	44	39	37	35	33											
35	595	594	561	497	409	308	260	264	237	203	163	144	212	142	109	134	94	98	90	99	75	68	67	75	60	55	54	49	47	43	41	38	36	34										
36	630	629	595	546	391	444	275	239	203	216	168	155	174	152	136	110	121	100	85	89	92	82	67	69	66	65	59	50	49	45	44	43	39	37	35									
37	666	665	630	553	467	333	286	293	216	258	197	170	158	145	119	119	113	105	104	91	93	81	77	68	70	84	59	58	54	50	47	45	42	40	38	36								
38	703	702	666	599	513	365	287	309	240	210	205	183	186	157	149	128	138	108	104	97	90	87	75	74	97	64	62	61	55	57	51	48	46	44	41	39	37							
39	741	740	703	626	549	391	314	271	267	309	195	202	188	164	181	166	116	130	104	98	89	94	92	81	79	74	72	64	61	59	54	53	49	47	44	42	40	38						
40	780	779	740	667	553	441	329	319	252	219	201	196	198	172	150	144	133	137	126	112	98	108	96	91	81	78	76	76	69	60	60	57	53	50	48	46	43	41	39					
41	820	819	780	701	592	432	362	322	324	278	294	212	188	165	167	152	150	136	119	135	123	116	98	91	84	81	81	71	67	69	62	60	55	53	53	48	46	44	42	40				
42	861	860	815	735	512	434	370	315	291	285	226	220	224	195	196	174	137	145	138	152	118	104	96	99	97	84	83	78	72	72	67	67	64	57	54	52	49	48	45	43	41			
43	903	902	857	765	587	479	424	329	285	268	281	233	208	201	187	175	156	161	139	136	136	110	109	106	120	100	90	88	77	72	73	67	64	61	59	55	53	51	48	46	44	42		
44	946	945	890	794	633	431	404	419	358	303	263	254	217	213	203	195	177	148	152	137	123	119	107	124	97	92	86	92	83	77	77	76	67	63	61	58	56	54	51	49	47	45	43	
45	990	989	924	811	647	512	437	402	318	308	284	265	262	204	200	195	174	160	151	151	130	143	138	120	104	115	99	95	93	85	85	76	70	75	66	67	59	57	55	53	50	48	46	44

Tabela 3. max iteracij = 1000, zacetna temperatura = 1.0, stopnja hlajenja = 0.99

n\d	Število povezav																																											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
2	1																																										
3	3	2																																									
4	6	5	3																																								
5	10	9	6	4																																							
6	15	14	10	7	5																																						
7	21	20	15	11	8	6																																					
8	28	27	21	16	12	9	7																																				
9	36	35	28	22	17	13	10	8																																			
10	45	44	36	28	23	18	14	11	9																																		
11	55	54	45	37	30	21	18	15	12	10																																	
12	66	65	55	46	38	31	25	18	16	13	11																																
13	78	77	66	56	47	31	30	23	21	17	14	12																															
14	91	90	78	67	54	46	32	27	24	22	18	15	13																														
15	105	104	91	79	68	51	39	33	34	28	23	19	16	14																													
16	120	119	105	88	80	69	44	48	37	31	25	22	20	17	15																												
17	136	135	120	100	93	77	68	60	51	35	30	27	23	21	18	16																											
18	153	152	136	121	99	88	80	57	45	42	34	29	31	24	21	19	17																										
19	171	170	153	137	119	106	65	62	52	49	42	44	32	27	25	22	20	18																									
20	190	189	171	154	132	122	83	70	80	53	48	44	41	33	28	26	24	21	19																								
21	210	209	190	168	145	127	88	78	69	54	56	49	43	36	32	28	27	25	22	20																							
22	231	230	210	179	148	130	116	113	72	68	69	58	51	42	35	36	32	27	26	23	21																						
23	253	252	231	193	136	174	107	94	92	73	71	58	60	47	42	38	34	33	29	26	24	22																					
24	276	275	253	232	188	151	155	122	96	75	81	63	52	50	47	47	38	34	32	30	27	25	23																				
25	300	299	276	244	221	132	134	124	121	94	77	79	70	66	64	49	41	42	38	34	30	28	26	24																			
26	325	324	300	263	196	176	149	121	106	130	89	85	104	63	66	54	53	43	38	38	34	31	29	27	25																		
27	351	350	325	289	258	244	147	126	112	110	92	94	74	64	69	62	51	53	43	41	38	40	32	31	28	26																	
28	378	377	351	306	290	172	188	148	147	124	102	103	76	77	66	59	55	51	59	44	41	39	36	36	31	29	27																
29	406	405	378	334	275	293	165	156	147	128	102	105	92	77	78	71	64	57	61	49	45	41	41	37	35	32	30	28															
30	435	434	406	379	323	193	185	168	166	129	131	121	102	92	97	79	70	60	55	54	56	50	44	41	37	35	33	31	29														
31	465	464	435	403	380	252	227	200	143	182	133	126	102	108	101	80	96	76	70	60	58	55	51	44	42	41	37	35	32	30													
32	496	495	465	417	345	238	207	197	155	161	157	124	112	115	104	95	83	84	66	70	61	60	53	50	46	44	44	38	35	33	31												
33	528	527	496	448	397	304	253	203	172	171	176	152	120	116	94	99	90	98	90	85	70	60	60	58	49	47	43	41	41	36	34	32											
34	561	560	528	472	344	325	313	238	194	198	179	138	149	123	113	103	93	89	84	73	70	74	61	56	51	50	49	43	42	39	37	35	33										
35	595	594	561	478	420	352	310	211	182	242	161	153	159	132	112	136	105	97	80	77	88	73	75	62	67	62	51	49	45	43	43	38	36	34									
36	630	629	595	544	376	469	294	242	218	220	200	140	149	145	122	153	107	93	99	86	83	79	70	69	61	66	60	50	51	46	43	41	39	37	35								
37	666	665	630	571	478	355	310	249	203	198	188	167	167	145	127	110	115	109	111	94	88	84	81	69	72	63	61	54	52	50	46	45	42	40	38	36							
38	703	702	666	614	517	417	287	249	242	209	184	215	160	144	141	120	112	116	101	94	95	87	86	83	77	71	72	59	55	57	51	49	46	43	41	39	37						
39	741	740	703	647	543	368	340	261	256	233	223	191	179	164	154	136	123	135	114	109	107	94	89	82	85	68	67	64	59	59	56	52	48	46	44	42	40	38					
40	780	779	741	695	551	382	466	292	266	255	209	207	195	190	158	143	163	120	113	114	105	106	91	86	83	78	72	65	70	61	56	57	54	54	47	45	43	41	39				
41	820	819	780	709	588	379	384	293	277	331	249	238	208	178	201	137	142	132	125	116	113	116	112	103	81	81	75	73	67	62	67	59	57	55	50	48	46	44	42	40			
42	861	860	819	720	571	443	427	384	283	293	243	219	212	180	179	182	137	139	132	118	116	115	108	101	85	84	88	85	73	72	68	64	62	57	57	55	50	47	45	43	41		
43	903	902	857	755	713	509	426	337	301	263	256	284	221	185	186	155	146	157	132	130	124	129	128	98	103	91	95	79	77	72	70	67	68	62	57	56	53	50	49	47	44	42	
44	946	945	893	781	608	477	409	353	319	269	254	285	197	205	179	197	176	169	153	129	130	114	114	108	105	102	87	84	82	85	73	72	71	67	65	60	57	57	52	49	47	45	43	
45	990	989	916	827	682	501	450	361	384	303	260	258	256	222	222	180	171	174	155	154	138	139	121	123	111	103	94	96	91	83	79	79	68	68	68	63	62	58	54	53	50	48	46	44

