Autor: Marcin Sitko

Sprawozdanie – NUM8

Treść Zadania

Zadany jest zbiór punktów zilustrowany poniżej (plik dostępny jest do pobrania na platformie Pegaz), dwie liczby w każdym wierszu to współrzędne x i y). Punkty te modelujemy za pomocą funkcji

$$F(x) = a \cdot sin(2x) + b \cdot sin(3x) + c \cdot cos(5x) + d \cdot exp(-x)$$

(a) Znajdź wartości współczynników a-d które najlepiej opisują te dane w sensie metody najmniejszych kwadratów. Rezultat przedstaw graficznie. Rozwiązując to zadanie nie można korzystać z procedur bibliotecznych służących do aproksymacji. Poza tym, użycie procedur z zakresu algebry liniowej jest dozwolone

(b) Zaproponuj inną funkcję G(x) (która zależy od kilku parametrów) i wygeneruj zbiór punktów w postaci $(x, G(x) + \delta y)$, gdzie δy to losowe zaburzenia. Powtórz dopasowanie z pkt. (a) dla swoich danych i sprawdź, czy udało się odtworzyć wartości ustalonych wcześniej parametrów. Poeksperymentuj zmieniając ilość wygenerowanych punktów i wielkość zaburzeń

Podpunkt A

Do policzenia współczynników a, b, c, d posłużyłem się następującym wzorem:

$$a = (A^T A)^{-1} A^T y$$

a – jest to wektor współczynników

$$a = \begin{pmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \\ \mathrm{d} \end{pmatrix}$$

A – jest to następująca macierz

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \cdots & \varphi_3(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \cdots & \varphi_3(x_n) \end{pmatrix}$$

y - jest to wektor wartości w poszczególnych punktach na osi x

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Gdzie: $\varphi_0 = sin(2x)$ $\varphi_1 = sin(3x)$ $\varphi_2 = cos(5x)$ $\varphi_3 = exp(-x)$

Natomiast: $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$ są to kolejne punkty na osi x

Oczywiście to równanie macierzowe

$$a = (A^T A)^{-1} A^T y$$

Przekształciłem do:

$$(A^T A)a = A^T y$$

I rozwiązałem funkcją biblioteki numerycznej $numpy.linalg.solve$ tak zwykle równanie macierzowe $Ay = b$, jest to dużo szybsza metoda niż odwracanie iloczynu tej macierzy.

Wynikiem tej operacji jest wektor a współczynników a, b, c, d Otrzymany wynik prezentuje się następująco:

$$[0.66767124] -- współczynnik\ a$$

$$[1.07293276] -- współczynnik\ b$$

$$[1.69693956] -- współczynnik\ c$$

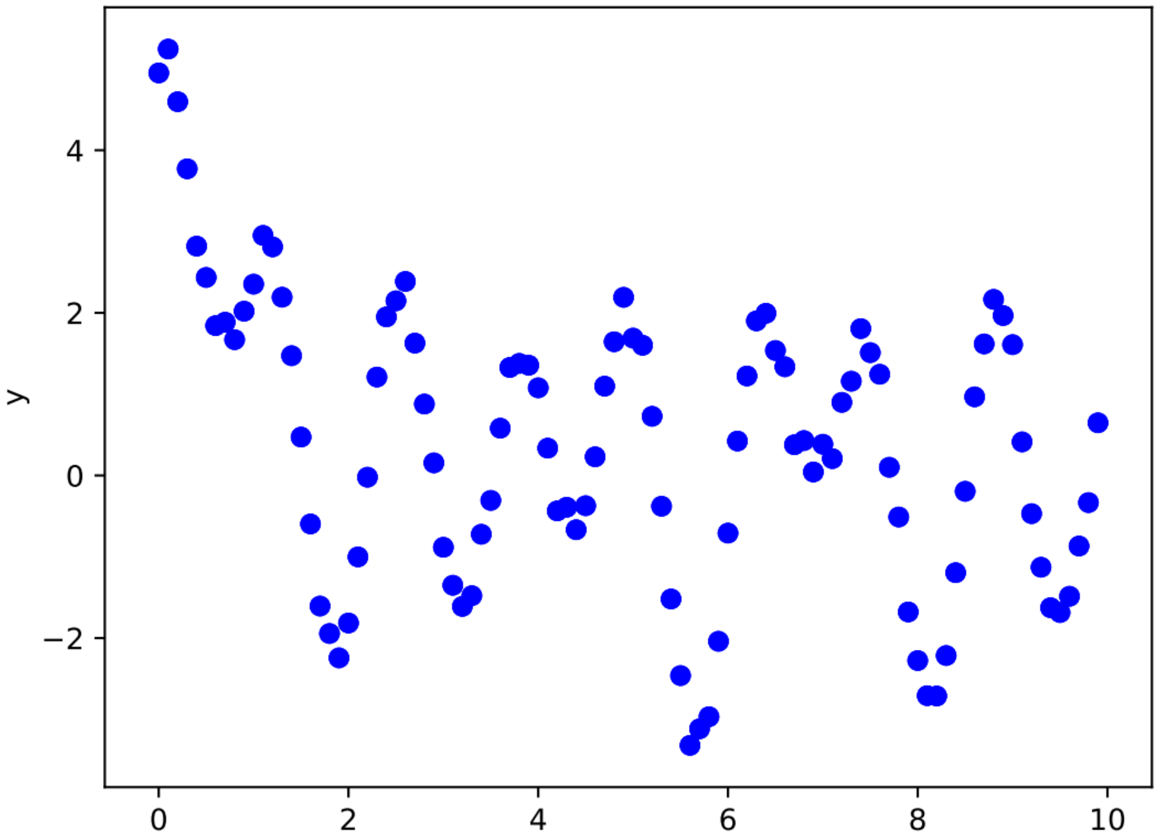
$$[3.40636597] -- współczynnik\ d$$

Dokładne wyniki takie jak wartości $macierzy\ A, wektora\ y, wektora\ x$ można zobaczyć uruchamiając mój program wybierając opcje :„Podpunkt A"

$Ostateczny\ wynik\ podpunktu\ A\ wygląda\ następująco$:

Wykres tej funkcji został wygenerowany na podstawie, podanej wyżej funkcji F oraz punktów podanych na wykresie poniżej

$$Wykres\ Punktów$$



Można zauważyć ze faktycznie wykres funkcji, dosyć dobrze odwzorowuje rozkład punktów

Podpunkt B

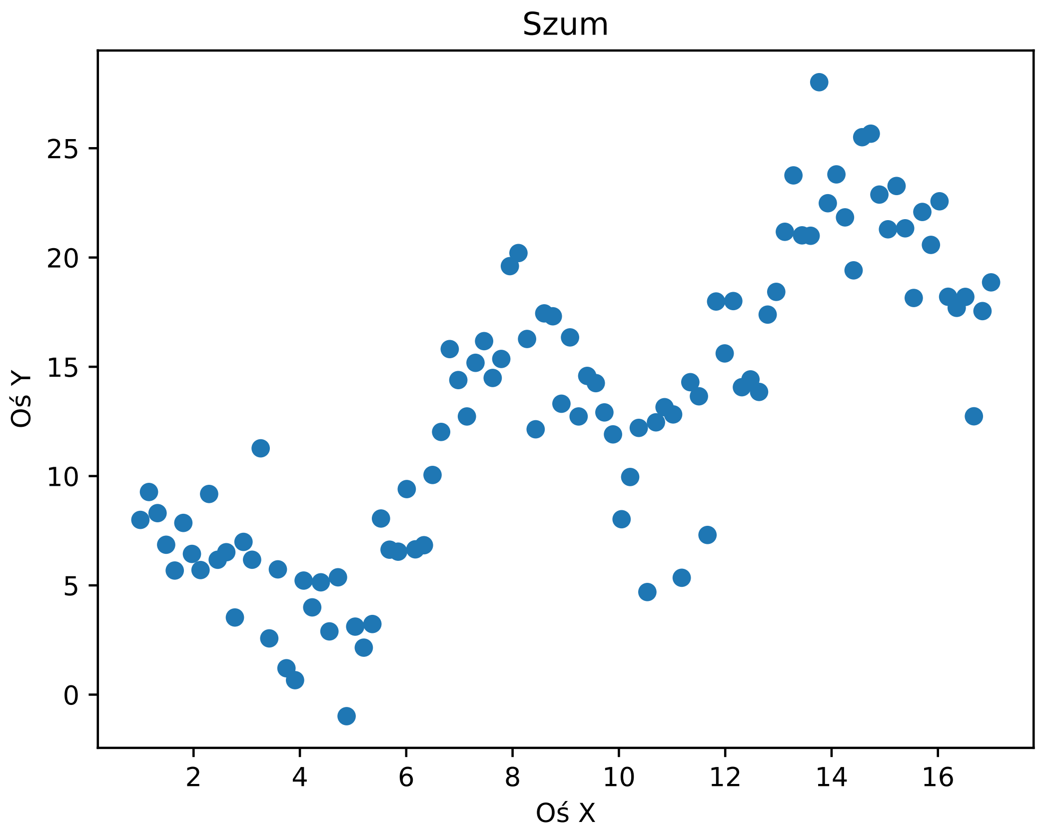
W tym podpunkcie należało samemu wymyślić „jakąś" funkcje podać jej współczynniki następnie wygenerować dla niej „zaszumione" punkty (tak jak to wygląda powyżej na wykresie) oraz sprawdzić czy metoda aproksymacji dobrze „zgadnie" współczynniki jakie podaliśmy

