ODLEGŁOŚĆ punktu $P\in\mathbb{R}^3$ od punktu, prostej, płaszczyzny

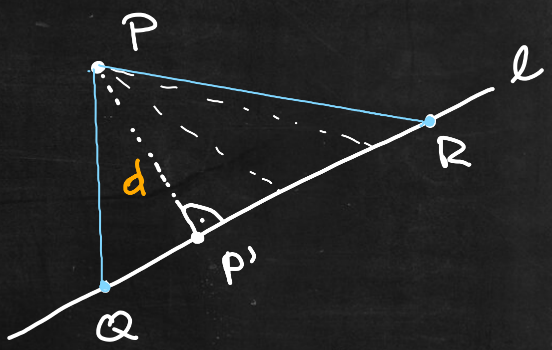
(O1) odległość punktu $P$ od punktu $Q$, ozn. $d(P,Q)$, to długość wektora $\overline{PQ}$


$$d(P,Q)=|\overline{PQ}|$$

(O2) odległość punktu $P$ od prostej $l$, $d(P,l)$ to odległość $d(P,P')$

tj. $d(P,l)=d(P,P')$

gdzie $P'\in l$ t.że $\overline{PP'}\perp l$




$d=?$

Niech $Q,R\in l$, $Q\neq R$

$$\left.\begin{array}{l} P_{\Delta PQR}=\frac{1}{2}|\overline{QR}|\cdot d \\ P_{\Delta PQR}=\frac{1}{2}|\overline{QP}\times\overline{QR}| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$d=\frac{|\overline{QP}\times\overline{QR}|}{|\overline{QR}|}$$

albo

wykorzystać (R1), znaleźć $P'$ i wtedy

$d=|\overline{PP'}|$.

Ex.

Znaleźć odległość punktu $P=(4,-2,1)$ od prostej $l\colon (x,y,z)=(-1,3,2)+t(-3,5,3),\ t\in\mathbb{R}$.

Niech $Q=(-1,3,2)$, $R=(-4,8,5)\in l$.

$\overline{QP}=(5,-5,-1)$, $\overline{QR}=(-3,5,3)$

$$\overline{QP}\times\overline{QR}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -5 & -1 \\ -3 & 5 & 3 \end{vmatrix}=(-10,-12,10)=2(-5,-6,5)$$

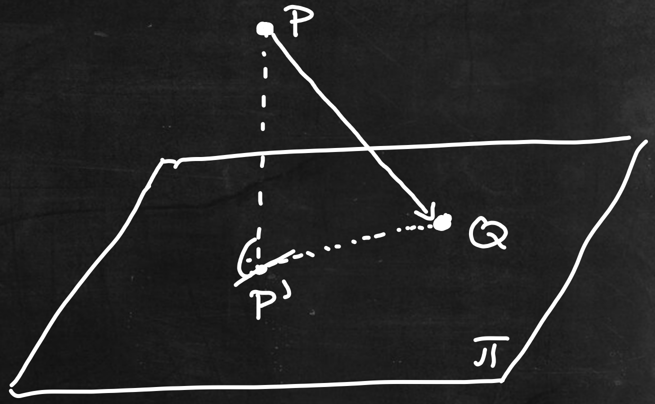
$$d=\frac{|\overline{QP}\times\overline{QR}|}{|\overline{QR}|}$$

$$|\overline{QP}\times\overline{QR}|=|2(-5,-6,5)|=2\sqrt{25+36+25}=2\sqrt{86}$$

$$|\overline{QR}| = |(-3,5,3)| = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

$$d = \frac{2\sqrt{86}}{\sqrt{43}} = 2\sqrt{2}.$$

(O3) odległość punktu $P$ od płaszczyzny $\pi$, $d(P,\pi)$, to dł. wektora $\overline{PP'}$ ($\overline{P'P}$), gdzie $P'$ – rzut prostokątny na $\pi$




I sp. wykorzystujemy (R2) i wtedy $d(P,\pi) = d(P,P')$

II wybieramy $Q \in \pi$ stąd wektor $\overline{PQ}$

znajdujemy rzut $\overline{PQ}$ na $\overline{n}$, gdzie $\overline{n}$ – wekt. norm. pł. $\pi$ i wtedy

$$d(P,\pi) = \frac{|\overline{PQ} \circ \overline{n}|}{|\overline{n}|} \leftarrow$$

jeśli $P = (x_0, y_0, z_0)$, $Q = (x,y,z) \in \pi$ $\qquad a,b \in \mathbb{R}$, $|a-b| = |b-a|$

