$T: V \to W$ przekszt. lin.

$\ker T = \{ v \in V : Tv = \bar{0} \}$ $T(v) = Tv$

Ex.

(a) $T: V \to W$

$T(v) = \bar{0} \quad \forall v \in V$

$\ker T = V$

(b) $T: V \to V$

$T(v) = v \quad \forall v \in V$

$\ker T = \{\bar{0}\}$

(c) - użyteczny

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y,z) = (x-y+2z, y-x-3z)$

$\ker T = \{ v \in \mathbb{R}^3 : \underline{Tv} = \bar{0} \}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-y+2z, y-x-3z) = (0,0) \}$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y - x - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{w_2 + w_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[w_2 \cdot (-1)]{w_1 + 2w_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{array}\right)$$

param.

$z = 0$
$x = y$

$\ker T \ni v = (x, x, 0)$ (kernel)

$\ker T = \{ (x,x,0) : x \in \mathbb{R} \} = \text{lin}((1,1,0))$

baza $\ker T$ to $((1,1,0))$, $\dim(\ker T) = 1$.

df. Niech $T: V \to W$ b. przekształc. lin $(T \in L(V,W))$

Obrazem przekształcenia T naz. zbiór (image)

$$\text{im}\, T = \{ w \in W : \exists v \in V \;\; w = Tv \}.$$

TW

Dla $T \in L(V,W)$ $\text{im}\, T < W$.

D-d

- $\text{im}\, T \neq \emptyset$, bo $\bar{0} \in W$
- Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $w_1, w_2 \in \text{im}\, T$. Zatem istn. $v_1, v_2 \in V$ t. że

$w_1 = Tv_1$, $w_2 = Tv_2$. Wtedy

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha T v_1 + \beta T v_2 \underset{\text{lin. } T}{=} T(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \operatorname{im} T. \quad \blacksquare$$

Ex

użyteczny $\quad T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x-y+2z,\ y-x-3z)$

Każdy wektor z $\operatorname{im} T$ zapisuje się

$$(x-y+2z,\ y-x-3z) = x(1,-1) + y(-1,1) + z(2,-3)$$

$$\operatorname{im} T = \operatorname{lin}\{\underbrace{(1,-1),(-1,1)}_{LZ},(2,-3)\} = \operatorname{lin}\{\underbrace{(1,-1),(2,-3)}_{LN}\} = \mathbb{R}^2$$

baza $\operatorname{im} T$ to $\{(1,-1),(2,-3)\}$; inna baza to $\{(1,0),(0,1)\}$.

$\dim(\operatorname{im} T) = 2$

W przykł. użytecznym: $\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T) = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

TW

Jeżeli V, W p-nie lin. nad ciałem $\mathbb{K}$, przy czym $\dim V < \infty$ oraz $T \in L(V,W)$, to

$$\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T) = \dim(V).$$

D-d

Niech $\dim V = n$, $\dim(\ker T) = k$ i $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ - baza $\ker T$.

Z wn. z tw. Steinitza możemy uzupełnić A do bazy B p-ni V. Niech $B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ - baza V.

Twierdzimy, że

$$C = \{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$$

jest bazą $\operatorname{im} T$.

Każdy wektor $w \in \operatorname{im} T$ jest postaci $w = T(v)$, gdzie $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, bo $\{v_1, \dots, v_n\}$ jest bazą V.

Zatem $w = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \underset{}{=}$ ← T jest lin

$$= \alpha_1 T v_1 + \ldots + \alpha_k T v_k + \alpha_{k+1} T v_{k+1} + \ldots + \alpha_n T v_n =$$
$$= \alpha_{k+1} T v_{k+1} + \ldots + \alpha_n T v_n,$$

bo $v_1, \ldots, v_k \in \ker T$.

Stąd
$$\operatorname{im} T = \operatorname{lin}\{T v_{k+1}, \ldots, T v_n\} = \operatorname{lin}(C).$$

LN wekt. zb. C

Niech
$$\alpha_{k+1} T v_{k+1} + \ldots + \alpha_n T v_n = \bar{0}$$
$$T(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n) = \bar{0}$$

To ozn. że $\alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n \in \ker T$.

