UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika

Marcel Blagotinšek, Peter Milivojević

Maximum number of edges in a connected graph with n vertices and diameter d

Skupinski projekt

Kratek opis problema

Advisers: doc. dr. Janoš Vidali,
prof. dr. Riste Škrekovski

Ljubljana, 2023

1. Navodilo naloge

A connected graph with diameter d on n vertices with the minimal number of edges will be a tree and henceforth, it will have $n-1$ edges. It will be harder to answer which graphs on a fixed number of vertices n and fixed diameter d have the maximal number of edges. We want to analyse the structure of such graphs. So, for a fixed number of vertices n and a fixed diameter d, when these two values are small, apply an exhaustive search. Next, for larger n and d, apply some metaheuristic. Try to obtain some specific properties of these graphs. Verify for how large n and d your exhaustive search and your metaheuristic implementations are efficent.

2. Opis problema

Naloga nam zastavlja problem ugotovitve največjega možnega števila povezav v povezanih grafih z določenim številom točk n in določenim premerom d. Za $d = 1$ ugotovimo, da je ne glede na izbiro števila vozlišč n, iskani graf ravno polni graf in ima posledično $\frac{n(n-1)}{2}$ povezav. V nasledjem koraku hitro ugotovimo, da se pri $d = 2$ število povezav zmanjša le za 1, saj se z odstranitvijo katere koli poljubne povezave v polnem grafu premer poveča na $d = 2$ in ker smo za to potrebovali odstraniti le eno samo povezavo je največje možno število povezav v grafu z n točkami in premerom $d = 2$ enako $\frac{n(n-1)}{2} - 1$. Podobno opazimo, da so grafi za premere $d = n - 1$ ravno drevesa s stopnjo 2 in je zato število povezav enako $n - 1$. Tako nas pri dani nalogi v resnici zanimajo predvsem grafi za katere velja $d \in \{3, \ldots, n-2\}$.

3. Potek dela

Nalogo sva pričela reševati z opazovanjem in računanjem grafov z manjšim številom vozlišč n, pri tem sva si pomagala tudi z algoritmi napisanimi spodaj. Opazila sva, da so iskani grafi za premer $d = 1$ polni grafi in imajo kot taki $\frac{n(n-1)}{2}$ povezav. Za premer $d = 2$ sva opazila, da je potrebno odstraniti polnemu grafu le eno povezavo in je tako maksimalno število povezav enako $\frac{n(n-1)}{2} - 1$. Grafi s premerom $d = n-1$ so prav tako enolično določeni kot drevesa s stopnjo 2 in imajo tako $n-1$ povezav. Tako sva nadaljevala z reševanjem jedra problema, ki so grafi s premerom $d \in \{3, \ldots, n-2\}$.

1. algoritem:

```
def find_connected_graph_with_diameter(n, d):
    max_edges = 0
    max_edges_graph = None
    for G in graphs.nauty_geng(str(n) + " -c"):
        diameter = G.diameter()
        if diameter == d:
            num_edges = G.size()
            if num_edges > max_edges:
                max_edges = num_edges
                max_edges_graph = G.copy()
return max_edges_graph, max_edges
```

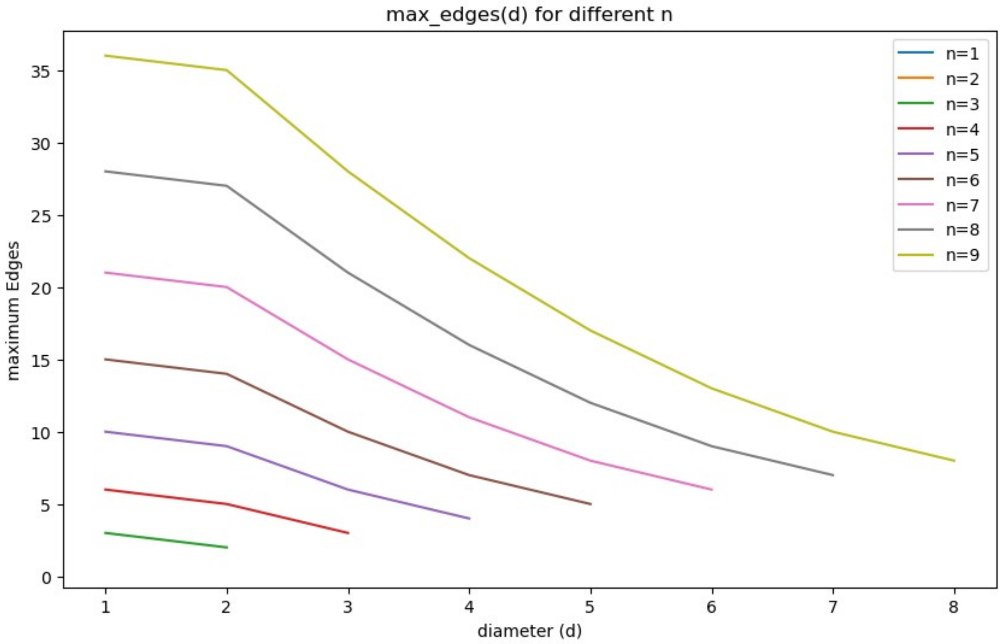
2. algoritem:

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

results = []

for n in range(1, 10):
    for d in range(1, n):
        max_edges_graph, max_edges = find_connected_graph_with_diameter(n, d)
        result_dict = {
            'n': n,
            'd': d,
            'max_edges': max_edges
        }
        results.append(result_dict)


df = pd.DataFrame(results)

print(df)

plt.figure(figsize=(10, 6))
for n in range(1, 10):
    subset = df[df['n'] == n]
    plt.plot(subset['d'], subset['max_edges'], label=f'n={n}')
plt.xlabel('diameter (d)')
plt.ylabel('maximum Edges')
plt.legend()
plt.title('max_edges(d) for different n')
plt.show()
```

Napisani algoritem je dal podatke o največjem možnem številu povezav za grafe do 10 vozlišč, ki sva jih uredila v sledečo tabelo in prikazala na grafikonu:

n\d	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2	1								
3	3	2							
4	6	5	3						
5	10	9	6	4					
6	15	14	10	7	5				
7	21	20	15	11	8	6			
8	28	27	21	16	12	9	7		
9	36	35	28	22	17	13	10	8	
10	45	44	36	29	23	18	14	11	9

Tabela 1. Opis tabele.



SLIKA 1. Maksimalno število povezav v odvisnosti od d pri različnih n.

Iz tabele smo s sledečim računom prišli do formule, ki nam za $d > 1$ pove maksimalno število povezav za grafe do $n = 10$ vozlišč in morda še več, za kar trenutno ne moremo še zagotovo trditi.

Z opazovanjem generiranih grafov sva opazila, da vsi grafi vsebujejo poln podgraf velikosti $n - d + 1$. V nadaljevanju smo opazili, da imajo grafi za premere $d > 1$ poleg $\frac{(n-d+1)(n-d)}{2}$ povezav (zaradi prej opaženega polnega grafa velikosti $n - d + 1$) dodatno še $n - 2$ povezav, ki niso enolično določene. Tako imamo ponovno podano enako formulo ki nam za grafe s premerom $d > 2$ pove, da je maksimalno število povezav enako $\frac{(n-d+1)(n-d)}{2} + n - 2$.

V drugem delu naloge se bova problema lotila s metahurističnim pristopom.