

Otoczki wypukłe

Spis treści

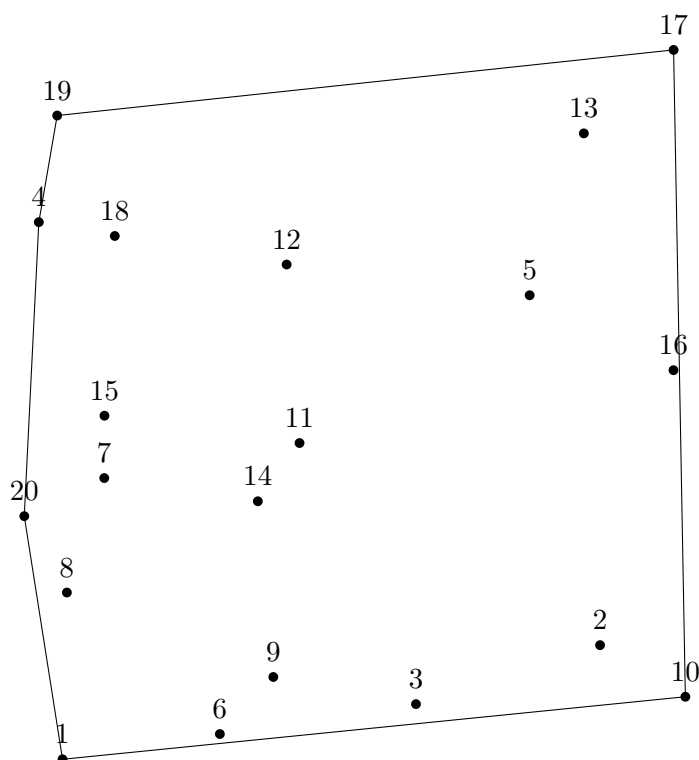
Wstęp	3
Rozdział I Omówienie teoretyczne otoczki wypukłej na płaszczyźnie	4
1. Otoczka wypukła zbioru punktów	4
2. Otoczka wypukła wielokąta prostego	13
3. Redukcja zbioru punktów do wielokąta prostego	13
Rozdział II Zastosowania	14
1. Generalizacja kartograficzna	14
2. Grafika komputerowa	14
3. Detekcja obiektów	14
4. Wyznaczanie obwiedni sygnału	14
Rozdział III Dynamiczna otoczka wypukła	16
1. Algorytm	16
2. Implementacja w języku Scala	16
Rozdział IV Podsumowanie	17
Bibliografia	18

Wstep

Rozdział I

Omówienie teoretyczne otoczki wypukłej na płaszczyźnie

Otoczka wypukła zbioru punktów w swojej najbardziej podstawowej postaci jest wielokątem wypukłym obejmującym wszystkie punkty ze zbioru punktów leżących na płaszczyźnie w taki sposób aby wielokąt ten miał jak najmniejsze pole.



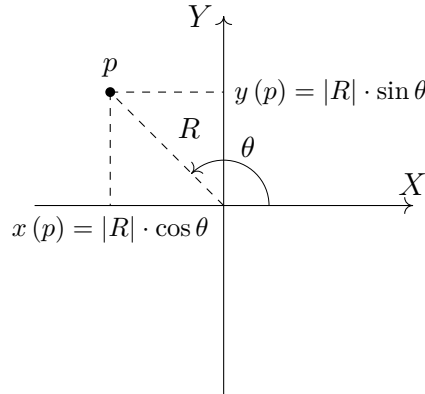
Dobłą reprezentacją otoczki wypukłej w świecie fizycznym może być grupa gwoździ przybita do płaskiej powierzchni i następnie opleciona ciasno sznurkiem. Gwoździe stykające się ze sznurkiem stanowiłyby wierzchołki otoczki wypukłej tej grupy gwoździ.

1. Otoczka wypukła zbioru punktów

W celu wyznaczenia otoczki wypukłej dla najbardziej ogólnego przypadku - nieuporządkowanego zbioru punktów na płaszczyźnie, możemy wykorzystać dwa najbardziej popularne algorytmy Algorytm Jarvisa oraz Algorytm Grahama.

