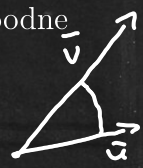
GEOMETRIA ANALITYCZNA – cd.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)\colon x,y,z\in\mathbb{R}\}$$ – interpretacja – punkty, wektory zaczepione, wektory swobodne



$\bar u = (x_u, y_u, z_u)$, $\bar v = (x_v, y_v, z_v) \in \mathbb{R}^3$

iloczyn skalarny $\bar u$ i $\bar v$: $\bar u \circ \bar v = |\bar u| \cdot |\bar v| \cdot \cos\sphericalangle(\bar u, \bar v)$; $\quad \bar u \circ \bar v = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v$

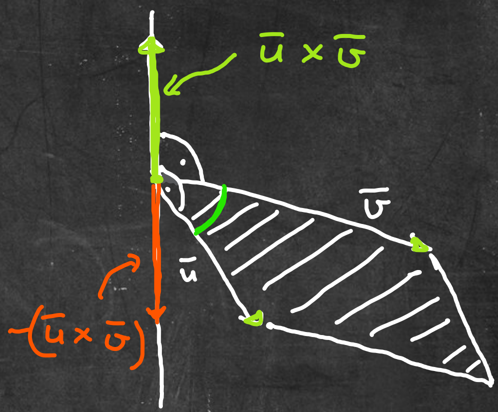
iloczyn wektorowy $\bar u$ i $\bar v$: $\bar u \times \bar v = \bar w = (y_u z_v - y_v z_u,\ x_v z_u - x_u z_v,\ x_u y_v - x_v y_u)$

$$\bar w = \bar u \times \bar v = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = (y_u z_v - y_v z_u,\ x_v z_u - x_u z_v,\ x_u y_v - x_v y_u)$$

INNE OKREŚLENIE ILOCZYNU WEKTOROWEGO (definicja geometryczna)
Niech $\bar u, \ \bar v \in \mathbb{R}^3$, $\bar u \nparallel \bar v$. Iloczynem wektorowym wektorów $\bar u$ i $\bar v$ nazywamy wektor $\bar w$ taki, że

1. $\bar w \perp \bar v \ \wedge \ \bar w \perp \bar u$
2. $|\bar w| = |\bar u| \cdot |\bar v| \cdot \sin\sphericalangle(\bar u, \bar v)$

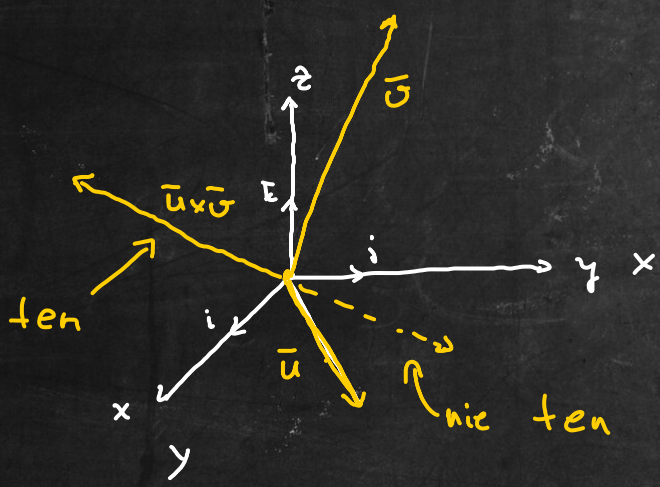
   długość $\bar u \times \bar v$ = pole równoległoboku rozpiętego na $\bar u$ i $\bar v$



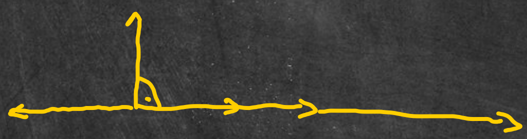
3. układ wektorów $\bar u, \bar v, \bar u \times \bar v = \bar w$ ma orientację zgodną z orientacją układu współrzędnych

$\bar i, \bar j, \bar k$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$$



$\bar u \times \bar v = -(\bar v \times \bar u)$



ILOCZYN MIESZANY

df. Niech $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Iloczynem uporządkowanej trójki wektorów naz. liczbę $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ określoną wzorem

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \circ \bar{w}.$$

Praktyczny sposób: jeśli $\bar{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\bar{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\bar{w} = (x_w, y_w, z_w)$ to

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}.$$

WŁASNOŚCI ILOCZYNU MIESZANEGO

Dla $\bar{t}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi

1. $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = -(\bar{v}, \bar{u}, \bar{w}) = (\bar{v}, \bar{w}, \bar{u})$;
2. $\alpha(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (\alpha\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (\bar{u}, \alpha\bar{v}, \bar{w}) = (\bar{u}, \bar{v}, \alpha\bar{w})$;
3. $(\bar{t} + \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (\bar{t}, \bar{v}, \bar{w}) + (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$.

