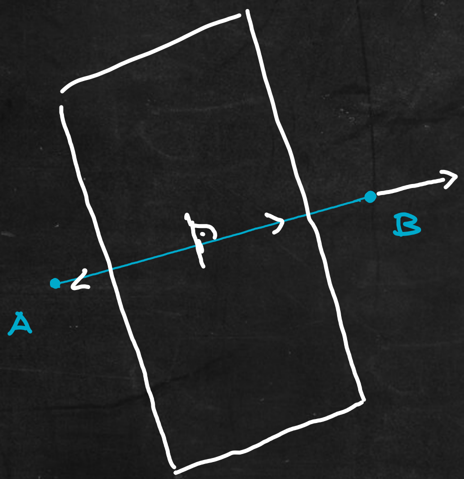
(c) Napisać równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny $\pi$ przechodzącej przez środek odcinka $AB$ i prostopadłej do tego odcinka, jeśli $A=(3,2,-1)$, $B=(5,0,7)$.




środek odcinka AB to

$$\dot{S}=\left(\frac{3+5}{2},\frac{2+0}{2},\frac{-1+7}{2}\right)=(4,1,3)$$

$\overline{AB}$ – wektor normalny płaszcz.

$\overline{AB}=(2,-2,8)$

Niech wektorem normalnym $\bar n$ będzie

$\bar n=\frac{1}{2}\overline{AB}=(1,-1,4)$

r-nie ogólne płaszcz.

$\pi:\quad x-y+4z+D=0$, ale $\dot{S}\in\pi$, więc $D=-15$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 4-1+12$

$\pi:\quad x-y+4z-15=0$

Szukamy $\bar u,\bar v$ t.że $\bar u,\bar v\perp\bar n$, zatem $\bar u\circ\bar n=0$ i $\bar v\circ\bar n=0$

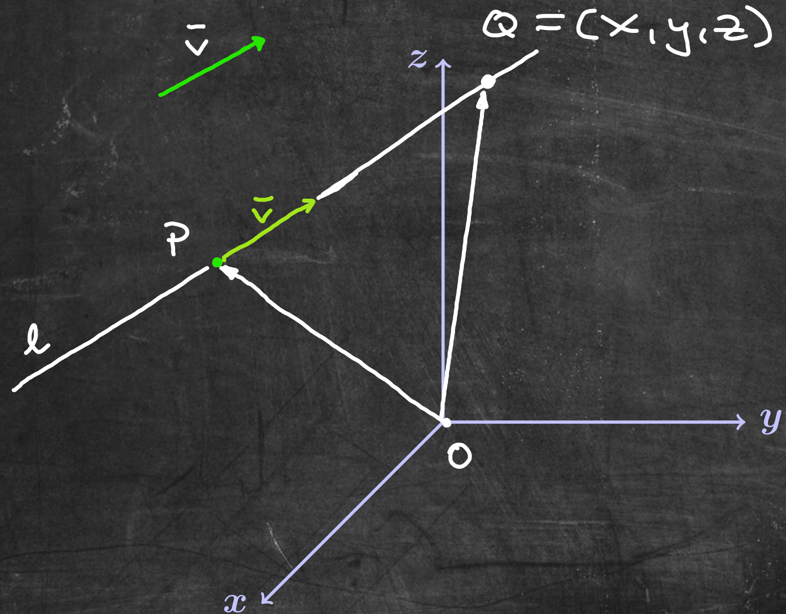
$(a,b,c)\circ(1,-1,4)=0$, $\quad a-b+4c=0$; dla $b=0$ $a=-4c$ i $\bar u=(-4,0,1)$; dla $c=0$ $a=b$ i $\bar v=(1,1,0)$.

r-nie parametr. $\quad (x,y,z)=(4,1,3)+t(-4,0,1)+s(1,1,0)$, $\quad t,s\in\mathbb{R}$.

