

# Otoczki wypukłe

# Spis treści

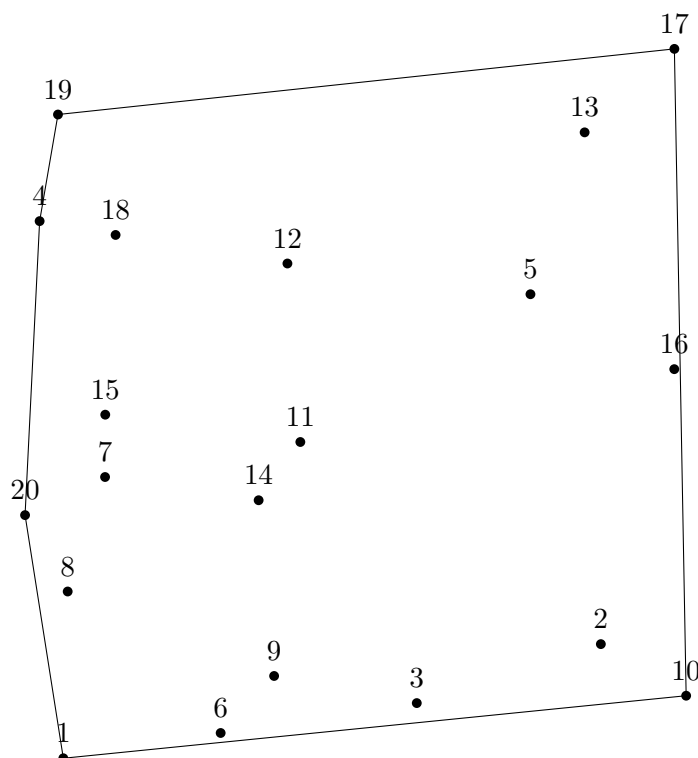
Wstęp . . . . .	3
Rozdział I Omówienie teoretyczne otoczki wypukłej na płaszczyźnie . . . . .	4
1. Otoczka wypukła zbioru punktów . . . . .	4
2. Otoczka wypukła wielokąta prostego . . . . .	13
3. Redukcja zbioru punktów do wielokąta prostego . . . . .	13
Rozdział II Zastosowania . . . . .	14
1. Generalizacja kartograficzna . . . . .	14
2. Grafika komputerowa . . . . .	14
3. Detekcja obiektów . . . . .	14
4. Wyznaczanie obwiedni sygnału . . . . .	14
Rozdział III Implementacja w języku Scala . . . . .	16
1. Pojęcia ogólne . . . . .	16
2. Algorytm Grahama . . . . .	24
3. Algorytm Jarvisa . . . . .	28
Rozdział IV Dynamiczna otoczka wypukła . . . . .	30
1. Algorytm . . . . .	30
2. Implementacja w języku Scala . . . . .	30
Rozdział V Podsumowanie . . . . .	31
Bibliografia . . . . .	32

Wstep

# Rozdział I

## Omówienie teoretyczne otoczki wypukłej na płaszczyźnie

Otoczka wypukła zbioru punktów w swojej najbardziej podstawowej postaci jest wielokątem wypukłym obejmującym wszystkie punkty ze zbioru punktów leżących na płaszczyźnie w taki sposób, aby wielokąt ten miał jak najmniejsze pole.



Rysunek I.1: Otoczka wypukła na płaszczyźnie

Źródło: opracowanie własne

Dobłą reprezentacją otoczki wypukłej w świecie fizycznym może być grupa gwoździ przybita do płaskiej powierzchni i następnie opleciona ciasno sznurkiem. Gwoździe stykające się ze sznurkiem stanowią wierzchołki otoczki wypukłej tej grupy gwoździ.

### 1. Otoczka wypukła zbioru punktów

W celu wyznaczenia otoczki wypukłej dla najbardziej ogólnego przypadku — nieuporządkowanego zbioru punktów na płaszczyźnie, możemy wykorzystać dwa najbardziej popularne algorytmy: algorytm Jarvisa oraz algorytm Grahama.

W wykorzystywanych algorytmach istotnym elementem jest sortowanie punk-

tów względem wartości, które zostały przedstawione na rysunku I.2. W zależności od tego, w jakiej postaci określone będą dane punkty, należy dokonać odpowiednich obliczeń.



