SYSTEM BINARNY

ZAMIANA SYSTEMÓW ZAPISU LICZBY

Niech x będzie zmienną typu `unsigned int` (32-bitową). Zakładając, że dostępne są jedynie operacje na bitach, a dokładnie nie mamy możliwości skorzystania z operacji dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, zaimplementuj procedurę, która wypisze na ekranie zapis binarny (wartości) zmiennej x. ●●●

Niech $b = d_r d_{r-1} \dots d_1 d_0$ będzie zapisem liczby w systemie dwójkowym. Zamiana zapisu liczby b na zapis w systemie dziesiętnym odbywa się poprzez wykonanie dodawania oraz potęgowania w następującym wyrażeniu:

$$d_r \cdot 2^r + d_{r-1} \cdot 2^{r-1} \dots d_1 \cdot 2^1 + d_0 \cdot 2^0,$$

przy czym operacje dodawania i potęgowania wykonywane są w systemie o podstawie 10.[1]

Z drugiej strony, niech b będzie liczbą zapisaną w systemie dziesiętnym. Zamiana zapisu liczby b na zapis w systemie dwójkowym odbywa się poprzez rozłożenie b na sumę kolejnych potęg dwójki:

$$b = d_r \cdot 2^r + d_{r-1} \cdot 2^{r-1} \dots d_1 \cdot 2^1 + d_0 \cdot 2^0,$$

gdzie $d_i \in \{0, 1\}$. Wówczas $b = (d_r d_{r-1} \dots d_1 d_0)_2$. Co więcej, owe rozłożenie na kolejne potęgi dwójki można wykonać algorytmicznie. A dokładnie, dokonujemy kolejnych dzieleń liczby b w sposób całkowity przez 2 (w systemie dziesiętnym) i zapamiętujemy reszty z tegoż dzielenia. Reszty te, zapisane w odwrotnej kolejności, utworzą nam zapis binarny liczby b.

Zapisz liczbę $(10010)_2$ w systemie dziesiętnym. ◀ **PRZYKŁAD**

$(10010)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (16)_{10} + (0)_{10} + (2)_{10} + (0)_{10} = (18)_{10}$

Zapisz liczbę $(81)_{10}$ w systemie dwójkowym. ◀ **PRZYKŁAD**

Podejście algorytmiczne daje nam następującą tabelę ilorazów i reszt:

liczba	iloraz	reszta
81	40	1
40	20	0
20	10	0
10	5	0
5	2	1
2	1	0
1	0	1

Koleje reszty, czytane „od dołu", są następujące: $1, 0, 1, 0, 0, 0, 1$, a zatem $(81)_{10} = (1010001)_2$.
Oczywiście podejście niealgorytmiczne da nam ten sam wynik:

$(81)_{10} = (64)_{10} + (16)_{10} + (1)_{10} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (1010001)_2$

ZADANIE 1.1. Przedstaw liczby $(111101)_2$ oraz $(1011110)_2$ w systemie dziesiętnym.

ZADANIE 1.2. Przedstaw liczby 169 oraz 411 w systemie dwójkowym.

[1] Dla ułatwienia będziemy przyjmować, że zapis $(x_r \dots x_0)_k$ oznacza zapis w systemie o podstawie k, przy czym w dalszych rozważaniach, dla uproszczenia notacji, będziemy zakładać, że brak indeksu przy zapisie liczby oznacza zapis w systemie dziesiętnym.

ZWIĘKSZANIE LICZBY O JEDEN W SYSTEMIE DWÓJKOWYM

Niech x będzie zmienną typu `unsigned int` (32-bitową). Zakładając, że dostępne są jedynie operacje na bitach, a dokładnie nie mamy możliwości skorzystania z operacji dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, zaimplementuj procedurę, która powiększy wartość zmiennej x o jeden. ●●●

Algorytm zwiększania liczby o jeden w systemie dwójkowym

1. Wskaż ostatni bit rozważanej liczby.
2. Powtarzaj, co następuje:
   2.a. Jeżeli wskazywany bit to „0", to zamień go na „1"; KONIEC.

   2.b. W przeciwnym przypadku zamień go na „0" i wskaż kolejny bit na lewo; jeżeli nie ma następnego bitu w lewo, to wstaw „1"; KONIEC.

Prześledź działanie algorytmu dodawania jedynki dla liczb 10010 oraz 101011. ◀ **PRZYKŁAD**

a) $10010 + 1 = 10011$,
ponieważ $1001\underline{0} \to (= 0) \to 10011$ (KONIEC).

b) $101011 + 1 = 101100$,
ponieważ $10101\underline{1} \to (= 1) \to 1010\underline{1}0 \to (= 1) \to 101\underline{0}00 \to (= 0) \to 101100$ (KONIEC).

ZADANIE 1.3. Prześledź działanie algorytmu dodawania jedynki dla liczb 111110, 10011 oraz 111111.

PORÓWNYWANIE LICZB W SYSTEMIE DWÓJKOWYM

Niech x i y będą dwoma zmiennymi typu `unsigned int` (32-bitowe). Zakładając, że dostępne są jedynie operacje na bitach, a dokładnie nie mamy możliwości skorzystania z operatorów $<$ (mniejsze od) oraz $>$ (większe od), a także operacji dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, zaimplementuj procedurę, która wypisze wartość $\max(x, y)$ w postaci dziesiętnej. ●●●

Algorytm porównywania liczb w systemie dwójkowym

1. Jeżeli liczby są różnej długości, to większą jest liczba o dłuższym zapisie.
2. Jeżeli liczby są tej samej długości, to porównujemy bit po bicie od lewej strony do prawej:
   2.a. Jeżeli bity są takie same, to przechodzimy do następnego bitu w prawo;

   2.b. Jeżeli bity są różne, to większą jest liczba o większym bicie na rozważanej pozycji; Koniec.
3. Jeżeli wszystkie bity są takie same, to porównywane liczby są równe i Koniec.

Prześledź działanie algorytmu porównywania liczb dla podanych niżej par liczb. ◄ **PRZYKŁAD**

a) 101101 oraz 11110

Jako że pierwsza liczba jest liczbą 6-bitową, a druga — 5-bitową, otrzymujemy, że $101101 > 11110$.

b) 1011101 oraz 1011001

$(\underline{1}011101\ ?\ \underline{1}011001) \to (=) \to (1\underline{0}11101\ ?\ 1\underline{0}11001) \to (=) \to$
$(10\underline{1}1101\ ?\ 10\underline{1}1001) \to (=) \to (101\underline{1}101\ ?\ 101\underline{1}001) \to (=) \to$
$(1011\underline{1}01\ ?\ 1011\underline{0}01) \to (>) \to$, a zatem $1011101 > 1011001$.

ZADANIE 1.4. Prześledź działanie algorytmu porównywania liczb dla następujących par liczb.

a) 1111 oraz 10001;
b) 11010 oraz 10111;
c) 1111001 oraz 1111011.

DODAWANIE LICZB W SYSTEMIE DWÓJKOWYM

Niech x i y będą dwoma zmiennymi typu `unsigned int` (32-bitowe), których wartość jest nie większa od $(2147483648)_{10}$ $(= 2^{31})$. Zakładając, że dostępne są jedynie operacje na bitach, a dokładnie nie mamy możliwości skorzystania z operacji dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, zaimplementuj procedurę, która wypisze wartość $x + y$ w postaci dziesiętnej. ●●●

Algorytm dodawania liczb w systemie dwójkowym

- Aby dodać do siebie dwie liczby zapisane w systemie dwójkowym, dodajemy bit po bicie od prawej do lewej, dodając jednocześnie w każdym z kroków bity przeniesienia z poprzedniej kolumny.

Wykonaj poniższe dodawania w systemie dwójkowym. ◀ **PRZYKŁAD**

a) $10101 + 111$

$10101 + 111 = 11100$, ponieważ $$\begin{array}{rr} & 111 \\ \hline & 10101 \\ + & 111 \\ \hline & 11100 \end{array}.$$

b) $111 + 111 + 111 + 111 + 111$

Rozważmy najpierw sumę $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ostatnich bitów. Jej wartość zapisana w systemie dziesiętnym to 6_{10}, a w binarnym – $(110)_2$. Zatem w tym przypadku bitami przeniesienia są bity 11, natomiast ostatni bit w zapisie szukanej liczby to 0.

Rozważmy teraz sumę $1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 0$ przedostatnich bitów powiększoną jeszcze o ostatni bit przeniesienia, czyli o 1. Jej wartość zapisana w systemie dziesiętnym to 5_{10}, a w binarnym – $(101)_2$. A zatem w tym przypadku bitami przeniesienia są bity 10. Itd.

Otrzymujemy ostatecznie, że $111 + 101 + 111 + 111 + 111 + 101 = 100110$.

$$\begin{array}{rr} & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline & 11 \\ \hline & 10 \\ \hline & 11 \\ \hline & 111 \\ & 101 \\ & 111 \\ & 111 \\ & 111 \\ + & 101 \\ \hline & 100110 \end{array}.$$

ZADANIE 1.5. Wykonaj następujące dodawania:

a) $10011 + 1100$;
b) $1111 + 1110$;
c) $110111 + 110011$;
d) $101 + 111 + 111$;
e) $1011 + 1011 + 111$.

ODEJMOWANIE LICZB W SYSTEMIE DWÓJKOWYM

Niech x i y będą dwoma zmiennymi typu `unsigned int` (32-bitowe) takimi, że wartość zmiennej x jest nie mniejsza od wartości zmiennej y. Zakładając, że dostępne są jedynie operacje na bitach, a dokładnie nie mamy możliwości skorzystania z operacji dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, zaimplementuj procedurę, która wypisze wartość $x - y$ w postaci dziesiętnej. ●●●

Algorytm odejmowania liczb w systemie dwójkowym

- Aby odjąć od siebie dwie liczby zapisane w systemie dwójkowym, odejmujemy bit po bicie od prawej do lewej, a w przypadku, gdy trzeba odjąć bit większy od mniejszego, „pożyczamy” jedynkę z następnej niezerowej (na lewo) pozycji (o ile jest to jeszcze możliwe).

Wykonaj poniższe odejmowania w systemie dwójkowym. ◀ **PRZYKŁAD**

a) 10101 − 111 **b)** 111000 − 11111

10101 − 111 = 1110, ponieważ

$$\begin{array}{rccccc}
 & 0 & 1 & 2 & & \\ \hline
 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\ \hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
- & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline
 & & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

, oraz 111000 − 11111 = 11001, ponieważ

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 0 & 2 & & & & \\ \hline
 & 1 & 0 & 2 & & & \\ \hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
- & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}.$$

ZADANIE 1.6. Wykonaj następujące odejmowania:

a) 110111 − 110011;
b) 10011 − 1100;
c) 1010001 − 101110;
d) 1011100 − 1010111.

MNOŻENIE I DZIELENIE LICZB W SYSTEMIE DWÓJKOWYM

> Niech x i y będą dwoma zmiennymi typu `unsigned int` (32-bitowe) takimi, że wartość zmiennej x jest podzielna przez wartość zmiennej y. Zakładając, że dostępne są jedynie operacje na bitach, a dokładnie nie mamy możliwości skorzystania z operacji dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, zaimplementuj procedurę, która wypisze wartość ilorazu x/y w postaci dziesiętnej. ●●●

Algorytm mnożenia liczb w systemie dwójkowym

- Aby pomnożyć dwie liczby (zapisane dwójkowo), mnożymy pierwszą liczbę przez poszczególne bity drugiej, a otrzymane wyniki, każdy kolejno przesunięty o jedną kolumnę w lewo, na koniec sumujemy.

◀ **PRZYKŁAD**

$$10101 \cdot 101 = 1101001, \text{ ponieważ } \begin{array}{r} 10101 \\ \cdot \qquad 101 \\ \hline 10101 \\ 00000 \\ 10101 \\ \hline 1101001 \end{array}.$$

Uwaga. Aby ułatwić sobie mnożenie liczb, mając na uwadze przemienność mnożenia, wygodniej jest mnożyć liczbę o większej liczbie jedynek przez liczbę o mniejszej liczbie jedynek, czyli np. lepiej rozpatrywać iloczyn $1011 \cdot 10001$ niż iloczyn $10001 \cdot 1011$.

ZADANIE 1.7. Wykonaj następujące mnożenia:

a) $10011 \cdot 1100$;
b) $101 \cdot 111$;
c) $1111 \cdot 111$;
d) $111000 \cdot 111$.

◀ **PRZYKŁAD**

$$1101001 : 101 = 10101, \text{ ponieważ } \begin{array}{l} 10101 \\ \hline 1101001 \quad : \ 101 \\ 101 \\ \hline ==110 \\ 101 \\ \hline ==101 \\ 101 \\ \hline ==0 \end{array}.$$

Uwaga. Liczba jest podzielna przez 2^i, jeśli w jej zapisie binarnym występuje na końcu i bitów równych 0.

ZADANIE 1.8. Wykonaj następujące dzielenia:

a) $11000 : 1000$;
b) $100011 : 101$;
c) $1010001 : 1001$;
d) $110001 : 111$;
e) $1001101 : 111$.

SYSTEMY O PODSTAWIE BĘDĄCEJ POTĘGĄ DWÓJKI

W systemie szesnastkowym używa się następujących „cyfr”: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$. Przyjmijmy notację, że liczbę zapisaną w systemie szesnastkowym będzie poprzedzać znak dolara \$.

Zamień zapis liczby \$A1 z szesnastkowego na dziesiętny. ◀ **PRZYKŁAD**

$\$\mathrm{A}1 = 10 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = 160 + 1 = 161.$

Zamień zapis liczby 320 z dziesiętnego na szesnastkowy. ◀ **PRZYKŁAD**

$320 = \$140$, ponieważ

liczba	iloraz	reszta
320	20	0
20	1	4
1	0	1

.

ZADANIE 1.9. Zamień zapis z szesnastkowego na dziesiętny następujących liczb:

a) \$A91;
b) \$C2;
c) \$FCA.

ZADANIE 1.10. Zamień zapis z dziesiętnego na szesnastkowy następujących liczb:

a) 199;
b) 541;
c) 855.

Zamień zapis 10111100 z binarnego na ósemkowy i szesnastkowy. ◀ **PRZYKŁAD**

$10111100 = (274)_8$, ponieważ

010	111	100
2	7	4

.

Analogicznie, $10111100 = \$\mathrm{BC}$, ponieważ

1011	1100
B	C

.

ZADANIE 1.11. Zamień zapis z binarnego na ósemkowy oraz szesnastkowy następujących liczb:

a) 100010;
b) 1011101;
c) 111110110.

Zamień zapis \$A1 z szesnastkowego na binarny oraz ósemkowy. ◀ **PRZYKŁAD**

$\$\mathrm{A}1 = 10100001$, ponieważ

A	1
1010	0001

.

Natomiast aby otrzymać zapis ósemkowy, przekształcamy otrzymany wyżej zapis binarny 10100001 w sposób opisany w poprzednim przykładzie, otrzymując $\$\mathrm{A}1 = 10\ 100\ 001 = (241)_8$.

ZADANIE 1.12. Zamień zapis z szesnastkowego na binarny oraz ósemkowy następujących liczb:

a) \$C2;
b) \$A91;
c) \$FCA.

Liczbę $(175)_8$ przedstaw w postaci dwójkowej i dziesiętnej. ◀ **PRZYKŁAD**

$(175)_8 = 1111101$, ponieważ

1	7	5
1	111	101

.

Następnie $(175)_8 = 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = (64)_{10} + (56)_{10} + (5)_{10} = (125)_{10}$.

ZADANIE 1.13. Zamień zapis z ósemkowego na dwójkowy i dziesiętny następujących liczb:

a) $(713)_8$;
b) $(1027)_8$;
c) $(37700)_8$.

ZADANIE 1.14. Zamień zapis $(90)_{10}$ oraz $(160)_{10}$ z dziesiętnego na ósemkowy.

Pewna liczba x zapisana w zapisie ósemkowym ma 5 cyfr. ◀ **PRZYKŁAD**
Ile będzie miała ona cyfr w zapisie szesnastkowym?

Liczba x, która w zapisie ósemkowym ma 5 cyfr, należy do zbioru

$$\{(10000)_8, (10001)_8, \ldots, (77776)_8, (77777)_8\}.$$

Jako że 8 i 16 są potęgami dwójki, w łatwy sposób możemy zamienić zapisy $(10000)_8$ i $(77777)_8$ w zapis dwójkowy, z którego w równie łatwy sposób otrzymamy zapis szesnastkowy.

$$(10000)_8 = 1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 1\ 0000\ 0000\ 0000 = \$1000,$$

$$(77777)_8 = 111\ 111\ 111\ 111\ 111 = 111\ 1111\ 1111\ 1111 = \$7\mathrm{FFF}.$$

A zatem liczba x w zapisie szesnastkowym będzie miała 4 cyfry.

ZADANIE 1.15. Pewna liczba x zapisana w zapisie czwórkowym ma 7 cyfr.

a) Ile będzie miała ona cyfr w zapisie ósemkowym?
b) Ile będzie miała ona cyfr w zapisie dwójkowym?

ZADANIE 1.16. Pewna liczba x zapisana w zapisie ósemkowym ma 5 cyfr. Ile będzie miała cyfr ona w zapisie czwórkowym?

UŁAMKI W SYSTEMIE DWÓJKOWYM

Zapis $(0.d_1 d_2 \dots d_r)_2$ w systemie o podstawie k oznacza liczbę $d_1 \cdot k^{-1} + d_2 \cdot k^{-2} \dots d_r \cdot k^{-r}$.

$(0.11)_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = (0.75)_{10}$ ◀ **PRZYKŁAD**

ZADANIE 1.17. Przedstaw ułamki $(0.1101)_2, (0.0011)_2$ oraz $(0.01101)_2$ w postaci dziesiętnej.

Aby zamienić zapis ułamka (<1) z systemu dziesiętnego na system o podstawie k, należy rozważaną część ułamkową kolejno mnożyć (w systemie dziesiętnym) przez k, wypisując kolejno otrzymywane części całkowite do momentu, aż część ułamkowa będzie równa 0.

Zamień zapis $(0.8125)_{10}$ z dziesiętnego na binarny. ◀ **PRZYKŁAD**

$\cdot 2$

część całkowita	część ułamkowa
0.	0.8125
1	0.625
1	0.25
0	0.5
1	0.0

Otrzymujemy ostatecznie, że $0.8125 = (0.1101)_2$.

ZADANIE 1.18. Zamień zapis z dziesiętnego na binarny następujących liczb:

a) 0.5625;
b) 0.78125;
c) 0.15625;
d) 0.328125;
e) 7.5625;
f) 11.15625;
g) 13.328125.

SYSTEMY O INNYCH PODSTAWACH

Wykonaj następujące działania: ◀ **PRZYKŁAD**

a) $(56)_7 + (43)_7 = (132)_7$, ponieważ
$$\begin{array}{rr} & 11 \\ \hline & 56 \\ + & 43 \\ \hline & 132 \end{array}$$

b) $(41)_5 - (24)_5 = (12)_5$, ponieważ
$$\begin{array}{rr} & 36 \\ \hline & 41 \\ - & 24 \\ \hline & 12 \end{array}$$

c) $(13)_6 \cdot (4)_6 = (100)_6$, ponieważ
$$\begin{array}{rr} & 2 \\ \hline & 13 \\ \cdot & 4 \\ \hline & 100 \end{array}$$

ZADANIE 1.19. Wykonaj następujące działania:

a) $(13)_4 + (33)_4$;
b) $(122)_3 + (122)_3 + (122)_3$;
c) $(456)_7 + (223)_7$;
d) $(302)_4 - (13)_4$;
e) $(4236)_7 - (2543)_7$;
f) $(13)_4 \cdot (3)_4$;
g) $(135)_7 \cdot (642)_7$.

ZADANIE 1.20. Liczby $(201)_3$ i $(241)_7$ przedstaw w postaci dziesiętnej.

ZADANIE 1.21. Liczby $(80)_{10}$ i $(120)_{10}$ przedstaw w postaci trójkowej i siódemkowej.

REPREZENTACJA LICZB W KOMPUTERZE

Zmienne typu `short int` przechowywane są zwykle w dwóch bajtach, czyli 16 bitach.[2] Pierwszy bit określa znak liczby – jeżeli wynosi on 0, to liczba jest dodatnia, w przeciwnym razie liczba jest ujemna.

- Jeżeli liczba jest dodatnia, to pozostałe piętnaście bitów stanowi zapis binarny tej liczby.
- Liczby ujemne przechowywane są w tak zwanym systemie uzupełnieniowym U2, tzn. liczba ujemna o wartości bezwzględnej x przedstawiana jest jako liczba $2^{16} - x$ w postaci binarnej.

◀ PRZYKŁAD

Rozważmy liczbę 82. Jest ona liczbą dodatnią.
Jej zapis w postaci binarnej to 1010010. Zatem jest ona przechowywana w postaci:

$$\begin{array}{r|l} \text{znak} & \text{15 bitów} \\ \hline 0 & 000\ 0000\ 0101\ 0010 \end{array}, \text{ czyli ostatecznie } 82 = (0000\ 0000\ 0101\ 0010)_{\texttt{int}}.$$

Rozważmy teraz liczbę -82. Jest ona liczbą ujemną. Zapis jej wartości bezwzględnej, czyli 82, w postaci binarnej to 1010010. Zatem jest ona przechowywana w postaci:

$$\begin{array}{lr} & 1\ \underbrace{0000\ 0000\ 0000\ 0000}_{\text{16 zer}} \\ - & 1010010 \\ \hline & 1111\ 1111\ 1010\ 1110 \end{array}, \text{ czyli ostatecznie } -82 = (1111\ 1111\ 1010\ 1110)_{\texttt{int}}.$$

Zapis liczby -82 w postaci `int` można również uzyskać następująco:

- Zapis jej wartości bezwzględnej na 16 bitach „zaprzeczamy” i dodajemy „1”;

$$\begin{array}{lr} & 0000\ 0000\ 0101\ 0010 \\ \hline & 1111\ 1111\ 1010\ 1101 \\ + & 1 \\ \hline & 1111\ 1111\ 1010\ 1110 \end{array}$$

- Bądź też odejmujemy „1” od jej wartości bezwzględnej na 16 bitach i „zaprzeczamy”.

$$\begin{array}{lr} & 0000\ 0000\ 0101\ 0010 \\ - & 1 \\ \hline & 0000\ 0000\ 0101\ 0001 \\ \hline & 1111\ 1111\ 1010\ 1110 \end{array}$$

◀ PRZYKŁAD

Rozważmy liczbę $(0000000001010010)_{\texttt{int}}$. Jej „rozkodowywanie” przebiega analogicznie. Jako że pierwszy bit jest równy `0`, zatem jest to liczba dodatnia. A zatem, jako że jej zapis binarny to 1010010, zakodowaną liczbą jest 82.

Rozważmy teraz liczbę $(1111111110101110))_{\texttt{int}}$. Jako że jej pierwszy bit jest równy `1`, zatem jest to liczba ujemna. Wyznaczamy ją następująco:

- Sposób 1:

$$\begin{array}{lr} & 1\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000 \\ - & 1111\ 1111\ 1010\ 1110 \\ \hline & 0000\ 0000\ 0101\ 0010 \end{array}$$, co daje nam 82, ale że pierwszy bit był równy 1, zatem kodowaną liczbą jest -82.

[2] Analogicznie przechowuje się np. zmienne typu `int`, tylko że w czterech bajtach, czyli 32 bitach.

■ Sposób 2 (zapis „zaprzeczamy” i dodajemy „1”):

$$\begin{array}{lr} & 1111\ 1111\ 1010\ 1110 \\ \hline & 0000\ 0000\ 0101\ 0001 \\ + & 1 \\ \hline & 0000\ 0000\ 0101\ 0010 \end{array}$$

, co daje nam 82, ale że pierwszy bit był równy 1, zatem kodowaną liczbą jest -82.

■ Sposób 3 (odejmujemy „1” od zapisu i „zaprzeczamy”):

$$\begin{array}{lr} & 1111\ 1111\ 1010\ 1110 \\ - & 1 \\ \hline & 1111\ 1111\ 1010\ 1101 \\ \hline & 0000\ 0000\ 0101\ 0010 \end{array}$$

, co daje nam 82, ale że pierwszy bit był równy 1, zatem kodowaną liczbą jest -82.

ZADANIE 1.22. Korzystając z opisanych wyżej trzech różnych sposobów, zapisz w `int` następujące liczby:

a) 131 oraz -131;
b) 76 oraz -76;
c) 32100 oraz -32100.

ZADANIE 1.23. Korzystając z opisanych wyżej trzech różnych sposobów, zapisz w systemie dziesiętnym następujące liczby zapisane w `int`:

a) 0000 0000 1111 0011 oraz 1111 1111 0000 1100;
b) 0000 0000 0110 0110 oraz 1111 1111 1001 1001;
c) 0010 1100 0000 1001 oraz 1010 1100 0000 1001.

ZADANIE 1.24. Dla par liczb 3 oraz -3, 3 oraz -2, -2 oraz 3, -2 oraz -2 zapisanych w systemie U2 na 5 bitach wykonaj operacje dodawania, odejmowania oraz mnożenia, a następnie sprawdź poprawność wyników wykonując odpowiednie operacje oraz zamiany w systemie dziesiętnym.

► Jeżeli wynik dodawania/mnożenia ma w zapisie więcej niż 5 bitów, to przycinamy go do 5 najmniej znaczących bitów (czyli od prawej do lewej).

► Należy założyć, że zawsze możliwe jest odejmowanie, tzn. zawsze można pożyczyć bit, dla przykładu:

$$\begin{array}{lr} & 1112 \\ \hline & 00001 \\ - & 10011 \\ \hline & 01110 \end{array}$$

KODY GRAYA

Zakładając, że dostępne są jedynie operacje na bitach, a dokładnie nie mamy możliwości skorzystania z operacji dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, zaimplementuj procedurę, która dla danej dodatniej liczby całkowitej k wygeneruje (jakiś) kod Graya k-bitowych słów kodowych. ●●●

Kod Graya, zwany również kodem *refleksyjnym*, jest to (uporządkowany) kod binarny (bezwagowy i niepozycyjny), w którym dwa kolejne słowa kodowe różnią się od siebie tylko stanem jednego bitu, a ponadto także ostatni i pierwszy wyraz tego kodu spełniają tę własność (a zatem kod Graya jest także kodem *cyklicznym*).

Algorytm rozszerzania kodu Graya

Załóżmy, że ciąg C jest kodem Graya, w którym słowa kodowe są długości n. Aby otrzymać kod Graya o słowach długości $n+1$, rozszerzamy kod C o jeden bit w nastepujący sposób:

1. Dopisz do ciągu C jego odbicie lustrzane C^R (czyli te same słowa kodowe, ale w odwrotnej kolejności).
2. W tak otrzymanym ciągu, do wyrazów z ciągu C dopisz na początku bit o wartości zero, natomiast do tych z ciągu C^R — bit o wartości 1.

Należy podkreślić, że w/w metoda tworzy tylko jeden z możliwych kodów Graya. Równie dobrze można dopisywać 0/1 na innej (ustalonej) pozycji. Ponadto zastosowanie tej samej permutacji na każdym ze słów kodowych dla kodu wygenerowanego w w/w sposób także da w wyniku kod Graya.

W oparciu o algorytm rozszerzania kodu Graya, wygeneruj (jakiś) kod Graya o słowach kodowych długości trzy. ◀ **PRZYKŁAD**

Zaczynamy od przykładowego (jednego z dwóch) kodu Graya $C_1 = (0, 1)$ dla 1-bitowych słów kodowych. Przebieg algorytmu rozszerzania kodu C_1 wygląda następująco.

C_1	C_1 oraz jego odbicie lustrzane C_1^R	dopisanie 0 oraz 1
0	0	**0**0
1	1	**0**1
	1	**1**1
	0	**1**0

A zatem mamy (przykładowy) kod Graya dla 2-bitowych słów kodowych: $C_2 = (00, 01, 11, 10)$. Następnie rozszerzamy kod C_2.

C_2	C_2 oraz jego odbicie lustrzane C_2^R	dopisanie 0 oraz 1
00	00	**0**00
01	01	**0**01
11	11	**0**11
10	10	**0**10
	10	**1**10
	11	**1**11
	01	**1**01
	00	**1**00

Otrzymany (przykładowy) kod Graya dla słów 3-bitowych: $C_3 = (000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100)$.

ZADANIE 1.25. W oparciu o algorytm rozszerzania kodu Graya, wygeneruj (jakiś) kod Graya o słowach kodowych długości cztery.

(Przykładowy) kod Graya n-bitowych słów kodowych można też wygenerować bezpośrednio z naturalnego kodu binarnego, tj. z kolejnych n-bitowych zapisów liczb $0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$.

Algorytm wyznaczania i-tego wyrazu n-bitowego kodu Graya

1. Zapisz pomniejszony o jeden numer wyrazu kodu Graya w naturalnym kodzie dwójkowym na zadanej liczbie bitów (brakujące bity uzupełnij bitem 0).
2. Przesuń kopię ciągu z kroku 1 o jeden bit w prawo (najmniej znaczący bit odrzuć, a na początku dopisz bit o wartości 0, czyli podziel całkowicie przez 2).
3. Wykonaj `XOR` na odpowiednich bitach liczb z kroków 1 oraz 2; wynik jest wyrazem w kodzie Graya.

W oparciu o algorytm wyznaczania i-tego wyrazu n-bitowego kodu Graya wyznacz 10-ty wyraz 4-bitowego (przykładowego) kodu Graya. ◀ **PRZYKŁAD**

Interesuje nas 10-ty wyraz. Mamy $(9)_{10} = (1001)_2$, a przesunięcie tego ciągu binarnego w prawo o jeden bit daje w wyniku ciąg $(0100)_2$.

$$\begin{array}{rr} & 1001 \\ \texttt{XOR} & 0100 \\ \hline & 1101 \end{array}$$

A zatem 10-ty wyraz ciągu Graya to 1101.

ZADANIE 1.26. W oparciu o algorytm wyznaczania i-tego wyrazu n-bitowego kodu Graya wyznacz kod Graya o słowach kodowych długości cztery.

ZADANIE 1.27. W oparciu o algorytm wyznaczania i-tego wyrazu n-bitowego kodu Graya wyznacz $3, 5, 9, \ldots, (2^{n-1} + 1)$-ty wyraz n-bitowego kodu Graya.

ZADANIE 1.28.

a) Utwórz wszystkie[3] możliwe 3-bitowe kody Graya.

b)* Ile różnych kodów Graya da się utworzyć w n bitowym kodzie?

Algorytm konwersji wyrazów kodu Graya na wyrazy w naturalnym kodzie binarnym

1. Przyjmij pierwszą (najbardziej znaczącą) cyfrę kodu naturalnego równą pierwszej cyfrze kodu Graya.
2. Każdą kolejną cyfrę oblicz jako `XOR` odpowiedniej cyfry kodu Graya i poprzednio wyznaczonej cyfry kodu naturalnego.

W oparciu o algorytm konwersji wyrazów kodu Graya na wyrazy w naturalnym kodzie binarnym dokonaj konwersji wyrazu 1110 (4-bitowego kodu Graya). ◀ **PRZYKŁAD**

Zgodnie z algorytmem w kroku pierwszym otrzymujemy:

$$\begin{array}{r} \mathbf{1}110 \\ \\ \hline \mathbf{1}??? \end{array}$$

Natomiast etapy ustalania kolejnych bitów w kroku drugim przedstawiają się następująco:

[3]Z dokładnością do operacji cyklicznego przesunięcia, tzn., dla przykładu, 2-bitowe kody Graya (00,01,11,10) oraz (01,11,10,00) uznajemy za takie same, a także z dokładnością do operacji odbicia lustrzanego, tzn., dla przykładu, 2-bitowe kody Graya (00,01,11,10) oraz (10,11,01,00) uznajemy także za takie same.

$$\begin{array}{ll} & 1\mathbf{1}10 \\ \texttt{XOR} & \mathbf{1} \\ \hline & 1\mathbf{0}?? \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 11\mathbf{1}0 \\ \texttt{XOR} & \mathbf{0} \\ \hline & 10\mathbf{1}? \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 111\mathbf{0} \\ \texttt{XOR} & \mathbf{1} \\ \hline & 101\mathbf{1} \end{array}$$

A zatem wyrazem naturalnego 4-bitowego kodu binarnego, który posłużył do utworzenia wyrazu 1110 kodu Graya, jest 1011.

ZADANIE 1.29. W oparciu o algorytm konwersji wyrazów kodu Graya na wyrazy w naturalnym kodzie binarnym dokonaj konwersji wyrazów 00001, 00011, 000111, 01111 oraz 11111 (5-bitowego kodu Graya).

WAGA

Rozważmy wagę szalkową, na której lewej szalce kładziemy jakiś przedmiot do zważenia, a następnie na obu szalkach kładziemy odważniki. Jeżeli waga jest w równowadze, wówczas ważony przedmiot ma wagę równą sumie wag odważników położonych na prawej szalce minus suma wag odważników położonych na lewej szalce obok ważonego przedmiotu. Zakładamy, że zarówno odważniki jak i sam ważony przedmiot posiadają wagi będące liczbami naturalnymi.

ZADANIE 1.30. Mając do dyspozycji po dwa odważniki każdego rodzaju z $1, 3, 9, 27$ wyznaczyć ułożenie odważników na szalkach tak, aby odważyć ciężar 35.

Wskazówka. Rozważyć zapis liczby 35 w systemie o podstawie trzy.

Mając do dyspozycji po jednym odważniku każdego rodziaju z $1, 3, 9, 27$ wyznaczyć ułożenie odważników na szalkach tak, aby odważyć ciężar 35. ◀ **PRZYKŁAD**

W ogólności, rozłożenie k odważników przy odważaniu ciężaru W odpowiada przedstawieniu W w postaci $W = \sum_{i=0}^{k-1} d_i \cdot 3^i$, gdzie $d_i \in \{-1, 0, 1\}$. Aby przedstawić ciężar W w tej postaci, należy najpierw przedstawić liczbę $W^* = W + \frac{3^k-1}{2}$ w systemie trójkowym: $W^* = (e_{k-1} \ldots e_0)_3$, a następnie za d_i podstawić $e_i - 1$. Zatem w rozważanym przykładzie, $W^* = 35 + \frac{3^4-1}{2} = 35 + 40 = 75 = 2 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = (2210)_3$, stąd $d_0 = -1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_3 = 1$. Zatem rozłożenie jest następujące: odważnik o nominale 1 na lewej szalce, odważnik o nominale 3 pozostaje na stole, a odważniki o nominałach 9 i 27 na prawej szalce $(35 + 1 = 27 + 9)$.

ZADANIE 1.31. Jak ułożyć na szalkach odważniki o nominałach $1, 3, 9, 27, 81$, aby odważyć ciężar:

a) 92;
b) 111?

Analogiczne rozumowanie jak w powyższym przykładzie można zastosować np. dla odważników innego rodzaju będącego potęgą jakiejś liczby p. Wówczas potrzebujemy odważników nie po jednym z każdego rodzaju, lecz po większej liczbie: wynika to z zapisu w systemie o żądanej podstawie. Jeśli np. rozważymy system odważników o nominałach czterech kolejnych potęg $p = 5$, tzn. $1, 5, 25, 125$, wówczas kolejne cyfry w zapisie liczby $W^* = W + \frac{5^k-1}{2}$ w systemie o podstawie 4 należą do zbioru $\{0, \ldots, 4\}$. Aby otrzymać żądany rozkład odważników na szalce, podstawiamy $d_i = e_i - \lfloor \frac{p}{2} \rfloor = e_i - 2$. Jako że $d_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, potrzebujemy po dwa odważniki z każdego rodzaju.

ZADANIE 1.32. Mając do dyspozycji po dwa odważniki każdego rodzaju z $1, 5, 25, 125$ wyznaczyć ułożenie odważników na szalkach tak, aby odważyć ciężar 164.

PRZESZUKIWANIA BINARNE

Załóżmy, że mamy „czarne pudełko”, które przechowuje równianie prostej $y = f(x)$ (której nie znamy), zwanej dalej *murem*. Jedyny możliwy sposób korzystania z pudełka to zapytanie o wartość $f(x)$ dla podanego na wejściu argumentu x.

Rozważmy punkt $P = P(t)$, zwany dalej *żabą*, który porusza się, tj. *skacze*, w czasie o wektor $\mathbf{v} = [2, 1]$, startując z punktu $P(0) = (0, 5)$ (czyli $P(0) = (0, 5), P(1) = (2, 6), P(2) = (4, 7), \ldots, P(i + 1) = P(i) + \mathbf{v}, \ldots$). Zaimplementuj efektywny algorytm wyznaczający największą liczbę skoków, które jest w stanie wykonać żaba, aby nie uderzyć w mur. ●●●

Rozważmy zbiór $A = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{15}\}$. Załóżmy, że w grze przeciwnik wybiera element x z A, a my musimy za pomocą jak najmniejszej liczby pytań odgadnąć ten element. Wówczas sposób postępowania może być następujący:

> Dzielimy zbiór A na dwa rozłączne podzbiory $A_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_7\}$ i $A_2 = \{x_8, x_9 \ldots, x_{15}\}$ i pytamy przeciwnika, do którego podzbioru należy wybrany przez niego element — niech B będzie tym podzbiorem. Następnie w podobny sposób dzielimy zbiór B na „połowy” i powtarzamy pytanie, itd.

Dla przykładu, niech $A = \{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ i niech $x = 10$.

$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$	$\{8,9,10,11,12,13,14,15\}$
Nie	Tak
$\{8,9,10,11\}$	$\{12,13,14,15\}$
Tak	Nie
$\{8,9\}$	$\{10,11\}$
Nie	Tak
$\{10\}$	$\{11\}$
Tak	Nie

,

czyli ostatecznie $x = 10$. Zadaliśmy 4 pytania.

