

---

# **Dynamika stochastyczna**

***Wydanie I***

**Jerzy Łuczka, Łukasz Machura**

23/10/2013



---

# Spis treści

---

<b>1</b>	<b>Dynamika deterministyczna</b>	<b>3</b>
1.1	Opis i modelowanie zjawisk oraz procesów przy pomocy równań różniczkowych	3
1.2	Modelowanie z czasem dyskretnym . . . . .	8
1.3	Istnienie i jednoznaczność rozwiązań . . . . .	8
1.4	Układy dynamiczne z czasem ciągłym . . . . .	13
1.5	Dynamiczne układy zachowawcze i dysypatywne . . . . .	25
1.6	Stany stacjonarne i ich stabilność . . . . .	33
1.7	Atraktory . . . . .	43
<b>2</b>	<b>Chaos w układach dynamicznych</b>	<b>47</b>
2.1	Determinizm a przewidywalność . . . . .	47
2.2	Model chaosu. Układ bistabilny (oscylator Duffinga) . . . . .	48



**Autorzy** Jerzy Łuczka, Łukasz Machura

**Wersja** 0.2 10/2013

**Pobierz** podręcznik (v0.2, PDF)



# Dynamika deterministyczna

## 1.1 Opis i modelowanie zjawisk oraz procesów przy pomocy równań różniczkowych

Jednym z podstawowych praw fizyki, jakie poznajemy w szkole średniej jest II zasada dynamiki Newtona. Opisuje ona klasyczne układy mechaniczne. Układy te są idealizacją realnych układów występujących w otaczającym nas świecie. W najprostszej wersji II zasada dynamiki Newtona w odniesieniu do jednej cząstki poruszającej się tylko wzdłuż jednej osi współrzędnych, np. wzdłuż osi OX, może być sformułowana w następującej postaci:

Ruch cząstki jest zdeterminowany przez siły jakie działają na cząstkę

Z punktu widzenia matematycznego, ruch cząstki opisany jest przez równanie Newtona:

$$ma = F \quad (1.1)$$

W równaniu tym występują trzy wielkości:

$m$  to masa cząstki  $a$  jest przyspieszeniem cząstki  $F$  jest siłą działającą na cząstkę. Ponieważ ruch zachodzi tylko wzdłuż osi OX (tak zakładamy dla prostoty), siła  $F$  działa tylko w kierunku OX oraz przyspieszenie  $a$  jest wzdłuż osi OX.

Wiemy z kursu fizyki, że przyspieszenie cząstki jest pochodną (względem czasu) pierwszego rzędu prędkości  $v$  cząstki. Z kolei prędkość cząstki  $v$  jest pochodną pierwszego rzędu położenia cząstki  $x$ .

$$a = \frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.2)$$

W ogólnej postaci siła

$$F = F(x, v, t) = F(x, dx/dt, t) \quad (1.3)$$

może zależeć od położenia  $x$  cząstki, jej prędkości  $v = dx/dt$  oraz czasu  $t$ .

Jeżeli przyspieszenie  $a$  oraz siłę  $F$  w takiej postaci podstawimy do równania Newtona, to jego postać jest następująca:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F \left( x, \frac{dx}{dt}, t \right) \quad (1.4)$$

W ten sposób otrzymujemy równanie różniczkowe, które opisuje jednowymiarowy ruch cząstki wzdłuż osi OX. Co możemy powiedzieć o tym równaniu:

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu, ponieważ pojawia się pochodna drugiego rzędu  $d^2x/dt^2$ . Jest to równanie różniczkowe zwyczajne, ponieważ nie występują pochodne cząstkowe a jedynie pochodne ze względu na jedną zmienną - w tym przypadku pochodne względem czasu  $t$ . Samo równanie Newtona nie wystarczy, aby opisać ruch cząstki. Musimy zadać warunki początkowe dla tego równania. Ponieważ jest to równanie drugiego rzędu, musimy zadać dwa warunki początkowe: początkowe położenie  $x(t_0) = x_0$  oraz początkową prędkość  $v(t_0) = v_0$ . Warunki początkowe można zadać w dowolnej chwili czasu  $t_0$ , ale zazwyczaj tą chwilą początkową jest umowna chwila  $t_0 = 0$ . Równanie (1.4) możemy zatem przedstawić w równoważnej postaci:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (1.5)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F(x, v, t) \quad (1.6)$$

gdzie wprowadziliśmy nową zmienną  $v$  która ma interpretację prędkości cząstki. W ten sposób otrzymaliśmy układ 2 równań różniczkowych pierwszego rzędu. Jak później zobaczymy, taka manipulacja jest użyteczna przy wprowadzeniu pojęcia przestrzeni fazowej dla równań różniczkowych. Jeżeli siła  $F$  nie zależy w sposób jawny od czasu, to układ równań

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (1.7)$$

$$m \frac{dv}{dt} = F(x, v) \quad (1.8)$$

nazywamy autonomicznym. Innymi słowy, jest to autonomiczny układ 2 równań różniczkowych zwyczajnych 1-rzędu. Mówimy wówczas, że jego przestrzeń fazowa jest 2-wymiarowa.

Jeżeli cząstka porusza się na płaszczyźnie  $(X, Y)$ , to równanie Newtona ma postać:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, t\right) \quad (1.9)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = G\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, t\right) \quad (1.10)$$

gdzie  $F$  i  $G$  są składowymi siły działającymi na cząstkę w kierunku  $x$  oraz  $y$ . W ogólnym przypadku siły te zależą od położenia cząstki  $(x, y)$ , jej składowych prędkości  $(dx/dt, dy/dt)$  oraz czasu  $t$ .

Jeżeli składowe siły  $F$  i  $G$  nie zależą w sposób jawny od czasu, to postępując podobnie jak poprzednio otrzymamy układ:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (1.11)$$



$$\frac{dy}{dt} = u \quad (1.12)$$

$$m \frac{dv}{dt} = F(x, y, v, u) \quad (1.13)$$

$$m \frac{du}{dt} = G(x, y, v, u) \quad (1.14)$$

Jest to autonomiczny układ 4 równań różniczkowych zwyczajnych 1-rzędu. Mówimy wówczas, że jego przestrzeń fazowa jest 4-wymiarowa.

Dla cząstki poruszającej się w przestrzeni  $(X, Y, Z)$ , mamy 3 równania Newtona 2-rzędu. Jeżeli 3 składowe siły nie zależą w sposób jawny od czasu, to postępując podobnie jak poprzednio otrzymamy układ 6 równań różniczkowych 1-rzędu i przestrzeń fazowa jest 6-wymiarowa. W ogólności, dla  $N$  cząstek poruszających się w przestrzeni, przestrzeń fazowa ma wymiar  $6N$ . Analiza takich równań przekracza możliwości współczesnej matematyki w tym sensie, że mało wiemy o ogólnych własnościach konkretnych układów, które modelujemy. To powoduje, że musimy stosować numeryczne metody i komputer jest nieodzownym narzędziem analizy.

Powyżej podaliśmy jeden przykład modelowania. Bazuje on na formalizmie Newtona i równaniach ruchu Newtona. Może być stosowany do opisu dynamiki cząstek klasycznych. Czasami wygodnie jest stosować inny formalizm jak na przykład formalizm Lagrange’a lub formalizm Hamiltona. W wielu przypadkach wszystkie trzy formalizmy są równoważne. Dla tzw. układów z więzami, wygodnie jest stosować formalizm Lagrange’a lub formalizm Hamiltona.

Definiując układ równań różniczkowych jako autonomiczny, zakładaliśmy że siła nie zależy w sposób jawny od czasu. Może wydawać się, że jest to jakieś ograniczenie. Nie jest to prawdą. Układy nieautonomiczne można sprowadzić do układów autonomicznych wprowadzając dodatkową zmienną niezależną, dodatkowe “położenie”. Pokażemy to na prostym przykładzie. Rozpatrzmy cząstkę poruszającą się wzdłuż osi  $X$ . Na cząstkę działa siła tarcie proporcjonalna do prędkości cząstki,  $F = -\gamma v$ , działa siła potencjalna  $F(x) = -V'(x)$  pochodząca od energii potencjalnej  $V(x)$  (nazywanej skrótnie potencjałem). Siła ta jest ujemnym gradientem potencjału (czyli pochodną  $V'(x)$ ). Dodatkowo na cząstkę działa periodyczna w czasie siła  $F(t) = A \cos(\omega t)$ . Równanie Newtona ma postać

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - V'(x) + A \cos(\omega t) \quad (1.15)$$

gdzie kropki oznaczają pochodne względem czasu, a apostrof oznacza pochodną względem  $x$ . I tak

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad V'(x) = \frac{dV(x)}{dx} \quad (1.16)$$

Równanie to możemy przedstawić w postaci układu 3 równań różniczkowych:

$$\dot{x} = v \quad (1.17)$$

$$m\dot{v} = -\gamma v - V'(x) + A \cos(z) \quad (1.18)$$

$$\dot{z} = \omega \quad (1.19)$$

Równoważność pokazujemy w następujący sposób:

w równaniu (1.18) należy zastąpić  $v$  z równania (1.17) wyrażeniem  $v = \dot{x}$  pamiętając jednocześnie że  $\dot{v} = \ddot{x}$  równanie (1.19) można scałkować i otrzymamy  $z = \omega t$ ; wstawiamy to wyrażenie do równania (1.18). W ten sposób otrzymujemy znowu równanie (1.15). Tak więc jedno równanie różniczkowe nieautonomiczne 2-rzędu jest równoważne układowi 3 równań różniczkowych 1-rzędu. Odpowiadająca temu układowi przestrzeń fazowa jest 3-wymiarowa. Z przykładu tego płynie ważna wskazówka, jak otrzymywać autonomiczny układ równań różniczkowych 1-rzędu. Liczba tych równań definiuje przestrzeń fazową układu. Wymiar tej przestrzeni jest jedną z najważniejszych charakterystyk. Proszę to zapamiętać!

Fizyka stosuje też aparat równań różniczkowych cząstkowych. Studenci kierunku fizyka i pokrewnych kierunków znają przykłady takich równań. Równanie Schrodingera, równanie falowe, równanie dyfuzji, równania Maxwella to są równania różniczkowe cząstkowe. Ich analiza jest znacznie trudniejsza. Istnieją specjalne i specyficzne metody matematyczne pozwalające otrzymać informację o własnościach układów opisywanych takimi równaniami.

W wielu dziedzinach nauki (chemia, biologia, socjologia, nauki ekonomiczne) stosuje się fenomenologiczny sposób modelowania. Aby uzmysłowić, jak go stosować podamy jeden przykład.

### 1.1.1 Modelowanie procesu wzrostu

Procesy wzrostu pojawiają się na wielu obszarach. Nie trzeba być bystrym obserwatorem, aby zauważyć co wokół nas może wzrastać. My rozważamy jedną z możliwych klas procesów wzrostu: wzrost populacji zajęcy czy bakterii, wzrost depozytów pieniężnych na lokatach bankowych, wzrost stężenia substancji w reakcjach chemicznych czy wzrost liczby komórek nowotworowych. Często procesom wzrostu towarzyszą procesy malenia (zaniku, śmierci, ...). My je będziemy pomijać. Rozpatrzmy konkretny przykład: wzrost pieniędzy na lokacie bankowej. Załóżmy, że w chwili czasu  $t$  jest na lokacie  $x(t)$  (np. złotych polskich). Pytamy, ile pieniędzy przyrośnie po pewnym czasie  $h$ , czyli ile pieniędzy będzie w chwili  $t + h$ . Zaczynamy modelować ten proces. Oznaczmy, że w chwili  $t + h$  jest  $x(t + h)$  pieniędzy. Na tę kwotę składają się pieniądze  $x(t)$  oraz przyrost  $\delta$  z odsetek, czyli

$$x(t + h) = x(t) + \delta \quad (1.20)$$

Przyrost  $\delta$  zależy od wielkości oprocentowania  $k$  oraz od tego jak długo ( $h$ ) trzymamy pieniądze na lokacie, czyli

$$\delta \propto x(t), \quad \delta \propto k, \quad \delta \propto h \quad (1.21)$$

Możemy to skomasować pisząc:

$$\delta = kx(t)h \quad (1.22)$$

Dlatego też

$$x(t + h) = x(t) + kx(t)h \quad (1.23)$$

Relacje tę możemy przepisać w postaci

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = kx(t) \quad (1.24)$$

W granicy małych przyrostów czasu  $h \rightarrow 0$ , lewa strona jest definicją pochodnej

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.25)$$

gdzie  $x_0$  jest wartością początkową naszej lokaty. W ten oto sposób otrzymaliśmy równanie opisujące dynamikę wzrostu pieniędzy na naszej lokacie bankowej. Jest to równanie różniczkowe zwyczajne, 1-go rzędu, autonomiczne. Jego przestrzeń fazowa jest 1-wymiarowa.

Poniżej pokazujemy rozwiązania tego równania dla 3 różnych wartości  $k$ .

```
var('N1,N2,N3')
T = srange(0,3,0.01)
## rozwiązania dla różnych wartości k=0, 0.1, 0.2
sol=desolve_odeint( vector([0, 0.1*N2, 0.2*N3]), [5,5,5],T, [N1,N2,N3])
## wykresy rozwiązań dla różnych wartości k=-1, 0, 0.5
line(zip(T,sol[:,0]), figsize=(5, 3), legend_label="k=0") +\
  line(zip(T,sol[:,1]), color='red', legend_label="k=0.1")+ \
  line(zip(T,sol[:,2]), color='green', legend_label="k=0.2")
```

Inne procesy wzrostu także można modelować tym równaniem. Równanie to jest też punktem wyjściowym do modyfikacji, uogólnień, rozszerzeń, itp. Proste rozszerzenie polega na uzależnieniu współczynnika tempa wzrostu  $k$  od dodatkowych czynników. Na przykład przy modelowaniu wzrostu populacji zajęcy, możemy uzależnić tempo wzrostu  $k$  od liczby zajęcy w populacji: duża ilość zajęcy powoduje dużą konsumpcję pożywienia, a to z kolei skutkuje zmniejszeniem ilości pożywienia i utrudnieniami w zdobywaniu pożywienia. W efekcie zmniejsza się tempo wzrostu  $k$ . Innymi słowy,  $k$  powinno być malejącą funkcją  $x(t)$  liczebników w populacji. Istnieje nieskończenie wiele takich funkcji. Na przykład

$$k \rightarrow k(x) = \exp(-bx), \quad b > 0 \quad (1.26)$$

jest malejącą funkcją  $x$ . Teraz równanie różniczkowe ma postać

$$\frac{dx}{dt} = xe^{-bx}, \quad x = x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.27)$$

Jakie są skutki takiej zmiany? Pokazujemy to na poniższym rysunku. Zauważamy, że tempo wzrostu populacji zmniejsza się w porównaniu z poprzednim przypadkiem.

Model można rozszerzyć uwzględniając procesy śmierci: te naturalne i te wskutek istnienia drapieżników, które zjadają osobników populacji. Prosty model ofiara-drapieżca jest 2-wymiarowy: opisuje zmiany w populacji ofiar i zmiany w populacji drapieżników. Jest to autonomiczny układ 2 równań różniczkowych zwyczajnych.

```
var('x,y,z')
U = srange(0,300,0.01)
sol=desolve_odeint( vector([x*exp(-0.1*x), y*exp(-0.2*y), z*exp(-0.3*z)]), [5,5,5],U,
## pokazujemy rozwiązania dla różnych wartości k=-1, 0, 0.5
line(zip(U,sol[:,0]), figsize=(5, 3), legend_label="k=0")+ \
  line(zip(U,sol[:,1]), color='red', legend_label="k=0.1")+ \
  line(zip(U,sol[:,2]), color='green', legend_label="k=0.2")
```

## 1.2 Modelowanie z czasem dyskretnym

Powyżej otrzymaliśmy takie oto wyrażenie na przyrost:

$$x(t+h) = x(t) + khx(t) \quad (1.28)$$

Jeżeli zmiany następowałyby nie w sposób ciągły lecz dyskretny (np. co 1 dzień, co jedną godzinę) wówczas krok czasowy  $h$  jest dyskretny. Można wprowadzić oznaczenia

$$x_n = x(t), \quad x_{n+1} = x(t+h) \quad (1.29)$$

i wówczas równanie dla przyrostu ma postać

$$x_{n+1} = x_n + \alpha x_n, \quad \alpha = kh \quad (1.30)$$

W ten sposób otrzymujemy równanie z czasem dyskretnym. Ogólna postać tego typu równania to

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (1.31)$$

które mówi nam, jaką wartość przyjmuje dana wielkość w następnym kroku  $n+1$  jeżeli znana jest wartość tej wielkości w kroku  $n$ . Równanie to nazywa się też równaniem rekurencyjnym. W zależności od postaci funkcji  $f(x)$  otrzymujemy różne modele dynamiki układów.

Układ 2 równań z czasem dyskretnym ma postać

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n) \quad (1.32)$$

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n) \quad (1.33)$$

Analiza jakościowa takiego układu jest bardzo trudna. Czasami nieumiejętne stosowanie numerycznej analizy może skutkować tym, że umkną nam istotne cechy takiego układu, zwłaszcza gdy w układzie występują dodatkowo parametry których zmiana może powodować coś, co nazywa się bifurkacjami. Ale o tym w dalszej części książki.

## 1.3 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

Do opisu realnych zjawisk przy pomocy równań różniczkowych zwyczajnych z warunkami początkowymi zadanymi w chwili czasu  $t = 0$ , potrzebne nam są rozwiązania dla czasów  $t > 0$  (ewolucja czasowa). Można też rozpatrywać przypadek  $t < 0$  ale to zaliczyłbym do ćwiczeń matematycznych. Ważnym zagadnieniem jest istnienie rozwiązań równań różniczkowych. Możemy zapytać, czy zawsze rozwiązania równań różniczkowych istnieją i jeżeli istnieją, to czy to są jedyne rozwiązania z warunkiem początkowym. Oczywiście dla różnych warunków początkowych układ może różnie ewoluować, ale gdy startuje zawsze z tego samego stanu (warunku) początkowego to czy ewolucja jest taka sama? Na tym polega problem jednoznaczności rozwiązań. Jeżeli dla danego warunku początkowego istnieją np. 3 rozwiązania, to jak ewoluuje układ: istnieją 3 możliwości i którą możliwość wybiera układ? Gdyby tak

było dla realnych układów to nie moglibyśmy przewidywać ewolucji układu, nie moglibyśmy sterować układami, brak byłoby determinizmu. W rozwoju nauk ścisłych to właśnie determinizm stał się kołem napędowym rozwoju cywilizacyjnego ludzkości. To determinizm pozwala budować urządzenia, które działają tak jak my sobie tego życzymy: telewizor odbiera wybrany przeze mnie program, używam telefonu do komunikacji z moją rodziną, wystrzelona rakietą ma taką trajektorię jaką zaplanowałem, itd. Zbadamy 3 przykłady, które przybliżą nam powyższą problematykę. Źródło tych przykładów jest w książce: J. Hale, H. Kocak, “Dynamics and Bifurcations”. Książka jest znakomita.

### 1.3.1 Przykład 1

Równanie

$$\frac{dx}{dt} = -2x, \quad x(0) = x_0 \quad (1.34)$$

jest równaniem różniczkowym liniowym. Jest to jedno z najprostszych równań różniczkowych. Można łatwo sprawdzić, że funkcja

$$x(t) = x_0 e^{-2t} \quad (1.35)$$

jest rozwiązaniem i spełnia warunek początkowy  $x(0) = x_0$ . Funkcja ta jest dobrze określona dla wszystkich skończonych wartości czasu  $t \in (-\infty, \infty)$ . Nie ma tu większych ograniczeń. Jest to jedyne rozwiązanie. Poniższy rysunek daje wyobrażenie o rozwiązaniach  $x(t)$  dla 3 różnych warunków początkowych. Przy okazji zauważmy, że wszystkie trzy rozwiązania dążą do tego samego stanu  $x = 0$  dla długich czasów  $t \rightarrow \infty$ .

```
var('t')
g(t,a) = a*exp(-2*t)
p1 = plot(g(t,a=1), (t,0,2), legend_label=r"$x(0)=1$", color='blue')
p2 = plot(g(t,a=0), (t,0,2), legend_label=r"$x(0)=0$", color='red')
p3 = plot(g(t,a=-1), (t,0,2), legend_label=r"$x(0)=-1$", color='green')
show(p1+p2+p3, figsize=[6,3], axes_labels=[r'$t$', r'$x(t)$'], axes=False, frame=True)
```

### 1.3.2 Przykład 2

Równanie

$$\frac{dx}{dt} = 3x^2, \quad x(0) = x_0 \quad (1.36)$$

jest równaniem różniczkowym nieliniowym. Prawa strona tego równania jest określona dla wszystkich wartości  $x$ . Podobnie jak poprzednie równanie, można je rozwiązać metodą separacji zmiennych. Otrzymamy funkcję

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - 3x_0 t} \quad (1.37)$$

która jest rozwiązaniem i spełnia warunek początkowy. Funkcja ta nie jest określona dla wszystkich skończonych wartości czasu  $t \in (-\infty, \infty)$ . Istnieją ograniczenia dla wartości czasu  $t$ . Ale jest to jedyne rozwiązanie.

```
var('t')
g = plot(-4.0/(1+12*t), (t,0,0.5), detect_poles='show', legend_label=r'$x(0)=-4$', color='blue')
g += plot(lambda t: 0.0, (t,0,0.5), legend_label=r'$x(0)=0$', color='red')
g += plot(1.0/(1-3*t), (t,0,1/3), detect_poles='show', legend_label=r'$x(0)=1$', color='blue')
g.show(axes_labels=[r'$t$', r'$x$'], ymin=-4, ymax=8, figsize=[6,3], axes=False, frame=True)
```

Wszystkie rozwiązania z ujemnym warunkiem początkowym  $x(0) < 0$  są dobrze zdefiniowane dla wszystkich czasów  $t > 0$  (krzywa niebieska). Podobnie jest z rozwiązaniem  $x(t) = 0$  dla warunku początkowego  $x(0) = 0$  (krzywa czerwona). Natomiast rozwiązanie z dodatnim warunkiem początkowym  $x(0) > 0$  rozbiega się w skończonym czasie  $t < 1/3x_0$ . Gdyby to równanie miało opisywać ruch cząstki, to oznacza że w skończonym czasie cząstka przebywa nieskończoną odległość. To jest niefizyczne. Równanie to mogłoby opisywać proces wybuchu substancji:  $x$  mogłoby być objętością pęczniejącej substancji która wybucha po skończonym czasie.