Rysunek I.2: Punkt na układzie współrzędnych  
Źródło: opracowanie własne

Gdzie poszczególne symbole oznaczają:

- $p$  - rozpatrywany punkt
- $x(p)$  - odcięta punktu  $p$
- $y(p)$  - rzędna punktu  $p$
- $R$  - długość wektora wodzącego punktu  $p$
- $\theta$  - kąt nachylenia wektora wodzącego punktu  $p$  do osi  $OX$

Istotną komplikację z punktu widzenia obliczeń w algorytmach może stanowić wyznaczenie wartości kąta  $\theta$  (ze względu na potrzebę wykorzystania funkcji trygonometrycznych), którego dokładną wartość można wyliczyć za pomocą wzoru I.1.

$$\theta(p) = \begin{cases} \arctg \frac{y(p)}{x(p)} & \text{dla } x(p) > 0; \\ \arctg \frac{y(p)}{x(p)} + \pi & \text{dla } x(p) < 0 \quad \wedge \quad y(p) \geq 0; \\ \arctg \frac{y(p)}{x(p)} - \pi & \text{dla } x(p) < 0 \quad \wedge \quad y(p) < 0; \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } x(p) = 0 \quad \wedge \quad y(p) < 0; \\ -\frac{\pi}{2} & \text{dla } x(p) = 0 \quad \wedge \quad y(p) > 0. \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Należy jednak zauważyć, że do celów sortowania wystarczy zastosować funkcję  $\alpha(p)$ , taką, że dla dowolnej pary punktów  $p_1, p_2$  spełnione będą warunki I.2 oraz I.3.

$$\alpha(p_1) < \alpha(p_2) \Leftrightarrow \theta(p_1) < \theta(p_2) \quad (\text{I.2})$$

$$\alpha(p_1) = \alpha(p_2) \Leftrightarrow \theta(p_1) = \theta(p_2) \quad (\text{I.3})$$

Przykładowa funkcja  $\alpha(p)$  zachowująca spełniającą warunki I.2 i I.3 została przedstawiona za pomocą wzoru I.4.

$$\alpha(p) = \begin{cases} \frac{y(p)}{d(p)} & \text{dla } x(p) \geq 0 \wedge y(p) \geq 0; \\ 2 - \frac{y(p)}{d(p)} & \text{dla } x(p) < 0 \wedge y(p) \geq 0; \\ 2 + \frac{|y(p)|}{d(p)} & \text{dla } x(p) < 0 \wedge y(p) < 0; \\ 4 - \frac{|y(p)|}{d(p)} & \text{dla } x(p) \geq 0 \wedge y(p) < 0. \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Gdzie funkcja  $d(p)$  określona jest zgodnie ze wzorem I.5.

$$d(p) = |x(p)| + |y(p)| \quad (\text{I.5})$$

W celu udowodnienia, że funkcja  $\alpha(p)$  spełnia warunki I.2 i I.3, musimy wykazać, że funkcja  $\gamma(\theta)$  (przedstawiona we wzorze I.6), która stanowi przekształcenie funkcji  $\alpha(p)$  takie, że jest w pełni zależna od wartości  $\theta$ , a wartości  $x(p(\theta))$  oraz  $y(p(\theta))$  są określone zgodnie ze wzorem I.7, jest rosnąca w każdym swoim przedziale.

$$\gamma(\theta) = \alpha(p(\theta)) \quad (\text{I.6})$$

$$p(\theta) = (|R| \cdot \cos \theta, |R| \cdot \sin \theta) \quad (\text{I.7})$$

Należy zauważyć, że poszczególne przypadki opisane we wzorze I.4 dzielą układ współrzędnych na cztery ćwiartki. Zatem z rysunku I.2 wynikają zależności I.8, I.9, I.10 oraz I.11.

$$x(p) \geq 0 \wedge y(p) \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad (\text{I.8})$$

$$x(p) < 0 \wedge y(p) \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in \left( \frac{\pi}{2}; \pi \right) \quad (\text{I.9})$$

$$x(p) < 0 \wedge y(p) < 0 \Leftrightarrow \theta \in \left( \pi; \frac{3\pi}{2} \right) \quad (\text{I.10})$$

$$x(p) \geq 0 \wedge y(p) < 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle \quad (\text{I.11})$$

Zatem w celu udowodnienia spełnienia warunków I.2 i I.3 przez funkcję  $\alpha(p)$  (I.4) należy udowodnić, że funkcja  $\gamma(\theta)$  (I.6) jest rosnąca (jej pochodna jest większa od zera) we wszystkich przedziałach opisanych w zależnościach I.8, I.9, I.10 oraz I.11.

Obliczenia dla tych czterech przedziałów przedstawiają się w następujący sposób. Dla każdego z przedziałów możliwe jest uproszczenie funkcji  $d(p)$ , tak aby pozbyć się modułu, przez co różniczkowanie funkcji  $\gamma(\theta)$  staje się łatwiejsze.

$$1^\circ \quad x(p) \geq 0 \wedge y(p) \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$\alpha(p) = \frac{y(p)}{d(p)} = \frac{y(p)}{|x(p)| + |y(p)|} = \frac{y(p)}{x(p) + y(p)}$$

$$\gamma(\theta) = \alpha(p(\theta)) = \frac{|R| \cdot \sin \theta}{|R| \cdot \cos \theta + |R| \cdot \sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \right) \\ &= \frac{\frac{d}{d\theta}(\sin \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cdot \frac{d}{d\theta}(\sin \theta + \cos \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\cos \theta \cdot (\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cdot (\cos \theta - \sin \theta)}{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{1 + \sin 2\theta} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0$$

$$\frac{1}{1 + \sin 2\theta} > 0$$

$$1 + \sin 2\theta > 0$$

$$\sin 2\theta > -1$$

$$\sin 2\theta \neq -1$$

$$2\theta \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

$$\theta \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} k = 0 \Rightarrow \theta \neq \frac{3}{4}\pi > \frac{\pi}{2} \\ k = -1 \Rightarrow \theta \neq -\frac{1}{4}\pi < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0 \text{ dla } \theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma(0) = \frac{\sin 0}{\sin 0 + \cos 0} = \frac{0}{0+1} = 0 \\ \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1+0} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma(\theta) \in \langle 0; 1 \rangle \text{ dla } \theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$2^\circ \quad x(p) < 0 \wedge y(p) \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$$