Bazą jądra jest zb. A, więc
$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k.$$
$$\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k - \alpha_{k+1} v_{k+1} - \ldots - \alpha_n v_n = \bar{0}$$
$$\beta_1 = \ldots = \beta_k = \underbrace{\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = 0}$$

Stąd LN wektorów zb. C.

Więc mamy
$$\dim(\operatorname{im} T) = n - k.$$

Było $\dim(\ker T) = k$. To daje
$$\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T) = k + (n-k) = n = \dim V.$$

$\blacksquare$

df.

Rząd przekszt. liniowego T, ozn. rz T, to wymiar obrazu p-nia T tj.
$$\operatorname{rz} T = \dim(\operatorname{im} T).$$

Wymiar jądra T naz. się defektem przekształcenia.

Przekształcenie liniowe można wyznaczyć poprzez zadanie go na wektorach bazy.

TW

Niech V, W – p-nie lin. nad ciałem $\mathbb{K}$ i $\{v_1, \dots, v_n\}$ – baza p-ni V. Dla wektorów $w_1, \dots, w_n \in W$ istnieje dokładnie jedno p-nie lin. $T: V \to W$ t. że $Tv_i = w_i$ dla $i = 1, \dots, n$.

D-d

Niech $v \in V$. Wtedy $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

Określamy $T: V \to W$,

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i .$$

(a) T jest przekszt. liniowym

Dla $x, y \in V$, $a, b \in \mathbb{K}$ wykorzystując fakt, że

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i , \quad y = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i v_i$$

mamy

$$T(ax + by) = T\left(\sum a\beta_i v_i + \sum b\gamma_i v_i\right)$$
$$= T\left(\sum (a\beta_i + b\gamma_i) v_i\right)$$
$$= \sum (a\beta_i + b\gamma_i) w_i = a\sum \beta_i w_i + b\sum \gamma_i w_i =$$
$$= aT(x) + bT(y).$$

(b) Jasne jest, że

$$T(v_i) = w_i \quad \text{dla } i = 1, \dots, n.$$

(c) T jest wyznaczone jednoznacznie.

Zał., że $S: V \to W$ jest liniowe i $S(v_i) = w_i$ dla $i = 1, \dots, n$. Mamy

$$S(v) = \sum \alpha_i S(v_i) = \sum \alpha_i w_i = T(v),$$

więc $S = T$.

$\blacksquare$

WN

Niech V, W – p-nie lin. i $\{v_1, \dots, v_n\}$ będzie (skończoną) bazą V. Jeśli $S, T: V \to W$ są przekszt. lin t. że $S(v_i) = T(v_i)$ dla $i = 1, \dots, n$, to $S = T$.

Ex

Szukamy przekszt. lin. z $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = M_2(\mathbb{R})$ do $\mathbb{R}_2[x]$

Niech bazą $M_2(\mathbb{R})$ będzie $B = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.

Weźmy jakieś wekt. z $\mathbb{R}_2[x]$, np. $1+x,\ x^2,\ 2+x^2,\ x-3x^2$.

Określamy

$$\underline{T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}} = 1+x,\quad T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = x^2,\quad T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = 2+x^2,\quad T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = x-3x^2. \leftarrow$$

$$T\left(a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = a(1+x) + b(x^2) + c(2+x^2) + d(x-3x^2)$$

$$= (b+c-3d)x^2 + (a+d)x + (a+2c)\cdot 1$$

df.

Przekształcenie $T \in L(V,W)$ naz. różnowartościowym, jeśli

$$T(u) = T(v) \Rightarrow u = v.$$

df.

Przekszt. $T \in L(V,W)$ naz 'na' p-ń W, jeśli

$$T(V) = \operatorname{im}(T) = W$$

alternatywną (równoważną) def. jest

$T \in L(V,W)$ jest 'na', jeśli

$$\forall w \in W\ \exists u \in V \quad w = T(u).$$

df. Przekszt. $T \in L(V,W)$ naz. izomorfizmem, jeśli

T jest różnowartościowe i 'na'.