### 1.3.3 Przykład 3

Równanie

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x}, \quad x(0) = x_0 \geq 0 \quad (1.38)$$

jest równaniem różniczkowym nieliniowym. Prawa strona tego równania jest określona dla nieujemnych wartości  $x \geq 0$ . Podobnie jak 2 poprzednie równania, można je rozwiązać metodą separacji zmiennych. Otrzymamy rozwiązanie

$$x(t) = (t + \sqrt{x_0})^2 \quad (1.39)$$

Funkcja ta jest określona dla wszystkich wartości czasu  $t > 0$ . Jest to jedyne rozwiązanie z wyjątkiem jednego warunku początkowego:  $x(0) = 0$ . Dla tego warunku początkowego istnieje jeszcze jedno rozwiązanie, a mianowicie  $x(t) = 0$ . Tak więc dla  $x(0) = 0$  mamy 2 różne rozwiązania

$$x(t) = t^2, \quad x(t) = 0 \quad (1.40)$$

Jak przebiega ewolucja, gdy układ startuje ze stanu początkowego  $x(0) = 0$ ? W tym przypadku rozwiązania są niejednoznaczne.

```
var('t')
p1=plot(t**2, (t,0,1), legend_label=r"$x(0)=1$", color='blue')
p2=plot(0, (t,0,1), legend_label=r"$x(0)=0$", color='red')
show(p1+p2, figsize=[6,3], axes=False, frame=True)
```

Co jest takiego charakterystycznego w ostatnim przykładzie, że pojawia się niejednoznaczność rozwiązania równania różniczkowego? Na to pytanie daje odpowiedź twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego. Potrzebna nam będzie własność funkcji:

Mówimy, że funkcja  $f(x)$  spełnia warunek Lipschitza na zbiorze otwartym  $U$  jeżeli istnieje taka stała  $L > 0$ , że

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \quad (1.41)$$

dla wszystkich  $x_1, x_2 \in U$ .

Warunek Lipschitza można zapisać w postaci

$$|f(x+h) - f(x)| \leq Lh \quad \text{lub jako} \quad \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq L \quad (1.42)$$

Z tego wynika że jeżeli  $f(x)$  ma ograniczoną pochodną, to spełnia warunek Lipschitza. Są oczywiście nieróżniczkowalne funkcje, które spełniają warunek Lipschitza.

**Twierdzenie Picarda** Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest ciągła w  $U$  oraz spełnia warunek Lipschitza w  $U$  wówczas równanie różniczkowe

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad (1.43)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w  $U$ .

Istnieje kilka modyfikacji tego twierdzenia, ale na nasze potrzeby ta najprostsza wersja jest wystarczająca.

Teraz możemy odpowiedzieć, dlaczego w 3 przykładzie rozwiązanie jest niejednoznaczne: funkcja  $f(x) = 2\sqrt{x}$  nie spełnia warunku Lipschitza ponieważ pochodna

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (1.44)$$

w punkcie  $x = 0$  jest rozbieżna. W punktach  $x > 0$  pochodna ma wartość skończoną i jest spełnione twierdzenie Picarda. Dlatego też rozwiązania są jednoznaczne.

### 1.3.4 Dodatek

Sage z powodzeniem jest w stanie rozwiązywać pewne równania różniczkowe zwyczajne. Zobaczmy jak poradzi sobie z powyższymi przykładami.

#### Przykład 1

$$\frac{dx}{dt} = -2x, \quad x(0) = x_0 \quad (1.45)$$

z rozwiązaniem

$$x(t) = x_0 e^{-2t}. \quad (1.46)$$

Na początek zadamy sobie zmienne. Druga linijka mówi o tym, że zmienna  $x$  będzie funkcją parametru  $t$  (czasu). Zamiast używać nazwy  $g$  użyjemy świeżo obliczonego rozwiązania `rozv`.

```
var('t x_0')
x = function('x', t)
rrz = diff(x,t) == -2*x
rozv = desolve(rrz, x)
rozv = rozv.subs(c=x_0)
print "rozwiązanie równania"
show(rozv)
p1 = plot(rozv(x_0=1), (t,0,2), legend_label=r"$x(0)=1$", color='blue')
p2 = plot(rozv(x_0=0), (t,0,2), legend_label=r"$x(0)=0$", color='red')
p3 = plot(rozv(x_0=-1), (t,0,2), legend_label=r"$x(0)=-1$", color='green')
show(p1+p2+p3, figsize=[6,3], axes_labels=[r'$t$', r'$x(t)$'], axes=False, frame=True)
```

## Przykład 2

$$\frac{dx}{dt} = 3x^2, \quad x(0) = x_0 \quad (1.47)$$

z rozwiązaniem

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - 3x_0 t}. \quad (1.48)$$

```
var('t x_0 c')
x = function('x', t)
print "Definiujemy równanie różniczkowe"
rrz = diff(x,t) == 3*x^2
rozv2 = desolve(rrz, x)
print "i je rozwiązujemy..."
show(rozv2)
print "krok 1\n obliczamy x(t) z poprzedniego kroku"
rozv2 = solve(rozv2,x)[0].rhs()
show(rozv2)
print "krok 2\n obliczamy x(0)"
buf = rozv2(t=0) == x_0
show(buf)
print "krok 3\n wyznaczamy stałą c"
buf = solve(buf,c)[0].rhs()
show(buf)
print "krok 4\n wstawiamy c do równania"
rozv2 = rozv2.subs(c=buf).full_simplify()
show(rozv2)
print "I na koniec prezentujemy wyniki"
x0 = -4
w = plot(rozv2(x_0=x0), (t,0,1), detect_poles='show', legend_label=r'$x(0)=%d$'%x0, color='blue')
x0 = 0
w += plot(rozv2(x_0=x0), (t,0,1), legend_label=r'$x(0)=%d$'%x0, color='red')
x0 = 1
w += plot(rozv2(x_0=x0), (t,0,1/3), legend_label=r'$x(0)=%d$'%x0, color='green')
w.show(axes_labels=[r'$t$',r'$x$'], tick_formatter='latex', xmin=0, xmax=0.5, ymin=-4.1,
```

## Przykład 2

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x}, \quad x(0) = x_0 \geq 0 \quad (1.49)$$

z rozwiązaniem

$$x(t) = (t + \sqrt{x_0})^2 \quad (1.50)$$

```
var('t x_0 c')
forget()
assume(x_0>=0)
assume(t+c>0)
print "równanie"
x = function('x', t)
rrz = diff(x,t) == 2*sqrt(x)
```



```

show(rrz)
print "i jego rozwiązanie"
rozv3 = solve(desolve(rrz, x), x)[0]
show(rozv3)
print "stała całkowania"
buf = solve(x_0 == rozv3.rhs()(t=0), c)
show(buf)
print "mamy dwa możliwe rozwiązania, wybieramy to z dodatnim c"
buf = buf[1]
show(buf)
print "i dostajemy ostatecznie"
rozv3 = rozv3.subs(c=buf.rhs())
show(rozv3)
print "I na koniec prezentujemy wyniki"
p1=plot(rozv3.rhs()(x_0=0), (t, 0, 1), legend_label=r"$x(0)=1$", color='blue')
show(p1, figsize=[6,3], axes=False, frame=True)

```

No tak, ale gdzie jest rozwiązanie  $x(t) = 0$ ? Na chwilę obecną Sage nie rozróżni obu możliwych rozwiązań. Dlatego umiejętność analitycznego rozwiązania takich problemów wciąż jest niezbędna!

## 1.4 Układy dynamiczne z czasem ciągłym

We Wstępie podaliśmy kilka przykładów układów opisanych za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych. Pierwsza klasa układów to układy opisywane przez mechanikę klasyczną i jej równania Newtona. Inna klasa układów to równania fenomenologiczne opisujące procesy wzrostu, procesy kinetyki chemicznej, dynamiki populacyjnej w układach biologicznych, itd. Te dwie klasy układów opisywane są układem równań różniczkowych zwyczajnych zapisanych w ogólnej postaci jako układ

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
 \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Ten układ możemy zapisać w notacji wektorowej w postaci

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \tag{1.52}$$

gdzie wektory

$$\vec{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n], \quad \vec{F} = [F_1, F_2, F_3, \dots, F_n] \tag{1.53}$$

oraz dany jest zbiór warunków początkowych

$$\vec{x}(0) = [x_1(0), x_2(0), x_3(0), \dots, x_n(0)] = \vec{x}_0 = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}] \tag{1.54}$$

Wskaźnik  $n$  mówi, ile równań różniczkowych jest “ukrytych” w powyższym zapisie wektorowym. Innymi słowy, rozważamy układ  $n$  równań różniczkowych scharaktaryzowanych przez  $n$

funkcji skalarnych  $F_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Zauważmy, że rozważamy funkcje  $F_i$  które nie zależą w sposób jawny od czasu. W takim przypadku mówimy, że jest to układ autonomiczny  $n$  równań różniczkowych zwyczajnych. Ponadto wektor  $\vec{F}$  można traktować jako pole wektorowe stowarzyszone z układem równań różniczkowych lub pole wektorowe generowane przez układ równań różniczkowych. Do tej kwestii powrócimy jeszcze.

### 1.4.1 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

Do opisu realnych zjawisk przy pomocy równań różniczkowych zwyczajnych z warunkami początkowymi zadanymi w chwili czasu  $t = 0$ , potrzebne nam są rozwiązania dla czasów  $t > 0$  (ewolucja czasowa). Można też rozpatrywać przypadek  $t < 0$  ale to zaliczyłbym do ćwiczeń matematycznych. Ważnym zagadnieniem jest istnienie rozwiązań równań różniczkowych. Możemy zapytać, czy zawsze rozwiązania równań różniczkowych istnieją i jeżeli istnieją, to czy to są jedyne rozwiązania z warunkiem początkowym. Oczywiście dla różnych warunków początkowych układ może różnie ewoluować, ale gdy startuje zawsze z tego samego stanu (warunku) początkowego to czy ewolucja jest taka sama? Na tym polega problem jednoznaczności rozwiązań. Jeżeli dla danego warunku początkowego istnieją np. 3 rozwiązania, to jak ewoluuje układ: istnieją 3 możliwości i którą możliwość wybiera układ? Gdyby tak było dla realnych układów to nie moglibyśmy przewidywać ewolucji układu, nie moglibyśmy sterować układami, brak byłoby determinizmu. W rozwoju nauk ścisłych to właśnie determinizm stał się kołem napędowym rozwoju cywilizacyjnego ludzkości. To determinizm pozwala budować urządzenia, które działają tak jak my sobie tego życzymy: telewizor odbiera wybrany przeze mnie program, używam telefonu do komunikacji z moją rodziną, wystrzelona rakietą ma taką trajektorię jaką zaplanowałem, itd. Zbadamy 3 przykłady, które przybliżą nam powyższą problematykę. Źródło tych przykładów jest w książce: J. Hale, H. Kocak, "Dynamics and Bifurcations". Książka jest znakomita.

#### Przykład 1

Równanie

$$\frac{dx}{dt} = -2x, \quad x(0) = x_0 \quad (1.55)$$

jest równaniem różniczkowym liniowym. Jest to jedno z najprostszych równań różniczkowych. Można łatwo sprawdzić, że funkcja

$$x(t) = x_0 e^{-2t} \quad (1.56)$$

jest rozwiązaniem i spełnia warunek początkowy  $x(0) = x_0$ . Funkcja ta jest dobrze określona dla wszystkich skończonych wartości czasu  $t \in (-\infty, \infty)$ . Nie ma tu większych ograniczeń. Jest to jedyne rozwiązanie. Poniższy rysunek daje wyobrażenie o rozwiązaniach  $x(t)$  dla 3 różnych warunków początkowych. Przy okazji zauważmy, że wszystkie trzy rozwiązania dążą do tego samego stanu  $x = 0$  dla długich czasów  $t \rightarrow \infty$ .

```
var('t')
g(t,a) = a*exp(-2*t)
p1=plot(g(t,1),(t,0,2),figsize=(6, 3), legend_label="x(0)=1", color='blue' )
p2=plot(g(t,0),(t,0,2),figsize=(6, 3), legend_label="x(0)=0", color='red' )
p3=plot(g(t,-1),(t,0,2),figsize=(6, 3), legend_label="x(0)=-1", color='green' )
show(p1+p2+p3, axes_labels=[r'$t$',r'$x(t)$'], frame=True, axes=False)
```

## Przykład 2

Równanie

$$\frac{dx}{dt} = 3x^2, \quad x(0) = x_0 \quad (1.57)$$

jest równaniem różniczkowym nieliniowym. Prawa strona tego równania jest określona dla wszystkich wartości  $x$ . Podobnie jak poprzednie równanie, można je rozwiązać metodą separacji zmiennych. Otrzymamy funkcję

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - 3x_0 t} \quad (1.58)$$

która jest rozwiązaniem i spełnia warunek początkowy. Funkcja ta nie jest określona dla wszystkich skończonych wartości czasu  $t \in (-\infty, \infty)$ . Istnieją ograniczenia dla wartości czasu  $t$ . Ale jest to jedyne rozwiązanie.

```
var('t')
#detect_poles - wykrywanie i rysowanie biegunów
g=plot(-4.0/(1+12*t),t,0,5,detect_poles='show',legend_label=r'$x(0)=-4$',color='blue')
g+=plot(lambda t: 0.0,t,0,5,legend_label=r'$x(0)=0$',color='red')
g+=plot(1.0/(1-3*t),t,0,0.33,detect_poles='show',legend_label=r'$x(0)=1$',color='green')
g.show(axes_labels=[r'$t$',r'$x$'],tick_formatter='latex',xmin=0,xmax=0.5,ymin=-4.1,ymax=1.1)
```

Wszystkie rozwiązania z ujemnym warunkiem początkowym  $x(0) < 0$  są dobrze zdefiniowane dla wszystkich czasów  $t > 0$  (krzywa niebieska). Podobnie jest z rozwiązaniem  $x(t) = 0$  dla warunku początkowego  $x(0) = 0$  (krzywa czerwona). Natomiast rozwiązanie z dodatnim warunkiem początkowym  $x(0) > 0$  rozbiega się w skończonym czasie  $t < 1/3x_0$ . Gdyby to równanie miało opisywać ruch cząstki, to oznacza że w skończonym czasie cząstka przebywa nieskończoną odległość. To jest niefizyczne. Równanie to mogłoby opisywać proces wybuchu substancji:  $x$  mogłoby być objętością pęczniejącej substancji która wybuchu po skończonym czasie.

## Przykład 3

Równanie

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x}, \quad x(0) = x_0 \geq 0 \quad (1.59)$$

jest równaniem różniczkowym nieliniowym. Prawa strona tego równania jest określona dla nieujemnych wartości  $x \geq 0$ . Podobnie jak 2 poprzednie równania, można je rozwiązać metodą separacji zmiennych. Otrzymamy rozwiązanie

$$x(t) = (t + \sqrt{x_0})^2 \quad (1.60)$$

Funkcja ta jest określona dla wszystkich wartości czasu  $t > 0$ . Jest to jedyne rozwiązanie z wyjątkiem jednego warunku początkowego:  $x(0) = 0$ . Dla tego warunku początkowego istnieje jeszcze jedno rozwiązanie, a mianowicie  $x(t) = 0$ . Tak więc dla  $x(0) = 0$  mamy 2 różne rozwiązania

$$x(t) = t^2, \quad x(t) = 0 \quad (1.61)$$

Jak przebiega ewolucja, gdy układ startuje ze stanu początkowego  $x(0) = 0$ ? W tym przypadku rozwiązania są niejednoznaczne.

```
var('t')
p1=plot(t*t, (t,0,1), figsize=(6, 3), legend_label="x(0)=1", color='blue' )
p2=plot(0, (t,0,1), figsize=(6, 3), legend_label="x(0)=0", color='red' )
show(p1+p2, frame=True, axes=False)
```

Co jest takiego charakterystycznego w ostatnim przykładzie, że pojawia się niejednoznaczność rozwiązania równania różniczkowego? Na to pytanie daje odpowiedź twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego. Potrzebna nam będzie własność funkcji:

Mówimy, że funkcja  $f(x)$  spełnia warunek Lipschitza na zbiorze otwartym  $U$  jeżeli istnieje taka stała  $L > 0$ , że

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad (1.62)$$

dla wszystkich  $x, y \in U$ .

Warunek Lipschitza można zapisać w postaci

$$|f(x+h) - f(x)| \leq Lh \quad \text{lub jako} \quad \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq L \quad (1.63)$$

Z tego wynika że jeżeli  $f(x)$  ma ograniczoną pochodną, to spełnia warunek Lipschitza. Są oczywiście nieróżniczkowalne funkcje, które spełniają warunek Lipschitza.

**Twierdzenie Picarda:** Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest ciągła w  $U$  oraz spełnia warunek Lipschitza w  $U$  wówczas równanie różniczkowe

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad (1.64)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w  $U$ .

Istnieje kilka modyfikacji tego twierdzenia, ale na nasze potrzeby ta najprostsza wersja jest wystarczająca.

W przypadku układu równań różniczkowych, warunek Lipschitza ma postać

$$|F_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - F_i(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)| \leq L \sum_{k=1}^n |x_k - y_k| \quad (1.65)$$

Nierówność ta musi być spełniona dla wszystkich funkcji  $F_i$  i twierdzenie Picarda brzmi podobnie. Warunek Lipschitza jest spełniony gdy pochodne cząstkowe są ograniczone,

$$\left| \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right| \leq K \quad (1.66)$$

dla dodatnich  $K$ .

Teraz możemy odpowiedzieć, dlaczego w 3 przykładzie rozwiązanie jest niejednoznaczne: funkcja  $f(x) = 2\sqrt{x}$  nie spełnia warunku Lipschitza ponieważ pochodna

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (1.67)$$

w punkcie  $x = 0$  jest rozbieżna. W punktach  $x > 0$  pochodna ma wartość skończoną i jest spełnione twierdzenie Picarda. Dlatego też rozwiązania są jednoznaczne dla  $x(0) > 0$ .

## 1.4.2 Przestrzeń fazowa

Jeszcze raz przepiszemy równania różniczkowe (1.52) w notacji:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{1.68}$$

Powyższy układ równań różniczkowych definiuje pewien układ dynamiczny (matematyczna definicja układu dynamicznego może być bardzo abstrakcyjna, ale na nasze potrzeby wystarczy to, co napisaliśmy). Zbiór wszystkich możliwych wartości  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  tworzy zbiór który nazywamy przestrzenią fazową (?). Wymiar tej przestrzeni wynosi  $n$ , czyli tyle ile jest równań różniczkowych.

W zależności od kontekstu, będziemy stosowali różne zapisy tych samych równań.

Przykłady:

1. Jedno równanie różniczkowe. Zwykle będziemy stosowali zapis

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x)\tag{1.69}$$

Przestrzeń fazowa jest 1-wymiarowa.

2. Dwa równania różniczkowe. Zwykle będziemy stosowali zapis

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \dot{x} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = g(x, y)\end{aligned}\tag{1.70}$$

Przestrzeń fazowa jest 2-wymiarowa.

3. Trzy równania różniczkowe. Zwykle będziemy stosowali zapis

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \dot{x} = f(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= \dot{z} = h(x, y, z)\end{aligned}\tag{1.71}$$

Przestrzeń fazowa jest 3-wymiarowa.

4. Równanie Newtona dla cząstki poruszającej się tylko wzdłuż osi  $OX$  na którą działa siła  $F(x)$  zależna tylko od położenia ma postać

$$m\ddot{x} = F(x) \quad (1.72)$$

gdzie  $m$  jest masą cząstki. Jest to równanie różniczkowe 2-go rzędu i jest ono równoważne układowi 2 równań różniczkowych 1-go rzędu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m}F(x) \end{aligned} \quad (1.73)$$

Przestrzeń fazowa jest 2-wymiarowa: jest to zbiór możliwych położeń i prędkości cząstki,  $\{x, v\}$ . Mimo swej prostoty, ten model jest niesłychanie ważny. Stanowi on punkt wyjścia dla zrozumienia wielu ważnych aspektów układów dynamicznych.

