Wydział, kierunek: WFiIS, FT	Imię i nazwisko: Marcin Mikołajczyk	Rok: 3	Grupa: 1
Data wykonania:	Data oddania:		OCENA:
31 maja 2025	31 maja 2025		

Projekt 2 – Równanie Poissona: relaksacja i nadrelaksacja

Wstęp[1]

Celem projektu jest rozwiązanie równania Poissona w 2D:

$$\nabla^2 u = -\rho(x, y), \tag{1}$$

gdzie gęstość ładunku:

$$\rho(x, y) = \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2 + y^2}{d^2}\right) - \exp\left(-\frac{(x + x_0)^2 + y^2}{d^2}\right),$$

przy $d = 4$, $x_0 = 4$.

Pracujemy na siatce $[-N, \ldots, N] \times [-N, \ldots, N]$ z krokiem $dx = 1$ w obydwu kierunkach.
Układ umieszczony jest w metalowym kwadratowym uziemionym pudle. Stąd waruneki brzegowe $u(x, y) = 0$ gdy $|x| = N$ lub $|y| = N$.
Przyjmujemy $N = 31$.

Z dyskretyzacji równania otrzymano przepis relaksacyjny, gdzie jedna iteracja procedury relaksacji polega na zastosowaniu wzoru (2) dla wszystkich punktów siatki poza brzegiem.

$$u(i, j) := \frac{u(i + 1, j) + u(i - 1, j) + u(i, j + 1) + u(i, j - 1) + \rho(i, j)dx^2}{4}. \tag{2}$$

Zbieżność iterowanej funkcji do rozwiązania równania Poissona można śledzić licząc całkę z gęstości lagranżjanu dla układu ładunek-pole:

$$S = \int_P \left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) - \rho(x, y)u(x, y)\right] dx\, dy. \tag{3}$$

Ze względu na to, że operator pochodnej jest antyhermitowski, wyrażenie to można przepisać do formy:

$$S = -\int_P \left[\frac{1}{2}u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho(x, y)u(x, y)\right] dx\, dy. \tag{4}$$

W wersji dyskretnej:

$$S = -\sum_{i,j=-N+1}^{N-1} \left[\frac{1}{2}u(i, j)\frac{u(i + 1, j) + u(i - 1, j) - 2u(i, j)}{dx^2}\right. \tag{5}$$

$$+\frac{1}{2}u(i, j)\frac{u(i, j + 1) + u(i, j - 1) - 2u(i, j)}{dx^2} \tag{6}$$

$$\left.+\rho(i, j)u(i, j)\right] dx^2. \tag{7}$$

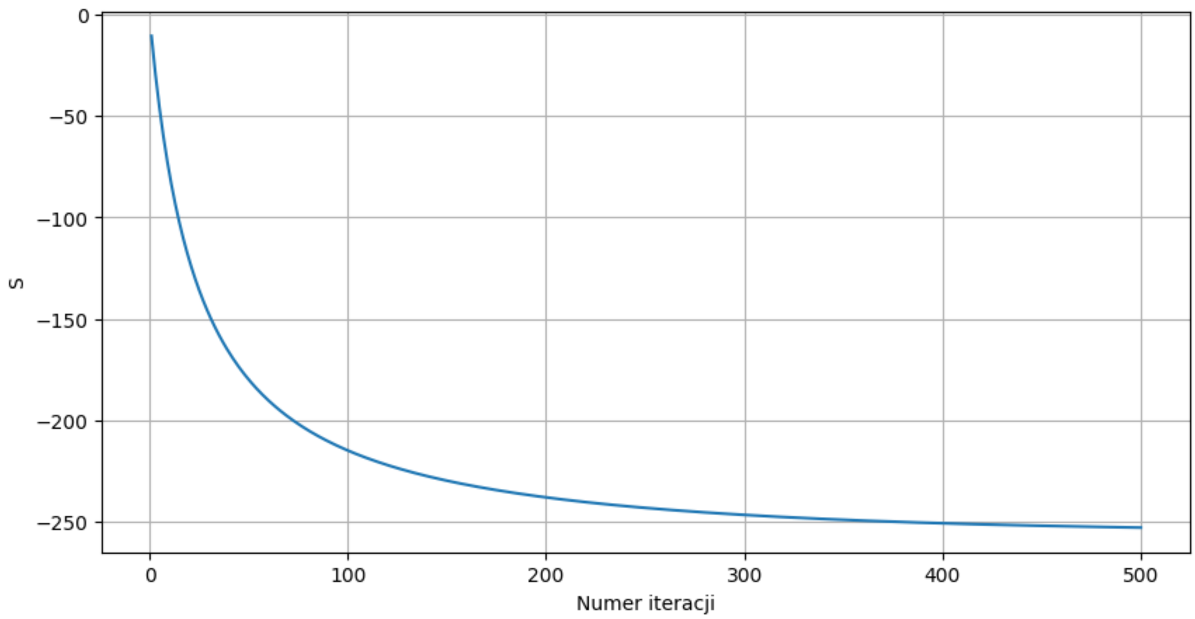
Im niższa wartość S, tym bliższy wynik dokładnego rozwiązania. Jakość rozwiązania przybliżonego można również ocenić odwracając równanie Poissona i sprawdzić, w jakim stopniu ρ' odtwarza ρ.:

$$\rho'(x,y) = -\frac{u(i+1,j) + u(i-1,j) + u(i,j+1) + u(i,j-1) - 4u(i,j)}{dx^2}. \tag{8}$$

Zadanie 1

Liczymy do 500 iteracji pętli relaksacyjnej. Startujemy od $u = 0$. Obliczono wartości funkcjonału S, przybliżoną gęstość ładunku ρ' oraz różnicę $\delta(x,y) = \rho'(x,y) - \rho(x,y)$.

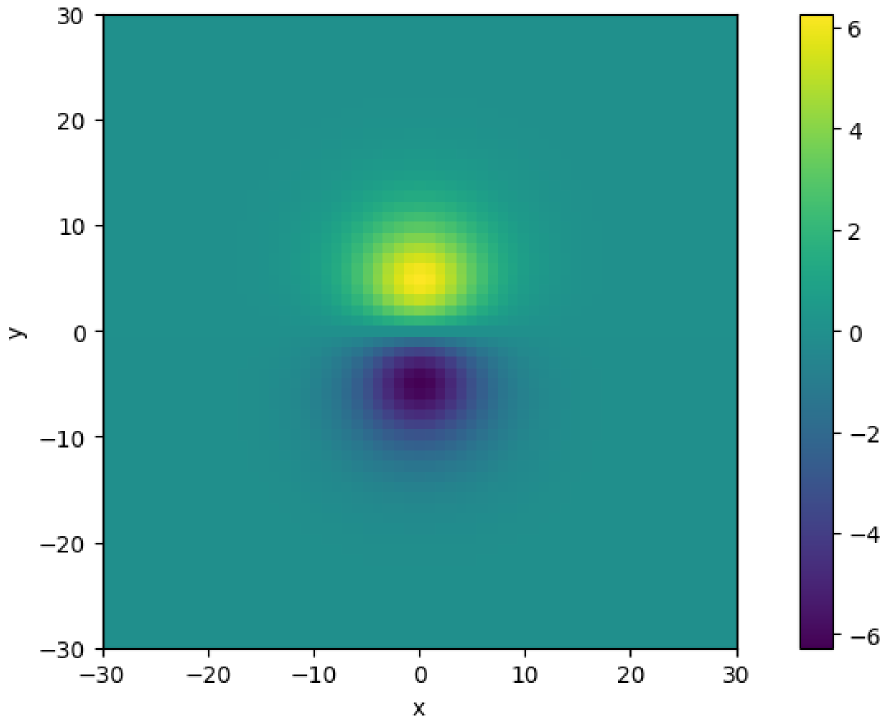
1.1



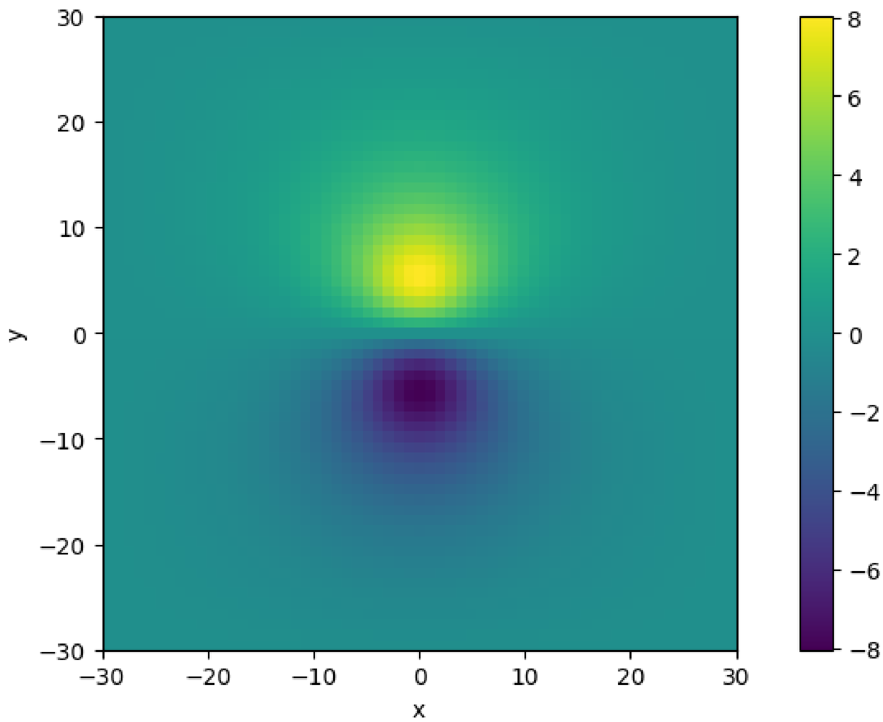
Rysunek 1: Wykres S od numeru iteracji.

Wartość funkcjonału S maleje w miarę kolejnych iteracji.

1.2

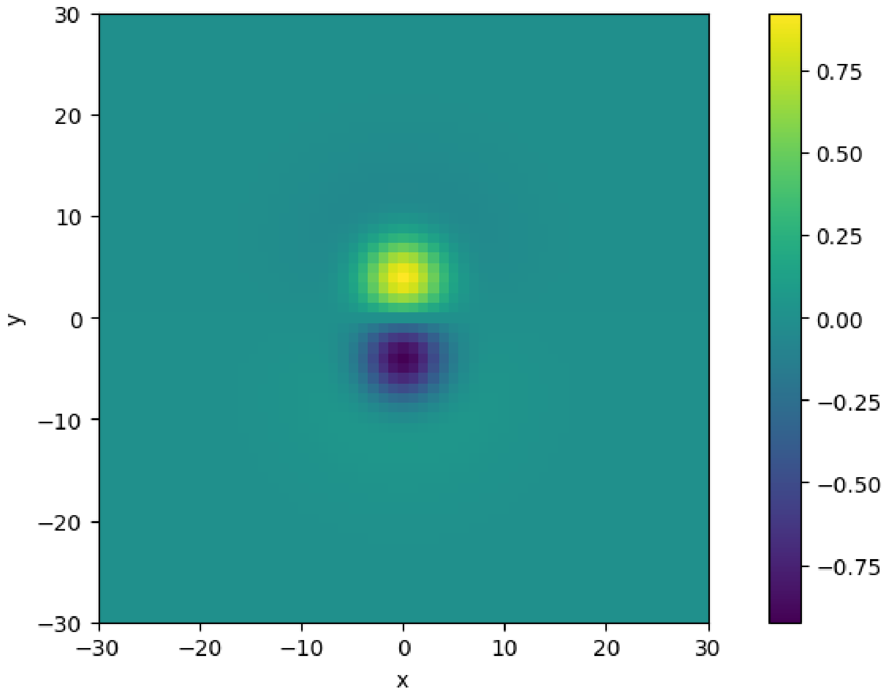


Rysunek 2: Wykres potencjału u po 100 iteracjach.