TABELA 4. max iteracij = 1000, zacetna temperatura = 1.0, stopnja hlajenja = 0.99

n\d	Število povezav																																											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
2	1																																										
3	3	2																																									
4	6	5	3																																								
5	10	9	6	4																																							
6	15	14	10	7	5																																						
7	21	20	15	11	8	6																																					
8	28	27	21	16	12	9	7																																				
9	36	35	28	22	17	13	10	8																																			
10	45	44	36	29	23	18	14	11	9																																		
11	55	54	45	37	30	24	17	15	12	10																																	
12	66	65	55	46	37	31	24	20	16	13	11																																
13	78	77	66	54	47	33	28	26	19	17	14	12																															
14	91	90	78	67	57	48	40	33	25	20	17	15	13																														
15	105	104	91	76	68	58	49	33	34	28	23	18	16	14																													
16	120	119	105	86	80	61	47	50	34	31	24	23	20	17	15																												
17	136	135	120	106	81	72	56	60	39	38	32	26	22	20	18	16																											
18	153	152	136	116	107	86	61	53	54	37	36	31	27	24	21	19	17																										
19	171	170	153	137	116	108	87	59	51	50	42	40	31	29	25	23	20	18																									
20	190	189	171	154	115	87	95	96	59	53	53	44	38	35	28	28	24	21	19																								
21	210	209	190	170	146	139	87	72	59	69	48	49	38	47	33	31	27	24	22	20																							
22	231	230	210	191	142	156	103	79	80	74	57	55	53	46	37	37	31	30	25	23	21																						
23	253	252	231	211	192	162	113	97	96	74	73	64	61	49	46	37	34	34	29	26	24	22																					
24	276	275	253	224	208	139	123	91	126	105	73	65	60	53	50	40	39	35	32	32	27	25	23																				
25	300	299	276	248	167	208	143	123	99	118	69	75	69	60	52	51	44	40	38	35	31	28	26	24																			
26	325	324	300	277	220	147	167	147	149	115	85	78	70	76	60	50	47	48	40	41	33	31	30	27	25																		
27	351	350	325	295	258	205	157	141	174	106	92	90	82	93	71	57	49	49	51	40	37	35	32	30	28	26																	
28	378	377	351	319	302	225	176	142	157	137	102	104	89	75	67	66	72	53	48	48	48	38	36	34	32	29	27																
29	406	405	378	331	259	208	193	162	170	148	107	97	86	81	70	78	62	59	53	51	46	42	40	36	34	32	30	28															
30	435	434	406	372	328	270	179	157	154	182	119	113	98	95	75	77	65	62	59	52	51	45	45	43	38	36	33	31	29														
31	465	464	435	383	341	317	201	181	184	153	121	110	112	115	91	84	73	66	68	56	53	58	50	43	41	40	36	34	32	30													
32	496	495	465	404	285	230	194	195	167	185	141	152	99	108	103	91	82	69	79	69	60	56	50	50	45	47	40	38	36	33	31												
33	528	527	496	454	331	330	206	203	195	143	133	125	130	109	100	99	87	87	76	83	64	58	55	51	47	45	44	41	38	36	34	32											
34	561	560	528	469	358	325	297	203	178	177	160	138	127	148	142	99	97	110	76	81	78	69	59	55	56	47	46	45	42	39	37	35	33										
35	595	594	561	517	376	319	243	244	184	191	182	177	131	133	123	103	104	82	78	84	87	67	62	59	57	53	52	50	50	43	40	38	36	34									
36	630	629	595	514	395	288	259	224	243	196	199	177	209	139	128	149	109	108	94	83	92	75	70	63	81	57	53	53	51	46	43	42	39	37	35								
37	666	665	630	530	490	353	281	245	215	190	203	151	160	161	160	129	113	118	111	85	90	80	73	72	72	61	59	54	52	50	47	44	43	40	38	36							
38	703	702	666	574	461	343	373	261	238	202	209	209	182	146	193	143	118	107	105	110	115	82	84	89	76	63	67	58	61	54	50	47	45	44	41	39	37						
39	741	740	703	624	493	384	312	264	296	202	215	194	180	163	152	134	123	112	109	98	104	103	86	82	79	70	68	63	63	57	56	51	49	47	44	42	40	38					
40	780	779	740	678	578	424	339	345	259	292	198	194	178	174	175	156	136	137	146	110	129	97	94	81	80	88	76	67	67	70	64	55	52	50	48	45	43	41	39				
41	820	819	780	702	503	462	350	330	272	297	274	224	195	171	150	162	146	131	134	116	126	100	101	103	98	84	77	73	75	67	63	58	56	52	53	49	46	45	42	40			
42	861	860	820	719	603	446	417	344	303	270	276	214	224	200	179	160	153	134	128	121	130	102	101	95	105	94	89	78	75	75	71	63	59	56	53	52	50	47	46	43	41		
43	903	902	853	781	611	421	406	360	309	250	328	222	191	204	187	165	159	166	153	131	122	106	135	107	106	102	95	80	75	71	72	70	63	61	57	57	56	51	48	46	44	42	
44	946	945	877	793	608	523	397	337	346	272	284	246	223	198	199	218	170	168	147	126	130	125	109	105	106	102	98	95	87	81	74	73	69	65	61	61	56	54	52	50	48	45	43	
45	990	989	908	820	655	518	457	477	370	296	349	238	259	209	186	182	175	152	148	135	140	140	129	118	118	104	103	102	95	87	85	76	77	67	67	61	60	56	57	52	50	48	46	44