## Geometryczne własności przestrzeni fazowej

### Krzywa fazowe

Aby uniknąć na tym etapie abstrakcyjnych definicji, będziemy rozważać dla przykładu 2-wymiarowy układ dynamiczny

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), & x(0) &= x_0 \\ \dot{y} &= g(x, y), & y(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (1.74)$$

Przestrzeń fazowa jest 2-wymiarowa. Może to być płaszczyzna lub jej część. Ale może to być bardziej skomplikowany zbiór 2-wymiarowy. Na przykład może to być sfera (podobna do powierzchni piłki), może to być torus (podobny do dętki rowerowej). Mogą to być jeszcze bardziej skomplikowane obiekty 2-wymiarowe. Ale dla naszych celów wystarczy rozważać płaszczyznę. Na płaszczyźnie można estetycznie przedstawiać coś w formie rysunków. Wprowadzamy na płaszczyźnie kartezjański układ współrzędnych o osiach OX i OY. Warunek początkowy  $\{x_0 = x(0), y_0 = y(0)\}$  jest punktem o odpowiednich współrzędnych. Rozwiążemy powyższy układ równań różniczkowych numerycznie przy pomocy najprostszego schematu:

$$\begin{aligned} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} &= f(x(t), y(t)) \\ \frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= g(x(t), y(t)) \end{aligned} \quad (1.75)$$

Przepiszemy to w postaci

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + f(x(t), y(t))h \\ y(t+h) &= y(t) + g(x(t), y(t))h \end{aligned} \quad (1.76)$$

1. Obliczenia numeryczne musimy zacząć od warunku początkowego w chwili  $t = 0$ , czyli w pierwszym kroku obliczamy

$$\begin{aligned}x_1 &= x(h) = x(0) + f(x(0), y(0))h \\y_1 &= y(h) = y(0) + g(x(0), y(0))h\end{aligned}\tag{1.77}$$

Na płaszczyźnie otrzymujemy punkt o współrzędnych  $\{x_1, y_1\}$ . Zaznaczmy go na płaszczyźnie. Teraz mamy już 2 punkty:

$$\{x_0, y_0\}, \quad \{x_1, y_1\}\tag{1.78}$$

2. W następnym kroku wybieramy czas  $t = h$ :

$$\begin{aligned}x_2 &= x(h + h) = x(2h) = x(h) + f(x(h), y(h))h \\y_2 &= y(h + h) = y(2h) = y(h) + g(x(h), y(h))h\end{aligned}\tag{1.79}$$

Wykorzystamy oznaczenie jak wyżej:  $x_1 = x(h), y_1 = y(h)$  i przepiszemy te równania w postaci

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + f(x_1, y_1)h \\y_2 &= y_1 + g(x_1, y_1)h\end{aligned}\tag{1.80}$$

Na płaszczyźnie otrzymujemy punkt o współrzędnych  $\{x_2, y_2\}$ . Zaznaczmy go na płaszczyźnie. Teraz mamy już 3 punkty:

$$\{x_0, y_0\}, \quad \{x_1, y_1\}, \quad \{x_2, y_2\}\tag{1.81}$$

3. Widzimy od razu, że w 3 kroku otrzymujemy równania

$$\begin{aligned}x_3 &= x_2 + f(x_2, y_2)h \\y_3 &= y_2 + g(x_2, y_2)h\end{aligned}\tag{1.82}$$

i otrzymujemy punkt o współrzędnych  $\{x_3, y_3\}$ .

4. Zauważamy, że w  $n$ -tym kroku otrzymujemy równania

$$\begin{aligned}x_n &= x_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h \\y_n &= y_{n-1} + g(x_{n-1}, y_{n-1})h\end{aligned}\tag{1.83}$$

22. Częściej pisze się, co się otrzymuje w następnym kroku, czyli  $n+1$  :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + f(x_n, y_n)h \\y_{n+1} &= y_n + g(x_n, y_n)h\end{aligned}\tag{1.84}$$

Otrzymujemy równania rekurencyjne, które pozwalają wyznaczyć ewolucję układu, czyli rozwiązanie numeryczne układu równań różniczkowych. Na płaszczyźnie  $XY$  otrzymujemy ciąg punktów o współrzędnych

$$\{x_n, y_n\} \quad (1.85)$$

Jeżeli przyrost czasu  $h$  jest odpowiednio mały, to ten ciąg punktów łączymy linią ciągłą i otrzymujemy krzywą na płaszczyźnie. Ta krzywa nazywa się krzywą fazową układu dynamicznego. Mając narysowaną taką krzywą fazową, możemy wnioskować o ewolucji układu i cechach charakterystycznych zachowania się układu w czasie  $t$ . Poniżej przedstawiamy dwa przykłady: krzywe fazowe dla oscylatora harmonicznego i oscylatora harmonicznego tłumionego.

**Oscylator harmoniczny** Przykładem oscylatora harmonicznego jest ciało o masie  $m$  przyłączone do sprężyny i poruszające się wzdłuż osi  $OX$ . Siła działająca na to ciało jest proporcjonalna do wychylenia  $x$  od położenia równowagi i przeciwnie skierowana do wychylenia; gdy rozciągamy sprężynę w kierunku większych dodatnich wartości  $x$  to siła działa w kierunku ujemnych wartości  $x$ :

$$F = -kx \quad (1.86)$$

gdzie  $k$  charakteryzuje “sprężystość” sprężyny. Równanie Newtona ma postać:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \text{lub w postaci} \quad \ddot{x} = -(k/m)x = -\omega^2 x \quad (1.87)$$

gdzie  $\omega^2 = k/m$ . To równanie drugiego rzędu jest równoważne 2 równaniom pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & x(0) &= x_0 \\ \dot{y} &= -\omega^2 x, & y(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (1.88)$$

**Tłumiony oscylator harmoniczny** Jeżeli w poprzednim przykładzie założymy bardziej realistyczną sytuację, w której układ nie jest w próżni, ale znajduje się w środowisku (np. w powietrzu, w wodzie lub innej cieczy), to na ciało działa dodatkowa siła, a mianowicie siła tarcia (tłumienia)  $F_d$ . Siła tarcia jest proporcjonalna do prędkości cząstki i przeciwnie skierowana do kierunku ruchu

$$F_d = -\gamma_0 v = -\gamma_0 \dot{x} \quad (1.89)$$

gdzie  $\gamma_0$  nazywa się współczynnikiem tarcia (tłumienia).

Siła tarcia jest związana z oddziaływaniem ciała z cząsteczkami otoczenia. Otoczenie stawia opór gdy ciało porusza się w nim i im większa jest prędkość ciała tym większy jest opór otoczenia. Doświadczamy to, gdy biegniemy cali zanurzeni w wodzie.

Uwzględniając siłę tarcia, równanie Newtona przyjmuje postać

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma_0 \dot{x}, \quad \text{lub w postaci} \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{\gamma_0}{m}\dot{x} = -\omega^2 x - \gamma \dot{x} \quad (1.90)$$



gdzie  $\omega^2 = k/m$  oraz  $\gamma = \gamma_0/m$ . Równanie powyższe jest równoważne 2 równaniom pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & x(0) &= x_0 \\ \dot{y} &= -\gamma y - \omega^2 x, & y(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (1.91)$$

Oczywiście gdy  $\gamma = 0$ , wówczas otrzymujemy równanie oscylatora harmonicznego bez tarcia (nie tłumionego).

Poniżej przedstawiamy krzywe fazowe dla tych 2 przykładów.

### Oscylator harmoniczny bez tarcia

```
var('x y')
def schemat_eulera2D(vec, ics, Tlist):
    i = 0
    dx = [ics[0]]
    dy = [ics[1]]
    h = Tlist[i+1] - Tlist[i]
    iks(x,y) = vec[0R]*h
    igrek(x,y) = vec[1R]*h
    for time in Tlist:
        dx.append(dx[i] + iks(dx[i],dy[i]))
        dy.append(dy[i] + igrek(dx[i],dy[i]))
        i += 1
    return zip(dx,dy)
#
@interact(layout={'top':[['omega','x0','y0']], 'bottom':[['T','h']]])
def _(title=['a','b'], h=selector(['0.005','0.01','0.05','0.1','0.5','1'], default='0.1'),
    global oscylator_nietlumiony, background
    if T == 0:
        T = 2*pi/omega
    listT = srange(0,T,float(h), include_endpoint=True)
    background = desolve_odeint(vector([y,-omega^2*x]), [x0, y0], srange(0,T+0.1,0.1,includ
    oscylator_nietlumiony = schemat_eulera2D([y,-omega^2*x], [x0, y0], listT)
    print r'Parametry modelu'
    html(r'$\omega=%s, x_0=%s, y_0=%s$'%(omega,x0,y0))
    print r'Parametry symulacji'
    html(r'$h=%s, T=%s$'%(h,T))
    print '\nDla T=0 lista generowana jest automatycznie dla jednego okresu własnego oscyla
#
@interact
def _(krok=slider(1, len(oscylator_nietlumiony), 1, default=1, label=r'krok')):
    ...
    buf = zip(*oscylator_nietlumiony)
    minx, maxx, miny, maxy = min(buf[0]), max(buf[0]), min(buf[1]), max(buf[1])
    kroki = oscylator_nietlumiony[:krok]
    kroki_plot = list_plot(kroki, figsize=(4,4), axes_labels=[r'$x$',r'$y$'], size=30, xmin
    ...
    txt_plot = text(r'$[x_0,y_0]$', kroki[0], vertical_alignment='bottom', horizontal_alignmen
    for i in range(1, len(kroki)):
        txt_plot += text(r'$[x_{%d}, y_{%d}]$'%(i,i), kroki[i], vertical_alignment='bottom', ho
    ...
    full_plot = list_plot(oscylator_nietlumiony, plotjoined=1, figsize=(4,4), axes_labels=
    full_plot += list_plot(background.tolist(), plotjoined=1, color='grey', alpha=0.5)
    html.table(["krzywe fazowe dla oscylatora bez tarcia", ""], [full_plot+kroki_plot, kroki_
```

W przypadku oscylatora nietłumionego, krzywe fazowe są zamknięte. Częstka z biegiem czasu porusza się tak, że położenie  $x$  i prędkość  $v = y$  leżą na krzywej fazowej. Ponieważ jest to krzywa zamknięta, to po pewnym czasie częstka znowu “przebiega” punkty, które się powtarzają. Powtarzanie się jest cechą charakterystyczną ruchu okresowego. Tak więc krzywa fazowa zamknięta przedstawia ruch okresowy (periodyczny). Okres takiego ruchu periodycznego to czas potrzebny na to, aby częstka startując od punktu np.  $\{x_0, y_0\}$  i poruszając się po krzywej fazowej dotarła znowu do tego samego punktu  $\{x_0, y_0\}$ .

W przypadku oscylatora tłumionego, krzywą fazową jest spirala zwijająca się do punktu  $\{0, 0\}$ . Ruch po spirali oznacza, że zarówno  $x$  jak i  $v = y$  maleją w czasie i dla długich czasów położenie  $x$  oraz prędkość  $v$  dążą do zera, czyli częstka zwalnia i na końcu zatrzymuje się. To jest ruch tłumiony: amplituda drgań maleje w czasie. To jest to, co obserwujemy w ruchu kulki zawieszonej na nitce: kulka wykonuje coraz to mniejsze drgania i po długim czasie wisi pionowo (to jest coś co nazywa się stanem równowagi lub położeniem stacjonarnym).

Gdy mamy bardziej skomplikowane krzywe fazowe, ich “rozszyfrowanie” może być trudniejsze. Ale ogólna zasada jest taka: gdy  $x$  rośnie to oznacza wzrost położenia częstki. Gdy  $y$  maleje to oznacza, że maleje prędkość częstki. Gdy  $x$  maleje to maleje współrzędna położenia częstki. Gdy  $y$  rośnie to rośnie prędkość częstki.

### Tłumiony oscylator harmoniczny

```
var('x y')
def schemat_eulera2D(vec, ics, Tlist):
    i = 0
    dx = [ics[0]]
    dy = [ics[1]]
    h = Tlist[i+1] - Tlist[i]
    iks(x,y) = vec[0R]*h
    igrek(x,y) = vec[1R]*h
    for time in Tlist:
        dx.append(dx[i] + iks(dx[i],dy[i]))
        dy.append(dy[i] + igrek(dx[i],dy[i]))
        i += 1
    return zip(dx,dy)
#
@interact(layout={'top':[['omega','ggamma','x0','y0']], 'bottom':[['T','h']]])
def _(title=['a','b'], h=selector(['0.05','0.01','0.1','0.5','1'], default='0.1', button=
global oscylator_tlumiony, globggamma, globomega, background2
globggamma = ggamma
globomega = omega
if T == 0:
    T = 2*pi/omega
listT = srange(0,T,float(h),include_endpoint=True)
background2 = desolve_odeint(vector([y,-omega^2*x-ggamma*y]), [x0, y0], srange(0,2*pi/c
oscylator_tlumiony = schemat_eulera2D([y,-omega^2*x-ggamma*y], [x0, y0], listT)
print r'Parametry modelu'
html(r'\gamma=%s, \omega=%s, x_0=%s, y_0=%s'% (ggamma,omega,x0,y0))
print r'Parametry symulacji'
html(r'h=%s, T=%s'% (h,T))
print '\nDla T=0 lista generowana jest automatycznie dla jednego okresu własnego oscyla
#
@interact
def _(krok=slider(1, len(oscylator_tlumiony), 1, default=1, label=r'krok')):
    buf = zip(*oscylator_tlumiony)
```

```

minx, maxx, miny, maxy = min(buf[0]), max(buf[0]), min(buf[1]), max(buf[1])
kroki = oscylator_tlumiony[:krok]
kroki_plot = list_plot(kroki, figsize=(4,4), axes_labels=[r'$x$', r'$y$'], size=30, xmin=minx, xmax=maxx, ymin=miny, ymax=maxy)
txt_plot = text(r'$[x_0, y_0]$', kroki[0], vertical_alignment='bottom', horizontal_alignment='center')
for i in range(1, len(kroki)):
    txt_plot += text(r'$[x_{%d}, y_{%d}]$'%(i,i), kroki[i], vertical_alignment='bottom', horizontal_alignment='center')
full_plot = list_plot(oscylator_tlumiony, plotjoined=1, figsize=(4,4), axes_labels=[r'$x$', r'$y$'], size=30, xmin=minx, xmax=maxx, ymin=miny, ymax=maxy)
full_plot += list_plot(background2.tolist(), plotjoined=1, color='grey', alpha=0.5)
html.table([[ "krzywe fazowe dla oscylatora tłumionego", "" ], [full_plot+kroki_plot, kroki_plot]])

```

### 1.4.3 Pole wektorowe

Prawe strony układu równań różniczkowych

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), & x(0) &= x_0 \\ \dot{y} &= g(x, y), & y(0) &= y_0\end{aligned}\quad (1.92)$$

można traktować jak składowe pewnego pola wektorowego:

$$\vec{F} = [F_x, F_y] = [f(x, y), g(x, y)] \quad (1.93)$$

W każdym punkcie płaszczyzny o współrzędnych  $\{x, y\}$  rysujemy wektor o składowych  $[f(x, y), g(x, y)]$ . W ten sposób otrzymujemy pole wektorowe. No dobrze, ale jaką informację o układzie można “wyciągnąć” z tego pola wektorowego. Wykonajmy takie oto ćwiczenie numeryczne: Startujemy z warunku początkowego  $\{x_0, y_0\}$  i rysujemy w tym punkcie wektor o składowych  $[f(x_0, y_0), g(x_0, y_0)]$  czyli

$$\text{w punkcie } \{x_0, y_0\} \text{ rysujemy wektor o składowych } [f(x_0, y_0), g(x_0, y_0)] \quad (1.94)$$

Jak poprzednio, rozwiązujemy numerycznie układ równań różniczkowych i obliczamy  $\{x_1, y_1\}$ :

$$\text{w punkcie } \{x_1, y_1\} \text{ rysujemy wektor o składowych } [f(x_1, y_1), g(x_1, y_1)] \quad (1.95)$$

Następnie obliczamy  $\{x_2, y_2\}$ :

$$\text{w punkcie } \{x_2, y_2\} \text{ rysujemy wektor o składowych } [f(x_2, y_2), g(x_2, y_2)] \quad (1.96)$$

W  $n$ -tym kroku iteracji obliczamy  $\{x_n, y_n\}$ :

$$\text{w punkcie } \{x_n, y_n\} \text{ rysujemy wektor o składowych } [f(x_n, y_n), g(x_n, y_n)] \quad (1.97)$$

Ponieważ wszystkie powyższe punkty  $\{x_i, y_i\}$  leżą na krzywej fazowej, to wektory  $[f(x_i, y_i), g(x_i, y_i)]$  są przyczepione do tych krzywych fazowych. Zauważamy, że wektory te są styczne do krzywej fazowej. Jeżeli  $\{x_i, y_i\}$  miałyby interpretację położenia cząstki na płaszczyźnie, to wektory  $[f(x_i, y_i), g(x_i, y_i)]$  miałyby interpretację prędkości ponieważ  $\dot{x} = f(x, y)$  oraz  $\dot{y} = g(x, y)$ . Wiemy, że  $\dot{x} = v_x$  jest  $x$ -ową składową prędkości, z kolei  $\dot{y} = v_y$  jest  $y$ -ową składową prędkości. Innymi słowy, otrzymane pole wektorowe to pole prędkości fikcyjnej cząstki.

```

var('x y')
@interact(layout={'top':[['omega','ggamma','x0','y0']], 'bottom':[['T','h']]])
def _(title=['a','b'], h=selector(['0.05','0.01','0.1','0.5','1'], default='0.1', button
    global oscylator_tlumiony, globggamma, globomega
    globggamma = ggamma
    globomega = omega
    listT = srange(0,T,float(h))
    oscylator_tlumiony = desolve_odeint(vector([y,-omega^2*x-ggamma*y]), [x0, y0], listT,
    print r'Parametry modelu'
    html(r'\gamma=%s, \omega=%s, x_0=%s, y_0=%s'%(ggamma,omega,x0,y0))
    print r'Parametry symulacji'
    html(r'h=%s, T=%s'%(h,T))
    vf = lambda u,a,b: (u[0]+u[1],u[1]-a*u[0]-b*u[1])
    #
    @interact
    def _(krok=slider(1, len(oscylator_tlumiony), 1, default=1, label=r'krok')):
        kroki = oscylator_tlumiony[:krok]
        kroki_plot = list_plot(kroki.tolist(), figsize=(4,4), axes_labels=[r'$x$',r'$y$'], size
        pole_wektorowe = arrow(kroki[0],vf(kroki[0],globomega^2,globggamma),color='red',xmax=vf
        for krok in kroki[1:]:
            pole_wektorowe += arrow(krok,vf(krok,globomega^2,globggamma),color='red', width=.4)
        txt_plot = text(r'$[x_0,y_0]$',kroki[0],vertical_alignment='bottom',horizontal_alignmen
        for i in range(1,len(kroki)):
            txt_plot += text(r'$[x_{%d},y_{%d}]$'%(i,i),kroki[i],vertical_alignment='bottom',ho
        shadowplot = list_plot(oscylator_tlumiony.tolist(), plotjoined=1, figsize=(4,4), axes_la
        full_plot = list_plot(oscylator_tlumiony.tolist(), plotjoined=1, figsize=(4,4), axes_la
        html.table(["krzywe fazowe dla oscylatora tłumionego",""],[full_plot+kroki_plot,shadow

```

Poniżej znajdziecie komórkę, w której zachęcamy wszystkich do poeksperymentowania z różnymi modelami. Miłej zabawy...

**Wskazówka:** Aby całość zadziałała poprawnie musicie zadeklarować model podając  $dx$  i  $dy$ , podać wartości wszystkich parametrów (teraz jest tylko  $\alpha$ ) oraz warunki początkowe  $x_0$  i  $y_0$ . Na koniec zdecydujcie jaki okres dynamiki punktu chcecie symulować przypisując do zmiennej  $T$  odpowiednią wartość.

```

#####
# Model #
#####
# zmienne
var('x y')
#
# parametry
# UWAGA: jeżeli Twój model będzie zależny od innych parametrów
#         tu właśnie musisz je wszystkie wyspecyfikować
alpha = 1
#
# warunki początkowe
x0 = 1
y0 = 1
#
# model
dx = y
dy = -alpha*x - y
#
# czas (T) symulacji

```

```

T = 12
#
#####
# Symulacje + wizualizacja
#####
listT = srange(0,T,0.1,include_endpoint=True)
numeryka = desolve_odeint(vector([dx, dy]), [x0, y0], listT, [x,y])
przestrzen_fazowa = list_plot(numeryka.tolist(), plotjoined=1, figsize=(4,4), axes_labels=['x', 'y'])
pole_wektorowe = plot_vector_field([dx,dy], (x, numeryka[:,0].min(), numeryka[:,0].max()))
show(przestrzen_fazowa+pole_wektorowe)

```

## 1.5 Dynamiczne układy zachowawcze i dysypatywne

### 1.5.1 Układy zachowawcze

Niektóre układy równań różniczkowych mają specyficzną strukturę i ukryte własności. Przykłady z fizyki mają taką specyficzną strukturę. Rozpatrzmy równanie Newtona dla cząstki o jednym stopniu swobody w postaci:

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -V'(x) \quad (1.98)$$

gdzie siła  $F(x)$  jest potencjalna, tzn. istnieje taka funkcja  $V(x)$ , że  $F(x) = -V'(x)$ . Oznaczenie  $V'(x)$  jest pochodną funkcji  $V(x)$  względem zmiennej  $x$ . Funkcja  $V(x)$  nazywa się energią potencjalną, ale my będziemy pisali krótko - potencjał. Jeżeli znamy siłę  $F(x)$  to potencjał można znaleźć obliczając całkę:

$$V(x) = -\int_a^x F(y)dy \quad (1.99)$$

gdzie  $a$  jest dowolną liczbą wybieraną tak jak nam wygodnie. Np. możemy wybrać tak, aby w pewnym punkcie potencjał był zerowy lub nieskończony.

Równanie Newtona jest równaniem 2-go rzędu, autonomicznym. Zapiszemy je w postaci

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, & x(0) &= x_0, \\ m\dot{v} &= F(x) = -V'(x), & v(0) &= v_0. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Z tego wynika, że przestrzeń fazowa układu jest 2-wymiarowa  $\{x, v\}$ . W tej przestrzeni fazowej może analizować krzywe fazowe. Można zauważyć, że położenie  $x(t)$  oraz prędkość  $v(t)$  cząstki zmieniają się w czasie zgodnie z równaniem Newtona, to istnieje pewna funkcja (kombinacja) tych 2 funkcji  $x(t)$  oraz  $v(t)$ , która nie zmienia się w czasie:

$$E[x(t), v(t)] = \frac{1}{2}mv^2(t) + V(x(t)) = \frac{1}{2}mv^2(0) + V(x(0)) = E[x(0), v(0)] \quad (1.101)$$

Wielkość  $E$  nazywa się w fizyce całkowitą energią układu i składa się z 2 części: energii kinetycznej cząstki  $E_k = mv^2/2$  oraz energii potencjalnej cząstki  $E_p = V(x)$ . Jeżeli  $E$  nie zmienia się w czasie, to znaczy że jest to funkcja stała ze względu na czas i pochodna względem czasu powinna być zero. Sprawdźmy to:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}E[x(t), v(t)] = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial v} \frac{dv}{dt} = V'(x)\dot{x} + mv\dot{v} = -F(x)v + vF(x) \quad (1.102)$$

gdzie skorzystaliśmy ze związku pomiędzy siłą i energią potencjalną oraz z równania Newtona.

