Wydział, kierunek: WFiIS, FT	Imię i nazwisko: Marcin Mikołajczyk	Rok: 3	Grupa: 1
Data wykonania:	Data oddania:		OCENA:
25 czerwca 2025	25 czerwca 2025		

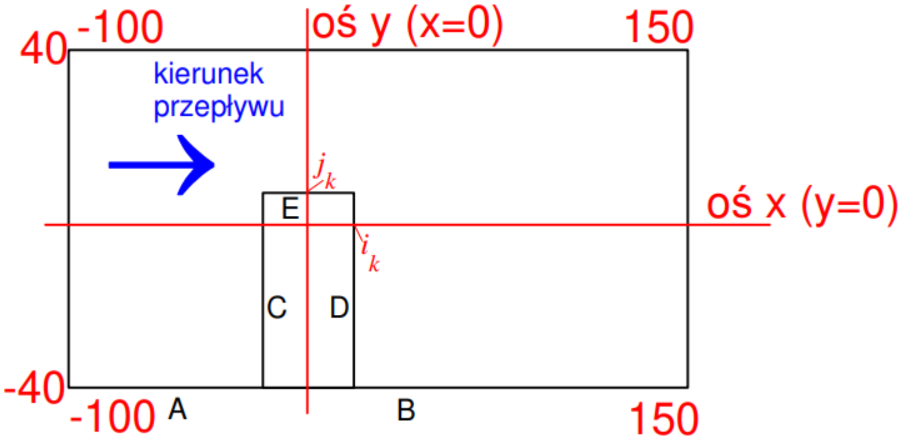
Projekt 3– Przepływ nieściśliwej cieczy lepkiej w rurze zastawką

Wprowadzenie

Celem ćwiczenia jest analiza stacjonarnego przepływu nieściśliwej cieczy lepkiej w rurze z przeszkodą (zastawką) przy wykorzystaniu funkcji strumienia ψ i wirowości ζ. Równania przepływu rozwiązywane są numerycznie metodą relaksacyjną. Rozważamy także przypadek przepływu bezlepkościowego (zad. 3).

Opis układu

Płyn przepływa przez prostokątny obszar obliczeniowy o wymiarach $[-100, 150] \times [-40, 40]$ w jednostkach siatkowych. Siatka ma krok $dz = 0.01$. Wewnątrz domeny znajduje się zastawka (przeszkoda), ograniczona współrzędnymi siatkowymi $-ik \leqslant i \leqslant ik$ oraz $-40 \leqslant j \leqslant jk$, gdzie $ik = 5$ i $jk = 10$. Lepkość i gęstość cieczy przyjęto: $\mu = 1$, $\rho = 1$.



Rysunek 1: Rura z zastawką. [1]

Funkcja strumienia i wirowość

Funkcja strumienia ψ definiuje pole prędkości jako:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Z-owa składowa rotacji (wirowość) dana jest przez:

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

Równania przepływu

Dla stacjonarnego przepływu obowiązują:

$$\nabla^2\psi = \zeta \tag{1}$$

$$\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\zeta = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} \tag{2}$$

Zakładamy $\mu = \rho = 1$. Równania rozwiązywane są iteracyjnie:

$$\psi(i,j) := \frac{1}{4}\left[\psi(i+1,j) + \psi(i-1,j) + \psi(i,j+1) + \psi(i,j-1) - \zeta(i,j)dz^2\right] \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\zeta(i,j) := {} & \frac{1}{4}\left[\zeta(i+1,j) + \zeta(i-1,j) + \zeta(i,j+1) + \zeta(i,j-1)\right] \\ & - \frac{1}{16}\left[(\psi(i,j+1) - \psi(i,j-1))(\zeta(i+1,j) - \zeta(i-1,j)) \right. \\ & \left. -(\psi(i+1,j) - \psi(i-1,j))(\zeta(i,j+1) - \zeta(i,j-1))\right]\end{aligned} \tag{4}$$

zad. 1) Przepływ w rurze bez zastawki (przepływ Poiseuille)

Dla rury bez przeszkody znane są rozwiązania analityczne. Prędkość pionowa $v = 0$, a pozioma zależy tylko od y:

$$u(y) = \frac{Q}{2\mu}(y - y_1)(y - y_2)$$

Przyjmujemy $Q = -1$, $y_2 = -y_1 = 0.4$. Funkcja strumienia i wirowość:

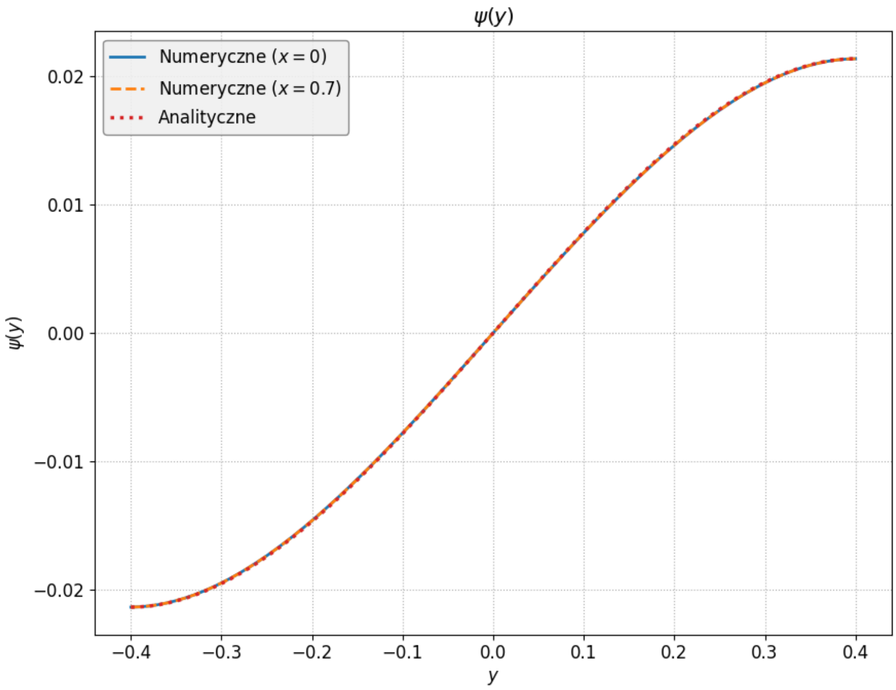
$$\psi_0(x,y) = \frac{Q}{2\mu}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}(y_1 + y_2) + y_1 y_2 y\right) \tag{5}$$

$$\zeta_0(x,y) = \frac{Q}{2\mu}(2y - y_1 - y_2) \tag{6}$$

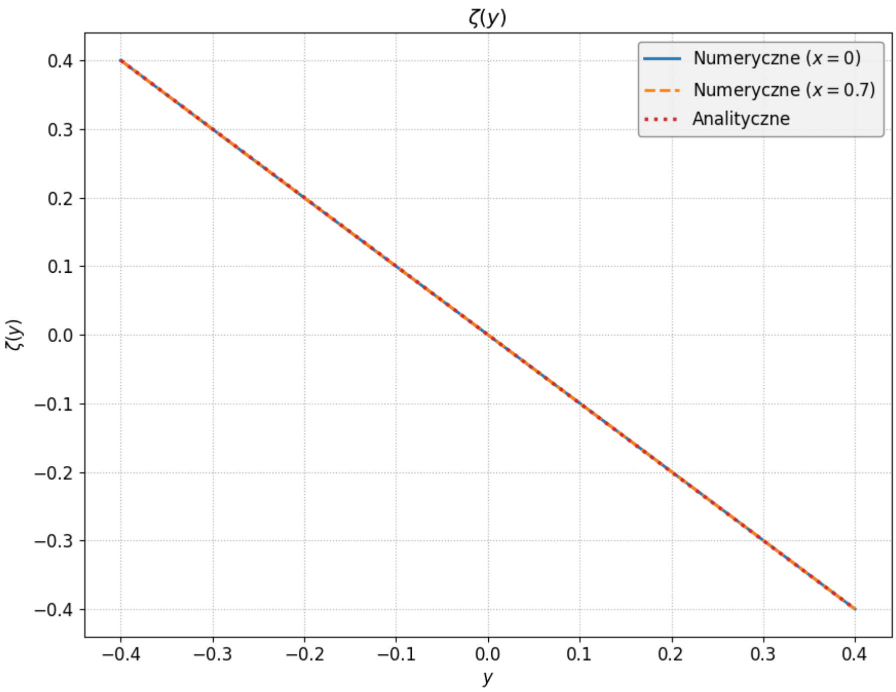
Opis metody

W trakcie każdej iteracji wartości ψ i ζ w punktach wewnętrznych siatki są modyfikowane zgodnie z przepisem relaksacyjnym. Obliczenia rozpoczynają się od przypisania zerowych wartości, przy jednoczesnym zastosowaniu warunków brzegowych wynikających z rozwiązania analitycznego. Iteracje odbywają się do momentu osiągnięcia stanu ustalonego. Za kryterium zbieżności przyjęto zmianę wartości funkcji strumienia w punkcie kontrolnym ($x = 0{,}5,\ y = 0$) mniejszą niż $\varepsilon = 10^{-7}$.