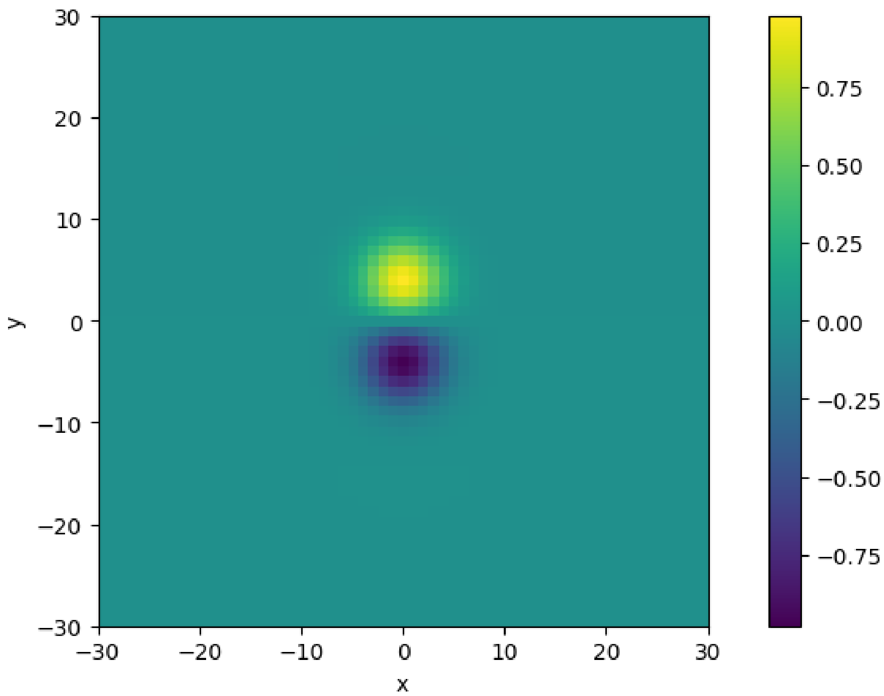


Rysunek 3: Wykres potencjału u po 500 iteracjach.

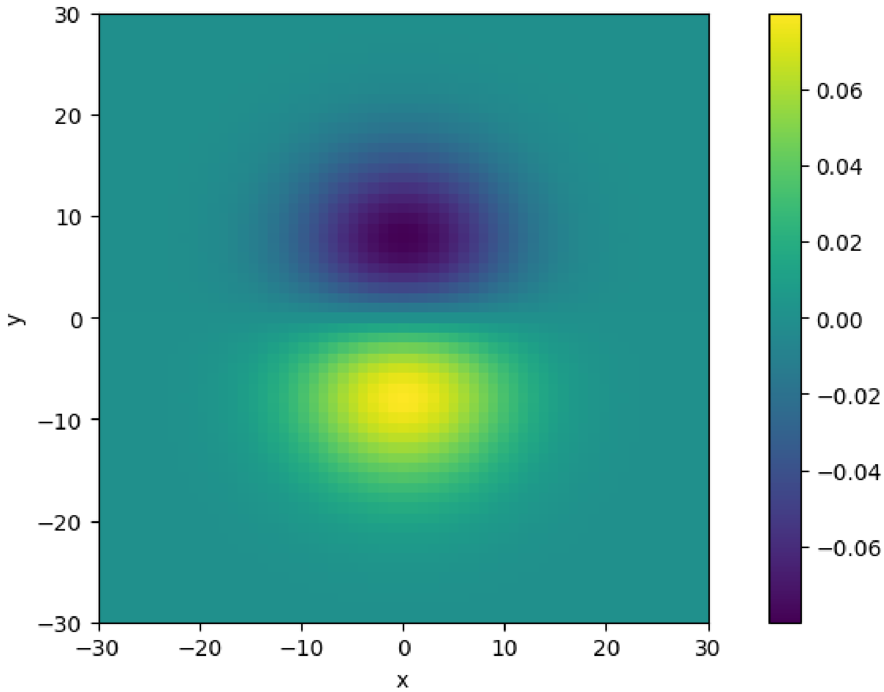
1.3 ρ' i $\delta(x, y) = \rho'(x, y) - \rho(x, y)$.



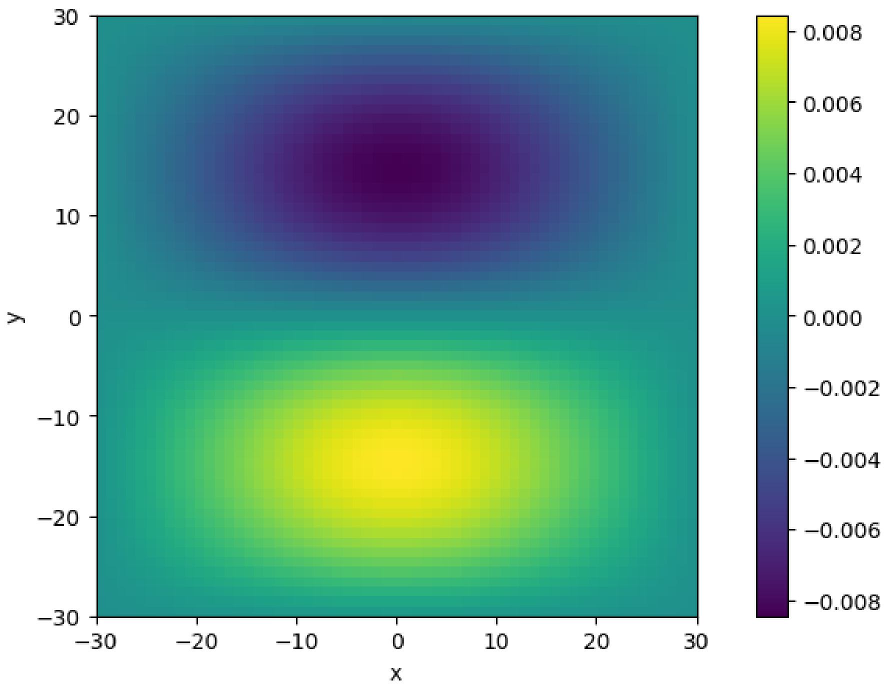
Rysunek 4: Wykres ρ' po 100 iteracjach.