TABELA 5. max iteracij = 1000, zacetna temperatura = 1.0, stopnja hlajenja = 0.99

n\d	Število povezav																																										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
2	1																																											
3	3	2																																										
4	6	5	3																																									
5	10	9	6	4																																								
6	15	14	10	7	5																																							
7	21	20	15	11	8	6																																						
8	28	27	21	16	12	9	7																																					
9	36	35	28	22	17	13	10	8																																				
10	45	44	36	29	23	18	14	11	9																																			
11	55	54	45	37	30	24	17	15	12	10																																		
12	66	65	55	46	38	26	22	18	16	13	11																																	
13	78	77	66	56	47	39	31	26	21	17	14	12																																
14	91	90	78	67	57	48	32	28	23	22	18	15	13																															
15	105	104	91	79	68	56	37	33	30	24	21	19	16	14																														
16	120	119	105	92	80	61	52	40	42	31	24	22	20	17	15																													
17	136	135	120	106	93	57	52	44	39	35	28	26	23	20	18	16																												
18	153	152	136	113	103	90	56	51	54	42	34	29	28	24	21	19	17																											
19	171	170	153	129	118	81	85	74	49	48	40	33	31	29	25	23	20	18																										
20	190	189	171	148	117	111	89	80	60	65	44	44	46	33	28	25	23	21	19																									
21	210	209	190	166	155	135	82	75	67	63	53	47	45	40	33	31	26	25	22	20																								
22	231	230	210	187	157	104	94	85	90	67	62	51	45	42	46	35	32	27	26	23	21																							
23	253	252	231	205	180	159	101	108	101	67	71	60	50	49	40	40	35	30	29	26	24	22																						
24	276	275	253	228	195	127	130	122	91	95	74	69	54	50	47	42	39	34	31	30	27	25	23																					
25	300	299	276	254	208	177	134	133	108	104	73	67	67	66	53	49	47	40	38	33	31	28	26	24																				
26	325	324	300	277	236	190	214	125	108	104	96	84	73	62	59	48	48	44	39	37	36	31	30	27	25																			
27	351	350	325	301	248	172	181	155	121	120	99	78	75	73	68	65	56	49	43	42	40	35	33	30	28	26																		
28	378	377	351	306	289	184	192	166	131	101	97	98	102	78	69	62	56	52	49	48	43	37	37	34	31	29	27																	
29	406	405	378	344	288	218	176	153	148	121	101	108	103	82	85	69	75	66	61	51	47	43	44	38	35	33	30	28																
30	435	434	406	359	344	246	194	175	259	120	121	94	96	108	89	84	71	67	55	58	52	47	46	40	39	36	33	31	29															
31	465	464	435	383	308	216	184	174	142	178	133	110	117	104	88	78	85	71	57	61	53	67	46	46	40	39	39	34	32	30														
32	496	495	465	420	376	266	199	185	170	155	148	132	129	113	106	89	103	94	66	60	62	60	53	48	46	42	40	38	35	33	31													
33	528	527	496	466	357	346	214	195	173	174	176	149	154	99	118	89	85	96	75	76	73	65	57	51	49	45	43	41	39	36	34	32												
34	561	560	528	482	406	269	229	219	200	165	171	171	129	113	105	106	92	83	90	73	73	75	59	54	56	51	47	46	42	40	37	35	33											
35	595	594	561	509	341	295	323	230	195	185	150	198	143	167	115	105	93	96	84	90	79	71	65	64	57	57	54	48	45	42	40	38	36	34										
36	630	629	595	531	470	349	332	223	227	190	183	143	167	126	128	130	108	101	99	85	79	76	72	66	61	60	56	52	48	51	43	41	40	37	35									
37	666	665	630	562	520	436	271	267	236	232	199	156	159	135	133	133	112	123	92	97	94	78	74	73	65	63	62	56	52	53	46	44	42	40	38	36								
38	703	702	666	610	487	337	294	273	274	196	223	175	186	157	132	127	109	127	96	101	108	93	82	78	79	66	65	60	61	55	50	48	45	46	41	39	37							
39	741	740	703	625	558	376	334	302	291	233	217	236	194	154	139	138	162	121	115	109	102	95	82	82	82	75	73	64	60	58	55	52	51	48	45	43	40	38						
40	780	779	741	686	539	484	343	303	333	244	317	201	216	165	156	157	137	134	122	108	104	99	93	87	84	88	75	68	65	60	59	57	51	52	48	46	43	41	39					
41	820	819	780	694	548	514	368	335	309	265	279	241	187	189	191	168	160	126	133	108	107	98	95	85	88	84	80	76	69	69	63	61	56	54	50	50	46	44	42	40				
42	861	860	818	726	614	415	385	351	309	247	258	207	205	192	173	171	164	163	127	138	112	105	109	95	107	94	85	78	70	70	68	64	60	59	53	52	50	47	45	43	41			
43	903	902	855	773	664	412	431	354	297	339	285	263	204	197	193	193	197	142	153	124	136	119	112	106	97	115	86	78	78	72	71	75	69	64	59	55	56	51	48	46	44	42		
44	946	945	891	801	617	556	425	344	353	313	240	234	257	209	176	160	195	157	145	145	133	125	118	100	117	100	102	94	84	83	74	67	68	66	61	58	55	54	52	50	47	45	43	
45	990	989	919	806	635	552	461	390	383	276	294	260	242	239	190	203	165	183	186	142	140	133	127	123	102	123	106	93	99	85	79	72	73	68	70	64	61	57	56	52	51	48	46	44

Tabela 6. max iteracij = 1000, zacetna temperatura = 1.0, stopnja hlajenja = 0.99