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= 2 - \frac{y(p)}{d(p)} = 2 - \frac{y(p)}{|x(p)| + |y(p)|} = 2 - \frac{y(p)}{-x(p) + y(p)} \\ &= 2 - \frac{y(p)}{y(p) - x(p)} \end{aligned}$$

$$\gamma(\theta) = \alpha(p(\theta)) = 2 - \frac{|R| \cdot \sin \theta}{|R| \cdot \sin \theta - |R| \cdot \cos \theta} = 2 - \frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \left( 2 - \frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \right) \\ &= - \frac{\frac{d}{d\theta}(\sin \theta) \cdot (\sin \theta - \cos \theta) - \sin \theta \cdot \frac{d}{d\theta}(\sin \theta - \cos \theta)}{(\sin \theta - \cos \theta)^2} \\ &= - \frac{\cos \theta \cdot (\sin \theta - \cos \theta) - \sin \theta \cdot (\cos \theta + \sin \theta)}{\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\ &= - \frac{\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta}{1 - 2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= - \frac{-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 - 2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{1 - \sin 2\theta} = \frac{1}{1 - \sin 2\theta} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0$$

$$\frac{1}{1 - \sin 2\theta} > 0$$

$$1 - \sin 2\theta > 0$$

$$-\sin 2\theta > -1$$

$$\sin 2\theta < 1$$

$$\sin 2\theta \neq 1$$

$$2\theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\theta \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{aligned} k=0 &\Rightarrow \theta \neq \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \\ k=1 &\Rightarrow \theta \neq \frac{5}{4}\pi > \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0 \text{ dla } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2 - \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{1}{1-0} = 1 \\ \gamma(\pi) &= 2 - \frac{\sin \pi}{\sin \pi - \cos \pi} = 2 - \frac{0}{0-(-1)} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma(\theta) \in (1; 2) \text{ dla } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$$



$$3^\circ \quad x(p) < 0 \wedge y(p) < 0 \Leftrightarrow \theta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= 2 + \frac{|y(p)|}{d(p)} = 2 + \frac{-y(p)}{|x(p)| + |y(p)|} = 2 - \frac{y(p)}{-x(p) - y(p)} \\ &= 2 + \frac{y(p)}{x(p) + y(p)} \end{aligned}$$

$$\gamma(\theta) = \alpha(p(\theta)) = 2 + \frac{|R| \cdot \sin \theta}{|R| \cdot \cos \theta + |R| \cdot \sin \theta} = 2 + \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \left( 2 + \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \right) \\ &= \frac{\frac{d}{d\theta}(\sin \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cdot \frac{d}{d\theta}(\sin \theta + \cos \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\cos \theta \cdot (\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cdot (\cos \theta - \sin \theta)}{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{1 + \sin 2\theta} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0$$

$$\frac{1}{1 + \sin 2\theta} > 0$$

$$1 + \sin 2\theta > 0$$

$$\sin 2\theta > -1$$

$$\sin 2\theta \neq -1$$

$$2\theta \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

$$\theta \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{aligned} k=0 &\Rightarrow \theta \neq \frac{3}{4}\pi < \pi \\ k=1 &\Rightarrow \theta \neq \frac{7}{4}\pi > \frac{3\pi}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0 \text{ dla } \theta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma(\pi) &= 2 + \frac{\sin \pi}{\sin \pi + \cos \pi} = 2 - \frac{0}{0-1} = 2 \\ \gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 2 + \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{\sin \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2}} \\ &= 2 + \frac{-1}{-1+0} = 2 + 1 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma(\theta) \in (2; 3) \text{ dla } \theta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$4^\circ \quad x(p) \geq 0 \wedge y(p) < 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$$

$$\alpha(p) = 4 - \frac{|y(p)|}{d(p)} = 4 - \frac{-y(p)}{|x(p)| + |y(p)|} = 4 + \frac{y(p)}{x(p) - y(p)}$$

$$\gamma(\theta) = \alpha(p(\theta)) = 4 + \frac{|R| \cdot \sin \theta}{|R| \cdot \cos \theta - |R| \cdot \sin \theta} = 4 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \left( 4 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \right) \\ &= \frac{\frac{d}{d\theta}(\sin \theta) \cdot (\cos \theta - \sin \theta) - \sin \theta \cdot \frac{d}{d\theta}(\cos \theta - \sin \theta)}{(\cos \theta - \sin \theta)^2} \\ &= \frac{\cos \theta \cdot (\cos \theta - \sin \theta) - \sin \theta \cdot (-\sin \theta - \cos \theta)}{\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta}{1 - 2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{1 - 2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{1 - \sin 2\theta} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0$$