Powyższy sposób rozumowania można rozszerzyć na dowolny n-elementowy zbiór A, przy czym w najgorszym przypadku minimalna liczba pytań, jaką należy zadać, to $\lceil \log_2 n \rceil$. Zatem np. mając do dyspozycji k pytań można odgadnąć całkowitą liczbę z przedziału od 0 do $2^k - 1$ (czyli element ze zbioru o mocy 2^k).

W szczególności metodę przeszukiwań binarnych można zastosować do stwierdzenia, czy jakaś liczba naturalna n jest kwadratem innej liczby naturalnej, tzn. czy istnieje naturalna liczba k taka, że $k^2 = n$.

Algorytm(`int` n)

1. $k_d := 1$; $k_g := n$.
2. Powtarzaj aż do skutku:
   - 2.a. Jeżeli $k_g - k_d \leq 1$, to Koniec: n nie ma pierwiastka.
   - 2.b. $j := \lfloor \frac{k_g + k_d}{2} \rfloor$;
   - 2.c. Jeżeli $j^2 = n$, to Koniec: n jest kwadratem j;
   - 2.d. Jeżeli $j^2 > n$, to $k_g := j$, w przeciwnym wypadku $k_d := j$.

Dla podanych niżej liczb wyznacz pierwiastki stopnia drugiego. ◄ **PRZYKŁAD**

a) 49

k_d	k_g	$?(k_g - k_d \leq 1)$	j	$?(j^2 = n)$	$?(>,<)$
1	49	$?(49 - 1 \leq 1)$	25	$?(25^2 = 49)$	$>$
1	25	$?(25 - 1 \leq 1)$	13	$?(13^2 = 49)$	$>$
1	13	$?(13 - 1 \leq 1)$	7	$?(7^2 = 49)$	Koniec

,

czyli ostatecznie istnieje $k = 7$ takie, że $k^2 = 49$.

b) 59

k_d	k_g	$?(k_g - k_d \leq 1)$	j	$?(j^2 = n)$	$?(>, <)$
1	59	$?(59 - 1 \leq 1)$	30	$?(30^2 = 59)$	$>$
1	30	$?(30 - 1 \leq 1)$	15	$?(15^2 = 59)$	$>$
1	15	$?(15 - 1 \leq 1)$	8	$?(8^2 = 59)$	$>$
1	8	$?(8 - 1 \leq 1)$	4	$?(4^2 = 59)$	$<$
4	8	$?(8 - 4 \leq 1)$	6	$?(6^2 = 59)$	$<$
6	8	$?(8 - 6 \leq 1)$	7	$?(7^2 = 59)$	$<$
7	8	$?(8 - 7 \leq 1)$	KONIEC		

,

czyli ostatecznie nie istnieje k takie, że $k^2 = 59$. Jednakże z warunków zatrzymania algorytmu wynika, że otrzymaliśmy przybliżenie: $\sqrt{59} \in (7, 8)$.

ZADANIE 1.33. Zastosuj algorytm wyznaczania pierwiastków dla znalezienia pierwiastka stopnia drugiego z następujących liczb:

a) 144;
b) 123;
c) 625;
d) 517.

Odpowiedzi do zadań

1.1.

a) 11.
b) 61.
c) 94.

1.2.

a) $111 = (1101111)_2$.
b) $169 = (10101001)_2$.
c) $411 = (110011011)_2$.

1.3.

a) 111111.
b) 10100.
c) 1000000.

1.4.

a) $1111 < 10001$.
b) $11010 > 10111$.
c) $1111001 < 1111011$.

1.5.

a) $10011 + 1100 = 11111$.
b) $1111 + 1110 = 11101$.
c) $110111 + 110011 = 1101010$.
d) $101 + 111 + 111 = 10011$.
e) $1011 + 1011 + 111 = 11101$.

1.6.

a) $110111 - 110011 = 100$.
b) $10011 - 1100 = 111$.
c) $1010001 - 101110 = 100011$.
d) $1011100 - 1010111 = 101$.

1.7.

a) $10011 \cdot 1100 = 11100100$.
b) $101 \cdot 111 = 100011$.
c) $1111 \cdot 111 = 1101001$.
d) $111000 \cdot 111 = 110001000$.

1.8.

a) $11000 : 1000 = 11$.
b) $100011 : 101 = 111$.
c) $1010001 : 1001 = 1001$.
d) $110001 : 111 = 111$.
e) $1001101 : 111 = 1011$.

1.9.

a) \$A91 = 2705.
b) \$C2 = 194.
c) \$FCA = 4042.

1.10.

a) 199 = \$C7.
b) 541 = \$21D.
c) 855 = \$357.

1.11.

a) $(100010)_2 = (42)_8 = \$22$.
b) $(1011101)_2 = (135)_8 = \$5D$.
c) $(111110110)_2 = (766)_8 = \$1F6$.

1.12.

a) $\$C2 = (11000010)_2 = (302)_8$.
b) $\$A91 = (101010010001)_2 = (5221)_8$.
c) $\$FCA = (100011001010)_2 = (7712)_8$.

1.13.

a) $(713)_8 = (111001011)_2$ i $(713)_8 = 459$.
b) $(1027)_8 = (1000010111)_2$ i $(1027)_8 = 535$.
c) $(37700)_8 = (11111111000000)_2$ i $(37700)_8 = 16320$.

1.14. $(132)_8$ i $(240)_8$.

1.15.

a) 5 cyfr.
b) Jeśli liczba $x \in \{(1000000)_4, (1000001)_4, \ldots, (1333333)_4\}$, to w zapisie dwójkowym ma ona 13 cyfr, w przeciwnym wypadku, jeśli liczba $x \in \{(2000000)_4, \ldots, (3333333)_4\}$, to w zapisie dwójkowym ma ona 14 cyfr.

1.16. Jeśli liczba $x \in \{(10000)_8, (10001)_8, \ldots, (37777)_8]$, to w zapisie czwórkowym ma ona 7 cyfr, w przeciwnym wypadku, jeśli liczba $x \in \{(40000)_8, \ldots, (77777)_8\}$, to w zapisie czwórkowym ma ona 8 cyfr.

1.17.

a) $(0.1101)_2 = 0.8125$.
b) $(0.0011)_2 = 0.1875$.
c) $(0.01101)_2 = 0.40625$.

1.18.

a) $0.5625 = (0.1001)_2$.
b) $0.78125 = (0.11001)_2$.
c) $0.15625 = (0.00101)_2$.
d) $0.328125 = (0.010101)_2$.
e) $7.5625 = (111.1001)_2$.
f) $11.15625 = (1011.00101)_2$.
g) $13.328125 = (1101.010101)_2$.

1.19.

a) 112.
b) 1220.
c) 1012
d) 223.
e) 1363.
f) 111.
g) 130563.

1.20. 19 oraz 127.

1.21. $(2222)_3$ i $(143)_7$; $(11110)_3$ i $(231)_7$.

1.22.

a) 0000 0000 1000 0011, 1111 1111 0111 1101.
b) 0000 0000 0100 1111, 1111 1111 1011 0001.
c) 0111 1101 0110 0100, 1000 0010 1001 1100.

1.23.

a) 243, -244,
b) 102, -103,
c) 11273, -21495.

1.24. $(3)_{10} = (00011)_{\mathrm{U2}}, (-3)_{10} = (11101)_{\mathrm{U2}}, (-2)_{10} = (11110)_{\mathrm{U2}}$

a) $3 + (-3) = 0$, a $00011 + 11101 = 00000$, co daje $(00000)_{\mathrm{U2}} = (0)_{10}$;
$3 - (-3) = 6$, a $00011 - 11101 = 00110$, co daje $(00110)_{\mathrm{U2}} = (6)_{10}$;
$3 \cdot (-3) = -9$, a $00011 \cdot 11101 = 10111$, co daje $(10111)_{\mathrm{U2}} = (-9)_{10}$;

b) $3 + (-2) = 1$, a $00011 + 11110 = 00001$, co daje $(00001)_{\mathrm{U2}} = (1)_{10}$;
$3 - (-2) = 5$, a $00011 - 11110 = 00101$, co daje $(00101)_{\mathrm{U2}} = (5)_{10}$;
$3 \cdot (-2) = -6$, a $00011 \cdot 11110 = 11010$, co daje $(11010)_{\mathrm{U2}} = (-6)_{10}$;

c) $(-3) + 2 = 1$, a $11101 + 00010 = 11111$, co daje $(11111)_{\mathrm{U2}} = (-1)_{10}$;
$(-3) - 2 = -5$, a $11101 - 00010 = 11011$, co daje $(11011)_{\mathrm{U2}} = (-5)_{10}$;
$(-3) \cdot 2 = -6$, a $11101 \cdot 00010 = 11010$, co daje $(11010)_{\mathrm{U2}} = (-6)_{10}$;

d) $(-2) + (-2) = -4$, a $11110 + 11110 = 11100$, co daje $(11100)_{\mathrm{U2}} = (-4)_{10}$;
$(-2) - (-2) = 0$, a $00010 - 00010 = 00000$, co daje $(00000)_{\mathrm{U2}} = (0)_{10}$;
$(-2) \cdot (-2) = 4$, a $11110 \cdot 11110 = 00100$, co daje $(00100)_{\mathrm{U2}} = (4)_{10}$.

1.25. 0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0111, 0101, 0100, 1100, 1101, 1111, 1110, 1010, 1011, 1001, 1000.

1.26. 0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0111, 0101, 0100, 1100, 1101, 1111, 1110, 1010, 1011, 1001, 1000.

1.27. 00000...000011, 00000...000110, 00000...001100, ..., 00110...000000, 01100...000000, 11000...000000.

1.28.

a) 6;
b) A066037 (zobacz https://oeis.org/A066037).

1.29. 00001, 00010, 00101, 01010, 10101.

1.30.

Lewa szalka — 0, prawa szalka — 2×27+1×9+2×1.

1.31.

a) Lewa szalka — 1, prawa szalka — 3+9+81.
b) Lewa szalka — 0, prawa szalka — 3+27+81.

1.32. Lewa szalka — 1×1+2×5, prawa szalka — 1×125+2×25.

1.33.

a) $k = 12$;
b) $k_d = 11$, $k_g = 12$, $\sqrt{123} \in (11, 12)$;
c) $k = 25$;
d) $k_d = 22$, $k_g = 23$, $\sqrt{517} \in (22, 23)$.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

TWIERDZENIE 2.1 (Wariacje z powtórzeniami)
► *Liczba ciągów długości k ze zbioru n-elementowego wynosi n^k.*
► *Liczba funkcji z k-elementowego zbioru w n-elementowy zbiór wynosi n^k.*

◄ **PRZYKŁAD**

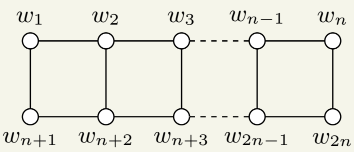
Ile jest 7-cyfrowych palindromicznych (tzn. które czytane od lewej do prawej są takie same, jak czytane od prawej do lewej) liczb naturalnych (w systemie dziesiętnym)?

Rozważmy 7-cyfrową liczbę naturalną $c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7$. Zauważmy, że $c_1 \neq 0$, a ponadto, z definicji słowa palindromicznego, otrzymujemy, że $c_2 = c_6, c_3 = c_5$ oraz $c_1 = c_7 \neq 0$. Na ile sposobów możemy wybać cyfry c_1, c_2, c_3 oraz c_4 — na $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

Na powyższe rozwiązanie możemy też spojrzeć bardziej formalnie, odpowiadając na pytanie, ile jest funkcji $f\colon \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, 9\}$ takich, że $f(c_2) = f(c_6), f(c_3) = f(c_5)$ oraz $f(c_1) = f(c_7) \neq 0$. Równoważne jest to oczywiście odpowiedzi na pytanie, ile jest funkcji $g\colon \{c_1, c_2, c_3, c_4\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, 9\}$ takich, że $g(c_1) \neq 0$. Mając na uwadze twierdzenie 2.1, otrzymamy ten sam wynik.

◄ **PRZYKŁAD**

Turysta ma przedostać się najkrótszą ścieżką z wierzchołka w_1 do wierzchołka w_{2n} w grafie $L(2, n)$, zwanym *kratą* (patrz poniższy rysunek), a następnie wrócić z wierzchołka w_{2n} do wierzchołka w_1. Na ile sposobów może on wybrać taką trasę?



krata $L(2, n)$

Wybór najkrótszej ścieżki, zarówno tej z wierzchołka w_1 do wierzchołka w_{2n} jak i tej z wierzchołka w_{2n} do wierzchołka w_1, równoważny jest wyborowi którejś z n krawędzi $w_1w_{n+1}, w_2w_{n+2}, \ldots, w_nw_{2n}$. Jako że takiego wyboru dokonujemy dwa razy, liczba możliwości wynosi n^2.

Istnieje również rozwiązanie bardziej formalne. Zauważmy, że istnieje wzajemna odpowiedniość pomiędzy najkrótszymi ścieżkami $w_1 \rightsquigarrow w_{2n}$ i $w_{2n} \rightsquigarrow w_1$ a funkcjami

$$f\colon \{w_1 \rightsquigarrow w_{2n}, w_{2n} \rightsquigarrow w_1\} \longrightarrow \{w_1w_{n+1}, w_2w_{n+2}, \ldots, w_nw_{2n}\},$$

a tym samym, na mocy twierdzenia 2.1, liczba takich różnych tras/funkcji wynosi n^2.

ZADANIE 2.1. Ile palindromów długości m można utworzyć korzystając z liter alfabetu n-elementowego?

ZADANIE 2.2. Wierzchołki $w_1, w_2, \ldots, w_n$ grafu pełnego K_n pokolorowano k kolorami $c_1, \ldots, c_k$. Ile jest możliwych pokolorowań takich, że kolor$(w_1) \in \{c_1, c_2\}$?

ZADANIE 2.3. Na ile sposobów można zorientować krawędzie (czyniąc je *łukami*) w kracie $L(2, n)$, otrzymując *sieć* (inaczej graf *skierowany* lub *digraf*)?

ZADANIE 2.4. Krawędzie ścieżki (grafu) pokolorowano mając do dyspozycji osiem kolorów $k_1, \ldots, k_8$. Ile wierzchołków ma ta ścieżka, jeśli wiadomo, że liczba możliwych pokolorowań wynosi 512?

ZADANIE 2.5. Mamy zbiór wierzchołków $V = \{a, b, c\}$. Ile różnych sieci (grafów skierowanych, bez pętli oraz multikrawędzi), niekoniecznie spójnych, możemy zbudować na tym zbiorze wierzchołków?

WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

TWIERDZENIE 2.2 (Wariacje bez powtórzeń)

▶ *Liczba ciągów bez powtórzeń długości k ze zbioru n-elementowego wynosi*

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot ((n-k)+1).$$

▶ *Liczba różnowartościowych funkcji z k-elementowego zbioru w n-elementowy zbiór wynosi*

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot ((n-k)+1).$$

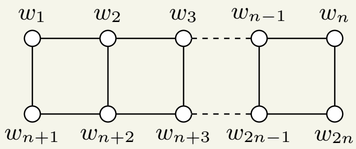
W kawiarni, do której przyszło siedem osób, było 10 gatunków ciastek. ◀ **PRZYKŁAD**
Każdy kupił jedno ciastko, przy czym każdy kupił inne. Na ile sposobów można było kupić ciastka?

Powyższą sytuację można utożsamić z różnowartościową funkcją

$$f\colon \{o_1, o_2, \dots, o_7\} \to \{c_1, c_2, \dots, c_{10}\},$$

która każdej z siedmiu osób przyporządkowuje inny rodzaj ciastka. Zatem liczba sposobów równa jest liczbie różnowartościowych funkcji f, która na mocy twierdzenia 2.2 wynosi $10 \cdot 9 \cdot \ \dots\ \cdot 4$.

Turysta ma przedostać się najkrótszą ścieżką z wierzchołka w_1 do wierzchołka w_{2n} ◀ **PRZYKŁAD**
w kracie $L(2,n)$, a następnie wrócić z wierzchołka w_{2n} do wierzchołka w_1. Na ile sposobów może on wybrać taką trasę, jeśli nie chce wracać tą samą ścieżką?



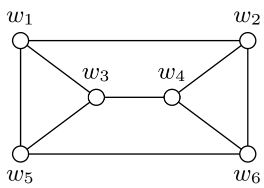
$L(2,n)$

Zauważmy, że istnieje wzajemna odpowiedniość pomiędzy rozważanymi trasami a różnowartościowymi funkcjami

$$f\colon \{w_1 \rightsquigarrow w_{2n}, w_{2n} \rightsquigarrow w_1\} \longrightarrow \{w_1w_{n+1}, w_2w_{n+2}, \dots, w_nw_{2n}\},$$

a tym samym, na mocy twierdzenia 2.2, liczba takich różnych tras/funkcji wynosi $n(n-1)$.

ZADANIE 2.6. Na ile sposobów można pokolorować wierzchołki grafu zwanego *pryzmą* (patrz poniższy rysunek) mając do dyspozycji dziewięć kolorów tak, że każdy kolor używany jest co najwyżej jeden raz?



ZADANIE 2.7. Krawędzie grafu $G = (V, E)$ pokolorowano różnymi kolorami mając do dyspozycji pięć różnych kolorów $k_1, \dots, k_5$. Ile wierzchołków ma graf G, jeżeli wiadomo, że wszystkich takich pokolorowań jest 60, a ponadto G jest

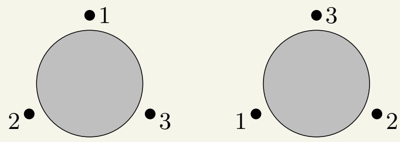
a) grafem spójnym;
b) spójnym pseudografem?

PERMUTACJE

TWIERDZENIE 2.3 (Permutacje)
Liczba permutacji (czyli n-elementowych ciągów bez powtórzeń o elementach ze zbioru n-elementowego) wynosi

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Na ile sposobów można rozsadzić n-osób przy okrągłym n-osobowym stole? ◀ **PRZYKŁAD**
Rozsadzenia przedstawione na poniższym rysunku traktujemy jako różne (tutaj $n = 3$).



Na usadzenie n osób $o_1, o_2, \dots, o_n$ na n krzesłach $k_1, k_2, \dots, k_n$ możemy patrzeć jak na róznowartościową funkcję $f\colon \{o_1, o_2, \dots, o_n\} \longrightarrow \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, a w konsekwencji jak na permutację elementów $o_1, o_2, \dots, o_n$. Zatem na mocy twierdzenia 2.3 liczba różnych takich usadzeń jest równa $n!$.

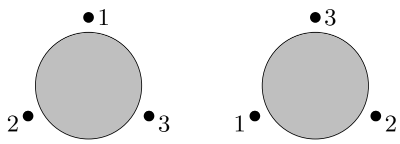
Ile jest różnych[1] ścieżek Hamiltona w grafie pełnym K_n. ◀ **PRZYKŁAD**

Niech $w_1, w_2, \dots, w_n$ będą wierzchołkami grafu K_n. Każda ścieżka Hamiltona odpowiada permutacji tych wierzchołków, a zatem na mocy twierdzenia 2.3 liczba ścieżek Hamiltona w grafie K_n wynosi $n!$.

ZADANIE 2.8. Na ile sposobów różnych można rozsadzić:

a) 3 osoby na 3-osobowej karuzeli;
b) 4 osoby na 4-osobowej karuzeli;
c) n osób na n-osobowej karuzeli?

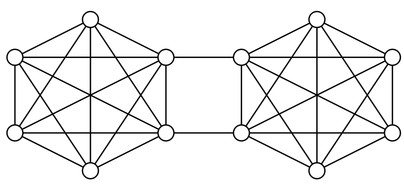
Uwaga. Jako że karuzela kręci się, dwa rozsadzenia uważamy za różne, jeżeli co najmniej jedna osoba ma co najmniej z jednej strony innego sąsiada — czyli np. rozsadzenia na poniższym rysunku są identyczne.



ZADANIE 2.9. Niech $w_1, w_2, \dots, w_n$ będą wierzchołkami grafu pełnego K_n. Ile jest różnych[1] ścieżek Hamiltona w grafie pełnym K_n, w których:

a) w_1 oraz w_2 są wierzchołkami końcowymi;
b) wierzchołki w_1 oraz w_2 są odwiedzane bezpośrednio po sobie, tzn. albo wierzchołek w_2 jest odwiedzony bezpośrednio po wierzchołku w_1 lub na odwrót;
c) wierzchołki w_1 oraz w_2 nie są odwiedzane bezpośrednio po sobie;
d) wierzchołek w_1 jest odwiedzony przed wierzchołkiem w_2 (niekoniecznie bezpośrednio)?

ZADANIE 2.10. Ile jest różnych cykli Hamiltona w grafie przedstawionym poniżej?



[1] Rozróżniamy początek i koniec, a zatem ścieżki $w_1 w_2 \dots w_n$ oraz $w_n w_{n-1} \dots w_1$ traktujemy w tym przypadku jako różne.

PERMUTACJE Z POWTÓRZENIAMI

TWIERDZENIE 2.4 (Permutacje z powtórzeniami)
Niech dane będzie n elementów, gdzie elementów typu 1 (nierozróżnialnych) jest n_1, elementów typu 2 (nierozróżnialnych) jest $n_2, \ldots,$ elementów typu k (nierozróżnialnych) jest n_k. Wówczas liczba sposobów, na które można uporządkować te elementy w rzędzie, wynosi

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Ile różnych 5-literowych słów (ciągów) można utworzyć z liter słowa: ◀ **PRZYKŁAD**

a) ULICA;
b) MARTA;
c) LALKA?

Mając na uwadze twierdzenie 2.4 oraz:

a) że wszystkie litery w słowie ULICA są różne, otrzymujemy 5!;
b) że w słowie MARTA są dwie litery 'A', otrzymujemy $\frac{5!}{2!}$;
c) że w słowie LALKA mamy dwie litery 'L' i dwie litery 'A', otrzymujemy $\frac{5!}{2!2!}$.

ZADANIE 2.11. Ile różnych nieparzystych liczb 8-cyfrowych można utworzyć z cyfr $2, 2, 4, 4, 4, 7, 7, 9$?

ZADANIE 2.12. Na ile różnych sposobów można pokolorować wierzchołki ścieżki P_{10} mając do dyspozycji trzy kolory k_1, k_2, k_3, przy czym koloru k_1 trzeba użyć dokładnie cztery razy, koloru k_2 – też cztery razy, a koloru k_3 – dwa razy?

KOMBINACJE BEZ POWTÓRZEŃ

TWIERDZENIE 2.5 (Kombinacje bez powtórzeń)
Liczba wyborów k-elementowego podzbioru ze zbioru n-elementowego wynosi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Na ile sposobów można podzielić 8-osobową grupę $\{o_1, \ldots, o_8\}$ na dwie grupy, 5-osobową i 3-osobową, a na ile sposobów można podzielić tę grupę na dwie równoliczne grupy? ◄ **PRZYKŁAD**

Zauważmy, że wybór trzech osób z ośmiu automatycznie wyznacza wybór pięciu osób z tej samej grupy. Tym samym, mając na uwadze twierdzenie 2.5, sposobów podziału 8-osobowej grupy na dwie grupy (5-osobową i 3-osobową) jest $\binom{8}{3} = 56$. Co więcej, powyższa obserwacja implikuje, że $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$, a w ogólności $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Jeśli natomiast rozważymy wybór czteroosobowej grupy, wówczas musimy pamiętać, że temu samemu podziałowi odpowiadają dwa różne wybory grupy, tzn. wybór osób o_1, o_2, o_3, o_4 z ośmiu i otrzymany przez to podział $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}, \{o_5, o_6, o_7, o_8\}$ jest równoważny wyborowi osób o_5, o_6, o_7, o_8, bo podział jest ten sam, zatem rozważanych podziałów jest $\frac{1}{2} \cdot \binom{8}{4} = 35$.

Ile przekątnych ma n-wierzchołkowy wielokąt wypukły? ◄ **PRZYKŁAD**

Zauważmy, że każda przekątna odpowiada parze wierzchołków, za wyjątkiem tych par, które tworzą kolejne krawędzie wielokąta.. Tym samym, mając na uwadze twierdzenie 2.5, liczba takich przekątnych równa jest $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

ZADANIE 2.13. Z ilu osób składa się klasa, jeżeli wiadomo, że 2-osobową delegację można wybrać na 300 sposobów?

Przypomnijmy, że w kartach do gry mamy cztery *kolory* — jest to kier ♡, karo ◇, trefl ♣ oraz pik ♠. *Parę* stanowią dwie te same figury ze zbioru {9,10,W,D,K,A} (w przypadku talii złożonej z 24 kart) lub ze zbioru {2,3,4,5,6,7,8,9,10,W,D,K,A} (w przypadku talii złożonej z 52 kart); analogicznie, *trójkę* stanowią trzy te same figury, np. trzy damy, a *kareta* to cztery figury, np. kareta asów.

ZADANIE 2.14. Z talii 24 kart wybieramy 5 kart. Ile jest takich wyborów, w których dostaniemy:

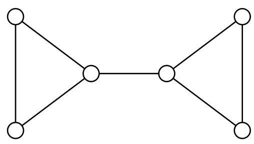
a) pięć kart w jednym kolorze;
b) jedną parę i jedną trójkę;
c) dwie pary różnych figur;
d) dwie pary?

ZADANIE 2.15. Znajdź liczbę rozdań przy grze w brydża, w których każdy z grających otrzyma dokładnie jednego asa i jednego króla.

DALSZE ZADANIA

ZADANIE 2.16. W pewnej grupie osób 45 regularnie pływa, 40 jeździ na rowerze, a 50 biega. Wiemy ponadto, że są 32 osoby, które biegają, ale nie jeżdżą na rowerze, 27 takich, które biegają i pływają, oraz 10 uprawiających wszystkie te trzy rodzaje aktywności. Ile osób biega, ale nie pływa i nie jeździ na rowerze?

ZADANIE 2.17. Mając do dysposyzji k różnych kolorów, na ile sposobów można pokolorować poniższy graf tak, aby dwa sąsiednie wierzchołki miały różne kolory?



ZADANIE 2.18. W poczekalni u lekarza w rzędzie z n krzeseł siedzi k pacjentów w ten sposób, że żadni dwaj z nich nie znajdują się na sąsiednich krzesłach. Na ile sposobów może być wybrany odpowiedni zbiór krzeseł, gdy pacjenci są (**a**) nierozróżnialni, (**b**) rozróżnialni?

Wskazówka. Rozważyć równoważną sytuację, w której każdy z k pacjentów przychodzi z własnym krzesłem i wstawia/dostawia je odpowiednio do stojących już $n-k$ krzeseł.

ZADANIE 2.19. Na ile sposobów można wybrać trzy liczby spośród liczb od 1 do 60 tak, aby ich suma była:

a) nieparzysta;
b) parzysta;
c) podzielna przez 3?

Wskazówka (c). Podzielmy zbiór $R = \{1, 2, \ldots, 60\}$ na trzy (rozłączne) podzbiory R_0, R_1 i R_2, gdzie R_i jest zbiorem tych liczb z R, których reszta z dzielenia przez 3 daje i. Zauważmy, że np. suma dowolnych trzech elementów ze zbioru R_0 daje liczbę podzielną przez 3. Takich trójek jest $\binom{20}{3}$. Zatem — jak można i należy wybierać liczby ze zbiorów R_0, R_1 i R_2 tak, aby otrzymać żądaną sumę? Ile jest takich wyborów?

ZADANIE 2.20. Udowodnij równość $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$.

Wskazówka. Skorzystaj z własności $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

ZADANIE 2.21. Na ile sposobów można utworzyć trzy rozłączne komisje z osób wybranych z 20-osobowej grupy, jeśli muszą one mieć odpowiednio $3, 5$ oraz 7 członków?

ZADANIE 2.22. Na ile sposobów można podzielić grupę $3n$ zawodników na n drużyn po trzech zawodników w każdej?

ZADANIE 2.23. Kod Morse'a zbudowany jest ze skończonych ciągów długości kropek i kresek, które odpowiadają znakom alfanumerycznym. Długość kodu to suma wag poszczególnych elementów, przy czym kropka ma wagę 1, natomiast kreska ma wagę 2. Przykładowo, wszystkie kody długości 3 wyglądają następująco: $\cdots \quad \cdot - \quad - \cdot$. Ile jest wszystkich możliwych kodów Morse'a długości n, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$?

Zadanie 2.24.* *Zbalansowane* ciągi binarne długości $2n$ zawierają n zer i n jedynek oraz spełniają warunek: dla każdego k $(1 \leq k \leq 2n)$ na początkowych k pozycjach liczba zer jest nie mniejsza niż liczba jedynek. A Wyznacz wszystkie takie ciągi dla $n = 4$. B. Wyznacz ich liczbę ogólnie dla n.

ZADANIE 2.25. Na Marsie mieszka trzystu Marsjan, z których każdy jest albo matematykiem, albo filozofem, albo ludożercą. Połowa ludożerców zajmuje się filozofią, połowa filozofów to matematycy, a połowa matematyków to ludożercy. Wiedząc, że żaden z ludożerców nie zajmuje się filozofią i matematyką jednocześnie, ustal, z ilu osób składa się każda z tych grup.

LICZBY STIRLINGA DRUGIEGO RODZAJU ORAZ LICZBY BELLA

Liczba pogrupowań n różnych obiektów w dokładnie k grupach to *podzbiorowa liczba Stirlinga*, nazywana też *liczbą Stirlinga drugiego rodzaju*. Określa ona liczbę sposobów podziału n-elementowego zbioru na k niepustych podzbiorów i oznaczana jest przez $\left\{ {n \atop k} \right\}$ lub $S(n,k)$.

Istnieje siedem sposobów podziału zbioru $X = \{1,2,3,4\}$ na dwie części. ◀ **PRZYKŁAD**

$\{1,2,3\}\cup\{4\}$, $\{1,2,4\}\cup\{3\}$, $\{1,3,4\}\cup\{2\}$, $\{2,3,4\}\cup\{1\}$, $\{1,2\}\cup\{3,4\}$, $\{1,3\}\cup\{2,4\}$, $\{1,4\}\cup\{2,3\}$.

Stąd otrzymujemy, że $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$. Zauważmy, że podział zbioru na dwie części tworzony jest zawsze przez niepusty podzbiór A oraz jego dopełnienie $X \setminus A$. Ponadto podział $A \cup (X \setminus A)$ jest równoważny podziałowi $(X \setminus A) \cup A$. W konsekwencji możemy zauważyć, że dla $n > 0$ zachodzi

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{2^n}{2} - 1 = 2^{n-1} - 1.$$

TWIERDZENIE 2.6 (Liczby Stirlinga drugiego rodzaju)

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n$$

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju spełniają także następujacy wzór rekurencyjny:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

dla $0 < k < n$, *a ponadto* $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ *dla* $n \geq 0$ *oraz* $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ *dla* $n \geq 1$.

Wyznacz liczbę podziałów zbioru $\{1,2,3,4\}$ na trzy części. ◀ **PRZYKŁAD**

Szukana liczba to $\left\{ {4 \atop 3} \right\}$, a jej wartość obliczamy reukrencyjnie korzystając z twierdzenia 2.6.

$$\begin{aligned}\left\{ {4 \atop 3} \right\} &= \left\{ {3 \atop 2} \right\} + 3\cdot\left\{ {3 \atop 3} \right\} = \left(\left\{ {2 \atop 1} \right\} + 2\cdot\left\{ {2 \atop 2} \right\}\right) + 3\cdot 1 = \left[\left(\left\{ {1 \atop 0} \right\} + 1\cdot\left\{ {1 \atop 1} \right\}\right) + 2\cdot 1\right] + 3 \\ &= [(0 + 1\cdot 1) + 2] + 3 = 6.\end{aligned}$$

A zatem istnieje 6 podziałów zbioru $\{1,2,3,4\}$ na trzy części.

Liczba B_n możliwych pogrupowań n różnych obiektów nosi nazwę *liczby Bella*. A zatem liczba Bella B_n jest sumą liczb Stirlinga drugiego rodzaju:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Zbiór $\{1,2,3\}$ ma 5 podziałów: ◀ **PRZYKŁAD**

$$\{\{1,2,3\}\},\ \{\{1,2\},\{3\}\},\ \{\{1,3\},\{1\}\},\ \{\{2,3\},\{1\}\},\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\},$$

a zatem $B_3 = 5$.

Na ile sposobów można podzielić 4-osobową grupę na podgrupy? ◀ **PRZYKŁAD**

Zadanie sprowadza się do wyznaczenia czwartej liczby Bella B_4. Mając na uwadze ich podany wyżej wzór (w oparciu o liczby Stirlinga drugiego rodzaju), otrzymujemy, że

$$B_4 = \sum_{i=0}^{k} \left\{ {4 \atop i} \right\} = \left\{ {4 \atop 0} \right\} + \left\{ {4 \atop 1} \right\} + \left\{ {4 \atop 2} \right\} + \left\{ {4 \atop 3} \right\} + \left\{ {4 \atop 4} \right\} = 0 + 1 + 7 + 6 + 1 = 15.$$

A zatem 4-osobową grupę możemy podzielić na podgrupy na 15 różnych sposobów.

TWIERDZENIE 2.7 (Liczby Bella)
Liczby Bella spełniają następujacy wzór rekurencyjny:

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i,$$

gdzie $B_0 = 0$.

ZADANIE 2.26. Na ile sposobów można rozdzielić siedem różnych kwiatów do dwóch (nierozróżnialnych) doniczek tak, aby w każdej doniczce był przynajmniej jeden kwiat?

ZADANIE 2.27. Na ile sposobów można spakować osiem różnych książek do czterech (takich samych, dostatecznie dużych) pudeł tak, aby każde pudło zawierało przynajmniej jedną książkę?

ZADANIE 2.28. Wyznacz liczbę wszystkich surjekcji ze zbioru 8-elementowego na zbiór 5-elementowy.

ZADANIE 2.29. Wyznacz liczbę wszystkich możliwych podziałów zbioru 6-elementowego.

NIEUPORZĄDKOWANY PODZIAŁ LICZBY

Niech $n, k \in \{1, 2, \ldots\}$. Interesuje nas, na ile sposobów można zapisać liczbę n w postaci sumy k składników

$$n = a_1 + a_2, \ldots, a_k,$$

gdzie $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k > 0$. Każdy taki ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nazywany jest (nieuporządkowanym) *podziałem liczby* n na k składników, a liczba takich podziałów oznaczana jest przez $P(n, k)$, natomiast liczba wszystkich podziałów liczby n (dla $k = 1, 2, \ldots, n$) oznaczana jest przez $P(n)$.

Istnieje jedenaście podziałów liczby 6. ◀ **PRZYKŁAD**

$$\begin{array}{llllll}
6 \\
5 & 1 \\
4 & 2 \\
4 & 1 & 1 \\
3 & 3 \\
3 & 2 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Stąd otrzymujemy, że $P(6, 1) = 1$, $P(6, 2) = 3$, $P(6, 3) = 3$, $P(6, 4) = 2$, $P(6, 5) = 1$ oraz $P(6, 6) = 1$, a zatem $P(6) = 11$.

Dla podziału $P = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ liczby n można utworzyć tzw. *diagram Ferrersa*: ma on k wierszy i zawiera dokładnie a_i punktów w i-tym wierszu. *Podział sprzężony* do podziału P otrzymujemy transponując (zamieniając) miejscami wiersze i kolumny diagramu Ferrersa dla P, otrzymujac tym samym *sprzężony diagram Ferrersa*.

Rozważmy podział $(5, 3, 2)$ liczby 10. Diagram Ferrersa dla tego podziału wygląda następująco: ◀ **PRZYKŁAD**

$$\begin{array}{lllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet
\end{array}$$

Sprzężony diagram Ferrersa wygląda natomiast tak:

$$\begin{array}{lll}
\bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet \\
\bullet \\
\bullet
\end{array}$$

i odpowiada on podziałowi $(3, 3, 2, 1, 1)$ liczby 10.

Zauważmy, że transpozycja diagramu Ferrersa daje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy podziałami liczby n na k składników a podziałami tej liczby o największym składniku równym k, co prowadzi do następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 2.8 (Podziały liczby)
Liczba podziałów liczby n na k składników jest równa liczbie podziałów liczby n, w których największy składnik równy jest k.

Wyznacz wszystkie podziały liczby 10 na trzy składniki. **◀ PRZYKŁAD**

W podziale liczby 10 na trzy składniki największy składnik może być równy 8 — chodzi o podział $(8, 1, 1)$, a jego diagram Ferrersa jest następujący:

$$\begin{array}{cccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

W oparciu o ten diagram możemy wygenerować wszystkie szukane podziały. Są one następujące:

8	1	1
7	2	1
6	3	1
6	2	2
5	4	1
5	3	2
4	4	2
4	3	3

Mamy osiem podziałów. Czy są to wszystkie podziały? Tak, niemniej dla pewności, mając na uwadze twierdzenie 2.8, możemy wygenerować jeszcze wszystkie podziały 10, w których największy składnik równy jest 3. Te podziały są następujące:

3	1	1	1	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1	1	
3	2	2	1	1	1		
3	2	2	2	1			
3	3	1	1	1	1		
3	3	2	1	1			
3	3	2	2				
3	3	3	1				

Tych podziałów jest także osiem.