n\d	Število povezav																																										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
2	1																																											
3	3	2																																										
4	6	5	3																																									
5	10	9	6	4																																								
6	15	14	10	7	5																																							
7	21	20	15	11	8	6																																						
8	28	27	21	16	12	9	7																																					
9	36	35	28	22	17	13	10	8																																				
10	45	44	36	29	23	16	14	11	9																																			
11	55	54	45	37	30	24	17	15	12	10																																		
12	66	65	55	46	38	31	25	20	15	13	11																																	
13	78	77	66	56	45	38	32	26	20	17	14	12																																
14	91	90	78	67	57	48	33	27	22	20	18	15	13																															
15	105	104	91	79	51	51	49	36	28	24	23	19	16	14																														
16	120	119	105	92	80	69	41	44	33	31	26	22	20	17	15																													
17	136	135	120	106	84	81	62	48	41	35	32	27	23	21	18	16																												
18	153	152	136	113	107	92	60	53	44	46	35	30	31	24	21	19	17																											
19	171	170	153	134	115	102	70	61	72	47	40	33	30	27	24	22	20	18																										
20	190	189	171	150	134	99	82	83	59	73	43	39	46	33	30	27	23	21	19																									
21	210	209	190	172	117	94	86	110	63	62	54	46	45	35	35	29	27	24	22	20																								
22	231	230	210	187	154	142	92	93	67	79	86	57	54	46	43	34	32	27	26	23	21																							
23	253	252	231	207	176	146	145	91	78	87	75	61	46	45	46	37	34	30	29	26	24	22																						
24	276	275	253	217	206	132	126	116	118	81	78	80	55	51	58	44	42	36	32	30	28	25	23																					
25	300	299	276	248	185	147	118	110	103	98	85	93	63	57	52	48	47	39	34	32	30	28	26	24																				
26	325	324	300	265	211	216	167	129	104	112	81	82	72	70	63	51	47	44	47	36	34	32	29	27	25																			
27	351	350	325	292	248	213	217	128	176	93	111	116	75	79	74	69	57	51	44	42	37	35	33	31	28	26																		
28	378	377	351	305	270	273	160	171	151	115	100	109	81	95	66	62	59	52	52	47	40	40	37	34	31	29	27																	
29	406	405	378	344	315	200	186	162	150	117	130	139	91	86	79	67	68	73	62	49	47	46	39	38	34	32	30	28																
30	435	434	406	349	333	205	194	191	174	142	136	108	98	106	85	70	90	62	67	58	52	46	45	41	38	35	34	31	29															
31	465	464	435	386	345	272	227	214	178	147	123	136	119	109	79	91	75	73	63	66	58	53	47	44	41	42	36	35	32	30														
32	496	495	465	420	314	241	209	191	166	157	137	139	108	116	107	81	83	72	70	67	56	60	51	49	49	43	39	38	36	33	31													
33	528	527	496	429	343	269	214	226	170	166	135	143	129	152	116	105	88	88	69	67	82	62	55	59	53	45	44	41	38	37	34	32												
34	561	560	528	468	425	279	267	218	240	160	185	141	133	126	116	100	88	93	85	72	81	68	58	62	56	51	47	43	42	39	37	35	33											
35	595	594	561	511	343	348	235	230	226	175	147	174	133	124	127	120	109	103	85	86	75	67	65	59	61	54	52	50	46	43	41	39	36	34										
36	630	629	595	562	432	289	303	259	253	186	190	160	145	123	113	131	110	104	87	86	91	69	72	78	61	60	61	53	48	46	44	42	39	37	35									
37	666	665	630	588	478	338	292	280	282	214	159	151	148	147	141	123	113	98	102	86	85	76	81	73	69	74	60	56	52	49	47	44	42	40	38	36								
38	703	702	666	599	437	459	323	270	225	214	195	181	191	159	138	127	141	106	108	101	96	89	83	76	69	67	65	59	56	52	50	48	45	43	41	39	37							
39	741	740	703	642	591	404	324	277	243	210	201	177	214	188	149	157	128	116	105	114	98	105	82	90	71	70	68	63	61	60	55	51	49	47	45	42	40	38						
40	780	779	741	694	588	398	361	306	279	287	221	241	188	160	201	146	145	132	114	124	115	88	101	88	87	74	74	66	65	60	59	58	52	50	48	45	43	41	39					
41	820	819	777	719	515	410	341	337	291	225	228	201	208	166	162	151	144	129	120	126	133	103	96	93	88	80	87	80	75	70	66	62	54	54	50	48	47	44	42	40				
42	861	860	816	718	647	486	370	313	313	290	238	227	184	212	188	171	148	159	128	114	137	102	116	98	88	84	78	82	72	81	66	61	61	57	54	52	50	48	45	43	41			
43	903	902	854	733	608	457	464	336	346	261	279	226	230	186	190	170	151	151	142	142	125	112	128	102	98	93	93	85	77	77	69	70	64	59	60	56	53	51	49	46	44	42		
44	946	945	888	787	603	477	448	359	323	311	257	249	217	230	226	186	169	179	147	125	138	135	115	112	104	99	95	83	82	74	74	71	69	67	61	59	58	53	52	49	48	45	43	
45	990	989	922	852	653	476	431	379	336	314	317	257	246	246	218	225	166	161	144	152	155	131	125	112	120	103	105	92	87	84	84	76	72	72	68	62	59	56	56	53	51	48	46	44

Tabela 7. max iteracij = 1000, zacetna temperatura = 1.0, stopnja hlajenja = 0.99

n\d	Število povezav																																										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
2	1
3	3	2
4	6	5	3
5	10	9	6	4
6	15	14	10	7	5
7	21	20	15	11	8	6
8	28	27	21	16	12	9	7
9	36	35	28	22	17	13	10	8
10	45	44	36	29	23	18	14	11	9
11	55	54	45	37	30	24	19	15	12	10
12	66	65	55	46	38	31	25	20	16	13	11
13	78	77	66	56	47	39	32	26	21	17	14	12
14	91	90	78	67	57	48	40	33	27	22	18	15	13
15	105	104	91	79	68	58	49	41	34	28	23	19	16	14
16	120	119	105	92	80	69	59	50	42	35	29	24	20	17	15
17	136	135	120	106	93	81	70	60	51	43	36	30	25	21	18	16
18	153	152	136	121	107	94	82	71	61	52	44	37	31	26	22	19	17
19	171	170	153	137	122	108	95	83	72	62	53	45	38	32	27	23	20	18
20	190	189	171	154	138	123	109	96	84	73	63	54	46	39	33	28	24	21	19
21	210	209	190	172	155	139	124	110	97	85	74	64	55	47	40	34	29	25	22	20
22	231	230	210	191	173	156	140	125	111	98	86	75	65	56	48	41	35	30	26	23	21
23	253	252	231	211	192	174	157	141	126	112	99	87	76	66	57	49	42	36	31	27	24	22
24	276	275	253	232	212	193	175	158	142	127	113	100	88	77	67	58	50	43	37	32	28	25	23
25	300	299	276	254	233	213	194	176	159	143	128	114	101	89	78	68	59	51	44	38	33	29	26	24
26	325	324	300	277	255	234	214	195	177	160	144	129	115	102	90	79	69	60	52	45	39	34	30	27	25
27	351	350	325	301	278	256	235	215	196	178	161	145	130	116	103	91	80	70	61	53	46	40	35	31	28	26
28	378	377	351	326	302	279	257	236	216	197	179	162	146	131	117	104	92	81	71	62	54	47	41	36	32	29	27
29	406	405	378	352	327	303	280	258	237	217	198	180	163	147	132	118	105	93	82	72	63	55	48	42	37	33	30	28
30	435	434	406	379	353	328	304	281	259	238	218	199	181	164	148	133	119	106	94	83	73	64	56	49	43	38	34	31	29
31	465	464	435	407	380	354	329	305	282	260	239	219	200	182	165	149	134	120	107	95	84	74	65	57	50	44	39	35	32	30
32	496	495	465	436	408	381	355	330	306	283	261	240	220	201	183	166	150	135	121	108	96	85	75	66	58	51	45	40	36	33	31
33	528	527	496	466	437	409	382	356	331	307	284	262	241	221	202	184	167	151	136	122	109	97	86	76	67	59	52	46	41	37	34	32
34	561	560	528	497	467	438	410	383	357	332	308	285	263	242	222	203	185	168	152	137	123	110	98	87	77	68	60	53	47	42	38	35	33
35	595	594	561	529	498	468	439	411	384	358	333	309	286	264	243	223	204	186	169	153	138	124	111	99	88	78	69	61	54	48	43	39	36	34
36	630	629	595	562	530	499	469	440	412	385	359	334	310	287	265	244	224	205	187	170	154	139	125	112	100	89	79	70	62	55	49	44	40	37	35
37	666	665	630	596	563	531	500	470	441	413	386	360	335	311	288	266	245	225	206	188	171	155	140	126	113	101	90	80	71	63	56	50	45	41	38	36
38	703	702	666	631	597	564	532	501	471	442	414	387	361	336	312	289	267	246	226	207	189	172	156	141	127	114	102	91	81	72	64	57	51	46	42	39	37
39	741	740	703	667	632	598	565	533	502	472	443	415	388	362	337	313	290	268	247	227	208	190	173	157	142	128	115	103	92	82	73	65	58	52	47	43	40	38
40	780	779	741	704	668	633	599	566	534	503	473	444	416	389	363	338	314	291	269	248	228	209	191	174	158	143	129	116	104	93	83	74	66	59	53	48	44	41	39
41	820	819	780	742	705	669	634	600	567	535	504	474	445	417	390	364	339	315	292	270	249	229	210	192	175	159	144	130	117	105	94	84	75	67	60	54	49	45	42	40
42	861	860	820	781	743	706	670	635	601	568	536	505	475	446	418	391	365	340	316	293	271	250	230	211	193	176	160	145	131	118	106	95	85	76	68	61	55	50	46	43	41
43	903	902	861	821	782	744	707	671	636	602	569	537	506	476	447	419	392	366	341	317	294	272	251	231	212	194	177	161	146	132	119	107	96	86	77	69	62	56	51	47	44	42
44	946	945	903	862	822	783	745	708	672	637	603	570	538	507	477	448	420	393	367	342	318	295	273	252	232	213	195	178	162	147	133	120	108	97	87	78	70	63	57	52	48	45	43
45	990	989	946	904	863	823	784	746	709	673	638	604	571	539	508	478	449	421	394	368	343	319	296	274	253	233	214	196	179	163	148	134	121	109	98	88	79	71	64	58	53	49	46	44