$$\frac{1}{1 - \sin 2\theta} > 0$$

$$1 - \sin 2\theta > 0$$

$$-\sin 2\theta > -1$$

$$\sin 2\theta < 1$$

$$\sin 2\theta \neq 1$$

$$2\theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\theta \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{aligned} k=1 &\Rightarrow \theta \neq \frac{5\pi}{4} > \frac{3\pi}{2} \\ k=2 &\Rightarrow \theta \neq \frac{9\pi}{4} > 2\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0 \text{ dla } \theta \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 4 + \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{\cos \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2}} \\ &= 4 + \frac{-1}{0 - (-1)} = 4 - 1 = 3 \\ \gamma(2\pi) &= 4 + \frac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi - \sin 2\pi} \\ &= 4 + \frac{0}{1 - 0} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma(\theta) \in \langle 3; 4 \rangle \text{ dla } \theta \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$$

Z powyższych obliczeń wynika, że we wszystkich przedziałach z zależności I.8, I.9, I.10 oraz I.11 funkcja  $\gamma(\theta)$  ma dodatnią pochodną, a tym samym jest rosnąca we wszystkich przedziałach, oraz każda z wartości osiąganych w przedziale jest większa od każdej wartości z poprzedniego przedziału, a tym samym funkcja  $\alpha(p)$  spełnia warunki I.2 i I.3.

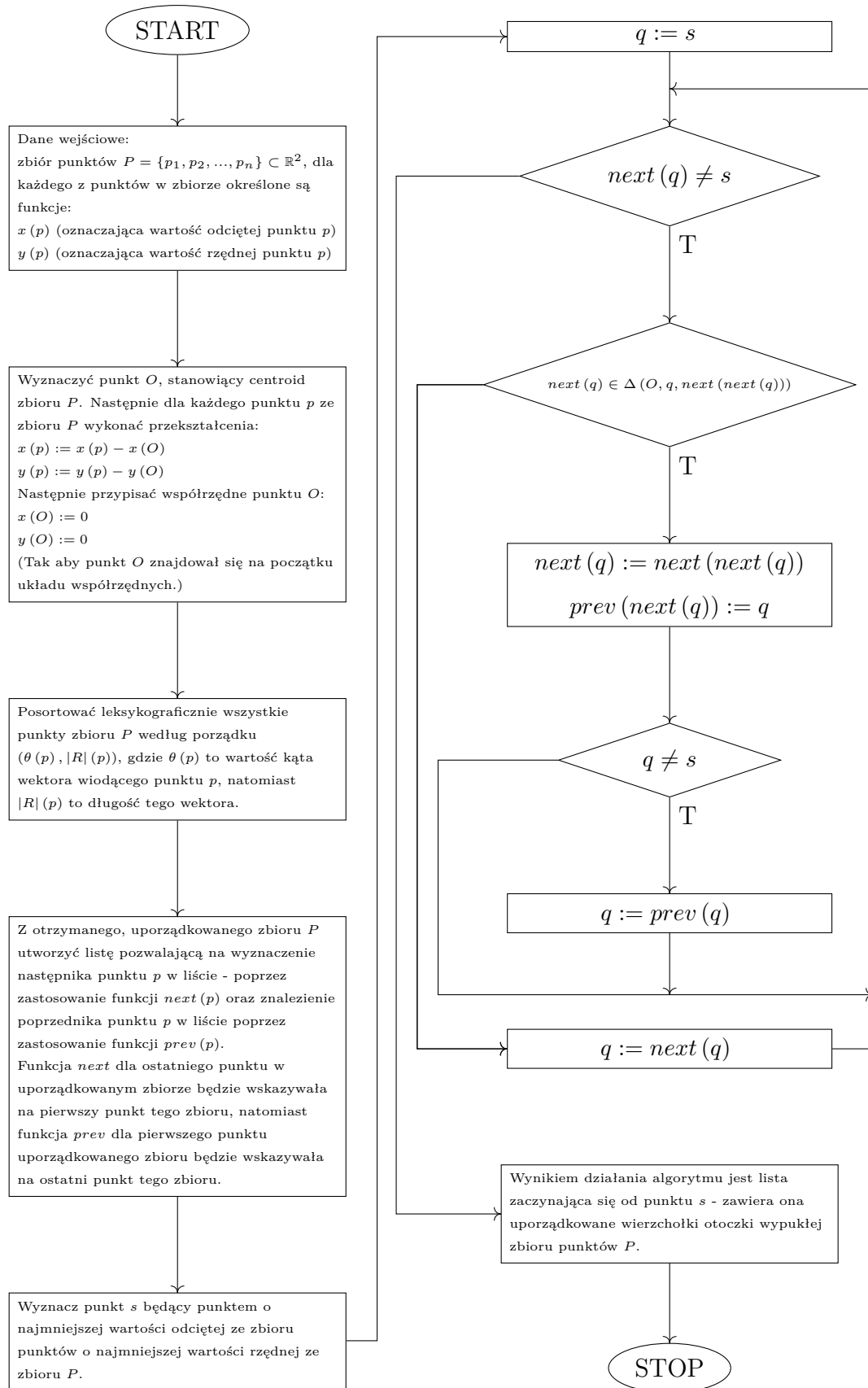
Postać funkcji  $\gamma(\theta)$  może być opisana wzorem I.12 a wykres jej przebiegu, przedstawiony na rysunku I.3 wyraźnie potwierdza jej rosnącą monotoniczność we wszystkich przedziałach.

