

Algorytmy online: lista 1

Zadanie 1. (1 pkt.) Pokaż, że współczynnik ścisłej konkurencyjności dowolnego deterministycznego algorytmu dla problemu poszukiwania krowy na prostej wynosi co najmniej 5.

Zadanie 2. (1 pkt.) Przypomnijmy, że w problemie poszukiwania krowy na prostej zakładamy, że krowa stoi w odległości równej co najmniej 1 od punktu startowego. Przedstawiony na wykładzie algorytm odchodził od punktu startowego, raz w lewo, raz w prawo, zaczynając od kierunku „w lewo”, na kolejne odległości: $q, q \cdot r, q \cdot r^2, q \cdot r^3, \dots$. Dla przedstawionego na wykładzie algorytmu wybraliśmy $q = 1$ oraz $r = 2$.

Rozważ problem poszukiwania krowy na prostej i załóż, że w powyższym algorytmie wybieramy początkowy kierunek rzucając (sprawiedliwą) monetą. Pokaż, że dla $q = 1$ i $r = 2$ taki algorytm jest ściśle 7-konkurencyjny.

Zadanie 3. (4 pkt.) Załóż, że w powyższym algorytmie wybieramy początkowy kierunek rzucając (sprawiedliwą) monetą, a dodatkowo wybieramy θ z jednostajnym rozkładem z przedziału $[0, 1)$. Pokaż, że dla $q = r^\theta$ taki algorytm jest ściśle $(1 + (r + 1)/\ln r)$ -konkurencyjny. Numerycznie wyznacz r minimalizujące ten współczynnik.

Zadanie 4. (4 pkt.) Niech

$$R = \frac{1}{1 - (1 - 1/B)^B}.$$

Skonstruuj randomizowany algorytm dla problemu wypożyczania nart, który jest ściśle R -konkurencyjny.¹ Do czego dąży to wyrażenie przy $B \rightarrow \infty$?

Wskazówki: Algorytm randomizowany jest w pełni opisywalny przez ciąg prawdopodobieństw $p_1, p_2, p_3, \dots, p_\infty$, gdzie p_i jest prawdopodobieństwem zakupu nart dnia i oraz $\sum_{i=1}^\infty p_i = 1$. Ogranicz się do klasy algorytmów, dla których $p_i = 0$ dla $i > B$. Jakie są możliwe strategie adwersarza przeciwko algorytmowi z takiej klasy? Pod warunkiem zastosowania danej strategii adwersarza: jaki będzie oczekiwany koszt algorytmu i jaki będzie koszt algorytmu optymalnego? Zauważ, że dla każdej takiej strategii musi zachodzić $\mathbb{E}[\text{ALG}] \leq R \cdot \text{OPT}$. Ogranicz się do algorytmów, dla których wszystkie te nierówności są równościami i wyznacz stąd wartości p_i .

Marcin Bieńkowski

¹To jest najlepszy możliwy do osiągnięcia współczynnik konkurencyjności, ale nie trzeba tego udowadniać.