Ponieważ  $E$  nie zmienia się w czasie, to mówimy że jest to stała ruchu lub całka ruchu, lub całka pierwsza układu (ostatnie nazwy wydają się być dziwaczne, bo w wyrażeniu dla  $E$  nie widać żadnej całki). Istnienie stałych czy też całek ruchu ułatwia analizę układów. Pokażemy to na przykładzie oscylatora harmonicznego dla którego postać siły jest dobrze znana:

$$F(x) = -kx = -m\omega^2 x, \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad (1.103)$$

Prawo zachowania energii mówi, że

$$E = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t) = \text{const.} = \frac{1}{2}mv^2(0) + \frac{1}{2}kx^2(0) \quad (1.104)$$

Ponieważ ta wielkość jest niezmienna w czasie, to określa równanie krzywej fazowej na płaszczyźnie  $XY$ . Łatwo zauważyć, że powyższe równanie w zmiennych  $\{x, y = v\}$  ma postać

$$my^2 + kx^2 = 2E \quad (1.105)$$

Jest to równanie elipsy:

$$\frac{x^2}{(2E/k)} + \frac{y^2}{(2E/m)} = 1 \quad (1.106)$$

o osiach  $a = 2E/k$  oraz  $b = 2E/m$ . Narysujmy sobie taką elipsę dla, powiedzmy,  $E = 2, k = 0.2$  oraz  $m = 1$ . Wiadomo, że każdy wie jak taka elipsa będzie wyglądać, ale zrobimy to bardziej po to, żeby wyrobić sobie naturalną umiejętność używania programów typu Sage do wizualizacji i interpretacji wyników.

```
@interact(layout={'top':[['E','k','m']],})
def _(title=['elipsa'], E=input_box(2,label=r'$E$', width=10), k=input_box(0.2,label=r'$k$', width=10), m=input_box(1,label=r'$m$', width=10)):
    a = 2*E/k
    b = 2*E/m
    ellipse((0,0),a,b,0,fill=True,alpha=0.3).show()
```

Elipsa jest krzywą zamkniętą, więc ruch jest periodyczny. Można sobie wyobrazić, że ruch cząstki w potencjale  $V(x)$  jest podobny do ruchu cząstki we wnętrzu połówki sfery (w czasie). Nie jest to prawdą, ale takie wyobrażenie wyrabia w nas intuicję o własnościach ruchu. Poniżej przedstawiamy krok po kroku co zrobić, aby narysować krzywe fazowe układu.

Rysujemy wykres przedstawiający potencjał  $V(x)$ . Poniżej tego wykresu, z osią pionową ustawioną jak w wykresie dla potencjału, rysujemy 2 symetryczne krzywe zadane przez prawo zachowania energii  $\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E$  czyli stąd wynika że  $v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[(E - V(x))]}$ . Te dwie krzywe  $v = v(x, E)$  są krzywymi fazowymi. Cząstka porusza się w prawo gdy prędkość jest dodatnia  $v > 0$  (zielona krzywa) i w lewo gdy prędkość jest ujemna  $v < 0$  (czerwona krzywa). Prędkość jest zero wówczas, gdy  $V(x) = E$ . Wynika to z prawa zachowania energii (podstaw tam  $v = 0$ ). Równanie  $V(x) = E$  wyznacza punkty zwrotu  $x_i$ : cząstka w tych punktach ma zerową prędkość i zmienia kierunek ruchu (zawraca).

Spróbujemy, krok po kroku zanalizować równanie Newtona aby uzyskać krzywe fazowe.

$$m\ddot{x} = F \quad (1.107)$$

Jeżeli siła będzie liniowa  $F = -kx$  to dostaniemy wyżej opisane zagadnienie oscylatora harmonicznego. Na początku musimy zadeklarować nazwy zmiennych oraz parametrów użytych w modelu. Pamiętaj - każdorazowo, jeżeli chcesz obliczać coś symbolicznie, trzeba taką linijkę napisać i ją wykonać. W kolejnych liniijkach ustalimy parametry układu, zdefiniujemy siły z jakimi mamy do czynienia i obliczymy potencjał (całka z siły brana ze znakiem minus). W następnym kroku, z prawa zachowania energii, obliczymy teraz jak prędkość zależy od położenia (owe krzywe fazowe).

```
#0 (kilka zmiennych)
var('x v')
#parametry dla wizualizacji
x0 = 1.3
v0 = 0.3
k = 0.2
m = 1
F = -k*x
#1
V = -integral(F,x)
p1 = plot(V, xmin=-x0, xmax=x0)
p1.show(figsize=4, axes_labels=[r'$x$', r'$V(x)=%s$'%V])
#
#prawo zachowania energii
E = m*v0^2 + V(x=x0)
PZE = m*v^2 + V == E
#i jego rozwiązanie
roz = solve(PZE, v); show(roz)
v1=roz[0].rhs()
v2=roz[1].rhs()
#
#ekstremalne wychylenie
#prawo zachowania energii dla v=0
roz = solve(PZE(v=0), x); show(roz)
xmin = roz[0].rhs()
xmax = roz[1].rhs()
#punkt początkowy (tak jak powyżej)
ball = (x0,V(x=x0))
p0 = point(ball,size=30)
p0 += text(r" punkt startowy",ball,vertical_alignment='bottom',horizontal_alignment='left')
#
#ekstrema
ball = (xmax,V(x=xmax))
p0 += point(ball,size=30,color='red')
p0 += text("ekstremum_",ball,vertical_alignment='bottom',horizontal_alignment='right',color='red')
p12a = line((ball,(xmax,0)),linestyle='dotted',color='grey')
ball = (xmin,V(x=xmin))
p0 += point(ball,size=30,color='red')
p0 += text("_ekstremum",ball,vertical_alignment='bottom',horizontal_alignment='left',color='red')
p12a += line((ball,(xmin,0)),linestyle='dotted',color='grey')
#
#potencjał
p1 = plot(V, xmin=xmin, xmax=xmax)
#
#krzywe fazowe
p12b = line(((xmin,0),(xmin,v2(x=0))),linestyle='dotted',color='grey')
p12b += line(((xmax,0),(xmax,v2(x=0))),linestyle='dotted',color='grey')
p2 = plot(v1, (x,xmin,xmax), color='red')
p2 += plot(v2, (x,xmin,xmax), color='green')
```

```
#
(p0+p1+p12a).show(figsize=4, axes_labels=['$x$', '$V(x)$'])
(p12b+p2).show(figsize=4, xmax=xmax)
sage:
var('x y z t')
xy_wsp = [( 'x' , 'x' ), ( 'y' , 'y' )]+[( 'z' , 'z' )]
N = len(xy_wsp)
J = matrix(SR,N)
```

## 1.5.2 Układy potencjalne

Układ o 1 stopniu swobody jest potencjalny (tzn. istnieje potencjał  $V(x)$  pod warunkiem, że siła zależy tylko od położenia cząstki, tzn.  $F = F(x)$ ). Jeżeli siła zależy także od prędkości cząstki, tzn. gdy  $F = F(x, v)$ , nie istnieje potencjał  $V$  taki aby  $F = -V' = -dV/dx$ . Dla układów o wielu stopniach swobody, opisywanych układem równań Newtona

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N) \quad (1.108)$$

dla  $N$  cząstek, układ jest potencjalny, gdy istnieje taka funkcja skalarna  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N)$ , że siła działająca na  $i$ -tą cząstkę jest gradientem potencjału ze znakiem minus. Prościej jest to wyjaśnić na przykładzie 1 cząstki poruszającej się w przestrzeni 3-wymiarowej:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_1(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_2(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial y} V(x, y, z), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_3(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial z} V(x, y, z). \end{aligned} \quad (1.109)$$

W ogólnym przypadku, gdy mamy zadane 3 składowe siły  $F_1, F_2$  oraz  $F_3$ , nie musi istnieć tylko jedna funkcja  $V$  taka aby powyższe równania były spełnione. Nasuwa się pytanie, czy istnieje proste kryterium mówiące, że układ jest potencjalny. Jeżeli

$$\vec{F} = -\text{grad } V \quad \text{to} \quad \text{rot } \vec{F} = -\text{rot grad } V = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V \equiv 0 \quad (1.110)$$

gdzie operator  $\vec{\nabla}$  jest operatorem różniczkowania

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.111)$$

Wystarczy zatem sprawdzić, czy rotacja pola sił  $\vec{F}$  jest 0.



**Zadanie**

Sprawdzić, czy siły  $\vec{F}(x, y, z)$  o składowych

$$1. \quad F_1(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad F_2(x, y, z) = -\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad F_3(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.112)$$

$$2. \quad F_1(x, y, z) = \frac{x - z}{x^2 + y^2}, \quad F_2(x, y, z) = xe^{-y^2}, \quad F_3(x, y, z) = z + 5 \quad (1.113)$$

$$3. \quad F_1(x, y, z) = 25x^4y - 3y^2, \quad F_2(x, y, z) = 5x^5 - 6xy - 5, \quad F_3(x, y, z) = 0 \quad (1.114)$$

są potencjalne

Jeżeli układ jest potencjalny to łatwo sprawdzić, podobnie jak wyżej w przypadku układu o 1-stopniu swobody, że istnieje stała ruchu - całkowita energia układu:

$$E = \sum_i \frac{m\vec{v}^2}{2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N) = \text{constant}, \quad \frac{dE}{dt} = 0 \quad (1.115)$$

Dlatego takie pole sił nazywa się zachowawczym polem sił. Wszystkie siły związane z potencjalnym polem sił są siłami zachowawczymi. Istnieją jednak siły, które nie są siłami potencjalnymi, mimo to pozostają siłami zachowawczymi. Przykładem może być siła Lorentza działająca na naładowaną cząstkę poruszającą się w polu magnetycznym. Nie należy tego mylić z zachowawczymi układami dynamicznymi. Tę kwestię postaramy się teraz wyjaśnić.

### 1.5.3 Dynamiczne układy zachowawcze i dysypatywne

W teorii układów dynamicznych ważną rolę pełnią dwa pojęcia: zachowawcze układy dynamiczne i dysypatywne układy dynamiczne. Znowu dla jasności wywodu rozpatrzmy przykład układu o 3-wymiarowej przestrzeni fazowej:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_1(x, y, z), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= F_2(x, y, z), & y(0) &= y_0, \\ \dot{z} &= F_3(x, y, z), & z(0) &= z_0. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Wybieramy w przestrzeni fazowej obszar  $D(0)$  o objętości  $M(0)$ . Zawiera on wszystkie możliwe warunki początkowe

$$\{x_0, y_0, z_0\} \in D(0) \quad (1.117)$$

Pod wpływem ewolucji każdy punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  z tego obszaru przejdzie po czasie  $t$  do punktu  $(x(t), y(t), z(t))$ . Zbiór tych punktów w chwili  $t$  tworzy obszar  $D(t)$  o objętości  $M(t)$ . Zachodzi pytanie:

$$\text{w jakich przypadkach} \quad M(t) = M(0) \quad (1.118)$$

Innymi słowy, kiedy układ dynamiczny zachowuje objętość fazową. Zbadamy ten problem. Wprowadzimy nowe oznaczenia, aby ułatwić notację:

$$x_t = x(t), \quad y_t = y(t), \quad z_t = z(t) \quad (1.119)$$

Objętość fazowa warunków początkowych w chwili  $t = 0$  wynosi

$$M(0) = \int \int \int_{D(0)} dx_0 dy_0 dz_0 \quad (1.120)$$

Objętość fazowa w chwili  $t$  wynosi

$$M(t) = \int \int \int_{D(t)} dx_t dy_t dz_t \quad (1.121)$$

Ewolucja układu to nic innego jak zamiana zmiennych  $(x_0, y_0, z_0) \rightarrow (x_t, y_t, z_t)$ . Dokonajmy tej zamiany zmiennych w drugiej całce:

$$M(t) = \int \int \int_{D(t)} dx_t dy_t dz_t = \int \int \int_{D(0)} \frac{\partial(x_t, y_t, z_t)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} dx_0 dy_0 dz_0 = \int \int \int_{D(0)} J(t) dx_0 dy_0 dz_0 \quad (1.122)$$

gdzie  $J$  jest jakobianem transformacji  $(x_t, y_t, z_t) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ . Jeżeli objętość fazowa nie zmienia się w czasie (jest funkcją stałą), to jej pochodna

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int \int \int_{D(0)} \frac{dJ(t)}{dt} dx_0 dy_0 dz_0 \quad (1.123)$$

wynosi zero. Jeżeli

$$\frac{dJ(t)}{dt} = 0 \quad \text{to} \quad \frac{dM(t)}{dt} = 0 \quad \text{czyli} \quad M(t) = M(0) \quad (1.124)$$

Więc rozpoczynamy obliczenia

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial(x_t, y_t, z_t)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_t}{\partial x_0} & \frac{\partial x_t}{\partial y_0} & \frac{\partial x_t}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y_t}{\partial x_0} & \frac{\partial y_t}{\partial y_0} & \frac{\partial y_t}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z_t}{\partial x_0} & \frac{\partial z_t}{\partial y_0} & \frac{\partial z_t}{\partial z_0} \end{bmatrix} \quad (1.125)$$

Należy powyższy wyznacznik rozwinąć i pamiętać, że rozwiązania równań różniczkowych

$$x_t = x_t(x_0, y_0, z_0), \quad y_t = y_t(x_0, y_0, z_0), \quad z_t = z_t(x_0, y_0, z_0) \quad (1.126)$$

zależą od warunków początkowych  $\{x_0, y_0, z_0\}$ . Po rozwinięciu wyznacznika pojawiają się wyrażenia typu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_t}{\partial z_0} = \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{dx_t}{dt} = \frac{\partial}{\partial z_0} \dot{x}_t = \frac{\partial}{\partial z_0} F_1(x_t, y_t, z_t) = \frac{\partial F_1}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial z_0} + \frac{\partial F_1}{\partial y_t} \frac{\partial y_t}{\partial z_0} + \frac{\partial F_1}{\partial z_t} \frac{\partial z_t}{\partial z_0} \quad (1.127)$$

Jak widać, w tym prostym przypadku musimy przeprowadzić uciążliwe rachunki. Znacznie lepiej jest posłużyć się rachunkiem symbolicznym z wykorzystaniem SAGE.

Aby przeprowadzić dowód, najlepiej jest obejść ograniczenia operacji na wyrażeniach z pochodnymi w Sage. Pochodna wyznacznika jest zrobiona automatycznie, potem jest ręcznie wykonane podstawienie:

$$\frac{\partial}{\partial z_0} \dot{x}_t = \frac{\partial F_1}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial z_0} + \frac{\partial F_1}{\partial y_t} \frac{\partial y_t}{\partial z_0} + \frac{\partial F_1}{\partial z_t} \frac{\partial z_t}{\partial z_0} \quad (1.128)$$

```

for i, (v, lv) in enumerate(xy_wsp):
for j, (u, lu) in enumerate(xy_wsp):
    J[i, j] = var("d%sd%s"%(v, u), latex_name=r'\displaystyle\frac{\partial %s_t}{\partial %s_t}')
    var("dF%sd%s"%(v, u), latex_name=r'\displaystyle\frac{\partial F_s}{\partial %s_t}')
#
to_fun = dict()
for v in J.list():
    vars()[str(v).capitalize()] = function(str(v).capitalize(), t)
    var("%sd"%str(v))
    to_fun[v]=vars()[str(v).capitalize()]
    to_fun[vars()[str(v)+"d"]]=vars()[str(v).capitalize()].diff()
to_var = dict((v, k) for k, v in to_fun.items())
#
to_rhs = dict()
for i, (v, lv) in enumerate(xy_wsp):
    for j, (u, lu) in enumerate(xy_wsp):
        to_rhs[vars()[str(v)+"d"]]=sum([vars()[str(v)+"d"]*vars()[str(u)+"d"] for u, lu in xy_wsp])
print "Zaczynamy od macierzy Jacobiego:"
show(J)
print "Wszystkie pochodne cząstkowe są reprezentowane przez niezależne zmienne, aby pol..."
show(J.subs(to_fun))
print "Liczymy wyznaczniki pochodną, oraz wracamy do zmiennych symbolicznych:"
J.subs(to_fun).det().diff(t).subs(to_var).show()
#
print "Używając słownika to_rhs, podstawiamy prawe strony ODE:"
J.subs(to_fun).det().diff(t).subs(to_var).subs(to_rhs).show()
#
print "Ostatecznie dzielimy otrzymany wzór przez Jacobian:"
#
final = J.subs(to_fun).det().diff(t).subs(to_var).subs(to_rhs)/J.det()
final.simplify_full().show()

```

Ostatecznie otrzymamy wyrażenie

$$\frac{dJ(t)}{dt} = J(t) \left[ \frac{\partial F_1}{\partial x_t} + \frac{\partial F_2}{\partial y_t} + \frac{\partial F_3}{\partial z_t} \right] = J(t) \operatorname{div} \vec{F} \quad (1.129)$$

To, co jest w nawiasie kwadratowym nazywa się dywergencją pola wektorowego  $\vec{F}$ . Wstawiamy to wyrażenie do równania (1.123) i otrzymamy

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int \int \int_{D(0)} \frac{dJ(t)}{dt} dx_0 dy_0 dz_0 = \int \int \int_{D(0)} J(t) \operatorname{div} \vec{F} dx_0 dy_0 dz_0 = \int \int \int_{D(t)} \operatorname{div} \vec{F} dx_t dy_t dz_t \quad (1.130)$$

gdzie dokonaliśmy odwrotnego przejścia ( z prawej strony na lewą stronę) jak w równaniu (1.122).

Można teraz uogólnić ten wynik na dowolną ilość wymiarów przestrzeni fazowej dla układu równań

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n], \quad \vec{F} = [F_1, F_2, F_3, \dots, F_n] \quad (1.131)$$

i otrzymamy

**Twierdzenie** Jeżeli dywergencja pola wektorowego  $\vec{F}$  danego równania różniczkowego jest zero,

$$\operatorname{div} \vec{F} = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.132)$$

wówczas objętość fazowa jest zachowana,  $M(t) = M(0)$ . Takie układy dynamiczne nazywamy zachowawczymi. Jeżeli objętość fazowa maleje w czasie, to układ nazywamy dysypatywnym. Innymi słowy, układ jest dysypatywny gdy objętość  $M(t) < M(0)$  dla  $t > 0$ . Oznacza to, że dla układów dysypatywnych

$$\frac{dM(t)}{dt} < 0 \quad (1.133)$$

Gdyby

$$\operatorname{div} \vec{F} = C_0 = \text{const.} \quad (1.134)$$

wówczas z równania (1.130) otrzymujemy prostą relację

$$\frac{dM(t)}{dt} = C_0 M(t) \quad (1.135)$$

która pozwala rozstrzygnąć czy układ jest dysypatywny.

### Przykład 1: Oscylator harmoniczny tłumiony

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y = F_1(x, y), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= -\gamma y - \omega^2 x = F_2(x, y), & y(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Łatwo obliczyć dywergencję pola

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = -\gamma < 0 \quad (1.137)$$

Równanie (1.134) przyjmuje postać

$$\frac{dM(t)}{dt} = -\gamma M(t), \quad \text{jego rozwiązaniem jest funkcja malejąca} \quad M(t) = M(0)e^{-\gamma t} \quad (1.138)$$

czyli objętość fazowa (w tym przypadku powierzchnia fazowa) maleje w czasie i dlatego jest to dysypatywny układ dynamiczny.

### Przykład 2: Model Lorenza

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) = F_1(x, y, z), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y = F_2(x, y, z), & y(0) &= y_0, \\ \dot{z} &= xy - \beta z = F_3(x, y, z), & z(0) &= z_0. \end{aligned} \quad (1.139)$$

gdzie wszystkie parametry są dodatnie:  $\sigma, \rho, \beta > 0$ .

Obliczymy dywergencję 3-wymiarowego pola  $\vec{F} = [F_1, F_2, F_3]$ . Proste rachunki pokazują, że

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = -\sigma - 1 - \beta < 0 \quad (1.140)$$

Objętość fazowa (w tym przypadku faktycznie objętość w 3 wymiarowej przestrzeni) maleje eksponencjalnie w czasie, podobnie jak w poprzednim przykładzie. Dlatego też jest to dysypatywny układ dynamiczny.