Tak wiec ja wybrałem następującą funkcje F(X):

$$F(x) = \frac{3}{10} log(2x)^2 + 5sin(x) + 2\sqrt{\mathrm{x}}$$

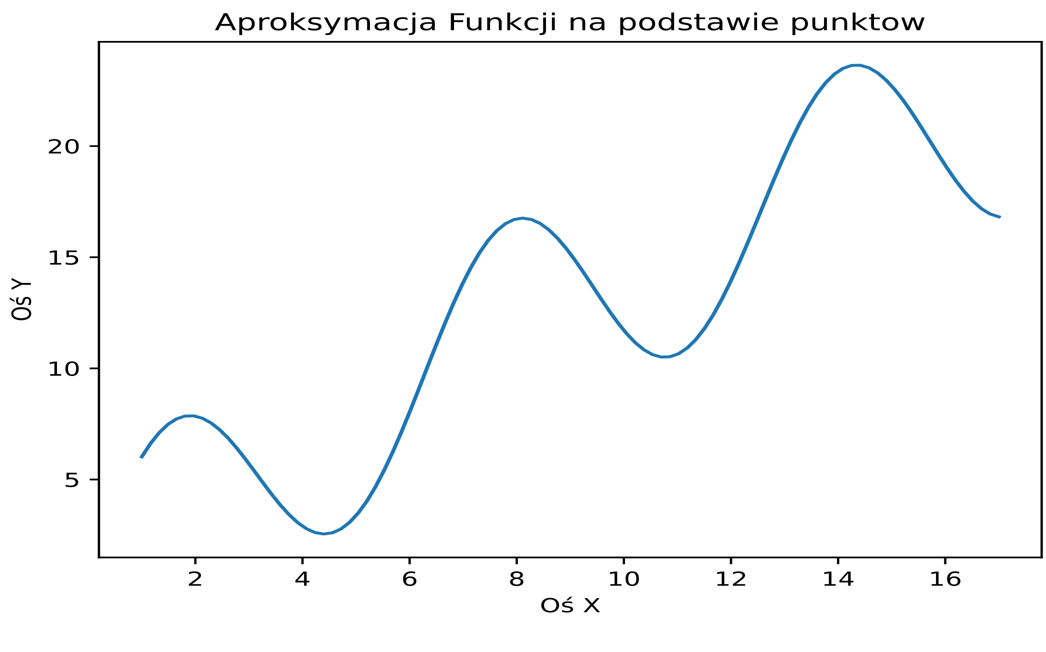
Następnie wygenerowałem jednorodną siatkę punktów na osi x od 1 do 17, obliczyłem wartości funkcji w podanych punktach i dodałem do nich „szum"

Wynik prezentuje się nastepujaco



Następnie zastosowałem tę samą metodę co w *podpunkcie A* i dokonałem aproksymacji funkcji

Wynik wyglądał następująco:



Wynik wyglądał zadowalająco dodatkowo sprawdziłem jakie współczynniki zostały obliczone i w bardzo dobrym stopniu pokrywają się z moimi wcześniej podanym współczynnikami

Dla przypomnienia jakie współczynniki podałem:

$a = \frac{3}{10}$

$b = 5$

$c = 2$

Natomiast wektor współczynników wyliczony przez mój algorytm prezentuje się następująco:

a = [0.31424087 4.8200884 1.86091558]

widać ze wartości są to siebie bardzo zbliżone i nie odbiegają od siebie za bardzo