Wtedy o przestrzeniach V i W mówimy, że są izomorficzne, piszemy $V \simeq W$.

Ex

(a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(\underline{x,y}) = \underline{(x+y,\ x,\ x-y)}$

$(3,2,?) \in \mathbb{R}^3 \qquad T(x,y)$

$x=2,\ y=1$

Niech $w=(3,2,7)\in\mathbb{R}^3$. Przyp. że istn. $u\in\mathbb{R}^2$ t. że $T(u)=w$

$T(x,y)=(x+y,x,x-y)=(3,2,7)$

$\begin{cases} x+y=3 \\ x=2 \\ x-y=7 \end{cases}$ $\longrightarrow$ to jest sprzeczny ukł. r-ań, zatem T nie jest 'na'.

(b) $T:\mathbb{R}^2\to\underline{\mathbb{R}^2}$, $T(x,y)=(x+y,x)$ jest na

dla $(w,z)\in\underline{\underline{\mathbb{R}^2}}$ znajdziemy wektor t z $\mathbb{R}^2$ t. że $T(t)=(w,z)$. Dla $t=(w-z,z)$

$T(t)=T(w-z,z)=(w-z+z,z)=(w,z)$

(c) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[x]$

$T(a,b,c)=ax^2+bx+c$ $\qquad\qquad \{T(a,b,c)=bx^2+cx+a$

- T jest przekszt. lin.
- zał. $T(a_1,b_1,c_1)=T(a_2,b_2,c_2)$

  stąd $a_1x^2+b_1x+c_1=a_2x^2+b_2x+c_2$

  zatem $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$

  więc $(a_1,b_1,c_1)=(a_2,b_2,c_2)$. T jest '1-1'.
- weźmy $w=ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]=W$

  istnieje $v\in V=\mathbb{R}^3$ t. że $T(v)=w$ i jest to $v=(a,b,c)$

  T jest 'na'

$\mathbb{R}^3\simeq\mathbb{R}_2[x]$ $\qquad\qquad (1,2,3)\neq x^2+2x+3$

izomorfizm

TW

Niech $\dim V=n=\dim W$, $T\in L(V,W)$.

Następujące warunki są równoważne:

① T jest 'na'

② $r(T)=n$

③ $\dim(\ker T) = 0$ $\quad (\ker T = \{\bar{0}\})$

④ T jest '1-1'

⑤ T jest izomorfizmem

D-d

① ⇒ ② wynika z def. rzędu, bo $r(T) = \dim(\operatorname{im} T) = \dim W = n$

② ⇒ ③ z tw. o wymiarze

$$\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T) = n$$

③ ⇒ ④ zał. $T(u) = T(v)$. Wtedy $T(u-v) = 0 \Rightarrow$

$$u - v \in \ker T \underset{\text{zał.}}{\Rightarrow} u - v = \bar{0} \Rightarrow u = v$$

④ ⇒ ⑤ Jeżeli T jest '1-1' to

1° $\bar{0} \in \ker T$ i jeśli $v \in \ker T$ to $T(v) = T(\bar{0})$

daje $v = \bar{0}$, więc $\ker T = \{\bar{0}\}$ i $\dim(\ker T) = 0$.

zatem $\dim(\operatorname{im} T) = r T = n$, czyli jest 'na'.

⑤ ⇒ ① oczywiste

MACIERZ PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWEGO

Przekształcenie liniowe $T: V \to W$ można przedstawić za pomocą macierzy, wykorzystując bazy (uporządkowane obiekty) p-ni V, W.

df. Niech $T: V \to W$ b. przekszt. lin., $B = (v_1, \dots, v_n)$ - baza p-ni V, $C = (w_1, \dots, w_m)$ - baza p-ni W.

Wtedy

napisanie $\Sigma a_{ji} w_i$ to błąd

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad \text{dla} \quad 1 \le j \le n.$$

Macierz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ naz. macierzą przekształcenia T w bazach B, C.