## PROSTE W $\mathbb{R}^3$

Niech dane będą: $P=(x_0,y_0,z_0)$ punkt płaszczyzny $\mathbb{R}^3$

$$\bar v=(x_v,y_v,z_v)\in\mathbb{R}^3,\quad \bar v\neq\bar 0$$




kiedy $Q\in l$?

$\overline{OP}+t\bar v=\overline{OQ}$, $\quad t\in\mathbb{R}$

Stąd

**RÓWNANIE PARAMETRYCZNE** prostej $l$ przechodzącej przez punkt $P$ i równoległej do niezerowego wekt. $\bar{v}$:

$$l: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(x_v, y_v, z_v), \quad t \in \mathbb{R}.$$

równoważnie

$$l: \begin{cases} x = x_0 + t x_v \\ y = y_0 + t y_v \\ z = z_0 + t z_v \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wektor $\bar{v}$ naz. **wektorem kierunkowym** prostej $l$.

Obliczamy z każdego z r-ań param. $t$ i porównujemy

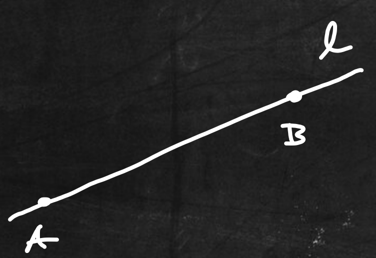
$$l: \quad \frac{x - x_0}{x_v} = \frac{y - y_0}{y_v} = \frac{z - z_0}{z_v}.$$

W ten sposób otrzym. **RÓWNANIE KIERUNKOWE** prostej $l$ przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze kierunkowym $\bar{v} = (x_v, y_v, z_v)$.

niezerowym

Ex.

Wyznaczyć r-nia parametryczne i kierunkowe prostej $l$ przechodzącej przez punkty $A = (1, 1, 2)$ i $B = (2, 1, 0)$.




Wektor kierunkowy prostej $l$ to:

$$\bar{v} = \overline{AB} = (1, 0, -2)$$

r-nie parametryczne prostej $l$

(bierzemy dowolny punkt z prostej, np. $A$)

$$l: \begin{cases} x = 1 + t \cdot 1 \\ y = 1 + t \cdot 0 \\ z = 2 + t \cdot 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \iff l: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 2 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

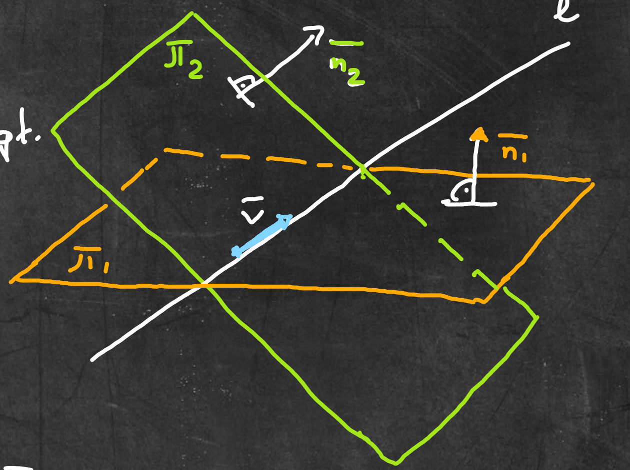
r-nie kierunkowe prostej $l$ to:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{-2}.$$

! W tym r-niu może występować 0 w mianowniku, a to ozn., że jeśli np. $y_v=0$, to prosta leży w płaszczyźnie $y-y_0=0$.

R-NIE KRAWĘDZIOWE

część wspólna dwóch płaszczyzn nierównoległ.




$$l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & \leftarrow \pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & \leftarrow \pi_2 \end{cases}$$

wektor kierunkowy prostej $l$, to

$$\bar v=\bar n_1\times\bar n_2,$$

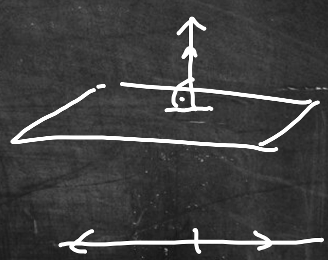
$\bar n_1, \bar n_2$ - wekt. normalne pł. $\pi_1$ i $\pi_2$.