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} & \text{dla } \theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ 2 - \frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta} & \text{dla } \theta \in \left( \frac{\pi}{2}; \pi \right) \\ 2 + \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} & \text{dla } \theta \in \left( \pi; \frac{3\pi}{2} \right) \\ 4 - \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} & \text{dla } \theta \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle \end{cases} \quad (\text{I.12})$$



Rysunek I.3: Wykres funkcji  $\gamma(\theta)$   
Źródło: opracowanie własne

## 1.1 Algorytm Grahama



Rysunek I.4: Algorytm Grahama

## 1.2 Algorytm Jarvisa

2. Otoczka wypukła wielokąta prostego
3. Redukcja zbioru punktów do wielokąta prostego

## Rozdział II

### Zastosowania

Istotnym, jeśli nie najistotniejszym zagadnieniem dotyczącym otoczek wypukłych są ich zastosowania. Już od kilkudziesięciu lat problem ten temat znajduje swoje użycie w wielu dziedzinach kombinatoryki i informatyki. Dla przykładu problem sortowania elementów liczbowych listy można sprowadzić do problemu znalezienia otoczki wypukłej. W związku z tym rozwiązanie tego problemu może pomóc w rozwiązaniu innych problemów w bardziej symboliczny i graficzny sposób.

#### 1. Generalizacja kartograficzna

W celu jak najbardziej informatywnego i niezłożonego przedstawienia danych geograficznych w sposób graficzny potrzebne jest zastosowanie algorytmu generalizującego informacje.

#### 2. Grafika komputerowa

Obiekty wykorzystywane w grafice komputerowej często mogą charakteryzować się skomplikowanymi kształtami. Im bardziej skomplikowany kształt, tym więcej mocy obliczeniowej potrzeba w celu wykonania danej operacji na tym kształcie. W niektórych przypadkach do uproszczenia graficznego danego obiektu używa się otoczki wypukłej jego kształtu. Ze względu na fakt, iż otoczka wypukła wielokąta zawsze będzie miała liczbę wierzchołków mniejszą lub równą liczbie wierzchołków samego wielokąta, powstała otoczka może posłużyć do wykonania mniejszej liczby obliczeń przy wykonywaniu operacji na danym obiekcie.

#### 3. Detekcja obiektów

#### 4. Wyznaczanie obwiedni sygnału

Sygnał to zapis informacji zmieniającej się w zależności od czasu. Taką informacją może być natężenie/napięcie prądu, natężenie pola elektromagnetycznego, dźwięk utworu muzycznego itd. W przypadku, jeśli zmienną informację da się reprezentować w sposób liczbowy, możliwe jest graficzne przedstawienie sygnału. Zapisanie

informacji w ten sposób może być łatwiejsze do interpretacji przez człowieka. Jednak w przypadku, gdy mamy do czynienia ze skomplikowanym przebiegiem, na

Algorytm wyznaczający otoczkę wypukłą wielokąta prostego może posłużyć znajdowaniu obwiedni sygnału.

## Rozdział III

### Implementacja w języku Scala

#### 1. Pojęcia ogólne

W tej sekcji przedstawione zostaną listingi zawierające kod w języku Scala definiujący pojęcia potrzebne do implementacji poszczególnych algorytmów wyznaczających otoczkę wypukłą.

Klasa `Point` posłuży jako podstawowa klasa reprezentująca punkt w przestrzeni dwuwymiarowej. W celu łatwiejszego manipulowania danymi. Zostały w jej ramach zaimplementowane 3 metody pomocnicze.

Odejmowanie (linia 7) - zaimplementowane jako odejmowanie od siebie odpowiadających sobie współrzędnych dwu punktów.

Dodawanie (linia 8) - dodawanie do siebie odpowiadających sobie współrzędnych dwu punktów.