TWIERDZENIE 2.9 (Podziały liczby — zależność rekurencyjna)
Zachodzi następująca zależność rekurencyjna:

$$P(n,k) = \begin{cases} 0 & n = k = 0 \text{ lub } n < k; \\ 1 & k = 1 \text{ oraz } n \geq k; \\ P(n-1, k-1) + P(n-k, k) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W oparciu o wzór rekurencyjny z twierdzenia 2.9 wyznacz liczbę $P(10, 3)$. **◀ PRZYKŁAD**

$$\begin{aligned} P(10,3) &= P(9,2) + P(7,3) = (P(8,1) + P(7,2)) + (P(6,2) + P(4,3)) \\ &= [1 + (P(6,1) + P(5,2))] + [(P(5,1) + P(4,2)) + (P(3,2) + P(1,3))] \\ &= 1 + 1 + P(5,2) + 1 + P(4,2) + P(3,2) + 0 \\ &= 3 + (P(4,1) + P(3,2)) + (P(3,1) + P(2,2)) + (P(2,1) + P(1,2)) \\ &= 3 + 1 + (P(2,1) + P(1,2)) + 1 + 1 + 1 + 0 = 7 + 1 + 0 = 8. \end{aligned}$$

ZADANIE 2.30. Wyznacz, ile jest podziałów liczby 11 na 5 składników:

a) generując wszystkie podziały;
b) w oparciu o wzór rekurencyjny.

UPORZĄDKOWANY PODZIAŁ LICZBY

W kolejce do kina stoi n osób. Osoby te są wpuszczane do kina w k grupach, z których każda składa się z jednej lub więcej osób. Na ile sposobów można utworzyć tych k grup? ◀ **PRZYKŁAD**

Załóżmy, że przed kinem stoi kolejka ośmiu osób

$$o_1o_2o_3o_4o_5o_6o_7o_8,$$

którą chcemy podzielić na trzy (niepuste) grupy. Dla przykładu, podział może być taki ($\times$ oznacza miejsce podziału):

$$o_1o_2o_3 \times o_4 \times o_5o_6o_7o_8$$

albo taki:

$$o_1o_2o_3o_4 \times o_5o_6o_7 \times o_8$$

Zauważmy, że każdy z takich podziałów odpowiada wstawieniu dwóch „bramek” $\times$ na dwóch pozycjach spośród siedmiu możliwych pozycji pomiędzy ośmioma osobami (aby powstały trzy grupy, z których każda jest niepusta). A zatem tutaj liczba takich podziałów kolejki wynosi $\binom{7}{2}$.

Analogicznie w ogólnym przypadku — każdy z szukanych podziałów n-osobowej kolejki odpowiada wstawieniu $k-1$ bramek $\times$ na $k-1$ pozycjach spośród $n-1$ możliwych pozycji pomiędzy n osobami (aby powstało k grup, z których każda jest niepusta). A zatem tutaj liczba takich podziałów wynosi $\binom{n-1}{k-1}$.

ZADANIE 2.31. W oparciu o odpowiedź do powyższego przykładu, wyznacz liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, gdzie każde x_i jest dodatnią liczbą całkowitą.

ZADANIE 2.32. Mamy r jednakowych kul i n różnych komórek. Ile jest takich rozmieszczeń kul w komórkach, że żadna komórka nie jest pusta?

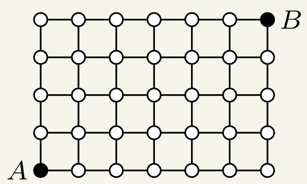
ZADANIE 2.33. Zastosuj odpowiedź do poprzedniego zadania w celu uzasadnienia, że liczba rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, gdzie każde x_i jest nieujemną liczbą całkowitą, wynosi $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Wskazówka. Rozważ podstawienie $y_i = x_i + 1$ oraz odpowiednio powstałe równanie.

ZADANIE 2.34. Załóżmy, że mamy przedmioty w k różnych typach, że liczba przedmiotów każdego typu jest nieograniczona oraz że przedmioty jednego typu są nierozróżnialne. Na ile sposobów można wybrać n przedmiotów spośród tych k typów przy założeniu, że dopuszczalne są powtórzenia typów i że kolejność wybranych przedmiotów jest nieistotna?

ZADANIE 2.35. Mamy r jednakowych kul i n różnych komórek. Ile jest wszystkich możliwych rozmieszczeń kul w komórkach?

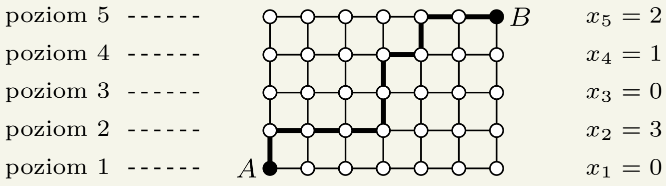
Rozważmy graf $L(5,7)$ (patrz rysunek poniżej). Chcemy przejść najkrótszą ścieżką z wierzchołka A do wierzchołka B. Ile jest takich ścieżek? ◀ **PRZYKŁAD**



Zauważmy, że każda najkrótsza ścieżka z wierzchołka A do wierzchołka B musi zawierać 10 krawędzi, z których dowolne cztery muszą być „pionowe”, a pozostałe muszą być „poziome”. Stąd liczba takich najkrótszych ścieżek jest równa liczbie sposobów wskazania, które cztery spośród dziesięciu krawędzi muszą być „pionowe”. Mamy zatem $\binom{10}{4}$ takich wyborów — a zatem i ścieżek.

W oparciu o odpowiedź do powyższego przykładu, wyznacz, ile rozwiązań ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$, gdzie każde x_i jest nieujemną liczbą całkowitą? ◀ **PRZYKŁAD**

Rozważmy jeszcze raz graf $L(5, 7)$ oraz jakąś najkrótszą ścieżkę Π z wierzchołka A do wierzchołka B (przedstawione na rysunku poniżej). Niech x_i, $i = 1, \ldots, 5$, będzie liczbą poziomych krawędzi na i-tym poziomie na ścieżce Π (patrz rysunek poniżej): mamy $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 1$ oraz $x_5 = 2$. Wówczas, jak łatwo zauważyć, zachodzi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$.



Z drugiej strony, jeśli rozważymy dowolne rozwiązanie równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$, np. $x_1 = 4, x_2 = x_3 = x_4 = 0$ oraz $x_5 = 2$, to takiemu rozwiązaniu możemy przyporządkować najkrótszą ścieżkę z wierzchołka A do wierzchołka B, która na każdym z poziomów i ma x_i poziomych krawędzi. W konsekwencji, mając na uwadze rozwiązanie przykładu powyżej, poszukiwana liczba rozwiazań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$, gdzie każde x_i jest nieujemną liczbą całkowitą, wynosi $\binom{10}{4}$.

ZASADA PODWÓJNEGO ZLICZANIA

Wykaż, że $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. ◀ **PRZYKŁAD**

Z definicji lewa strona równania stanowi liczba wyborów k liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zauważmy teraz, że zbiory k-elementowe można podzielić na te, które zawierają liczbę n, oraz te, które jej nie zawierają. W pierwszym przypadku tych zbiorów jest $\binom{n-1}{k-1}$ (bo zakładając, że n należy do zbioru, pozostaje wybrać $k-1$ elementów ze zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$), w drugim natomiast tych zbiorów jest $\binom{n-1}{k}$ (bo wybieramy k liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n-1\}$). I dokładnie suma liczby tych wyborów jest po prawej stronie równania.

Udowodnij równość $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}$. ◀ **PRZYKŁAD**

Zauważmy, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, a zatem lewa strona jest z definicji liczbą wyborów $n-k$ liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Z drugiej strony, zauważmy, że wśród wszystkich podzbiorów k-elementowych można wyróżnić te, które mają 1 jako najmniejszy element, następnie te, które mają 2 jako najmniejszy element, ..., i na koniec te, które mają $n-k+1$ jako najmniejszy element — i dokładnie suma liczby tych wyborów jest po prawej stronie równania.

ZADANIE 2.36. Udowodnij równość $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Wskazówka. Rozważ liczbę wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego.

ZADANIE 2.37. Udowodnij równość $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Wskazówka. Rozważ liczbę k-osobowych drużyn z kapitanem spośród n sportowców.

ZADANIE 2.38. Udowodnij równość $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

Wskazówka. Rozważ sytuację, w której mamy dokonać wyboru m osobowej delegacji spośród n osób, a następnie w tej delegacji wybrać k-osobowy zarząd.

ZADANIE 2.39. Udowodnij równość $\sum\limits_{r=0}^{k} \binom{n}{r}\binom{m}{k-r} = \binom{m+n}{k}$.

Wskazówka. Rozważ wybór k osób spośród grupy n kobiet i m mężczyzn.

ZADANIE 2.40. Udowodnij równość $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Wskazówka. Rozważ wybór n osób spośród grupy n kobiet i n mężczyzn.

ZADANIE 2.41. Z poprzedniego zadania otrzymujemy, że chcąc wybrać z grupy $2n$ osób, składającej z n kobiet i n mężczyzn, podzbiór o takiej samej liczbie kobiet i mężczyzn, podzbiór ten może być wybrany na $\binom{2n}{n}$ sposobów. Zakładając, że po wybraniu takiego podzbioru chcemy ustalić ponadto przywódcę wśród mężczyzn i przywódczynię wśród kobiet, uzasadnij, że $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}^2 = n^2\binom{2n-2}{n-1}$.

ZADANIE 2.42. Udowodnij równość $\sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 2^k\binom{n}{k}$.

Wskazówka. Rozważ kolorowanie k spośród n obiektów, mając do dyspozycji dwa kolory.

ZASADA WŁĄCZANIA I WYŁĄCZANIA

TWIERDZENIE 2.10 (Zasada włączania i wyłączania)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$
$$|\bigcup_{i=1}^{n}| = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} |A_I|, \text{ gdzie } A_I = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Wyznacz liczbę elementów $|A \cap B \cap C|$ oraz $|C|$ wiedząc, że $|A| = 12$, $|B| = 10$, $|A \cap B| = 4$, $|B \cap C| = 2$, $|A \cap C| = 2$, $|A \cup B \cup C| = 20$. ◀ **PRZYKŁAD**

Na podstawie zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że $|C| + |A \cap B \cap C| = 6$. Zauważmy, że $|A \cap B \cap C| \leq |B \cap C| = 2$, a zatem $|A \cap B \cap C|$ może być równe $0, 1$ lub 2. Otrzymujemy wtedy, że $|C| \in \{4, 5, 6\}$.

Oblicz, ile dodatnich liczb mniejszych od 100 jest podzielnych przez $2, 3$ lub 5. ◀ **PRZYKŁAD**

Niech $D_k = \{n \in \{1, \ldots, 99\} \colon n \text{ jest podzielne przez } k\}$. Wówczas:
– $|D_2| = \lfloor \frac{99}{2} \rfloor = 49$, $|D_3| = \lfloor \frac{99}{3} \rfloor = 33$, $|D_5| = \lfloor \frac{99}{5} \rfloor = 19$;
– $|D_2 \cap D_3| = \lfloor \frac{99}{2 \cdot 3} \rfloor = 16$, $|D_2 \cap D_5| = \lfloor \frac{99}{2 \cdot 5} \rfloor = 9$, $|D_3 \cap D_5| = \lfloor \frac{99}{3 \cdot 5} \rfloor = 6$;
– $|D_2 \cap D_3 \cap D_5| = \lfloor \frac{99}{2 \cdot 3 \cdot 5} \rfloor = 3$.
Wówczas z zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że
$$|D_2 \cup D_3 \cup D_5| = 49 + 33 + 19 - 16 - 9 - 6 + 3 = 73.$$

ZADANIE 2.43. Wyznacz liczbę elementów $|A \cap B \cap C|$ oraz $|C|$ wiedząc, że $|A| = 10$, $|B| = 9$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cap C| = 1$, $|B \cap C| = 1$, $|A \cup B \cup C| = 18$.

ZADANIE 2.44. W grupie 30 studentów 20 lubi grać w piłkę nożną, 15 – w koszykówkę, a kilku – w siatkówkę. W piłkę nożną i koszykówkę lubi grać 10 osób, w piłkę nożną i siatkówkę – 3 osoby, a w koszykówkę i siatkówkę – 2 osoby. Ponadto tylko jedna osoba lubi grać we wszystkie trzy gry. Ile osób lubi grać tylko w siatkówkę?

ZADANIE 2.45. Ile jest liczb w zbiorze $\{1, 2, \ldots, 99\}$, które nie są podzielne przez żadną z liczb $2, 3, 5$ lub 7?

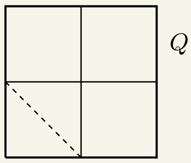
ZADANIE 2.46. Ile jest liczb w zbiorze $\{1, 2, \ldots, 2000\}$, które są podzielne przez $9, 11, 13$ lub 15.

ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA

TWIERDZENIE 2.11 (Zasada szufladkowa Dirichleta)
Jeśli n przedmiotów rozmieścimy w k szufladkach oraz $n > km$, gdzie m jest pewną liczbą naturalną, wówczas w którejś szufladce znajdzie się więcej niż m przedmiotów.

◀ **PRZYKŁAD**

Uzasadnij, że wśród dowolnych pięciu punktów należących do wnętrza kwadratu Q o boku 4 cm zawsze są dwa punkty odległe od siebie o mniej niż 3 cm.



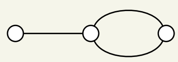
Podzielmy kwadrat Q na cztery kwadraty o wymiarach 2×2 cm (patrz rysunek powyżej). Traktując teraz te kwadraty jako szufladki, zauważmy, że mając pięć dowolnych punktów należących do Q, mając na uwadze twierdzenie 2.11, wśród nich znajdą się na pewno dwa, które należą do jakiejś szufladki. Jako że dla dowolnych dwóch punktów w kwadracie o boku a ich odległość od siebie wynosi co najwyżej długość przekątnej tegoż kwadratu, czyli $a\sqrt{2}$, a zatem wspomniane wyżej dwa punkty są w odległości co najwyżej $2\sqrt{2} < 3$.

◀ **PRZYKŁAD**

Pewna grupa ludzi przywitała się podając sobie ręce. Nikt nie witał się z samym sobą, a żadna para nie witała się więcej niż raz. Wykaż, że istnieją dwie osoby, które witały się tyle samo razy.

Powyższą sytuację można zamodelować jako graf (prosty) $G = (V, E)$, gdzie zbiorem wierzchołków jest zbiór osób, a dwa wierzchołki są sąsiednie, jeśli odpowiadające im osoby przywitały się (podając sobie ręce). Wówczas rozważana własność równoważna jest następującej: graf G zawiera co najmniej dwa wierzchołki tego samego stopnia.

Zauważmy teraz, że w grafie o n wierzchołkach nie może zaistnieć sytuacja, że jakiś wierzchołek jest stopnia 0 (nie jest sąsiedni z żadnym z wierzchołków), a jakiś inny stopnia $n-1$ (jest sąsiedni ze wszystkimi). Zatem dopuszczalne są albo stopnie $0, 1, \ldots, n-2$ albo $1, \ldots, n-1$. Jako że mamy n wierzchołków i tylko $n-1$ możliwych wartości stopni (w każdej z dwóch sytuacji), zatem, mając na uwadze twierdzenie 2.11 istnieją dwa wierzchołki o tym samym stopniu.



Naturalnym jest pytanie, że rozważane stwierdzenie jest prawdziwe w multigrafach. Otóż nie jest — patrz np. 3-wierzchołkowy multigraf powyżej, gdzie stopnie wierzchołków wynoszą odpowiednio $1, 3, 2$ (od lewej do prawej).

ZADANIE 2.47. W grupie stu wysportowanych studentów 85 gra w piłkę nożną, 80 – w tenisa, 70 – w siatkówkę, a 66 biega. Czy wśród tych studentów znajduje się taki, który trenuje wszystkie te dyscypliny sportowe?

ZADANIE 2.48. Uzasadnij, że wśród dowolnych czternastu liczb naturalnych znajdziemy dwie, które przy dzieleniu przez 13 dają tę samą resztę.

ZADANIE 2.49. Uzasadnij, że wśród dowolnych pięciu punktów należących do trójkąta równobocznego o boku długści 2 cm zawsze są dwa punkty odległe o nie więcej niż 1 cm.

ZADANIE 2.50. Niech O będzie kołem o promieniu $r = 1$ cm. Niech $S \subset O$ będzie takim zbiorem punktów należącym do koła, że odległość pomiędzy dowolnymi dwoma punktami z S wynosi przynajmniej 1 cm. Uzasadnij, że $|S| \leq 6$.

ZADANIE 2.51. Udowodnij, że wśród dowolnych $n + 1$ liczb całkowitych będzie istniała para liczb różniących się o wielokrotność n.

Wskazówka. Mając dane liczby $l_0, \ldots, l_n$ rozważ n szufladek ponumerowanych $0, 1, \ldots, n - 1$. Następnie rozważ każdą z liczb $l_i - l_0$ i włóż ją do szufladki odpowiadającej reszcie z dzielenia tej liczby przez n.

ZADANIE 2.52. Ułamek $\frac{m}{k}$ przedstawiamy w postaci dziesiętnej. Udowodnij, że okres tego ułamka jest nie większy niż k.

Wskazówka. Rozważ algorytm dzielenia m przez k.

ZADANIE 2.53. Mając danych dziesięć dowolnych różnych całkowitych liczb dodatnich mniejszych od 107 pokazać, że będą istniały dwa rozłączne podzbiory tych liczb, których elementy dają taką samą sumę.

Wskazówka. Ile wynosi najmniejsza i największa możliwa suma do uzyskania z dowolnego niepustego podzbioru zbioru dowolnych dziecięciu różnych liczb dodatnich mniejszych od 107? A ile jest niepustych podzbiorów dowolnego zbioru 10-elementowego?

Zadanie 2.54.* Udowodnij, że wśród dowolnych $n + 1$ liczb całkowitych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ istnieje taka, która jest wielokrotnością innej.

Wskazówka. Rozważ n szuflad ponumerowanych kolejnymi liczbami nieparzystymi $1, 3, \ldots, 2n - 1$. Każdą z wylosowanych liczb wkładamy do szuflady z numerem m, jeżeli $k = 2^r m$ dla jakiegoś $r \geq 0$.

ALGORYTMY GENEROWANIA PODZBIORÓW ORAZ PERMUTACJI

Niech $G = (V, A)$ będzie n-wierzchołkowym grafem (prostym) zadanym w postaci macierzy sąsiedztwa $A_{n\times n}$. W oparciu o algorytm generowania podzbiorów zaimplementuj procedurę, która (dla tak zadanego na wejściu) grafu G wypisze wszystkie jego podgrafy, które są grafami pełnymi. •••

Niech $G = (V, A)$ będzie n-wierzchołkowym grafem zadanym w postaci macierzy sąsiedztwa $A_{n\times n}$. W oparciu o algorytm generowania podzbiorów k-elementowych zaimplementuj procedurę, która (dla tak zadanego na wejściu) grafu G oraz liczby naturalnej $2 \le k \le n$ wypisze wszystkie jego k-wierzchołkowe indukowane podgrafy, które są 2-regularne. •••

Niech $G = (V, A)$ będzie n-wierzchołkowym grafem zadanym w postaci macierzy sąsiedztwa $A_{n\times n}$. W oparciu o algorytm generowania permutacji zaimplementuj procedurę, która (dla tak zadanego na wejściu) grafu G wypisze wszystkie jego ścieżki Hamiltona. •••

Algorytm generowania podzbiorów zbioru $\{1, \dots, n\}$.

- pierwszy podzbiór to $\emptyset$;
- kolejny podzbiór po podzbiorze A:
  - znajdujemy największy element a nie należący do A, czyli
  $$a = \max\{i \notin A \ : \ i \in \{1, 2 \dots, n\}\};$$
  - jeżeli nie ma takiego a, to rozważany podzbiór A jest ostatnim – KONIEC;
  - w przeciwnym przypadku, dodajemy a do zbioru A, a następnie usuwamy z A wszystkie elementy większe od a.

Rozważmy zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i załóżmy, że właśnie wygenerowaliśmy podzbiór $A = \{1, 2, 3, 6\}$. Spośród elementów nienależących do A algorytm znajduje ten największy, czyli $a = 5$. Wstawiamy 5 do A i usuwamy wszystkie $x > 5$, czyli tutaj tylko 6, otrzymując podzbiór $\{1, 2, 3, 5\}$. ◀ **PRZYKŁAD**

ZADANIE 2.55. Wypisz 10 kolejnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ZADANIE 2.56. Wypisz 10 kolejnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 7\}$ poczynając od podzbioru $\{1, 2, 3, 5\}$.

Algorytm generowania k-elementowych podzbiorów $\{1, \dots, n\}$.

- pierwszy podzbiór to $\{1, \dots, k\}$;
- kolejny podzbiór po podzbiorze $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, gdzie $a_1 < \dots < a_k$:
  - znajdujemy najmniejsze i takie, że $a_i + 1 \notin A$;
  - jeżeli $a_i = a_n$, to rozważany podzbiór $A = \{n - k + 1, \dots, n\}$ jest ostatnim – KONIEC;
  - w przeciwnym przypadku, zwiększamy a_i o jeden, a elementy mniejsze od a_i zamieniamy na $i - 1$ najmniejszych kolejnych liczb, tzn. $a_j := j$, dla $j < i$.

Rozważmy zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i załóżmy, że właśnie wygenerowaliśmy podzbiór $\{2, 3, 4, 6\}$. Algorytm znajduje $i = 3$, bo $a_i = 4$ i $a_i + 1 = 5 \notin \{2, 3, 4, 6\}$. Zatem $a_i := a_i + 1 = 5$, a elementy a_1, a_2 przyjmują odpowiednio wartości 1 i 2. Zatem kolejny podzbiór to $\{1, 2, 5, 6\}$. ◀ **PRZYKŁAD**

ZADANIE 2.57. Wypisz 10 kolejnych 3-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ZADANIE 2.58. Wypisz 10 kolejnych 5-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Algorytm generowania permutacji zbioru $\{1, \dots, n\}$.

- pierwsza permutacja to $a_i = i$, dla $1 \leq i \leq n$,
- kolejna permutacja po permutacji $(a_1 \dots a_n)$:
  - znajdujemy największe j spełniające warunek $a_j < a_{j+1}$;
  - jeżeli nie ma takiego j, to rozważana permutacja jest permutacją ostatnią – Koniec;
  - w przeciwnym przypadku, zamieniamy a_j z najmniejszym a_k takim, że $a_k > a_j$ i $k > j$, a następnie odwracamy porządek elementów $a_{j+1}, \dots, a_n$.

◀ **PRZYKŁAD**

Rozważmy permutację (436521). Algorytm znajduje $j = 2$ i $a_j = 3$. Mamy $3 < 6 = a_3$ oraz $3 < 5 = a_4$, zatem zamieniamy a_2 z a_4. Następnie odwracamy kolejność elementów a_3, a_4, a_5, a_6, otrzymując (451236).

ZADANIE 2.59. Wypisz 10 kolejnych permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, 6\}$ poczynając od permutacji (456321).

ZADANIE 2.60. Wypisz 10 kolejnych permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, 7\}$ poczynając od permutacji (5463721).

PERMUTACJE RAZ JESZCZE*

■ Przypomnijmy, że na permutację n-elementową można patrzeć jak na dowolną różnowartościową funkcję ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na ten sam zbiór. Na oznaczenie permutacji π używa się często zapisu

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Przykładem permutacji jest

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

która jest funkcją przyjmującą następujące wartości: $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 5$, $\pi(3) = 4$, $\pi(4) = 3$ oraz $\pi(5) = 1$. Dwie permutacje można składać tak, jak się składa funkcje. Złożenie permutacji π_1 i π_2 określone jest wzorem

$$\pi_1 \circ \pi_2(x) = \pi_1(\pi_2(x)).$$

Na przykład dla permutacji

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ oraz } \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ich złożenie $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ wynosi

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

ponieważ $\pi(1) = \pi_1(\pi_2(1)) = \pi_1(3) = 4$, $\pi(2) = \pi_1(\pi_2(2)) = \pi_1(1) = 2$,
$\pi(3) = \pi_1(\pi_2(3)) = \pi_1(4) = 3$, oraz $\pi(4) = \pi_1(\pi_2(4)) = \pi_1(2) = 1$.
Ponadto, jako że $\pi(2) = 2$ i $\pi(3) = 3$, to elementy 1 i 2 są *punktami stałymi* permutacji π.

■ Mówimy, że x jest *punktem stałym* permutacji $\pi\colon X \longrightarrow X$, jeśli $\pi(x) = x$. *Nieporządek* na zbiorze X jest permutacją π spełniającą warunek, że $\pi(x) \neq x$ dla każdego $x \in X$ (innymi słowy, nieporządek jest permutacją bez punktów stałych).

TWIERDZENIE 2.12 (Nieporządki)
Liczba D_n nieporządków dla n-elementowego zbioru X, nazywana dolną silnią *i oznaczana symbolem $!n$, dana jest wzorem*

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! = n! \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Liczbę D_n można też określić rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} !0 &= 1, \\ !1 &= 0, \\ !n &= (n-1)(!(n-1)+!(n-2)). \end{aligned}$$

Istnieje $3! = 6$ permutacji zbioru trzyelementowego: ◀ **PRZYKŁAD**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nieporządki są jednak tylko dwa, ponieważ ze wzoru reukrencyjnego mamy:

$$!3 = (3-1)(!(3-1)+!(3-2)) = 2(!2+!1) = 2((2-1)(!(2-1)+!(2-2)) + 0) = 2(1((!1+!0)) = 2.$$

Są nimi permutacje

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ oraz } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ZADANIE 2.61. W biegu bierze udział sześciu zawodników z (różnymi) numerami startowymi od 1 do 6. Na ile sposobów może zakończyć się ten bieg tak, aby każdy z zawodników zajął miejsce różne od swego numeru startowego?

ZADANIE 2.62. Nauczyciel przeprowadził kartkówkę dla pięciu uczniów. Kartkówki chce rozdać do sprawdzenia (tym) samym uczniom. Na ile sposobów może to zrobić tak, żeby żaden z uczniów nie dostał do sprawdzenia swojej pracy?

■ Zbiór S_n wszystkich permutacji na zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ z działaniem złożenia ma następujące własności:

a) Złożenie permutacji jest łączne, czyli dla każdych trzech permutacji π_1, π_2 oraz π_3 zachodzi

$$\pi_1 \circ (\pi_2 \circ \pi_3) = (\pi_1 \circ \pi_2) \circ \pi_3.$$

b) Wśród permutacji istnieje identyczność id, czyli permutacja, która każdemu x z dziedziny przypisuje wartość $id(x) = x$. Identyczność jest elementem neutralnym operacji składania permutacji, ponieważ dla każdej permutacji π zachodzi

$$\pi \circ id = id \circ \pi = \pi.$$

c) Dla każdej permutacji π istnieje permutacja odwrotna (funkcja odwrotna) π^{-1} spełniająca warunek

$$\pi \circ \pi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi = id.$$

Na przykład dla permutacji

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutacją odwrotną π^{-1} jest

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Możemy sprawdzić np. dla $x = 3$:

$$\pi \circ \pi^{-1}(3) = \pi(\pi^{-1}(3)) = \pi(4) = 3.$$

Wyznaczenie permutacji odwrotnej odbywa się w następujący sposób: jeśli $\pi(x) = y$, to $\pi^{-1}(y) = x$, gdyż wówczas otrzymamy $\pi \circ \pi^{-1}(y) = \pi(\pi^{-1}(y)) = \pi(x) = y = id(y)$.

ZADANIE 2.63. Mając dane poniżej permutacje π_1 i π_2, oblicz $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$, π_1^{-1}, π_2^{-1}, a następnie wyznacz ich punkty stałe.

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ZADANIE 2.64. Wyznacz liczbę permutacji π ze zbioru S_6, które spełniają $\pi^2 = id$, $\pi \neq id$.

■ Często stosuje się *cykliczną* notację permutacji. Rozważmy dla przykładu permutację

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że $\pi(1) = 2, \pi(2) = 5$ oraz $\pi(5) = 1$ — mówimy tym samym, że elementy $1, 2$ oraz 5 tworzą *cykl* (1 2 5) długości 3. Analogicznie, mając na uwadze, że $\pi(3) = 4$ oraz $\pi(4) = 3$, otrzymujemy cykl (3 4) długości 2. Permutację π możemy teraz zapisać jako

$$\pi = (1\ 2\ 5) \circ (3\ 4),$$

albo równoważnie

$$\pi = (1\ 2\ 5)(3\ 4) \quad \text{(tzn. bez znaku operatora } \circ\text{).}$$

■ Każdą permutację π zbioru $X = \{1, \ldots, n\}$ możemy rozłożyć na rozłączne cykle w sposób następujący:

- Wybieramy dowolny element $x \in X$, który nie jest jeszcze w żadnym cyklu.
- Iterujemy permutację π otrzymując kolejno:

$$x, \pi^1(x), \pi^2(x), \pi^3(x), \ldots$$

aż do uzyskania $\pi^j(x) = x$, gdzie $\pi^i(x) = \underbrace{\pi \circ \cdots \circ \pi}_{i \text{ razy}}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, j$.

- Dodajemy do rozkładu cykl $\Big(x\ \pi^1(x)\ \pi^2(x)\ \pi^3(x)\ \ldots\ \pi^{j-1}(x)\Big)$.
- Jeśli w zbiorze X pozostały elementy niepokryte przez żaden cykl, to wracamy do kroku pierszego.

■ Jeśli permutacja π złożona jest z k rozłącznych cykli, to zapisujemy ją jako

$$\pi = (x_1\ \ldots)(x_2\ \ldots)\ldots(x_k\ \ldots),$$

gdzie w kolejnych nawiasach są elementy kolejnych cykli zaczynających się odpowiednio od $x_1, \ldots, x_k$. Należy podkreślić, że nie ma znaczenia kolejność cykli, ani to, od jakiego elementu zaczynamy cykl — np. (1 2 5)(3 4) i (3 4)(2 5 1) oznaczają tę samą permutację — ważne natomiast są długości cykli i kolejność elementów je tworzących. A dokładnie, zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.13 (Rozkład permutacji na cykle)
Rozkład permutacji na cykle jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności cykli i elementów początkowych.

◄ **PRZYKŁAD**

Rozważmy permutację

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 5 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Rozkład π na cykle jest następujący:

- pierwszy cykl: $1, \pi(1) = 3, \pi(3) = 7, \pi(7) = 6, \pi(6) = 2, \pi(2) = 4, \pi(4) = 1$;
- drugi cykl: $5, \pi(5) = 5$, zatem 5 jest punktem stałym permutacji π;
- trzeci cykl: $8, \pi(8) = 9, \pi(9) = 8$.

Otrzymujemy ostatecznie $\pi = (1\ 3\ 7\ 6\ 2\ 4)(5)(8\ 9)$.

ZADANIE 2.65. Niech $\pi_1 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8)$ oraz $\pi_2 = (1\ 3\ 5\ 7)(2\ 6)(4)(8)$. Wyznacz $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$, π_1^2, π_1^3, π_2^2, π_2^3 oraz π_1^{-1}, następnie podaj liczbę punktów stałych każdej z tych permutacji oraz przedstaw te permutacje w postaci cyklicznej.

ZADANIE 2.66. Permutacja $\pi \in S_n$ jest nazywana *cykliczną*, jeśli jest postać w notacji cyklicznej składa się z jednego cyklu długości n. Uzasadnij, że istnieje dokładnie $(n-1)!$ permutacji cyklicznych w zbiorze S_n.

◄ **PRZYKŁAD**

Dwanaście kart ponumerowanych $1, \ldots, 12$ leży na stole w następujący sposób:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

Zbieramy te karty od lewej do prawej, z kolejnych 4 wierszy, a następnie rozkładamy je, ale tym razem z góry na dół, w kolejnych 3 kolumnach.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{array}$$

Ile razy musimy powtórzyć powyższą operację, aby otrzymać pierwotne ułożenie kart?

Niech π będzie permutacją, która określa zmianę ułożenia kart, a dokładnie, mamy $\pi(i) = j$, jeśli karta i pojawia się na pozycji zajmowanej uprzednio przez kartę j. Wówczas notacja cykliczna π jest postaci (1)(2 4 10 6 5)(3 7 8 11 9)(12). Cykle (1) oraz (12) oznaczają, że karty 1 i 12 zawsze pozostają na swoim miejscu. Jako że pozostałe cykle mają długość 5, dokładnie ta liczba powtórnych przełożeń kart wystarczy, aby znalazły się one w swoim pierwotnym ułożeniu. (Zauważmy także, że $\pi^5 = id.$)

ZADANIE 2.67. Rozwiąż powyższy problem z kartami przy założeniu, że dostępnych jest 20 kart i rozważamy ułożenie postaci: 5 wierszy po 4 karty.

■ *Typem permutacji* π nazywamy wektor $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, gdzie c_i jest liczbą cykli długości i w rozkładzie π na cykle. Zazwyczaj typ permutacji zapisuje się jako $[1^{c_1}2^{c_2}\ldots n^{c_n}]$, przy czym często pomija się te wartości, dla których $c_i = 0$.

Permutacja $\pi = (1\ 3\ 7\ 6\ 2\ 4)(5)(8\ 9)$ ◀ **PRZYKŁAD**
ma jeden cykl długości 1, jeden cykl długości 2 oraz jeden cykl długości 6, a więc jest typu $[1^1 2^1 6^1]$.

■ *Transpozycja* to permutacja typu $[1^{n-2}2^1]$. Innymi słowy, transpozycja dokonuje tylko jednego przestawienia dwóch elementów.

Dla permutacji $\pi \in S_7$ ◀ **PRZYKŁAD**

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

mamy $\pi = (1)(2)(3\ 6)(4)(5)(7) = (3\ 6)$, a więc π jest typu $[1^5 2^1]$, czyli π jest transpozycją.

■ Ponadto zachodzi

$$(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_{k-1}\ x_k) = (x_1\ x_k)(x_1\ x_{k-1})\ldots(x_1\ x_3)(x_1\ x_2).$$

A zatem, jako że na mocy twierdzenia 2.13 dowolna permutacja może być rozłożona na cykle, każda permutacja jest złożeniem transpozycji.

■ Permutacja jest *parzysta*, gdy jest złożeniem parzystej liczby transpozycji, w przeciwnym wypadku jest *nieparzysta*. *Znak* $\operatorname{sign}(\pi)$ permutacji π to

$$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^r,$$

gdzie r jest liczbą transpozycji, na które można rozłożyć π.

Rozłóż podaną permutację $\pi \in S_9$ na cykle i transpozycje. ◀ **PRZYKŁAD**
Wyznacz typ tej permutacji. Czy permutacja π jest parzysta?

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Rozłóżmy najpierw permutację π na cykle:

- cykl pierwszy: $(1\ 3\ 4\ 5)$;
- cykl drugi: $(2\ 6)$;
- cykl trzeci: $(7\ 9\ 8)$.

A zatem $\pi = (1\ 3\ 4\ 5)(2\ 6)(7\ 9\ 8)$, a tym samym π jest typu $[2^1 3^1 4^1]$. Aby przedstawić teraz π jako złożenie transpozycji, najpierw rozkładamy każdy z cykli, zgodnie ze sposobem podanym wyżej:

- $(1\ 3\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)$.
- $(2\ 6)$ — bez zmian.
- $(7\ 9\ 8) = (7\ 8)(7\ 9)$.

A zatem otrzymujemy, że $\pi = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(2\ 6)(7\ 8)(7\ 9)$ i π jest permutacją parzystą.

ZADANIE 2.68. Permutacje $\pi_1, \pi_2 \in S_7$ zadane tabelami:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

rozłóż na cykle i transpozycje. Wyznacz typy tych permutacji.

ZADANIE 2.69. Rozłóż podaną permutację $\pi \in S_{14}$ na cykle i transpozycje. Wyznacz typ tej permutacji. Czy permutacja π jest nieparzysta?

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 14 & 2 & 7 & 3 & 4 & 1 & 10 & 8 & 13 & 9 & 11 & 12 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Odpowiedzi do zadań

2.1. $\left(\lceil \frac{m}{2} \rceil\right)^n$

2.2. $2k^{n-2}$

2.3. 2^{3n-2}

2.4. Niech n będzie liczbą wierzchołków ścieżki P i niech m $(= n-1)$ oznacza liczbę krawędzi w ścieżce P. Wówczas $8^m = 512$, zatem $m = 3$ — czyli $n = 4$.

2.5. Na zbiorze wierzchołków $V = \{a, b, c\}$ mamy:

- jeden graf o liczbie krawędzi równej 0, zatem 1 możliwość ich skierowania;
- trzy grafy o liczbie krawędzi równej 1, zatem ostatecznie $3 \cdot 2^1$ możliwości ich skierowania;
- trzy grafy o liczbie krawędzi równej 2, zatem ostatecznie $3 \cdot 2^2$ możliwości ich skierowania;
- jeden graf o liczbie krawędzi równej 3, zatem 2^3 możliwości ich skierowania.

Ostatecznie liczba możliwych sieci wynosi $1 + 6 + 12 + 8 = 27$.

2.6. $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 4 = \frac{9!}{3!}$

2.7. Niech m będzie liczną krawędzi grafu G. Zachodzi $5 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot ((5-m)+1) = 60$, a zatem $m = 3$. W konsekwencji:

a) 3 lub 4;

b) $1, 2, 3$ lub 4.

2.8.

a) $3! = 6$

b) $4! = 12$

c) $n!$

2.9.

a) $2(n-2)!$

b) $\frac{n!}{2}$

c) $2(n-1)!$

d) $n! - 2(n-1)! = (n-2)(n-1)!$

2.10. $(4!)^2 = 576$

2.11. $\frac{7!}{2!2!3!} + \frac{7!}{2!3!} = \frac{7!}{8}$

2.12. $\frac{10!}{4!4!2!}$

2.13. Niech x będzie liczbą osób w klasie. Zachodzi $\binom{x}{2} = 300$, stąd $x(x-1) = 600$, a zatem $x = 25$.

2.14.

a) $4 \cdot \binom{6}{5} = 24$

b) $6 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot \binom{4}{3} = 720$

c) $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{16}{1} = 19440$

d) $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{16}{1} + \binom{6}{1} \cdot \binom{20}{1} = 19560$

2.15. $\left[\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{44}{11}\right] \cdot \left[\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{33}{11}\right] \cdot \left[\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{22}{11}\right] \cdot \left[\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{11}{11}\right] = \frac{(4!)^2 \cdot 44!}{(11!)^4}$.