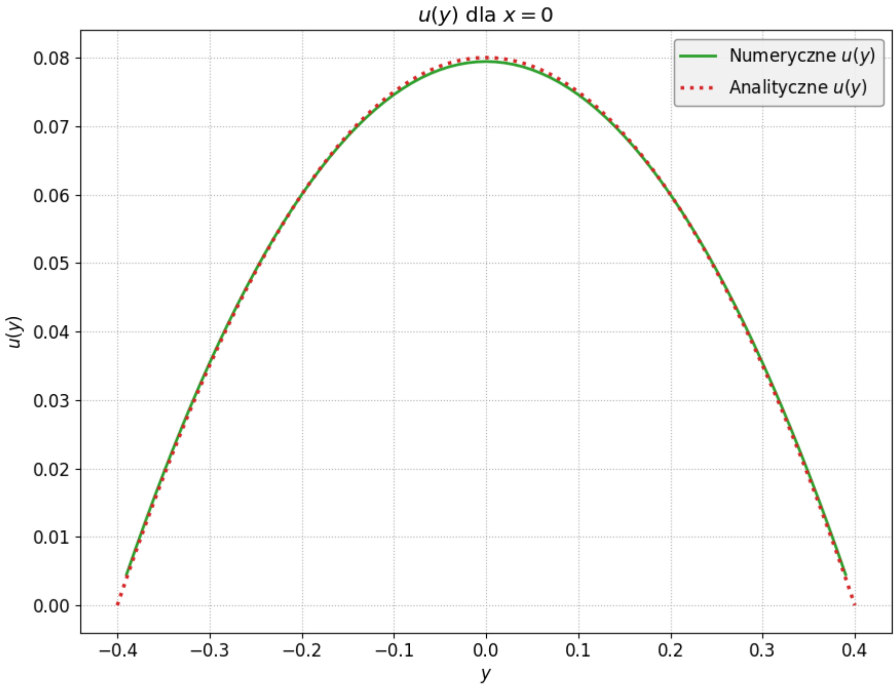
Wyniki



Rysunek 2: Porównanie numerycznej i analitycznej funkcji strumienia $\psi(y)$ na przekrojach $x = 0$ i $x = 0.7$.



Rysunek 3: Porównanie numerycznej i analitycznej wirowości $\zeta(y)$ na przekrojach $x = 0$ i $x = 0.7$.



Rysunek 4: Porównanie numerycznego i analitycznego profilu prędkości poziomej $u(y)$ na przekroju $x = 0$.

Wnioski

Porównano profile ψ, ζ i $u(y)$ dla $x = 0$ i $x = 0.7$ z rozwiązaniem analitycznym. Wyniki numeryczne dobrze pokrywają się z teorią. Profil prędkości poziomej $u(y)$ ma charakterystyczny, paraboliczny kształt, z maksymalną wartością w osi kanału ($y = 0$) i zerową prędkością na ściankach ($y = \pm 0.4$). Lepkość powoduje hamowanie płynu przy stałych brzegach. Różnice między przekrojami w $x = 0$ i $x = 0.7$ są pomijalnie małe, co świadczy o tym, że przepływ jest w pełni rozwinięty i jednorodny wzdłuż osi kanału, zgodnie z założeniami modelu.

zad. 2) Przepływ w rurze z zastawką

Do układu wstawiono zastawkę. Warunki brzegowe na ψ zgodne są z profilem Poiseuille na górnej i dolnej ścianie. Na wirowość ζ wprowadzamy warunki zależne od ψ:

$$\zeta(i, 40) = \frac{2(\psi(i, 39) - \psi(i, 40))}{dz^2} \tag{7}$$

$$\zeta(i, -40) = \frac{2(\psi(i, -39) - \psi(i, -40))}{dz^2} \tag{8}$$

$$\zeta(-ik, j) = \frac{2(\psi(-ik - 1, j) - \psi(-ik, j))}{dz^2} \tag{9}$$

$$\zeta(ik, j) = \frac{2(\psi(ik + 1, j) - \psi(ik, j))}{dz^2} \tag{10}$$

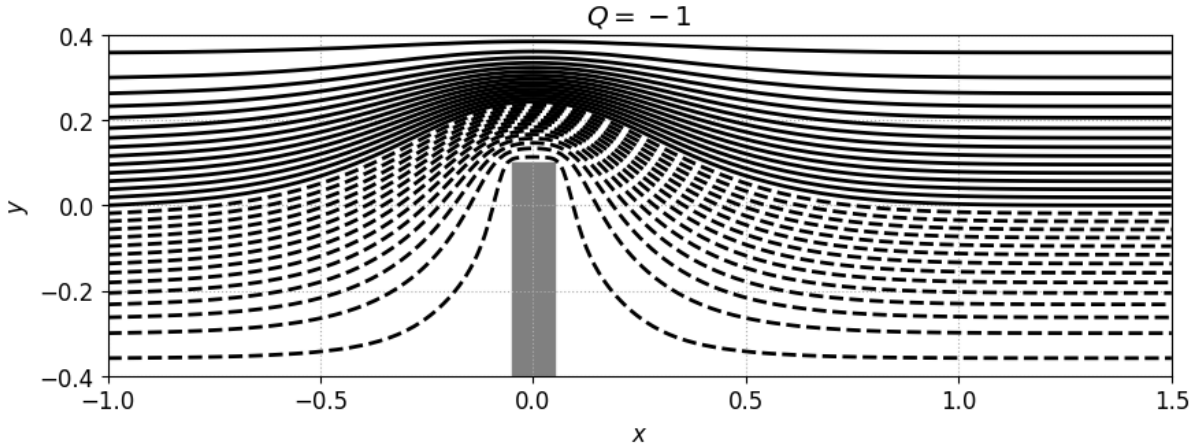
$$\zeta(i, jk) = \frac{2(\psi(i, jk + 1) - \psi(i, jk))}{dz^2} \tag{11}$$

Na narożnikach stosujemy średnie arytmetyczne. Obliczenia wykonano dla $Q = -1, -10, -100, -200, -400$.

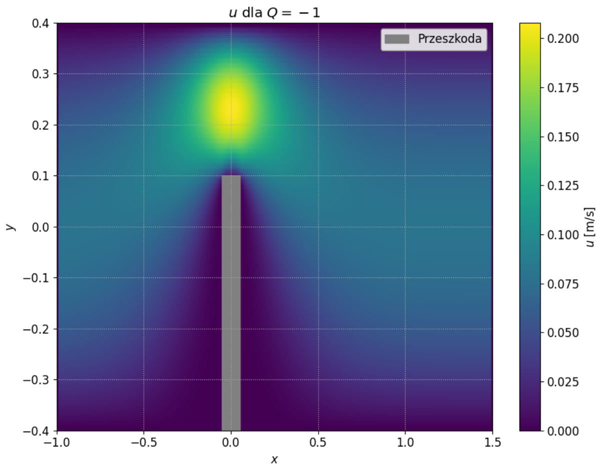
Opis metody

Program w każdej iteracji dynamicznie oblicza wartości wirowości (ζ) na ściankach kanału i krawędziach zastawki na podstawie aktualnego pola funkcji strumienia (ψ). Symulacja jest inicjalizowana analitycznym rozwiązaniem dla przepływu bez przeszkody.