Ex.

Znaleźć równania parametryczne i kierunkowe prostej $l$ zadanej w postaci krawędziowej

$$l:\begin{cases} x+3y+z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}.$$

I sposób; $\bar v$ - kierunk. prostej $l$



$$\bar v=(1,3,1)\times(2,-1,-1)=\begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(-2,3,-7)$$

Niech $P$ - dowolny punkt z $l$ tzn. $P\in\pi_1\cap\pi_2$

Niech $y=0$

$$\begin{cases} x+z=5 \\ 2x-z=1 \end{cases}, \quad \text{stąd} \quad x=2,\ z=3$$

$P=(2,0,3)\in \ell$

r-nie kier. $\ell: \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-3}{-7}$,

r-nie param. $\ell: (x,y,z)=(2,0,3)+t(-2,3,-7)$, $t\in\mathbb{R}$.

II sp.

1. r-nie + 2. r-nie : $3x+2y=6 \Rightarrow x=2-\frac{2}{3}y$

1. r-nie + 3·2. r-nie : $7x-2z=8 \Rightarrow x=\frac{8}{7}+\frac{2}{7}z$

$$x=2-\frac{2}{3}y=\frac{8}{7}+\frac{2}{7}z$$

$$x=\frac{6-2y}{3}=\frac{8+2z}{7} \quad /\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+4}{-7}$$ ← r-nie kierunkowe (stąd łatwo parametr.)

III sp.

$\ell$ to układ r-ań lin. $AX=B$

rozw. metodą eliminacji Gaussa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{na wierszach}]{OE} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 0 & 2 \\ 0 & 7/3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$ odczyt. rozw.

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{parametr} \to t \end{array}$$

stąd r-nie parametryczne:

$$\ell: \begin{cases} x=2-\frac{2}{3}t \\ y=t \\ z=3-\frac{7}{3}t, \end{cases} t\in\mathbb{R} \qquad \bar{v}=\left(-\frac{2}{3},1,-\frac{7}{3}\right)=\frac{1}{3}\overbrace{(-2,3,-7)}$$

nadają ten sam kierunek prostej $\ell$ (są LZ) :)

! Zapis prostej w postaci parametrycznej (i kierunkowej też) jest niejednoznaczny. Tu mamy:

$$\ell: \frac{x-2}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{-7} \quad \text{i} \quad \ell: \frac{x}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+4}{-7}$$

$$(\Delta)\ \ \ell: \begin{cases} x=2-2t \\ y=3t \\ z=3-7t, \end{cases} t\in\mathbb{R} \qquad \text{i} \qquad \ell: \begin{cases} x=-2s \\ y=3+3s \\ z=-4-7s, \end{cases} s\in\mathbb{R}\ \ (@)$$

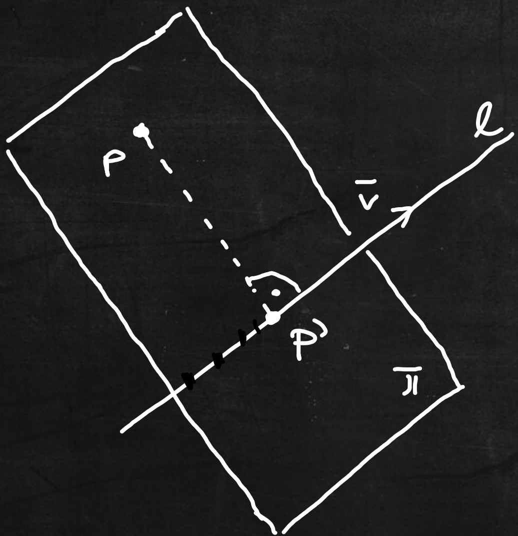
Biorąc pewne $t\in\mathbb{R}$ [np. $t=3$] otrzymujemy konkretny punkt wykorzystując $(\Delta)$ [$(-4,9,-18)$]. Istnieje $s\in\mathbb{R}$ t. że ten punkt uzyskamy z (@) [dla $s=2$ mamy $(-4,9,-18)$].