Tabela 8. max iteracij = 1000, zacetna temperatura = 1.0, stopnja hlajenja = 0.99

n\d	Število povezav																																										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
2	1
3	3	2
4	6	5	3
5	10	9	6	4
6	15	14	10	7	5
7	21	20	15	11	8	6
8	28	27	21	16	12	9	7
9	36	35	28	22	17	13	10	8
10	45	44	36	29	23	18	14	11	9
11	55	54	45	37	30	24	19	15	12	10
12	66	65	55	46	38	31	25	18	16	13	11
13	78	77	66	56	47	39	26	26	21	17	14	12
14	91	90	78	67	57	48	40	31	23	20	18	15	13
15	105	104	91	79	68	56	42	36	30	24	23	19	16	14
16	120	119	105	92	80	65	59	49	31	31	25	23	19	17	15
17	136	135	120	106	93	81	62	53	44	34	32	26	23	21	18	16
18	153	152	136	120	105	88	73	68	54	46	35	30	28	26	22	19	17
19	171	170	153	137	120	108	75	74	58	62	39	35	38	27	25	23	20	18
20	190	189	171	154	136	111	109	82	59	55	44	48	37	35	28	25	23	21	19
21	210	209	190	172	155	133	124	89	87	60	47	41	49	41	33	31	27	24	22	20
22	231	230	210	191	173	156	102	85	79	66	69	67	44	41	37	35	32	30	26	23	21
23	253	252	231	211	147	174	153	117	90	70	79	62	53	46	47	41	36	31	31	27	24	22
24	276	275	253	232	206	171	117	102	97	91	71	64	56	53	52	41	38	36	33	29	27	25	23
25	300	299	276	254	225	157	173	162	109	94	105	103	66	62	53	55	42	39	41	33	31	28	26	24
26	325	324	300	263	255	234	145	159	107	102	99	84	68	64	73	52	52	44	40	36	33	32	29	27	25
27	351	350	325	293	278	196	235	150	107	159	105	105	112	70	64	56	49	57	51	40	39	35	33	30	28	26
28	378	377	351	326	295	231	257	140	139	127	122	115	84	85	71	69	59	60	50	45	43	39	41	34	31	29	27
29	406	405	378	352	315	291	174	207	172	117	164	96	82	102	81	75	61	64	62	54	45	46	40	37	35	32	30	28
30	435	434	406	379	345	286	275	172	208	164	117	155	98	88	97	85	72	64	59	54	52	45	45	41	37	36	34	31	29
31	465	464	435	391	373	299	307	184	184	162	140	150	129	103	103	77	90	71	64	66	58	49	48	45	42	39	37	34	32	30
32	496	495	465	404	408	252	293	222	231	175	117	154	148	102	96	94	85	73	75	62	63	56	51	46	45	43	39	38	36	33	31
33	528	527	496	466	352	403	240	320	199	219	158	144	135	117	104	90	95	76	75	67	63	65	54	57	52	46	45	41	38	36	34	32
34	561	560	528	464	418	371	327	247	229	173	154	138	138	127	117	143	124	85	93	78	79	63	63	60	54	49	46	43	41	40	37	35	33
35	595	594	561	519	388	440	301	297	228	175	174	158	146	139	128	122	115	98	90	122	85	72	69	60	57	58	51	52	47	43	41	38	36	34
36	630	629	595	534	514	458	268	406	264	193	210	150	149	152	140	113	115	112	110	99	78	83	72	86	66	60	56	52	48	48	43	41	39	37	35
37	666	665	630	586	530	305	440	278	249	276	250	198	175	148	137	138	144	126	98	103	88	82	77	73	63	68	56	55	52	49	47	45	43	40	38	36
38	703	702	666	596	571	364	338	311	429	327	302	228	186	157	169	154	128	140	119	102	96	91	80	87	77	64	59	71	58	53	51	50	45	43	41	39	37
39	741	740	703	635	560	437	397	333	274	249	259	219	207	261	163	132	139	111	120	108	100	98	90	79	81	82	70	69	59	62	53	51	48	46	45	42	40	38
40	780	779	741	678	517	539	389	454	313	272	268	214	180	171	170	240	143	169	140	114	112	97	91	94	83	78	71	63	70	62	58	55	53	51	48	45	43	41	39
41	820	819	779	724	543	570	477	363	332	259	259	315	254	169	180	160	158	166	132	117	128	94	111	109	96	84	73	74	71	68	61	62	58	55	51	51	46	45	42	40
42	861	860	817	731	540	625	387	363	346	289	250	246	207	208	171	163	149	174	144	128	145	118	110	99	105	94	79	80	77	71	63	66	64	58	55	52	49	47	45	43	41
43	903	902	851	774	612	519	378	584	350	339	348	306	276	197	202	180	168	155	155	146	125	125	120	107	99	97	88	83	80	77	68	64	62	63	57	55	52	51	48	46	44	42
44	946	945	888	779	608	526	475	432	401	385	307	232	249	254	200	204	211	171	149	143	128	118	117	106	100	124	89	87	89	88	78	68	65	67	63	60	59	53	52	49	47	45	43
45	990	989	918	833	676	528	484	411	409	344	319	295	275	232	223	206	226	172	179	191	148	149	114	125	118	103	111	97	91	82	81	77	75	69	63	62	59	57	56	53	50	48	46	44

Tabela 9. max iteracij = 1000, zacetna temperatura = 1.0, stopnja hlajenja = 0.97