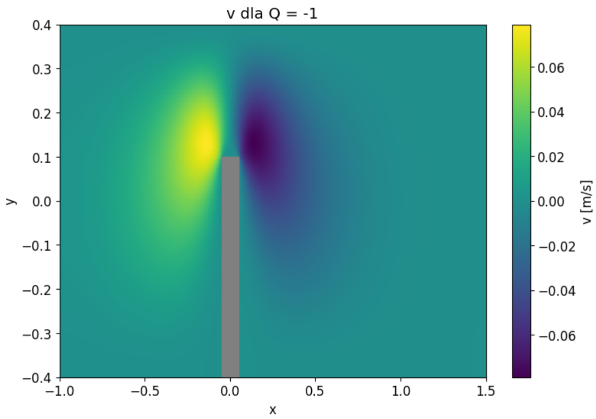
Wyniki



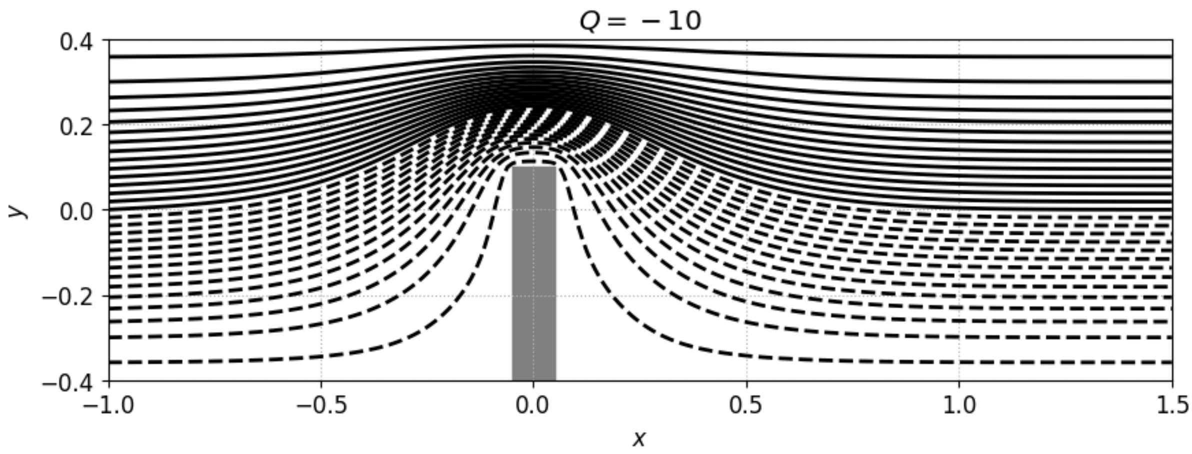
Rysunek 5: Linie przepływu dla Q=-1.



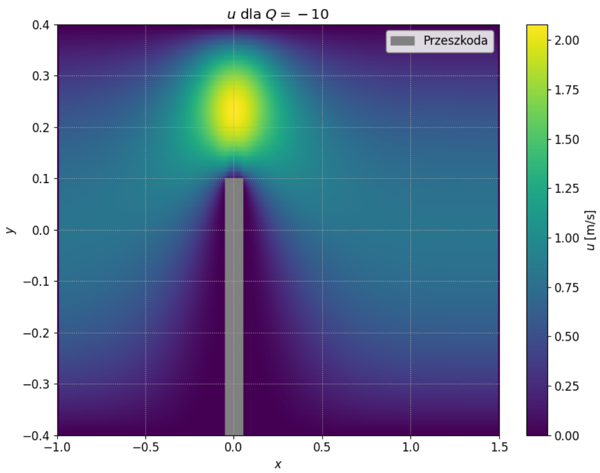
Rysunek 6: Rozkład prędkości prędkości poziomej u dla Q=-1.



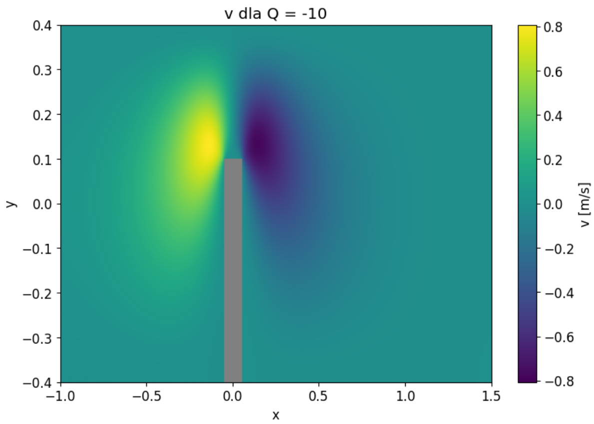
Rysunek 7: Rozkład prędkości pionowej v dla Q=-1.



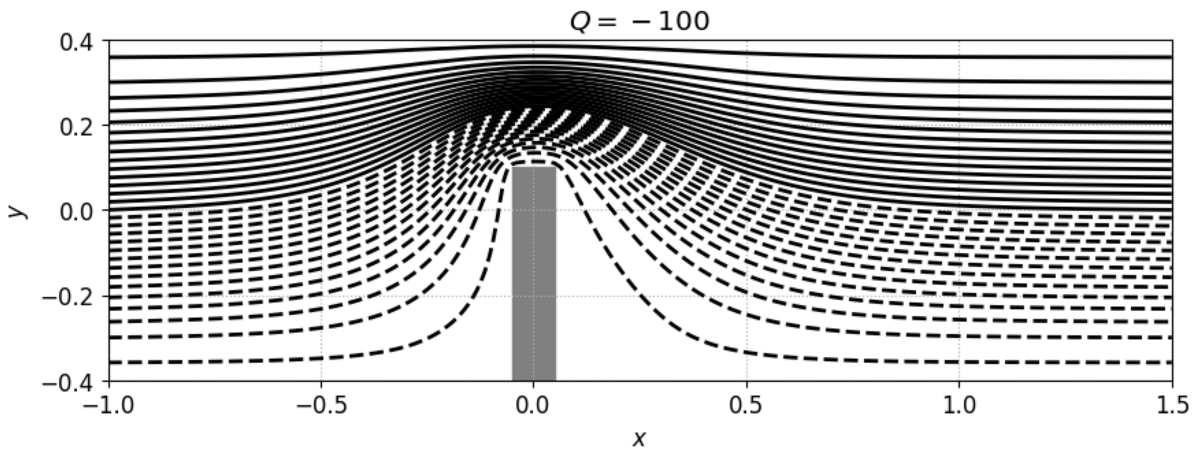
Rysunek 8: Linie przepływu dla Q=-10.