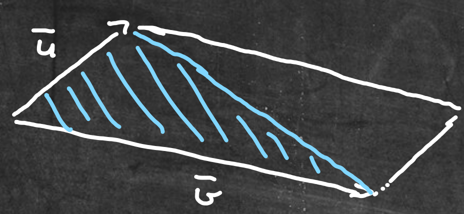
ZASTOSOWANIE ILOCZYNÓW WEKTOROWEGO i MIESZANEGO

Niech $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Wtedy

* **POLE RÓWNOLEGŁOBOKU** rozpiętego przez $\bar{u}, \bar{v}$ wyraża się wzorem

$$P = |\bar{u} \times \bar{v}|$$

↑długość



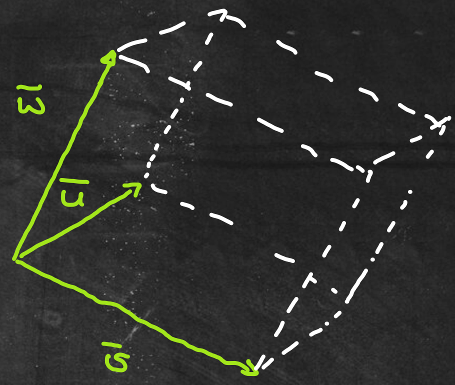
* **POLE TRÓJKĄTA** rozpiętego przez $\bar{u}$ i $\bar{v}$ to

$$P = \frac{1}{2} |\bar{u} \times \bar{v}|.$$

* **OBJĘTOŚĆ RÓWNOLEGŁOŚCIANU** rozpiętego przez $\bar{u}$, $\bar{v}$ i $\bar{w}$ wyraża się wzorem

$$\bar{V} = |(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})|$$

wartość bezwzgl.



! jeśli $V = 0$, to równoległościan 'spłaszcza się' – wektory $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ leżą na jednej ~~kartce~~ płaszczyźnie

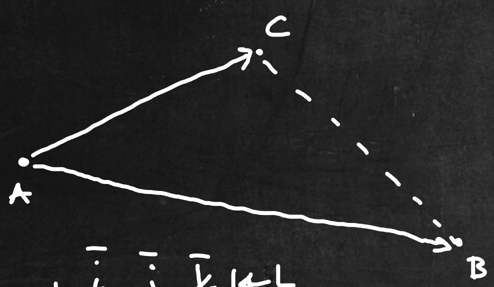
* OBJĘTOŚĆ CZWOROŚCIANU rozpiętego przez w-ry $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ wyraża się wzorem

$$\bar{V} = \frac{1}{6} V_{\text{równoległościanu}} = \frac{1}{6} |(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})|$$

$$V = \frac{1}{3} \underbrace{P_p}_{\frac{1}{2}|\bar{u} \times \bar{v}|} \cdot h \quad h \to \bar{w}$$

Ex.

(a) Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, -1, 0)$, $B = (2, 2, 0)$, $C = (1, 1, 1)$.



$$\bar{AB} = (2-1, 2-(-1), 0-0) = (1, 3, 0)$$

$$\bar{AC} = (0, 2, 1)$$

$$\bar{AB} \times \bar{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow L = (3, \underbrace{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{-1}, 2)$$

$$P_\Delta = \frac{1}{2} |\bar{AB} \times \bar{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14}$$

(b) Obliczyć objętość równoległościanu i czworościanu rozpiętego na wektorach

$$\bar{u} = (-1, -1, 0),\ \bar{v} = (1, 0, 2),\ \bar{w} = (3, 1, 1).$$

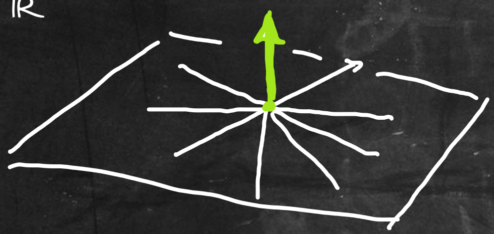
czworościan

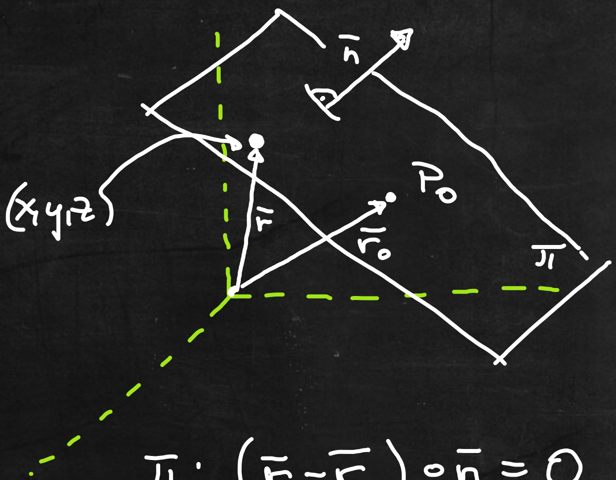
$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{w_3 \mapsto w_3 + w_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$V_{\text{równ.}} = |(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})| = |-3| = 3$$

$$V_{\text{czw.}} = \frac{1}{6} |(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})| = \frac{1}{2}.$$