2.16. Niech P, R oraz B oznaczają odpowiednio zbiory osób, które pływają, jeżdżą na rowerze i biegają. Interesuje nas moc zbioru $X = B \setminus (P \cup R)$. Zauważmy, że

$$|X| = |(B \setminus R)| - |\,((P \cap B) \setminus R)\,|.$$

Z warunków zadania mamy, że $|B \setminus R| = 32$. Ponadto, jako że $|P \cap B \cap R| = 10$ oraz $|P \cap B| = 27$, otrzymujemy, że $|(P \cap B) \setminus R| = 17$. W konsekwencji $|X| = 15$.

2.17. $k(k-1)^3(k-2)^2$

2.18.

a) Problem równoważny jest wybraniu spośród $n-k+1$ miejsc pomiędzy wolnymi $n-k$ krzesłami (rozłącznych) miejsc do wstawienia k krzeseł. Tym samym szukana liczba to $\binom{n-k+1}{k}$.

b) W rozwiązaniu do pkt. **a)** należy jeszcze uwględnić dowolną permutację pacjentów przy wyborze tych samych krzeseł, a zatem szukana liczba to $\binom{n-k+1}{k} \cdot k!$.

2.19.

a) $\binom{30}{3} + \binom{30}{2} \cdot \binom{30}{1}$

b) $\binom{30}{3} + \binom{30}{2} \cdot \binom{30}{1}$ lub $\binom{60}{3} - \left(\binom{30}{3} + \binom{30}{2} \cdot \binom{30}{1}\right)$

c) $3 \cdot \binom{20}{3} + \binom{20}{1} \cdot \binom{20}{2} + \binom{20}{1} \cdot \binom{20}{1} \cdot \binom{20}{1}$

2.20. Mając na uwadze, że $\binom{n}{0}\binom{n}{n} = 1$ oraz równość $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, lewa strona rozważanego równania przyjmuje postać

$$1 - \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] - \cdots + (-1)^{n-1}\left[\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right] + (-1)^n = 0.$$

Zauważmy, że każdy z czynników $\binom{n-1}{k}$, $1 \leq k \leq n-2$, występuje zarówno ze znakiem '+', jak i '−', a zatem współczynniki te sumują się nawzajem do 0. Pozostaje $1 - \binom{n-1}{0} + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} + (-1)^n = 1 - 1 + (-1)^{n-1} + (-1)^n$, co oczywiście sumuje się do 0.

2.21. $\binom{20}{3} \cdot \binom{17}{5} \cdot \binom{12}{7} = \frac{20!}{3! \cdot 5! \cdot 7! \cdot 5!}$

2.22. Gdyby drużyny były rozróżnialne, w sensie np. ponumerowane kolejnymi numerami $1, \ldots, n$, wówczas takich wyborów byłoby

$$\binom{3n}{3} \cdot \binom{3n-3}{3} \cdot \binom{3n-6}{3} \cdot \ldots \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \frac{(3n)!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{(3n)!}{6^n}.$$

Jednak w naszym przypadku drużyny nie są rozróżnialne, a zatem powyższą liczbę należy podzielić przez liczbę permutacji n drużyn, czyli przez $n!$. A zatem szukana liczba to

$$\frac{(3n)!}{6^n \cdot n!}.$$

2.23. Dla ustalonego $k \geq 0$, kod składa się z k kresek i $n-2k$ kropek, czyli ma $n-k$ elementów. Zatem aby otrzymać pojedynczy kod, wybieramy k elementów będących kreskami. A zatem wszystkich kodów

Morse'a długości k jest $\binom{n-k}{k}$. W konsekwencji wszystkich możliwych kodów Morse'a długości n wynosi $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}$.

2.24. Niech X będzie zbiorem wszystkich niezbalabsowanych ciągów a Y zbiorem ciągów długości $2n$, które mają dokładnie $n-1$ jedynek i $n+1$ zer. Zdefniujmy bijekcję $f\colon X \longrightarrow \{0,1\}^{2n}$, która dla danego niezbalabsowanego ciągu $(a_1,\dots,a_{2n})$ przekszałca go w ciąg długości $2n$, który ma dokładnie $n-1$ jedynek i $n+1$ zer, w następujący sposób:

$$f(a_1,\dots,a_{2n}) = (1-a_1,\dots,1-a_k,a_{k+1},\dots,a_{2n}),$$

gdzie k jest najmniejsze takie, że liczba zer w podciągu $(a_1,\dots,a_k)$ jest mniejsza niż liczba jedynek. Np. dla ciągu niezbalansowanego $(0,1,1,1,0,0)$ mamy $k=3$ oraz $f(0,1,1,1,0,0)=(1,0,0,1,0,0)$. Jako że $|Y|=\binom{2n}{n-1}$, a wszystkich ciągów długości $2n$ z równą liczbą jedynek i zer jest $\binom{2n}{n}$, zatem wszystkich ciągów zbalansowanych długości $2n$ jest $\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$.

2.25. Niech m,f,l oznacza odpowiednio liczbę matematyków, filozofów oraz ludożerców. Z warunków zadania otrzymujemy, że $f \geq \frac{l}{2}$, $m \geq \frac{f}{2}$ oraz $l \geq \frac{m}{2}$.

Rozważmy nieróweść $f \geq \frac{l}{2}$. Jako że $m \geq \frac{f}{2}$, a nikt z ludożerców nie zajmuje się jednocześnie filozofią i matematyką, zachodzi $\frac{f}{2} \geq \frac{l}{2}$, a więc $f \geq l$. Podobnie można wykazać, że $m \geq f$ oraz $l \geq m$, co razem implikuje $m=f=l$, a w konsekwencji $m=f=l=100$.

2.26. $\left\{ {7 \atop 2} \right\} = 63$

2.27. $\left\{ {8 \atop 4} \right\} = 1701$

2.28. $\left\{ {8 \atop 5} \right\} \cdot 5! = 1050 \cdot 120 = 126000$

2.29. $B_6 = 203$

2.30. 10

2.31. Zauważmy, że rozbicie n na dodatnie x_i równoważne jest rozdzieleniu n-osobowej kolejki na k niepustych grup, a zatem liczba rozwiazań rozważanego równania wynosi $\binom{n-1}{k-1}$.

2.32. Niech $x_i > 0$, $i=1,\dots,n$, będzie liczbą kul w komórce i. Wówczas zachodzi $x_1+x_2+\ldots+x_n=r$. A zatem szukana liczba takich rozmieszczeń to $\binom{r-1}{n-1}$.

2.33. Zauważmy, że równanie $x_1+\dots+x_k=n$, gdzie x_i jest nieujemne, równoważne jest równaniu $(x_1+1)+\dots+(x_k+1)=n+k$, gdzie x_i+1 jest dodatnie, czyli równaniu $y_1+\dots+y_k=n+k$, gdzie y_i jest dodatnie. A liczba rozwiązań takiego równania jest równa $\binom{n+k-1}{k-1}$.

2.34. Każdy taki wybór można utożsamić z pewnym rozwiązaniem równania $x_1+\dots+x_k=n$, gdzie x_i jest nieujemne i określa liczbę przedmiotów typu i. Zatem liczba takich wyborów jest równa $\binom{n+k-1}{k-1}$.

2.35. Niech $x_i \geq 0$, $i=1,\dots,n$, będzie liczbą kul w komórce i. Wówczas zachodzi $x_1+\ldots x_n=r$. A zatem liczba wszystkich takich rozmieszczeń jest równa $\binom{r+n-1}{n-1}$.

2.43. Na podstawie zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że $|C|+|A\cap B\cap C|=4$. Zauważmy, że $|A\cap B\cap C|\leq 1$, ponieważ $|B\cap C=1$. Wtedy $|C|$ jest równe odpowiednio 3 lub 4 (a $|A\cap B\cap C|=0$ lub, odpowiednio, $|A\cap B\cap C|=1$).

2.44. Na podstawie zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że liczba osób lubiących grać w siatkówkę wynosi 9. Mając teraz na uwadze tylko to, ile osób lubi grać w piłkę nożną i siatkówkę, ile w koszykówkę i siatkówkę, oraz ile we wszystkie trzy gry, znów stosując np. zasadę włączania-wyłączania, otrzymujemy, że 5 osób lubi grać tylko w siatkówkę.

2.45. Niech $D_k = \{n \in \{1, \ldots, 99\} \colon n \text{ jest podzielne przez } k\}$. Wówczas z zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że liczb mniejszych od 100 i niepodzielnych przez $2, 3, 5$, ani 7 jest

$$99 - |D_2 \cup D_3 \cup D_5 \cup D_7| = 99 - (49 + 33 + 19 + 14 - 16 - 9 - 7 - 6 - 4 - 2 + 3 + 2 + 1 + 0 - 0) = 22.$$

2.46. Niech $D_k = \{n \in \{1, \ldots, 2000\} \colon n \text{ jest podzielne przez } k\}$. Wówczas:

- $|D_9| = \lfloor \frac{2000}{9} \rfloor = 222$, $|D_{11}| = \lfloor \frac{2000}{11} \rfloor = 181$, $|D_{13}| = \lfloor \frac{2000}{13} \rfloor = 153$, $|D_{15}| = \lfloor \frac{2000}{15} \rfloor = 133$;
- $|D_9 \cap D_{11}| = |D_{99}| = \lfloor \frac{2000}{99} \rfloor = 20$, $|D_9 \cap D_{13}| = |D_{117}| = \lfloor \frac{2000}{117} \rfloor = 17$,
  $|D_9 \cap D_{15}| = |D_{45}| = \lfloor \frac{2000}{45} \rfloor = 44$, $|D_{11} \cap D_{13}| = |D_{143}| = \lfloor \frac{2000}{143} \rfloor = 13$,
  $|D_{11} \cap D_{15}| = |D_{165}| = \lfloor \frac{2000}{165} \rfloor = 12$, $|D_{13} \cap D_{15}| = |D_{195}| = \lfloor \frac{2000}{195} \rfloor = 10$;
- $|D_9 \cap D_{11} \cap D_{13}| = |D_{1287}| = \lfloor \frac{2000}{1287} \rfloor = 1$, $|D_9 \cap D_{11} \cap D_{15}| = |D_{495}| = \lfloor \frac{2000}{495} \rfloor = 4$,
  $|D_9 \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{585}| = \lfloor \frac{2000}{585} \rfloor = 3$, $|D_{11} \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{2145}| = \lfloor \frac{2000}{2145} \rfloor = 0$;
- $|D_9 \cap D_{11} \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{6435}| = \lfloor \frac{2000}{6435} \rfloor = 0$.

Zauważmy, że $D_9 \cap D_{15} = D_{45}$, a nie D_{135}, ponieważ najmniejszcza wspólna wielokrotność liczb 9 oraz 15 wynosi 45; podobna ostrożność jest konieczna w przypadku $D_9 \cap D_{11} \cap D_{15}, D_9 \cap D_{13} \cap D_{15}$, itd. Wówczas na mocy zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że

$$|D_9 \cup D_{11} \cup D_{13} \cup D_{15}| = 222 + 181 + 153 + 133 - (20 + 17 + 44 + 13 + 12 + 10) + (1 + 4 + 3 + 0) - 0 = 581.$$

2.55.

$\emptyset$
$\{6\}$
$\{5\}$
$\{5, 6\}$
$\{4\}$
$\{4, 6\}$
$\{4, 5\}$
$\{4, 5, 6\}$
$\{3\}$
$\{3, 6\}$

2.56.

$\{1, 2, 3, 5, 7\}$
$\{1, 2, 3, 5, 6\}$
$\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$
$\{1, 2, 3, 4\}$
$\{1, 2, 3, 4, 7\}$
$\{1, 2, 3, 4, 6\}$
$\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2.57.

$\{1,2,3\}$
$\{1,2,4\}$
$\{1,3,4\}$
$\{2,3,4\}$
$\{1,2,5\}$
$\{1,3,5\}$
$\{2,3,5\}$
$\{1,4,5\}$
$\{2,4,5\}$
$\{3,4,5\}$

2.58.

$\{1,2,3,4,5\}$
$\{1,2,3,4,6\}$
$\{1,2,3,5,6\}$
$\{1,2,4,5,6\}$
$\{1,3,4,5,6\}$
$\{2,3,4,5,6\}$
$\{1,2,3,4,7\}$
$\{1,2,3,5,7\}$
$\{1,2,4,5,7\}$
$\{1,3,4,5,7\}$

2.59.

$\{4,6,1,2,3,5\}$
$\{4,6,1,2,5,3\}$
$\{4,6,1,3,2,5\}$
$\{4,6,1,3,5,2\}$
$\{4,6,1,5,2,3\}$
$\{4,6,1,5,3,2\}$
$\{4,6,2,1,3,5\}$
$\{4,6,2,1,5,3\}$
$\{4,6,2,3,1,5\}$
$\{4,6,2,3,5,1\}$

2.60.

$\{5,4,6,7,1,2,3\}$
$\{5,4,6,7,1,3,2\}$
$\{5,4,6,7,2,1,3\}$
$\{5,4,6,7,2,3,1\}$
$\{5,4,6,7,3,1,2\}$
$\{5,4,6,7,3,2,1\}$
$\{5,4,7,1,2,3,6\}$
$\{5,4,7,1,2,6,3\}$
$\{5,4,7,1,3,2,6\}$
$\{5,4,7,1,3,6,2\}$

2.61. $!6 = 256$

2.62. $!5 = 44$

2.63.

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ punkty stałe: } 3, 4, 5;$$
$$\pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ punkty stałe: } 3, 4;$$
$$\pi_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ brak punktów stałych;}$$
$$\pi_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ brak punktów stałych.}$$

2.64. Mając na uwadze definicję złożenia: $\binom{6}{2} + \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}}{2!} + \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}}{3!} = 75$. Dzielenie przez 2! oraz 3! wynika z faktu, że nie ma znaczenia kolejność wyboru par tworzących transpozycje. W przypadku wyboru dwóch par, pozostałe dwa punkty, choć tworzą trzecią parę, to są jednak „inną” parą, nie wybraną ani za pierwszym, ani za drugim razem, bo są punktami stałymi.

2.65.

$\pi_1 \circ \pi_2 = (1)(2\ 4\ 5\ 8\ 7)(3\ 6)$; jeden punkt stały: 1;
$\pi_2 \circ \pi_1 = (1\ 6\ 4\ 7\ 8)(2\ 5)(3)$; jeden punkt stały: 3;

$\pi_1^2 = (1\ 3\ 2)(6\ 5\ 4)(7)(8)$; dwa punkty stałe: 7 i 8;

$\pi_1^3 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7\ 8)$; sześć punktów stałych: $1, 2, 3, 4, 5$ i 6;

$\pi_2^2 = (1\ 5)(2)(3\ 7)(4)(6)(8)$; cztery punkty stałe: $2, 4, 6$ i 8;

$\pi_2^3 = (1\ 7\ 5\ 3)(2\ 6)(4)(8)$; dwa punkty stałe: 4 i 8;

$\pi_1^{-1} = (1\ 3\ 2)(4\ 6\ 5)(8\ 7)$; brak punktów stałych.

2.66. Każdą permutację cykliczną można utożsamić z n-elementowym ciągiem złożonym z n różnych znaków, przy czym dowolne dwa ciągi, które mogą być otrzymane jeden z drugiego poprzez „przesunięcie i zawinięcie” (patrz zadanie z karuzelą) należy utożsamić z jedną i tą samą permutacją cykliczną. W konsekwencji liczna takich permtacji wynosi $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

2.67. 9

2.68.

$\pi_1 = (1\ 3\ 6)(2\ 4\ 5\ 7)$, a tym samym π_1 jest typu $[3^1 4^1]$.
Rozkład na transpozycje: $\pi_1 = (1\ 6)(1\ 3)(2\ 7)(2\ 5)(2\ 4)$.

$\pi_2 = (1\ 4\ 5)(2\ 7)(3)(6)$, a tym samym π_1 jest typu $[1^2 2^1 3^1]$.
Rozkład na transpozycje: $\pi_1 = (1\ 5)(1\ 4)(2\ 7)$.

2.69.

$\pi = (1\ 14\ 6)(2)(3\ 7\ 10\ 9\ 13\ 5\ 4)(8)(11)(12)$, a tym samym π jest typu $[1^4 3^1 7^1]$.
$\pi = (1\ 6)(1\ 14)(3\ 4)(3\ 5)(3\ 13)(3\ 9)(3\ 10)(3\ 7)$, a zatem π jest parzysta.

ELEMENTY PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Dokonujemy trzech rzutów monetą. Każde zdarzenie elementarne (trójka) jest jednakowo prawdopodobne. Jakie jest prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A polegającego na tym, że orzeł pojawi się dwa razy? Jakie jest prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B polegającego na tym, że orzeł pojawi się co najmniej dwa razy? Jakie jest prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia C polegającego na tym, że orzeł pojawi się co najwyżej dwa razy? ◀ **PRZYKŁAD**

Zbiór zdarzeń elementarnych jest następujący:

$$\{\mathrm{OOO}, \mathrm{OOR}, \mathrm{ORO}, \mathrm{ROO}, \mathrm{RRR}, \mathrm{ORR}, \mathrm{ROR}, \mathrm{RRO}\}.$$

Mając teraz na uwadze liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjającą każdemu ze zdarzeń, otrzymujemy $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ oraz $P(C) = \frac{7}{8}$.

ZADANIE 3.1. Rozważmy zbiór wszystkich funkcji ze zbioru A w zbiór B, gdzie $|A| \geq 2$; czyli $\Omega = B^A$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana funkcja posiada takie same wartości dla dwóch z góry wybranych elementów $a, b \in A$?

ZADANIE 3.2. Z elementów $1, 2, 3$ utworzono wszystkie możliwe permutacje. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w wybranej losowo permutacji:

a) są nie mniej niż dwie inwersje;[1]
b) element 2 tworzy jedną inwersję.

ZADANIE 3.3. Z urny, w której znajduje się 20 kul białych i 2 kule czarne, wyjmuje się kolejno n kul, przy czym każdą wyciągniętą kulę kładzie się z powrotem do urny. Znaleźć najmniejszą wartość n taką, przy której prawdopodobieństwo wylosowania chociaż raz czarnej kuli jest większe od $\frac{1}{2}$.

Wskazówka. Rozważyć zdarzenie przeciwne: że wśród n losowań pojawiły się same kule białe.

ZADANIE 3.4. Rozważmy dowolne losowe pokolorowanie $k + 1 \geq 1$ kolorami wierzchołków grafu $G = (V, E)$ i niech π będzie dowolną ścieżką prostą długości k w grafie G (o ile ścieżka taka istnieje). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie wierzchołki ścieżki π są różnych kolorów?

TWIERDZENIE 3.1 (Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń)
Prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na zajściu przynajmniej jednego ze zdarzeń A_1 lub A_2 równa się sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń zmniejszonej o prawdopodobieństwo łącznego ich zajścia, tzn.

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że losując jedną kartę z talii 52 kart otrzymamy pika lub asa. ◀ **PRZYKŁAD**

Oznaczmy przez A_1 zdarzenie polegające na otrzymaniu pika, przez A_2 zdarzenie polegające na otrzymaniu asa, a przez A zdarzenie polegające na zajściu przynajmniej jednego z wyżej wymienionych zdarzeń. Zauważmy, że zdarzenie $A_1 \cap A_2$ polega na otrzymaniu asa pik. Tym samym ze wzoru otrzymujemy

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}.$$

[1] Niech $(a_1, \ldots, a_n)$ będzie permutacją n różnych liczb. Para liczb (a_j, a_k), $j < k$, tworzy *inwersję*, jeśli $a_j > a_k$.

PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE ORAZ NIEZALEŻNOŚĆ ZDARZEŃ

Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ zdarzenia A przy założeniu, że zaszło zdarzenie B, nazywamy iloraz prawdopodobieństwa łącznego zajścia zdarzeń A i B do prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ gdzie } P(B) > 0.$$

Mówimy, że zdarzenie A jest *niezależne* od zdarzenia B, jeśli zachodzi jeden z dwóch przypadków:

$$P(A|B) = P(A) \text{ i } P(B) > 0 \text{ albo } P(B) = 0.$$

TWIERDZENIE 3.2 (Niezależność zdarzeń)
Na to, aby zdarzenia A i B były niezależne, potrzeba i wystarcza, aby $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

W urnie są kule o numerach $1, 2, 3, 4, 5$. Wybieramy losowo dwie kule bez zwracania. ◀ **PRZYKŁAD**
Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzeń takich, że otrzymamy:

a) kule o kolejnych rosnących numerach.
b) kule o kolejnych rosnących numerach, jeżeli wylosowano m.in. kulę o numerze 2.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu kul o rosnących numerach, a B zdarzenie polegające na wylosowaniu (jakiejś) kuli o numerze 2. Wówczas

$$\Omega = \{(x, y) : x \neq y \text{ oraz } x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\},$$

czyli $\Omega = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$, a następnie:

$A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$,

$B = \{(1,2), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (3,2), (4,2), (5,2)\}$

oraz $A \cap B = \{(1,2), (2,3), (2,4), (2,5)\}$.

A zatem $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, a zatem

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}.$$

Jako że $P(A|B) = P(A)$ i $P(B) > 0$, otrzymujemy, że zdarzenia A i B są niezależne (także z faktu, że $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (twierdzenie 3.2)).

ZADANIE 3.5. Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadnie 6, jeżeli na każdej kostce wypada inna liczba oczek?

ZADANIE 3.6. Rzucamy dwukrotnie monetą. Niech zdarzenie A oznacza, że w pierwszym rzucie wypadł orzeł, a zdarzenie B – że wypadł dokładnie jeden orzeł. Oblicz $P(A|B)$. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

ZADANIE 3.7. Rzucamy trzykrotnie monetą. Niech zdarzenie A oznacza, że za pierwszym oraz drugim razem wypadło to samo, zdarzenie B – za pierwszym i trzecim razem wypadło to samo, a zdarzenie C – za drugim i trzecim razem wypadło to samo. Czy zdarzenia A, B i C są niezależne (a) parami, (b) zespołowo?

ZADANIE 3.8. Niech przestrzeń zdarzeń elementarnych będzie zbiorem 3-elementowych ciągów zero-jedynkowych. Rozważmy zdarzenia:

a) na 1. współrzędnej stoi 0;
b) na 1. i 3. współrzędnej stoi 0;

c) na 1. i 3. współrzędnej mamy różne wartości;
d) na wszystkich współrzędnych to samo.

Jakie jest klasyczne prawdopodobieństwo tych zdarzeń? Czy zdarzenia te są parami niezależne? Uogólnij następnie rozważania na przestrzeń dla ciągów $n \geq 3$-elementowych.

ZADANIE 3.9. Cyfry $1, 2, 3, 4, 5$ są napisane na pięciu kartkach tak, że każdej cyfrze odpowiada jedna kartka. Pobieramy losowo jednocześnie trzy kartki. Jakie jest prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:

a) suma otrzymanych liczb jest liczbą parzystą;
b) suma otrzymanych liczb jest liczbą parzystą, jeżeli wylosowano jedną liczbę nieparzystą;
c) suma otrzymanych liczb jest liczbą parzystą, jeżeli wylosowano jedną liczbę parzystą?

ZADANIE 3.10. Udowodnij, że jeśli zdarzenia A i B są niezależne, to niezależne są także zdarzenia A i $\overline{B}$ oraz $\overline{A}$ i $\overline{B}$.

UKŁAD ZUPEŁNY ZDARZEŃ ORAZ PRAWDOPODOBIEŃSTWO CAŁKOWITE

TWIERDZENIE 3.3 (Prawdopodobieństwie zupełne)
Jeśli zdarzenia $A_1, \cdots, A_n$ tworzą układ zupełny zdarzeń, to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia B wyliczamy ze wzoru

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$

◀ **PRZYKŁAD**

W urnie są 4 kule białe i 3 czarne. Losujemy dwie kule.
Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kul w różnych kolorach?

Niech B oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu za pierwszym razem kuli białej, a C – wylosowaniu kuli czarnej. Niech R oznacza wylosowanie za drugim razem kuli różnej od tej za pierwszym razem. Wówczas z twierdzenia 4.3 otrzymujemy, że

$$P(R) = P(B) \cdot P(R|B) + P(C) \cdot P(R|C) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{7}.$$

ZADANIE 3.11. W każdej z 5 urn pierwszej serii znajdują się 4 kule białe i 6 kule czarnych, w każdej z 8 urn drugiej serii znajduje się 9 kul białych i 6 kul czarnych. Sięgamy losowo do jednej z urn i i wyciągamy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana kula będzie biała?

ZADANIE 3.12. Losujemy jedną kulę z jednej z 4 urn typu A i 16 urn typu B. W każdej z urn typu A znajduje się 7 kul białych i 3 kule czarne, natomiast w każdej z urn typu B znajdują się 4 kule białe i 6 kul czarnych. Jakie jest prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia C polegającego na wylosowaniu kuli białej?

ZADANIE 3.13. Mamy dwie urny z kulami: w I. urnie są 2 kule białe i 4 czarne, w II. urnie są 3 kule białe i 3 czarne. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie 1 lub 2, to losujemy kulę z I. urny, jeśli wypadnie $3, 4, 5$ lub 6, to losujemy kulę z II. urny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy kulę białą?

ZADANIE 3.14. Z urny, w której jest b kul białych i c kul czarnych, wyjęto losowo jedną kulę. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej, jeśli nie znamy koloru kuli poprzednio wylosowanej?

ZADANIE 3.15. Z urny, w której jest b kul białych i c kul czarnych, wyjęto losowo jedną kulę i nie oglądając jej, wrzucono do drugiej urny, w której było b_1 kul białych i c_1 kul czarnych. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z drugiej urny?

ZADANIE 3.16. W urnie jest n kul, w tym $k \leq n$ białych. n osób losuje kulę po kolei bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej dla:

a) 2-giej osoby;
b) 3-ciej osoby;
c) ostatniej osoby?

◀ **PRZYKŁAD***

Przeprowadzamy serię kolejnych doświadczeń tak, że w wyniku każdego z nich może zajść zdarzenie A albo zdarzenie przeciwne $\overline{A}$. Oznaczmy zajście zdarzenia A w n-tym doświadczeniu przez A_n i zdarzenia doń przeciwnego przez $\overline{A_n}$, oraz odpowiednio przez p_n prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A_n i przez q_n odpowiednie prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przeciwnego, tzn. $p_n = P(A_n)$, $q_n = P(\overline{A_n}) = 1 - p_n$. Niech teraz w przypadku zajścia zdarzenia A w n-tym doświadczeniu prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w $(n+1)$-doświadczeniu równa się a. W przypadku zaś, gdy nie zajdzie zdarzenie A w n-tym doświadczeniu, prawdopodobieństwo jego zajścia w $(n+1)$-szym doświadczeniu niech równa się b, tzn. $P(A_{n+1}|A_n) = a$, $P(A_{n+1}|\overline{A_n}) = b$. W tak postawionym zagadnieniu oblicz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w $(n+1)$-szym doświadczeniu znając prawdopodobieństwa p_1, a, b.

Zdarzenie A_{n+1} polega na zajściu jednego z dwóch zdarzeń wykluczających się: $A_n \cap A_{n+1}$ i $\overline{A_n} \cap A_{n+1}$, a zatem $A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (\overline{A_n} \cap A_{n+1})$. Korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym otrzymujemy, że że

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \cdot (A_{n+1}|A_n) + P(\overline{A_n}) \cdot P(A_{n+1}|\overline{A_n}).$$

Po wprowadzeniu podanych oznaczeń zachodzi zatem $p_{n+1} = p_n \cdot a + q_n \cdot b$. Wyznaczając p_{n+1} otrzymujemy, że

$$p_{n+1} = p_1 \cdot c^n + b \cdot (1 + c + \cdots + c^{n-1}) = (p_1 - \frac{b}{1-c}) \cdot c^n + \frac{b \cdot (1-c^n)}{1-c},$$

gdzie $c = a - b$. Zauważmy, że uzyskany tutaj ciąg prawdopodobieństw jest najprostszym przypadkiem tzw. „łańcucha Markowa”. Przy przejściu granicznym, gdy $n \to \infty$, otrzymujemy

$$p = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} = \frac{b}{1-a+b}.$$

Ciekawym jest fakt, że p nie zależy od początkowej wartości p_1.

Zadanie 3.17.* Niech prawdopodobieństwo tego, że po wyjeździe z domu napotkamy na pierwszym skrzyżowaniu zielony sygnał świetlny, będzie równe $\frac{1}{2}$. Sygnalizacja jest tak ustawiona, że w przypadku zatrzymania się na dowolnym skrzyżowaniu przy świetle czerwonym prawdopodobieństwo tego, że na następnym skrzyżowaniu zastaniemy światło zielone jest równe $\frac{95}{100}$, natomiast prawdopodobieństwo tego, że jeśli na dowolnym skrzyżowaniu będziemy mieli światło zielone, to i na następnym będziemy mieli światło zielone, jest równe $\frac{1}{10}$. Oblicz:

a) prawdopodobieństwo, że po wyjeździe z garażu na trzecim skrzyżowaniu będziemy mieli światło zielone;
b) prawdopodobieństwo graniczne, tj. $\lim_{n\to\infty} p_{n+1}$, gdzie p_k oznacza prawdopodobieństwo, że po wyjeździe z garażu na k-tym skrzyżowaniu będziemy mieli światło zielone.

SCHEMAT BERNOULLIEGO

TWIERDZENIE 3.4 (Schemat Bernoulliego)
Prawdopodobieństwo tego, że na n przeprowadzonych doświadczeń według schematu Bernoulliego uzyska się k sukcesów w dowolnej kolejności, wyraża się wzorem

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

gdzie $0 < p \leq 1$ i $q = 1 - p$.

W urnie mamy N kul, wśród których M jest białych, pozostałe są czarne. ◀ **PRZYKŁAD**
Losujemy n razy po jednej kuli, zwracając ją za każdym razem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania k kul białych.

Zwrot kuli za każdym razem zapewnia stały skład urny przy każdym losowaniu, a co za tym idzie, spełnienie warunku niezależności doświadczeń i jednakowego prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej w każdym doświadczeniu równego $\frac{M}{N}$. Szukane prawdopodobieństwo w myśl twierdzenia Bernoulliego jest więc następujące

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{M}{N}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n}.$$

ZADANIE 3.18. Pewna gra polega na rzucie kostką i monetą. Wygrana następuje przy łącznym otrzymaniu piątki i orła. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w trzech grach wygrana nastąpi dokładnie raz?

ZADANIE 3.19. Dana jest urna, w której są kule: 6 czarnych i 9 białych. Losujemy 5 razy po jednej kuli, kładąc za każdym razem wyciągniętą kulę z powrotem do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy co najwyżej 3 razy kulę białą?

ZADANIE 3.20. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że na 7 rzutów kostką co najwyżej 3 razy wypadnie liczba oczek nie mniejsza niż 4.

ZADANIE 3.21. Rzucono symetryczną monetą dziewięć razy. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że:

a) orzeł wypadł co najmniej raz;
b) orzeł wypadł parzystą liczbę razy.

ZADANIE 3.22. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w serii sześciu rzutów symetryczną kostką do gry suma oczek będzie parzysta?

ZADANIE 3.23. Co jest bardziej prawdopodobne u równego siłą gry przeciwnika:

a) wygranie 3 partii z 4 czy 5 z 8?
b) wygranie nie mniej niż 3 partii z 4, czy nie mniej niż 5 partii z 8?

Zadanie 3.24.* Niech $B(n,p,i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$, gdzie $0 \leq p \leq 1$ oraz $q = 1-p$. Wykaż, że jeśli $0 \leq i < j < np$, to $B(n,p,i) < B(n,p,j)$; a jeżeli $np < i < j$, to $B(n,p,i) > B(n,p,j)$.

Wskazówka. W przypadku $i < j < np$ wystarczy wykazać, że $B(n,p,j-1) < B(n,p,j)$ dla $0 < j < np$, natomiast w przypadku $np < i < j$ wystarczy wykazać, że $B(n,p,j-1) > B(n,p,j)$, dla $j > np+1$.

ZMIENNE LOSOWE

◀ PRZYKŁAD

Zmienna losowa $X_5 = x \bmod 5$ jest określona na przestrzeni $\{1, \ldots, 30\}$ z jednostajnym rozkładem. Podaj jej rozkład, wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[X]$, wariancję $\mathrm{Var}[X]$ oraz $P(X < 3)$.

Zgodnie z definicją rozkład zmiennej losowej X_5 jest następujący:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Wartość oczekiwana $\mathbb{E}[X]$ — zgodnie ze wzorem $\mathbb{E}[X] = \sum_x x \cdot P(X = x)$ — wynosi

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = 2,$$

natomiast wariancja $\mathrm{Var}[X]$ — zgodnie ze wzorem $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$ — wynosi

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= \left(\textstyle\sum_x x^2 \cdot P(X = x)\right) - 2^2 \\ &= \left(0^2 \cdot \tfrac{1}{5} + 1^2 \cdot \tfrac{1}{5} + 2^2 \cdot \tfrac{1}{5} + 3^2 \cdot \tfrac{1}{5} + 4^2 \cdot \tfrac{1}{5}\right) - 4 = 2. \end{aligned}$$

Natomiast $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{3}{5}$.

ZADANIE 3.25. Z urny zawierającej pięć kul z numerami $1, 2, 3, 4, 5$ losujemy ze zwracaniem dwie kule. Niech zmienna losowa X oznacza sumę numerów obu kul. Oblicz gęstość rozkładu zmiennej losowej X, jej wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[X]$ oraz wariancję $\mathrm{Var}[X]$.

ZADANIE 3.26. Z urny zawierającej trzy monety pięciozłotowe i dwie monety dwuzłotowe losujemy dwie monety (bez zwracania). Niech zmienna losowa Y oznacza sumę nominałów wylosowanych monet. Obliczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej Y, jej wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[Y]$ oraz wariancję $\mathrm{Var}[Y]$.

ZADANIE 3.27. Z urny zawierającej dwie monety pięciozłotowe, dwie monety dwuzłotowe i dwie monety jednozłotowe losujemy jedną monetę i jeśli jest to złotówka, to losujemy jeszcze jedną. Niech zmienna losowa Z oznacza sumę nominałów wylosowanych monet. Oblicz gęstość rozkładu zmiennej losowej Z, jej wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[Z]$ oraz wariancję $\mathrm{Var}[Z]$.

ZADANIE 3.28. Z urny zawierającej cztery białe i trzy czarne kule losujemy bez zwracania dwie kule. Niech zmienna losowa X oznacza, ile wśród wylosowanych kul jest kul białych. Podaj gęstość rozkładu zmiennej losowej X, jej wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[X]$ oraz wariancję $\mathrm{Var}[X]$.

ZADANIE 3.29. Z urny zawierającej cztery białe i trzy czarne kule losujemy bez zwracania trzy kule. Niech zmienna losowa X oznacza, ile wśród wylosowanych kul jest kul białych. Podaj gęstość rozkładu zmiennej losowej X, jej wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[X]$ oraz wariancję $\mathrm{Var}[X]$.

ZADANIE 3.30. Zmienna losowa X posiada następujący rozkład:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Oblicz $P(X$ jest parzyste$)$, $P(X < 3)$, wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[X]$, wariancję $\mathrm{Var}[X]$ oraz $P(X \geq \mathbb{E}[X])$.

ZADANIE 3.31. Niech zmienna losowa X posiada rozkład symetryczny, tzn. istnieje takie m, że

$$P(X = m - x) = P(X = m + x) \text{ dla każdego } x.$$

Pokaż, że $\mathbb{E}[X] = m$.

ZADANIE 3.32. Wykaż, że $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[X + c]$, gdzie X jest dowolną zmienną losową, a c stałą.

Zadanie 3.33.* Pokaż, że dla każdego $0 < e < 1$ istnieje zmienna losowa taka, że $\mathbb{E}[X] = 1$ oraz $P(X < 0.5) = 1 - e$.

Zadanie 3.34.* Podaj przykład dwóch zmiennych losowych X i Y o różnych rozkładach, takich że $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ i $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y]$.

◀ **PRZYKŁAD**

Na przestrzeni $\{1, \ldots, 30\}$ z jednostajnym rozkładem określmy dwie zmienne losowe: $X_2(x) = x \bmod 2$ oraz $X_3(x) = x \bmod 3$. Czy zmienne te są niezależne?

Przypomnijmy, że zmienne X i Y są niezależne, jeśli dla każdej pary liczb x i y mamy

$$P(X = x \wedge Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y).$$

Sprawdzając wszystkie zdarzenia elementarne z przestrzeni $\{1, \ldots, 30\}$ otrzymujemy łączny rozkład zmiennych X_2 oraz X_3 (wszystkie możliwe prawdopodobieństwa $P(X_2 = x_2 \wedge X_3 = x_3)$, gdzie $x_2 \in \{0, 1\}$, a $x_3 \in \{0, 1, 2\}$).

		X_3		
		0	1	2
X_2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Analizując następnie łączny rozkład zmiennych X_2 i X_3 otrzymujemy, że

x	0	1
$P(X_2 = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

oraz

x	0	1	2
$P(X_3 = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

.

Pozostaje teraz sprawdzić warunek niezależności zmiennych. A zatem:

$P(X_2 = 0 \wedge X_3 = 0) = \frac{1}{6}$ i $P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ (Tak)

$P(X_2 = 0 \wedge X_3 = 1) = \frac{1}{6}$ i $P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ (Tak)

...