Rysunek 5: Wykres ρ' po 500 iteracjach.



Rysunek 6: Wykres $\delta(x, y)$ po 100 iteracjach.



Rysunek 7: Wykres $\delta(x, y)$ po 500 iteracjach.

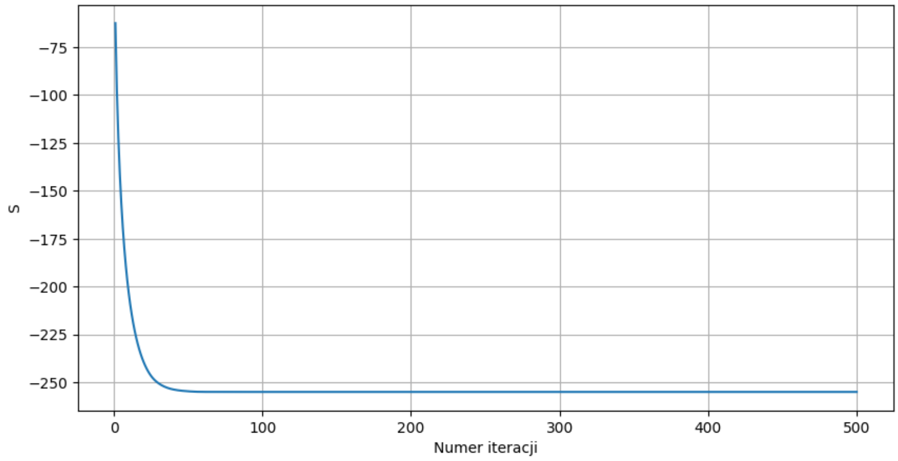
Mała róznica $\delta(x, y)$ pokazuje, że ρ' jest dobrym odwzorowaniem funkcji pierwotnej. Wraz z liczbą iteracji różnica ta maleje.

Zadanie 2

Modyfikacja wzoru relaksacyjnego:

$$u(i,j) := (1-w)u(i,j) + w \cdot \frac{u(i+1,j)+u(i-1,j)+u(i,j+1)+u(i,j-1)+\rho(i,j)dx^2}{4}, \quad (9)$$

gdzie $w > 1$ to współczynnik nadrelaksacji. Przyjęto $w = 1.9$.



Rysunek 8: Wykres S od numeru iteracji.

Szybciej obniżona wartość funkcjonału. Zbieżność jest znacznie szybsza niż w zadaniu 1. Stabilizacja w około 50 krokach.

Zadanie 3

Rozwiązanie równania Poissona można uzyskać również minimalizując bezpośrednio funkcjonał S.
Dla każdego punktu (i,j):

1. Obliczono $S(\delta_1 = 0)$, $S(\delta_2 = 0.5)$, $S(\delta_3 = 1)$.
2. Wyznaczono ekstremum parabolicznego S:
$$\delta_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3S_1 - 4S_2 + S_3}{S_1 - 2S_2 + S_3}$$
3. Obliczono $S_4 = S(\delta_4)$.
4. Zmieniamy wartość potencjału $u(i,j)$ o $\delta_{i_{\min}}$, gdzie $S(\delta_{i_{\min}})$ jest najmniejsze z S_1–S_4.