Szczegółowe informacje na temat wartości macierz A, wektora wartości X, wektora wartość Y, oraz wcześniej wspomniany wektor współczynników można zobaczyć uruchamiając mój program wybierając opcje : „Podpunkt B”

Zadanie Dodatkowe

Postanowiłem trochę poeksperymentować z szumem w podpunkcie B i zauważyłem ze jeżeli szum będzie się zwiększał to także stopniowo będzie zwiększać różnica pomiędzy współczynniki wprowadzonymi przeze mnie a tymi które uzyskujemy z algorytmu jest to logiczne ponieważ z bardziej zaszumionego obrazu punktów trudniej jest znaleźć rozwiązania w tym przypadku współczynniki Poniżej przedstawiam kilka przykładowych wyników

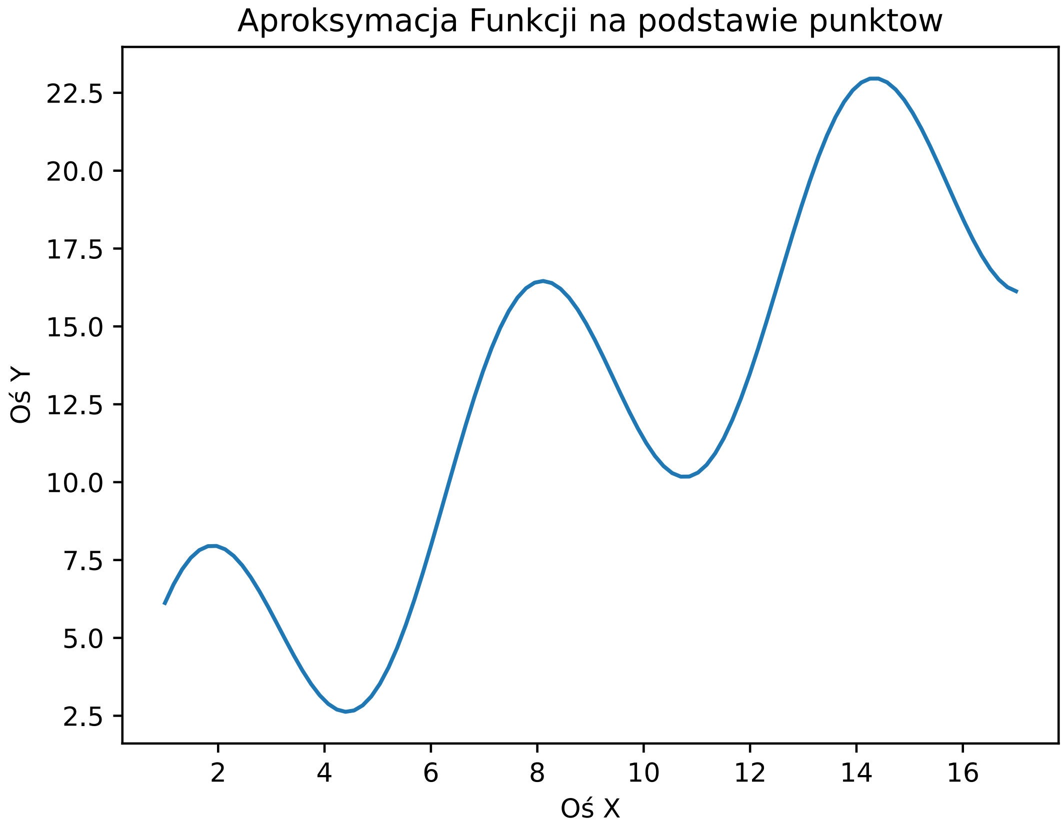
Dla przypomnienia jakie współczynniki podałem:

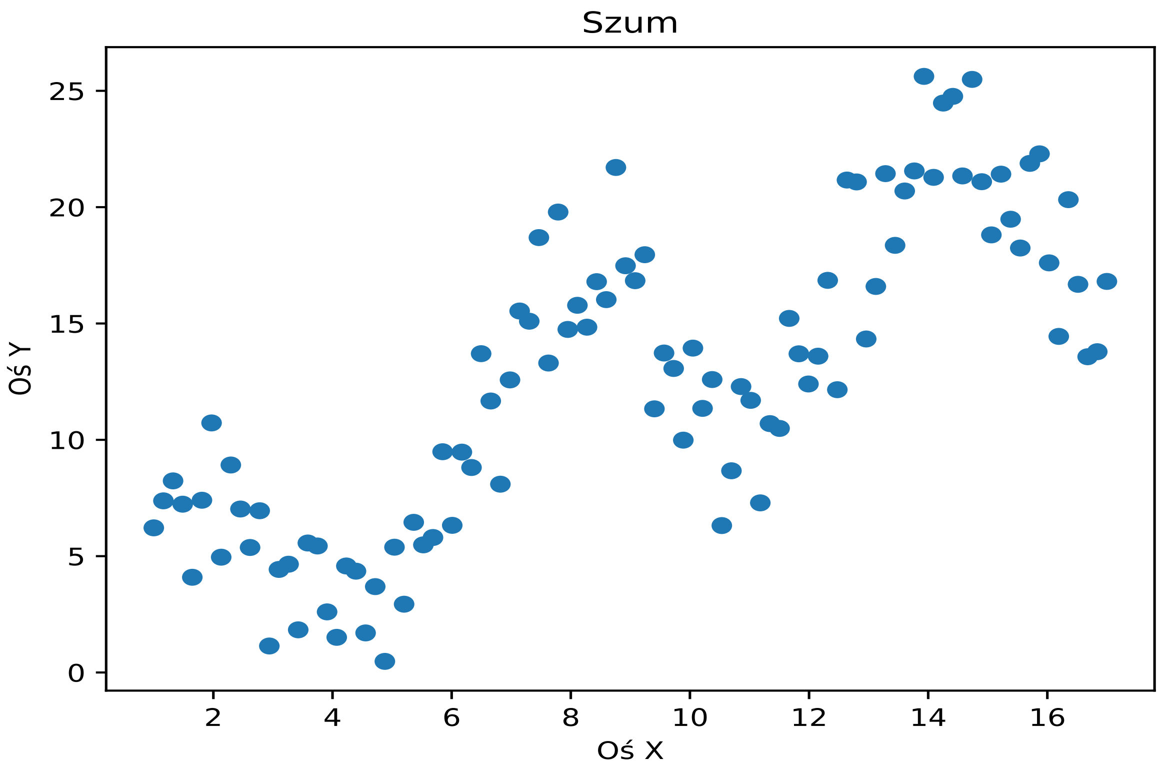
$a = \frac{3}{10}$

$b = 5$

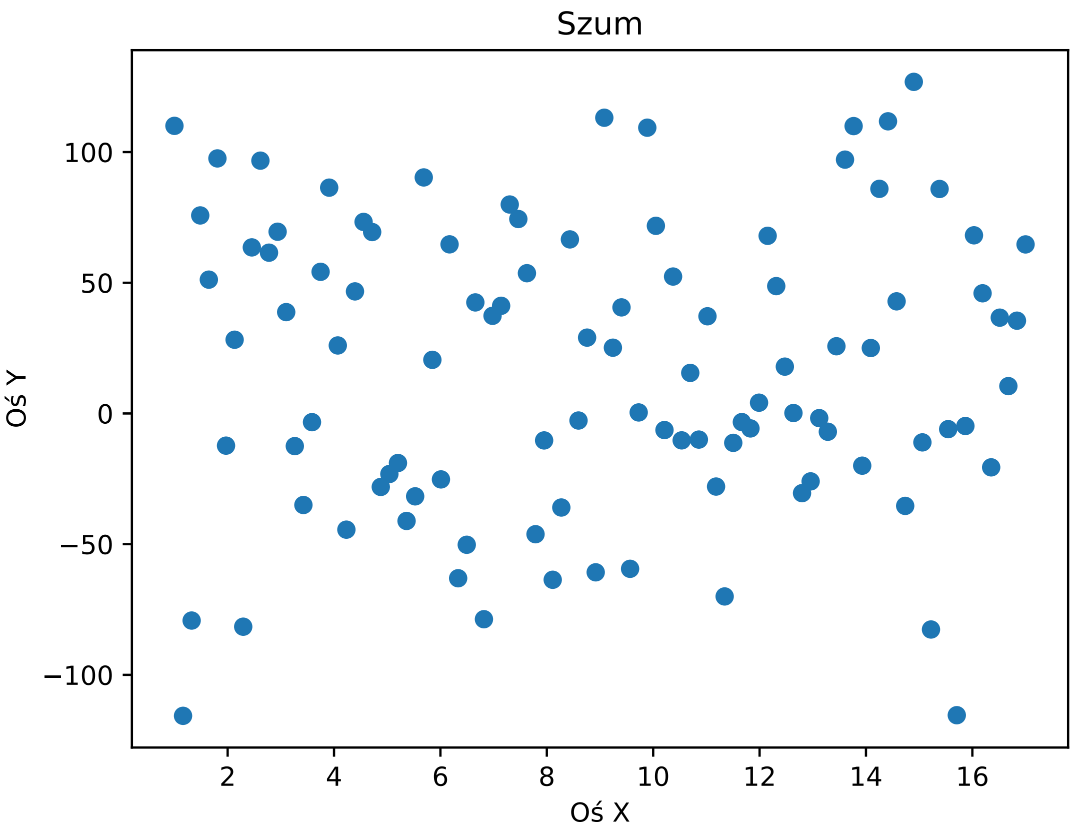
$c = 2$

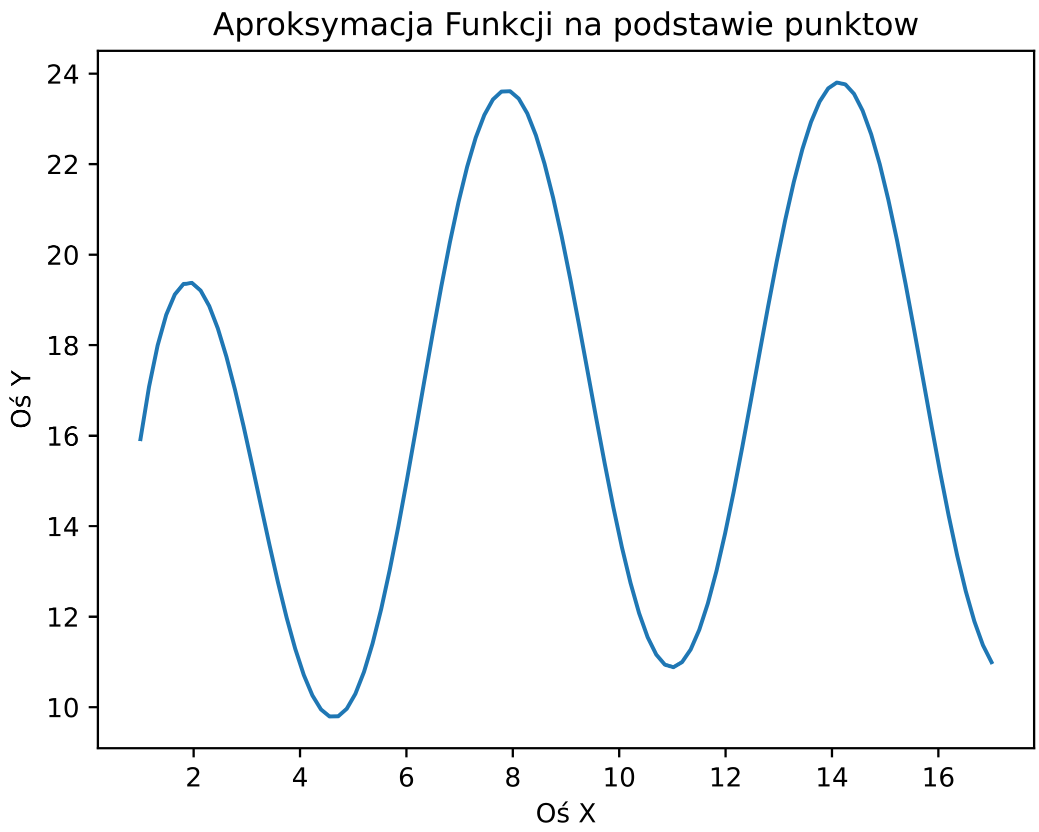
Dla szumu na poziomie 2 Wspolczynniki: [0.28126045 4.75237023 2.02894497]





Dla szumu na poziomie 50 wspolczynniki: $[-0.61085152 \;\; 6.47782945 \;\; 10.67344342]$





Dla szumu na poziomie 10 współczynniki: [0.26767664 4.1787841 2.32332544]