$P(X_2 = 1 \wedge X_3 = 2) = \frac{1}{6}$ i $P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ (Tak)

Jako że $P(X_2 = x_2 \wedge X_3 = x_3) = P(X_2 = x_2) \cdot P(X_3 = x_3)$ dla dowolnych $x_2 \in \{0, 1\}$ i $x_3 \in \{0, 1, 2\}$, zmienne X_2 i X_3 są niezależne.

ZADANIE 3.35. Na przestrzeni $\{1, \ldots, 33\}$ z jednostajnym rozkładem określmy dwie zmienne losowe: $X_3(x) = x \bmod 3$ oraz $X_5(x) = x \bmod 5$. Czy zmienne te są niezależne?

ZADANIE 3.36. Rzucamy dwukrotnie monetą. Określmy dwie zmienne losowe X_1 oraz X_2. Zmienna X_1 przyjmuje wartość 1, jeśli za pierwszym razem wypadnie orzeł, oraz wartość 0, jeśli za pierwszym razem wypadnie reszka. Podobnie zmienna X_2 opisuje wynik drugiego rzutu. Niech zmienna C określona będzie wzorem $C = X_1 + X_2$. Podaj rozkład zmiennej losowej C. Czy zmienne C i X_1 są niezależne?

Łączny rozkład zmiennych losowych X i Y przedstawiony jest w poniższej tabeli. ◀ **PRZYKŁAD**

		Y = -1	Y = 1
X	-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

a) Oblicz rozkłady zmiennych X, Y, $Z = X \cdot Y$.

b) Oblicz $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$, $\mathbb{E}[Z]$, $\mathrm{Var}[Z]$.

c) Oblicz $P(X \leq Y)$.

Analizując łączny rozkład zmiennych X i Y otrzymujemy, że

$$P(X = -1) = P(X = -1 \wedge Y = -1) + P(X = -1 \wedge Y = 1) = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{7}{12},$$

$$P(X = 1) = P(X = 1 \wedge Y = -1) + P(X = 1 \wedge Y = 1) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{12},$$

$$P(Y = -1) = P(X = -1 \wedge Y = -1) + P(X = 1 \wedge Y = -1) = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{3},$$

$$P(Y = 1) = P(X = -1 \wedge Y = 1) + P(X = 1 \wedge Y = 1) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{3}, \text{ czyli}$$

x	-1	1
$P(X = x)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$

oraz

y	-1	1
$P(Y = y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

.

Następnie, analizując możliwe wartości sumy $X \cdot Y + 1$, otrzymujemy rozkład zmiennej Z:

$$P(Z = -1) = P(X = -1 \wedge Y = 1) + P(X = 1 \wedge Y = -1) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4},$$

$$P(Z = 1) = P(X = -1 \wedge Y = -1) + P(X = 1 \wedge Y = 1) = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{4}, \text{ czyli}$$

z	-1	1
$P(Z = z)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

.

W konsekwencji:

$$\mathbb{E}[X] = \textstyle\sum_x x \cdot P(X = x) = -1 \cdot \tfrac{7}{12} + 1 \cdot \tfrac{5}{12} = -\tfrac{1}{6};$$

$$\mathbb{E}[Y] = \textstyle\sum_y y \cdot P(Y = y) = -1 \cdot \tfrac{1}{3} + 1 \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3};$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = ((-1)^2 \cdot \tfrac{7}{12} + 1^2 \cdot \tfrac{5}{12}) - (-\tfrac{1}{6})^2 = \tfrac{35}{36};$$

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}^2[Y] = ((-1)^2 \cdot \tfrac{1}{3} + 1^2 \cdot \tfrac{2}{3}) - (\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{8}{9};$$

$$\mathbb{E}[Z] = \textstyle\sum_z z \cdot P(Z = z) = -1 \cdot \tfrac{3}{4} + 1 \cdot \tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{2};$$

$$\mathrm{Var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}^2[Z] = ((-1)^2 \cdot \tfrac{3}{4} + 1^2 \cdot \tfrac{1}{4}) - (-\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{3}{4};$$

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= P(X = -1 \wedge Y = -1) + P(X = -1 \wedge Y = 1) + P(X = 1 \wedge Y = 1) \\ &= \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

ZADANIE 3.37. Łączny rozkład zmiennych losowych X i Y przedstawiony jest w poniższej tabeli.

		Y = -1	Y = 0	Y = 1
X	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

a) Oblicz rozkłady zmiennych X, Y, $Z = X + Y$, $W = 2X - Y$.

b) Oblicz $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$, $\mathbb{E}[Z]$, $\mathrm{Var}[Z]$.

c) Czy zmienne X i Y są niezależne?

d) Oblicz $P(X = Y)$ i $P(X < Y)$.

Niech zmienna losowa X posiada rozkład dwumianowy z długością serii $n = 1000$ ◀ **PRZYKŁAD*** oraz prawdopodobieństwem sukcesu $p = \frac{1}{2}$. Oszacuj $P(X \geq 600)$ w oparciu o nierówność Markowa, Czebyszewa i Chernoffa.

Dla rozważanego rozkładu dwumianowego otrzymujemy, że wartość oczekiwana $\mathbb{E}[X] = np = 500$, natomiast $\mathrm{Var}[X] = npq = 250$. Z nierówności Markowa, która jest postaci

$$P(X \geq d) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{d} \quad \text{dla dowolnej liczby rzeczywistej } d > 0,$$

otrzymujemy, że

$$P(X \geq 600) \leq \frac{500}{600} = \frac{5}{6}.$$

Z nierówności Czebyszewa, która jest postaci

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{\epsilon^2} \quad \text{dla dowolnej liczby rzeczywistej } \epsilon > 0,$$

mając na uwadze symetrię rozkładu, otrzymujemy, że

$$P(X \geq 600) = \frac{1}{2} \cdot P(|X - 500| \geq 100) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{250}{10000} = \frac{1}{80} = 0.0125.$$

Z nierówności Chernoffa, która jest postaci

$$P(X \geq (1+\epsilon) \cdot m) \leq e^{-\epsilon^2 m/3} \quad \text{dla dowolnej liczby rzeczywistej } 0 \leq \epsilon \leq 1,$$

gdzie $m = \mathbb{E}[X]$, oraz

$$P(X \leq (1-\epsilon) \cdot m) \leq e^{-\epsilon^2 m/2} \quad \text{dla dowolnej liczby rzeczywistej } 0 \leq \epsilon \leq 1,$$

otrzymujemy, że

$$P(X \geq 600) = P(X \geq (1 + \frac{1}{5}) \cdot 500) \leq e^{-20/3} \leq \frac{1}{786}.$$

Natomiast mając na uwadze symetrię rozkładu, otrzymujemy, że

$$P(X \geq 600) = P(X \leq 400) = P(X \leq (1 - \frac{1}{5}) \cdot 500) \leq e^{-10} \leq \frac{1}{22027}.$$

Zadanie 3.38.* Niech zmienna losowa X posiada rozkład dwumianowy z długością serii $n = 2000$ oraz prawdopodobieństwem sukcesu $p = \frac{1}{2}$. Oszacuj $P(X \geq 1500)$ w oparciu o nierówność Markowa, Czebyszewa i Chernoffa.

Zadanie 3.39.* Oszacuj za pomocą nierówności Markowa i Czebyszewa prawdopodobieństwo tego, że w 400 rzutach uczciwą monetą reszka wypadnie mniej niż 300 razy.

Wskazówka. Skorzystaj z własności, że suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych wynosi 1.

Zadanie 3.40.* Zmienna losowa X posiada następujący rozkład:

x	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Oblicz wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[X]$, wariancję $\mathrm{Var}[X]$ oraz $P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 1)$. Porównaj ostatnią liczbę z wartością otrzymaną z nierówności Czebyszewa.

Zadanie 3.41.* Podaj przykład nieujemnej zmiennej losowej X oraz liczby $d > 0$, dla których zachodzi $P(X \geq d) = \frac{\mathbb{E}[X]}{d}$.

Zadanie 3.42.* Podaj przykład nieujemnej zmiennej losowej X oraz liczby $0 \leq \epsilon \leq 1$, dla których zachodzi $P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon) = \frac{\mathrm{Var}[X]}{\epsilon^2}$.

Odpowiedzi do zadań

3.1. Wszystkich funkcji jest $|B|^{|A|}$, natomiast liczba funkcji spełniających określone warunki (a i b są ustalone z góry) to $|B|^{|A|-1}$. A zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi $1/|B|$.

3.2. Wypiszmy wszystkie możliwe permutacje i zliczmy dla każdej z nich liczbę inwersji. I tak w permutacji 123 jest 0 inwersji, w <u>132</u> jest 1 inwersja, w <u>213</u> jest 1 inwersja, w 231 są 2 inwersje, w 312 są 2 inwersje, w 321 są 3 inwersje. Element 2 tworzy jedną inwersję w permutacjach podkreślonych. Korzystając z założenia losowego wyboru permutacji i klasycznej definicji prawdopodobieństwa otrzymujemy, że $p_1 = \frac{1}{2}$ i $p_2 = \frac{1}{3}$.

3.3. Jeżeli przez E oznaczymy zdarzenie polegające na tym, że w n losowaniach przynajmniej raz pojawi się kula czarna, to $\overline{E}$ oznaczać będzie zdarzenie, że wśród tych n losowań pojawiły się kule wyłącznie białe. Z warunku zadania mamy, że $P(\overline{E}) = \left(\frac{20}{22}\right)^n$, co tym samym daje $P(E) = 1 - \left(\frac{10}{11}\right)^n > \frac{1}{2}$. Stąd otrzymujemy, że $\left(\frac{10}{11}\right)^n < \frac{1}{2}$, czyli po zlogarytmowaniu $n > 7$, a więc $n = 8$.

3.4. $\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}$

3.5. Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na niewypadnięciu szóstki na żadnej z kostek, a przez B zdarzenie polegające na wypadnięciu na każdej z kostek innej liczby oczek. Wówczas, z klasycznej definicji prawdopodobieństwa oraz mając na uwadze wzór $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, otrzymujemy, że

$$P(A|B) = \frac{\frac{5\cdot 4\cdot 3}{6^3}}{\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6^3}} = \frac{1}{2}.$$

3.6. $P(A|B) = \frac{1}{2}$; zdarzenia A i B są niezależne.

3.7. N/A

3.8.

a) $P(A) = \frac{1}{2}$;

b) $P(B) = \frac{1}{4}$;

c) $P(C) = \frac{1}{2}$;

d) $P(D) = \frac{1}{8}$.

W ogólnym przypadku, analizując możliwe zdarzenia elementarne otrzymamy, że $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(D) = \frac{1}{2^{n-1}}$. Zdarzenia te nie są <u>wszystkie</u> parami niezależne, bo np. $P(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Ogólnie — niezależne parami są tylko zdarzenia A i C oraz A i D.

3.9.

a) $\frac{3}{5}$

b) N/A

c) N/A

3.10.

$$\begin{aligned} P(A)\cdot P(\overline{B}) &= P(A)\cdot(1-P(B)) = P(A) - P(A\cap B) \\ &= P(A\setminus B) + P(A\cap B) - P(A\cap B) = P(A\setminus B) = P(A\cap\overline{B}). \end{aligned}$$

Podobnie, zachodzi:

$1 - P(A\cup B) = P(\overline{A}\cap\overline{B})$ oraz

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) &= (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = 1 - P(A \cup B), \end{aligned}$$

a stąd $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$. A zatem, na mocy twierdzenia 3.2, zdarzenia $\overline{A}$ oraz $\overline{B}$ są niezależne.

3.11. Niech A oznacza zdarzenie polegające na wybraniu urny typu pierwszego, a B – wybraniu urny typu drugiego. Niech C oznacza wylosowanie kuli białej. Wówczas z twierdzenia o prawdopodobieństwie zupełnym otrzymujemy

$$P(C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B) = \frac{5}{13} \cdot \frac{2}{5} + \frac{8}{13} \cdot \frac{9}{15} = \frac{34}{65}.$$

3.12. Niech A oznacza zdarzenie polegające na wybraniu urny typu A, a B – wybraniu urny typu B. Niech C oznacza wylosowanie kuli białej. Wówczas z twierdzenia o prawdopodobieństwie zupełnym otrzymujemy

$$P(C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{10} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{10} = \frac{23}{50}.$$

3.13. Niech $K_{1,2}$ oznacza zdarzenie polegające na wypadnięciu na kostce 1 lub 2, a $\overline{K_{1,2}}$ – zdarzenie doń przeciwne. Niech B oznacza wylosowanie kuli białej. Wówczas z twierdzenia o prawdopodobieństwie zupełnym otrzymujemy

$$P(B) = P(K_{1,2}) \cdot P(B|K_{1,2}) + \cdot P(\overline{K_{1,2}}) \cdot P(B|\overline{K_{1,2}}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{9}.$$

3.14. Losowanie kuli z urny o ustalonym składzie pociąga za sobą następującą alternatywę wykluczających się zdarzeń: albo wylosowano kulę białą – zdarzenie B, albo kulę czarną – zdarzenie C. Wówczas zdarzenie Z, o którym mowa w zadaniu, polega na wylosowaniu kuli białej w następnym ciągnięciu. Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym mamy zatem

$$\begin{aligned} P(Z) &= P(B) \cdot P(B|B) + P(C) \cdot P(B|C) = \tfrac{b}{b+c} \cdot \tfrac{b-1}{b+c-1} + \tfrac{c}{b+c} \cdot \tfrac{b}{b+c-1} \\ &= \tfrac{b \cdot (b-1+c)}{(b+c) \cdot (b+c-1)} = \tfrac{b}{b+c}. \end{aligned}$$

3.15. Zdarzenie B polegające na wylosowaniu kuli białej z drugiej urny może zajść na skutek jednego z dwóch wykluczających się zdarzeń — wylosowania albo kuli białej za pierwszym razem — zdarzenie B_1, albo odpowiednio kuli czarnej — zdarzenie $\overline{B_1}$ przeciwne do B_1. Tym samym, otrzymujemy

$$P(B) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) + P(\overline{B_1}) \cdot P(B_2|\overline{B_1}) = \frac{b}{b+c} \cdot \frac{b_1+1}{b_1+c_1+1} + \frac{c}{b+c} \cdot \frac{b_1}{b_1+c_1+1}.$$

3.16. $\frac{k}{n}$ (patrz rozwiazanie zadania 3.13)

3.17. Korzystając ze wzoru otrzymanego w przykładzie poprzedzającym zadanie, otrzymujemy:

a) $p_3 = (0,5 - \frac{0,95}{1-(0,1-0,95)}) \cdot (0,1 - 0,95)^3 + \frac{0,95 \cdot (1-(0,1-0,95)^3)}{1-(0,1-0,95)} \approx 0,837174$;

b) w granicy liczby skrzyżowań zbiegającej do nieskończoności: $p = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} \approx 0,513514$.

3.18. $\frac{121}{576}$

3.19. $\frac{2072}{3125}$

3.20. $\frac{1}{2}$

3.21.

a) $\frac{511}{512}$;

b) $\frac{1}{2}$.

3.22. $\frac{1}{2}$

3.23.

a) Bardziej prawdopodobne jest wygranie 3 z 4 partii niż 5 z 8.
b) Bardziej prawdopodobne jest wygranie nie mniej niż 5 z 8 partii od wygrania nie mniej niż 3 z 4 partii.

3.24. Rozważmy przypadek $i < j < np$ (przypadek $np < i < j$ można rozwiązać analogicznie). Zauważmy, że wystarczy wykazać, że $B(n,p,j-1) < B(n,p,j)$ dla $0 < j < np$.

$$B(n,p,j-1) < B(n,p,j)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\binom{n}{j-1} \cdot p^{j-1} \cdot (1-p)^{n-j+1} < \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j} \qquad / \cdot p^{j-1}(1-p)^{n-j}$$

jest równoważne

$$\binom{n}{j-1} \cdot (1-p) < \binom{n}{j} \cdot p$$

jest równoważne

$$\frac{n! \cdot (1-p)}{(j-1)! \cdot (n-j+1)!} < \frac{n! \cdot p}{j! \cdot (n-j)!} \qquad / \cdot \frac{(j-1)! \cdot (n-j)!}{n!}$$

jest równoważne

$$\frac{1-p}{n-j+1} < \frac{p}{j}$$

jest równoważne

$$j \cdot (1-p) < p \cdot (n-j+1)$$

jest równoważne

$$j < np + p. \qquad (\star)$$

Jako że z założenia $0 < j < np$ oraz $p \geq 0$, warunek $(\star)$ jest spełniony, a zatem na mocy powyższych przekształceń otrzymujemy, że $B(n,p,j-1) < B(n,p,j)$ dla dowolnego $0 < j < np$, a tym samym $B(n,p,i) < B(n,p,j)$ dla dowolnych $0 \leq i < j < np$.

Dla przypadku $np < i < j$, chcąc wykazać $B(n,p,i) > B(n,p,j)$ także wystarczy rozważyć nierówność $B(n,p,j-1) > B(n,p,j)$, dla $j > np+1$. Po tych samych przekształceniach jak wyżej, otrzymamy

$$B(n,p,j-1) > B(n,p,j)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$j > np + p. \qquad (\star\star)$$

Jako że z założenia $j > np+1$ oraz $p \leq 1$, warunek $(\star\star)$ jest spełniony, a zatem na mocy powyższych przekształceń otrzymujemy, że $B(n,p,j-1) > B(n,p,j)$ dla dowolnego $np+1 < j$, a tym samym $B(n,p,i) < B(n,p,j)$ dla dowolnych $np < i < j$.

3.25. Zmienna losowa X posiada następujący rozkład:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

Otrzymujemy $\mathbb{E}[X] = 6$ oraz $\mathrm{Var}[X] = 4$.

3.26. Zmienna losowa Y posiada następujący rozkład:

x	4	7	10
$P(Y=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

.

Otrzymujemy $\mathbb{E}[Y] = 7\frac{3}{5}$ oraz oraz $\mathrm{Var}[Y] = 3\frac{6}{25}$.

3.27. Zmienna losowa Z posiada następujący rozkład:

z	2	3	5	6
$P(Z=z)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$

.

Otrzymujemy $\mathbb{E}[Z] = 3\frac{2}{3}$ oraz $\mathrm{Var}[Z] = 2\frac{22}{45}$.

3.28. Zmienna losowa X posiada następujący rozkład:

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

.

Otrzymujemy $\mathbb{E}[X] = 1\frac{1}{7}$ oraz oraz $\mathrm{Var}[X] = \frac{20}{49}$.

3.29. Zmienna losowa X posiada następujący rozkład:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

.

Otrzymujemy $\mathbb{E}[X] = 1\frac{5}{7}$ oraz $\mathrm{Var}[X] = \frac{24}{49}$.

3.30.

$P(X \text{ jest parzyste}) = \frac{5}{16}$.

$P(X < 3) = \frac{3}{4}$.

$\mathbb{E}[X] = 1\frac{15}{16}$.

$\mathrm{Var}[X] = 5\frac{3}{16} - (1\frac{15}{16})^2 = \frac{367}{256} = 1\frac{111}{256}$.

$P(X \geq \mathbb{E}[X]) = \frac{1}{2}$.

3.31. Jeśli rozkład jest symetryczny, wówczas zmienna losowa X posiada następujący rozkład:

x	$\dots$	$m-c$	$m-b$	$m-a$	m	$m+a$	$m+b$	$m+c$	$\dots$
$P(X=x)$	$\dots$	p_3	p_2	p_1	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$

,

gdzie $a, b, c, d, \dots \in \mathbb{R}$ oraz $p_0 + 2 \cdot (p_1 + p_2 + p_3 + \dots) = 1$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \textstyle\sum_x x \cdot P(X = x) \\
&= \dots + (m-b) \cdot p_2 + (m-a) \cdot p_1 + m \cdot p_0 + (m+a) \cdot p_1 + (m+b) \cdot p_2 + \dots \\
&= m \cdot p_0 + 2 \cdot m \cdot p_1 + 2 \cdot m \cdot p_2 + 2 \cdot m \cdot p_3 + \dots \\
&= m \cdot (p_0 + 2 \cdot (p_1 + p_2 + p_3 + \dots)) = m.
\end{aligned}$$

3.32.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X+c] &= \mathbb{E}[(X + c - \mathbb{E}[X+c])^2] \\
&\quad \text{/ Zauważmy, że } \mathbb{E}[X+c] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[c] = \mathbb{E}[X] + c, \text{ bo } c \text{ jest stałą. /} \\
&= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathrm{Var}[X].
\end{aligned}$$

3.33. Przykładowa zmienna losowa X posiada następujący rozkład:

x	$-\epsilon$	$1+\frac{1}{\epsilon}-\epsilon$
$P(X=x)$	$1-\epsilon$	ϵ

.

Wówczas $\mathbb{E}[X]=\sum_x x\cdot P(X=x)=-\epsilon\cdot(1-\epsilon)+(1+\frac{1}{\epsilon}-\epsilon)\cdot\epsilon=1.$

3.34. Przykładowe zmienne losowe X i Y posiadają następujące rozkłady:

x	-1	0	1
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

y	-2	0	2
$P(Y=y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$

i wówczas $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[Y]=0$ oraz $\mathrm{Var}[X]=\mathrm{Var}[Y]=\frac{1}{2}$.

3.35. Analizując wszystkie możliwe zdarzenia elementarne i łączny rozkład zmiennych X_3 oraz X_5 otrzymujemy, że:

		X_5				
		0	1	2	3	4
X_3	0	$\frac{2}{33}$	$\frac{x}{33}$	$\frac{x}{33}$	$\frac{x}{33}$	$\frac{x}{33}$
	1	$\frac{x}{33}$	$\frac{x}{33}$	$\frac{x}{33}$	$\frac{x}{33}$	$\frac{x}{33}$
	2	$\frac{x}{33}$	$\frac{x}{33}$	$\frac{x}{33}$	$\frac{x}{33}$	$\frac{x}{33}$

x	0	1	2
$P(X_3=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

x	0	1	2	3	4
$P(X_5=x)$	$\frac{6}{33}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{6}{33}$

.

Zatem zmienne X_3 i X_5 nie są niezależne, ponieważ np.

$$P(X_3=1\wedge X_5=1)=\frac{1}{11}=\frac{9}{99}\neq P(X_3=1)\cdot P(X_5=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{33}=\frac{7}{99}.$$

3.36. Zmienna losowa C posiada następujący rozkład:

x	0	1	2
$P(C=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

.

Otrzymujemy $\mathbb{E}[C]=1$.

Zmienne C i X_1 nie są niezależne, gdyż np. $P(C=0\wedge X_1=1)=0\neq P(C=0)\cdot P(X_1=1)$.

3.37. Analizując łączny rozkład zmiennych X i Y otrzymujemy, że

x	0	1
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

oraz

y	-1	0	1
$P(Y=y)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{10}{24}$	$\frac{7}{24}$

.

Rozkłady zmiennych $Z=X+Y$ oraz $W=2X-Y$ przedstawiają się następująco:

z	-1	0	1	2
$P(Z=z)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{6}$

oraz

w	-1	0	1	2	3
$P(W=w)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

.

Następnie:

$\mathbb{E}[X]=\frac{1}{2}$ oraz $\mathbb{E}[Y]=0$;
$\mathrm{Var}[X]=\frac{1}{4}$ oraz $\mathrm{Var}[Y]=\frac{7}{12}$;
$\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[Z]=\frac{1}{2}$ oraz $\mathrm{Var}[X+Y]=\mathrm{Var}[Z]=\frac{5}{6}$;
Zmienne X i Y nie są niezależne, ponieważ np.

$$P(X=0\wedge Y=-1)=\frac{1}{8}\neq P(X=0)\cdot P(Y=-1)=\frac{7}{48};$$

$P(X=Y)=\frac{5}{12}$ oraz $P(X<Y)=\frac{1}{8}$.

3.38.

1) Z nierówności Markowa: $P(X \geq 1500) \leq \frac{2}{3}$.
2) Z nierówności Czebyszewa: $P(X \geq 1500) \leq 0.001$.
3) Z nierówności Chernoffa: $P(X \geq 1500) \leq \min\{e^{-250/3}, e^{-125}\} = e^{-125}$.

3.39. Korzystamy z własności, że $P(X < 300) = 1 - P(X \geq 300)$.

1) Z nierówności Markowa: $P(X \geq 300) \leq \frac{2}{3}$.
2) Z nierówności Czebyszewa: $P(X \geq 300) \leq 0.01$.
3) Z nierówności Chernoffa: $P(X \geq 300) \leq \min\{e^{-50/3}, e^{-25}\} = e^{-25}$.

W konsekwencji

1) Z nierówności Markowa: $P(X < 300) \geq \frac{1}{3}$.
2) Z nierówności Czebyszewa: $P(X < 300) \geq 0.99$.
3) Z nierówności Chernoffa: $P(X < 300) \geq \frac{e^{25}-1}{e^{25}}$.

3.40.

$\mathbb{E}[X] = 0$ oraz $\mathrm{Var}[X] = 1$.

$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{2}$.

Z nierówności Czebyszewa $P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 1) \leq 1$.

3.41. Przykładowa zmienna losowa X posiada następujący rozkład:

x	0	10
$P(X = x)$	$\frac{99}{100}$	$\frac{1}{100}$

.

Wówczas $P(X \geq 10) = P(X = 10) = \frac{1}{100}$.

Natomiast $\mathbb{E}[X] = \sum_x x \cdot P(X = x) = 0 \cdot \frac{99}{100} + 10 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$, a zatem z nierówności Markowa otrzymujemy, że $P(X \geq 10) \leq \frac{\frac{1}{10}}{10} = \frac{1}{100}$.

3.42. N/A

INDUKCJA MATEMATYCZNA oraz REKURENCJA

Niech B_n oznacza liczbę wszystkich podziałów n-elementowego zbioru $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Jak łatwo zauważyć, początkowe wyrazy ciągu (B_n) są następujące: ◀ **PRZYKŁAD**

$B_0 = 1$: mamy $X = \emptyset$, a jedyny podział to $\{\emptyset\}$

$B_1 = 1$: mamy $X = \{x_1\}$, a jedyny podział to $\{\{x_1\}\}$

$B_2 = 2$: mamy $X = \{x_1, x_2\}$ i możliwe podziały to: $\{\{x_1\}, \{x_2\}\}$ oraz $\{\{x_1, x_2\}\}$

$B_3 = 5$: mamy $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ i możliwe podziały to: $\{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}\}$, $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}\}$, $\{\{x_1, x_3\}, \{x_2\}\}$, $\{\{x_1\}, \{x_2, x_3\}\}$ oraz $\{\{x_1, x_2, x_3\}\}$.

Uzasadnij, że dla $n \geq 1$ zachodzi

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \cdot \binom{n-1}{i}.$$

Niech $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Rozważmy $x_n \in X$. Sposób generowania podziału zbioru X przebiega w dwóch krokach. Najpierw wybieramy $(n-1)-i$ elementów, które trafią do tego samego podzbioru, co element x_n, a następnie dokonujemy dowolnego podziału na podzbiory zbioru złożonego z pozostałych i elementów. Zauważmy, że każdy możliwy podział może być wygenerowany w ten sposób oraz że dwa różne wybory w pierwszym kroku nigdy nie doprowadzą do uzyskania takiego samego podziału zbioru X. Dla ustalonego i pierwszy krok można wykonać na $\binom{n-1}{i}$ sposobów, a drugi na B_i sposobów. Stąd ostatecznie dla ustalonego i liczba wszystkich sposobów wynosi $B_i \cdot \binom{n-1}{i}$. Jako że należy rozważyć wszystkie przypadki $i = 0, 1, \ldots, n-1$, otrzymujemy pożądaną formułę.

Zapisz definicję rekurencyjną dla ciągu $a_0, a_1, a_2, \ldots$, gdzie $a_n = (n+1)(2n+3)$. ◀ **PRZYKŁAD**

W oparciu o definicję „rozwińmy” wyraz a_{n+1}.

$$a_{n+1} = (n+2)(2n+5) = 2n^2+9n+10 = 2n^2+5n+3+4n+7 = (n+1)(2n+3)+4n+7 = a_n+4n+7.$$

W konsekwencji otrzymujemy, że

$$\begin{cases} a_0 = 3; \\ a_n = a_{n-1} + 4n + 3, \ n \geq 1. \end{cases}$$

ZADANIE 4.1. Zapisz definicję rekurencyjną dla ciągu $a_0, a_1, a_2, \ldots$, gdzie $a_n = 2 - (-1)^n$.

W oparciu o zasadę indukcji matematycznej wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$ zachodzi $9 \mid (4^n + 6n - 10)$. ◀ **PRZYKŁAD**

Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą naturalną. Niech $l_n = 4^n + 6n - 10$. Określmy nasz predykat $P(n)$ jako: „Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$ liczba l_n jest podzielna przez 9”.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Mamy $l_1 = 4^1 + 6 \cdot 1 - 10 = 0$, a zatem l_1 jest podzielne przez 9.
2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $9 \mid l_n$.
3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n+1$ (≥ 2).

$$l_{n+1} = [\text{wzór}] = 4^{n+1} + 6(n+1) - 10 = 4 \cdot 4^n + 6n - 4.$$

Aby wykorzystać teraz założenie indukcyjne, potrzebujemy związać otrzymane wyrażenie na l_{n+1} z wyrazem $l_n = 4^n + 6n - 10$. Jako że wyrażenie na l_{n+1} zawiera już składnik 4^n, postępujemy następująco:

$$l_{n+1} = 4 \cdot 4^n + 6n - 4 = 4 \cdot (4^n + 6n - 10) - 18n + 36 = 4 \cdot l_n - 9 \cdot (2n + 4).$$

Z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że l_n jest podzielna przez 9. Jako że $9 \cdot (2n + 4)$ jest także podzielne przez 9, a zatem różnica $4 \cdot l_n - 9 \cdot (2n+4) = l_{n+1}$ jest także liczbą podzielną przez 9 ($n \geq 1$).

W oparciu o zasadę indukcji matematycznej wykaż, że jeśli n jest dowolną dodatnią liczną nieparzystą, wówczas $4 \mid (3^n + 1)$ (czyli liczba $3^n + 1$ jest podzielna przez 4). ◀ **PRZYKŁAD**

Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą nieparzystą, tzn. $n = 2k + 1$, $k \geq 0$. Niech $l_k = 3^n + 1 = 3^{2k+1} + 1 = 3 \cdot 9^k + 1$. Określmy nasz predykat $P(k)$ jako: „Dla dowolnej liczby naturalnej liczba l_k jest podzielna przez 4".

1. Krok bazowy: $k = 0$. Mamy $k_0 = 3 \cdot 9^0 + 1 = 4$, a zatem l_0 jest podzielne przez 4.

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $k \geq 0$ zachodzi $4 \mid l_k$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $k + 1$ (≥ 1).

$$l_{k+1} = [\text{wzór}] = 3 \cdot 9^{k+1} + 1 = 3 \cdot 9 \cdot 9^k + 1 = 27 \cdot 9^k + 1.$$

Aby wykorzystać teraz założenie indukcyjne, potrzebujemy związać otrzymane wyrażenie na l_{k+1} z wyrazem $l_k = 3 \cdot 9^k + 1$. Jako że wyrażenie na l_{k+1} zawiera już składnik $3 \cdot 9^k$, postępujemy następująco:

$$l_{k+1} = 27 \cdot 9^k + 1 = 9 \cdot 3 \cdot 9^k + 1 = 9 \cdot (3 \cdot 9^k + 1) - 8 = 9l_k - 8.$$

Z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że l_k jest podzielna przez 4. Jako że 8 jest także podzielne przez 4, a zatem suma $9l_k - 8 = l_{k+1}$ jest także liczbą podzielną przez 4 ($k \geq 0$).

ZADANIE 4.2. W oparciu o zasadę indukcji matematycznej wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi:

a) $6 \mid n(n + 1)(2n + 1)$;

b) $n^5/5 + n^3/3 + 7n/15$ jest liczbą całkowitą.

ZADANIE 4.3. W oparciu o zasadę indukcji matematycznej wykaż, że jeśli n jest dowolną dodatnią liczbą nieparzystą, wówczas $5 \mid (2^n + 3^n)$.

Wykaż, że poniższy program wypisuje wyłącznie liczby całkowite. ◀ **PRZYKŁAD**

$x := 1$;
`dopóki` $(1 < 2)$ `wykonuj` {
  `wypisz`(x);
  $x := x + \sqrt{12(x-1)} + 3$;
  }

Na kolejno wypisywane liczby możemy spojrzeć jak na kolejne liczby ciągu (x_n), który zadany jest następującym wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_n &= x_{n-1} + \sqrt{12(x_{n-1} - 1)} + 3 \text{ dla } n \geq 2. \end{aligned}$$

Wyznaczmy kilka kolejnych wyrazów tego ciągu:

$$\begin{aligned} &x_1 = 1 \\ &x_2 = 1 + \sqrt{12 \cdot (1 - 1)} + 3 = 4 \\ &x_3 = 4 + \sqrt{12 \cdot (4 - 1)} + 3 = 4 + \sqrt{36} + 3 = 13 \end{aligned}$$

$x_4 = 13 + \sqrt{12 \cdot (13-1)} + 3 = 4 + \sqrt{144} + 3 = 19$
$x_5 = \ldots$

Pozostaje wykazać — za pomocą indukcji matematycznej — że każdy z wyrazów tego ciągu jest liczbą całkowitą. Biorąc pod uwagę sam wzór, kluczową jest formuła $\sqrt{12(x_n-1)}$, tzn. należy dodatkowo wykazać, że $\sqrt{12(x_n-1)}$ jest także liczbą całkowitą. Jako że $\sqrt{12(x_n-1)} = 2\sqrt{3(x_n-1)}$, zatem liczba $\sqrt{12(x_n-1)}$ będzie liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy będzie zachodzić $x_n = 3k_n^2+1$ dla jakiejś całkowitej liczby k_n (bo wówczas $\sqrt{12(x_n-1)} = 6k_n^2$; implikuje to także, że x_n jest liczbą całkowitą) — a zatem dokładnie taką postać ma nasz predykat $P(n)$.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, $x_1 = 3 \cdot 0 + 1$, zatem $k_1 = 0$.

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi, że $x_n = 3k_n^2 + 1$ dla jakiejś całkowitej liczby k_n.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n+1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= [\text{wzór}] = x_n + \sqrt{12(x_n-1)} + 3 \\ &= [\text{założenie indukcyjne}] = (3k_n^2+1) + \sqrt{12\left((3k_n^2+1)-1\right)} + 3 \\ &= 3k_n^2 + 6k_n + 4 = 3(k_n^2 + 2k_n + 1) + 1 = 3(k_n+1)^2 + 1 = 3k_{n+1}^2 + 1, \end{aligned}$$

gdzie $k_{n+1} = k_n + 1$ jest liczbą naturalną (bo taką jest k_n), co należało wykazać.

ZADANIE 4.4. Wykaż, że poniższy program wypisuje wyłącznie liczby całkowite.

```
x := 1;
dopóki (1 > 0) wykonuj {
   wypisz(x);
   x := 3 + x + 2√(3x − 2);
   }
```

ZADANIE 4.5. Wyznacz wszystkie liczby naturalne, których nie da się wyrazić w postaci sumy $3m+5n$, gdzie n, m są dowolnymi liczbami naturalnymi (włącznie z 0). Odpowiedź uzasadnij.

Wskazówka. Korzystając z indukcji matematycznej wykaż, że każdą „dużą” liczbę naturalną można przedstawić w zadanej powyżej postaci.

Dany jest ciąg (a_n) określony rekurencyjnie **◀ PRZYKŁAD**

$$a_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_n+1} \text{ dla } n \geq 1.$$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $a_n \geq \frac{1}{2}$.

Policzmy kilka początkowych wyrazów:

$a_1 = 1 = \frac{1}{1}$;

$a_2 = \frac{1}{a_1+1} = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{1}{a_2+1} = \frac{2}{3}$

$a_4 = \frac{1}{a_3+1} = \frac{3}{5}$

$a_5 = \frac{1}{a_4+1} = \frac{5}{8}$

$a_6 = \frac{1}{a_5+1} = \frac{8}{13}$

$a_7 = \cdots$

Zatem możemy dodatkowo przypuszczać, że zachodzi zawsze także $a_n \leq 1$. W konsekwencji nasz predykat brzmi teraz „$a_n \in [\frac{1}{2}, 1]$”.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, bo mamy a_1 =[definicja]= $1 \in [\frac{1}{2}, 1]$.

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $a_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 2).

Z definicji mamy, że $a_{n+1} = \frac{1}{a_n+1}$, natomiast z założenia indukcyjnego zachodzi $a_n \in [\frac{1}{2}, 1]$. Skoro $a_n \geq \frac{1}{2}$, to

$$\frac{1}{a_n+1} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} \leq 1.$$

Z drugiej strony, skoro $a_n \leq 1$, wówczas

$$\frac{1}{a_n+1} \geq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

co kończy właściwy dowód.

Naturalnym jednak jest — tak przy okazji — pytanie o zwarty (jawny) wzór na kolejne wyrazy ciągu (a_n). Zauważmy, że liczniki kolejnych wyrazów tworzą ciąg $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, podczas gdy mianowniki — $1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$. Pierwszy ciąg to kolejne, począwszy od wyrazu drugiego, liczby *ciągu Fibonachiego* (F_n), a drugi — kolejne, począwszy od wyrazu trzeciego, liczby tegoż samego ciągu Fibonachiego. Przypomnijmy, że

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ \text{oraz}\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ \text{dla}\ n \geq 2,$$

natomiast wzór jawny na F_n (wzór Bineta) to:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Zatem wzór jawny dla a_n jest następujący ($n \geq 1$):

$$a_n = \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} = 2 \cdot \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}2\right)^n}{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}.$$

Wzór ten jest trudny do wykorzystania tutaj (dla treści zadania).