RZUTY

Rozważamy rzuty ortogonalne = prostokątne

(R1) rzut punktu $P$ na prostą $l$:

dana jest prosta $l$ i punkt $P \notin l$;




Szukamy $P' \in l$ t.że $\overline{PP'} \perp l$.

Znajdujemy r-nie płaszczyzny przechodzącej przez $P$ o wektorze normalnym $\bar{n} = \bar{v}$ (wektor kierunkowy prostej $l$).

Wtedy

$P' = \pi \cap l$.

albo wg pomysłu p. Kasi → str. 7

Ex.

$P = (4,-2,1)$, $l = \frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-2}{3}$ } Znaleźć rzut $P$ na $l$.

$\rightarrow \bar{n} = \bar{v} = (-3,5,3)$

$\pi: \quad -3x+5y+3z+D=0$

$P \in \pi: \quad -12-10+3+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=19$

$\pi: \quad -3x+5y+3z+19=0$

(*) $l: \quad (x,y,z) = (-1,3,2) + t(-3,5,3), \quad t \in \mathbb{R}$ ←

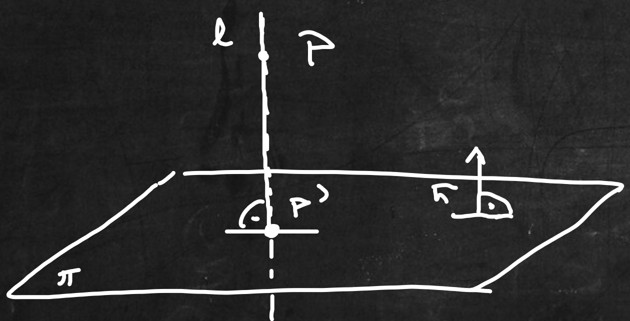
$-3(-1-3t)+5(3+5t)+3(2+3t)+19=0$

$43t = -43 \Rightarrow \underline{t=-1}$

$P' \overset{z\,(*)}{=} (-1,3,2)-(-3,5,3) = (2,-2,-1)$.

(R2) rzut prostokątny punktu $P$ na płaszczyznę:

dana jest pł. $\pi$ i punkt $P \notin \pi$




Znaleźć rzut $P$ na $\pi$ ozn. znalezienie $P' \in \pi$ t.że $\overline{PP'} \perp \pi$

Znajdujemy r-nie prostej $\ell$ przechodzącej przez $P$, której wektor kierunkowy $\bar{v} = \bar{n}$ (wekt. normalny płaszczyzny $\pi$). Wtedy $P' = \pi \cap \ell$.

Ex.

$P = (1,2,3)$, $\pi: 2x + y + 2z - 1 = 0$ } Znaleźć rzut $P$ na $\pi$.

