Programowanie liniowe - algorytm SIMPLEX

Marcin Ochman

16 maja 2014

1 Opis problemu

Na samym początku, chciałbym przybliżyć teoretyczne podejście do problemów optymalizacyjnych.

1.1 Problem optymalizacyjny

Często mamy do czynienia z problemami optymalizacyjnymi tzn. szukamy pewnych argumentów $x_0, x_1, x_2, x_3...$ takich, aby funkcja $f(x_0, x_1, x_2, x_3, ...)$ przyjmowała minimalną lub maksymalną wartość tj.

$$x_0, x_1, x_2, x_3... \rightarrow min\{f(x_0, x_1, x_2, x_3)\} \tag{1}$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3... \rightarrow max\{f(x_0, x_1, x_2, x_3)\} \tag{2}$$

Zdarza się jednak, że mamy do czynienia z góry określonymi ograniczeniami:

$$\begin{aligned} g_1(x_0, x_1, x_2, x_3, ...) \leqslant c_1 \\ g_2(x_0, x_1, x_2, x_3, ...) \leqslant c_2 \\ ... \end{aligned} \tag{3}$$

wtedy, musimy szukać optymalnego rozwiązania w zbiorze określonym przez nierówności 3. Liniowość problemu upraszcza go tak, że nasze funkcje $f, g_1, g_2, ...$ wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3, ...) = c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, ... \\ a_{0,0}x_0 + a_{0,1}x_1 + a_{0,2}x_2 + a_{0,3}x_3, ... \leqslant b_1 \\ a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3, ... \leqslant b_2 \\ ... \end{aligned} \tag{4}$$

Przy czym:

$$c_0, c_1..., a_{0,0}, a_{0,1}..., a_{1,0}, a_{1,1}... \in \mathbb{R}$$

Jednym z algorytmów, który potrafi znaleźć optymalne rozwiązanie takiego problemu, jest SIMPLEX, który omówię w następnym podrozdziale.

1.2 Krótki opis algorytmu SIMPLEX

Jest to jeden z najczęściej stosowanych algorytmów optymalizacyjnych. Swoją popularność zawdzięcza przede wszystkim swojej prostocie. Nazwa tego algorytmu wzięła się od sympleksu, czyli trójkąta uogólnionego na więcej wymiarów. Algorytm pracuje na pewnym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych wynikających z przyjętych ograniczeń np.dla dwóch zmiennych mamy ograniczony powierzchnię, dla trzech zmiennych mamy ograniczoną przestrzeń itd. Z każdym krokiem iteracyjnym wyznaczany jest nowy wierzchołek, jeśli poprawia on wcześniejsze rozwiązanie, pętla jest kontynuowana, jeśli nie algorytm kończy swoje działanie. Kolejne wierzchołki są wyznaczane na podstawie tablicy sympleksowej. Dla problemu poruszonego w dalszej części sprawozdania, na samym początku tablica wygląda następująco:

—	x_0	x_1	s_0	s_1	s_2	p	b
s_0	1	0	1	0	0	0	4
s_1	0	2	0	1	0	0	12
s_2	3	2	0	0	1	0	18
p	-3000	-5000	0	0	0	1	0

Tablica 1: Tablica sympleksowa na samym początku działania algorytmu

Zasada tworzenia takiej tablicy jest dosyć prosta. Każde ograniczenia zamieniamy na równanie, dodając kolejną zmienną ze współczynnikiem 1. W naszym przypadku mamy 3 dodatkowe zmienne s_0, s_1, s_2 - tyle ile jest ograniczeń. Następnie wpisujemy równania do tabeli. Warto wspomnieć o pierwszej kolumnie, na samym początku wpisujemy tam zmienne dodatkowe. Mamy również tam zmienną p, która w ogólności wyraża się wzorem:

$$p + f(x_0, x_1, ...) = 0$$

stąd mamy ujemne współczynniki przy 3000 i 5000. W każdym kroku algorytmu wykonujemy odpowiednie operacje:

- wybieramy kolumnę piwotu - najmniejszy element w wierszu p
- wybieramy wiersz, w którym iloraz elementu z kolumny b i z kolumny piwotu jest najmniejszy
- aktualizujemy pierwszą kolumnę zmiennych - wpisujemy do wybranego wiersza w pierwszej kolumnie odpowiednią zmienną z pierwszego wiersza i kolumny piwotu
- mnożymy wybrany wiersz tak, aby piwot był równy 1
- dodajemy lub odejmujemy tyle razy wiersz do pozostałych wierszy tak, aby elementy na górze i na dole piwotu stały się zerami

W ten sposób powtarzamy powyższe kroki, aż do momentu, kiedy nie będzie ujemnych wartości w ostatnim wierszu. Na samym końcu należy zinterpretować wynik:

- w pierwszej kolumnie mamy jakiej zmiennej odpowiada wartość z ostatniej kolumny - ta wartość to znalezione rozwiązanie

- w komórce w ostatnim wierszu ostatniej kolumny mamy wartość funkcji, jaką ona przyjmuje dla znalezionych argumentów

—	x_0	x_1	s_0	s_1	s_2	p	b
x_0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	-$\frac{1}{3}$	0	2
x_1	0	1	0	0.5	0	0	6
x_0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	-$\frac{1}{3}$	0	2
p	0	0	0	1500	1000	1	36000

Tablica 2: Tablica sympleksowa przy zakończeniu działania algorytmu

2 Zadanie optymalizacyjne do rozwiązania

Moim zadaniem było napisanie programu, który rozwiąże zadanie optymalizacyjne za pomocą algorytmu SIMPLEX, którego treść została przedstawiona poniżej.