Dzielenie przez skalar (linia 9) - zaimplementowane jako dzielenie obu współrzędnych przez wskazaną liczbę. Zaimplementowane dzięki użyciu domniemanemu argumentowi `numeric: Numeric[T]`. W języku Scala tego typu konstrukcja umożliwia korzystanie z metody `/` w tedy i tylko wtedy jeśli zaimportowany zostanie do aktualnego kontekstu obiekt typu `Numeric[T]`. Domyślnie typ ten jest zaimplementowany dla `T` będącym jednym z podstawowych typów liczbowych: `Float`, `Int`, `Double` etc. Więc w domyśle tego typu konstrukcja służy niejako „udowodnieniu”, że wskazywany argument jest w istocie liczbą.

```

1 package utilities.geometry
2
3 case class Point(
4     x: Double,
5     y: Double
6 ) {
7     def -(that: Point): Point = Point(x - that.x, y - that.y)
8     def +(that: Point): Point = Point(x + that.x, y + that.y)
9     def /[T](number: T)(implicit numeric: Numeric[T]): Point = {
10         val double = numeric.toDouble(number)

```



```
11     Point(x / double, y / double)
12 }
13 }
```

Kolejnym istotnym elementem wykorzystanym w implementacji algorytmów wyznaczających otoczkę wypukłą zbioru punktów na płaszczyźnie są metody wyliczające określone właściwości punktów.

Metoda `calculateCentroid(points: Points): Points` (linia 11) wyznacza centroid zbioru punktów `points`.

Metoda `distanceFromCenterSquared(p: Point): Double` (linia 17) wyznacza kwadrat odległości wskazanego punktu od środka układu współrzędnych.

Na podstawie wyżej wymienionej metody zostały zaimplementowane trzy metody związane z odległością między punktami.

Metoda `distanceSquared(a: Point, b: Point): Double` (linia 13) wyznacza kwadrat odległości pomiędzy dwoma punktami.

Metoda `distanceFromCenter(p: Point): Double` (linia 19) wyznacza odległość od środka układu współrzędnych.

Metoda `distance(a: Point, b: Point): Double` (linia 15) wyznacza odległość pomiędzy dwoma punktami.

W ramach obiektu `PointsUtils` zostały również zaimplementowane metody służące do wyznaczania wartości umożliwiających sortowanie punktów względem kąta występującego pomiędzy horyzontalną osią układu współrzędnych, a wektorem łączącym początek układu współrzędnych z punktem (kąt  $\theta$  zaznaczony na rysunku I.2).

Metoda `phase(p: Point): Double` wyznacza dokładną wartość szukanego kąta. Matematycznie ta funkcja została zapisana we wzorze I.1.

Metoda `alpha(p: Point): Double` wyznacza wartość umożliwiającą porównanie kąta dla wskazanego punktu z innymi punktami. Matematycznie ta funkcja została zapisana we wzorze I.4.

```

1 package utilities.geometry
2
3 import java.lang.Math._
4
5 object PointsUtils {
6
7     type Points = List[Point]
8
9     private lazy val HALF_PI = PI * .5

```

```

10
11 def calculateCentroid(points: Points): Point = points.reduceLeft(
12     _ + _) / points.length
13
14
15 def distanceSquared(a: Point, b: Point): Double =
16     distanceFromCenterSquared(a - b)
17
18
19 def distance(a: Point, b: Point): Double = distanceFromCenter(a -
20     b)
21
22
23 def distanceFromCenterSquared(p: Point): Double = pow(p.x, 2) +
24     pow(p.y, 2)
25
26
27 def distanceFromCenter(p: Point): Double = sqrt(
28     distanceFromCenterSquared(p))
29
30
31
32 def phase(p: Point): Double = {
33     import p.{x, y}
34     (x.sign, y.sign) match {
35         case (1, _) => atan(y / x)
36         case (-1, 0 | 1) => atan(y / x) + PI
37         case (-1, -1) => atan(y / x) - PI
38         case (0, -1) => HALF_PI
39         case (0, 1) => -HALF_PI
40     }
41 }
42
43
44 def alpha(p: Point): Double = {
45     import p.{x, y}
46     val absX = abs(x)
47     val absY = abs(y)
48     val d = absX + absY
49
50     (x.sign, y.sign) match {
51         case (0 | 1, 0 | 1) => y / d
52         case (-1, 0 | 1) => 2 - y / d
53         case (-1, -1) => 2 + absY / d
54         case (0 | 1, -1) => 4 - absY / d
55     }
56 }

```

```
44 }
```

```
45 }
```

```

1 package utilities.geometry.ordering
2
3 import utilities.geometry.{Point, PointsUtils}
4 import Ordering.Double.TotalOrdering
5
6 trait OrientationOrdering extends Ordering[Point] {
7     final override def compare(x: Point, y: Point): Int = {
8         TotalOrdering.compare(phase(x), phase(y)) match {
9             case 0 => TotalOrdering.compare(distance(x), distance(y))
10            case phaseCompared => phaseCompared
11        }
12    }
13
14    protected def distance(p: Point): Double
15    protected def phase(p: Point): Double
16 }
17
18 object OrientationOrdering {
19     implicit object Exact extends OrientationOrdering {
20         override protected def distance(p: Point): Double = PointsUtils
21             .distanceFromCenter(p)
22         override protected def phase(p: Point): Double = PointsUtils.
23             phase(p)
24     }
25
26     implicit object Indicator extends OrientationOrdering {
27         override protected def distance(p: Point): Double = PointsUtils
28             .distanceFromCenterSquared(p)
29         override protected def phase(p: Point): Double = PointsUtils.
30             alpha(p)
31     }
32 }