W wykorzystywanych algorytmach istotnym elementem jest sortowanie punktów względem wartości, które zostały przedstawione na rysunku I.1. W zależności

od tego w jakiej postaci określone będą dane punkty, należało będzie dokonać odpowiednich obliczeń.



Rysunek I.1: Punkt na układzie współrzędnych

Gdzie poszczególne symbole oznaczają:

- p - rozpatrywany punkt
- $x(p)$ - odcięta punktu p
- $y(p)$ - rzędna punktu p
- R - długość wektora wodzącego punktu p
- θ - kąt nachylenia wektora wodzącego punktu p do osi OX

Istotną komplikację z punktu widzenia obliczeń w algorytmach może stanowić wyznaczenie wartości kąta θ (ze względu na potrzebę wykorzystania funkcji trygonometrycznych), którego dokładną wartość można wyliczyć za pomocą wzoru I.1.

$$\theta(p) = \begin{cases} \arctg \frac{y(p)}{x(p)} & \text{dla } x(p) > 0 \\ \arctg \frac{y(p)}{x(p)} + \pi & \text{dla } x(p) < 0 \wedge y(p) \geq 0 \\ \arctg \frac{y(p)}{x(p)} - \pi & \text{dla } x(p) < 0 \wedge y(p) < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } x(p) = 0 \wedge y(p) < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{dla } x(p) = 0 \wedge y(p) > 0 \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Należy jednak zauważyć, że do celów sortowania wystarczy zastosować funkcję $\alpha(p)$.

Taką, że dla dowolnej pary punktów p_1, p_2 spełnione będą warunki I.2 oraz I.3.

$$\alpha(p_1) < \alpha(p_2) \Leftrightarrow \theta(p_1) < \theta(p_2) \quad (\text{I.2})$$

$$\alpha(p_1) = \alpha(p_2) \Leftrightarrow \theta(p_1) = \theta(p_2) \quad (\text{I.3})$$

Przykładowa funkcja $\alpha(p)$ zachowująca spełniającą warunki I.2 i I.3 została przedstawiona za pomocą wzoru I.4.

$$\alpha(p) = \begin{cases} \frac{y(p)}{d(p)} & \text{dla } x(p) \geq 0 \wedge y(p) \geq 0 \\ 2 - \frac{y(p)}{d(p)} & \text{dla } x(p) < 0 \wedge y(p) \geq 0 \\ 2 + \frac{|y(p)|}{d(p)} & \text{dla } x(p) < 0 \wedge y(p) < 0 \\ 4 - \frac{|y(p)|}{d(p)} & \text{dla } x(p) \geq 0 \wedge y(p) < 0 \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Gdzie funkcja $d(p)$ określona jest zgodnie ze wzorem I.5.

$$d(p) = |x(p)| + |y(p)| \quad (\text{I.5})$$

W celu udowodnienia, że funkcja $\alpha(p)$ spełnia warunki I.2 i I.3 musimy wykazać, że funkcja $\gamma(\theta)$ (przedstawiona we wzorze I.6), która stanowi przekształcenie funkcji $\alpha(p)$, takie że jest w pełni zależna od wartości θ , a wartości $x(p(\theta))$ oraz $y(p(\theta))$ są określone zgodnie ze wzorem I.7, jest rosnąca w każdym swoim przedziale.

$$\gamma(\theta) = \alpha(p(\theta)) \quad (\text{I.6})$$

$$p(\theta) = (|R| \cdot \cos \theta, |R| \cdot \sin \theta) \quad (\text{I.7})$$

Należy zauważyć, że poszczególne przypadki opisane we wzorze I.4 dzielą układ współrzędnych na cztery ćwiartki. Zatem z rysunku I.1 wynikają zależności: I.8, I.9, I.10 oraz I.11.

$$x(p) \geq 0 \wedge y(p) \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad (\text{I.8})$$

$$x(p) < 0 \wedge y(p) \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right) \quad (\text{I.9})$$

$$x(p) < 0 \wedge y(p) < 0 \Leftrightarrow \theta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right) \quad (\text{I.10})$$

$$x(p) \geq 0 \wedge y(p) < 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle \quad (\text{I.11})$$

Zatem w celu udowodnienia spełnienia warunków I.2 i I.3 przez funkcję $\alpha(p)$ (I.4) należy udowodnić, że funkcja $\gamma(\theta)$ (I.6) jest rosnąca (jej pochodna jest większa od zera) we wszystkich przedziałach opisanych w zależnościach: I.8, I.9, I.10 oraz I.11.