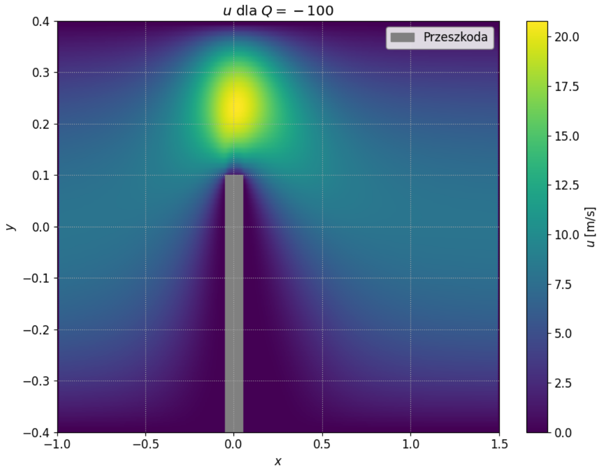
Rysunek 9: Rozkład prędkości poziomej u dla Q=-10.



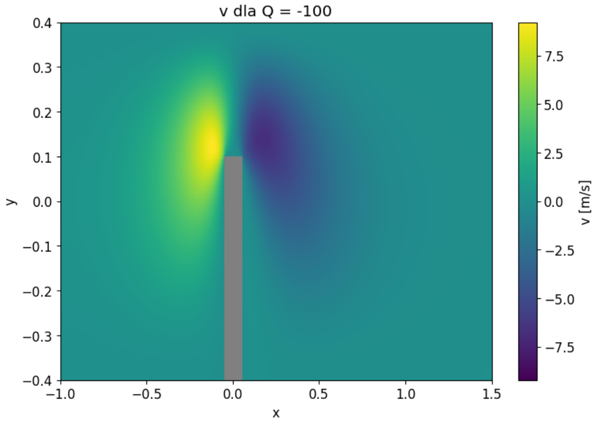
Rysunek 10: Rozkład prędkości pionowej v dla Q=-10.



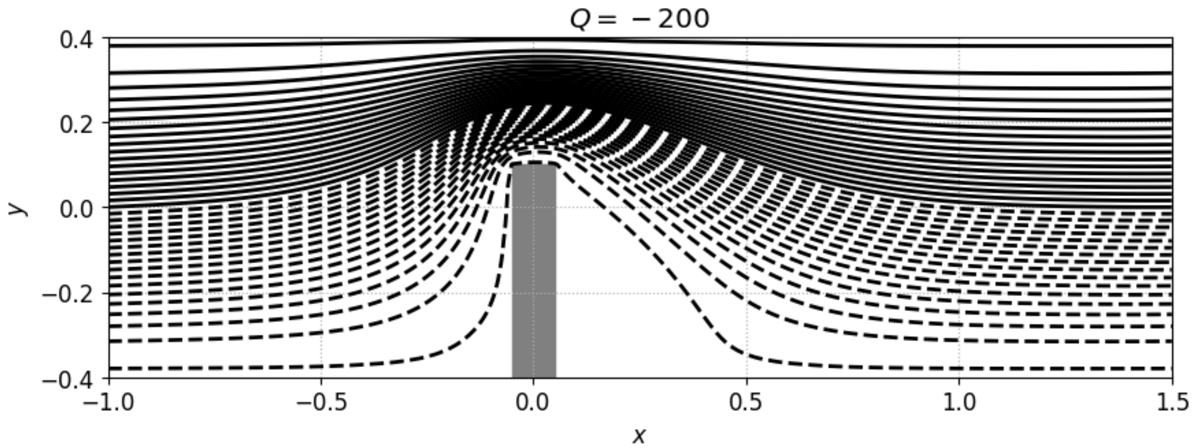
Rysunek 11: Linie przepływu dla Q=-100.