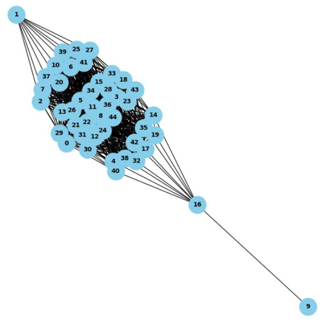
n\d	Število povezav																																											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
2	1																																											
3	3	2																																										
4	6	5	3																																									
5	10	9	6	4																																								
6	15	14	10	7	5																																							
7	21	20	15	11	8	6																																						
8	28	27	21	16	12	9	7																																					
9	36	35	28	22	17	13	10	8																																				
10	45	44	36	29	23	18	14	11	9																																			
11	55	54	45	37	30	24	19	15	12	10																																		
12	66	65	55	46	38	31	24	20	16	13	11																																	
13	78	77	66	56	46	39	28	23	19	17	14	12																																
14	91	90	78	67	57	43	35	30	25	20	18	15	13																															
15	105	104	91	79	68	48	41	39	30	28	21	19	16	14																														
16	120	119	105	92	64	55	59	50	40	34	25	22	19	17	15																													
17	136	135	120	103	89	66	56	48	39	35	32	27	23	21	18	16																												
18	153	152	136	115	107	84	57	51	44	42	35	33	27	24	22	19	17																											
19	171	170	153	137	110	108	67	67	54	55	46	35	32	27	24	23	20	18																										
20	190	189	171	142	138	120	82	75	57	63	51	42	42	32	29	26	24	21	19																									
21	210	209	190	172	139	126	90	83	62	69	60	49	41	38	36	29	26	24	22	20																								
22	231	230	210	185	173	104	106	86	94	67	62	57	46	40	40	41	32	28	26	23	21																							
23	253	252	231	207	140	153	103	87	90	80	68	55	53	47	42	41	35	31	28	27	24	22																						
24	276	275	253	226	195	171	112	141	99	79	82	61	64	63	45	48	38	37	36	29	28	25	23																					
25	300	299	276	214	233	140	126	114	95	130	69	68	69	58	60	54	42	40	38	33	30	29	26	24																				
26	325	324	300	268	226	192	174	120	110	92	95	77	68	73	61	57	50	45	41	37	34	31	29	27	25																			
27	351	350	325	291	210	217	154	156	106	113	92	103	81	74	65	55	55	63	43	41	42	35	32	30	28	26																		
28	378	377	351	312	272	213	154	153	133	118	117	100	97	78	68	70	61	57	48	47	45	40	35	33	32	29	27																	
29	406	405	378	332	253	198	180	159	145	117	138	120	84	84	70	68	63	58	56	61	50	41	40	37	34	32	30	28																
30	435	434	406	376	258	217	224	173	135	127	130	113	85	123	83	69	66	60	61	52	53	44	44	40	40	37	33	31	29															
31	465	464	435	398	296	217	216	227	151	130	124	132	94	96	92	83	87	72	66	59	57	51	49	44	43	40	37	35	32	30														
32	496	495	465	430	359	281	214	198	151	187	156	117	114	109	94	103	81	93	74	68	63	57	56	54	45	43	40	38	35	33	31													
33	528	527	496	456	374	357	219	191	185	166	139	149	118	158	130	103	89	90	79	77	69	65	54	53	48	48	43	40	39	36	34	32												
34	561	560	528	482	338	291	254	268	202	183	152	141	132	118	118	97	119	99	73	70	69	72	68	57	53	52	46	44	42	39	37	35	33											
35	595	594	561	497	444	300	251	202	187	161	156	146	129	149	115	100	111	98	89	94	74	69	72	63	59	54	52	49	44	43	41	38	36	34										
36	630	629	595	532	431	346	266	239	219	215	166	156	134	132	116	122	103	117	106	86	87	76	79	63	62	61	56	55	49	46	44	41	39	37	35									
37	666	665	630	569	413	312	281	254	238	230	218	164	180	141	134	136	115	118	94	91	84	78	80	81	64	62	63	56	51	49	46	44	42	40	38	36								
38	703	702	666	591	468	336	292	266	254	217	196	169	165	145	140	129	129	118	115	93	94	83	79	83	72	65	63	57	54	52	51	49	46	44	41	39	37							
39	741	740	703	647	516	386	357	262	278	231	246	206	165	162	158	129	149	122	106	99	107	89	82	90	76	71	68	66	62	59	58	52	48	47	44	42	40	38						
40	780	779	741	662	512	497	364	286	243	275	261	219	189	162	167	154	125	114	105	115	122	107	95	95	78	79	86	72	66	60	65	55	52	50	48	46	43	41	39					
41	820	819	780	718	597	455	358	322	257	241	232	208	178	189	155	149	155	134	119	114	111	117	93	98	86	75	78	76	72	67	68	60	57	54	50	49	46	45	42	40				
42	861	860	820	731	653	534	446	353	302	255	287	222	218	200	180	169	143	158	162	129	113	123	132	94	94	90	81	80	81	69	64	64	59	58	55	51	49	48	45	43	41			
43	903	902	861	776	734	540	460	354	305	286	249	213	196	185	188	194	183	159	140	142	124	137	105	103	105	88	90	78	76	77	69	69	67	60	57	55	52	50	48	46	44	42		
44	946	945	903	832	737	468	441	375	345	321	279	248	241	233	187	180	177	152	166	132	154	113	127	108	97	99	90	90	80	86	76	73	66	72	63	60	56	53	52	49	47	45	43	
45	990	989	946	876	718	691	515	368	392	322	310	247	206	214	269	184	194	184	168	152	147	116	121	112	114	117	98	94	87	89	91	75	79	67	66	66	60	57	55	53	50	48	46	44

Tabela 10. max iteracij = 2000, zacetna temperatura = 1.0, stopnja hlajenja = 0.99