Obliczenia dla tych czterech przedziałów przedstawiają się w następujący sposób. Dla każdego z przedziałów możliwe było uproszczenie funkcji $d(p)$, tak aby pozbyć się modułu, przez co różniczkowanie funkcji $\gamma(\theta)$ było łatwiejsze.

$$1^\circ \quad x(p) \geq 0 \wedge y(p) \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$\alpha(p) = \frac{y(p)}{d(p)} = \frac{y(p)}{|x(p)| + |y(p)|} = \frac{y(p)}{x(p) + y(p)}$$

$$\gamma(\theta) = \alpha(p(\theta)) = \frac{|R| \cdot \sin \theta}{|R| \cdot \cos \theta + |R| \cdot \sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \right) \\ &= \frac{\frac{d}{d\theta}(\sin \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cdot \frac{d}{d\theta}(\sin \theta + \cos \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\cos \theta \cdot (\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cdot (\cos \theta - \sin \theta)}{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{1 + \sin 2\theta} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0$$

$$\frac{1}{1 + \sin 2\theta} > 0$$

$$1 + \sin 2\theta > 0$$

$$\sin 2\theta > -1$$

$$\sin 2\theta \neq -1$$

$$2\theta \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

$$\theta \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} k = 0 \Rightarrow \theta \neq \frac{3}{4}\pi > \frac{\pi}{2} \\ k = -1 \Rightarrow \theta \neq -\frac{1}{4}\pi < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0 \text{ dla } \theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma(0) = \frac{\sin 0}{\sin 0 + \cos 0} = \frac{0}{0+1} = 0 \\ \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1+0} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma(\theta) \in \langle 0; 1 \rangle \text{ dla } \theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$2^\circ \quad x(p) < 0 \wedge y(p) \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$$

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= 2 - \frac{y(p)}{d(p)} = 2 - \frac{y(p)}{|x(p)| + |y(p)|} = 2 - \frac{y(p)}{-x(p) + y(p)} \\ &= 2 - \frac{y(p)}{y(p) - x(p)} \end{aligned}$$

$$\gamma(\theta) = \alpha(p(\theta)) = 2 - \frac{|R| \cdot \sin \theta}{|R| \cdot \sin \theta - |R| \cdot \cos \theta} = 2 - \frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \left(2 - \frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \right) \\ &= - \frac{\frac{d}{d\theta}(\sin \theta) \cdot (\sin \theta - \cos \theta) - \sin \theta \cdot \frac{d}{d\theta}(\sin \theta - \cos \theta)}{(\sin \theta - \cos \theta)^2} \\ &= - \frac{\cos \theta \cdot (\sin \theta - \cos \theta) - \sin \theta \cdot (\cos \theta + \sin \theta)}{\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\ &= - \frac{\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta}{1 - 2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= - \frac{-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 - 2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{1 - \sin 2\theta} = \frac{1}{1 - \sin 2\theta} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0$$

$$\frac{1}{1 - \sin 2\theta} > 0$$

$$1 - \sin 2\theta > 0$$

$$-\sin 2\theta > -1$$

$$\sin 2\theta < 1$$

$$\sin 2\theta \neq 1$$

$$2\theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\theta \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{aligned} k=0 &\Rightarrow \theta \neq \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \\ k=1 &\Rightarrow \theta \neq \frac{5}{4}\pi > \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0 \text{ dla } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2 - \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{1}{1-0} = 1 \\ \gamma(\pi) &= 2 - \frac{\sin \pi}{\sin \pi - \cos \pi} = 2 - \frac{0}{0-(-1)} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma(\theta) \in (1; 2) \text{ dla } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$$

