AULA PRÁTICA Nº 2 – ÁLGEBRA DE BOOLE

Tópicos

- Postulados de Huntington
- Álgebra de Boole binária: operadores básicos
- Demonstração de teoremas
- Simplificação (analítica) de expressões booleanas
- Conjuntos de operadores funcionalmente completos
- Funções booleanas e sua representação:
    - Algébrica
    - Tabular (tabelas de verdade)
    - Esquemática (circuitos lógicos)

A Álgebra de Boole desenvolve-se sobre uma estrutura matemática $(B,+,\bullet)$ [onde *B* é um conjunto e '+' e '•' representam operações, ditas respectivamente *soma* e *produto*] satisfazendo o seguinte conjunto de postulados (enunciado por Huntington em 1904):

Postulados de Huntington

- P1 Fecho: as operações são fechadas em *B*

$$\forall b_1, b_2 \in B \quad \begin{cases} b_1 + b_2 \in B \\ b_1 \cdot b_2 \in B \end{cases}$$

- P2 Comutatividade

$$\forall b_1, b_2 \in B \quad \begin{cases} b_1 + b_2 = b_2 + b_1 \\ b_1 \cdot b_2 = b_2 \cdot b_1 \end{cases}$$

- P3 Elementos Neutros

$$\exists b_0 \forall b \in B: \quad b + b_0 = b$$
$$\exists b_1 \forall b \in B: \quad b \cdot b_1 = b$$

- P4 Distributividade Mútua

$$\underset{b_1,b_2,b_3 \in B}{\forall} \quad b_1 + (b_2 \cdot b_3) = (b_1 + b_2) \cdot (b_1 + b_3)$$
$$\underset{b_1,b_2,b_3 \in B}{\forall} \quad b_1 \cdot (b_2 + b_3) = (b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot b_3)$$

- P5 Complementação

$$\forall b \in B \exists \overline{b} \in B \quad \begin{cases} b + \overline{b} = b_1 \\ b \cdot \overline{b} = b_0 \end{cases}$$

- P6 Cardinal

$$\underset{b_1 \in B}{\forall} \; \underset{b_2 \in B}{\exists} \; b_1 \neq b_2 \Leftrightarrow \# B \geq 2$$

Álgebra de Boole binária

O cardinal mínimo de *B* é 2. Nesta situação – *B*={0,1} – todos os postulados são satisfeitos pelos seguintes operadores:

SOMA LÓGICA [DISJUNÇÃO] **OU** (*OR*)	PRODUTO LÓGICO [CONJUNÇÃO] **E** (*AND*)	COMPLEMENTAÇÃO [NEGAÇÃO] **NÃO** (*NOT*)
$0+0=0$ $0+1=1$ $1+0=1$ $1+1=1$	$0\cdot 0=0$ $0\cdot 1=0$ $1\cdot 0=0$ $1\cdot 1=1$	$\overline{0}=1$ $\overline{1}=0$

Estabelece-se assim uma estrutura algébrica de Boole a dois valores (0 e 1).

Teorema da dualidade: Todo o teorema ou identidade algébrica dedutível a partir dos postulados da álgebra de Boole conserva a validade se as operações (+) e (·) e os elementos neutros forem trocados.

Exercícios

1 Demonstre os seguintes teoremas recorrendo aos postulados de Huntington:

a) Idempotência: $\forall b \in B \quad b \cdot b = b$

b) Elemento absorvente: $\forall b \in B \quad b \cdot b_0 = b_0, \quad b + b_1 = b_1$

c) Unicidade do complemento

d) Unicidade do elemento neutro

e) Absorção: $x + xy = x$

f) Simplificação: $x + \overline{x}y = x + y$

g) Consenso: $xy + \overline{x}z + zy = xy + \overline{x}z$

h) Leis de DeMorgan: $\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

2 Por indução directa (verificação exaustiva da tabela de verdade) demonstre

a) Teorema da involução: $\overline{\overline{x}} = x$

b) Propriedade associativa: $x + (y+z) = (x+y) + z$

3 Mostre que o operador "ou" exclusivo (*XOR*), definido por $x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y$, é associativo:

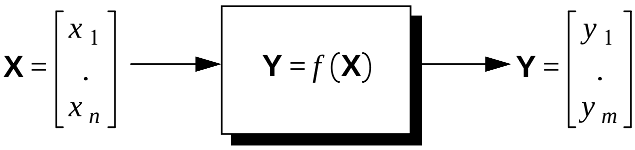
$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

4 Recorrendo ao teorema da dualidade, determine o operador dual do "ou" exclusivo $\oplus$. Compare as tabelas de verdade.

5 Mostre que $$xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz = x + yz$$

6 Mostre que os operadores *NAND* ($\overline{x.y} = \bar{x} + \bar{y}$) e *NOR* ($\overline{x+y} = \bar{x}.\bar{y}$) são completos.

7 Uma função booleana é uma regra (correspondência) que associa um elemento do conjunto *B*={0,1} a cada uma das 2^n combinações que as *n* variáveis independentes podem assumir. Recorrendo a uma notação vectorial para o caso geral do sistema digital com *n* entradas e *m* saídas, temos:



a) Quantas funções diferentes existem?

b) Concretize para *n* = 4 e *m* = 1.

8 Considere a seguinte função booleana:

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2$$

a) Simplifique-a

b) Reescreva *y* apenas com operadores *NAND*

c) Reescreva *y* apenas com operadores *NAND* que não poderão ter mais de 2 argumentos (entradas)

d) Desenhe os diagramas lógicos correspondentes a b) e c) e proceda a uma análise de custos em termos de número e variedade de operadores envolvidos

9 A função "Maioria", M(x,y,z), é igual a 1 sempre que pelo menos dois dos seus três argumentos são iguais a 1:

$$M(x, y, z) = (x + y)(x + z)(y + z) = xy + xz + yz$$

Mostre que M(x,y,z), juntamente com a operação de complementação e a constante "0", forma um conjunto de operações funcionalmente completo.