$\pi: \; Ax + By + Cz + D = 0$

$\overline{PQ} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $\overline{n} = (A,B,C)$

$$d(P,\pi) = \frac{|A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|\overbrace{Ax+By+Cz}^{-D} - Ax_0 - By_0 - Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - \overbrace{(Ax+By+Cz)}^{-D}|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ex

$\pi: \; 2x + 4y + 5z - 9 = 0$, $P = (7,1,4)$, $d(P,\pi) = ?$

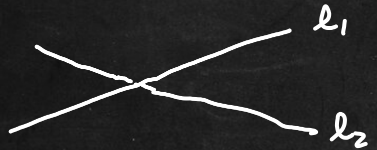
$\overline{n} = (2,4,5)$

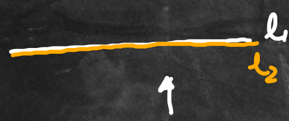
$$d(P,\pi) = \frac{29}{\sqrt{4+16+25}} = \frac{29}{\sqrt{45}}$$

ODLEGŁOŚCI między prostymi $\quad d(l_1,l_2)$

W $\mathbb{R}^3$ dane są dwie proste $l_1$ i $l_2$. Co to jest odległość między nimi i jak ją obliczyć.

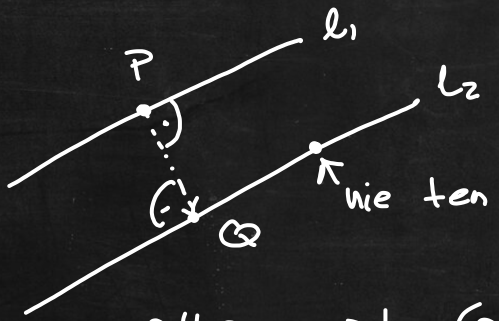
- jeśli proste przecinają się lub są równoległe i pokrywają się




$$d(l_1,l_2)=0$$

- jeśli proste nie przecinają się
  - ✱ i są równoległe, i nie pokrywają się




$d(l_1,l_2) = d(P,Q)$, gdzie

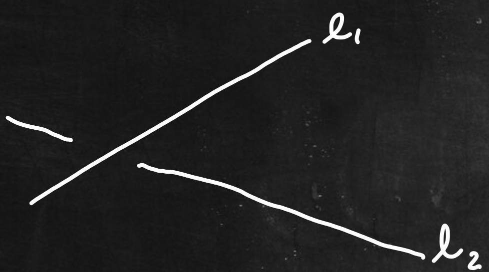
$P \in l_1$, $Q \in l_2$ i

$\overline{PQ} \perp l_1 \quad (\Rightarrow \overline{PQ} \perp l_2)$

albo patrz (O2) – wybrać punkt P z $l_1$ i obl. $d(P,l_1)$

albo inaczej :) $\qquad d(P,l_2) = d(l_1,l_2)$

  - ✱ i nie są równoległe



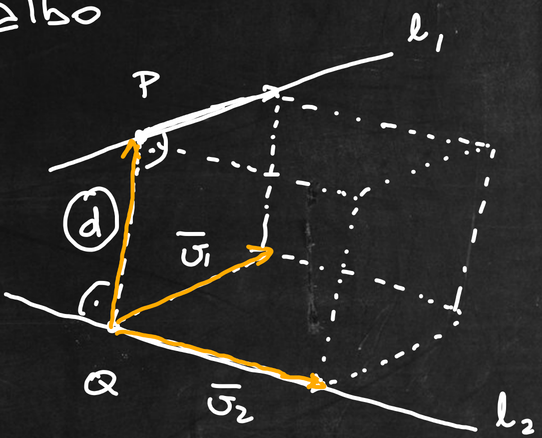

Można znaleźć płaszcz. $\pi_1, \pi_2$

t.że $l_1 \in \pi_1$ i $l_2 \in \pi_2$ t.że $\pi_1 \parallel \pi_2$

Biorąc $P \in \pi_2$ mamy

$$d(l_1,l_2) = d(P,\pi_1)$$

albo




$P \in l_1$, $Q \in l_2$ $\quad \overline{QP}$

$\bar{v}_1, \bar{v}_2$ – wekt. kier. $l_1, l_2$

$$\left.\begin{aligned} V &= |(\overline{QP}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)| \\ V &= P_{podstawy} \cdot d \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$P_{podstawy} = |\bar{v}_1 \times \bar{v}_2|$, $d$ → wysokość

$$d(l_1,l_2) = \frac{|(\overline{QP}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)|}{|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2|}$$

