Zadanie 4.2. Oznaczmy strony, które są na początku w pamięci podręcznej przez $x_1, x_2, \dots, x_\ell$ i rozważmy sekwencję wejściową σ składającą się z n faz $f_1, f_2, \dots, f_n$, gdzie faza f_i to ciąg podfaz

$$f_i = f_{i,\ell}, f_{i,\ell-1}, \dots, f_{i,2}, f_{i,1},$$

zaś podfaza $f_{i,j} = x_j^k$, gdzie wartość k ustalimy później. Oszacowanie $\textsc{Opt}$ jest proste:

$$\textsc{Opt}(\sigma) \leqslant \textsc{Mtf}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell} \textsc{Mtf}(f_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell} (\ell + k - 1) < n \cdot \ell \cdot (\ell + k). \tag{1}$$

Niech $\mathcal{E}_{i,j}$ oznacza zdarzenie, że bezpośrednio przed podfazą $f_{i,j}$ element x_j jest na ostatnim miejscu listy. Wtedy

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\textsc{Rand-Mtf}(\sigma)] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{E}[\textsc{Rand-Mtf}(f_{i,j})] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell} \left(\mathbf{E}[\textsc{Rand-Mtf}(f_{i,j}) \mid \mathcal{E}_{i,j}] \cdot \Pr[\mathcal{E}_{i,j}] + \mathbf{E}[\textsc{Rand-Mtf}(f_{i,j}) \mid \neg\mathcal{E}_{i,j}] \cdot \Pr[\neg\mathcal{E}_{i,j}]\right) \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{E}[\textsc{Rand-Mtf}(f_{i,j}) \mid \mathcal{E}_{i,j}] \cdot \Pr[\mathcal{E}_{i,j}]. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Zdarzenia $\mathcal{E}_{i,j}$ nie są niezależne, ale nie będzie to nam przeszkadzać. Załóżmy, że zdarzenie $\mathcal{E}_{i,j}$ zachodzi i popatrzmy na żądania podfazy $f_{i,j} = x_j^k$. Po $m-1$ żądaniach z tej podfazy, element x_j jest nadal na końcu z prawdopodobieństwem $1/2^{m-1}$. Stąd

$$\mathbf{E}[\textsc{Rand-Mtf}(f_{i,j}) \mid \mathcal{E}_{i,j}] \geqslant \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \ell = 2 \cdot (1 - 2^{-k}) \cdot \ell. \tag{3}$$

Ignorujemy tutaj koszt odwołań w przypadkach kiedy x_j znajdzie się już na początku.

Mówimy, że podfaza $f_{i,j} = x_j^k$ *zakończyła się sukcesem*, jeśli na końcu $f_{i,j}$ element x_j znajduje się na początku listy. Popatrzmy na zdarzenie $\mathcal{E}_{i,j}$ dla $i \geqslant 2$. Warunkiem wystarczającym dla $\mathcal{E}_{i,j}$ jest to, że $\ell - 1$ podfaz poprzedzających podfazę $f_{i,j}$ zakończy się sukcesem. A zatem

$$\Pr[\mathcal{E}_{i,j}] \geqslant (1 - 2^{-k})^{\ell-1}. \tag{4}$$

Powyższa nierówność zachodzi również dla $i = 1$ i dowolnego j (bo w takim przypadku wystarcza, żeby $j-1$ pierwszych podfaz zakończyło się sukcesem). Łącząc oszacowania (1), (2), (3) i (4) i wykorzustując nierówność Bernoulliego ($(1+x)^r \geqslant 1 + xr$ dla $x \geqslant -1$ i $r > 1$) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{E}[\textsc{Rand-Mtf}(\sigma)]}{\textsc{Opt}(\sigma)} &\geqslant \frac{n \cdot \ell \cdot 2 \cdot (1 - 2^{-k})^{\ell} \cdot \ell}{n \cdot \ell \cdot (\ell + k)} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{\ell} \cdot \left(1 - \frac{k}{\ell + k}\right) \\
&\geqslant 2 \cdot \left(1 - \frac{\ell}{2^k}\right) \cdot \left(1 - \frac{k}{\ell}\right) \\
&\geqslant 2 - 2 \cdot \left(\frac{\ell}{2^k} + \frac{k}{\ell}\right).
\end{aligned}$$

Biorąc $k = 2 \cdot \lceil \log \ell \rceil$ otrzymujemy

$$\frac{\mathbf{E}[\textsc{Rand-Mtf}(\sigma)]}{\textsc{Opt}(\sigma)} \geqslant 2 - O\left(\frac{\log \ell}{\ell}\right).$$