$$3^\circ \quad x(p) < 0 \wedge y(p) < 0 \Leftrightarrow \theta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= 2 + \frac{|y(p)|}{d(p)} = 2 + \frac{-y(p)}{|x(p)| + |y(p)|} = 2 - \frac{y(p)}{-x(p) - y(p)} \\ &= 2 + \frac{y(p)}{x(p) + y(p)} \end{aligned}$$

$$\gamma(\theta) = \alpha(p(\theta)) = 2 + \frac{|R| \cdot \sin \theta}{|R| \cdot \cos \theta + |R| \cdot \sin \theta} = 2 + \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \left(2 + \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \right) \\ &= \frac{\frac{d}{d\theta}(\sin \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cdot \frac{d}{d\theta}(\sin \theta + \cos \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\cos \theta \cdot (\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cdot (\cos \theta - \sin \theta)}{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{1 + \sin 2\theta} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0$$

$$\frac{1}{1 + \sin 2\theta} > 0$$

$$1 + \sin 2\theta > 0$$

$$\sin 2\theta > -1$$

$$\sin 2\theta \neq -1$$

$$2\theta \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

$$\theta \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{aligned} k=0 &\Rightarrow \theta \neq \frac{3}{4}\pi < \pi \\ k=1 &\Rightarrow \theta \neq \frac{7}{4}\pi > \frac{3\pi}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0 \text{ dla } \theta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma(\pi) &= 2 + \frac{\sin \pi}{\sin \pi + \cos \pi} = 2 - \frac{0}{0-1} = 2 \\ \gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 2 + \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{\sin \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2}} \\ &= 2 + \frac{-1}{-1+0} = 2 + 1 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma(\theta) \in (2; 3) \text{ dla } \theta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$4^\circ \quad x(p) \geq 0 \wedge y(p) < 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$$

$$\alpha(p) = 4 - \frac{|y(p)|}{d(p)} = 4 - \frac{-y(p)}{|x(p)| + |y(p)|} = 4 + \frac{y(p)}{x(p) - y(p)}$$

$$\gamma(\theta) = \alpha(p(\theta)) = 4 + \frac{|R| \cdot \sin \theta}{|R| \cdot \cos \theta - |R| \cdot \sin \theta} = 4 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \left(4 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \right) \\ &= \frac{\frac{d}{d\theta}(\sin \theta) \cdot (\cos \theta - \sin \theta) - \sin \theta \cdot \frac{d}{d\theta}(\cos \theta - \sin \theta)}{(\cos \theta - \sin \theta)^2} \\ &= \frac{\cos \theta \cdot (\cos \theta - \sin \theta) - \sin \theta \cdot (-\sin \theta - \cos \theta)}{\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta}{1 - 2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{1 - 2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{1 - \sin 2\theta} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0$$

$$\frac{1}{1 - \sin 2\theta} > 0$$

$$1 - \sin 2\theta > 0$$

$$-\sin 2\theta > -1$$

$$\sin 2\theta < 1$$

$$\sin 2\theta \neq 1$$

$$2\theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\theta \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{aligned} k=1 &\Rightarrow \theta \neq \frac{5\pi}{4} > \frac{3\pi}{2} \\ k=2 &\Rightarrow \theta \neq \frac{9\pi}{4} > 2\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \gamma(\theta) > 0 \text{ dla } \theta \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 4 + \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{\cos \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2}} \\ &= 4 + \frac{-1}{0 - (-1)} = 4 - 1 = 3 \\ \gamma(2\pi) &= 4 + \frac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi - \sin 2\pi} \\ &= 4 + \frac{0}{1 - 0} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma(\theta) \in \langle 3; 4 \rangle \text{ dla } \theta \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$$

Z powyższych obliczeń wynika, że we wszystkich przedziałach z zależności: I.8, I.9, I.10 oraz I.11 funkcja $\gamma(\theta)$ ma dodatnią pochodną, a tym samym jest rosnąca we wszystkich przedziałach oraz każda z wartości osiągniętych w przedziale jest większa od każdej wartości z poprzedniego przedziału, tym samym funkcja $\alpha(p)$ spełnia warunki I.2 i I.3.