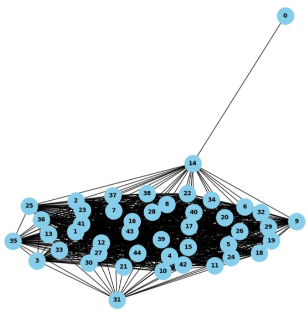
n\d	Število povezav																																											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
2	1																																											
3	3	2																																										
4	6	5	3																																									
5	10	9	6	4																																								
6	15	14	10	7	5																																							
7	21	20	15	11	8	6																																						
8	28	27	21	16	12	9	7																																					
9	36	35	28	22	17	13	10	8																																				
10	45	44	36	29	23	16	14	11	9																																			
11	55	54	45	37	30	23	19	14	12	10																																		
12	66	65	55	46	38	31	24	20	16	13	11																																	
13	78	77	66	56	47	30	32	23	21	17	14	12																																
14	91	90	78	66	57	39	31	30	23	20	18	15	13																															
15	105	104	91	79	68	58	43	41	30	24	21	19	16	14																														
16	120	119	105	92	76	54	52	38	41	31	26	21	20	17	15																													
17	136	135	120	106	87	81	50	52	41	34	30	27	25	21	18	16																												
18	153	152	136	121	103	84	65	53	46	52	44	33	27	24	21	19	17																											
19	171	170	153	137	114	76	67	66	50	53	47	36	32	28	25	22	20	18																										
20	190	189	171	146	133	85	95	86	67	55	51	42	37	30	30	27	23	21	19																									
21	210	209	190	172	147	119	124	84	65	64	50	45	43	47	34	30	27	24	22	20																								
22	231	230	210	191	151	112	113	85	84	88	69	55	50	47	35	40	30	28	26	23	21																							
23	253	252	231	193	184	134	117	108	84	68	70	78	50	50	43	36	35	32	29	27	24	22																						
24	276	275	253	224	161	133	122	88	118	85	66	66	59	57	50	42	38	36	34	30	27	25	23																					
25	300	299	276	245	223	206	143	139	159	127	70	69	91	58	52	52	53	40	38	38	30	28	26	24																				
26	325	324	300	263	255	168	182	128	105	120	98	75	75	64	72	54	50	42	39	41	34	32	29	27	25																			
27	351	350	325	291	278	244	212	145	142	115	122	86	75	67	64	71	48	50	43	41	37	34	33	30	28	26																		
28	378	377	351	316	255	209	187	150	118	121	96	96	86	74	75	58	55	54	45	48	41	40	41	34	31	29	27																	
29	406	405	378	344	299	228	255	142	181	136	102	104	101	86	79	74	61	66	52	53	51	44	39	37	35	32	30	28																
30	435	434	406	364	303	279	233	168	131	155	131	113	92	100	93	80	70	63	62	52	54	49	45	41	37	36	33	31	29															
31	465	464	435	382	302	219	204	155	153	148	117	119	95	105	86	86	71	83	64	66	68	59	49	44	44	41	37	34	32	30														
32	496	495	465	429	384	275	239	181	179	168	144	124	137	97	107	101	71	71	65	78	59	56	54	47	46	42	39	37	35	33	31													
33	528	527	496	450	365	256	220	207	184	174	173	126	123	122	130	99	88	90	70	72	64	66	57	54	48	45	43	40	38	36	34	32												
34	561	560	528	487	383	301	277	213	216	198	171	137	158	131	119	104	109	85	81	69	71	71	63	54	55	49	48	45	42	39	37	35	33											
35	595	594	561	505	411	360	264	212	191	215	186	159	126	129	123	108	104	99	87	91	72	79	66	64	60	54	52	48	46	42	40	38	36	34										
36	630	629	595	547	394	310	270	246	231	216	162	158	161	127	133	115	121	99	92	91	89	85	74	74	63	67	58	55	48	47	43	41	39	37	35									
37	666	665	630	564	466	399	332	242	220	179	223	166	154	154	175	135	111	109	92	105	84	91	81	75	71	70	58	68	60	50	49	44	42	40	38	36								
38	703	702	666	615	477	434	296	276	242	214	192	182	169	162	164	142	143	125	116	98	96	89	75	84	74	75	73	62	64	54	53	50	46	43	41	39	37							
39	741	740	703	642	531	455	334	305	271	243	221	198	163	191	157	136	134	126	128	108	97	93	86	86	85	71	67	61	60	61	56	53	50	47	45	43	40	38						
40	780	779	741	662	576	427	354	317	253	279	225	271	187	165	138	145	133	124	132	108	116	111	100	92	85	79	73	80	62	64	60	57	53	50	47	45	43	41	39					
41	820	819	780	742	654	456	368	317	263	284	270	280	219	178	156	147	145	131	120	116	117	111	102	91	86	84	77	75	70	66	64	58	56	53	51	49	46	44	42	40				
42	861	860	820	771	675	574	403	309	382	249	232	261	195	210	186	171	186	138	143	121	118	106	101	103	87	82	79	74	69	75	66	64	58	59	54	51	50	47	45	43	41			
43	903	902	861	797	709	499	397	392	298	289	257	225	265	210	194	160	159	163	132	121	113	112	117	101	95	104	82	81	92	73	71	71	64	60	62	56	53	51	48	46	44	42		
44	946	945	903	826	669	477	403	382	314	311	260	250	238	191	193	181	169	180	138	156	127	126	116	105	103	99	93	91	91	86	76	73	69	63	62	60	56	53	51	49	47	45	43	
45	990	989	946	877	707	587	470	389	370	279	248	266	212	215	194	182	175	151	150	131	134	136	116	112	106	117	91	97	94	78	86	78	73	69	66	62	58	57	56	53	50	48	46	44

Tabela 11. max iteracij = 2000, zacetna temperatura = 1.0, stopnja hlajenja = 0.99

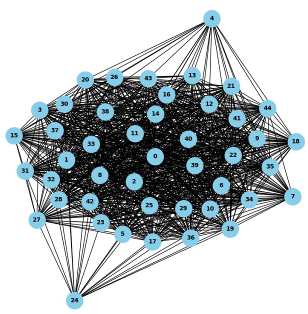
Gornje tabele so rezultat testiranja pri različnih parametrih (navedenih v opisu tabel), spodaj pa so slike nekaterih grafov iz tabel. Potrdiva lahko hipotezo o vsebovanosti kompletnih podgrafov ter vidiva, da najina ocena za maksimalno število povezav drži. Pri 1000 iteracijah je metahevrističen algoritem prenehal biti učinkovit, a sva vseeno naredila še testiranje pri 2000 iteracijah, ter dobila enako ustrezne rezultate, ki niso nasprotovali hipotezi.



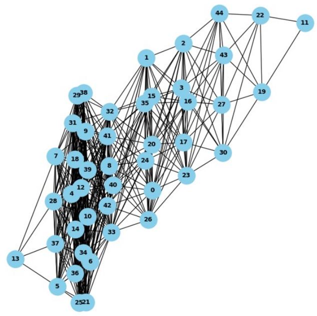
Slika 3. $n = 45, d = 5$, št. povezav = 706 in 1000 iteracij, št. povezav po formuli = 863.



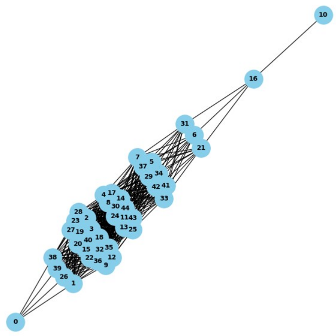
Slika 4. $n = 45, d = 4$, št. povezav = 859 in 1000 iteracij, št. povezav po formuli = 904.



Slika 5. $n = 45, d = 3$, št. povezav = 914 in 1000 iteracij, št. povezav po formuli = 946.



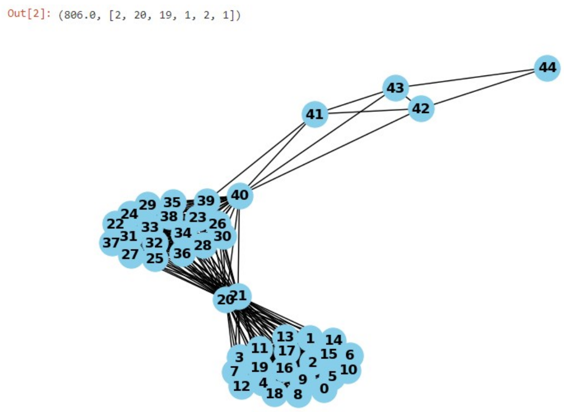
SLIKA 6. $n = 45, d = 8$, št. povezav = 425 in 2000 iteracij, št. povezav po formuli = 746.