PŁASZCZYZNY W $\mathbb{R}^3$





RÓWNANIE NORMALNE płaszczyzny prostopadłej do niezerowego wektora $\bar{n}=(A,B,C)$

$A^2+B^2+C^2>0$

i przechodzącej przez punkt $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ ma postać

$$\pi:\ (\bar{r}-\bar{r}_0)\circ\bar{n}=0$$

$$\pi:\ (x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)\circ(A,B,C)=0;\quad \pi:\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

wektor $\bar{n}$ naz. wektorem NORMALNYM

RÓWNANIE OGÓLNE ($\bar{n}$, $P_0\in\pi$)

$$\pi:\ Ax+By+Cz+D=0.$$

Ex

R-nia płaszcz. w $\mathbb{R}^3$ to np. $2x+3y-2022z+13=0$,

$x-y=0$, $y-3=0$.

R-niem płaszczyzny nie jest $x^2-y^2+2z=0$, $x^2-1=0$.

RÓWNANIE PARAMETRYCZNE płaszczyzny przechodz. przez punkt $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ i równoległej do dwóch niewspółliniowych (tj. LN) wektorów $\bar{u}=(a_u,b_u,c_u)$, $\bar{v}=(a_v,b_v,c_v)$ ma postać

$$\begin{cases} x = x_0 + a_u\cdot s + a_v\cdot t\\ y = y_0 + b_u\cdot s + b_v\cdot t\\ z = z_0 + c_u\cdot s + c_v\cdot t, \end{cases}\qquad s,t\in\mathbb{R}$$

Inny zapis

$$(x,y,z)=\overbrace{(x_0,y_0,z_0)}^{\overline{OP_0}}+\bar{u}\cdot s+\bar{v}\cdot t,\quad s,t\in\mathbb{R}.$$

Aby jednoznacznie wyznaczyć płaszczyznę wystarczy znać:

- trzy niewspółliniowe punkty na niej leżące

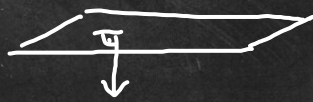
lub

- dwa nierównoległe wektory, które są równoległe do tej płaszczyzny **i** jeden punkt płaszczyzny

LN

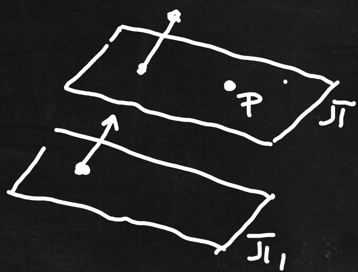
lub

- jeden punkt płaszczyzny i dowolny wektor prostopadły do tej płaszczyzny.



Ex.

(a) Wyznaczyć równanie ogólne płaszczyzny π równoległej do płaszczyzny π_1: $\underline{x - 2z + 4} = 0$ przechodzącej przez punkt $P = (1, 3, 5)$.



$\bar{n}$ – wektor normalny π to wektor norm. płaszcz. π_1; $\bar{n} = (1, 0, -2)$

$\pi: \quad 1 \cdot x + 0 \cdot y - 2 \cdot z + D = 0$

$P \in \pi: \quad 1 - 10 + D = 0 \Rightarrow D = 9$

$\underline{\pi: \quad x - 2z + 9 = 0.}$

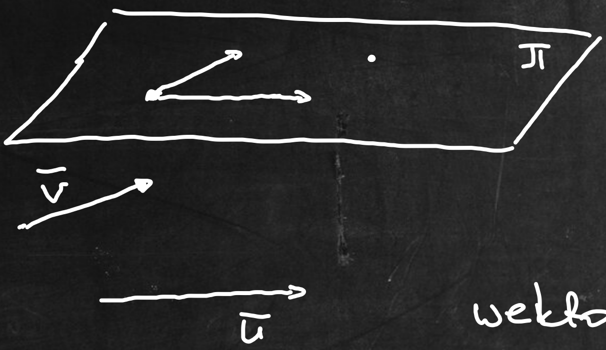
(b) Wyznaczyć równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A = (1, -1, 0)$ i równoległej do wektorów $\bar{u} = (1, 1, 0)$ i $\bar{v} = (1, 0, 2)$.

$(x, y, z) = (1 + s + t, -1 + s, 2t)$

$(x, y, z) = (\underline{1, -1, 0}) + (1, 1, 0)s + (1, 0, 2)t$

$s, t \in \mathbb{R}$

r-nie parametryczne



$$\begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = -1 + s \\ z = 2t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

wektor normalny pł. to $\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v}$ (albo $\bar{v} \times \bar{u}$)

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, -2, -1)$$

$\pi: \quad 2x - 2y - z + D = 0$

$A \in \pi$, więc $\quad 2 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -4$

r-nie ogólne płaszczyzny $\pi: \ 2x - 2y - z - 4 = 0.$

(c) Napisać równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny π przechodzącej przez środek odcinka AB i prostopadłej do tego odcinka, jeśli $A = (3, 2, -1)$, $B = (5, 0, 7)$.

cdn.