Algorytmy online: lista 9

Zadanie 1. Chcemy za pomocą jednej transakcji zamienić jedngo bitcoina na złotówki w ciągu najbliższych T dni. Każdego dnia dowiadujemy się, jaki jest kurs danego dnia; jest on dowolną liczbą rzeczywistą z zakresu $[1, M]$. Wartości T i M są znane algorytmowi od początku.

a) **(1 pkt.)** Skonstruuj deterministyczny algorytm, który będzie ściśle $\sqrt{M}$-konkurencyjny.

b) **(2 pkt.)** Skonstruuj randomizowany algorytm, który będzie ściśle $O(\log M)$-konkurencyjny.

Zadanie 2. **(2 pkt.)** Rozważmy problem k serwisantów na okręgu, tj. przestrzeń, w której występują odwołania jest okręgiem, a odległość między dwoma punktami okręgu jest najkrótszą odległością liczoną wzdłuż okręgu. Rozważmy następujący randomizowany algorytm Circ:

> Na początku sekwencji wejściowej wybierz losowo jeden punkt P z okręgu. P jest barierą, która dzieli okrąg na odcinek (o początku i końcu w punkcie P). Następnie do obsługi żądań Circ uruchamia algorytm Double Coverage na tym odcinku (tj. nigdy nie przekracza punktu P).

Pokaż, że Circ jest $2k$-konkurencyjny.

Zadanie 3. **(3 pkt.)** Rozważmy następujący algorytm rozwiązujący problem 2 serwisantów na płaszczyźnie euklidesowej. Aby obsłużyć żądanie w punkcie r, algorytm wykonuje następujące kroki:

a) Niech x będzie serwisantem bliższym r zaś y dalszym (remisy rozstrzygamy dowolnie).

b) Przesuń y o $\frac{1}{2} \cdot (d(x,r) + d(x,y) - d(y,r))$ w stronę x.[1]

c) Przesuń x do r.

Pokaż że powyższy algorytm jest $O(1)$-konkurencyjny. *Wskazówka:* wykorzystaj funkcję potencjału podobną do tej wykorzystywanej w algorytmie Double Coverage.

Zadanie 4. **(2 pkt.)** Rozważmy graf czterowierzchołkowy będący kwadratem o równych długościach krawędzi. Rozważmy następujący algorytm randomizowany Alg dla problemu dwóch serwisantów w tym grafie. Alg rozpoczyna z serwisantami w dwóch różnych wierzchołkach. Aby obsłużyć żądanie w punkcie r:

a) jeśli Alg ma serwisanta w r, to nic nie robi;

b) w przeciwnym przypadku do r przesuwany jest ten z serwisantów, który jest bliższy r;

c) jeśli obaj serwisanci mają taką samą odległość do r, to serwisant do przesunięcia wybierany jest przez rzut monetą.

Pokaż, że Alg jest $O(1)$-konkurencyjny. Jakie jest najlepsze ograniczenie jakie potrafisz podać?

Marcin Bieńkowski

[1] Na prostej algorytm zachowuje się jak Double Coverage.