$\bar{v} = \bar{n} = (2,1,2)$, więc

$\to$ $\ell: (x,y,z) = (1,2,3) + t(2,1,2)$, $t \in \mathbb{R}$

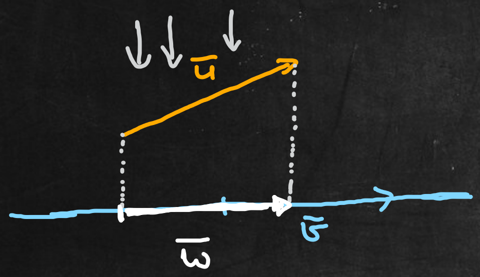
$P' = \pi \cap \ell$

$$2(1+2t) + 2 + t + 2(3+2t) - 1 = 0$$

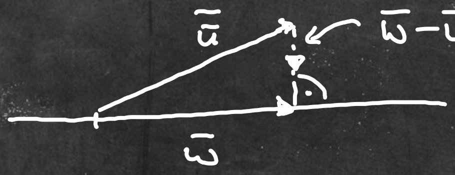
$$9t = -9, \quad t = -1$$

$$P' = (1,2,3) - (2,1,2) = (-1,1,1).$$

(R3) rzut prostokątny wektora $\bar{u}$ na wektor $\bar{v}$




$\bar{w}$ rzut wektora




$\bar{w} = \alpha \bar{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\bar{w} \perp \bar{w} - \bar{u} \Leftrightarrow (\bar{w} - \bar{u}) \circ \bar{w} = 0$$

$$\bar{w} \circ \bar{w} - \bar{u} \circ \bar{w} = 0$$

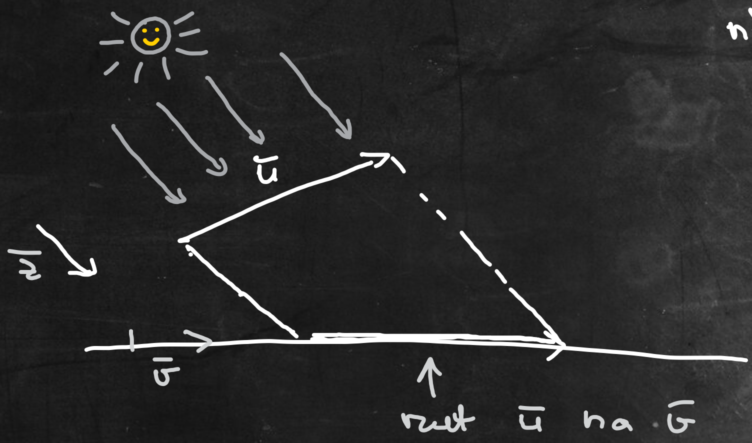
$$\alpha \bar{v} \circ \alpha \bar{v} - \bar{u} \circ \alpha \bar{v} = 0$$

$$\alpha = \frac{\bar{u} \circ \bar{v}}{\bar{v} \circ \bar{v}} = \frac{\bar{u} \circ \bar{v}}{|\bar{v}|^2}$$

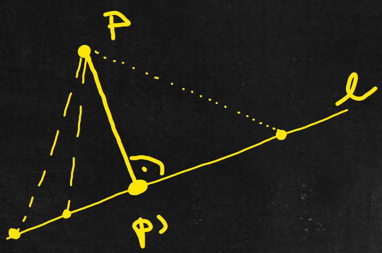
stąd
$$\bar{w} = \frac{\bar{u} \circ \bar{v}}{\bar{v} \circ \bar{v}} \cdot \bar{v}$$

Można rozważać rzuty ukośne tj.
rzuty w kierunku pewnego wektora $\bar{z}$
niekoniecznie ortogonalnego do $\bar{v}$

ten wyżej




wg. pomysłu p. Kasi (z dodanym opisem i rysunkiem)




$P' \in l$, więc $P'$ spełnia równanie $l$ – tj. istnieje $t \in \mathbb{R}$ t. że

$\overline{PP'} \perp l \Leftrightarrow \overline{PP'} \perp \bar{v}$, gdzie $\bar{v}$ to wektor kierunk. pr. $l$

$$\overline{PP'} = (-1-3t-4,\ 3+5t+2,\ 2+3t-1) = (-3t-5,\ 5t+5,\ 3t+1)$$

$$\overline{PP'} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \overline{PP'} \circ \bar{n} = 0 \Leftrightarrow (-3t-5,\ 5t+5,\ 3t+1) \circ (-3,5,3) = 0$$

$* \bar{0}$

$$9t + 15 + 25t + 25 + 9t + 3 = 0$$

$$43t = -43$$

$$t = -1$$

Znalezione $t$ podstawiamy do r-nia parametrycznego prostej (patrz str. 5):

$$P' = (-1,3,2) - 1(-3,5,3) = (2,-2,-1).$$