## 1.6 Stany stacjonarne i ich stabilność

Czasami rozwiązanie równań różniczkowych dąży do stałej wartości dla długich czasów,  $t \rightarrow \infty$ . Mówimy wówczas, że istnieje rozwiązanie stacjonarne (stan stacjonarny, punkt stały, punkt równowagi):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}_s \quad (1.141)$$

Może istnieć kilka stanów stacjonarnych, a nawet nieskończenie wiele stanów stacjonarnych. Który z tych stanów się realizuje, zależy to od warunku początkowego  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ . Rozwiązanie stacjonarne  $\vec{x}_s$  nie zależy od czasu. Nazwa “rozwiązanie stacjonarne” nie jest bezpodstawne. Faktycznie jest to rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \quad (1.142)$$

z warunkiem początkowym  $\vec{x}(0) = \vec{x}_s$ . Jeżeli  $\vec{x}(t) = \vec{x}_s$  jest rozwiązaniem stacjonarnym to musi spełniać układ (1.142), czyli

$$\text{jeżeli } \vec{x}(t) = \vec{x}_s \quad \text{to} \quad \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{d\vec{x}_s}{dt} = 0 = \vec{F}(\vec{x}(t)) = \vec{F}(\vec{x}_s) = 0 \quad (1.143)$$

Innymi słowy, stan stacjonarny wyznaczony jest z warunku:

$$\vec{F}(\vec{x}_s) = 0 \quad (1.144)$$

Powyższy warunek to układ  $n$ -równań algebraicznych. Zwykle udaje nam się go rozwiązać analitycznie w niewielu przypadkach, w szczególności gdy wymiar przestrzeni fazowej  $n > 1$ . Natomiast możemy taki układ rozwiązywać numerycznie. Jeżeli już wyznaczymy stan stacjonarny, to nasuwa się pytanie na ile jest on stabilny, tzn. gdy nieco wytrącimy układ z tego stanu to czy powróci on do poprzedniego stanu stacjonarnego czy też oddali się od niego. Na przykład stanem stacjonarnym kulki poruszającej się na nitce w polu ziemskim jest położenie pionowe. Gdy kulkę wychylimy z tego położenia, po dostatecznie długim czasie powróci ona do pozycji pionowej i tak tam pozostanie nieruchoma. Jest to stabilny stan równowagi. Rozważmy teraz kulkę mogącą poruszać się tylko po sferze. Gdy umieścimy kulkę na biegunie północnym sfery w polu ziemskim to nieskończenie małe zaburzenie spowoduje, że kulka spadnie z tego położenia i nigdy do niego nie powróci. W obu tych przypadkach zakładamy rzeczywiste warunki ruchu z tarcie. Pominięcie tarcia spowoduje radykalnie różne zachowanie. Te dwa przykłady pozwalają nabyć intuicję, co to znaczy że stan stacjonarny jest stabilny lub jest niestabilny. Z grubsza można powiedzieć, że stan stacjonarny  $\vec{x}_s$  jest stabilny jeśli każda trajektoria startująca z punktu bliskiego  $\vec{x}_s$  pozostaje blisko  $\vec{x}_s$  wraz z upływem czasu. Natomiast  $\vec{x}_s$  jest niestabilny gdy każda trajektoria startująca z punktu bliskiego  $\vec{x}_s$  oddala się od tego punktu gdy  $t \rightarrow \infty$ . Można podać bardziej precyzyjne definicje.

**Definicja** Mówimy, że stan stacjonarny  $\vec{x}_s$  jest stabilny jeżeli dla dowolnego  $\epsilon > 0$  istnieje takie  $\delta(\epsilon) > 0$ , że dla każdego  $\vec{x}_0$  takiego że  $|\vec{x}_0 - \vec{x}_s| < \delta$  rozwiązanie  $\vec{x}(t)$  spełnia nierówność:  $|\vec{x}(t) - \vec{x}_s| < \epsilon$  dla dowolnych czasów  $t > 0$ . Jeżeli dodatkowo  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}_s$  to stan stacjonarny  $\vec{x}_s$  jest asymptotycznie stabilny.

Innymi słowy dla stabilnych stanów rozwiązanie  $\vec{x}(t)$  jest cały czas blisko rozwiązania stacjonarnego  $\vec{x}_s$ , a dla asymptotycznie stabilnych stanów rozwiązanie  $\vec{x}(t)$  dąży do  $\vec{x}_s$  gdy czas  $t \rightarrow \infty$ .

## 1.6.1 Przypadek A: Jedno równanie różniczkowe

### Przykład: Równanie różniczkowe liniowe

$$\dot{x} = \lambda x = f(x), \quad \lambda \in R \quad (1.145)$$

Stan stacjonarny znajdujemy jako rozwiązanie równania

$$f(x_s) = \lambda x_s = 0 \quad \text{stąd otrzymujemy stan stacjonarny} \quad x_s = 0 \quad (1.146)$$

Pytamy, czy ten stan jest stabilny. Musimy zaburzyć rozwiązanie stacjonarne  $x(t) = x_s = 0$  i wystartować z dostatecznie bliskiego w stosunku do  $x_s = 0$  warunku początkowego  $X_0$ . Rozwiązaniem równania różniczkowego liniowego jest funkcja

$$x(t) = X_0 e^{\lambda t} \quad (1.147)$$

Jeżeli

$$\lambda < 0 \quad \text{to} \quad x(t) \rightarrow 0 \quad \text{dla wszystkich } X_0 \text{ bliskich } 0 \quad (1.148)$$

Wówczas stan stacjonarny  $x_s = 0$  jest stabilny i dodatkowo jest asymptotycznie stabilny ponieważ rozwiązanie to dąży do  $x_s = 0$  gdy  $t \rightarrow \infty$ .

Jeżeli

$$\lambda > 0 \quad \text{to} \quad x(t) \rightarrow \infty \quad \text{dla wszystkich } X_0 \text{ bliskich } 0 \quad (1.149)$$

Wówczas stan stacjonarny  $x_s = 0$  jest niestabilny.

```
var('x')
pa1=plot(0.005*exp(-x), (x,0,1), figsize=(6,3), color="red")
pa2=plot(0.005*exp(x), (x,0,1), figsize=(6,3))
pa3=plot(-0.005*exp(-x), (x,0,1), figsize=(6,3), color="red")
pa4=plot(-0.005*exp(x), (x,0,1), figsize=(6,3))
show(pa1+pa2+pa3+pa4)
```

Na rysunku przedstawiono zagadnienie stabilności: czerwone krzywe dążą do 0 gdy  $t \rightarrow \infty$ . Niebieskie krzywe uciekają od 0 gdy  $t \rightarrow \infty$ .

Warunki początkowe  $x(0) = \pm 0.05$  są blisko stanu stacjonarnego  $x_s = 0$ . Przykład ten sugeruje nam metodę badania stabilności stanu stacjonarnego. Teraz podamy tę metodę.

## 1.6.2 Metoda linearyzacji badania stabilności

Rozpatrujemy układ 1-wymiarowy:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x), \quad f(x_s) = 0 \quad (1.150)$$

Aby zbadać stabilność stanu  $x_s$ , analizujemy zaburzenie

$$h(t) = x(t) - x_s, \quad |h(0)| = |x(0) - x_s| < \delta \quad (1.151)$$

Funkcja  $h(t)$  powinna być mała, gdy stan  $x_s$  jest stabilny. Jak daleko jest rozwiązanie  $x(t)$  od rozwiązania  $x_s$ . Zobaczmy, jakie równanie różniczkowe spełnia  $h(t)$ :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}[x(t) - x_s] = \frac{dx}{dt} = f(x) = f(x_s + h) = f(x_s) + f'(x_s)h + \frac{1}{2}f''(x_s)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_s)h^3 + \dots \quad (1.152)$$

Ponieważ  $f(x_s) = 0$ , otrzymujemy równanie różniczkowe dla odchylenia  $h(t)$  od stanu stacjonarnego

$$\frac{dh}{dt} = f'(x_s)h + \frac{1}{2}f''(x_s)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_s)h^3 + \dots \quad (1.153)$$

Jeżeli  $f'(x_s) \neq 0$ , to pierwszy istotny wyraz w tym równaniu jest liniowy względem  $h$ . Wyrazy  $h^2, h^3$  i wyższych potęg są pomijalnie małe. Jeżeli np.  $h = 10^{-2}$  to  $h^2 = 10^{-4}$ ,  $h^3 = 10^{-6}$ . Wówczas  $h^2, h^3$  i wyższe potęgi  $h$  można pominąć jako bardzo małe. Otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe

$$\frac{dh}{dt} = \lambda h, \quad \lambda = f'(x_s) \quad (1.154)$$

z rozwiązaniem

$$h(t) = h(0)e^{\lambda t} \quad (1.155)$$

Wiemy już z powyższego przykładu, że gdy  $\lambda < 0$  to  $h(t) \rightarrow 0$  gdy  $t \rightarrow \infty$ . To oznacza, że zaburzenie  $x(t) \rightarrow x_s$  gdy  $t \rightarrow \infty$  i wówczas stan stacjonarny  $x_s$  jest stabilny. Jeżeli  $\lambda > 0$  to  $|h(t)| \rightarrow \infty$  gdy  $t \rightarrow \infty$ . To oznacza, że zaburzenie  $x(t)$  ucieka od  $x_s$  gdy  $t \rightarrow \infty$  i wówczas stan stacjonarny  $x_s$  jest niestabilny. Otrzymujemy następujące kryterium na stabilność stanu stacjonarnego:

Jeżeli  $\lambda = f'(x_s) < 0$  to stan stacjonarny jest stabilny; jeżeli  $\lambda = f'(x_s) > 0$  to stan stacjonarny jest niestabilny.

Jeżeli  $\lambda = f'(x_s) = 0$  to nie wiem nic na temat stabilności. Musimy badać następne niezerowe wyrazy. Jeżeli  $f''(x_s) \neq 0$  zatrzymujemy pierwszy nieznikający wyraz czyli badamy równanie

$$\frac{dh}{dt} = \gamma h^2, \quad \gamma = \frac{1}{2}f''(x_s) \quad (1.156)$$

Jeżeli  $f'(x_s) = 0$  oraz  $f''(x_s) = 0$  to bierzemy następny nieznikający wyraz i badamy równanie

$$\frac{dh}{dt} = \nu h^3, \quad \nu = \frac{1}{3!}f'''(x_s) \quad (1.157)$$

Jeżeli w tych przypadkach  $h(t) \rightarrow 0$  gdy  $t \rightarrow \infty$ , to stan stacjonarny  $x_s$  jest stabilny. W przeciwnym przypadku - nie jest stabilny.

### 1.6.3 Metoda potencjału badania stabilności

W jednym wymiarze, równanie różniczkowe zawsze można przedstawić w postaci

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -V'(x), \quad f(x_s) = 0 \quad (1.158)$$

gdzie funkcja

$$V(x) = - \int f(x) dx \quad (1.159)$$

nazywana jest “potencjałem”. W ogólności to nie jest potencjał fizyczny który pojawia się w równaniu Newtona dla cząstki z tłumieniem:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = -V'(x) \quad (1.160)$$

Jeżeli ruch cząstki odbywa się w środowisku o dużym tarcu, w tzw. reżimie przetłumionym, w którym przyspieszenie cząstki jest znikomo małe (formalnie gdy  $m = 0$ ), wówczas równanie Newtona ma postać

$$\gamma\dot{x} = -V'(x) \quad (1.161)$$

które po przeskalowaniu ma postać:

$$\dot{x} = -\frac{1}{\gamma}V'(x) = -\tilde{V}'(x) \quad (1.162)$$

Stąd też “historycznie” wywodzi się nazwa potencjał dla abstrakcyjnego układu dynamicznego:

$$\dot{x} = f(x) = -V'(x) \quad (1.163)$$

Stan stacjonarny  $x_s$  określony równaniem

$$f(x_s) = -V'(x_s) = 0 \quad (1.164)$$

to punkt ekstremalny potencjału (o ile pochodna parzystego rzędu  $V^{(2k)}(x_s) \neq 0$ ). Punkt  $x_s$  jest stabilny gdy

$$\lambda = f'(x_s) = -V''(x_s) < 0 \quad (1.165)$$

czyli  $V''(x_s) > 0$ . To odpowiada minimum potencjału. Natomiast punkt  $x_s$  niestabilny odpowiada maksimum potencjału. Mamy więc klarowy obraz: Rysujemy potencjał  $V(x)$ . Minima potencjału to stabilne stany stacjonarne; maksima potencjału to niestabilne stany stacjonarne.

### Zadania

Wyznacz stany stacjonarne i zbadaj ich (asymptotyczną) stabilność. Korzystaj z metody linearyzacji i metody potencjału.

1.  $\dot{x} = 4x - x^3$
2.  $\dot{x} = 1 + x^4$
3.  $\dot{x} = 3 \sin(x)$
4.  $\dot{x} = 2x \sin(x)$
5.  $\dot{x} = -x^2 \sin(x)$

Poniżej pokazujemy wyniki dla zadania 1. Są 3 stany stacjonarne:  $x_{s1} = 2, x_{s2} = 0, x_{s3} = -2$ . Stany  $x_{s1} = 2$  oraz  $x_{s3} = -2$  są asymptotycznie stabilne (rozwiązania dążą do tych stanów). Stan  $x_{s2} = 0$  jest niestabilny (rozwiązania uciekają od tego stanu).



```

var('x,y,z,u,Z,Y,t')
T0 = srange(0,1.5,0.01)
f11=4*x-x^3
f12=4*y-y^3
f13=4*z-z^3
f15=4*u-u^3
f16=0
sol5=desolve_odeint( vector([f11, f12, f13, 0, 0,f15]), [4,0.2,-0.2,2,-2,-4],T0,[x,y,z,u,Z,Y,t])
line( zip ( T0,sol5[:,0]) ,figsize=(7, 4)) +\
... line( zip ( T0,sol5[:,1]) ,color='red')+\
... line( zip ( T0,sol5[:,2]) ,color='green') +\
... line( zip ( T0,sol5[:,4]) ,color='gray') +\
... line( zip ( T0,sol5[:,5]) ,color='black')+\
... line( zip ( T0,sol5[:,3]) ,color='violet')

```

Z powyższego przykładu zauważmy następujące cechy:

1. Zbiór warunków początkowych dzieli się na dwa podzbiory  $A_1 = (-\infty, 0)$  oraz  $A_2 = (0, \infty)$ . Dla warunków początkowych ze zbioru  $A_1$  rozwiązania  $x(t) \rightarrow -2$  dla  $t \rightarrow \infty$ , a dla warunków początkowych ze zbioru  $A_2$  rozwiązania  $x(t) \rightarrow 2$  dla  $t \rightarrow \infty$ .
2. Krzywe  $x(t)$  są funkcjami monotonicznymi: albo cały czas rosną w czasie, albo cały czas maleją gdy czas rośnie. Dlaczego? Rozważmy 2 przykłady warunków początkowych widocznych na rysunku:
  1. gdy  $x(0) = 4$  to  $(dx/dt)(x = 4) = 4 * 4 - 4^3 = -48 < 0$ . Pochodna jest ujemna, a to oznacza że funkcja maleje. Podobnie jest dla wszystkich warunków początkowych  $x(0) > 2$
  2. gdy  $x(0) = 0.2$  to  $(dx/dt)(x = 0.2) = 4 * 0.2 - (0.2)^3 > 0$ . Pochodna jest dodatnia, a to oznacza że funkcja rośnie. Podobnie jest dla wszystkich warunków początkowych  $x(0) \in (0, 2)$
3. Różne krzywe  $x(t)$  nigdy się nie przecinają. Wynika to z tego, że rozwiązania są jedyne i jednoznaczne. Jeżeli by się przecinały, to z punktu przecięcia wychodziłoby kilka rozwiązań. A to jest niemożliwe na mocy twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań.

### 1.6.4 Przypadek B: Układ 2 równań różniczkowych

Dla jasności prezentacji, rozpatrujemy układ 2 równań różniczkowych

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}\tag{1.166}$$

Stany stacjonarne  $(x_s, y_s)$  określone są jako rozwiązania układu równań algebraicznych

$$\begin{aligned}f(x_s, y_s) &= 0, \\ g(x_s, y_s) &= 0.\end{aligned}\tag{1.167}$$

Gdyby istniał potencjał  $V(x, y)$ , powyżej przedstawione wnioski otrzymane z metody potencjału są także prawdziwe dla układów wielowymiarowych. Ponieważ w ogólnym przypadku

nie musi istnieć “potencjał”, zbadamy stabilność stanów  $(x_s, y_s)$  stosując metodę linearyzacji. Definiujemy nowe funkcje

$$\begin{aligned} X(t) &= x(t) - x_s, \\ Y(t) &= y(t) - y_s. \end{aligned} \quad (1.168)$$

Charakteryzują one odchylenie od stanu stacjonarnego, które są małe gdy stan stacjonarny jest stabilny. Zobaczymy, jakie równania różniczkowe spełniają te funkcje:

$$\dot{X}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_s = \dot{x}(t) = f(x(t), y(t)) = f(x_s + X(t), y_s + Y(t)) = f(x_s, y_s) + \frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \dots \quad (1.169)$$

$$\dot{Y}(t) = \dot{y}(t) - \dot{y}_s = \dot{y}(t) = g(x(t), y(t)) = g(x_s + X(t), y_s + Y(t)) = g(x_s, y_s) + \frac{\partial g}{\partial x} X + \frac{\partial g}{\partial y} Y + \dots \quad (1.170)$$

Wszystkie pochodne cząstkowe są obliczane w punkcie  $(x_s, y_s)$ . Ponieważ w punkcie stacjonarnym  $f(x_s, y_s) = g(x_s, y_s) = 0$  otrzymujemy zlinearyzowane równania różniczkowe w postaci

$$\dot{X} = a_{11}X + a_{12}Y \quad (1.171)$$

$$\dot{Y} = a_{21}X + a_{22}Y \quad (1.172)$$

gdzie macierz współczynników

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{obliczona w punkcie } (x_s, y_s) \quad (1.173)$$

jest macierzą Jacobiego. Ponieważ otrzymaliśmy liniowy układ równań różniczkowych, jego rozwiązanie poszukujemy w postaci funkcji

$$X(t) = Ae^{\lambda t}, \quad Y(t) = Be^{\lambda t} \quad (1.174)$$

gdzie stałe  $A$  oraz  $B$  są określone przez warunki początkowe  $(X(0), Y(0))$ .

Zauważamy, że

$$\dot{X} = \lambda X, \quad \dot{Y} = \lambda Y \quad (1.175)$$

Wstawiamy te relacje do układu równań zlinearyzowanych:

$$\lambda A = a_{11}A + a_{12}B \quad (1.176)$$

$$\lambda Y = a_{21}A + a_{22}B \quad (1.177)$$

Jest to zagadnienie własne dla macierzy Jacobiego, gdzie  $\lambda$  to są wartości własne macierzy Jacobiego. To jest także równoważne liniowemu układowi równań algebraicznych

$$(a_{11} - \lambda)A + a_{12}B = 0 \quad (1.178)$$

$$a_{21}A + (a_{22} - \lambda)B = 0 \quad (1.179)$$

Taki układ ma niezerowe rozwiązanie dla  $A$  oraz  $B$  gdy wyznacznik

$$\text{Det}|J - \lambda I| = \text{Det} \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.180)$$

Macierz  $I$  jest macierzą jednostkową, tzn. diagonalną  $2 \times 2$  i wszystkie elementy diagonalne to 1. Z powyższej relacji otrzymujemy równanie kwadratowe dla nieznanych wartości własnych  $\lambda = \lambda_1$  oraz  $\lambda = \lambda_2$ .

Rozwiązanie zlinearyzowanego układu jest w postaci kombinacji liniowej :

$$X(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad Y(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1.181)$$

Pytanie o stabilność stanu stacjonarnego  $(x_s, y_s)$  jest równoważne pytaniu: kiedy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0 \quad (1.182)$$

Funkcje eksponencjalne dążą do zera jeżeli część rzeczywista wartości własnych macierzy Jacobiego  $\lambda_i$  są ujemne:

$$\text{Re}(\lambda_1) < 0, \quad \text{Re}(\lambda_2) < 0 \quad (1.183)$$

Wówczas stan stacjonarny jest asymptotycznie stabilny. Jeżeli

$$\text{Re}(\lambda_1) > 0, \quad \text{i/lub} \quad \text{Re}(\lambda_2) > 0 \quad (1.184)$$

to stan stacjonarny jest niestabilny. Jeżeli

$$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0 \quad (1.185)$$

to stan stacjonarny jest stabilny, ale nie jest asymptotycznie stabilny. Jeżeli wartości własne macierzy Jacobiego wynoszą zero, metoda linearyzacji nie rozstrzyga o stabilności.

Zamiast wyznaczyć wartości własne  $(\lambda_1, \lambda_2)$  tej macierzy, wystarczy sprawdzić, kiedy część rzeczywista wartości własnych jest ujemna (lub dodatnia). Ponieważ macierz Jacobiego jest macierzą  $2 \times 2$ , więc otrzymujemy równanie kwadratowe dla  $\lambda$ . Aby wartości własne miały część rzeczywistą ujemną muszą zachodzić dwie relacje:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} < 0 \quad \text{oraz} \quad \lambda_1 \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0, \quad (1.186)$$

to oznacza że

$$\text{Tr } J < 0, \quad \det J > 0 \quad (1.187)$$

gdzie  $\text{Tr}$  oznacza ślad macierzy, czyli sumę elementów diagonalnych macierzy oraz  $\text{Det}$  jest wyznacznikiem macierzy.

## Przykład 1

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - xy = f(x, y), \\ \dot{y} &= x - y^2 = g(x, y).\end{aligned}\tag{1.188}$$

Łatwo znaleźć stany stacjonarne

$$\begin{aligned}1 - xy &= 0, \\ x - y^2 &= 0.\end{aligned}\tag{1.189}$$

Z drugiego równania  $x = y^2$  wstawiamy do pierwszego równania:  $1 - y^3 = 0$  czyli  $y^3 = 1$ . Stąd  $y = 1$  oraz  $x = 1$ . Otrzymujemy stan stacjonarny

$$(x_s, y_s) = (1, 1)\tag{1.190}$$

Obliczmy elementy macierzy Jacobiego

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & -x \\ 1 & -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{w punkcie } (x = 1, y = 1)\tag{1.191}$$

Ślad macierz  $J$ , czyli suma elementów diagonalnych  $\text{Tr}: \mathbf{J} = -3 < 0$  oraz wyznacznik  $\text{Det}: \mathbf{J} = 3 > 0$ . Spełnione są relacje dla stanu stacjonarnego który jest asymptotycznie stabilny. Wniosek: stan stacjonarny  $(x_s, y_s) = (1, 1)$  jest asymptotycznie stabilny.

