# Algorytmy online: lista 6

**Zadanie 1.** Rozważmy problem szeregowania na $m$ identycznych maszynach (o takiej samej prędkości). Celem jest minimalizacja obciążenia najbardziej obciążonej maszyny.

**a)** **(2 pkt.)** Pokaż, że strategia zachłanna (przypisujemy zadanie do najmniej obciążonej maszyny) ma współczynnik ścisłej konkurencyjności równy $2 - 1/m$ (tj. pokaż dolne i górne ograniczenie).

**b)** **(2 pkt.)** Pokaż, że dla dowolnego $m \geq 2$, ścisła konkurencyjność dowolnego randomizowanego algorytmu dla problemu szeregowania zadań na 2 identycznych maszynach wynosi co najmniej $4/3$.

**Zadanie 2.** **(3 pkt.)** Pokaż, że ścisła konkurencyjność problemu Online Bidding wynosi co najmniej 4. Możesz skorzystać z następującego schematu:

**a)** Ustal nieskończony ciąg $0 < d_1 < d_2 < d_3 \ldots$ definiujący algorytm i oznacz konkurencyjność algorytmu przez $R$. Zdefiniuj $s_j = \sum_{i=1}^{j} d_i$ i pokaż, że dla każdego $j$ musi zachodzić $s_{j+2} \leq R \cdot (s_{j+1} - s_j)$.

**b)** Zdefiniuj $b_j = s_{j+1}/s_j$ i pokaż, że

$$(b_{j+1} - b_j) \cdot b_j \leq -b_j^2 + Rb_j - R \ . \tag{1}$$

**c)** Pokaż, że dla $R < 4$ prawa strona (1) jest ujemna, a zatem ciąg $\{b_j\}_j$ jest malejący.

**d)** Zaobserwuj, że ciąg $\{b_j\}_j$ jest zbieżny (dlaczego?). Niech $b = \lim_{j \to \infty} b_j$. Do czego zbiega lewa i prawa strona (1)?

**Zadanie 3.** **(3 pkt.)** (Problem inkrementalnych median). Dane są dwa zbiory: $K$ (klienci) i $M$ (miejsca na zbudowanie fabryk) oraz funkcja odległości $d(k, m)$ zdefiniowana dla dowolnej pary $(k, m) \in K \times M$. Możesz założyć, że funkcja $d$ spełnia nierówność trójkąta, choć nie jest to potrzebne w tym zadaniu. Mówimy, że zbiór fabryk $F \subseteq M$ ma koszt

$$\textsc{cost}(F) := \sum_{k \in K} d(k, F) := \sum_{k \in K} \min_{f \in F} d(k, f) \ .$$

Dla rozmiaru $s \in \{1, \ldots, |M|\}$ minimalny koszt zbioru $s$ fabryk oznaczamy przez $\textsc{Opt}(s)$. Przykładowo $\textsc{Opt}(|M|)$ jest kosztem postawienia fabryki w każdym dostępnym miejscu.

Zadaniem algorytmu jest rozbudowa zbioru fabryk, tj. skonstruowanie ciągu zbiorów $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_{|M|-1} \subseteq F_{|M|}$, takiego że dla każdego $i \in \{1, \ldots, |M|\}$ zachodzą warunki

**a)** $\textsc{cost}(F_i) \leq \textsc{Opt}(i)$,

**b)** $|F_i| \leq 4 \cdot i$.

*Wskazówka*: to zadanie jest proste, tylko ma długą treść. Być może do konstrukcji ciągu $F_i$ konieczne będzie rozwiązanie jakiegoś NP-trudnego problemu, ale nie należy się tym martwić.

*Marcin Bieńkowski*