Obliczono liczymy lokalny przyczynek do S:

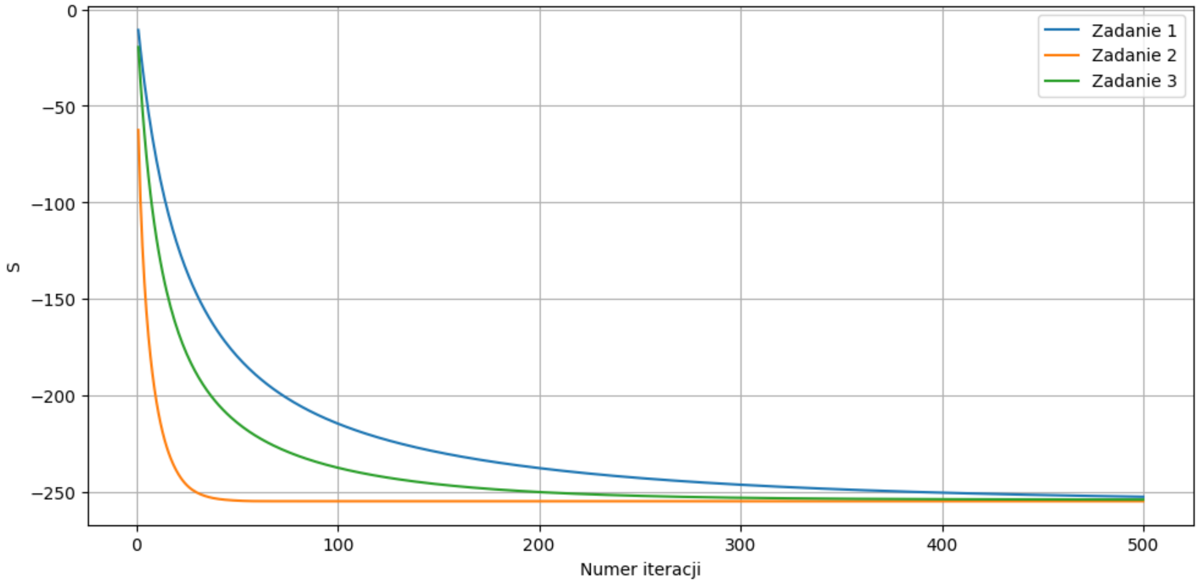
$$S_{\text{loc}}(u_{i_0,j_0}) = -\sum_{i=i_0-1}^{i_0+1} \sum_{j=j_0-1}^{j_0+1} \left[\frac{1}{2}u(i,j)\frac{u(i+1,j)+u(i-1,j)-2u(i,j)}{dx^2} \right. \quad (10)$$

$$\left. +\frac{1}{2}u(i,j)\frac{u(i,j+1)+u(i,j-1)-2u(i,j)}{dx^2} + \rho(i,j)u(i,j)\right] dx^2. \quad (11)$$

Wersja uproszczona (odporna na wyjście poza tablicę):

$$S_{\text{loc}}(u_{i_0,j_0}) = -\frac{1}{2}\left[2u(i_0,j_0)(u(i_0+1,j_0)+u(i_0-1,j_0)\right. \tag{12}$$

$$\left. +u(i_0,j_0+1)+u(i_0,j_0-1)) - 4(u(i_0,j_0))^2 - \rho(i_0,j_0)u(i_0,j_0)dx^2\right] \tag{13}$$



Rysunek 9: Wykres S od numeru iteracji. Porównanie tempa zbieżności dla zadań 1, 2, 3.

Metoda ta zbiega szybciej niż pierwotna relaksacja z zadania 1, ale wolniej niż nadrelaksacja z zadania 2.

Zadanie 4

Iterację minimalizującą S można poprowadzić w kierunku gradientu S jako funkcji u_{ij}. Liczymy:

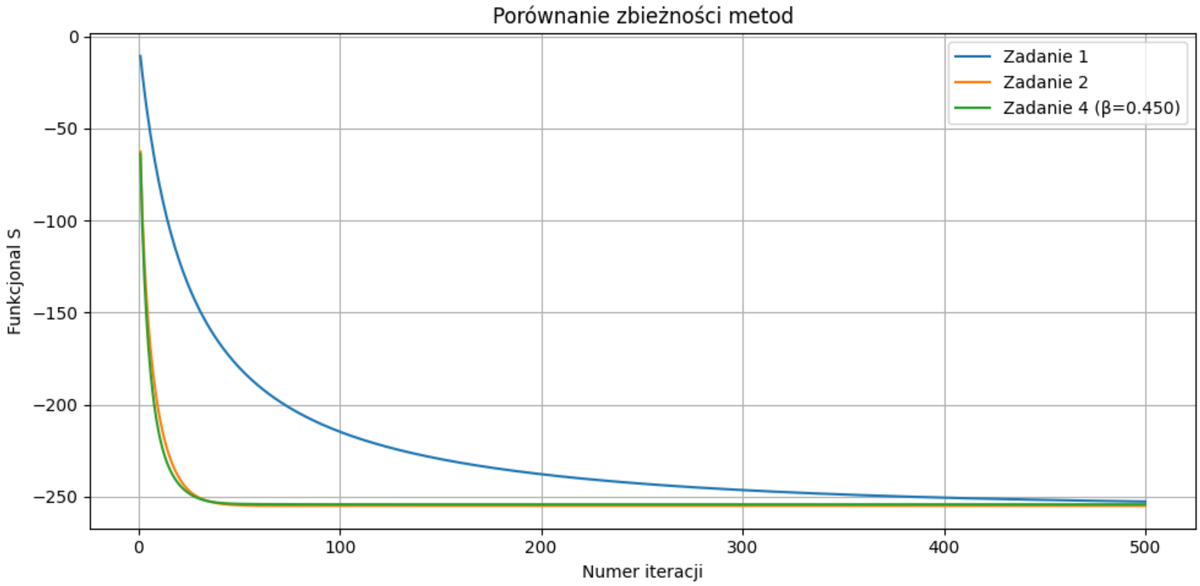
$$S^+ = S(u + d\delta_{ij}), \tag{14}$$

$$S^- = S(u - d\delta_{ij}), \tag{15}$$

$$\nabla_{ij} S \approx \frac{S^+ - S^-}{2d},$$

$$u(i,j) := u(i,j) - \beta \nabla_{ij} S.$$

Parametr iteracji powinien znajdować się w zakresie $\beta < 0.5$. Przyjęto $d = 0.001$.
Wyznaczone eksperymentalnie optymalne $\beta = 0,45$.

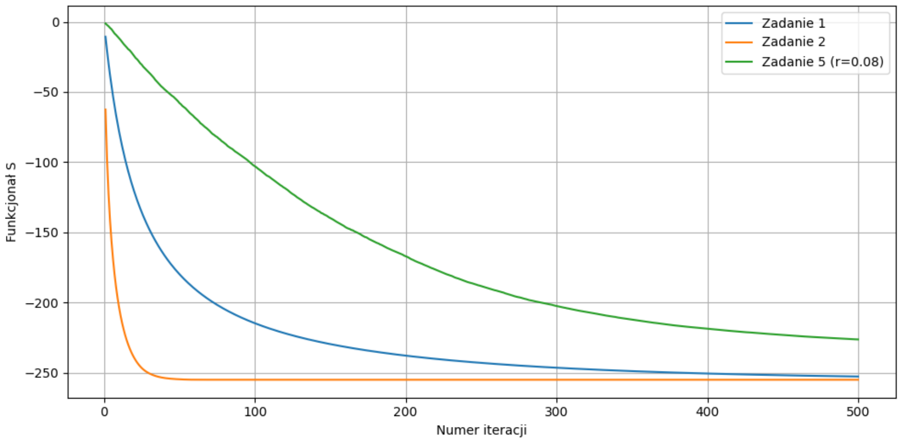


Rysunek 10: Wykres S od numeru iteracji. Porównanie tempa zbieżności dla zadań 1, 2, 4.

Zbiega równie szybko co nadrelaksacja z zadania 2. Wykorzystanie gradientu i dobrze dobranego parametru β sprawia, że metoda jest efektywniejsza obliczeniowo niż poprzednie metody.

Zadanie 5

Wartość u_{ij} zmieniano losowo w przedziale $(-r, r)$ zmianę akceptujemy tylko, jeśli S maleje. W jednej iteracji przechodzimy przez wszystkie punkty siatki.
Metodą prób dobrano r=0.08 będące kompromisem między szybkością zmian a stabilnścią.



Rysunek 11: Wykres S od numeru iteracji. Porównanie tempa zbieżności dla zadań 1, 2, 5.

Z powodu trudności doboru parametru r metoda ta może być użyteczna do doszlifowania rozwiązania. Nie sprawdza się jako podstawowy sposób minimalizacji. Dobór parametru r jest czasochłonny.

Literatura

[1] *Instrukcja do ćwiczenia UPEL MOFiT, dostęp 31 maja 2025*