Można sprawdzić to, wyliczając explicite wartości własne macierzy Jacobiego:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{3}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-3 - i\sqrt{3})\tag{1.192}$$

Ich części rzeczywiste są ujemne:  $\Re(\lambda_1) = -3/2$ ,  $\Re(\lambda_2) = -3/2$ .

## 1.6.5 Przypadek C: Stabilność stanów stacjonarnych układów wielowymiarowych

Dla układu równań różniczkowych o wymiarze większym niż 2 stosujemy te same metody co dla układu 2 równań różniczkowych. Oczywiście istnieje więcej różnych przypadków i większe bogactwo własności stanów stacjonarnych. Nie będziemy przedstawiali tu przypadku o dowolnym wymiarze. Rozważymy przypadek 3 równań, aby pokazać podobieństwo do przypadku 2 równań. Analizujemy układ 3 równań różniczkowych:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_1(x, y, z), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= F_2(x, y, z), & y(0) &= y_0, \\ \dot{z} &= F_3(x, y, z), & z(0) &= z_0.\end{aligned}\tag{1.193}$$

Stany stacjonarne są określone przez rozwiązania układu równań algebraicznych:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad F_3(x, y, z) = 0\tag{1.194}$$

Z równań tych otrzymujemy stan stacjonarny  $(x, y, z) = (x_s, y_s, z_s)$ . Następnie obliczymy macierz Jacobiego

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.195)$$

Obliczymy macierz Jacobiego w punkcie stacjonarnym  $J = J(x_s, y_s, z_s)$ . W ten sposób otrzymujemy macierz liczbowa. Kolejnym krokiem jest znalezienie wartości własnych  $\lambda = \lambda_i (i = 1, 2, 3)$  tej macierzy, czyli rozwiązanie wielomianu 3-go stopnia dla  $\lambda$ :

$$\text{Det}(J - \lambda I) = \text{Det} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} - \lambda & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (1.196)$$

Macierz  $I$  jest macierzą jednostkową, tzn. diagonalną  $3 \times 3$  i wszystkie elementy diagonalne to 1.

Jeżeli części rzeczywiste wszystkich wartości własnych macierzy Jacobiego  $\lambda_i$  są ujemne:

$$\text{Re}(\lambda_1) < 0, \quad \text{Re}(\lambda_2) < 0, \quad \text{Re}(\lambda_3) < 0 \quad (1.197)$$

to stan stacjonarny jest asymptotycznie stabilny. Jeżeli chociaż jedna z wartości własnych  $\lambda_i$  ma część rzeczywistą dodatnią

$$\text{Re}(\lambda_1) > 0, \quad \text{i/lub} \quad \text{Re}(\lambda_2) > 0, \quad \text{i/lub} \quad \text{Re}(\lambda_3) > 0 \quad (1.198)$$

to stan stacjonarny jest niestabilny.

W przypadkach wielowymiarowych wygodnie jest stosować metody numeryczne. Obliczanie wartości własnych macierzy jest numerycznie zadaniem łatwym.

## Przykład 2: Model Lorenza

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) = F_1(x, y, z), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y = F_2(x, y, z), & y(0) &= y_0, \\ \dot{z} &= xy - \beta z = F_3(x, y, z), & z(0) &= z_0. \end{aligned} \quad (1.199)$$

gdzie wszystkie parametry są dodatnie:  $\sigma, \rho, \beta > 0$ .

KROK 1: Znajdujemy stany stacjonarne czyli rozwiązujemy układ równań algebraicznych

$$\begin{aligned} \sigma(y - x) &= 0, \\ x(\rho - z) - y &= 0, \\ xy - \beta z &= 0. \end{aligned} \quad (1.200)$$

Możemy posłużyć się programem w Sage, ale układ ten jest na tyle prosty, że możemy go rozwiązać sami. Z pierwszego równania wynika, że

$$y = x \quad (1.201)$$

Z trzeciego równania otrzymujemy

$$z = \frac{1}{\beta}x^2 \quad (1.202)$$

Wstawiamy  $x$  oraz  $z$  do drugiego równania otrzymując relację:

$$x\rho - x\frac{1}{\beta}x^2 - x = 0 \quad (1.203)$$

czyli

$$x[\rho - 1 - \frac{1}{\beta}x^2] = 0 \quad (1.204)$$

Ta relacja jest prosta i wynika z niej że

$$x = x_1 = 0 \quad \text{lub} \quad x = x_2 = \sqrt{\beta(\rho - 1)} \quad \text{lub} \quad x = x_3 = -\sqrt{\beta(\rho - 1)} \quad (1.205)$$

Otrzymujemy 3 stany stacjonarne:

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0), \\ P_2 &= (x_2, y_2, z_2) = (\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1), \\ P_3 &= (x_3, y_3, z_3) = (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1). \end{aligned} \quad (1.206)$$

Dla każdego stanu stacjonarnego musimy zbadać jego stabilność analizując zagadnienie własne dla macierzy Jacobiego. No to do dzieła...

```
#kilka zmiennych
reset()
var('x y z sigma rho beta alpha')
#i kilka zalozen
assume(sigma>0)
assume(rho>0)
assume(beta>0)
#definiujemy rownania rozniczkowe
F1 = sigma*(y-x)
F2 = x*(rho-z) - y
F3 = x*y - beta*z
html.table([[ '$F_1$', '$F_2$', '$F_3$', ], [F1,F1,F3]])
print "stany stacjonarne"
rozv = solve([F1==0,F2==0,F3==0],[x,y,z])
P1 = rozv[2]
P2 = rozv[0]
P3 = rozv[1]
html.table([[ '$P_1$', '$P_2$', '$P_3$', ], [P1,P2,P3]])
print 'Macierz Jakobiego'
J = matrix([
[diff(F1,x),diff(F1,y),diff(F1,z)],
[diff(F2,x),diff(F2,y),diff(F2,z)],
[diff(F3,x),diff(F3,y),diff(F3,z)]
])
show(J)
#
@interact
def _(punkt=['P1','P2','P3']):
```

```

P = dict(zip(['P1', 'P2', 'P3'], [P1, P2, P3])) [punkt]
J = matrix([
    [
        diff(F1, x) (x=P[0].rhs(), y=P[1].rhs(), z=P[2].rhs()),
        diff(F1, y) (x=P[0].rhs(), y=P[1].rhs(), z=P[2].rhs()),
        diff(F1, z) (x=P[0].rhs(), y=P[1].rhs(), z=P[2].rhs())
    ],
    [
        diff(F2, x) (x=P[0].rhs(), y=P[1].rhs(), z=P[2].rhs()),
        diff(F2, y) (x=P[0].rhs(), y=P[1].rhs(), z=P[2].rhs()),
        diff(F2, z) (x=P[0].rhs(), y=P[1].rhs(), z=P[2].rhs())
    ],
    [
        diff(F3, x) (x=P[0].rhs(), y=P[1].rhs(), z=P[2].rhs()),
        diff(F3, y) (x=P[0].rhs(), y=P[1].rhs(), z=P[2].rhs()),
        diff(F3, z) (x=P[0].rhs(), y=P[1].rhs(), z=P[2].rhs())
    ]
])
print "macierz Jakobiego w punkcie %s" % P
show(J)
#zagadnienie własne macierzy
dJ = det(J - alpha*matrix(3,3,1)) == 0
rozwdJ1 = solve(dJ, alpha)
show(rozwdJ1)
b = 1
s = 2
r = 3
i = 0
for a in rozwdJ1:
    print "sprawdzamy"
    print "wartość własna alpha_%d"%(i+1)
    buf = real(a.rhs() (rho=r, beta=b, sigma=s))
    show(n(buf))
    if buf < 0:
        print "jest < 0"
    else:
        print "jest > 0"
        i += 1
if i == 0:
    print "\n"
    print "Wynika z tego, że dla"
    print "beta=%s, sigma=%s, rho=%s"%(b, s, r)
    print "%s jest punktem stabilnym"%P
else:
    print "\n"
    print "Wynika z tego, że dla"
    print "beta=%s, sigma=%s, rho=%s"%(b, s, r)
    print "%s nie jest punktem stabilnym"%P

```

## 1.7 Atraktory

Atraktor  $A$  to taki zbiór w przestrzeni fazowej układu dynamicznego, że wiele trajektorii startujących nawet bardzo daleko od tego zbioru dąży w miarę upływu czasu do tego zbioru  $A$ . Najprościej jest to zrozumieć na przykładzie oscylatora tłumionego. Realizacją takiego oscy-

latora może być wahadło matematyczne czyli kulka na nieważkim pręcie zawieszona w jakimś środowisku (byleby nie w próżni). Na kulkę działa siła przyciągania ziemskiego i siła tarcia. Kulkę wychylamy o dowolny kąt od pozycji pionowej i obserwujemy trajektorię kulki. Kulka wykonuje coraz to mniejsze wahania i po dostatecznie długim czasie zatrzymuje się w pozycji pionowej. Kulkę możemy wychylać o dowolny kąt, nadawać jej dowolną prędkość, a i tak po pewnym czasie kulka zatrzyma się w pozycji pionowej, która odpowiada zerowemu wychyleniu kulki. Ten zerowy kąt wychylenia jest atraktorem. W tym przypadku atraktorem jest punkt w przestrzeni fazowej. Ponieważ przestrzeń fazowa oscylatora harmonicznego tłumionego jest 2-wymiarowa położenie-prędkość, atraktorem jest punkt  $A = (p_{ooenie} = 0, prdko = 0)$ .

Podamy teraz bardziej formalną definicję.

**Atraktor** Atraktorem nazywamy ograniczony zbiór w przestrzeni fazowej, do którego dążą asymptotycznie w czasie (tzn. gdy  $t \rightarrow \infty$ ) obszary warunków początkowych o niezerowej objętości w przestrzeni fazowej. Atraktor to inaczej zbiór przyciągający: przyciąga on trajektorie o różnych warunkach początkowych. Ale nie musi on przyciągać wszystkich trajektorii. Dla danego układu dynamicznego może istnieć wiele atraktorów, nawet nieskończenie wiele. Atraktory mogą mieć nieskomplikowaną strukturę: to może być punkt, kilka punktów, krzywa taka jak okrąg czy zdeformowana elipsa, część płaszczyzny, torus (podobny do dętki), część przestrzeni. Atraktory mogą też mieć skomplikowaną strukturę: może to być zbiór fraktalny, tzn. zbiór o niecałkowitym wymiarze, np. 0.63, 2.06. Taki atraktor nazywa się *dziwnym atraktorem*.

Z atraktorami związane są obszary przyciągania lub baseny przyciągania  $B(A)$ . Basenem przyciągania atraktora  $A$  nazywamy zbiór warunków początkowych  $x_0$ , dla których trajektorie są przyciągane do  $A$ , czyli

$$B(A) = \{x_0 : \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) \in A\} \quad (1.207)$$

gdzie  $x(t; x_0)$  jest trajektorią startującą z warunku początkowego  $x_0$ , np. rozwiązaniem układu równań różniczkowych z odpowiednimi warunkami początkowymi  $\vec{x}_0$ .

### 1.7.1 Przykład 1: oscylator harmoniczny tłumiony

Jest tylko jeden atraktor: to punkt  $(0, 0)$ . Basenem przyciągania jest cała płaszczyzna fazowa.

```
var('x,y')
T = srange(0,50,0.01)
sol1=desolve_odeint(vector([y,-x -0.2*y]), [0,1], T, [x,y])##warunek początkowy x=2, y=4
sol2=desolve_odeint(vector([y,-x -0.2*y]), [0,0.85], T, [x,y])##warunek początkowy x=-1, y=0.85
sol3=desolve_odeint(vector([y,-x -0.2*y]), [0,0.7], T, [x,y])##warunek początkowy x=0, y=0.7
p1=plot(x^2, -2, 2,figsize=(6,3), )
g1=list_plot(sol1.tolist(), plotjoined=1, figsize=(6,3),axes_labels=[r'$x$',r'$y$'])
g1 +=list_plot(sol2.tolist(), plotjoined=1, figsize=(6,3),color="red", axes_labels=[r'$x$',r'$y$'])
g1 +=list_plot(sol3.tolist(), plotjoined=1, figsize=(6,3),color="green", axes_labels=[r'$x$',r'$y$'])
html.table([["potencjał kwadratowy","oscylator tłumiony"],[p1,g1]])
html("<p align='center'>wszystkie rozwiązania dążą do punktu (0,0) </p>")
```



## 1.7.2 Przykład 2: oscylator nieliniowy (bistabilny) tłumiony

Są dwa atraktory: punkt  $(-x_s, 0)$  oraz symetryczny punkt  $(x_s, 0)$ , gdzie  $x_s$  jest stanem stacjonarnym. Płaszczyzna fazowa dzieli się na 2 baseny przyciągania, które są “pasiastymi” naprzemiennymi zbiorami. Przejrzysta wizualizacja jest opracowana na naszej stronie internetowej:

<http://visual.icse.us.edu.pl/wizualizacje/mechanika-teoretyczna/zobacz/BasenyPrzyciagania/>

```
var('x,y')
T1 = srange(0,30,0.01)
sol1=desolve_odeint(vector([y,2*x-1.2*x^3-0.2*y]), [0,1], T1, [x,y])##warunek początkowy
sol2=desolve_odeint(vector([y,2*x-1.2*x^3-0.2*y]), [0,2], T1, [x,y])##warunek początkowy
sol3=desolve_odeint(vector([y,2*x-1.2*x^3-0.2*y]), [0,3], T1, [x,y])##warunek początkowy
sol4=desolve_odeint(vector([y,2*x-1.2*x^3-0.2*y]), [0,4], T1, [x,y])##warunek początkowy
p11=plot(0.3*x^4 - x^2, -2, 2,figsize=(6,3), )
g11=list_plot(sol1.tolist(), plotjoined=1, figsize=(6,3),axes_labels=[r'$x$',r'$y$'])
g11 +=list_plot(sol2.tolist(), plotjoined=1, figsize=(6,3),color="red", axes_labels=[r'$x$',r'$y$'])
g11 +=list_plot(sol3.tolist(), plotjoined=1, figsize=(6,3),color="green", axes_labels=[r'$x$',r'$y$'])
g11 +=list_plot(sol4.tolist(), plotjoined=1, figsize=(6,3),color="black", axes_labels=[r'$x$',r'$y$'])
html.table([[["potencjał bistabilny","oscylator nieliniowy tłumiony"],[p11,g11]])
html("<p align='center'> rozwiązania dążą albo do punktu  $(-x_s,0)$  albo to punktu  $(x_s,0)$ ")
```

## 1.7.3 Przykład 3: Cykl graniczny

Atraktorem jest krzywa zamknięta (okrąg, elipsa, inne dowolne krzywe zamknięte). Poniżej przedstawiamy dwa przykłady zaczerpnięte z modeli biologicznych.

```
var('x,y')
T3 = srange(0,50,0.01)
de1=y+x*(0.2-(x^2+y^2))
de2=-x+y*(0.2-(x^2+y^2))
s1=desolve_odeint(vector([de1, de2]), [0.5,0.5], T3, [x,y])##warunek początkowy x=2, y=4
s2=desolve_odeint(vector([de1, de2]), [0.01, 0.01], T3, [x,y])##warunek początkowy x=2, y=4
h1=list_plot(s1.tolist(), plotjoined=1, figsize=(6,3),color="red",axes_labels=[r'$x$',r'$y$'])
h2=list_plot(s2.tolist(), plotjoined=1, figsize=(6,3),axes_labels=[r'$x$',r'$y$'])
show(h1+h2)

var('x,y')
a, b, d = 1.3, 0.33, 0.1
F(x,y)=x*(1-x) - a*x*y/(x+d)
G(x,y)= b*y*(1-y/x)
T = srange(0,80,0.01)
sl1=desolve_odeint(vector([F,G]), [0.2,0.3], T, [x,y])
sl2=desolve_odeint(vector([F,G]), [0.2,0.2], T, [x,y])
j1=list_plot(sl1.tolist(), plotjoined=1, color="red", figsize=(6, 3))
j2=list_plot(sl2.tolist(), plotjoined=1, figsize=(6, 3))
show(j1+j2)

var('x,y')
a, b, d = 1.3, 0.33, 0.1
F(x,y)=x*(1-x) - a*x*y/(x+d)
G(x,y)= b*y*(1-y/x)
T = srange(0,200,0.01)
sl1=desolve_odeint(vector([F,G]), [0.2,0.3], T, [x,y])
sl2=desolve_odeint(vector([F,G]), [0.2,0.2], T, [x,y])
```

```
j1=list_plot(sl1.tolist(), plotjoined=1, color="red", figsize=(6, 3))
j2=list_plot(sl2.tolist(), plotjoined=1,  figsize=(6, 3))
show(j1+j2)
```

### 1.7.4 Przykład 4: Atraktor Lorenza

Jest to przykład tak zwanego dziwnego atraktora. Najprostsza jego definicja to taka, że posiada on strukturę fraktala. O układzie Lorenza generującym ten fraktal można przeczytać w poprzednim rozdziale tego skryptu, traktującym o stanach stacjonarnych.

```
var('x y z')
rho=28
sigma=10
beta=8/3
F1 = sigma*(y-x)
F2 = x*(rho-z) - y
F3 = x*y - beta*z
T = srange(0,100,0.01)
atraktor_lorenza = desolve_odeint(vector([F1,F2,F3]), [0,0.5,1], T, [x,y,z])
p2d = list_plot(zip(atraktor_lorenza[:,0],atraktor_lorenza[:,1]), plotjoined=1, figsize=
p3d = list_plot(atraktor_lorenza.tolist(), plotjoined=1, viewer='tachyon', figsize=4)
print "2D rysunek atraktora Lorenza"
p2d.show()
print "3D rysunek atraktora Lorenza"
p3d.show()
```

---

# Chaos w układach dynamicznych

---

## 2.1 Determinizm a przewidywalność

Determinizm jest terminem wieloznacznym. W odniesieniu do nauk przyrodniczych możemy mówić o tym że :

Każde zjawisko jest wyznaczone przez swoje przyczyny i całokształt warunków. Każde zjawisko podlega prawidłowościom przyrody, które wyrażane są w postaci odpowiednich praw nauki. Jeżeli dysponujemy odpowiednią wiedzą (o przyczynach, prawidłowościach), to można (przynajmniej w zasadzie) przewidywać przyszły bieg zdarzeń. Poznawcze znaczenie zasady przyczynowości sprowadza się do możliwości przewidywania. Determinizm i indeterminizm występują już w starożytnej filozofii przyrody. Demokryt twierdził, że nie ma w świecie zdarzeń przypadkowych, lecz „wszystko dzieje się wskutek konieczności”. Determinizm łączono z poglądem, że prawa przyrody mają charakter jednoznaczny. Okazało się jednak że wiele zjawisk podlega jedynie prawom statystycznym. Pogląd, że pewne zjawiska przyrody nie podlegają prawom jednoznacznym, ale jedynie statystycznym to indeterminizm. Doniosła rola praw statystycznych w fizyce współczesnej wymaga rozszerzenia formuły determinizmu: każde zdarzenie podlega prawom przyrody jednoznacznym (determinizm jednoznaczny, mocny) bądź statystycznym (determinizm probabilistyczny, umiarkowany). Wówczas indeterminizm (umiarkowany) mieści się w ramach determinizmu w szerszym ujęciu. Wydawało się, że w mechanice, stworzonej przez Galileusza i Newtona, znając położenie i prędkość (lub położenie i pęd) ciała materialnego można przewidzieć cały przyszły ruch tego ciała (a więc podać położenie i pęd w każdej chwili późniejszej), a także ustalić, jaki był ruch tego ciała w przeszłości. Wszystko to jest słuszne przy założeniu, że znane są wszystkie siły działające na ciało w przeszłości i w przyszłości. Wynikało to z twierdzeń matematycznych o jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych, a takimi są równania Newtona.

Jednakże historia pokazała, że w fizyce klasycznej są znane teorie statystyczne, niedeterministyczne. Rozważmy dla przykładu gaz zamknięty w jakimś naczyniu. Wiemy, że w warunkach równowagi termodynamicznej dwie równe co do objętości części tego naczynia będą zawierać jednakową liczbę cząsteczek gazu. Nie wiemy jednak, które cząsteczki znajdą się w której z dwu połówek naczynia. Sytuacja pozornie przypomina prawo rozpadu: można podać taki czas, w którym rozpadnie się połowa atomów, i w ten sposób podzielić wszystkie atomy na dwie równe części - te, które się w tym czasie rozpadną, i te, które się nie rozpadną, podobnie

jak podzieliliśmy cząsteczki gazu według kryterium, w której połowie naczynia się znajdują. W klasycznej fizyce statystycznej znamy prawa rządzące zachowaniem pojedynczych cząstek (są nimi z założenia prawa mechaniki newtonowskiej), a nasza niewiedza co do tego zachowania jest spowodowana po pierwsze niemożliwością śledzenia ruchu wielu miliardów obiektów, a po drugie, brakiem potrzeby, aby to czynić: wystarczy nam znać właśnie tylko pewne wielkości średnie, które ujawniają się fenomenologicznie, na przykład jako temperatura gazu, czy też jego ciśnienie. Tak więc rzeczywisty kompletny opis stanu gazu musiałby zawierać informację dotyczącą  $N$  wektorów położenia i  $N$  wektorów pędu ( $N$  - liczba cząsteczek gazu), co jest liczbą ogromną, podczas gdy opis statystyczny ogranicza się do kilku potrzebnych liczb. Opis statystyczny odnosi się do ogromnej liczby cząstek i jest to opis oparty o teorię prawdopodobieństwa i teorię procesów stochastycznych. Z definicji jest to opis niedeterministyczny. Ale jak powiedzieliśmy, opis jednej cząstki jest w pełni deterministyczny. Twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych dawały nadzieję na totalny determinizm i przewidywalność ruchu pojedynczych cząstek. Nadzieja ta z praktycznego punktu widzenia okazała się mrzonką. W latach 50-tych XX wieku pokazano, że z praktycznego punktu widzenia determinizm mechaniki Newtona jest złudny i ugruntowana wiara w przewidywalność zachowania się prostych układów mechanicznych załamała się. Pojawiły się liczne przykłady, a później teoria matematyczna, pokazujące niemożliwość przewidywania czasowej ewolucji prostych układów mechanicznych. Podkreślamy, że chodzi tu o praktyczne aspekty przewidywalności. Z matematycznego punktu widzenia, przewidywalność jest ciągle słuszna. Dobrym przykładem nieprzewidywalności w praktyce jest prognoza pogody, co udowadnia codzienne życie. Poniżej przedstawimy zagadnienia, które ukażą nam, co oznacza nieprzewidywalność w teorii deterministycznej. Pokażemy, dlaczego ewolucja określona przez determinizm równań Newtona jest nieprzewidywalna. Ta deterministyczna nieprzewidywalność ma swoją nazwę: deterministyczny chaos.

