Algorytmy online
Lista 6

Zadanie 1 Rozważmy problem szeregowania na m identycznych maszynach (o takiej samej prędkości). Celem jest minimalizacja obciążenia najbardziej obciążonej maszyny.

a) **(2 pkt.)** Pokaż, że strategia zachłanna (przypisujemy zadanie do najmniej obciążonej maszyny) ma współczynnik ścisłej konkurencyjności równy $2 - 1/m$ (tj. pokaż dolne i górne ograniczenie).

b) **(2 pkt.)** Pokaż, że dla dowolnego $m \geqslant 2$, ścisła konkurencyjność dowolnego randomizowanego algorytmu dla problemu szeregowania zadań na 2 identycznych maszynach wynosi co najmniej $4/3$.

Zadanie 2 (3 pkt.) Pokaż, że ścisła konkurencyjność problemu Online Bidding wynosi co najmniej 4. Możesz skorzystać z następującego schematu:

i) Ustal nieskończony ciąg $0 < d_1 < d_2 < d_3 \ldots$ definiujący algorytm i oznacz konkurencyjność algorytmu przez R. Zdefiniuj $s_j = \sum_{i=1}^{j} d_i$ i pokaż, że dla każdego j musi zachodzić $s_{j+2} \leqslant R \cdot (s_{j+1} - s_j)$.

ii) Zdefiniuj $b_j = s_{j+1}/s_j$ i pokaż, że

$$(b_{j+1} - b_j) \cdot b_j \leqslant -b_j^2 + Rb_j - R \ . \tag{1}$$

iii) Pokaż, że dla $R < 4$ prawa strona (1) jest ujemna, a zatem ciąg $\{b_j\}_j$ jest malejący.

iv) Zaobserwuj, że ciąg $\{b_j\}_j$ jest zbieżny (dlaczego?). Niech $b = \lim_{j \to \infty} b_j$. Do czego zbiega lewa i prawa strona (1)?

Zadanie 3 (3 pkt.) (Problem inkrementalnych median). Dane są dwa zbiory: K (klienci) i M (miejsca na zbudowanie fabryk) oraz funkcja odległości $d(k, m)$ zdefiniowana dla dowolnej pary $(k, m) \in K \times M$. Możesz założyć, że funkcja d spełnia nierówność trójkąta, choć nie jest to potrzebne w tym zadaniu. Mówimy, że zbiór fabryk $F \subseteq M$ ma koszt

$$\textsc{cost}(F) := \sum_{k \in K} d(k, F) := \sum_{k \in K} \min_{f \in F} d(k, f) \ .$$

Dla rozmiaru $s \in \{1, \ldots, |M|\}$ minimalny koszt zbioru s fabryk oznaczamy przez $\textsc{Opt}(s)$. Przykładowo $\textsc{Opt}(|M|)$ jest kosztem postawienia fabryki w każdym dostępnym miejscu.

Zadaniem algorytmu jest rozbudowa zbioru fabryk, tj. skonstruowanie ciągu zbiorów $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_{|M|-1} \subseteq F_{|M|}$, takiego że dla każdego $i \in \{1, \ldots, |M|\}$ zachodzą warunki

i) $\textsc{cost}(F_i) \leqslant \textsc{Opt}(i)$,

ii) $|F_i| \leqslant 4 \cdot i$.

Wskazówka: to zadanie jest proste, tylko ma długą treść. Być może do konstrukcji ciągu F_i konieczne będzie rozwiązanie jakiegoś NP-trudnego problemu, ale nie należy się tym martwić.

Marcin Bieńkowski