```

```
1 package utilities.geometry.convexhull.algorithms
2
3 import utilities.geometry.PointsUtils.Points
4 import utilities.geometry.ordering.OrientationOrdering
5
6 trait ConvexHullAlgorithm extends Product {
7   def calculate(points: Points)(implicit ordering:
8     OrientationOrdering): Points
9 }
```

```

1 package utilities.geometry.convex.hull.algorithms
2
3 import org.scalatest.Assertion
4 import org.scalatest.wordspec.AnyWordSpec
5 import utilities.geometry.Point
6 import utilities.geometry.PointsUtils.Points
7 import AlgorithmTest.{EXPECTED_CONVEX_HULL, INPUT_POINTS,
8   ONE_INPUT_POINT}
9 import utilities.geometry.convexhull.algorithms.ConvexHullAlgorithm
10 import utilities.geometry.ordering.OrientationOrdering
11
12 abstract class AlgorithmTest(convexHullAlgorithm:
13   ConvexHullAlgorithm)(implicit ordering: OrientationOrdering)
14   extends AnyWordSpec {
15     private def convexHullAlgorithmName: String = convexHullAlgorithm
16       .productPrefix
17
18     private def assertExpectedOutput(input: Points, expectedOutput:
19       Points): Assertion = {
20       val actualConvexHull = convexHullAlgorithm.calculate(input)
21       assert(actualConvexHull == expectedOutput)
22     }
23
24     s"$convexHullAlgorithmName" must {
25       "throw the IllegalArgumentException for empty" in {
26         assertThrows[IllegalArgumentException](convexHullAlgorithm.
27           calculate(nil))
28       }
29
30       "return the same thing for one input point" in {
31         assertExpectedOutput(ONE_INPUT_POINT, ONE_INPUT_POINT)
32       }
33
34       "properly calculate convex hull" in {
35         assertExpectedOutput(INPUT_POINTS, EXPECTED_CONVEX_HULL)
36       }
37     }
38 }

```

```
34
35 object AlgorithmTest {
36   val INPUT_POINTS: Points = List(
37     Point(1, 3),
38     Point(2, 4),
39     Point(2, 2),
40     Point(4, 6),
41     Point(3, 4),
42     Point(4, 4),
43     Point(4, 3),
44     Point(2, 6),
45     Point(5, 2),
46     Point(6, 4),
47     Point(5, 5)
48   )
49
50   val EXPECTED_CONVEX_HULL: Points = List(
51     Point(6, 4),
52     Point(4, 6),
53     Point(2, 6),
54     Point(1, 3),
55     Point(2, 2),
56     Point(5, 2)
57   )
58
59   val ONE_INPUT_POINT: Points = List(
60     Point(1, 2)
61   )
62 }
```



## 2. Algorytm Grahama

```
1 package utilities.geometry.convexhull.algorithms
2 import utilities.geometry.PointsUtils.Points
3 import utilities.geometry.ordering.OrientationOrdering
4 import utilities.geometry.{PointsCycle, PointsUtils}
5
6
7 case object Graham extends ConvexHullAlgorithm {
8
9     override def calculate(points: Points)(implicit ordering:
10         OrientationOrdering): Points = {
11         require(points.nonEmpty, "You can not calculate convex hull of
12         an empty points set.")
13         val centroid = PointsUtils.calculateCentroid(points)
14         val pointsSorted = points.map(_ - centroid).sorted
15         val pointsCycle = new PointsCycle(pointsSorted)
16
17         pointsCycle.getHull.map(_ + centroid)
18     }
19 }
```

```

1 package utilities.geometry
2
3 import utilities.geometry.PointsUtils.Points
4
5 class PointsCycle(points: Points) extends Iterable[Point] {
6
7     private lazy val first = NoPointRef.next
8
9     override def iterator: Iterator[Point] = new Iterator[Point] {
10         private var currentPointRef: AbstractPointRef = NoPointRef
11
12         override def hasNext: Boolean = currentPointRef.isNotLast
13
14         override def next(): Point = {
15             val next = currentPointRef.next
16             currentPointRef = next
17             next.point
18         }
19     }
20
21     private def createPointRefs(points: Points): AbstractPointRef =
22         points.foldLeft[AbstractPointRef](NoPointRef)(_ . addPoint(_)) .
23             addLastPointAndReturn()
24
25     createPointRefs(points)
26
27     trait AbstractPointRef {
28         var next: PointRef = _
29         var prev: PointRef = _
30
31         def isNotFirst: Boolean
32         def isNotLast: Boolean
33
34         def addPoint(point: Point): PointRef
35
36         protected def addLastPoint(): Unit
37
38         final def addLastPointAndReturn(): AbstractPointRef = {
39             addLastPoint()