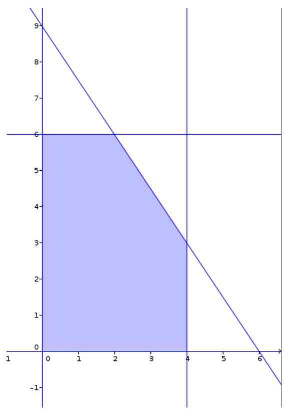
2.1 Treść zadania

Znaleźć, dla jakiego x_0, x_1 funkcja $f(x_0, x_1) = 3000x_0 + 5000x_1$ przyjmie wartość maksymalną, przy podanych ograniczeniach:

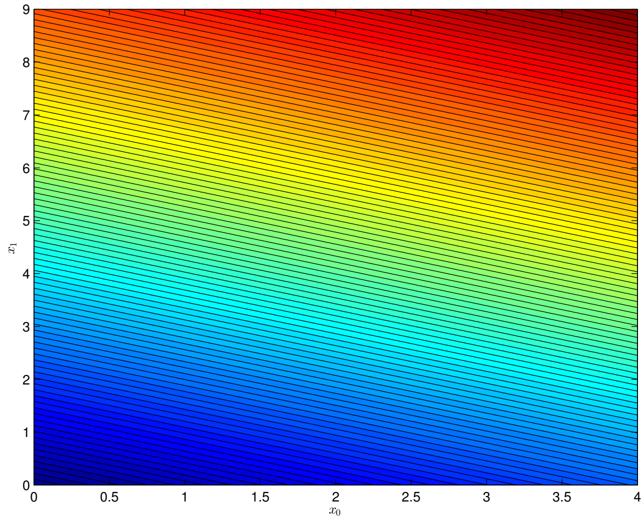
$$\begin{aligned} x_0 &\leqslant 4 \\ x_1 &\leqslant 12 \\ 3x_0 + 2x_2 &\leqslant 18 \\ x_0 &\leqslant 0 \\ x_1 &\leqslant 0 \end{aligned} \tag{5}$$

2.2 Rozwiązanie zadania „na kartce”

Narysujmy najpierw przestrzeń dozwolonych rozwiązań.



Rysunek 1: Zbiór rozwiązań dopuszczalnych



Rysunek 2: Wykres funkcji celu

Następnie wyznaczmy wierzchołki tego wielokąta, ponieważ dla wierzchołków funkcja będzie przyjmowała wartości ekstremalne:

x_0	x_1	$f(x_0, x_1)$
0	0	0
4	0	12000
4	3	27000
2	6	36000
0	6	30000

Jak widać, dla punktu $(2, 6)$ funkcja $f(x_0, x_1)$ przyjmuje wartość maksymalną - jest to poszukiwane rozwiązanie naszego problemu, aby to potwierdzić na Rysunku 2 został przedstawiony wykres poziomicowy funkcji celu.

2.3 Rozwiązanie zadania przez komputer

Poprawny wynik tego zadania, rozwiązany przez program znajduje się poniżej. Jest on oznaczony jako Problem nr 1.

```
******************************
PROBLEM nr 1:

Maksymalizacja: f(x0, x1)=3000*x0+5000*x1
Przy ograniczeniach:
1*x0+0*x1<=4
0*x0+2*x1<=12
3*x0+2*x1<=18

Rozwiazanie: (2, 6)
Wartosc funkcji: 36000
```

```

*****************************
PROBLEM nr 2:

Maksymalizacja: f(x0, x1, x2)=7*x0+8*x1+10*x2
Przy ograniczeniach:
2*x0+3*x1+2*x2<=1000
1*x0+1*x1+2*x2<=800

Rozwiazanie: (200, 0, 300)
Wartosc funkcji: 4400

*****************************
```

Listing 1: Wyjście konsoli, pokazujące, działanie napisanego programu.

3 Wnioski oraz uwagi

Na podstawie przeprowadzonego ćwiczenia, można dojść do następujących wniosków:

- Algorytm SIMPLEX, zarówno dla Problemu nr 1 jak i dla Problemu nr 2 wyznaczył optymalne rozwiązanie
- Implementacja algorytmu była bardzo prosta i szybka
- Jest bardzo dużo rzeczywistych problemów optymalizacyjnych, które mogą być rozwiązywane za pomocą algorytmu SIMPLEX m.in
  - minimalne koszty produkcji
  - maksymalny zysk firmy
  - wybór odpowiedniej drogi przy transporcie
  - i wiele innych