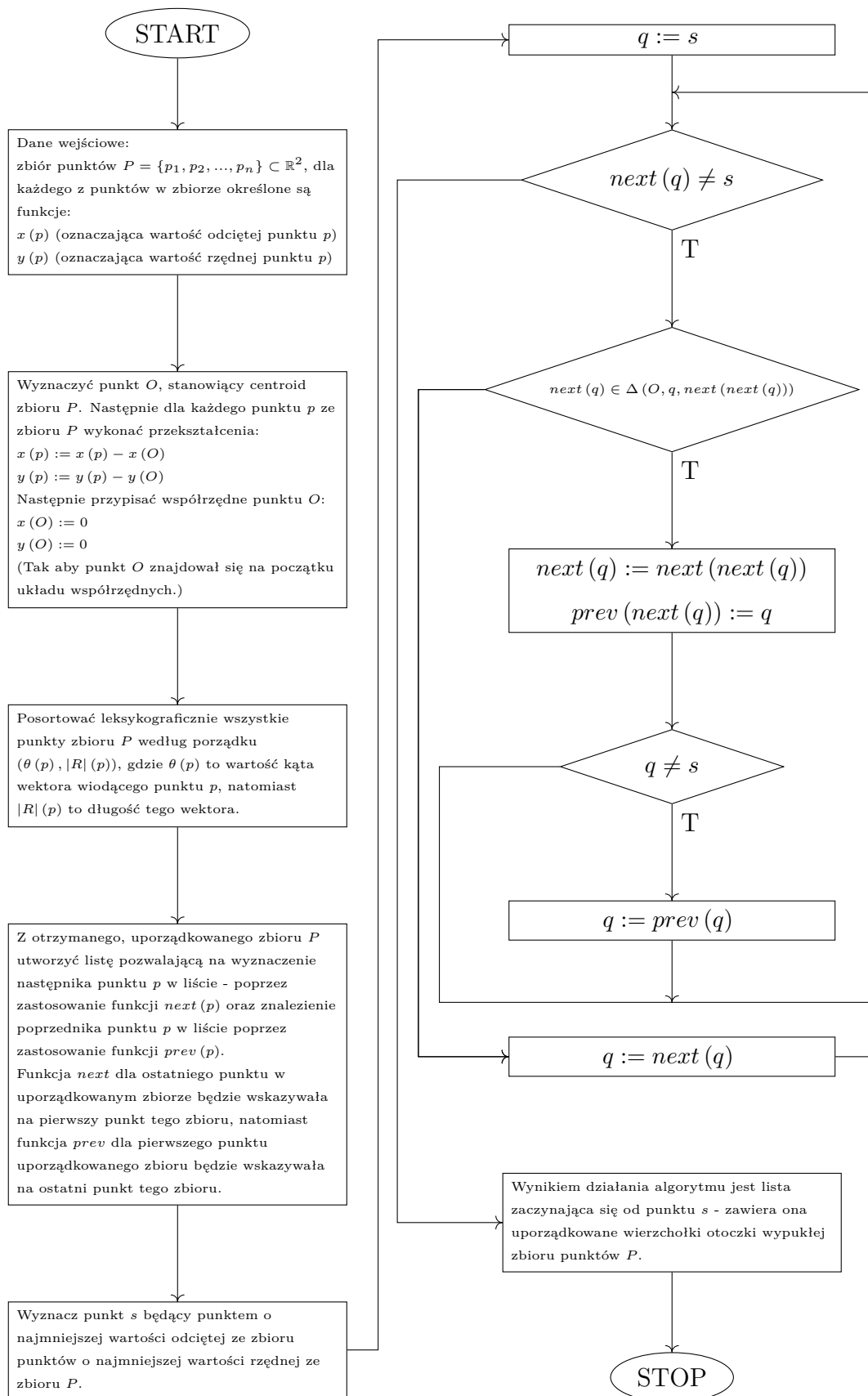
Postać funkcji $\gamma(\theta)$ może być opisana wzorem I.12, a wykres jej przebiegu, przedstawiony na rysunku I.2, wyraźnie potwierdza jej rosnącą monotoniczność we wszystkich przedziałach.