## 2.2 Model chaosu. Układ bistabilny (oscylator Duffing)

Aby dobrze zrozumieć istotę chaotycznego zachowania się układów dynamicznych, posłużymy się prostym przykładem z mechaniki klasycznej Newtona. Rozpatrujemy jednowymiarowy ruch cząstki wzdłuż osi  $OX$  opisany równaniem Newtona:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) = ax - bx^3 - \gamma\dot{x} + A \cos(\Omega t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v(0) = v_0 \quad (2.1)$$

Model ten wydaje się być banalnie prosty.

jest to ruch cząstki w polu siły  $F(x) = ax - bx^3$  ( $a, b > 0$ ) jest to ruch tłumiony tarciem  $F(v) = -\gamma v = -\gamma\dot{x}$  oraz na cząstkę działa siła periodyczna w czasie  $F(t) = A \cos(\Omega t)$ . Zauważmy, że średnia wartość siły  $F(t)$  na jednym okresie wynosi zero, czyli średnio działa zerowa siła! Siła  $F(x) = x - x^3$  to jest siła potencjalna. Dlatego warto wykreślić potencjał  $V(x)$  odpowiadający tej sile:

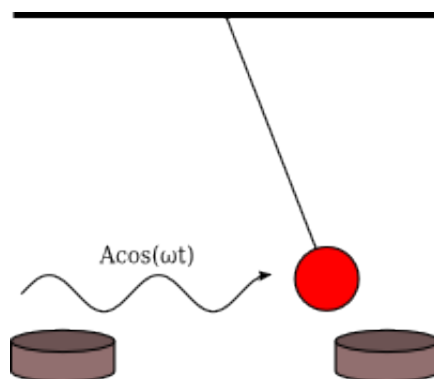
$$V(x) = - \int F(x) dx = \frac{1}{4}bx^4 - \frac{1}{2}ax^2 \quad (2.2)$$

Potencjał ten nazywa się potencjałem bistabilnym i jest jednym z najważniejszych modelowych potencjałów w fizyce, począwszy od teorii Newtona, poprzez teorię przejść fazowych,

teorię aktywacji reakcji chemicznych, a na teorii cząstek elementarnych (mechanizm Higgsa) skończywszy. Poniżej pokazujemy wykres tego potencjału (mówiąc precyzyjnie: energii potencjalnej).

Powyższe równanie Newtona ma kilka realizacji.

**1 Pierwszy przykład realizacji: Metalowa kulka zawieszona na nieważkim pręcie w polu dwóch magnesów (które modelują bistabilny potencjał).** Na kulkę działa w kierunku poziomym periodyczne pole elektryczne  $A \cos(\omega t)$ . Układ ten jest przedstawiony na rysunku.



Rysunek 2.1: Przykład realizacji układu bistabilnego.

**2 Drugi przykład realizacji: Obwód elektroniczny, który jest szczegółowo opisany w pracy:**

B. K. Jones and G. Trefan, Am. J. Phys. 69 (2001) str. 464. “The Duffing oscillator: A precise electronic analog chaos demonstrator for the undergraduate laboratory”

```
# Przeskalowany potencjał bistabilny: a=b=1
p = plot(0.25*x^4 - 0.5*x^2, (x,-1.6,1.6), figsize=(6,4), axes_labels=[r'$x$', r'$V(x)$'])
p += text("$-x_s$", (-1,0.025), fontsize=16, color='black')
p += text("$x_s$", (1,0.025), fontsize=16, color='black')
p.show()
```

## 2.2.1 Skalowanie

Układ opisany powyżej zawiera 6 parametrów. Część parametrów można wyeliminować poprzez przeskalowanie równania do postaci bezwymiarowej. Istnieje kilka możliwości. Zwykle zaczynamy od skalowania czasu i położenia. Nowy bezwymiarowy czas  $\tau$  ma postać:

$$s = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau_0^2 = \frac{m}{a} \quad (2.3)$$

Nowe bezwymiarowe położenie definiujemy jako

$$X = \frac{x}{L}, \quad L^2 = \frac{a}{b} \quad (2.4)$$

Wówczas bezwymiarowa postać równania ruchu jest następująca:

$$\ddot{X} = X - X^3 - \gamma_0 \dot{X} + A_0 \cos(\omega_0 s), \quad X(0) = X_0, \quad \dot{X}(0) = \dot{X}_0 \quad (2.5)$$

Obecnie występują 3 przeskalowane parametry:

$$\gamma_0 = \frac{\tau_0^2}{mL}\gamma, \quad A_0 = \frac{\tau_0^2}{mL}A, \quad \omega_0 = \tau_0\Omega \quad (2.6)$$

W dalszej części będziemy posługiwali się tylko i wyłącznie przeskalowanym równaniem. Dlatego wygodnie będzie używać “starych” oznaczeń: Będziemy analizowali równanie w postaci

$$\ddot{x} = x - x^3 - \gamma\dot{x} + A \cos(\omega_0 t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}_0 = v_0 \quad (2.7)$$

gdzie przeskalowany potencjał

$$V(x) = - \int F(x) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad (2.8)$$

Przeskalowane równanie jest w takiej postaci, że przyjmujemy wartości parametrów  $m = 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1$ .

### 2.2.2 Krok 1. Układ zachowawczy

W pierwszym kroku rozpatrujemy najprostszyp przypaddek (pamiętajmy o przeskalowanej postaci, w której masa cząstki  $m = 1$ ):

$$\ddot{x} = x - x^3 = -V'(x), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v(0) = v_0 \quad (2.9)$$

Jest on równoważny układowi 2 równań różniczkowych, autonomicznych, pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, & x(0) &= x_0, \\ \dot{v} &= x - x^3, & v(0) &= v_0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Oznacza to, że przestrzeń fazowa jest 2-wymiarowa.

Taki przypadek był już rozpatrywany: jest to układ zachowawczy o jednym stopniu swobody. Istnieje jedna stała ruchu (jedna całka ruchu), a mianowicie całkowita energia układu:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) + V(x(t)) = \text{const.} = E = E_k + E_p = \frac{1}{2}\dot{x}^2(0) + V(x(0)) = \frac{1}{2}v_0^2 + V(x_0) \quad (2.11)$$

na którą składa się energia kinetyczna  $E_k$  oraz energia potencjalna  $E_p$ . Stała  $E$  jest określona przez warunki początkowe  $x(0) = x_0$  oraz  $v(0) = v_0$ . Ponieważ jest zachowana całkowita energia układu, ruch jest periodyczny. Nie istnieją atraktory i nie istnieją asymptotycznie stabilne stany stacjonarne. Krzywe fazowe są zamknięte co oznacza że cząstka porusza się periodycznie w czasie. W zależności od warunków początkowych, amplituda drgań jest większa lub mniejsza, ponieważ warunki początkowe wyznaczają wartość stałej ruchu  $E$ . Jeżeli dwa warunki początkowe  $(x_{01}, v_{01})$  oraz  $(x_{02}, v_{02})$  nieznacznie się różnią, np. w sensie odległości:

$$|[x_{01}^2 + v_{01}^2] - [x_{02}^2 + v_{02}^2]| \ll 1 \quad (2.12)$$

to krzywe fazowe nieznacznie się różnią i ruch cząstki dla tych dwóch warunków początkowych nieznacznie się różni. Mówimy wówczas, że układ jest nieczuły na zmianę warunków początkowych. Jak widać z powyższego wzoru, dwa różne warunki początkowe oznaczają,

że układ ma dwie różne energie  $E$ . To z kolei oznacza, że częstotści ruchu periodycznego także będą różne. Różnica częstotści powoduje, że cząstki będą się powoli oddalać od siebie, ale tempo oddalania będzie liniowe w czasie. Gdyby tempo oddalania było znacznie szybsze, a mianowicie rośnie eksponencjalnie w czasie, zachowanie takie nazwalibyśmy chaotycznym. Do tego problemu powrócimy poniżej, ponieważ jest on kluczowym dla zrozumienia chaotycznego zachowania się układu.

Poniżej przedstawiamy potencjał i krzywe fazowe dla tego przypadku.

```
#parametry dla wizualizacji
var('x v')
x0 = 1.5
v0 = 0.2
E = 0.25*x0^4 - 0.5*x0^2 + v0^2
#
#prawo zachowania energii
V=0.25*x^4 - 0.5*x^2
PZE = v^2 + V == E
#
#wychylenia ekstremalne
print "ekstremalne wychylenia dla (x0,v0) = (%.2f,%.2f) "%(x0,v0)
rozv = solve(PZE(v=0), x); show(rozv)
xmin = min([i.rhs() for i in rozv if imag(i.rhs()) == 0])
xmax = max([i.rhs() for i in rozv if imag(i.rhs()) == 0])
#
#i jego rozwiązanie
print "ekstremalne prędkości dla (x0,v0) = (%.2f,%.2f) "%(x0,v0)
rozv = solve(PZE, v); show(rozv)
v1=rozv[0].rhs()
v2=rozv[1].rhs()
vmax = abs(v1(x=0))
#
#krzywe fazowe
start_point = (x0,V(x=x0))
p0 = point(start_point,size=30) + text(r"$ x_0$",start_point,vertical_alignment='bottom')
p1 = plot(V, (x,xmin,xmax))
p21 = plot(v1, (x,xmin,xmax), color='red')
p22 = plot(v2, (x,xmin,xmax), color='green')
(p0+p1).show(figsize=4)
(p21+p22).show(figsize=4)
```

### 2.2.3 Krok 2. Układ dysypatywny czyli wpływ tarcia.

W drugim kroku dodajemy tarcie i rozpatrujemy równanie ruchu w postaci:

$$\ddot{x} = x - x^3 - \gamma \dot{x}, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v(0) = v_0 \quad (2.13)$$

Jest on równoważny układowi 2 równań różniczkowych, autonomicznych, pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, & x(0) &= x_0, \\ \dot{v} &= x - x^3 - \gamma v, & v(0) &= v_0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Oznacza to, że przestrzeń fazowa jest 2-wymiarowa.



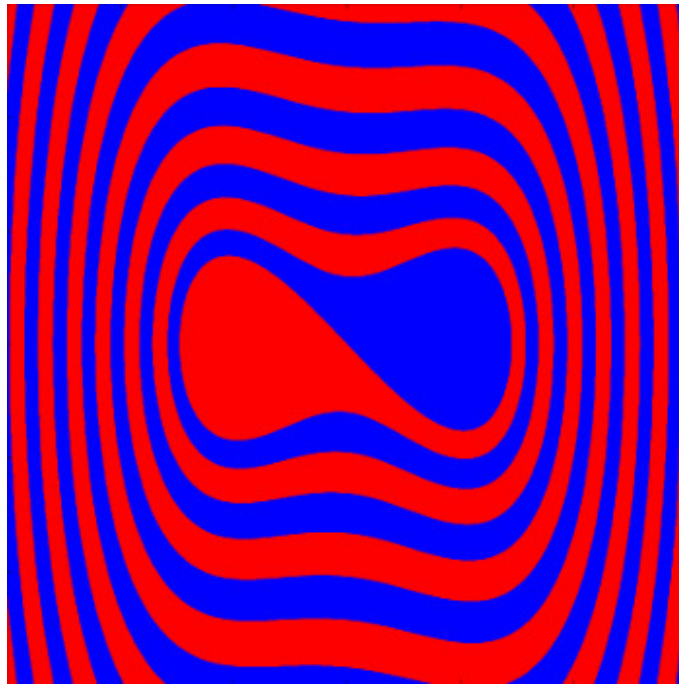
Taki przypadek był także rozpatrywany: jest to układ dysypatywny o jednym stopniu swobody. Nie istnieje już stała ruchu  $E$ . Całkowita energia układu maleje w czasie. W tym układzie istnieją 3 stany stacjonarne. Stany te określone są przez równanie:

$$x - x^3 = 0, \quad \text{stad} \quad x_{s0} = 0, \quad x_{s1} = 1, \quad x_{s2} = -1 \quad (2.15)$$

Stany stacjonarne  $x_{s1} = 1$  oraz  $x_{s2} = -1$  są stabilne. Stan  $x_{s0} = 0$  jest niestabilny. Istnieją 2 atraktory  $A_1 = x_{s1} = 1$  oraz  $A_2 = x_{s2} = -1$  i 2 obszary przyciągania  $B(A_1)$  oraz  $B(A_2)$ , których suma mnogościowa  $B(A_1) \cup B(A_2) = R^2$  jest całą płaszczyzną. Krzywe fazowe zawsze dążą do jednego z atraktorów lub do niestabilnego stanu stacjonarnego. Jeżeli dwa warunki początkowe  $(x_{01}, v_{01})$  oraz  $(x_{02}, v_{02})$  nieznacznie się różnią np. w sensie odległości:

$$|[x_{01}^2 + v_{01}^2] - [x_{02}^2 + v_{02}^2]| \ll 1 \quad (2.16)$$

i są w tym samym obszarze przyciągania, to krzywe fazowe nieznacznie się różnią i ruch cząstki dla tych dwóch warunków początkowych nieznacznie się różni. Mówimy wówczas, że układ jest nieczuły na zmianę warunków początkowych. Natomiast jeżeli dwa warunki początkowe  $(x_{01}, v_{01}) \in B(A_1)$  oraz  $(x_{02}, v_{02}) \in B(A_2)$  nieznacznie się różnią, ale są w dwóch obszarach przyciągania  $B(A_1)$  oraz  $B(A_2)$ , to trajektorie zaczną po pewnym czasie różnić się znacznie, będą przyciągane do dwóch różnych atraktorów i będą dążyć do dwóch różnych stanów stacjonarnych:  $x_{s1} = 1$  oraz  $x_{s2} = -1$ . Tym niemniej, w takiej sytuacji mówimy, że układ jest nieczuły na zmianę warunków początkowych w sensie o którym mowa powyżej.



Rysunek 2.2: Diagram basenów przyciągania dla potencjału bistabilnego

Kolor niebieski to obszar warunków początkowych które są “przyciągane” do atraktora  $(1, 0)$ , do prawego minimum potencjału. Kolor czerwony to obszar warunków początkowych które są “przyciągane” do atraktora  $(-1, 0)$ , do lewego minimum potencjału. W zależności od wartości stałej tłumienia  $\gamma$ , diagram ten przybiera nieco inne kształty, ale struktura dwu-kolorowych



pasów pozostaje. Brzeg obszarów przyciągania jest gładką krzywą, której wymiar wynosi 1. Jeżeli warunki początkowe są położone dokładnie na tym brzegu, to cząstka porusza się do niestabilnego stanu stacjonarnego ( $x = 0, v = 0$ ) (maksimum potencjału).

```
# wykresy dla przypadku z tłumieniem
var('x v')
x01, v01 = 1.50, 0
x02, v02 = 1.52, 0
#
# siła
F = x-x^3
V = -integrate(F,x)
#
# tarcie: parametr gamma
g = 0.1
#
# numeryczne rozwiązanie równań ruchu
T = srange(0,20*pi,0.01)
num1 = desolve_odeint(vector([v,F-g*v]), [x01,v01], T, [x,v])
num2 = desolve_odeint(vector([v,F-g*v]), [x02,v02], T, [x,v])
#
#krzywe fazowe
lt = plot(V, (x, -max([abs(x01),abs(x02)]),max([abs(x01),abs(x02)])), color='black', fi
lt += point((x01,V(x=x01)), color='green', size=50, axes_labels=['$x$','$V(x)$'])
lt += point((x02,V(x=x02)), color='red', size=50)
lb = list_plot(num1.tolist(), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['$x(t)$','$v(t)$'])
lb += list_plot(num2.tolist(), plotjoined=1, color='red', figsize=4)
rt = list_plot(zip(T,num1[:,0].tolist()), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['$t$','$x(t)$'])
rt += list_plot(zip(T,num2[:,0].tolist()), plotjoined=1, color='red', figsize=4)
rb = list_plot(zip(T,num1[:,1].tolist()), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['$t$','$v(t)$'])
rb += list_plot(zip(T,num2[:,1].tolist()), plotjoined=1, color='red', figsize=4)
#
html("""
<p align='center'>rozwiązania z warunkami początkowymi
<span style="color:green">($x_{01},v_{01}$)=(%.2f,%.2f)</span>
<span style="color:red">($x_{02},v_{02}$)=(%.2f,%.2f)</span>
dążą do tego samego atraktora:
(x,v)=(-1,0)
</p>
""")(x01,v01,x02,v02)
html.table([[lt,rt],[lb,rb]])
```

Na powyższym zestawie rysunków, 2 warunki początkowe leżą w tym samym obszarze przyciągania atraktora  $(-1, 0)$ . Oznacza to, że 2 warunki początkowe są umiejscowione w czerwonym obszarze na diagramie basenów przyciągania pokazanym powyżej. Układ nie jest czuły na zmianę warunków początkowych, gdy leżą one w tym samym basenie przyciągania.

```
# wykresy dla przypadku z tłumieniem
var('x v')
x01, v01 = 1.58, 0
x02, v02 = 1.57, 0
#
# siła
F = x-x^3
V = -integrate(F,x)
#
# tarcie: parametr gamma
g = 0.1
```

```
#
# numeryczne rozwiązanie równań ruchu
T = srange(0,20*pi,0.01)
num1 = desolve_odeint(vector([v,F-g*v]), [x01,v01], T, [x,v])
num2 = desolve_odeint(vector([v,F-g*v]), [x02,v02], T, [x,v])
#
# wykresy funkcji
lt = plot(V, (x, -max([abs(x01),abs(x02)]),max([abs(x01),abs(x02)])),color='black', fi
lt += point((x01,V(x=x01)), color='blue', size=50, axes_labels=['$x$','$V(x)$'])
lt += point((x02,V(x=x02)), color='red', size=50)
lb = list_plot(num1.tolist(), plotjoined=1, color='blue', axes_labels=['$x(t)$','$v(t)$'])
lb += list_plot(num2.tolist(), plotjoined=1, color='red', figsize=4)
rt = list_plot(zip(T,num1[:,0]).tolist(), plotjoined=1, color='blue', axes_labels=['$t$','$x(t)$'])
rt += list_plot(zip(T,num2[:,0]).tolist(), plotjoined=1, color='red', figsize=4)
rb = list_plot(zip(T,num1[:,1]).tolist(), plotjoined=1, color='blue', axes_labels=['$t$','$v(t)$'])
rb += list_plot(zip(T,num2[:,1]).tolist(), plotjoined=1, color='red', figsize=4)
#
html("""
<p align='center'>rozwiązania z warunkami początkowymi
<span style="color:blue">($x_{01},v_{01}$)=(%.2f,%.2f)</span>
<span style="color:red">($x_{02},v_{02}$)=(%.2f,%.2f)</span>
dążą do różnych atraktorów:
<span style="color:blue">(x,v)=(1,0)</span>
<span style="color:red">(x,v)=(-1,0)</span>
</p>
""%(x01,v01,x02,v02))
html.table([[lt,rt],[lb,rb]])
```

Na powyższym zestawie rysunków, 2 warunki początkowe leżą w dwóch różnych obszarach przyciągania. Oznacza to, że 1 warunek początkowy leży w niebieskim obszarze na diagramie basenów przyciągania, natomiast 2 warunek początkowy leży w czerwonym obszarze na diagramie basenów przyciągania. Te dwa warunki początkowe leżą blisko brzegu 2 basenów przyciągania. Dlatego układ jest czuły na zmianę warunków początkowych, pod warunkiem że leżą one w dwóch różnych basenach przyciągania. Ale to nie jest jeszcze kryterium własności chaotycznych układu.

### 2.2.4 Krok 3. Układ z tarciem i periodyczną siłą.

W trzecim kroku dodajemy siłę periodyczną w czasie i rozpatrujemy równanie ruchu w wyjściowej pełnej postaci:

$$\ddot{x} = x - x^3 - \gamma \dot{x} + A \cos(\omega_0 t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v(0) = v_0 \quad (2.17)$$

Jest on równoważny układowi 3 równań różniczkowych, autonomicznych, pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, & x(0) &= x_0, \\ \dot{v} &= x - x^3 - \gamma v + A \cos z, & v(0) &= v_0, \\ \dot{z} &= \omega_0, & z(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Oznacza to, że przestrzeń fazowa jest 3-wymiarowa.

Matematycy wolą przepisać powyższy układ równań dla “tradycyjnych” 3 zmiennych  $(x, y, z)$

w postaci:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= x - x^3 - \gamma y + A \cos z, & y(0) &= y_0, \\ \dot{z} &= \omega_0, & z(0) &= 0.\end{aligned}\tag{2.19}$$

czyli prędkość cząstki  $v$  jest teraz oznaczona jako  $v = y$ .