Dodatek na str. 8

# PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE

df.
Niech $V, W$ – p-nie liniowe nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$.
Odwzorowanie $T: V \to W$ naz. przekształceniem liniowym, jeśli

$1^\circ$ $\forall_{u,v\in V}$ $T(u+v) = T(u) + T(v)$ (addytywność)

$2^\circ$ $\forall_{u\in V}$ $\forall_{\alpha\in\mathbb{K}}$ $T(\alpha u) = \alpha \cdot T(u)$ (jednorodność)

Krótko

$$\forall_{u,v\in V} \ \forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}} \quad T(\alpha u+\beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

Piszemy $Tu$ zamiast $T(u)$ $\quad$ ! $\underbrace{Tu}+v \neq T(u+v)$

Ex.
(a) Przekształcenie zerowe jest przekszt. lin.

$T: V \to W$

$T(v) = \bar{0} \quad (=\bar{0}_W) \qquad \forall v\in V$

(b) Przekształc. identycznościowe (dla $W=V$)

$T: V \to V$

$T(v) = v \qquad \forall v \in V$ $\qquad$ Często ozn. go $id$, $I_V$, $I$.

(c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y,z) = (x+y, 3z)$ $\qquad$ liniowe?

Niech $u=(x,y,z)$, $v=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$

$$\underline{T(u+v)} = T(x+x', y+y', z+z') = (x+x'+y+y', 3(z+z'))$$
$$= (x+y+x'+y', 3z+3z') = (x+y, 3z) + (x'+y', 3z')$$
$$= \underline{T(u) + T(v)}$$

Ponadto niech $\alpha\in\mathbb{R}$

$$T(\alpha u) = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x + \alpha y, 3\alpha z) = (\alpha(x+y), \alpha(3z)) =$$
$$= \alpha(x+y, 3z) = \alpha T(u)$$

Zatem $T$ jest przekszt. liniowym.

(d) analiza $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

np. $T(u) = 5u + 3$

dla $u = 2$, $\alpha = 3$

$T(\alpha u) = T(3 \cdot 2) = T(6) = 5 \cdot 6 + 3 = 33$

$\alpha T(u) = 3 \cdot T(2) = 3 \cdot (5 \cdot 2 + 3) = 39$

$\neg \left( \forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \forall_{u \in V \atop \overset{\shortparallel}{\mathbb{R}}} T(\alpha u) = \alpha T(u) \right)$

$T$ nie jest liniowe

jeśli $b = 0$ to $T(u) = au$ jest przekszt. lin.

(e) $T: \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$ $\quad V = \mathbb{R}_n[x]$, $W = \mathbb{R}_{n-1}[x]$

$T(f) = f'$

$T(f + g) = (f + g)' = f' + g' = T(f) + T(g)$ dla dow. $f, g \in \mathbb{R}_n[x]$

$T(\alpha f) = (\alpha f)' = \alpha \cdot f' = \alpha T(f)$ dla dow. $\alpha \in \mathbb{R}$ i $f \in \mathbb{R}_n[x]$

$T$ jest przekszt. lin.

(f) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_1[x]$

$T((a, b)) = ax + b$

Niech $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$T((a, b) + (c, d)) = T((a + c, b + d)) = (a + c)x + b + d = \underline{a}x + cx + \underline{b} + d$

$= ax + b + cx + d = T((a, b)) + T((c, d))$

$T(\alpha \cdot (a, b)) = T((\alpha a, \alpha b)) = (\alpha a)x + \alpha b = \alpha(ax + b) = \alpha T((a, b))$

$T$ jest przekszt. lin.