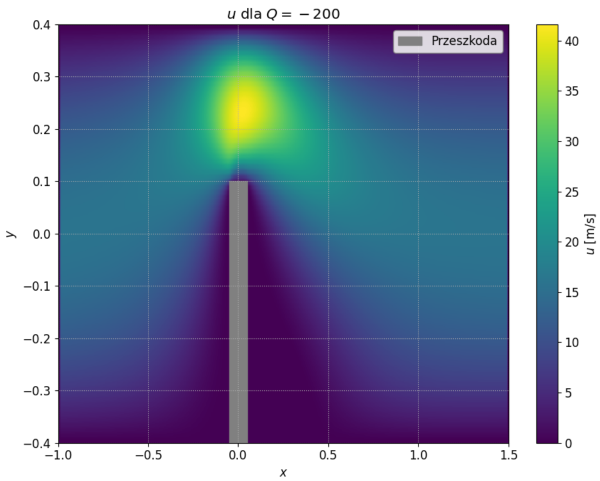
Rysunek 12: Rozkład prędkości poziomej u dla Q=-100.



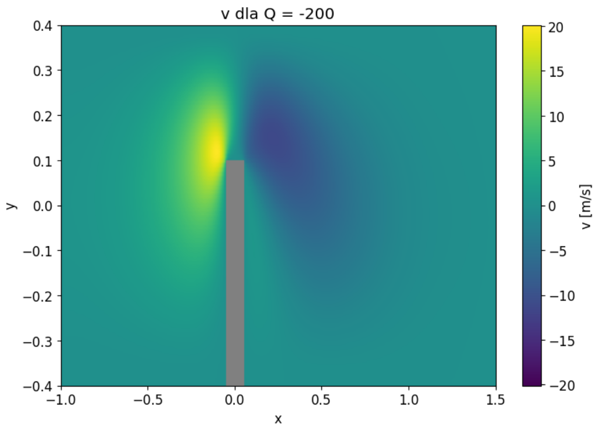
Rysunek 13: Rozkład prędkości pionowej v dla Q=-100.



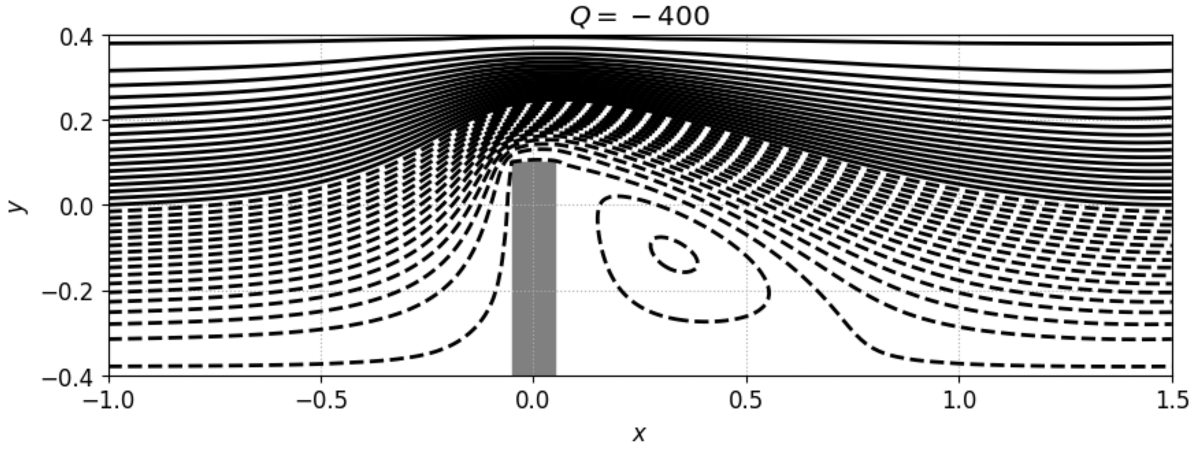
Rysunek 14: Linie przepływu dla Q=-200.



