

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika

Marcel Blagotinšek, Peter Milivojević

**Maximum number of edges in a connected graph with n
vertices and diameter d**

Skupinski projekt

Kratek opis problema

Advisers: doc. dr. Janoš Vidali,
prof. dr. Riste Škrekovski

Ljubljana, 2023

1. NAVODILO NALOGE

A connected graph with diameter d on n vertices with the minimal number of edges will be a tree and henceforth, it will have $n - 1$ edges. It will be harder to answer which graphs on a fixed number of vertices n and fixed diameter d have the maximal number of edges. We want to analyse the structure of such graphs. So, for a fixed number of vertices n and a fixed diameter d , when these two values are small, apply an exhaustive search. Next, for larger n and d , apply some metaheuristic. Try to obtain some specific properties of these graphs. Verify for how large n and d your exhaustive search and your metaheuristic implementations are efficient.

2. OPIS PROBLEMA

Naloga nam zastavlja problem ugotovitve največjega možnega števila povezav v povezanih grafih z določenim številom točk n in določenim premerom d . Za $d = 1$ ugotovimo, da je ne glede na izbiro števila vozlišč n , iskani graf ravno polni graf in ima posledično $\frac{n(n-1)}{2}$ povezav. V naslednjem koraku hitro ugotovimo, da se pri $d = 2$ število povezav zmanjša le za 1, saj se z odstranitvijo katere koli poljubne povezave v polnem grafu premer poveča na $d = 2$ in ker smo za to potrebovali odstraniti le eno samo povezavo je največje možno število povezav v grafu z n točkami in premerom $d = 2$ enako $\frac{n(n-1)}{2} - 1$. Podobno opazimo, da so grafi za premere $d = n - 1$ ravno drevesa s stopnjo 2 in je zato število povezav enako $n - 1$. Tako nas pri dani nalogi v resnici zanimajo predvsem grafi za katere velja $d \in \{3, \dots, n - 2\}$.

3. POTEK DELA

Nalogo sva pričela reševati z opazovanjem in računanjem grafov z manjšim številom vozlišč n , pri tem sva si pomagala tudi z algoritmom napisanim spodaj. Opazila sva, da so iskani grafi za premer $d = 1$ polni grafi in imajo kot taki $\frac{n(n-1)}{2}$ povezav. Za premer $d = 2$ sva opazila, da je potrebno odstraniti polnemu grafu le eno povezavo in je tako maksimalno število povezav enako $\frac{n(n-1)}{2} - 1$. Grafi s premerom $d = n - 1$ so prav tako enolično določeni kot drevesa s stopnjo 2 in imajo tako $n - 1$ povezav. Tako sva nadaljevala z reševanjem jedra problema, ki so grafi s premerom $d \in \{3, \dots, n - 2\}$.

```
def find_connected_graph_with_diameter(n, d):
    max_edges = 0
    max_edges_graph = None
    for G in graphs.nauty_geng(str(n) + " -c"):
        diameter = G.diameter()
        if diameter == d:
            num_edges = G.size()
            if num_edges > max_edges:
                max_edges = num_edges
                max_edges_graph = G.copy()
    return max_edges_graph, max_edges

import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
```

```

results = []
for n in range(1, 10):
    for d in range(1, n):
        max_edges_graph, max_edges = find_connected_graph_with_diameter(n, d)
        result_dict = {
            'n': n,
            'd': d,
            'max_edges': max_edges
        }
        results.append(result_dict)

df = pd.DataFrame(results)
print(df)

plt.figure(figsize=(10, 6))
for n in range(1, 9):
    subset = df[df['n'] == n]
    plt.plot(subset['d'], subset['max_edges'], label=f'n={n}')
plt.xlabel('diameter (d)')
plt.ylabel('maximum Edges')
plt.legend()
plt.title('max_edges(d) for different n')
plt.show()

```

Napisani algoritem je dal podatke o največjem možnem številu povezav za grafe do 10 vozlišč, ki sva jih uredila v sledečo tabelo:

| n\d | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 2 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 3 | 2 | | | | | | | |
| 4 | 6 | 5 | 3 | | | | | | |
| 5 | 10 | 9 | 6 | 4 | | | | | |
| 6 | 15 | 14 | 10 | 7 | 5 | | | | |
| 7 | 21 | 20 | 15 | 11 | 8 | 6 | | | |
| 8 | 28 | 27 | 21 | 16 | 12 | 9 | 7 | | |
| 9 | 36 | 35 | 28 | 22 | 17 | 13 | 10 | 8 | |
| 10 | 45 | 44 | 36 | 29 | 23 | 18 | 14 | 11 | 9 |

Iz tabele smo s sledečim računom prišli do formule, ki nam za $d > 1$ pove maksimalno število povezav za grafe do $n = 10$ vozlišč in morda še več, za kar trenutno ne moremo še zagotovo trditi.

Z opazovanjem generiranih grafov sva opazila, da vsi grafi vsebujejo poln podgraf velikosti $n - d + 1$. V nadaljevanju smo opazili, da imajo grafi za premere $d > 1$ poleg $\frac{(n-d+1)(n-d)}{2}$ povezav (zaradi prej opaženega polnega grafa velikosti $n - d + 1$) dodatno še $n - 2$ povezav, ki niso enolično določene. Tako imamo ponovno podano enako formulo ki nam za grafe s premerom $d > 2$ pove, da je maksimalno število povezav enako $\frac{(n-d+1)(n-d)}{2} + n - 2$.

V drugem delu naloge se bova problema lotila s metahurističnim pristopom.