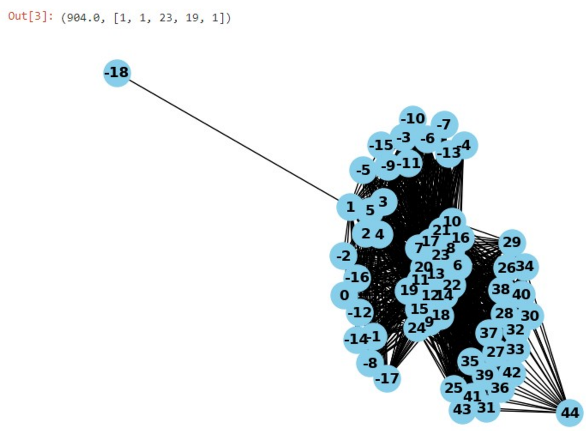
SLIKA 7. $n = 45$, $d = 7$, št. povezav = 571 in 2000 iteracij, št. povezav po formuli = 784.

S pomočjo testiranja sva ugotovila, da so optimalni grafi za najin problem »vedno« iste značilne oblike. To lahko trdiva zgolj na podlagi testiranja za majhne in velike n, dokazovala tega ne bova. Za demonstracijo najinih domnev lahko vzamemo fiksen n in npr. $d = 5$. Označimo z $x_1, x_2, \ldots, x_6$ zaporedje kompletnih podgrafov, iz katerega je po najinih domnevah sestavljen optimalen graf, ki bo za fiksen n in $d = 5$ imel maksimalno število povezav. V vrstnem redu kot našteti bojo te podgrafi povezani med sabo v domnevno optimalnem grafu. Povezav med vozlišči iz nesosednih kompletnih podgrafov ni. Za $i = 1, 2, \ldots, 6$ naj x_i ne bo oznaka za kompleten podgraf, ampak naj bo to tudi število vozlišč v njem. x_i interpretiramo kot »žakelj« x_i-tih vozlišč. Torej pri fiksnem n dobimo pogoj $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = n$, vemo pa tudi, da je v zaporedju med x_i in x_{i+1}, torej med i-tim in $i+1$-tim podgrafom povezav $x_i x_{i+1}$. Znotraj i-tega podgrafa pa je $\binom{x_i}{2}$ povezav, ker je graf kompleten. Ugotovila sva torej, da bi bil lahko najin problem analitičen, namreč lahko ga zastavimo kot maksimitiranje ciljne funkcije max $\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot x_{i+1} + \sum_{i=1}^{6} \binom{x_i}{2}$ pri pogoju $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = n$. V repozitoriju se nahaja koda za program, ki s pomočjo metahevristične metode simulated anneling iščče optimalne grafe pri danem n in d, upošteva pa, da iščemo grafe zgoraj omenjene oblike. Ker sva problem prevedla na iskanje maksimuma zgornje funkcije pri omenjenem pogoju, dobimo hitreje rezultate, ki so optimalnejši v primerjavi s prejšnimi. Algoritem je tudi učinkovitejši, namreč sedaj lahko izvajava testiranja s 100000 iteracijami, ki se izvedejo veliko hitreje kot prejšni algoritem, ki je že pri 2000 iteracijah potreboval preveč časa in ni bil učinkovit. Spodaj so prvo prikazani rezultati za iste parametre n in d kot prej.

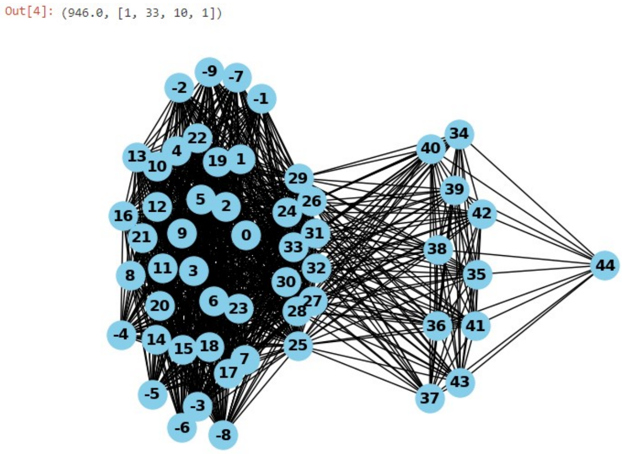
Pri spodnjih testih so parametri nastavljeni sledeče: max iteracij = 100000, zacetna temperatura = 1 in stopnja hlajenja = 0.999999.



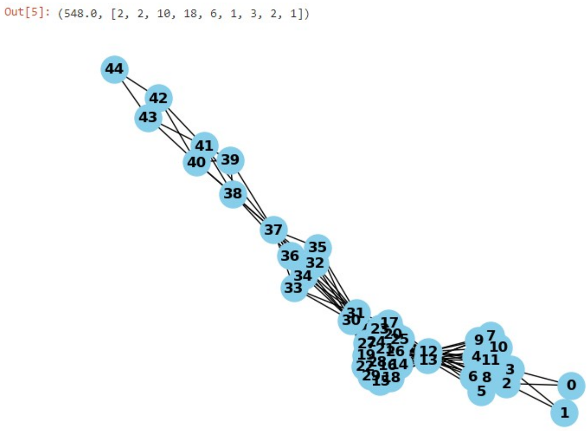
SLIKA 8. $n = 45, d = 5$, št. povezav = 806 in 100000 iteracij, št. povezav po formuli = 863.



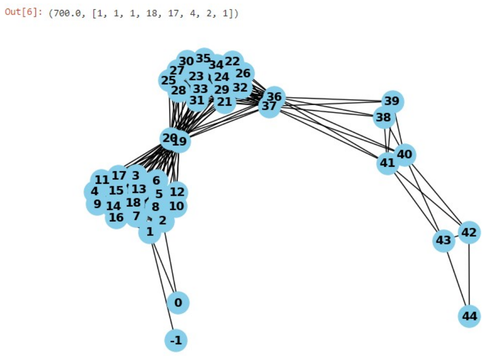
SLIKA 9. $n = 45, d = 4$, št. povezav = 904 in 100000 iteracij, št. povezav po formuli = 904. UJEMANJE!



SLIKA 10. $n = 45, d = 3$, št. povezav $=$ 946 in 100000 iteracij, št. povezav po formuli $=$ 946. UJEMANJE!



SLIKA 11. $n = 45, d = 8$, št. povezav $=$ 548 in 100000 iteracij, št. povezav po formuli $=$ 746.



SLIKA 12. $n = 45, d = 8$, št. povezav $=$ 700 in 100000 iteracij, št. povezav po formuli $=$ 784.

Tudi drugi metahevristični algoritem potrjuje najine domneve glede oblike grafov, ki bojo optimalni pri fiksnih parametrih n in d. Pri zgornjih testiranjih se je celo zgodilo, da je po 100000 iteracijah prišlo do ujemanja s formulo, grafa v teh primerih pa sta bila iste oblike. Zunanja kompletna podgrafa v zaporedju podgrafov sta bila velikosti 1. To nakazuje na to, da so kompletni podgrafi v krajiščih čim manj napihneni, notranji pa čim bolj. Glede časovne zahtevnosti je drugi algoritem vsekakor bolj učinkovit, tako da je bila prevedba problema na maksimiziranje ciljne funkcije pri pogoju smiselna.