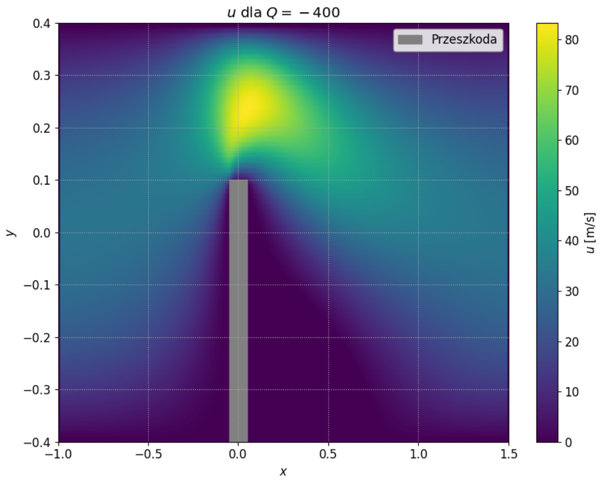
Rysunek 15: Rozkład prędkości poziomej u dla Q=-200.



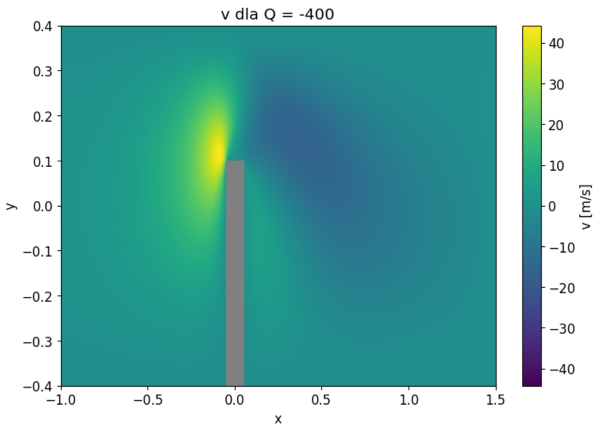
Rysunek 16: Rozkład prędkości pionowej v dla Q=-200.



Rysunek 17: Linie przepływu dla Q=-400.



Rysunek 18: Rozkład prędkości poziomej u dla Q=-400.



Rysunek 19: Rozkład prędkości pionowej v dla Q=-400.

Wnioski

Linie strumienia ulegają zagęszczeniu nad przeszkodą, co wskazuje na lokalny wzrost prędkości cieczy. Za zastawką zagęszczenie linii jest małe co oznacza, że prędkość tam maleje. Za zastawką formują się wiry, które stają się większe wraz ze wzrostem wartości bezwzględnej gradientu ciśnienia $|Q|$. Prędkość pozioma jest największa w zwężeniu nad zastawką. Prędkość pionowa również ma największe wartości w pobliżu szczytu zastawki, gdzie płyn jest zmuszony do zmiany kierunku.

zad. 3) Przepływ w rurze z zastawką z lepkością $\mu = 0$

Zakładamy $\mu = 0$, $Q = 0$, $\zeta = 0$. Równanie redukuje się do równania Laplace'a:

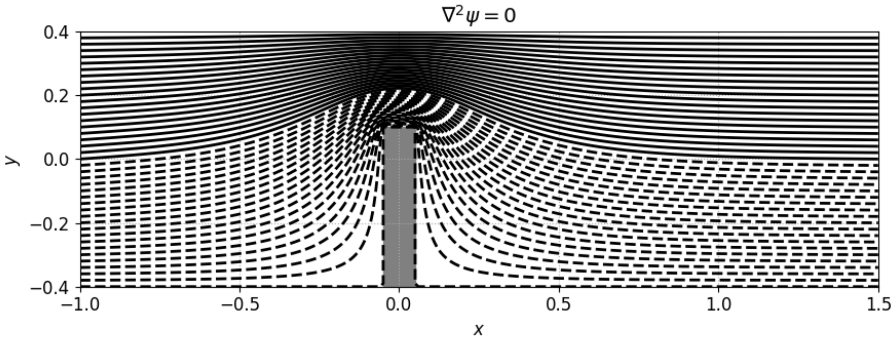
$$\nabla^2 \psi = 0$$

Na wejściu i wyjściu rury zadano $\psi = Ay$, gdzie $A = 1$. Na granicach ψ przepisano odpowiednio z wejścia i wyjścia.

Opis metody

Program ignoruje wirowość ($\zeta = 0$) i za pomocą metody relaksacyjnej rozwiązuje równanie Laplace'a dla funkcji strumienia ($\nabla^2\psi = 0$).

Wyniki



Rysunek 20: Linie przepływu dla cieczy nielepkiej wokół zastawki.

Wnioski

Linie strumienia płynnie omijają zastawkę, po czym wracają do swojego pierwotnego, równoległego ułożenia. Wiry nie powstają, co stanowi różnicę w porównaniu z przepływami lepkimi.

Literatura

[1] *Instrukcja do ćwiczenia UPEL MOFiT, dostęp 25 czerwca 2025*