Okazuje się, że pełny układ wykazuje radykalnie inne własności od poprzednich 2 przypadków. Z punktu widzenia fizyki mamy taki oto proces: Cząstka porusza się w bistabilnym potencjale. Ponieważ potencjał dąży do nieskończoności gdy położenie dąży do nieskończoności, ruch cząstki jest ograniczony; cząstka jest uwięziona w potencjale i nie może uciec do nieskończoności. Siła tarcia pcha cząstkę do jednego ze (“starych”) stanów stacjonarnych  $x_{s1}$  lub  $x_{s2}$ . Z kolei zewnętrzna siła periodyczna w czasie pompuje energię do układu i przeciwdziała sile tarcia. Cząstka już nie dąży do stanu stacjonarnego, nie zatrzyma się dla długich czasów ale będzie ciągle poruszać się i nigdy już nie spocznie. Istotne stają się efekty inercyjne związane z masą cząstki, które są odzwierciedlone w wyrazie  $\dot{y}$ , czyli przyspieszeniu cząstki. Istotne jest to, że nie jest to ruch przetłumiony. W konsekwencji układ nie posiada stanu stacjonarnego w postaci punktu w przestrzeni fazowej jak to było w przypadku 2. Wszystkie te powyższe czynniki stają się istotne dla zrozumienia skomplikowanych i złożonych własności ewolucji cząstki.

```
# przykładowa trajektoria (górny wykres)
# wraz z krzywą fazową (dolny wykres)
var('x y z')
T = srange(0, 150*pi, 0.01)
sol=desolve_odeint( vector([y, x-x^3-0.26*y+0.3*cos(z), 1]), [0.1, 0.1, 0], T, [x, y, z])
t = line(zip(T, sol[:, 0]), figsize=(12, 4), axes_labels=["t$", "x(t)$"], frame=1, axes=0)
b = line(zip(sol[:, 0], sol[:, 1]), figsize=(12, 4), axes_labels=["x(t)$", "v(t)$"], frame=0)
html.table([[t], [b]])
```

## 2.2.5 Ruch periodyczny o okresie 1

W modelu występują 3 bezwymiarowe parametry: współczynnik tarcia  $\gamma$ , amplituda zewnętrznej siły  $A$  oraz częstość drgań  $\omega_0$  siły periodycznej w czasie. Poniżej pokażemy kilka charakterystycznych trajektorii układu. Zaczniemy od prostej periodycznej ewolucji, ruchu okresowego o tzw. okresie 1.

Założmy następujące wartości parametrów:

$$\gamma = 0.15, \quad A = 0.3, \quad \omega_0 = 1\tag{2.20}$$

W tym przypadku obserwujemy regularny ruch. Jeżeli nieco zaburzymy warunki początkowe, to nowy ruch jest także regularny (trzeba być ostrożnym, gdy mówimy “nieco zaburzymy”).

```
# wykresy dla przypadku z tłumieniem
var('x y z')
x0, y0, z0 = 0.1, 0.1, 0
kolor = 'green'
#
# siła
F = x-x^3
```

```
V = -integrate(F,x)
#
# tarcie: parametr gamma
g = 0.1
A = 0.3
w = 1
#
# układ różniczkowych równań ruchu
dx = y
dy = F - g*y + A*cos(z)
dz = w
#
# numeryczne rozwiązanie równań ruchu
T = srange(0,30*pi,0.01)
num = desolve_odeint(vector([dx,dy,dz]), [x0,y0,z0], T, [x,y,z])
#
# wykresy funkcji
xmin = 1.5
lt = plot(V, (x,-xmin,xmin), figsize=4)
lt += point((x0,V(x=x0)), color=kolor, size=50, axes_labels=['$x$', '$V(x)$'])
lb = list_plot(zip(num[:,0],num[:,1]), plotjoined=1, color=kolor, axes_labels=['$x(t)$', '$y(t)$'])
rt = list_plot(zip(T,num[:,0].tolist()), plotjoined=1, color=kolor, axes_labels=['$t$', '$x(t)$'])
rb = list_plot(zip(T,num[:,1].tolist()), plotjoined=1, color=kolor, axes_labels=['$t$', '$y(t)$'])
#
html("""Układ równań różniczkowych
$\dot{x} = %s$
$\dot{y} = %s$
$\dot{z} = %s$
z warunkami początkowymi
$(x_0,y_0,z_0) = (%.2f,%.2f,%.2f)$
""%(dx,dy,dz,x0,y0,z0))
html.table([[lt,rt],[lb,rb]])
```

Przyjrzyjmy się teraz dwóm trajektoriom startującym z bliskich warunków początkowych. Rozpatrzmy ich początkową i asymptotyczną (dla długich czasów) ewolucję.

```
# wykresy dla przypadku z tłumieniem
var('x y z')
x01, y01, z01 = 0.1,0.1,0
x02, y02, z02 = 0.11,0.1,0
#
# siła
F = x-x^3
V = -integrate(F,x)
#
# tarcie: parametr gamma
g = 0.1
A = 0.3
w = 1
#
# układ różniczkowych równań ruchu
dx = y
dy = F - g*y + A*cos(z)
dz = w
#
# numeryczne rozwiązanie równań ruchu
T = srange(0,200*pi,0.01)
num1 = desolve_odeint(vector([dx,dy,dz]), [x01,y01,z01], T, [x,y,z])
```

```

num2 = desolve_odeint(vector([dx,dy,dz]), [x02,y02,z02], T, [x,y,z])
#
lnum = int(len(num1[:,0])/10)
trans1 = num1[:lnum]
asymp1 = num1[-lnum:]
trans2 = num2[:lnum]
asymp2 = num2[-lnum:]
#
# wykresy funkcji
lt = list_plot(zip(trans1[:,0],trans1[:,1]), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['x','y'])
lt += list_plot(zip(trans2[:,0],trans2[:,1]), plotjoined=1, color='red')
rt = list_plot(zip(T[:lnum],trans1[:,0].tolist()), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['t','x'])
rt += list_plot(zip(T[:lnum],trans2[:,0].tolist()), plotjoined=1, color='red')
lb = list_plot(zip(asymp1[:,0],asymp1[:,1]), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['x','y'])
lb += list_plot(zip(asymp2[:,0],asymp2[:,1]), plotjoined=0, color='red')
rb = list_plot(zip(T[-lnum:],asymp1[:,0].tolist()), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['t','x'])
rb += list_plot(zip(T[-lnum:],asymp2[:,0].tolist()), plotjoined=1, color='red')
#
html("""Układ równań różniczkowych
 $\dot{x} = %s$ 
 $\dot{y} = %s$ 
 $\dot{z} = %s$ 
z różnymi warunkami początkowymi
<span style="color:green;"> $x_{01}, y_{01}, z_{01} = (%.2f, %.2f, %.2f)$ </span>
<span style="color:red;"> $x_{02}, y_{02}, z_{02} = (%.2f, %.2f, %.2f)$ </span>
""%(dx,dy,dz,x01,y01,z01,x02,y02,z02))
html.table([[lt,rt],[lb,rb]])

```

Na dwóch górnych diagramach przedstawioną reżim krótkich czasów. Ponieważ 2 warunki początkowe nieco się różnią, więc początkowa ewolucja nieco się różni. Kolor czerwony i zielony jest rozróżnialny na prawym górnym rysunku pokazującym ewolucję  $x(t)$  dla krótkich czasów. Jeżeli przyjrzymy się reżimowi długich czasów (dwa dolne diagramy) to zauważymy duże podobieństwo w ewolucji: krzywe fazowe są zamknięte więc jest to prosty ruch periodyczny, przypominający nieco zdeformowaną funkcję typu  $\sin(\alpha t)$  czy też  $\cos(\alpha t)$ . Jest to funkcja okresowa z charakterystycznym jednym jedynym okresem  $T$ . Dlatego mówimy, że jest ruch periodyczny o okresie 1. Dwie krzywe  $x(t)$  na dolnym prawym rysunku nie są rozróżnialne.

Można zrobić doświadczenie numeryczne i wybierać różne warunki początkowe. Zobaczymy, że trajektorie dążą do tego samego okresowego rozwiązania, są przyciągane do tego okresowego rozwiązania. Innymi słowy, ta krzywa fazowa o okresie 1 jest ATRAKTOREM. Atraktor ten nazywa się periodycznym atraktorem o okresie 1 lub 1-okresowym atraktorem. Można by postawić pytanie: jak wygląda basen przyciągania dla tego atraktora. Aby dać odpowiedź na to pytanie należy zbadać numerycznie np. kwadrat warunków początkowych  $(x_0, y_0)$  i wybrać te warunki początkowe które dążą do powyższej krzywej fazowej o okresie 1. Okazuje się, że basen przyciągania jest “porządnym” zbiorem, którego brzeg jest gładką krzywą, podobnie jak w przypadku zilustrowanym powyżej dla układu tylko z tarcie, bez siły okresowej.

## 2.2.6 Ruch periodyczny o okresie 3

Założmy następujące wartości parametrów:

$$\gamma = 0.22, \quad A = 0.3, \quad \omega_0 = 1 \quad (2.21)$$

W tym przypadku obserwujemy także periodyczny ruch, ale nieco bardziej skomplikowany. Nie jest to prosty periodyczny ruch, ale tzw. ruch o okresie 3, tzn. teraz okres jest 3 razy dłuższy niż w poprzednim przypadku.

```
# wykresy dla przypadku z tłumieniem
var('x y z')
x0, y0, z0 = 0.1, 0.1, 0
kolor = 'red'
#
# siła
F = x-x^3
V = -integrate(F,x)
#
# tarcie: parametr gamma
g = 0.22
A = 0.3
w = 1
#
# układ różniczkowych równań ruchu
dx = y
dy = F - g*y + A*cos(z)
dz = w
#
# numeryczne rozwiązanie równań ruchu
T = srange(0, 20*pi, 0.01)
num = desolve_odeint(vector([dx, dy, dz]), [x0, y0, z0], T, [x, y, z])
#
# wykresy funkcji
xmin = 1.5
lt = plot(V, (x, -xmin, xmin), figsize=4)
lt += point((x0, V(x=x0)), color=kolor, size=50, axes_labels=['$x$', '$V(x)$'])
lb = list_plot(zip(num[:, 0], num[:, 1]), plotjoined=1, color=kolor, axes_labels=['$x(t)$', '$y(t)$'])
rt = list_plot(zip(T, num[:, 0].tolist()), plotjoined=1, color=kolor, axes_labels=['$t$', '$x(t)$'])
rb = list_plot(zip(T, num[:, 1].tolist()), plotjoined=1, color=kolor, axes_labels=['$t$', '$y(t)$'])
#
html("""Układ równań różniczkowych
$\dot{x} = %s$
$\dot{y} = %s$
$\dot{z} = %s$
z warunkami początkowymi
$(x_0, y_0, z_0) = (%.2f, %.2f, %.2f)$
""%(dx, dy, dz, x0, y0, z0))
html.table([[lt, rt], [lb, rb]])
```

I znów zobaczymy, jak początkowa ewolucja różni się od tej po długim czasie.

```
# wykresy dla przypadku z tłumieniem
var('x y z')
x01, y01, z01 = 0.10, 0.1, 0
x02, y02, z02 = 0.11, 0.1, 0
#
# siła
F = x-x^3
V = -integrate(F,x)
#
# tarcie: parametr gamma
g = 0.22
A = 0.3
```

```

w = 1
#
# układ różniczkowych równań ruchu
dx = y
dy = F - g*y + A*cos(z)
dz = w
#
# numeryczne rozwiązanie równań ruchu
T = srange(0,200*pi,0.01)
num1 = desolve_odeint(vector([dx,dy,dz]), [x01,y01,z01], T, [x,y,z])
num2 = desolve_odeint(vector([dx,dy,dz]), [x02,y02,z02], T, [x,y,z])
#
lnum = int(len(num1[:,0])/10)
trans1 = num1[:lnum]
asymp1 = num1[-lnum:]
trans2 = num2[:lnum]
asymp2 = num2[-lnum:]
#
# wykresy funkcji
lt = list_plot(zip(trans1[:,0],trans1[:,1]), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['x','y'])
lt += list_plot(zip(trans2[:,0],trans2[:,1]), plotjoined=1, color='red')
rt = list_plot(zip(T[:lnum],trans1[:,0].tolist()), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['T','x'])
rt += list_plot(zip(T[:lnum],trans2[:,0].tolist()), plotjoined=1, color='red')
lb = list_plot(zip(asymp1[:,0],asymp1[:,1]), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['x','y'])
lb += list_plot(zip(asymp2[:,0],asymp2[:,1]), plotjoined=1, color='red')
rb = list_plot(zip(T[-lnum:],asymp1[:,0].tolist()), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['T','x'])
rb += list_plot(zip(T[-lnum:],asymp2[:,0].tolist()), plotjoined=1, color='red')
#
html("""Układ równań różniczkowych
 $\dot{x} = y$ 
 $\dot{y} = F - g y + A \cos(z)$ 
 $\dot{z} = w$ 
z różnymi warunkami początkowymi
<span style="color:green;"> $(x_{01}, y_{01}, z_{01}) = (0.25, 0.3, 1)$ </span>
<span style="color:red;"> $(x_{02}, y_{02}, z_{02}) = (0.25, 0.3, 1)$ </span>
""")
html.table([[lt,rt],[lb,rb]])

```

Dla długich czasów, krzywe fazowe są zamknięte, ale nie są to krzywe typu zdeformowana elipsa. To są krzywe z 2 pętelkami. Tym niemniej, ruch jest periodyczny.

Podobnie jak poprzednim przypadkiem, można zrobić doświadczenie numeryczne i wybierać różne warunki początkowe. Zobaczymy, że wiele trajektorii dąży do tej samej okresowej orbity, są one przyciągane do tej zamkniętej krzywej fazowej. Innymi słowy, ta krzywa fazowa o okresie 3 jest ATRAKTOREM. Atraktor ten nazywa się periodycznym atraktorem o okresie 3 lub 3-okresowym atraktorem. Basen przyciągania dla tego atraktora na płaszczyźnie warunków początkowych  $(x_0, y_0)$  jest "porządnym" zbiorem o wymiarze 2 (czyli kawałek płaszczyzny), którego brzeg jest gładką krzywą.

## 2.2.7 Ruch chaotyczny

Założmy następujące wartości parametrów:

$$\gamma = 0.25, \quad A = 0.3, \quad \omega_0 = 1 \quad (2.22)$$

W tym przypadku obserwujemy ruch, który wydaje się być wyjątkowo nieregularny, chaotyczny.

```
# wykresy dla przypadku chaotycznego
var('x y z')
x0, y0, z0 = 0.1, 0.1, 0
kolor = 'firebrick'
#
# siła
F = x-x^3
V = -integrate(F,x)
#
# tarcie: parametr gamma
g = 0.25
A = 0.3
w = 1
#
# układ różniczkowych równań ruchu
dx = y
dy = F - g*y + A*cos(z)
dz = w
#
# numeryczne rozwiązanie równań ruchu
T = srange(0, 50*pi, 0.01)
num = desolve_odeint(vector([dx, dy, dz]), [x0, y0, z0], T, [x, y, z])
#
# wykresy funkcji
xmin = 1.5
lt = plot(V, (x, -xmin, xmin), figsize=4)
lt += point((x0, V(x=x0)), color=kolor, size=50, axes_labels=['$x$', '$V(x)$'])
lb = list_plot(zip(num[:, 0], num[:, 1]), plotjoined=1, color=kolor, axes_labels=['$x(t)$', '$y(t)$'])
rt = list_plot(zip(T, num[:, 0].tolist()), plotjoined=1, color=kolor, axes_labels=['$t$', '$x(t)$'])
rb = list_plot(zip(T, num[:, 1].tolist()), plotjoined=1, color=kolor, axes_labels=['$t$', '$y(t)$'])
#
html("""Układ równań różniczkowych
 $\dot{x} =$  %s$
 $\dot{y} =$  %s$
 $\dot{z} =$  %s$
z warunkami początkowymi
 $(x_0, y_0, z_0) = (%.2f, %.2f, %.2f)$ 
"""%(dx, dy, dz, x0, y0, z0))
html.table([[lt, rt], [lb, rb]])
```

Zobaczmy, jak tym razem ewoluują rozwiązania o 2 bliskich warunkach początkowych.

```
var('x y z')
x01, y01, z01 = 0.1, 0.1, 0
x02, y02, z02 = 0.11, 0.1, 0
#
# siła
F = x-x^3
V = -integrate(F,x)
#
# tarcie: parametr gamma
g = 0.25
A = 0.3
w = 1
#
# układ różniczkowych równań ruchu
```

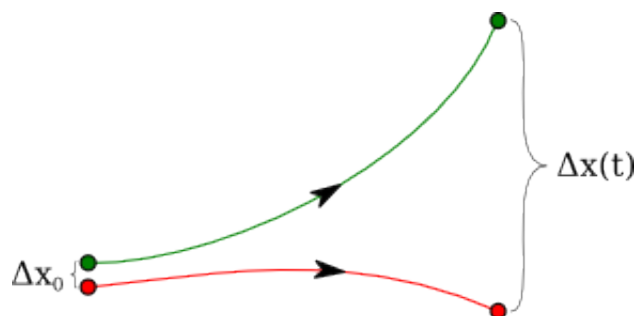


```

dx = y
dy = F - g*y + A*cos(z)
dz = w
#
# numeryczne rozwiązanie równań ruchu
T = xrange(0,200*pi,0.01)
num1 = desolve_odeint(vector([dx,dy,dz]), [x01,y01,z01], T, [x,y,z])
num2 = desolve_odeint(vector([dx,dy,dz]), [x02,y02,z02], T, [x,y,z])
#
lnum = int(len(num1[:,0])/10)
trans1 = num1[:lnum]
asympt1 = num1[-lnum:]
trans2 = num2[:lnum]
asympt2 = num2[-lnum:]
#
# wykresy funkcji
lt = list_plot(zip(trans1[:,0],trans1[:,1]), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['x', 'y'])
lt += list_plot(zip(trans2[:,0],trans2[:,1]), plotjoined=1, color='red')
rt = list_plot(zip(T[:lnum],trans1[:,0].tolist()), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['t', 'x'])
rt += list_plot(zip(T[:lnum],trans2[:,0].tolist()), plotjoined=1, color='red')
lb = list_plot(zip(asympt1[:,0],asympt1[:,1]), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['x', 'y'])
lb += list_plot(zip(asympt2[:,0],asympt2[:,1]), plotjoined=1, color='red')
rb = list_plot(zip(T[-lnum:],asympt1[:,0].tolist()), plotjoined=1, color='green', axes_labels=['t', 'x'])
rb += list_plot(zip(T[-lnum:],asympt2[:,0].tolist()), plotjoined=1, color='red')
#
html("""Układ równań różniczkowych
 $\dot{x} = y$ 
 $\dot{y} = F - g*y + A*\cos(z)$ 
 $\dot{z} = w$ 
z różnymi warunkami początkowymi
> $(x_{01}, y_{01}, z_{01}) = (x_1(0), y_1(0), z_1(0))$ 
> $(x_{02}, y_{02}, z_{02}) = (x_2(0), y_2(0), z_2(0))$ 
""")
html.table([[lt,rt],[lb,rb]])

```

Początkowa ewolucja dwóch rozwiązań jest nierozróżnialna (ponieważ 2 warunki początkowe są bardzo blisko siebie). Po pewnym charakterystycznym czasie, zwanym czasem Lapunowa, trajektorie zaczynają różnić się coraz bardziej, zaczynają rozbiegać się: patrz trajektoria czerwona i zielona na dolnym prawym rysunku.



Rysunek 2.3: Schematyczne trajektorie w reżimie chaotycznym.

W reżimie chaotycznym, te dwie trajektorie oddalają się od siebie w eksponencjalnie szybkim tempie określonym przez zależność:

$$|x_1(t) - x_2(t)| = |x_1(0) - x_2(0)|e^{\lambda t}, \quad \lambda > 0 \quad (2.23)$$

lub

$$|\Delta x(t)| = |\Delta x_0|e^{\lambda t}, \quad \lambda > 0 \quad (2.24)$$

gdzie  $\lambda$  nazywa się wykładnikiem Lapunowa.

Różnice w ewolucji stają się zbyt duże i pojawia się dylemat: która trajektoria jest właściwa, skoro nasza aparatura nie rozróżnia bliskich warunków początkowych. Determinizm staje się złudnym. Nie możemy przewidywać właściwej ewolucji układu.

Przedstawiony powyżej reżim chaotyczny nie jest jedyny. W układzie istnieje wiele takich wartości parametrów  $(\gamma, A, \omega)$ , dla których pojawia się ruch chaotyczny. Należy nadmienić, że dla długich czasów wiele trajektorii generowanych przez różne warunki początkowe zachowuje się bardzo podobnie, wiele trajektorii jest przyciąganych. Tu także istnieje atraktor i jego basen przyciągania. Jednakże ten atraktor jest dziwny: jego wymiar nie jest liczbą całkowitą i atraktor jest fraktalem. Dlatego nazywa się dziwnym atraktorem. Brzeg basenu przyciągania tego atraktora też ma dziwną strukturę i jego wymiar jest fraktalny.

**Zadania**

1. Niech  $\gamma = 0.1$ ,  $\omega_0 = 1.4$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (-0.5, -0.2, 0)$ . Zmieniaj parametr  $A = 0.1, 0.32, 0.338, 0.35$ .  
Obserwuj scenariusz podwojenia okresu:
  - (a) pojawia się atraktor periodyczny o okresie 1.
  - (b) pojawia się atraktor periodyczny o okresie 2.
  - (c) pojawia się atraktor periodyczny o okresie 4.
  - (d) pojawia się atraktor periodyczny o okresie 8 (trudno trafić).
  - (e) pojawia się ruch nieregularny, chaotyczny.
2. Zbadaj zachowanie się układu dla następujących wartości parametrów:  $\gamma = 1.35 - 1.38$ ,  $A = 1$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (0.0, 0.5, 0)$ .
3. To samo dla wartości  $\gamma = 0.5$ ,  $A = 0.34875$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$