ZADANIE 4.6. Wykaż, że jeżeli wyrazy ciągu (b_n) spełniają warunki

$$b_1 = 1,\ b_2 = 2\ \text{oraz}\ b_n = b_{n-1} + b_{n-2}\ \text{dla}\ n \geq 3,$$

wówczas zachodzi $b_n < (7/4)^n$.

ZADANIE 4.7. Wykaż, że jeżeli wyrazy ciągu (x_n) spełniają warunki

$$x_0 = x_1 = x_2 = 1\ \text{oraz}\ x_n = x_{n-2} + x_{n-3}\ \text{dla}\ n \geq 3,$$

wówczas zachodzi $x_n \leq (4/3)^n$.

Ciąg (c_n) jest określony rekurencyjnie: ◀ **PRZYKŁAD**

$$\begin{aligned} c_1 &= 2 \\ c_n &= (c_{n-1}+3)^2 + 5\ \text{dla}\ n \geq 2. \end{aligned}$$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi $7 \mid (c_n + 5)$.

Zauważmy, że własność „$7 \mid (c_n + 5)$” możemy równoważnie zapisać jako „istnieje liczba naturalna k_n

taka, że $c_n = 7k_n + 2$" (innymi słowy reszta z dzielenia c_n przez 7 wynosi 2). Skorzystajmy teraz z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, bo mamy $c_1 \bmod 2 = 2 \bmod 2 = 2$.

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $c_n = 7_n + 2$ dla jakiegoś $k_n \in \mathbb{N}$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= [\text{wzór}] = (c_n + 3)^2 + 5 \\
&= [\text{założenie indukcyjne}] = \left((7k_n + 2) + 3\right)^2 + 5 = (7k_n + 5)^2 + 5 \\
&= 49k_n^2 + 70k_n + 25 + 5 = 49k_n^2 + 70k_n + 30 = \\
&= (49k_n^2 + 70k_n + 28) + 2 = 7(7k_n^2 + 10k_n + 4) + 2 = 7k_{n+1} + 2,
\end{aligned}$$

gdzie $k_{n+1} = 7k_n^2 + 10k_n + 4$ jest liczbą naturalną (bo taką jest k_n), co należało wykazać.

Ciąg (d_n) jest określony rekurencyjnie: ◀ **PRZYKŁAD**

$$\begin{aligned}
d_1 &= 1 \\
d_2 &= 1 \\
d_{n+2} &= d_{n+1} + d_n \text{ dla } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi $5 \mid d_{5n}$.

Skorzystajmy z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $n = 1$.

$$d_5 = d_4 + d_3 = (d_3 + d_2) + (d_2 + d_1) = d_2 + d_1 + d_2 + d_1 + d_1 = 5, \text{ a zatem } 5 \mid d_1.$$

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $5 \mid d_{5n}$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned}
d_{5(n+1)} &= [\text{wzór}] = d_{5n+4} + d_{5n+3} \\
&= [\text{wzór}] = (d_{5n+3} + d_{5n+2}) + (d_{5n+2} + d_{5n+1}) = d_{5n+3} + 2d_{5n+2} + d_{5n+1} \\
&= [\text{wzór}] = (d_{5n+2} + d_{5n+1}) + 2(d_{5n+1} + d_{5n}) + d_{5n+1} = d_{5n+2} + 4d_{5n+1} + 2d_{5n} \\
&= [\text{wzór}] = (d_{5n+1} + d_{5n}) + 4d_{5n+1} + 2d_{5n} = 5d_{5n+1} + 3d_{5n}.
\end{aligned}$$

Z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że d_{5n} jest podzielna przez 5. Jako że $5d_{5n+1}$ jest także podzielne przez 5, a zatem suma $5d_{5n+1} + 3d_{5n}$ jest także liczbą podzielną przez 5 $(n \geq 1)$.

ZADANIE 4.8. Ciąg (e_n) jest określony rekurencyjnie:

$$\begin{aligned}
e_1 &= 1 \\
e_2 &= 2 \\
e_n &= e_{n-1}^2 + e_{n-2}^2 + e_{n-2} + 1 \text{ dla } n \geq 3.
\end{aligned}$$

Udowodnij, że żadna z liczb e_n nie jest podzielna przez 3 (czyli zachodzi $\neg\exists_{n\in\mathbb{N}^+}\ 3 \mid e_n$).

ZADANIE 4.9. Ciąg (f_n) jest określony rekurencyjnie:

$$\begin{aligned}
f_1 &= 4 \\
f_2 &= 2002 \\
f_n &= f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + f_{n-2} + 2 \text{ dla } n \geq 3.
\end{aligned}$$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi $4 \mid \left((f_n + 1)^2 - 1\right)$.

Wykaż, że jeżeli wyrazy ciągu $(g_n), n \geq 1$, spełniają warunek **◀ PRZYKŁAD**

$$g_n = \frac{g_{n-1}}{2g_{n-1}+1},$$

wówczas zachodzi

$$g_n = \frac{g_0}{2ng_0+1}.$$

Korzystamy z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, bo mamy $g_1 =$ [wzór] $= \frac{g_0}{2g_0+1} = \frac{g_0}{2\cdot 1\cdot g_0+1}$.
2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $g_n = \frac{g_0}{2ng_0+1}$.
3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n+1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= \text{[wzór]} = \tfrac{g_n}{2g_n+1} \\ &= \text{[założenie indukcyjne]} = \frac{\frac{g_0}{2ng_0+1}}{2\frac{g_0}{2ng_0+1}+1} = \frac{\frac{g_0}{2ng_0+1}}{\frac{2g_0+2ng_0+1}{2ng_0+1}} = \frac{g_0}{2(n+1)g_0+1}, \end{aligned}$$

co należało wykazać.

Dany jest ciąg (h_n) określony rekurencyjnie: **◀ PRZYKŁAD**

$$\begin{aligned} h_1 &= 2 \\ h_n &= \tfrac{n+2}{3n} \cdot h_{n-1} \text{ dla } n \geq 2. \end{aligned}$$

Wyznacz wzór zwarty na n-ty wyraz tego ciągu. Wykaż poprawność uzyskanego wzoru.

Aby odgadnąć wzór, stosujemy tzw. *metodę iteracyjną*, tzn. rozwijamy wzór rekurencyjny do samego końca:

$$\begin{aligned} h_n &= \tfrac{n+2}{3n} \cdot h_{n-1} \\ &= \tfrac{n+2}{3n} \cdot \tfrac{n+1}{3(n-1)} \cdot h_{n-2} \\ &= \tfrac{n+2}{3n} \cdot \tfrac{n+1}{3(n-1)} \cdot \tfrac{n}{3(n-2)} \cdot h_{n-3} \\ &= \tfrac{n+2}{3n} \cdot \tfrac{n+1}{3(n-1)} \cdot \tfrac{n}{3(n-2)} \cdot \tfrac{n-1}{3(n-3)} \cdot h_{n-4} \\ &= \ldots \\ &= \tfrac{n+2}{3n} \cdot \tfrac{n+1}{3(n-1)} \cdot \tfrac{n}{3(n-2)} \cdot \tfrac{n-1}{3(n-3)} \cdot \ldots \cdot \tfrac{4}{3\cdot 2} \cdot h_1 \\ &= \tfrac{(n+2)(n+1)n\cdot\ldots\cdot 4}{3^{n-1}\cdot n!} \cdot h_1 \\ &= \tfrac{(n+2)(n+1)n\cdot\ldots\cdot 4}{3^{n-1}\cdot n!} \cdot \tfrac{3!}{3!} \cdot g_1 = \tfrac{(n+2)!}{3^{n-1}\cdot n!} \cdot \tfrac{1}{3!} \cdot 2 = \tfrac{(n+2)(n+1)}{3^n}. \end{aligned}$$

Pozostaje zatem wykazać — w oparciu o zasadę indukcji matematycznej — poprawność wzoru

$$h_n = \frac{(n+2)(n+1)}{3^n}.$$

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, bo mamy $h_1 = 2 = \frac{(1+2)(1+1)}{3^1}$.
2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $h_n = \frac{(n+2)(n+1)}{3^n}$.
3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n+1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= \text{[wzór]} = \tfrac{(n+1)+2}{3(n+1)} \cdot h_n \\ &= \text{[założenie indukcyjne]} = \tfrac{n+3}{3(n+1)} \cdot \tfrac{(n+2)(n+1)}{3^n} \\ &= \tfrac{(n+3)(n+2)}{3^{n+1}}, \end{aligned}$$

co należało wykazać.

ZADANIE 4.10. Wyznacz wzór zwarty na n-ty wyraz ciągu (l_n) określonego rekurencyjnie:

$$\begin{array}{rcl} l_1 & = & 7 \\ l_{n+1} & = & l_n + 2n + 1 \text{ dla } n \geq 1. \end{array}$$

Udowodnij poprawność wzoru.

ZADANIE 4.11. Niech ciąg (r_n) będzie zadany wzorem

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} 1.$$

Uzasadnij, że $r_n = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$.

Zadanie 4.12.* Dany jest ciąg (p_n) określony rekurencyjnie:

$$\begin{array}{rcl} p_1 & = & p_3 \\ p_2 & = & -2 \\ p_n & = & p_{n-1} + 2p_{n-2} + 6n - 15 \text{ dla } n \geq 3. \end{array}$$

Wyznacz wzór zwarty na n-ty wyraz tego ciągu i wykaż jego poprawność.

Zadanie 4.13.* Dany jest ciąg (m_n) określony rekurencyjnie:

$$\begin{array}{rcl} r_1 & = & 3 \\ r_2 & = & 7 \\ r_n & = & 5r_{n-1} - 6r_{n-2} \text{ dla } n \geq 3. \end{array}$$

Wyznacz wzór zwarty na n-ty wyraz tego ciągu i wykaż jego poprawność.

◀ **PRZYKŁAD**

Niech $n \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Udowodnij, że n dowolnych prostych na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ dzieli tą płaszczyznę na nie więcej niż $(n^2 + n + 2)/2$ spójnych obszarów.

Niech $x_n = (n^2 + n + 2)/2$. Zdefiniujemy predykat $P(n)$: n prostych rozcina płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ na co najwyżej x_n spójnych obszarów.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, oczywiste – mamy dwa obszary.

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $P(n)$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy dowolnych $n + 1$ (≥ 2) prostych na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.

Rozważmy dowolną z tych prostych i usuńmy ją (niech ta prosta nazywa się L). Otrzymujemy płaszczyznę rozciętą n prostymi i z założenia indukcyjnego te n prostych dzieli płaszczyznę na nie więcej niż $x_n = (n^2 + n + 2)/2$ spójnych obszarów. Zauważmy teraz, że nasza prosta L przecina pozostałe n prostych w co najwyżej n punktach (w mniej niż n, gdy prosta L przecina pozostałe proste w ich punktach przecięcia lub gdy prosta L jest równoległa do którejś/kilku z pozostałych n prostych). A zatem L rozcina co najwyżej $n + 1$ obszarów utworzonych przez podział pozostałymi n prostymi (bez prostej L). W konsekwencji liczba x_{n+1} spójnych rozłącznych obszarów rozciętych przez wszystkie $n + 1$ prostych (łącznie z L) jest nie większa od liczby spójnych rozłącznych obszarów rozciętych przez n prostych (bez L), powiększonej o $n + 1$, a co zatym idzie:

$$\begin{array}{rcl} x_{n+1} & \leq & x_n + (n+1) \leq \frac{n^2+n+2}{2} + (n+1) \\ & = & \frac{n^2+n+2+2n+2}{2} = \frac{n^2+2n+1+n+1+2}{2} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}, \end{array}$$

co należało wykazać.

Przyjmując, że G jest grafem prostym o n wierzchołkach i m krawędziach, wykaż indukcyjnie, że $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Dla jakich grafów zachodzi równość? ◀ **PRZYKŁAD**

1. Krok bazowy: $n = 1$. Wówczas 1-wierzchołkowy graf prosty G ma $0 = \frac{1(1-1)}{2}$ krawędzi.

2. Założenie indukcyjne: dowolny graf prosty o $n \geq 1$ wierzchołkach ma co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi.

3. Krok indukcyjny. Niech G będzie dowolnym $(n+1)$-wierzchołkowym grafem prostym, $n \geq 1$. Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem G. Usuńmy ten wierzchołek z G wraz z incydentnymi do niego krawędziami. Otrzymany graf G' ma n wierzchołków i, z założenia indukcyjnego, co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi. Usunięty wierzchołek v był sąsiedni z co najwyżej n wierzchołkami z grafu G', zatem łączna liczba krawędzi w grafie G nie przekracza $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{(n+1)n}{2}$ krawędzi, co należało wykazać.

Równość $m = \frac{n(n-1)}{2}$ zachodzi dla tzw. grafów *pełnych.*

ZADANIE 4.14. Niech c_n oznacza liczbę rozłącznych części, na jakie dzielą n-kąt wypukły jego wszystkie przekątne. Zakładając, że żadne trzy przekątne nie przecinają się w jednym punkcie, pokaż, że

$$c_n = c_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + n - 2 \quad \text{dla } n \geq 3, \text{ gdzie } c_0 = c_1 = c_2 = 0.$$

Zadanie 4.15.* Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje liczba naturalna c_n taka, że jeżeli połączymy odcinkami każde dwa wierzchołki k-kąta foremnego, gdzie $k \geq c_n$, to przy dowolnym pokolorowaniu wszystkich tych odcinków n kolorami pewne trzy odcinki będące bokami jednego trójkąta uzyskają ten sam kolor.

Zadanie 4.16.* W mieście Skrzyżne nie ma ślepych ulic, tzn. jadąc dowolną ulicą w dowolnym kierunku zawsze dojedziemy do skrzyżowania, i wszystkie ulice są dwukierunkowe. Do każdego skrzyżowania dochodzi parzysta liczba ulic. Z każdego skrzyżowania można dojechać do każdego innego skrzyżowania. Udowodnij, że można w tym mieście przejechać wszystkie ulice tak, aby każdą ulicą jechać tylko jeden raz, rozpoczynając i kończąc podróż na tym samym skrzyżowaniu.

Wskazówka. Zastosuj indukcję względem liczby ulic. Skorzystaj z silniejszej wersji zasady indukcji matematycznej (krok indukcyjny: $[P(s) \wedge P(s+1) \wedge \cdots \wedge P(n)] \Rightarrow P(n+1)$)).

ZADANIE 4.17. Poniżej podany jest pseudo-kod algorytmu.

```
const k = ...;
type T = array[1...k] of integers;
for i = 1 to k - 1 do
    if T[i] < T[i+1] then "zamień T[i] z T[i + 1]"
writeln(T[k]);
```

Wykaż, że powyższy algorytm wypisuje maksymalną wartość tablicy `T`.

Wskazówka. Zastosuj indukcję względem i. Zastosuj następujący niezmiennik/predykat $P(i)$: „Po wykonaniu i-tego kroku pętli element największy znajduje się w polu o indeksie większym niż i".

Zadanie 4.18.* Poniżej podany jest pseudo-kod algorytmu.

```
const k = 10;
type T = array[1...k] of integers;
for i = 1 to k - 1 do
    for j = 1 to k - i do
       if T[j] < T[j+1] then "zamień T[j] z T[j + 1]"
```

Udowodnij, że powyższy algorytm sortuje tablicę `T` w porządku nierosnącym.

Wskazówka. Zastosuj indukcję względem i. Skorzystaj z zadania 4.17. Określ wyraźnie predykat $Q(i)$, który występuje w Twoim dowodzie.

Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{n}$. ◀ **PRZYKŁAD***

Skorzystamy z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, bo mamy $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \geq \sqrt{1}$.
2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{n}$.
3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 2).

Dalszy etap dowodu przebiega następująco. Rozważmy lewą stronę udowadnianej nierówności:

$$L = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Z założenia indukcyjnego zachodzi zatem, że

$$L \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Jeżeli pomnożymy obie strony przez $\sqrt{n+1}$, otrzymamy:

$$L\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n(n+1)} + 1.$$

Jako że $\sqrt{n(n+1)} + 1 \geq n + 1$ (z monotoniczności funkcji $\sqrt{x}$), mamy:

$$L\sqrt{n+1} \geq n + 1.$$

Dzieląc obie strony przez $\sqrt{n+1}$ dostajemy:

$$L \geq \sqrt{n+1},$$

co należało wykazać.

Zadanie 4.19.* Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi:

$$\frac{\sqrt{2}}{1} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{n-1} > \sqrt{n-1}.$$

Zadanie 4.20.* Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich rzeczywistych liczb $a_1, ..., a_n$ zawsze zachodzi:

a) $\frac{a_n}{a_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_{i+1}} \geq n$.

b) Jeżeli $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, wówczas $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n$.

RÓWNANIA REKURENCYJNE LINIOWE JEDNORODNE

Rozważmy *równanie rekurencyjne liniowe jednorodne* postaci

$$\begin{aligned} a_1 &= A \\ a_2 &= B \\ a_n &= Ca_{n-1} + Da_{n-2} \end{aligned}$$

gdzie $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Aby otrzymać wzór jawny na a_n, „zgadujemy”, że rozwiązaniem jest x^n. Podstawiając teraz to rozwiązanie do równania rekurencyjnego, otrzymujemy, że

$$x^n = Cx^{n-1} + Dx^{n-2}.$$

Podzielenie obu stron przez x^{n-2} daje

$$x^2 = Cx + D,$$

czyli

$$x^2 - Cx - D = 0.$$

Otrzymane równanie nazywamy *równaniem charakterystycznym* równania rekurencyjnego, a w tym przypadku jest to równanie kwadratowe. Jeżeli równanie to ma dwa rozwiązania, przyjmijmy x_1 oraz x_2, wówczas

$$a_n = Ex_1^n + Fx_2^n,$$

jeżeli natomiast równanie to ma jeden pierwiatek podwójny, przyjmijmy x_3, wówczas

$$a_n = (E + Fn) \cdot x_3^n,$$

gdzie E, F są pewnymi stałymi, których wartość możemy ostatecznie wyznaczyć w oparciu o fakt, że $a_1 = A$ oraz $a_2 = B$.

Rozwiąż równanie rekurencyjne postaci $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ z warunkami poczatkowymi $a_0 = 1$ oraz $a_1 = 6$. ◀ **PRZYKŁAD**

Dla tak określonej rekurencji (równianie rekurencyjne liniowe jednorodne) jej równanie charakterystyczne ma postać $x^2 = 6x - 9$, czyli $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0$. Równanie to posiada jeden pierwiastek podwójny $x = 3$. A zatem „zgadujemy”, że szukane rozwiązanie rozważanej rekurencji ma postać

$$a_n = (E + Fn) \cdot 3^n.$$

Rozważając teraz warunki poczatkowe $a_0 = 1$ oraz $a_1 = 6$, otrzymujemy układ równiań

$$\begin{cases} 1 &= (E + F \cdot 0) \cdot 3^0 \\ 6 &= (E + F \cdot 1) \cdot 3^1 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest $E = 1$ oraz $F = 1$. A zatem otrzymujemy ostatecznie, że $a_n = (n + 1)3^n$.

Powyższe rozwiązanie można sprawdzić korzystając z indukcji matematycznej. Oczywiście wzór jest prawdziwy dla $n = 0$ oraz $n = 1$. Stosujemy następnie indukcję zupełną (bo odwołujemy się do dwóch wcześniejszych wyrazów, a nie tylko ostatniego).

$a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1} = [\text{założenie indukcyjne}] = 6 \cdot (n+1) \cdot 3^n - 9 \cdot ((n-1)+1) \cdot 3^{n-1} = ((n+1)+1) \cdot 3^{n+1}$,

co należało wykazać.

Przyjmijmy, że Student rozwiązujący pewien problem jest na n-tym etapie, jeżeli do rozwiązania problemu pozostało mu n ($n > 1$) kroków. Na każdym etapie ma on pięć możliwości. Dwie z nich prowadzą go z n-tego etapu do $(n-1)$-go etapu, a pozostałe trzy prowadzą go ◀ **PRZYKŁAD** bezpośrednio do $(n-2)$-go etapu. Niech l_n oznacza liczbę sposobów rozwiązania problemu zaczynając od n-tego etapu. Przyjmując, że $l_1 = 5$ oraz $l_2 = 13$, wyznacz wzór jawny na l_n.

Z warunków zadania otrzymujemy równianie rekurencyjne liniowe jednorodne postaci

$$l_l = 2l_{n-1} + 3l_{n-2}.$$

Jego równanie charakterystyczne ma postać $x^2 = 2x + 3$, czyli $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0$. Równanie to posiada zatem dwa pierwiastki: $x = -1$ oraz $x = 3$. A zatem „zgadujemy”, że szukane rozwiązanie rozważanej rekurencji ma postać

$$a_n = E \cdot (-1)^n + F \cdot 3^n.$$

Rozważając teraz warunki poczatkowe $a_1 = 5$ oraz $a_2 = 13$, otrzymujemy układ równiań

$$\begin{cases} 5 & = E \cdot (-1)^1 + F \cdot 3^1 \\ 13 & = E \cdot (-1)^2 + F \cdot 3^2 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest $E = -\frac{1}{2}$ oraz $F = \frac{3}{2}$. A zatem otrzymujemy ostatecznie, że

$$l_n = \frac{(-1)^{n+1} + 3^{n+1}}{2}.$$

Powyższe rozwiązanie można sprawdzić korzystając z indukcji matematycznej. Oczywiście wzór jest prawdziwy dla $n = 1$ oraz $n = 2$. Stosujemy następnie indukcję zupełną (bo odwołujemy się do dwóch wczesniejszych wyrazów, a nie tylko ostatniego).

$$l_{n+1} = 2l_n + 3l_{n-1} = [\text{założenie indukcyjne}] = 2 \cdot \frac{(-1)^{n+1} + 3^{n+1}}{2} + 3 \cdot \frac{(-1)^n + 3^n}{2} = \frac{(-1)^{n+2} + 3^{n+2}}{2},$$

co należało wykazać.

ZADANIE 4.21. Stosując równanie charakterystyczne rozwiąż następujące zależności rekurencyjne.

a) $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, przy warunkach początkowych $a_0 = a_1 = 1$
b) $b_n = b_{n-1} + 6b_{n-2}$, przy warunkach początkowych $b_0 = b_1 = 4$.
c) $c_{n+2} - 4c_{n+1} + 4c_n = 0$, przy warunkach początkowych $c_0 = 0$ oraz $c_1 = 1$.
d) $d_n = 2d_{n-1} - d_n$, przy warunkach początkowych $d_0 = d_1 = 2$.

Zadanie 4.22.* Niech p_n będzie liczbą podziałów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na dwa niepuste zbiory. Znajdź zależność rekurencyjną dla p_n i na jej podstawie wyznacz wzór na liczbę takich podziałów.

Zadanie 4.23.* Niech s_n będzie liczbą podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, wliczając zbiór pusty, które nie zawierają sąsiednich liczb. Znajdź zależność rekurencyjną dla s_n i na jej podstawie wyznacz wzór na liczbę takich podzbiorów.

DODATKOWE ŹRÓDŁA

- `http://ww2.ii.uj.edu.pl/~kamiensk/`
- `http://alioth.uwb.edu.pl/~pakkarol/dyskretna.html`, Wykład nr 3

REKURENCJA W INFORMATYCE

Z programistycznego punktu widzenia *rekurencja* jest to zdolność programu (procedury/funkcji) do wywoływania samego siebie. Działanie pocedury rekurencyjnej można zilustrować poprzez *drzewo rekursji*, w którym korzeń odpowiada początkowemu wywołaniu procedury, a dla dowolnego wierzchołka x odpowiadającemu pewnemu wywołaniu procedury, jego synowie oznaczają rekurencyjne wywołania w celu wykoniania obliczeń dla x.

◀ **PRZYKŁAD**

```
unsigned int D(unsigned int x, unsigned int y)
BEGIN
if y=0 return x;
   else return D(x,y-1)+1;
END
```

Oblicz $D(2,3)$. Co oblicza procedura D? — uzasadnij odpowiedź.

Wyznaczmy najpierw $D(2,3)$.

$$D(2,3) = D(2,2) + 1 = (D(2,1) + 1) + 1 = ((D(2,0) + 1) + 1) + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 5.$$

Wyznaczając następnie kilka innych wartości możemy wywnioskować, że funkcja $D(x,y)$ wyznacza sumę liczb x i y. Pozostaje to udowodnić — dowód indukcyjny przeprowadzimy względem y.

1. Krok bazowy. Dla dowolnego $x \geq 0$ oraz $y = 0$ mamy $D(x,0) = x = x + 0$.

2. Założenie indukcyjne. Dla dowolnego $x \geq 0$ oraz pewnego $y \geq 0$ zachodzi $D(x,y) = x + y$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy dowolne $x \geq 0$ oraz $y+1$. Z definicji funkcji D mamy, że $D(x,y+1) = D(x,y) + 1$. Z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że $D(x,y) = x + y$, a zatem $D(x,y+1) = (x+y) + 1 = x + (y+1)$.

ZADANIE 4.24. Dana jest następująca procedura M:

```
unsigned int M(unsigned int x, unsigned int y)
BEGIN
if y=0 return 0;
   else return M(x,y-1)+x;
END
```

Oblicz $M(4,3)$. Co oblicza procedura M? — uzasadnij odpowiedź.

ZADANIE 4.25. Dana jest następująca procedura X:

```
unsigned int X(unsigned int n)
BEGIN
if n=0 return 0;
   else return X(X(n-1))+1;
END
```

Co oblicza funkcja X? — uzasadnij odpowiedź.

ZADANIE 4.26. Dana jest następująca procedura G:

```
unsigned int G(unsigned int n)
BEGIN
if n=0 return 0;
   else return G(n-1)+2*n-1;
END
```

Wykaż, że $g(n) = n^2$.

ZADANIE 4.27. Funkcja Ackermanna określona jest następująco ($i, j, k \geq 1$, naturalne):

$$\begin{cases} A(1, j, k) = j + k; \\ A(i+1, j, 1) = j, \;\; i \geq 1; \\ A(i+1, j, k+1) = A(i, j, A(i+1, j, k)), \;\text{ gdy } i, k \geq 1. \end{cases}$$

a) Oblicz $A(2, j, 1)$, $A(2, j, 2)$, $A(2, j, 3)$ oraz $A(3, j, 1)$, $A(3, j, 2)$, $A(3, j, 3)$.

b) Udowodnij, że $A(2, j, k) = j \cdot k$ oraz $A(3, j, k) = j^k$.

c) Oblicz $A(4, 2, 1)$, $A(4, 2, 2)$, $A(4, 2, 3)$. Udowodnij, że $A(4, j, k) = \left.j^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{j}}}}\right\}k$.

Dla $x \in \mathbb{N}^+, y \in \mathbb{N}$ przedstaw rekurencyjną definicję funkcji wykładniczej x^y, a następnie udowodnij za pomocą indukcji jej poprawność. ◀ **PRZYKŁAD**

Funkcję wykładniczą $p(x, y) = x^y$ można przedstawić za pomocą następującego wzoru rekurencyjnego.

$$\begin{cases} p(x, 0) = 1; \\ p(x, y+1) = p(x, y) \cdot x, \;\text{ gdy } y \geq 0. \end{cases}$$

1. Krok bazowy. Dla dowolnego $x \geq 0$ oraz $y = 0$ mamy $p(x, 0) =$[wzór]$= 1 = x^0$.
2. Założenie indukcyjne. Dla dowolnego $x \geq 0$ oraz pewnego $y \geq 0$ zachodzi $p(x, y) = x^y$.
3. Krok indukcyjny. Rozważmy dowolne $x \geq 0$ oraz $y + 1$.

$$p(x, y+1) = \text{[wzór]} = p(x, y) \cdot x = \text{[założenie inducyjne]} = x^y \cdot x = x^{y+1}.$$

ZADANIE 4.28. Przedstaw rekurencyjną definicję operacji odejmowania w liczbach naturalnych, która określona jest wzorem $\max\{x - y, 0\}$. Udowodnij za pomocą indukcji jej poprawność.

ZALEŻNOŚCI REKURENCYJNE RAZ JESZCZE*

Postać funkcji rekurencyjnej można obliczyć (lub oszacować) *metodą iteracyjną*. ◀ **PRZYKŁAD** W metodzie tej rozwijamy kolejne wyrazy funkcji. Rozważmy dla przykładu funkcję $T(n)$, o której wiemy, że

$$\begin{cases} T(1) = 1; \\ T(n) \leq 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + n, \ n \geq 2. \end{cases}$$

Dla uproszczenia załóżmy, że n jest pewną potęgą dwójki. Wówczas funkcję T rozwijamy w następujący sposób.

$$T(n) = n + 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) = n + 2\left(\frac{n}{2} + 2 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right)\right) = n + n + 4 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) = n + \cdots + n + 2^i \cdot T\left(\frac{n}{2^i}\right).$$

Iterację powtarzamy, aż ostatni składnik będzie zawierał $T(1)$, czyli wtedy, gdy $i = \log_2 n$. Otrzymujemy w konsekwencji, że

$$T(n) = \underbrace{n + \cdots + n}_{i} + 2^i \cdot T(1) = n \sum_{i=1}^{\log_2 n} 1 + 2^{\log_2 n} = n \log_2 n + n.$$

ZADANIE 4.29. Metodą iteracyjną znajdź (dokładne) rozwiązanie poniższych zależności rekurencyjnych.

a) $\begin{cases} T(1) = 1; \\ T(n) = 2 \cdot T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1, \ n \geq 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} T(1) = 1; \\ T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{2}) + n^2, \ n \geq 2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} T(1) = 1; \\ T(n) = 3 \cdot T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n, \ n \geq 2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} T(1) = 1; \\ T(n+1) = n \cdot T(n) + n!, \ n \geq 1. \end{cases}$

e) $\begin{cases} T(1) = A; \\ T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + B. \end{cases}$

f) $\begin{cases} T(1) = A; \\ T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + Bn, \ n \geq 2. \end{cases}$

g*) $\begin{cases} T(1) = A; \\ T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + Bn + C, \ n \geq 2. \end{cases}$

h) $\begin{cases} T(1) = 1; \\ T(n) \leq 3 \cdot T(\lceil \frac{n}{4} \rceil) + n, \ n \geq 2. \end{cases}$

Stałe A, B i C są dowolne (ale ustalone). W przypadkach (a-c) oraz (e-g) przyjmij, że n jest zawsze potęgą dwójki, natomiast w przypadku (h) — potęgą czwórki.

ZADANIE 4.30. Dana jest zależność rekurencyjna

$$\begin{cases} T(a) \in \mathbb{R}; \\ T(n) = T(n-a) + T(a) + n, \ n > a. \end{cases}$$

dla $a \geq 1$ oraz $n = k \cdot a$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Znajdź rozwiązanie tej rekurencji.

Postać funkcji rekurencyjnej można też obliczyć/oszacować *metodą podstawiania.* ◀ **PRZYKŁAD**
W metodzie tej odgadujemy rozwiązanie ogólne, próbujemy je uściślić i wykazujemy jego poprawność. Dla przykładu oszacujmy czas działania algorytmu sortowania przez scalanie. Niech $T(n)$ oznacza liczbę operacji potrzebną do posortowania ciągu długości n. Wówczas z kształtu procedury `merge-sort` otrzymujemy, że:

$$\begin{cases} T(1) = 1; \\ T(n) \leq 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + n, \ n \geq 2. \end{cases}$$

Zgadujemy, że $T(n) \leq c(n \log_2 n + n)$ dla jakiejś stałej $c > 0$. Wykażemy, że powyższa nierówność zachodzi dla dowolnego $n \geq 1$ (będącego potęgą dwójki).

1. Krok bazowy.

   Dla $n = 1$ jest to prawda: mamy $T(1) = 1 \leq c \cdot (1 \cdot \log_2 1 + 1) = c$, dla $c \geq 1$.

2. Założenie indukcyjne.

   Niech $n \geq 2$ i załóżmy, że $T(n') \leq c \cdot (n' \log_2 n' + n')$ dla wszystkich $1 \leq n' < n$.

3. Krok indukcyjny.

   Wówczas z warunków na funkcję T i z założenia indukcyjnego mamy, że

   $$T(n) \leq 2 \cdot c \cdot (\tfrac{n}{2} \log_2 \tfrac{n}{2} + \tfrac{n}{2}) + n = cn \log_2 \tfrac{n}{2} + 2n.$$

   Jako że $\log_2 \frac{n}{2} \leq \log_2 n - 1$, $n \geq 2$, otrzymujemy

   $$T(n) \leq c \cdot n \log_2 n - cn + 2n \leq c \cdot n \log_2 n + n, \ \text{dla } c \geq 1.$$

Dana jest funkcja $T\colon \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N}$ ◀ **PRZYKŁAD**

$$\begin{cases} T(1) = A; \\ T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{2}) + n. \end{cases}$$

Udowodnij, że $T(n) \leq B \cdot (n^2 - n)$ dla $n \in \mathbb{N}^+$ oraz pewnych stałych $A, B \in \mathbb{N}$. Jakie warunki muszą spełniać stałe A i B?

1. Krok bazowy.

   Jako że $T(1) = 1$, sugerowana nierówność $T(n) \leq B \cdot (n^2 - n)$ przyjmująca postać $T(1) \leq B \cdot (1^2 - 1) = 0$ pociąga za sobą, że $A = 0$. A zatem dla $n = 1$, $A = 0$ oraz dowolnego $B \geq 0$ spełniony jest krok bazowy: $T(1) = 0 \leq B \cdot (1^2 - 1)$.

2. Założenie indukcyjne.

   Niech $n \geq 2$ i załóżmy, że dla pewnego B zachodzi $T(\bar{n}) \leq B \cdot (\bar{n}^2 - \bar{n})$ dla wszystkich $1 \leq \bar{n} < n$ będących potęgą dwójki.

3. Krok indukcyjny.

   Rozważmy rekurencyjną postać funkcji $T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{2}) + n$. Z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że

   $$\begin{aligned} T(n) &\leq [\text{założenie indukcyjne dla } T(\tfrac{n}{2})] \leq 4 \cdot B \cdot ((\tfrac{n}{2})^2 - \tfrac{n}{2}) + n \\ &= 4 \cdot B \cdot (\tfrac{n^2}{4} - \tfrac{n}{2}) + n = B \cdot (n^2 - 2n) + n \leq B \cdot (n^2 - n) - Bn + n. \end{aligned}$$

   Zauważmy, że dla $B \geq 1$ zachodzi $-Bn + n \leq 0$, a tym samym dla $A = 0$ oraz $B \geq 1$ otrzymamy, że $T(n) \leq B \cdot (n^2 - n)$, co należało wykazać.

ZADANIE 4.31. Dana jest funkcja $T\colon \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N}$

$$\begin{cases} T(1) = 1; \\ T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1, \ n \geq 2. \end{cases}$$

Udowodnij, że $T(n) = O(\log_2 n)$.

ZADANIE 4.32. Dana jest funkcja $T\colon \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N}$

$$\begin{cases} T(1) = 1; \\ T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + 2, \ n \geq 2. \end{cases}$$

Udowodnij, że $T(n) = an + b$ dla pewnych a i b. Wyznacz te stałe.

TWIERDZENIE 4.1 (Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej)
Niech dana będzie funkcja $T : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ określona zależnością reukrencyjną

$$T(n) = a \cdot T([\tfrac{n}{b}]) + f(n),$$

gdzie $a \geq 1, b > 1$, a $[\frac{n}{b}]$ oznacza $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ lub $\lceil \frac{n}{b} \rceil$. Wówczas:

1. *Jeśli $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ dla pewnego $\epsilon > 0$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.*
2. *Jeśli $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$.*
3. *Jeśli $f(n) = \Theta(n^{\log_b a + \epsilon})$ dla pewnego $\epsilon > 0$ oraz jeśli $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ dla pewnej stałej $c < 1$ i wszystkich dostatecznie dużych n, to $T(n) = \Theta(f(n))$.*

Wskaż oszacowania rozwiązań zależności rekurencyjnych z Zadania 4.34 ◀ **PRZYKŁAD**
(za wyjątkiem pkt. d) korzystając z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej, a następnie porównaj je z otrzymanymi dokładnymi rozwiązaniami.

a) $f(n) = 1$ i funkcja f rośnie wolniej niż $n^{\log_2 2} = n$, stąd $T(n) = \Theta(n)$.

b) $f(n) = n^2$ i funkcja f rośnie tak samo, jak $n^{\log_2 4}$, stąd $T(n) = \Theta(n^2 \log_2 n)$.

c) $f(n) = n$ i funkcja f rośnie wolniej niż $n^{\log_2 3}$, stąd $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$.

d) nie dotyczy

e) $f(n) = B$ i funkcja f rośnie wolniej niż $n^{\log_2 2} = n$, stąd $T(n) = \Theta(n)$.

f) $f(n) = Bn$ i funkcja f rośnie tak samo, jak $n^{\log_2 2}$, stąd $T(n) = \Theta(n \log_2 n)$.

g) $f(n) = Bn + C$ i funkcja f rośnie tak samo, jak $n^{\log_2 2}$, stąd $T(n) = \Theta(n \log_2 n)$.

h) $f(n) = n = \Theta(n^{\log_b a + \epsilon})$ dla $\epsilon = 1$ ($a = 3$ oraz $b = 4$), $a \cdot \frac{n}{b} \leq c \cdot n$ dla $c = 1$, stąd $T(n) = \Theta(n)$.

ZADANIE 4.33. Korzystając z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej wskaż oszacowania rozwiązań następujących równań rekurencyjnych.

a) $T(n) = 9 \cdot T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + n$.

b) $T(n) = T(\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor) + 1$.

c) $T(n) = 3 \cdot T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + n \log_2 n$.

d) $T(n) = 3 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n$.

e) $T(n) = 4 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n$.

f) $T(n) = 4 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n^2$.

g) $T(n) = 4 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n^3$.

