

Algorytmy online: lista 11

Zadanie 1. (2 pkt.) Przypomnijmy, że algorytm MOVE-TO-MIN (MTM) dla problemu migracji pliku na końcu fazy przenosił plik do wierzchołka $\arg \min_x \sum_{i=1}^D d(x, r_i)$. Algorytm MOVE-TO-LOCAL-MIN (MTLM) jest jego modyfikacją, która przenosi plik do wierzchołka $\arg \min_x D \cdot d(v_{\text{ALG}}, x) + 2 \cdot \sum_{i=1}^D d(x, r_i)$. W powyższym wzorze v_{ALG} jest wierzchołkiem, w którym algorytm ma plik w trakcie fazy. Pokaż, że konkurencyjność algorytmu MTLM wynosi co najmniej 5.¹

Wskazówka: najprościej wykorzystać do tego celu program liniowy z poprzedniej listy. Wystarczy dopisać w nim wymaganie `potential_start = potential_end`; i odpowiednio zmienić 3 wiersze definiujące algorytm.

Zadanie 2. W tym i następnym zadaniu rozważamy problem migracji pliku na grafie o dwóch wierzchołkach v_0 i v_1 połączonych krawędzią długości 1, gdzie rozmiar pliku jest równy $D \in \mathbb{N}$, zaś algorytm bezpośrednio po zobaczeniu żądania w kroku t i zapłaceniu za nie oblicza funkcję pracy w_t .

- (1 pkt.) Niech $W_t = (w_t(v_0) + w_t(v_1))/2$. Udowodnij, że dla dowolnego wejścia σ o długości T zachodzi $W_T \leq \text{OPT}(\sigma) + O(D)$.
- (3 pkt.) Niech v_i będzie wierzchołkiem, w którym algorytm DET ma obecnie plik. Jeśli $w_t(v_i) \geq w_t(v_{1-i}) + D$, to DET przenosi plik do v_{1-i} . Pokaż, że DET jest $O(1)$ -konkurencyjny. Jakie najlepsze oszacowanie potrafisz uzyskać?

Zadanie 3. (4 pkt.) Rozważmy model, w którym OPT musi przechowywać plik w jednym z wierzchołków, ale algorytm online może przechowywać plik w dowolnym miejscu krawędzi pomiędzy wierzchołkami v_0 i v_1 . Zakładamy że v_0 ma współrzędną 0 zaś v_1 współrzędną 1. Po obliczeniu funkcji pracy w_t , algorytm CONT przenosi plik do punktu o współrzędnej

$$p_t = \frac{1}{2} + \frac{w_t(v_0) - w_t(v_1)}{2D}.$$

Pokaź, że CONT jest $O(1)$ -konkurencyjny. Jakie najlepsze oszacowanie potrafisz uzyskać?

Marcin Bieńkowski

¹Możesz założyć, że D jest wielokrotnością wybranej przez Ciebie liczby.