(g) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

lub

$T(v) = A \cdot v$, gdzie $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

jest liniowe, bo dla dow. $v, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

$T(v_1 + v_2) = A \cdot (v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = Tv_1 + Tv_2$

$T(\alpha v) = A \cdot (\alpha v) = \alpha \cdot (Av) = \alpha T(v)$.

i ogólnie

(h) $T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$$T(v) \stackrel{df}{=} A\cdot v, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$T(v) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

tj. $\quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad$ dla $\quad i = 1, \dots, m$

(i) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x, y^2)$

$u = (x,y), \quad v = (z,t) \in \mathbb{R}^2$

$T(u+v) = T(x+z, y+t) = (x+z, (y+t)^2)$

$T(u) + T(v) = (x, y^2) + (z, t^2) = (x+z, y^2+t^2)$

A! dla $u = (x,y) = (1,0)$, $v = (z,t) = (5,2)$ ten warunek $(T(u+v) = Tu + Tv)$ zachodzi, bo $(0+2)^2 = 0^2 + 2^2$

Ale nie ozn. to, że $T$ jest liniowe!!!

bo np. $u = (2,2)$, $v = (0,1)$

$T(u+v) = T(2,3) = (2,9)$

$T(u) + T(v) = (2,4) + (0,1) = (2,5) \qquad (2,9) \neq (2,5)$

$T$ nie jest przekszt. lin.

WŁASNOŚCI PRZEKSZT. LIN.

Jeśli $T: V \to W$ jest przekszt. lin., to

① $T(\bar{0}) = \bar{0} \qquad (T(\bar{0}_V) = \bar{0}_W)$

② $T(-v) = -T(v)$

$$\left.\begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}\right\} \Rightarrow T(u-v) = T(u) - T(v)$$

D-d

Ad. 1

$$T(\bar{0}_V) = T(\bar{0}_V + \bar{0}_V) = T(\bar{0}_V) + T(\bar{0}_V) = 2T(\bar{0}_V)$$

dodajemy obustronnie $-T(\bar{0}_V)$

$$\bar{0}_W = T(\bar{0}_V).$$

Ad. 2

$$T(-v) = T(-1 \cdot v) = -1 \cdot T(v) = -T(v) \quad \blacksquare$$

df

jeśli $T: V \to V$ jest przekszt. lin., to $T$ naz. operatorem liniowym.

Zbiór wszystkich przekształceń lin. z $V$ w $W$ ozn. $\mathcal{L}(V, W)$. $(\mathrm{Hom}(V, W))$

df.

Jądrem przekształcenia lin. $T: V \to W$ naz. zbiór

$$\ker T = \{ v \in V : T(v) = \bar{0} \}$$

$\leftarrow \bar{0}_W$

$\ker(T)$

TW.

Jądro przekszt. lin. $T: V \to W$ jest podprzestrzenią liniową p-ni $V$. $(\ker T < V)$.

D-d

- $\ker T \neq \emptyset$, bo $\bar{0} \in \ker T$
- Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, v \in \ker T$

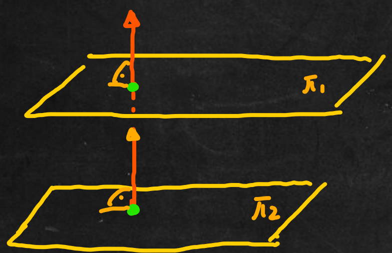
$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv = \alpha \cdot \bar{0} + \beta \cdot \bar{0} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}.$$

Zatem $\alpha u + \beta v \in \ker T$ $\blacksquare$

Ex. za tydzień

DODATEK (nieobowiązkowy)

Odległość między dwiema płaszczyznami równoległymi




$\pi_1$: $Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $A^2+B^2+C^2>0$

$\pi_2$: $A'x + B'y + C'z + E = 0$, $A'^2+B'^2+C'^2>0$

Ponieważ płaszczyzny są równoległe, to ich wektory normalne $\bar{n}_1$ i $\bar{n}_2$ są proporcjonalne tj. $\bar{n}_1 = \alpha \cdot \bar{n}_2$ Zatem można przekształcić r-nie $\pi_2$ aby miała taki wektor normalny jak $\pi_1$, więc

$$\pi_2: \; Ax + By + Cz + D_2 = 0.$$

Wtedy odległość między $\pi_1$ i $\pi_2$ to

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Kąt między płaszczyznami i prostymi.

Kąt między dwiema prostymi to kąt ostry (lub prosty, gdy proste są prostopadłe) utworzony przez wektory kierunkowe tych prostych.


to kąt nieskierowany

! $\alpha$ - kąt ostry, więc mniejszy z dwóch kątów pomiędzy ich wektorami kierunkowymi (albo prosty)

Kąt między dwiema płaszczyznami to kąt ostry (lub prosty, gdy płaszczyzny są prostopadłe) utworzony przez wektory normalne tych płaszczyzn.