STOSY, KOLEJKI, DRZEWA

Operacje na stosie.
→ Dodanie elementu na wierzch stosu.
→ Zdjęcie elementu z wierzchu stosu.
→ Sprawdzenie, czy stos jest pusty.

Operacje na kolejce.
→ Dodanie elementu na koniec kolejki.
→ Usunięcie elementu z początku kolejki.
→ Sprawdzenie, czy kolejka jest pusta.

Drzewa ukorzenione. *Drzewo ukorzenione* posiada wyróżniony wierzchołek zwany *korzeniem.* Ponadto dowolny wierzchołek może mieć *dziecko/syna* (relacja *ojciec-syn*), ale – za wyjątkiem korzenia – dowolny wierzchołek jest synem dokładnie jednego innego wierzchołka. Wierzchołki nie posiadające synów zwane są *liśćmi. Wysokość/głębokość drzewa* to długość najdłuższej ścieżki od korzenia do liścia. Zauważmy, że przy tak określonej definicji, dla każdego elementu w drzewie istnieje dokładnie jedna ścieżka prowadząca od korzenia do tego wierzchołka.

Drzewa binarne. W (ukorzenionym) *drzewie binarnym* każdy wierzchołek ma co najwyżej dwóch synów. Wierzchołki <u>można</u> etykietować ciągami złożonymi z 0 i 1. Wówczas korzeń drzewa oznaczony jest przez λ, natomiast jeśli jakiś wierzchołek oznaczony jest przez x, to jego lewego syna etykietujemy $x0$, zaś prawego – $x1$. Przy takim etykietowaniu wierzchołków kolejne bity wierzchołka wyznaczają ścieżkę od korzenia do tegoż wierzchołka: 0 – w lewego syna, 1 – w prawego syna.

ALGORYTMY PRZESZUKIWANIA DRZEW

Algorytm przeszukiwania drzewa binarnego w głąb.

1. Odwiedzamy korzeń, wkładamy go na STOS, i zaznaczamy jako odwiedzony.
2. Dopóki STOS nie jest pusty, powtarzamy:
   - 2.a. jeżeli v jest wierzchołkiem na wierzchu stosu, to sprawdzamy, czy istnieje syn u wierzchołka v, który nie był jeszcze odwiedzony (najpierw lewy, potem prawy syn);
   - 2.b. jeżeli u jest takim wierzchołkiem, to odwiedzamy u, wkładamy go na STOS i zaznaczamy jako odwiedzony;
   - 2.c. jeżeli takiego u nie ma, to zdejmujemy v ze stosu.

Algorytm przeszukiwania drzewa binarnego wszerz.

1. Odwiedzamy korzeń, wstawiamy go do KOLEJKI i zaznaczamy jako odwiedzony.
2. Dopóki KOLEJKA nie jest pusta, powtarzamy:
   - 2.a bierzemy wierzchołek v z początku KOLEJKI;
   - 2.b wstawiamy wszystkich synów v na koniec KOLEJKI i zaznaczamy je jako odwiedzone.

Przeszukiwanie drzewa w kolejności postorder.

Aby przeszukać (pod)drzewo mające swój korzeń w wierzchołku x:
1. Przeszukujemy jego lewe poddrzewo (z korzeniem w $x0$).
2. Przeszukujemy jego prawe poddrzewo (z korzeniem w $x1$).
3. Odwiedzamy wierzchołek x (korzeń drzewa).

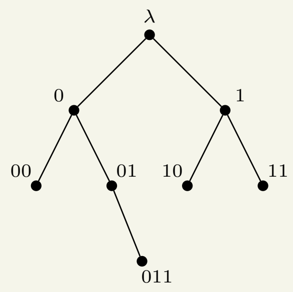
Przeszukiwanie drzewa w kolejności inorder.

Aby przeszukać (pod)drzewo mające swój korzeń w wierzchołku x:
1. Przeszukujemy jego lewe poddrzewo (z korzeniem w $x0$).
2. Odwiedzamy wierzchołek x (korzeń drzewa).
3. Przeszukujemy jego prawe poddrzewo (z korzeniem w $x1$).

Przeszukiwanie drzewa w kolejności preorder.

Aby przeszukać (pod)drzewo mające swój korzeń w wierzchołku x:
1. Odwiedzamy wierzchołek x (korzeń drzewa).
2. Przeszukujemy jego lewe poddrzewo (z korzeniem w $x0$).
3. Przeszukujemy jego prawe poddrzewo (z korzeniem w $x1$).

Przeszukaj metodą „w głąb" i „wszerz" poniższe drzewo binarne. ◀ **PRZYKŁAD**



Kolejne etapy wykonywania algorytmów ilustrują poniższe tabele.

w głąb

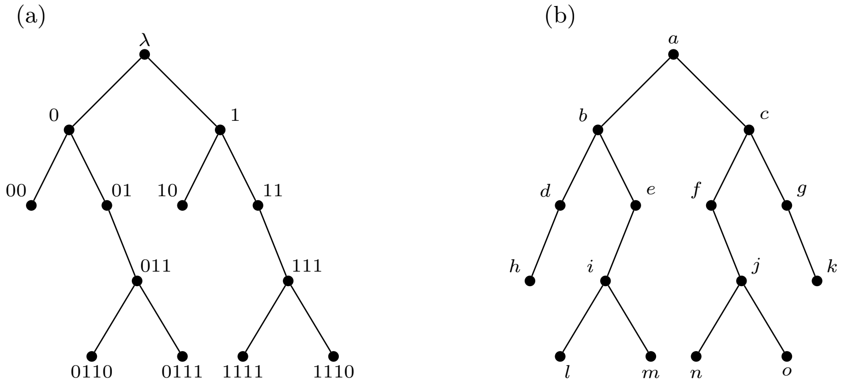
etykieta	stos
λ	λ
0	$\lambda, 0$
00	$\lambda, 0, 00$
0	$\lambda, 0$
01	$\lambda, 0, 01$
011	$\lambda, 0, 01, 011$
01	$\lambda, 0, 01$
0	$\lambda, 0$
λ	λ
1	$\lambda, 1$
10	$\lambda, 1, 10$
1	$\lambda, 1$
11	$\lambda, 1, 11$
1	$\lambda, 1$
λ	λ
$-$	$-$

wszerz

etykieta	kolejka
λ	λ
$0, 1$	$0, 1$
$00, 01$	$1, 00, 01$
$10, 11$	$00, 01, 10, 11$
$-$	$01, 10, 11$
011	$10, 11, 011$
$-$	$11, 011$
$-$	011
$-$	$-$

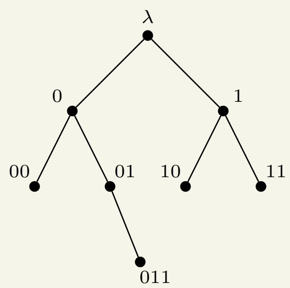
ZADANIE 5.1. Przeszukaj metodą „w głąb" i „wszerz" poniższe drzewa.

(a) (b)



Wypisz etykiety kolejno przeszukiwanych wierzchołków przy przeszukiwaniu rekurencyjnymi metodami postorder, inorder i preorder podanego obok drzewa binarnego.

◀ **PRZYKŁAD**



Etykiety kolejno przeszukiwanych wierzchołków są następujące:

– postorder: $00, 011, 01, 0, 10, 11, 1, \lambda$;
– inorder: $00, 0, 01, 011, \lambda, 10, 1, 11$;
– preorder: $\lambda, 0, 00, 01, 011, 1, 10, 11$.

ZADANIE 5.2. Wypisz etykiety kolejno przeszukiwanych wierzchołków przy przeszukiwaniu rekurencyjnymi metodami postorder, inorder i preorder drzew z zadania 5.1.

DRZEWA WYRAŻEŃ ARYTMETYCZNYCH

Przykładem zastosowań drzew binarnych są *drzewa wyrażeń arytmetycznych*. W takim drzewie liście etykietowane są stałymi albo zmiennymi. Pozostałe wierzchołki etykietowane są operacjami arytmetycznymi. Każdemu wierzchołkowi w drzewie możemy przypisać wyrażenie arytmetyczne według następującej zasady:

→ dla liści wyrażeniami są etykiety tych liści (stałe lub zmienne);
→ jeżeli wierzchołek x ma etykietę op, a jego synom $x0$ i $x1$ przypisano odpowiednio wyrażenia $W(x0)$ i $W(x1)$, to wierzchołkowi x przypisujemy wyrażenie $W(x) = W(x0)\ op\ W(x1)$.

Postacie wyrażeń arytmetycznych (postać pre- jak i postfixowa nie wymagają nawiasowania):

→ notacja infixowa: $((2 \cdot a) + (3/d))$;
→ notacja prefixowa: $+\ \cdot\ a\ 2\ /\ 3\ d$;
→ notacja postfixowa: $2\ a\ \cdot\ 3\ d\ /\ +$.

Mając drzewo wyrażenia arytmetycznego, aby otrzymać postać postfixową/infixową/prefixową tego wyrażenia, należy przeszukać to drzewo odpowiednio metodą postorder/inorder/preorder i wypisać po kolei etykiety odwiedzanych wierzchołków. Przy czym w celu otrzymania postaci infixowej, przy przeszukiwaniu inorder za każdym pójściem w lewo wstawiamy nawias otwierający, przy powrocie z prawej i wyjściu z wierzchołka nawias zamykający.

Algorytm obliczania wartości wyrażenia w postaci postfixowej.

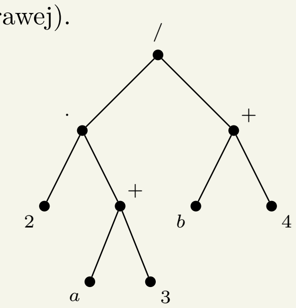
Dla kolejnych elementów zapisu wyrażania powtarzamy:

1. Jeżeli element jest stałą albo zmienną, to wkładamy jego wartość na stos.
2. Jeżeli element jest znakiem operacji, to zdejmujemy dwie wartości ze stosu, wykonujemy operację na tych wartościach, a następnie obliczoną wartość wkładamy na wierzch stosu.
3. Po przejściu całego wyrażenia, jego wartość znajduje się na stosie.

◀ **PRZYKŁAD**

Narysuj drzewo wyrażenia arytmetycznego dla $((2 \cdot (a + 3))/(b + 4))$, przedstaw to wyrażenie w postaci prefixowej i postfixowej, a następnie oblicz wartość tego wyrażenia dla postaci postfixowej przy $a = 2$ oraz $b = 1$.

Analizując nawiasowanie otrzymamy następujące drzewo wyrażenia (po prawej).



Szukane postacie prefixowa i postfixowa otrzymywane są przez wypisanie etykiet wierzchołków przy przeszukiwaniu drzewa w kolejności preorder i odpowiednio metodą postorder:

→ notacja prefixowa: $/\ \cdot\ 2\ +\ a\ 3\ +\ b\ 4$;
→ notacja postfixowa: $2\ a\ 3\ +\ \cdot\ b\ 4\ +\ /$.

Następnie zgodnie z algorytmem obliczania wartości wyrażenia w postaci postfixowej dla kolejnych elementów wyrażenia $2\ 2\ 3\ +\ \cdot\ 1\ 4\ +\ /$ powtarzamy:

	stos
2	2
2	2, 2
3	2, 2, 3
+	2, 5
·	10
1	10, 1
4	10, 1, 4
+	10, 5
/	2.

W konsekwencji wartość wyrażenia dla $a = 2$ i $b = 1$ wynosi 2.

ZADANIE 5.3. Dla wyrażeń **(a)** $2\ 3\ +\ 5\ /\ 7\ \cdot\ 3\ 1\ -\ \cdot$ oraz **(b)** $1\ 3\ +\ 5\ 8\ 7\ -\ -\ /$ oblicz ich wartość, narysuj odpowiednie drzewa oraz przedstaw te wyrażenia w postaci infixowej i prefixowej.

DRZEWA PRZESZUKIWAŃ BINARNYCH

Niech $W(x)$ oznacza wartość przechowywaną w korzeniu o etykiecie x drzewa T_x.

Algorytm wstawiania elementu do drzewa przeszukiwań binarnych.

Niech y będzie wstawianym elementem do drzewa T_x.

1. Jeśli drzewo T_x jest puste, to $W(x) := y$ (węzeł z wartością y staje się korzeniem drzewa T_x).
2. W przeciwnym razie porównaj zawartość y z zawartością korzenia drzewa T_x:
   2.a. jeśli $y < W(x)$, to wstaw y do lewego poddrzewa T_{x0} drzewa T_x;
   2.b. jeśli $y > W(x)$, to wstaw y do prawego poddrzewa T_{x1} drzewa T_x.

Algorytm szukania elementu w drzewie przeszukiwań binarnych.

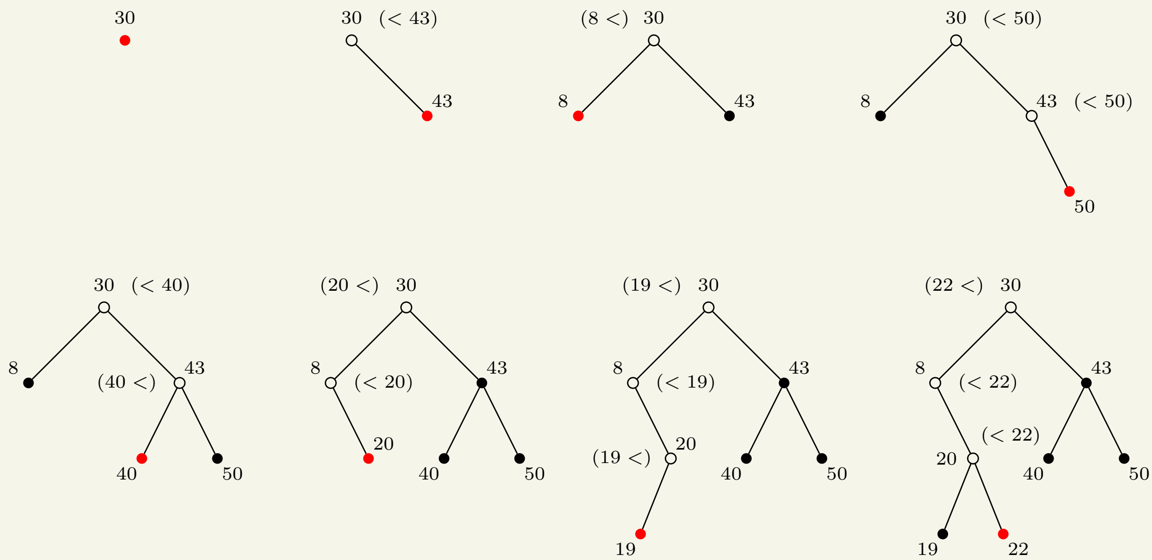
Niech y będzie szukanym elementem w drzewie T_x.

1. Jeśli drzewo T_x jest puste, to rozważanego elementu nie ma na drzewie.
2. W przeciwnym razie porównaj wartość y z wartością w korzeniu x drzewa T_x:
   2.a. jeśli $y = W(x)$, to w drzewie znaleźliśmy element y;
   2.b. jeśli $y < W(x)$, to szukaj y w lewym poddrzewie T_{x0};
   2.c. jeśli $y > W(x)$, to szukaj y w prawym poddrzewie T_{x1}

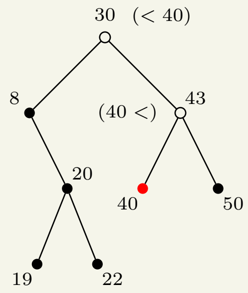
◀ **PRZYKŁAD**

Narysuj drzewo poszukiwań binarnych powstałe przy wstawianiu kolejnych liczb $30, 43, 8, 50, 40, 20, 19, 22$, a następnie przeszukaj to drzewo w celu sprawdzenia, czy elementy 40 i 18 należą do rozważanego drzewa.

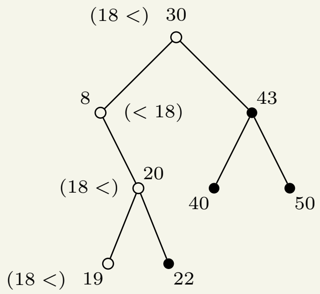
Kolejne etapy powstawania drzewa są następujące (węzły białe to węzły odwiedzane przez algorytm, a węzeł czerwony to wstawiony węzeł).



Jeśli chodzi o wyszukanie elementów 40 oraz 18, to wykonanie algorytmu przedstawione jest na poniższych rysunkach; białe węzły są węzłami odwiedzanymi przez algorytm, a czerwony węzeł jest węzłem z szukaną wartością (o ile węzeł taki istnieje).



istnieje węzeł o wartości 40



brak węzła o wartości 18

ZADANIE 5.4. Narysuj drzewo poszukiwań binarnych powstałe przy wstawianiu kolejnych liczb $15, 20, 23, 16, 13, 9, 14, 4, 1$, a następnie przeszukaj to drzewo w celu sprawdzenia, czy elementy 40 i 4 należą do rozważanego drzewa.

ZADANIE 5.5. Narysuj drzewo poszukiwań binarnych powstałe przy wstawianiu kolejnych wyrazów *słowik, wróbel, kos, jaskółka, kogut, dzięcioł, gil, kukułka, szczygieł, sowa, kruk, czubatka*, a następnie wypisz kolejno przeszukiwane wierzchołki przy przeszukiwaniu rekurencyjną metodą inorder.

ZADANIE 5.6. Załóżmy, że w drzewie poszukiwań binarnych znajdują się liczby od 1 do 1000. Które z poniższych ciągów wezłów (kluczy) nie mogą zostać sprawdzone przy przeszukiwaniu drzewa w poszukiwaniu liczby 363?

(a) $2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363$; **(b)** $925, 202, 911, 240, 912, 245, 363$.

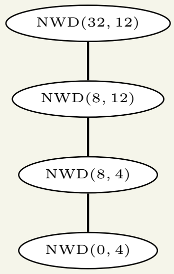
DRZEWA REKURSJI — O ALGORYTMACH REKURENCYJNYCH RAZ JESZCZE

Największy wspólny dzielnik. Praktycznym przykładem algorytmu rekurencyjnego jest rekurencyjna wersja algorytmu Euklidesa, który oblicza największy wspólny dzielnik liczb a i b ($a, b > 0$).

Algorytm (rekurencyjny) Euklidesa NWD(a, b).

1. Jeśli $a \cdot b = 0$, zwróć $a + b$;
2. W przeciwnym przypadku:
   2.a. jeżeli $a \geq b$, zwróć NWD$(a \bmod b, b)$;
   2.b. w przeciwnym przypadku, zwróć NWD$(a, b \bmod a)$.

W przypadku powyższego algorytmu wyznaczania największego wspólnego dzielnika, *drzewo rekursji* będzie miało zawsze postać ścieżki (poniżej $NWD(32, 12)$). ◀ **PRZYKŁAD**



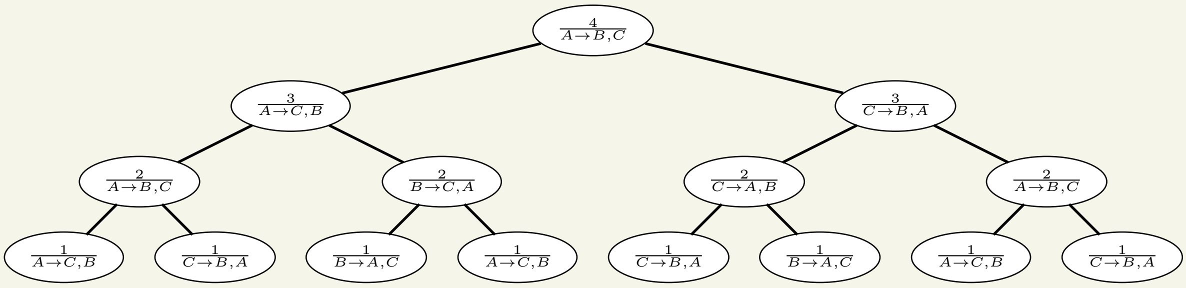
Wieże Hanoi. Przypuśćmy, że mamy trzy paliki A, B i C. Na paliku A znajduje się n krążków różnej wielkości, osadzonych w porządku od największego na dole do najmniejszego na górze. Paliki B i C są początkowo puste. Należy przenieść wszystkie krążki z palika A na palik B, posługując się w razie potrzeby palikiem C, przy czym można przenosić tylko po jednym krążku oraz nie można umieszczać krażka większego na mniejszym.

Algorytm Przełóż(n, A, B, C): przekładanie n krążków z palika A na B korzystając z palika C.

1. Jeśli $n = 1$, to przełóż krążek z A na B.
2. W przeciwnym przypadku:
   2.a. `przełóż`$(n - 1, A, C, B)$;
   2.b. przełóż n-ty krążek z A na B;
   2.c. `przełóż`$(n - 1, C, B, A)$.

Zakładając, że wierzchołek o etykiecie $\frac{n}{A\to B,C}$ odpowiada wywołaniu procedury `przełóż`(n, A, B, C), narysuj drzewo rekursji dla przekładania czterech krążków z palika A na B, a następnie wypisz ciąg przełożeń. ◀ **PRZYKŁAD**

Drzewo rekursji przedstawia się następująco.



Sposób przekładania krążków wyznaczony jest przez przeszukanie powyższego drzewa w porządku inorder, wypisując za każdym razem, kiedy odwiedzamy węzeł, wykonanie odpowiedniego przełożenia krążka n w kroku 2.b: $\#n$: $A \to B$.

$\#1$: $A \to C$; $\#2$: $A \to B$; $\#1$: $C \to B$; $\#3$: $A \to C$; $\#1$: $B \to A$;
$\#2$: $B \to C$; $\#1$: $A \to C$; $\#4$: $A \to B$; $\#1$: $C \to B$; $\#2$: $C \to A$;
$\#1$: $B \to A$; $\#3$: $C \to B$; $\#1$: $A \to C$; $\#2$: $A \to B$; $\#1$: $C \to B$.

ZADANIE 5.7. Niech wierzchołek o etykiecie $\frac{n}{A \to B,C}$ odpowiada wywołaniu procedury `przełóż`(n, A, B, C). Narysuj drzewo rekursji dla przekładania pięciu krążków z palika A na B; wypisz ciąg przełożeń.

ZADANIE 5.8. Udowodnij indukcyjnie, że algorytm przekładania krążków wymaga $2^n - 1$ przełożeń do przeniesienia n krążków.

Sortowanie liczb. Kolejnym przykładem algorytmu rekurencyjnego może być algorytm sortowania ciągu liczb (znaków). Dla uproszczenia będziemy zakładać, że długość ciągu jest potęgą dwójki.

Algorytm sortowania przez scalanie `merge-sort`(C).

1. Jeśli C ma tylko jeden element, zwróć C.
2. W przeciwnym przypadku:
   - 2.a. podziel C na połowy C_1 i C_2;
   - 2.b. `merge-sort`(C_1);
   - 2.c. `merge-sort`(C_2);
   - 2.d. połącz C_1 i C_2 w jeden ciąg C^* z zachowaniem kolejności i zwróć C^*.

Uwaga. Krok (2.d) nosi nazwę *scalania* i przebiega następująco. Na początku ciąg wynikowy jest pusty i ustawiamy po jednym wskaźniku na początku każdego ze scalanych ciągów. Następnie (aż zabraknie elementów) porównujemy wskazywane elementy, a mniejszy z porównanych elementów przepisujemy na ciąg wynikowy i przesuwamy wskaźnik w tym ciągu, z którego był wzięty element do ciągu wynikowego.

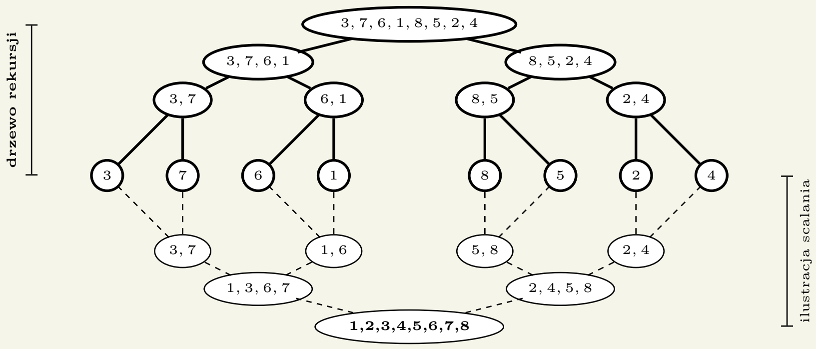
Scal następujące ciągi liczb: $(2, 5, 10, 13, 16, 23)$ i $(1, 3, 4, 7, 15, 20)$. ◀ **PRZYKŁAD**

Aktualne pozycje wskaźników oznaczone są przez pogrubienie czcionki.

(**2**,5,10,13,16,23) (**1**,3,4,7,15,20) = [1]
(**2**,5,10,13,16,23) (1,**3**,4,7,15,20) = [1,2]
(2,**5**,10,13,16,23) (1,**3**,4,7,15,20) = [1,2,3]
(2,**5**,10,13,16,23) (1,3,**4**,7,15,20) = [1,2,3,4]
(2,**5**,10,13,16,23) (1,3,4,**7**,15,20) = [1,2,3,4,5]
(2,5,**10**,13,16,23) (1,3,4,**7**,15,20) = [1,2,3,4,5,7]
(2,5,**10**,13,16,23) (1,3,4,7,**15**,20) = [1,2,3,4,5,7,10]
(2,5,10,**13**,16,23) (1,3,4,7,**15**,20) = [1,2,3,4,5,7,10,13]
(2,5,10,13,**16**,23) (1,3,4,7,**15**,20) = [1,2,3,4,5,7,10,13,15]
(2,5,10,13,**16**,23) (1,3,4,7,15,**20**) = [1,2,3,4,5,7,10,13,15,16]
(2,5,10,13,16,**23**) (1,3,4,7,15,**20**) = [1,2,3,4,5,7,10,13,15,16,20]
(2,5,10,13,16,**23**) (1,3,4,7,15,20) = [1,2,3,4,5,7,10,13,15,16,20,23]

ZADANIE 5.9. Scal następujące ciągi liczb: (4,8,12,14,20,30,31) oraz (1,5,9,10,11,21,22).

Używając procedury `merge-sort` posortuj ciąg liczb $3, 7, 6, 1, 8, 5, 2, 4$. Narysuj drzewo rekursji powstające podczas obliczeń. ◀ **PRZYKŁAD**



ZADANIE 5.10. Używając procedury `merge-sort` posortuj ciąg liczb $8, 4, 5, 2, 6, 3, 7, 1$. Narysuj drzewo rekursji powstające podczas obliczeń.

ALGORYTMICZNA TEORIA GRAFÓW

ELEMENTY TEORII

Graf nieskierowany $G = (V, E)$ jest to para składająca się z niepustego skończonego zbioru wierzchołków V oraz zbioru krawędzi E, gdzie krawędzie to nieuporządkowane pary wierzchołków:

$$E \subseteq \{\{u, v\} : \; u, v \in V\}.$$

Graf *prosty* to taki graf, dla którego:

(1) jeśli $\{u, v\} \in E$, to $u \neq v$ (brak *pętli*);
(2) co najwyżej tylko jedna para $\{u, v\} \in E$ (brak *multikrawędzi*).

Dwa wierzchołki u i v są *sąsiednie*, jeśli krawędź $e = \{u, v\} \in E$. Mówimy wówczas, że wierzchołki u, v są *incydentne* z tą krawędzią. Podobnie dwie różne krawędzie są *sąsiednie*, jeśli mają przynajmniej jeden wspólny wierzchołek. *Stopień wierzchołka* v jest liczbą krawędzi z nim incydentnych (ozn. $\deg(v)$). Wierzchołek stopnia 1 nazywany jest *liściem*, a wierzchołek stopnia 0 — *wierzchołkiem izolowanym*. Ciąg liczb $c = (d_1, d_2, ..., d_n)$ nazywamy ciągiem *grafowym*, jeśli istnieje graf G o n wierzchołkach, których stopnie równe są odpowiednim wyrazom ciągu c. W dalszej części skrypu poprzez „graf" w domyśle rozumiemy „graf prosty", w przeciwnym wypadku wyraźnie mówimy „multigraf".

> TWIERDZENIE 5.1
> *Niech $G = (V, E)$ będzie dowolnym multigrafem. Wówczas $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.*

Zauważmy, że z powyższego faktu wynika, że suma stopni w dowolnym multigrafie $G = (V, E)$ jest liczbą parzystą, a w szczególności, że liczba wierzchołków o nieparzystym stopniu jest parzysta.

Niech dany będzie dowolny multigraf $G = (V, E)$. *Marszrutą* w G nazywamy skończony ciąg krawędzi postaci $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_k - 1, v_k\}$; każda marszruta jednoznacznie wyznacza pewien ciąg wierzchołków $v_0, v_1, \ldots, v_k$. Liczbę krawędzi w marszrucie nazywamy jej *długością*. Marszrutę, w której wszystkie krawędzie są różne, nazywamy *łańcuchem*. Jeśli ponadto wszystkie wierzchołki są różne (za wyjątkiem ewentualnie $v_0 = v_k$), to łańcuch nazywamy *drogą* (prostą) lub *ścieżką*. Łańcuch bądź droga są *zamknięte*, gdy $v_0 = v_k$. Drogę prostą, zamkniętą i zawierającą przynajmniej jedną krawędź nazywamy *cyklem*. Multigraf $G = (V, E)$ jest *spójny*, jeżeli dla dowolnych dwóch wierzchołków $u, v \in V$ istnieje ścieżka łącząca je.

> TWIERDZENIE 5.2
> *Niech T będzie grafem o n wierzchołkach. Wówczas następujące warunki są równoważne:*
>
> (1) *T jest* drzewem.
> (2) *T nie zawiera cykli i ma $n - 1$ krawędzi.*
> (3) *T jest spójny i ma $n - 1$ krawędzi.*
> (4) *T jest spójny, ale usunięcie dowolnej krawędzi e rozspaja T (każda krawędź jest* mostem).
> (5) *Dowolne dwa wierzchołki grafu T połączone są dokładnie jedną drogą.*
> (6) *T nie zawiera cykli, lecz dodanie dowolnej nowej krawędzi tworzy dokładnie jeden cykl.*

DRZEWA SPINAJĄCE

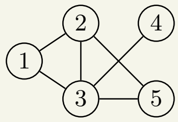
Drzewo spinające (*rozpinające*) multigrafu $G = (V, E)$ to dowolne drzewo $T = (V, E')$ takie, że $E' \subseteq E$. Zauważmy, że T ma taki sam zbiór wierzchołków co G, i każde drzewo spinające multigrafu G jest jego podgrafem. Można wykazać, że każdy spójny multigraf posiada drzewo spinające. W literaturze występują dwa szczególne drzewa spinające — są to drzewa przeszukiwań DFS i BFS, które omówione zostaną w następnej sekcji, natomiast poniżej przedstawiony jest inny prosty algorytm wyznaczania drzewa spinającego.

Algorytm konstrukcji drzewa spinającego.

Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym (multi)grafem.

1. Dopóki (multi)graf nie jest drzewem, usuń dowolną krawędź dowolnego cyklu.

Zastosuj powyższy algorytm i wyznacz drzewo spinajacego poniższego grafu. ◀ **PRZYKŁAD**



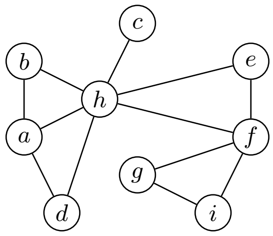
Zgodnie z algorytmem, wykonujemy:

» Rozważamy cykl o wierzchołkach $1, 2, 5, 3$ i usuwamy np. krawędź $\{1, 2\}$.
» Rozważamy cykl o wierzchołkach $2, 3, 5$ i usuwamy np. krawędź $\{3, 5\}$.
» W otrzymanym grafie nie ma już cykli.

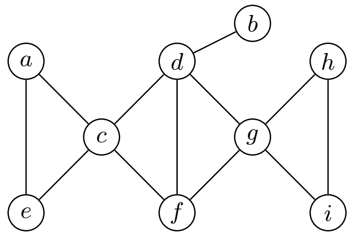
Otrzymujemy zatem następujące drzewo spinające $T = (V, E')$, gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $E' = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$.

ZADANIE 5.1. Skonstruuj drzewa spinające dla podanych niżej grafów.

a)



b)



PRZESZUKIWANIE GRAFÓW W GŁĄB I WSZERZ — DRZEWA DFS I BFS

Algorytm przeszukiwania grafu w głąb

Niech $G = (V, E)$ będzie danym grafem spójnym, a $v \in V$ wierzchołkiem początkowym.

1. Odwiedzamy wierzchołek v (zaznaczamy go jako odwiedzony) i wkładamy go na STOS.
2. Dopóki STOS nie jest pusty, powtarzamy:

   Jeżeli v jest wierzchołkiem na wierzchu STOSU, to sprawdzamy, czy istnieje wierzchołek sąsiedni z v, który nie był jeszcze odwiedzony.

   2.1 Jeżeli u jest takim wierzchołkiem, to odwiedzamy u (zaznaczamy jako odwiedzony) i wkładamy go na STOS.

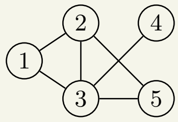
   2.2 Jeżeli takiego u nie ma, to zdejmujemy v ze STOSU.

Uwaga 1. Jeśli jest kilka wierzchołków do wyboru, to wybieramy zgodnie z ustalonym porządkiem.

Uwaga 2. Wierzchołki na STOSIE w dowolnym kroku tworzą ścieżkę od korzenia do wierzchołka aktualnie odwiedzanego.

Uwaga 3. Jeśli w powyższej procedurze w kroku 2.1, w którym odwiedzamy wierzchołek u, do początkowo pustego zbioru E' krawędzi dodawać będziemy krawędź $\{v, u\}$, to otrzymamy drzewo spinające DFS (ang. *depth-first search*).

Przeszukaj poniższy graf $G = (V, E)$ w głąb poczynając od wierzchołka o etykiecie 3 i skonstruuj odpowiednie drzewo spinające DFS. ◀ **PRZYKŁAD**



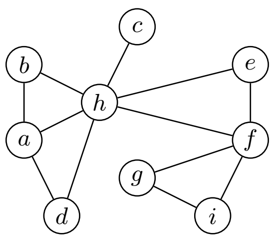
Przebieg algorytmu jest następujący.

rozpatrywany wierzchołek	odwiedzany wierzchołek	STOS	zbiór krawędzi drzewa DFS
–	3	3	$\emptyset$
3	1	3,1	$\{\{1,3\}\}$
1	2	3,1,2	$\{\{1,3\},\{1,2\}\}$
2	5	3,1,2,5	$\{\{1,3\},\{1,2\},\{2,5\}\}$
5	–	3,1,2	$\{\{1,3\},\{1,2\},\{2,5\}\}$
2	–	3,1	$\{\{1,3\},\{1,2\},\{2,5\}\}$
1	–	3	$\{\{1,3\},\{1,2\},\{2,5\}\}$
3	4	3,4	$\{\{1,3\},\{1,2\},\{2,5\},\{3,4\}\}$
4	–	3	$\{\{1,3\},\{1,2\},\{2,5\},\{3,4\}\}$
3	–	$\emptyset$	$\{\{1,3\},\{1,2\},\{2,5\},\{3,4\}\}$

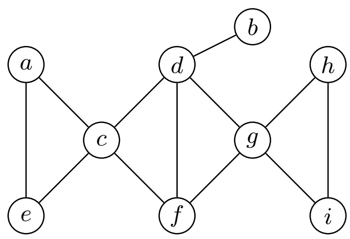
Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności $3, 1, 2, 5, 4$ i otrzymaliśmy drzewo spinające DFS $T = (V, E')$, gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $E' = \{\{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{1, 4\}\}$.

ZADANIE 5.2. Zastosuj algorytm przeszukiwania w głąb do poniższych grafów i skonstruuj odpowiednie drzewa DFS; jako wierzchołek początkowy przyjmij wierzchołek o etykiecie a.

a)



b)



Algorytm przeszukiwania grafu wszerz

Niech $G = (V, E)$ będzie danym grafem spójnym, a $v \in V$ wierzchołkiem początkowym.

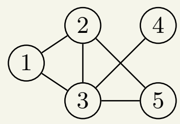
1. Odwiedzamy wierzchołek v (zaznaczamy go jako odwiedzony) i wstawiamy go do KOLEJKI.
2. Dopóki KOLEJKA nie jest pusta, powtarzamy:
   2.1 Bierzemy wierzchołek v z początku KOLEJKI.
   2.2 Odwiedzamy wszystkie do tej pory jeszcze nie odwiedzone wierzchołki sąsiednie z v (zaznaczamy je jako odwiedzone) i wstawiamy je na koniec KOLEJKI.

Uwaga 1. Wierzchołki wstawiamy do KOLEJKI np. w kolejności uporządkowania etykiet.

Uwaga 2. Wierzchołki przeszukiwane są w kolejności leżących najbliżej korzenia.

Uwaga 3. Jeśli w powyższej procedurze w kroku 2.2, w którym odwiedzamy wszystkie nieodwiedzone jeszcze wierzchołki sąsiednie do v, do początkowo pustego zbioru E' krawędzi dodawać będziemy odpowiednie krawędzie $\{v, u\}$, to otrzymamy drzewo spinające BFS (ang. *breath-first search*).