```

```

39     this
40   }
41 }
42
43 class PointRef(val point: Point) extends AbstractPointRef {
44
45   final def isNotFirst: Boolean = this ne first
46   final def isNotLast: Boolean = next ne first
47
48   override def addPoint(point: Point): PointRef = {
49     val pointRef = new PointRef(point)
50     pointRef.prev = this
51     next = pointRef
52     pointRef
53   }
54
55   def isInTriangle(t2: PointRef, t3: PointRef): Boolean =
56     Orientation.calculateThreePointsOrientation(t2.point, t3.
57 point, point) == Orientation.Left
58
59   override protected def addLastPoint(): Unit = {
60     next = first
61     first.prev = this
62   }
63 }
64
65 object NoPointRef extends AbstractPointRef {
66
67   override def addPoint(point: Point): PointRef = {
68     val pointRef = new PointRef(point)
69     next = pointRef
70     pointRef
71   }
72
73   override def isNotFirst: Boolean = first ne null
74   override def isNotLast: Boolean = first ne null
75
76   override protected def addLastPoint(): Unit = ()
77 }

```

```
77
78 def getHull: Points = {
79
80   if (NoPointRef.isNotLast) {
81     var q = NoPointRef.next
82     while (q.isNotLast) {
83       if (q.next.isInTriangle(q, q.next.next)) {
84         q.next = q.next.next
85         q.next.prev = q
86         if (q.isNotFirst) q = q.prev
87       } else q = q.next
88     }
89   }
90   toList
91 }
92
93 }
```

```

1 package utilities.geometry.convex.hull.algorithms
2
3 import utilities.geometry.convexhull.algorithms.Graham
4 import utilities.geometry.ordering.OrientationOrdering.Indicator
5
6 class GrahamAlgorithmTest extends AlgorithmTest(Graham)

```

### 3. Algorytm Jarvisa

Dzięki wykorzystaniu pattern matchingu dostępnego w Scali, możliwe jest przejrzyste zaimplementowanie algorytmu Jarvisa, który, jak widać jest dużo mniej skomplikowany od algorytmu Grahama. Mniejsze skomplikowanie implementacji wiąże się jednak z dużo większą złożonością obliczeniową.

```

1 package utilities.geometry.convexhull.algorithms
2
3 import utilities.geometry.{Point, PointsUtils}
4 import utilities.geometry.PointsUtils.Points
5
6 case class Jarvis() extends ConvexHullAlgorithm {
7
8     private val FIRST_POINT_ORDERING = new Ordering[Point] {
9         override def compare(x: Point, y: Point): Int = {
10             val byX = Ordering.Double.TotalOrdering.compare(x.x, y.x)
11             lazy val byY = Ordering.Double.TotalOrdering.compare(x.y, y.y)
12             if (byX == 0) byY
13             else byX
14         }
15     }
16
17     override protected def nonEmptyCalculate(points: Points): Points
18     = {
19         val firstPoint = points.max(FIRST_POINT_ORDERING)
20         val pZero = Point(firstPoint.x - 1, firstPoint.y)
21
22         var pI = firstPoint
23         var pIMinusOne = pZero

```

```

24
25     val pointsBuilder = List.newBuilder[Point]
26     pointsBuilder += firstPoint
27
28     while (true) {
29         points
30             .filterNot(_ == pI)
31             .maxByOption(PointsUtils.angleBetweenThreePoints(pIMinusOne
32 , pI, _)) match {
33         case Some('firstPoint') => return pointsBuilder.result()
34         case Some(pIPlusOne) =>
35             pointsBuilder += pIPlusOne
36             pIMinusOne = pI
37             pI = pIPlusOne
38         case _ => return pointsBuilder.result()
39     }
40     Nil
41 }
42
43 }

```

```

1 package utilities.geometry.convex.hull.algorithms
2
3 import utilities.geometry.convexhull.algorithms.Jarvis
4
5 class JarvisAlgorithmTest extends AlgorithmTest(Jarvis())

```

## Rozdział IV

### Dynamiczna otoczka wypukła

1. Algorytm
2. Implementacja w języku Scala

## Rozdział V

### Podsumowanie



## Bibliografia

- [1] Ronald L. Graham, Frances Yao, Finding the Convex Hull of a Simple Polygon (1981)
- [2] Avraham A. Melkman, On-line Construction of the Convex Hull of a Simple Polyline (1985)
- [3] Jacqueline Jourban, Yair Gabay, A Method for Construction of 2D Hull For Generalized Cartographic Representation (2000)
- [4] Min Tang, Jie-yi Zhao, Ruo-feng Tong, Dinesh Manocha, GPU accelerated convex hull computation (2012)
- [5] Navjot Singh, Rinki Arya, R.K. Agrawal, A convex hull approach in conjunction with Gaussian mixture model for salient object detection (2016)
- [6] Fan Cheng, Qiangqiang Zhang, Ye Tian, Xingyi Zhang, Maximizing receiver operating characteristics convex hull via dynamic reference point-based multi-objective evolutionary algorithm (2019)