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} & \text{dla } \theta \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ 2 - \frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta} & \text{dla } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right) \\ 2 + \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} & \text{dla } \theta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right) \\ 4 - \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} & \text{dla } \theta \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle \end{cases} \quad (\text{I.12})$$



Rysunek I.2: Wykres funkcji $\gamma(\theta)$

1.1 Algorytm Grahama



1.2 Algorytm Jarvisa

2. Otoczka wypukła wielokąta prostego
3. Redukcja zbioru punktów do wielokąta prostego

Rozdział II

Zastosowania

Istotnym, jeśli nie najistotniejszym zagadnieniem dotyczącym otoczek wypukłych są ich zastosowania. Już od kilkudziesięciu lat problem ten temat znajduje swoje użycie we wielu dziedzinach kombinatoryki i informatyki. Dla przykładu problem sortowania elementów liczbowych listy można sprowadzić do problemu znalezienia otoczki wypukłej. W związku z czym rozwiązanie tego problemu może pomóc w rozwiązaniu innych problemów w bardziej symboliczny i graficzny sposób.

1. Generalizacja kartograficzna

W celu jak najbardziej informatywnego i niezłożonego przedstawienia danych geograficznych w sposób graficzny potrzebne jest zastosowanie algorytmu generalizującego informacje.

2. Grafika komputerowa

Obiekty wykorzystywane w grafice komputerowej często mogą charakteryzować się skomplikowanymi kształtami. Im bardziej skomplikowany kształt tym więcej mocy obliczeniowej potrzebne będzie w celu wykonania danej operacji na tym kształcie. W niektórych przypadkach do uproszczenia graficznego danego obiektu używa się otoczki wypukłej jego kształtu. Ze względu na fakt, iż otoczka wypukła wielokąta zawsze będzie miała liczbę wierzchołków mniejszą lub równą liczbie wierzchołków samego wielokąta, powstała otoczka może posłużyć do wykonania mniejszej liczby obliczeń przy wykonywaniu operacji na danym obiekcie.

3. Detekcja obiektów

4. Wyznaczanie obwiedni sygnału

Sygnał to zapis informacji zmieniającej się w zależności od czasu. Taką informacją może być natężenie/napięcie prądu, natężenie pola elektromagnetycznego, dźwięk utworu muzycznego itd. W przypadku jeśli zmienną informację da się reprezentować w sposób liczbowy, możliwe jest graficzne przedstawienie sygnału. Zapi-

sanie informacji w ten sposób może być łatwiejsze do interpretacji przez człowieka. Jednak w przypadku, gdy mamy do czynienia ze skomplikowanym przebiegiem, na

Algorytm wyznaczający otoczkę wypukłą wielokąta prostego może posłużyć znajdowaniu obwiedni sygnału.

Rozdział III

Dynamiczna otoczka wypukła

1. Algorytm
2. Implementacja w języku Scala

Rozdział IV

Podsumowanie

Bibliografia

- [1] Ronald L. Graham, Frances Yao, Finding the Convex Hull of a Simple Polygon (1981)
- [2] Avraham A. Melkman, On-line Construction of the Convex Hull of a Simple Polyline (1985)
- [3] Jacqueline Jourban, Yair Gabay, A Method for Construction of 2D Hull For Generalized Cartographic Representation (2000)
- [4] Min Tang, Jie-yi Zhao, Ruo-feng Tong, Dinesh Manocha, GPU accelerated convex hull computation (2012)
- [5] Navjot Singh, Rinki Arya, R.K. Agrawal, A convex hull approach in conjunction with Gaussian mixture model for salient object detection (2016)
- [6] Fan Cheng, Qiangqiang Zhang, Ye Tian, Xingyi Zhang, Maximizing receiver operating characteristics convex hull via dynamic reference point-based multi-objective evolutionary algorithm (2019)