Przeszukaj poniższy graf $G = (V, E)$ wszerz poczynając od wierzchołka o etykiecie 5 i skonstruuj odpowiednie drzewo spinające BFS. ◀ **PRZYKŁAD**



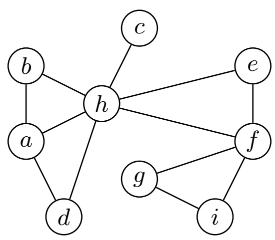
Przebieg algorytmu jest następujący.

rozpatrywany wierzchołek	odwiedzane wierzchołki	KOLEJKA	zbiór krawędzi drzewa BFS
–	5	5	$\emptyset$
5	2,3	2,3	$\{\{2,5\},\{3,5\}\}$
2	1	3,1	$\{\{2,5\},\{3,5\},\{1,2\}\}$
3	4	1,4	$\{\{2,5\},\{3,5\},\{1,2\},\{3,4\}\}$
1	–	4	$\{\{2,5\},\{3,5\},\{1,2\},\{3,4\}\}$
4	–	$\emptyset$	$\{\{2,5\},\{3,5\},\{1,2\},\{3,4\}\}$

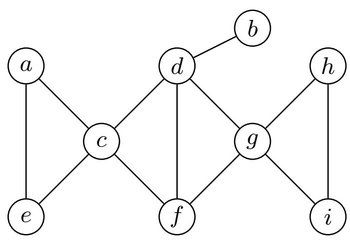
Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności $5, 2, 3, 1, 4$ i otrzymaliśmy drzewo spinające BFS $T = (V, E')$, gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $E' = \{\{2, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.

ZADANIE 5.3. Zastosuj algorytm przeszukiwania wszerz do poniższych grafów i skonstruuj odpowiednie drzewa BFS; jako wierzchołek początkowy przyjmij wierzchołek o etykiecie a.

a)



b)



GRAFY EULEROWSKIE I HAMILTONOWSKIE

Niech dany będzie spójny multigraf $G = (V, E)$. Mówimy, że G jest *eulerowski*, jeśli istnieje łańcuch zamknięty zawierający każdą krawędź multigrafu; taki łańcuch nazywamy *cyklem Eulera*. Analogicznie, mówimy, że G jest *półeulerowski*, jeśli istnieje łańcuch zawierający każdą krawędź grafu; taki łańcuch nazywamy łańcuchem Eulera.

Twierdzenie 5.3

a) *Spójny multigraf $G = (V, E)$ jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego wierzchołek jest parzystego stopnia.*

b) *Spójny multigraf G jest półeulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy posiada co najwyżej dwa wierzchołki nieparzystego stopnia, z czego jeden z nich jest początkiem łańcucha Eulera, a drugi jego końcem.*

Niech dany będzie spójny (multi)graf $G = (V, E)$. Mówimy, że G jest *hamiltonowski*, jeśli istnieje cykl, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz; taki cykl nazywamy cyklem *Hamiltona*. Analogicznie, mówimy, że G jest *półhamiltonowski*, jeśli zawiera ścieżkę przechodzącą przez każdy wierzchołek dokładnie raz; taką ścieżkę nazywamy ścieżką *Hamiltona*.

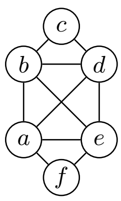
Algorytm znajdowania cyklu Eulera (o ile taki cykl istnieje)

Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym multigrafem o wszystkich wierzchołkach parzystego stopnia.

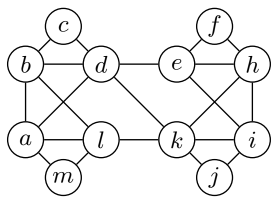
1. Zaczynamy od dowolnego wierzchołka $v \in V$.
2. Powtarzamy, aż przejdziemy wszystkie krawędzie:
   2.1 Jeżeli z bieżącego wierzchołka x odchodzi tylko jedna krawędź, to przechodzimy wzdłuż tej krawędzi do następnego wierzchołka i usuwamy tą krawędź wraz z wierzchołkiem x.
   2.2 W przeciwnym wypadku, jeżeli z x odchodzi więcej krawędzi, to wybieramy tą krawędź, której usunięcie nie rozspójnia nam grafu, i przechodzimy wzdłuż tej krawędzi do następnego wierzchołka, a następnie usuwamy tą krawędź z grafu.

ZADANIE 5.4. Czy w danych niżej grafach istnieje cykl/łańcuch Eulera? Jeśli tak, wyznacz go.

a)



b)

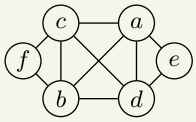


Algorytm z nawrotami znajdowania drogi Hamiltona (o ile taka droga istnieje)

Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem i pewnym wyróżnionym wierzchołkiem $v \in V$.

1. Wkładamy v na STOS.
2. Powtarzamy:
   2.1 Jeżeli u jest wierzchołkiem na wierzchu stosu, to szukamy wierzchołka w o najniższym możliwym numerze (najwcześniejszego przy ustalonym porządku wierzchołków grafu) sąsiedniego z u i nie występującego na STOSIE, jednakże przy założeniu, że wierzchołek w jest „większy” od wierzchołka zdjętego krok wcześniej ze STOSU (o ile był taki).
   2.2 Jeśli takie w znajdziemy, to wkładmny je na stos — jeżeli dotychczasowy STOS tworzy drogę Hamiltona, to KONIEC.
   2.3 Jeżeli takiego w nie znaleźliśmy, to zdejmujemy u ze stosu.

Wypisz 25 kolejnych kroków działania algorytmu z nawrotami znajdowania drogi Hamiltona dla poniższego grafu przy założeniu, że wierzchołkiem początkowym jest wierzchołek a. ◀ **PRZYKŁAD**



Działanie algorytmu z nawrotami ilustruje poniższa tabela.

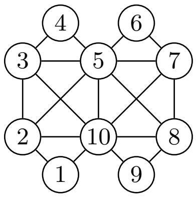
	aktualny wierzchołek	STOS
1	a	a
2	b	a, b
3	c	a, b, c
4	d	a, b, c, d
5	e	a, b, c, d, e
6	d	a, b, c, d
7	c	a, b, c
8	f	a, b, c, f
9	c	a, b, c
10	b	a, b
11	d	a, b, d
12	c	a, b, d, c
13	f	a, b, d, c, f
14	c	a, b, d, c
15	d	a, b, d
16	e	a, b, d, e
17	d	a, b, d
18	b	a, b
19	f	a, b, f
20	c	a, b, f, c
21	d	a, b, f, c, d
22	e	$a, b, f, c, d, e \vdash$ KONIEC

A zatem algorytm z nawrotami zwróci drogę Hamiltona postaci a, b, f, c, d, e.

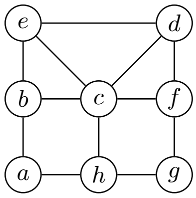
ZADANIE 5.5. Wypisz 15 kolejnych kroków działania algorytmu z nawrotami znajdowania drogi Hamiltona dla poniższych grafów przy założeniu, że wierzchołkiem początkowym jest:

a) wierzchołek o etykiecie 5;
b) wierzchołek o etykiecie a.

a)



b)



Problem stwierdzenia, czy w danym grafie $G = (V, E)$ istnieje droga Hamiltona, jest problemem NP-zupełnym, tzn. nie istnieje deterministyczny algorytm rozstrzygający ten problem w czasie wielomianowym, o ile P≠NP. Zauważmy, że nie wyklucza to istnienia niewielomianowego algorytmu i właśnie przykładem takiego algorytmu jest omawiany wyżej algorytm z nawrotami.

ZADANIE 5.6.* Wskaż graf o n wierzchołkach, dla którego czas działania powyższego algorytmu z nawrotami jest niewielomianowy.

Wskazówka. Aby oszacować z dołu czas działania dla danego grafu, można tylko np. oszacować, ile w sumie razy wkładaliśmy jakikolwiek z wierzchołków na stos.

GRAFY WAŻONE — MINIMALNE DRZEWO SPINAJĄCE

Niech $G = (V, E, w)$ będzie *grafem ważonym*, tzn. każdej krawędzi $e \in E$ przyporządkowana jest pewna waga $w(e)$. Problem *Minimalnego Drzewa Spinającego* [MDS] definiujemy jako znalezienie drzewa spinającego $T = (V, E')$ w grafie G o minimalnej sumie ważonej

$$\sum_{e \in E'} w(e).$$

Minimalne drzewo spinające znajduje zastosowanie np. przy wyznaczeniu „najtańszej" sieci dróg, torów kolejowych, itp., która łączy danych n miast.

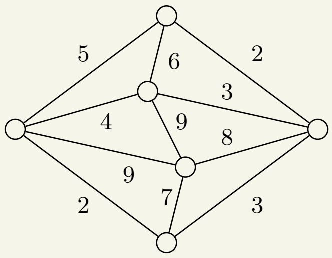
Algorytm konstrukcji minimalnego drzewa spinającego (algorytm Kruskala, 1956)

Niech $G = (V, E, w)$ będzie spójnym grafem ważonym z funkcją wagi $w\colon E \to R$.

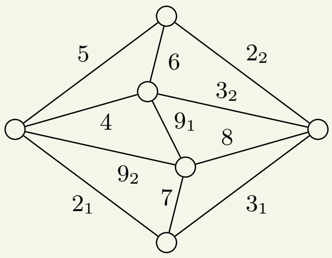
1. $T := (V, E')$, gdzie $E' := \emptyset$.
2. Posortuj krawędzie grafu G w kolejności niemalejących wag.
3. Dla każdej krawędzi $e \in E$:

   jeśli dodanie rozważanej krawędzi e nie utworzy cyklu w T, wówczas $E' := E' \cup \{e\}$.

Znajdź minimalne drzewo spinające dla podanego niżej grafu. ◀ **PRZYKŁAD**



Posortowany ciąg krawędzi wygląda następująco: $2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9$. Jako że niektóre wagi krawędzi powtarzają się, należy je rozróżnić np. dodając odpowiedni indeks dolny — otrzymujemy ciąg $2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 4, 5, 6, 7, 8, 9_1, 9_2$ — patrz poniższy rysunek.

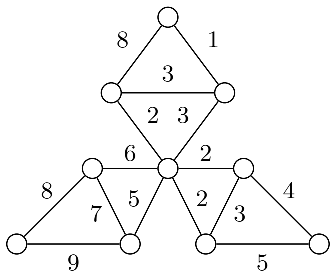


Dla ułatwienia ilustracji działania algorytmu utożsamiamy wagi krawędzi z samymi krawędziami. Przebieg algorytmu jest następujący.

rozpatrywana krawędź	Czy powstanie cykl?	krawędzie drzewa
2_1	Nie	2_1
2_2	Nie	$2_1, 2_2$
3_1	Nie	$2_1, 2_2, 3_1$
3_2	Nie	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2$
4	Tak	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2$
5	Tak	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2$
6	Tak	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2$
7	Nie	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 7$
8	Tak	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 7$
9_1	Tak	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 7$
9_2	Tak	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 7$

Zauważmy, że skoro graf ma 6 wierzchołków, a z definicji drzewo spinające ma 5 krawędzi, wykonywanie algorytmu można było już przerwać, gdy dodaliśmy 5-tą krawędź o wadze 7.

ZADANIE 5.7. Znajdź minimalne drzewo spinające dla podanego niżej grafu.



ZADANIE 5.8. Poniższa tabela przedstawia odległości pomiędzy 5 miastami A,B,C,D i E. Chcemy tak połączyć miasta, aby z każdego miasta można było dostać się do innego, niekoniecznie drogą bezpośrednią, jednakże chcemy wydać jak najmniej pieniędzy. Jaki jest minimalny koszt budowy takiej sieci dróg, jeżeli 1 km drogi kosztuje 1000000 PLN?

	A	B	C	D	E
A	–	2	6	3	7
B	2	–	6	4	8
C	6	6	–	5	8
D	3	4	5	–	9
E	7	8	8	9	–

GRAFY WAŻONE — NAJKRÓTSZE DROGI W GRAFIE

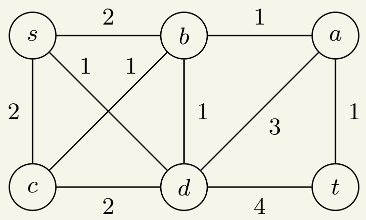
Rozważmy graf ważony $G = (V, E, w)$ z dodatnią funkcją kosztu, tj. $w \colon E \to \mathbb{R}^+$. Dla prostoty zakładamy, że jeśli $e \notin E$, to $w(e) = \infty$. Dla każdej drogi $v_0 v_1 \ldots v_k$ w grafie zdefiniujmy jej *długość* jako sumę długości krawędzi, czyli $\sum_{i=1}^{k}(w(\{v_{i-1}, v_i\}))$. Jeżeli $k = 0$, wówczas droga składa się z pojedynczego wierzchołka i przyjmujemy wtedy, że jej długość wynosi 0.

Algorytm wyznaczania długości najkrótszych dróg (algorytm Dijkstry)

Niech $s \in V$ będzie ustalonym wierzchołkiem ważonego grafu $G = (V, E, w)$ o dodatniej funkcji kosztu. Algorytm na wyjściu zwraca macierz D, gdzie dla wierzchołka $v \in V$ wartość $D[v]$ jest długością najkrótszej ścieżki z s do v.

1. $D[s] := 0$.
2. $\bar{V} := V \setminus \{s\}$.
3. Dla każdego $v \in \bar{V}$ podstaw $D[v] := w(\{s, v\})$.
4. Dopóki $\bar{V} \neq \emptyset$, wykonuj:
   - 4.1 Wybierz wierzchołek $u \in \bar{V}$ taki, że $D[u] = \min_{x \in \bar{V}} D[x]$.
   - 4.2 $\bar{V} := \bar{V} \setminus \{u\}$.
   - 4.3 Dla każdego $v \in \bar{V}$ podstaw $D[v] := \min(D[v], D[u] + w(\{u, v\}))$.

Wyznacz drzewo najkrótszych dróg w podanym niżej ważonym grafie $G = (V, E, w)$ ◀ **PRZYKŁAD** dla wierzchołka początkowego s.



Poniższa tabela ilustruje jak w kolejnych iteracjach zewnętrznej pętli algorytmu Dijkstry wybierany jest wierzchołek u oraz jak przedstawia się zbiór $\bar{V}$ oraz macierz D.

Iteracja	u	$\bar{V}$	$D[s]$	$D[a]$	$D[b]$	$D[c]$	$D[d]$	$D[t]$
0		$\{a,b,c,d,t\}$	0	∞	2	2	$\underline{1}$	∞
1	d	$\{a,b,c,t\}$	0	4	$\underline{2}$	2	1	5
2	b	$\{a,c,t\}$	0	3	2	$\underline{2}$	1	5
3	c	$\{a,t\}$	0	$\underline{3}$	2	2	1	5
4	a	$\{t\}$	0	3	2	2	1	$\underline{4}$
5	t	$\emptyset$	0	3	2	2	1	4

Zauważmy, że algorytm Dijkstry wyznacza tylko macierz najkrótszych odległości, nie zapamiętując w czasie wykonywania żadnych dodatkowych informacji. Aby wyznaczyć najkrótszą drogę z wierzchołka s do wybranego wierzchołka v, można albo zmodyfikować algorytm tak, aby za każdym razem, kiedy usuwamy wierzchołek u ze zbioru $\bar{V}$, dodawał on odpowiednią krawędź do konstruowanego drzewa najkrótszych dróg, albo też skorzystać bezpośrednio z wyznaczonej macierzy D. W tym drugim podejściu najkrótszą drogę wyznaczamy od końca — najpierw szukamy przedostatniego wierzchołka tej drogi, potem trzeciego od końca i tak dalej.

- Przedostatni wierzchołek x najkrótszej drogi spełnia równość $D[t] = D[x] + w(\{x, t\})$. W naszym przykładzie (tylko) wierzchołek $x = a$ spełnia tą równość:

$$4 = D[t] = D[a] + w(\{a, t\}) = 3 + 1.$$

  A zatem przedostatnim wierzchołkiem jest wierzchołek a.

- Trzeci wierzchołek y od końca najkrótszej drogi z s do t — a przedostatni wierzchołek najkrótszej drogi z s do a — spełnia równość $D[a] = D[y] + w(\{y, a\})$. W naszym przykładzie (tylko) wierzchołek $y = b$ spełnia tą równość:

$$3 = D[a] = D[b] + w(\{b, a\}) = 2 + 1.$$

  A zatem pozostaje na znaleźć najkrótszą drogę z s do b.

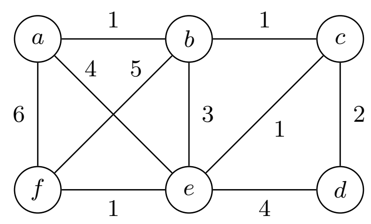
- Czwarty wierzchołek z od końca najkrótszej drogi z s do t — a przedostatni wierzchołek najkrótszej drogi z s do b — spełnia równość $D[b] = D[z] + w(\{z, b\})$. W naszym przykładzie (tylko) wierzchołek $y = s$ spełnia tą równość:

$$2 = D[b] = D[s] + w(\{s, b\}) = 0 + 2.$$

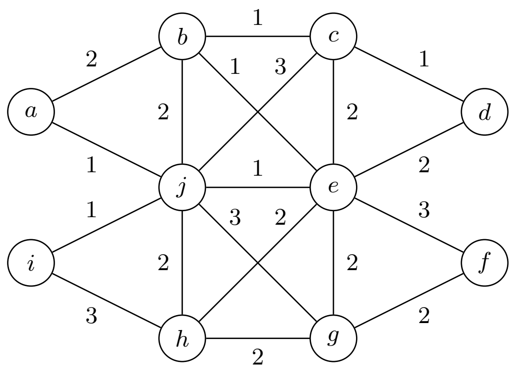
W konsekwencji najkrótsza droga z s do t długości 4 wiedzie przez wierzchołki s, b, a i t.

ZADANIE 5.9. W poniższych grafach znajdź długość najkrótszej drogi z wierzchołka a do f, a następnie wyznacz tę drogę.

a)



b)



ROZSYŁANIE WIADOMOŚCI W HIPERKOSTCE

Przypomnijmy, że graf prosty, którego wierzchołkami są wszystkie k-elementowe ciągi binarne i w którym krawędzie łączą tylko te spośród ciągów, które różnią się dokładnie jednym elementem, nazywamy *k-kostką* (*hiperkostką*) i oznaczamy H_k. Graf ten można zdefiniować też rekurencyjnie. H_1 składa się z dwóch wierzchołków połączonych krawędzią. Natomiast hiperkostkę H_k wymiaru k budujemy z dwóch kostek H_{k-1} wymiaru $k-1$. W pierwszej kostce etykietujemy wierzchołki dopisując `0` na początku nazwy każdego wierzchołka, natomiast w drugiej kostce etykietujemy wierzchołki dopisując `1` na początek. Następnie łączymy krawędziami odpowiadające sobie wierzchołki z obu kopii, czyli wierzchołek `0x` jest połączony z wierzchołkiem `1x` dla każdego `x` z $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^{k-1}$.

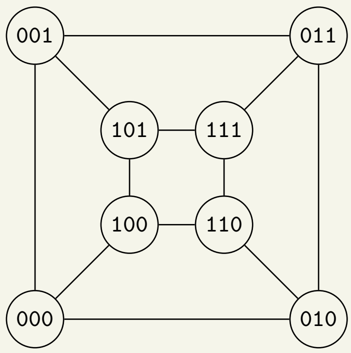
Protokół rozsyłania wiadomości w hiperkostce H_k.

1. Na początku wiadomość otrzymuje wierzchołek $\mathtt{0}^k$.
2. Dla każdego i od 1 do k, wykonuj:
   2.1 Każdy wierzchołek o etykiecie $x < 2^{i-1}$
   przekazuje wiadomość do wierzchołka o etykiecie $x + 2^{i-1}$.

Protokół zbierania wiadomości w hiperkostce H_k.

1. Dla każdego i od 1 do k, wykonuj:
   1.1 Każdy wierzchołek o etykiecie $x = \mathtt{0}^{i-1}\mathtt{1}\sigma$, gdzie $\sigma \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^{k-i}$,
   przekazuje zebrane dane do wierzchołka o etykiecie $\mathtt{0}^{i-1}\mathtt{0}\sigma$.

Prześledź działanie algorytmu rozsyłania wiadomości na hiperkostce H_3. ◀ **PRZYKŁAD**



Hiperkostka H_3.

- ▶ W pierwszej iteracji, dla $i = 1$, wierzchołek `000` przekazuje wiadomość do `001`.
- ▶ W drugiej iteracji, dla $i = 2$, wierzchołek `000` przekazuje wiadomość do `010`, a wierzchołek `001` do `011`.
- ▶ W trzeciej iteracji, dla $i = 3$, wierzchołek `000` przekazuje wiadomość do `100`, wierzchołek `001` do `101`, wierzchołek `010` do `110`, a wierzchołek `011` do `111`.

Prześledź działanie powyższego algorytmu na hiperkostce H_3. ◀ **PRZYKŁAD**

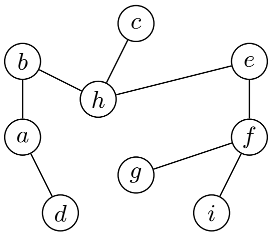
- ▶ W pierwszej iteracji, dla $i = 1$, wierzchołek `100` przekazuje dane do `000`, wierzchołek `101` do `001`, wierzchołek `110` do `010`, a wierzchołek `111` do `011`.
- ▶ W drugiej iteracji, dla $i = 2$, wierzchołek `010` przekazuje wszystkie dane (swoje i otrzymane) do `000`, a wierzchołek `011` do `001`.
- ▶ W trzeciej iteracji, dla $i = 3$, wierzchołek `001` przekazuje zebrane wiadomości do `000`.

ZADANIE 5.10. Prześledź działanie algorytmów rozsyłania oraz zbierania wiadomości na hiperkostce H_4.

Odpowiedzi do zadań

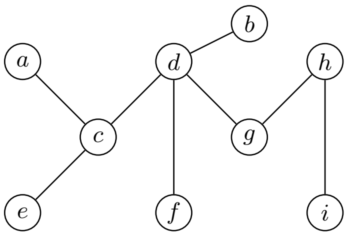
5.1.

a) Np.:



Drzewo spinające $T = (V, E)$, gdzie
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ oraz
$E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}$.

b) Np.:



Drzewo spinające $T = (V, E)$, gdzie
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ oraz
$E = \{\{a, c\}, \{b, d\}, \{c, e\}, \{c, d\}, \{d, f\}, \{d, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$.

5.2.

a)

rozpatrywany	odwiedzany	STOS	zbiór krawędzi drzewa DFS
–	a	a	$\emptyset$
a	b	a, b	$\{\{a, b\}\}$
b	h	a, b, h	$\{\{a, b\}, \{b, h\}\}$
h	c	a, b, h, c	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}\}$
c	–	a, b, h	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}\}$
h	d	a, b, h, d	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}\}$
d	–	a, b, h	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}\}$
h	e	a, b, h, e	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}$
e	f	a, b, h, e, f	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}\}$
f	g	a, b, h, e, f, g	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}, \{f, g\}\}$
g	i	a, b, h, e, f, g, i	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$
i	–	a, b, h, e, f, g	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$
g	–	a, b, h, e, f	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$
g	–	a, b, h, e	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$
e	–	a, b, h	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$
h	–	a, b	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$
b	–	a	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$
a	–	$\emptyset$	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$

Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności $a, b, h, c, d, e, f, g, i$ i otrzymaliśmy drzewo spinające DFS $T = (V, E')$, gdzie

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ oraz

$E' = \{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$.

b)

rozpatrywany	odwiedzany	STOS	zbiór krawędzi drzewa DFS
–	a	a	$\emptyset$
a	c	a, c	$\{\{a, c\}\}$
c	d	a, c, d	$\{\{a, c\}, \{c, d\}\}$
d	b	a, c, d, b	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}\}$
b	–	a, c, d	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}\}$
d	f	a, c, d, f	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}\}$
f	g	a, c, d, f, g	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}\}$
g	h	a, c, d, f, g, h	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}\}$
h	i	a, c, d, f, g, h, i	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$
i	–	a, c, d, f, g, h	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$
h	–	a, c, d, f, g	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$
g	–	a, c, d, f	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$
f	–	a, c, d	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$
d	–	a, c	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$
c	e	a, c, e	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}$
e	–	a, c	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}$
c	–	a	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}$
a	–	$\emptyset$	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}$

Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności $a, c, d, b, f, g, h, i, e$ i otrzymaliśmy drzewo spinające DFS $T = (V, E')$, gdzie

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ oraz

$E' = \{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}$.

5.3.

a)

rozpatrywany	odwiedzany	KOLEJKA	zbiór krawędzi drzewa BFS
–	a	a	$\emptyset$
a	b, d, h	b, d, h	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}\}$
b	–	d, h	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}\}$
d	–	h	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}\}$
h	c, e, f	c, e, f	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}\}$
c	–	e, f	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}\}$
e	–	f	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}\}$
f	g, i	g, i	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}$
g	–	i	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}$
i	–	$\emptyset$	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}$

Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności $a, b, d, h, c, e, f, g, i$ i otrzymaliśmy drzewo spinające BFS $T = (V, E')$, gdzie

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ oraz

$E' = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}$.

b)

rozpatrywany	odwiedzany	KOLEJKA	zbiór krawędzi drzewa BFS
a	a	a	$\emptyset$
a	c, e	c, e	$\{\{a, c\}, \{a, e\}\}$
c	d, f	e, d, f	$\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}\}$
e	—	d, f	$\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}\}$
d	b, g	f, b, g	$\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{d, g\}\}$
f	—	b, g	$\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{d, g\}\}$
b	—	g	$\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{d, g\}\}$
g	h, i	h, i	$\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{d, g\}, \{h, g\}, \{h, i\}\}$
h	—	i	$\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{d, g\}, \{h, g\}, \{h, i\}\}$
i	—	—	$\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{d, g\}, \{h, g\}, \{h, i\}\}$

Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności $a, c, e, d, f, b, g, h, i$ i otrzymaliśmy drzewo spinające BFS $T = (V, E')$, gdzie

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ oraz

$E' = \{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{d, g\}, \{h, g\}, \{h, i\}\}$

5.4.

a) Wszystkie stopnie w grafie G są parzyste, zatem w grafie istnieje cykl Eulera. Zaczynamy np. od wierzchołka a. Kolejno wybierane/trawersowane krawędzie to np.:

$$\{a,d\},\{d,e\},\{e,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,b\},\{b,a\},\{a,f\},\{f,e\},\{e,a\}.$$

Uwaga. Np. po wyborze krawędzi $\{e,b\}$ nie możemy wybrać krawędzi $\{a,b\}$, gdyż jest to most, a są jeszcze inne krawędzie incydentne z b.

b) W grafie istnieją dwa wierzchołki o nieparzystych stopniach (d i k), zatem w grafie istnieje łańcuch Eulera o początku i końcu w wierzchołkach d i k. Zaczynamy np. od wierzchołka d. Kolejno trawersowane krawędzie to np.:

$$\{d,a\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,b\},\{b,l\},\{l,a\},\{a,m\},\{m,l\},$$

$$\{l,k\},\{k,j\},\{j,i\},\{i,k\},\{k,h\},\{h,e\},\{e,f\},\{f,h\},\{h,i\},\{i,e\},\{e,d\},\{d,k\}.$$

Uwaga. Np. po wyborze krawędzi $\{b,l\}$ nie możemy wybrać krawędzi $\{l,k\}$, gdyż jest to most, a są jeszcze inne krawędzie incydentne z b; analogicznie, po wyborze krawędzi $\{h,e\}$ nie możemy wybrać krawędzi $\{d,e\}$, gdyż jest to most, a są jeszcze inne krawędzie incydentne z e.

5.5.

a) Startując z wierzchołka 5:

	aktualny wierzchołek	STOS
1	5	5
2	2	5, 2
3	1	5, 2, 1
4	10	5, 2, 1, 10
5	3	5, 2, 1, 10, 3
6	4	5, 2, 1, 10, 3, 4
7	3	5, 2, 1, 10, 3
8	10	5, 2, 1, 10
9	7	5, 2, 1, 10, 7
10	6	5, 2, 1, 10, 7, 6
11	7	5, 2, 1, 10, 7
12	8	5, 2, 1, 10, 7, 8
13	9	5, 2, 1, 10, 7, 8, 9
14	8	5, 2, 1, 10, 7, 8
15	7	5, 2, 1, 10, 7
...	...	...

Algorytm z nawrotami zwróci drogę Hamiltona postaci $5, 4, 3, 2, 1, 10, 9, 8, 7, 6$.

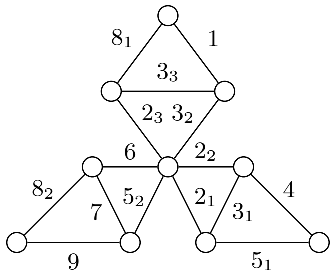
b) Startując z wierzchołka a:

	aktualny wierzchołek	STOS
1	a	a
2	b	a, b
3	c	a, b, c
4	d	a, b, c, d
5	e	a, b, c, d, e
6	d	a, b, c, d
7	f	a, b, c, d, f
8	g	a, b, c, d, f, g
9	h	a, b, c, d, f, g, h
10	g	a, b, c, d, f, g
11	f	a, b, c, d, f
12	d	a, b, c, d
13	c	a, b, c
14	e	a, b, c, e
15	d	a, b, c, e, d
...	...	...

Algorytm z nawrotami zwróci drogę Hamiltona postaci a, b, c, e, d, f, g, h.

5.6. Np. graf pełny K_{n-1}, gdzie wierzchołki mają etykiety $1, 2, \ldots, n-1$, z dołączonym n-tym wierzchołkiem o etykiecie n do wierzchołka o etykiecie 1 oraz 2. Czas działania: musimy na pewno przeglądnąć wszystkie permutacje zbioru $\{2, \ldots, n-1\}$ zanim algorytm rozpatrzy kolejność $1, n, \ldots$ i chwilę potem znajdzie drogę Hamiltona.

5.7.



Posortowany ciąg krawędzi: $1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2, 3_3, 4, 5_1, 5_2, 6, 7, 8_1, 8_1, 9$.
Dla ułatwienia ilustracji działania algorytmu utożsamiamy wagi krawędzi z samymi krawędziami. Przebieg algorytmu jest następujący.

rozpatrywana krawędź	cykl?	krawędzie drzewa
1	Nie	1
2_1	Nie	$1, 2_1$
2_2	Nie	$1, 2_1, 2_2$
2_3	Nie	$1, 2_1, 2_2, 2_3$
3_1	Tak	$1, 2_1, 2_2, 2_3$
3_2	Nie	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2$
3_3	Tak	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2$
4	Nie	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4$
5_1	Tak	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4$
5_2	Nie	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4, 5_2$
6	Nie	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4, 5_2, 6$
7	Tak	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4, 5_2, 6$
8_1	Tak	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4, 5_2, 6$
8_2	Nie	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4, 5_2, 6, 8$
9	Tak	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4, 5_2, 6, 8$

5.8. Zauważmy, że rozwiązanie problemu równoważne jest minimalnemu drzewu spinającemu w ważonym grafie pełnym $G = (V, E, w)$, w którym wierzchołki odpowiadają miastom, a wagi krawędzi odległościom pomiędzy tymi miastami. Aby wyznaczyć to drzewo korzystamy z algorytmu Kruskala — koszt otrzymanego rozwiązania/drzewa wynosi 17000000 PLN.

5.9.

a)

Iteracja	u	V	$D[a]$	$D[b]$	$D[c]$	$D[d]$	$D[e]$	$D[f]$
0		$\{b, c, d, e, f\}$	0	$\underline{1}$	∞	∞	4	6
1	b	$\{c, d, e, f\}$	0	1	$\underline{2}$	∞	4	6
2	c	$\{d, e, f\}$	0	1	2	4	$\underline{3}$	6
3	e	$\{d, f\}$	0	1	2	$\underline{4}$	3	4
4	d	$\{f\}$	0	1	2	4	3	$\underline{4}$
5	f	$\emptyset$	0	1	2	4	3	4

A zatem najkrótsza ścieżka z a do f ma długość $D[f] = 4$. Wyznaczenie tej ścieżki:

$$\begin{aligned} 4 \;=\; D[f] &= D[e] + 1 = (D[c] + 1) + 1 = ((D[b] + 1) + 1) + 1 = \\ &= (((D[a] + 1) + 1) + 1) + 1 = (((0 + 1) + 1) + 1) + 1 = 4. \end{aligned}$$

Tym samym ścieżka ta wiedzie przez wierzchołki a, b, c, e, f.

b)

	u	$\bar{V}$	$D[a]$	$D[b]$	$D[c]$	$D[d]$	$D[e]$	$D[f]$	$D[g]$	$D[h]$	$D[i]$	$D[j]$
0		$\{b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$	0	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$\underline{1}$
1	j	$\{b, c, d, e, f, g, h, i\}$	0	$\underline{2}$	4	∞	2	∞	4	3	2	1
2	b	$\{c, d, e, f, g, h, i\}$	0	2	3	∞	$\underline{2}$	∞	4	3	2	1
3	e	$\{c, d, f, g, h, i\}$	0	2	3	4	2	5	4	3	$\underline{2}$	1
4	i	$\{c, d, f, g, h\}$	0	2	$\underline{3}$	4	2	5	4	3	2	1
5	c	$\{d, f, g, h\}$	0	2	3	4	2	5	4	$\underline{3}$	2	1
6	h	$\{d, f, g\}$	0	2	3	4	2	5	4	$\underline{3}$	2	1
7	d	$\{f, g\}$	0	2	3	$\underline{4}$	2	5	4	3	2	1
8	g	$\{g\}$	0	2	3	$\underline{4}$	2	5	4	3	2	1
9	f	$\emptyset$	0	2	3	4	2	$\underline{5}$	4	3	2	1

A zatem najkrótsza ścieżka z a do f ma długość $D[f] = 5$. Wyznaczenie tej ścieżki:

$$\begin{aligned} 5 \;=\; D[f] &= D[e] + 3 = (D[j] + 1) + 3 = ((D[a] + 1) + 1) + 3 = \\ &= (((0 + 1) + 1) + 1) + 1 = 5. \end{aligned}$$

Tym samym ścieżka ta wiedzie przez wierzchołki a, j, e, f.

5.10. Rozsyłanie:

1. `0000` $\longrightarrow$ `0001`
2. `0000` $\longrightarrow$ `0010`
   `0001` $\longrightarrow$ `0011`
3. `0000` $\longrightarrow$ `0100`
   `0001` $\longrightarrow$ `0101`
   `0010` $\longrightarrow$ `0110`
   `0011` $\longrightarrow$ `0111`
4. `0000` $\longrightarrow$ `1000`
   `0001` $\longrightarrow$ `1001`
   `0010` $\longrightarrow$ `1010`
   `0011` $\longrightarrow$ `1011`
   `0100` $\longrightarrow$ `1100`
   `0101` $\longrightarrow$ `1101`
   `0110` $\longrightarrow$ `1110`
   `0111` $\longrightarrow$ `1111`

Zbieranie:

1. `1000` $\longrightarrow$ `0000`
   `1001` $\longrightarrow$ `0001`
   `1010` $\longrightarrow$ `0010`
   `1011` $\longrightarrow$ `0011`
   `1100` $\longrightarrow$ `0100`
   `1101` $\longrightarrow$ `0101`
   `1110` $\longrightarrow$ `0110`
   `1111` $\longrightarrow$ `0111`
2. `0100` $\longrightarrow$ `0000`
   `0101` $\longrightarrow$ `0001`
   `0110` $\longrightarrow$ `0010`
   `0111` $\longrightarrow$ `0011`
3. `0010` $\longrightarrow$ `0000`
   `0011` $\longrightarrow$ `0001`
4. `0001` $\longrightarrow$ `0000`

Materiały źródłowe/Literatura

1. N. Briggs: Discrete Mathematics, Oxford University Press (2003)

2. V. Bryant: Aspekty kombinatoryki, WNT (2007)

3. R. Diestel: Graph theory, Springer (2000)

4. T. Gerstenkorn, T. Śródka
   Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa: teoria, ćwiczenia i zbiór zadań
   Państwowe Wydawnictwo Naukowe (1967)

5. N. Hartsfield, G. Ringel: Pearls in Graph Theory: a Comprehensive Introduction
   Dover Publications (2003)

6. R. Janczewski: Zbiór zadań z teorii grafów, Politechnika Gdańska (2003)

7. R. Janczewski: Materiały do wykładu z teorii grafów i sieci
   Politechnika Gdańska (2003)

8. W. Kordecki, A. Łyczkowska-Hanćkowiak
   Matematyka dyskretna dla informatyków, Helion (2018)

9. J. Jaworski, Z. Palka, J. Szymański
   Matematyka dyskretna dla informatyków, cz. I: Elementy kombinatoryki
   Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza (2011)

10. E. Kowalik: Kombinatoryka, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne (1993)

11. L. Lovasz, J. Pelikan, K. Vesztergombi
    Discrete Mathematics: Elementary and Beyond, Springer (2003)

12. J. Matousek, J. Nesetril: Invitation to Discrete Mathematics
    Clarendon Press (1998)

13. T. Szabó, Y. Okamoto, `http://www.ti.inf.ethz.ch/ew/courses/GT03/`

14. A. Szepietowski: Matematyka dyskretna
    Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego (2004)

15. N. A. Vilenkin: Kombinatoryka, Państwowe Wydawnictwo Naukowe (1972)

16. J. Wałaszek: Binarne kodowanie liczb
    `https://eduinf.waw.pl/inf/alg/006_bin/` [dostęp 16.10.2020]

17. R. J. Wilson: Wprowadzenie do teorii grafów, Wydawnictwo Naukowe PWN (2008)

18. M. Żynel: Materiały do zajęć — Matematyka dyskretna
    Uniwersytet w Białymstoku (2009)