Autor: Marcin Sitko

Sprawozdanie – NUM2

Macierz A1

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2.34332898 & -0.11253278 & -0.01485349 & 0.33316649 & 0.71319625 \\ -0.11253278 & 1.67773628 & -0.32678856 & -0.31118836 & -0.43342631 \\ -0.01485349 & -0.32678856 & 2.66011353 & 0.85462464 & 0.16698798 \\ 0.33316649 & -0.31118836 & 0.85462464 & 1.54788582 & 0.32269197 \\ 0.71319625 & -0.43342631 & 0.16698798 & 0.32269197 & 3.27093538 \end{bmatrix}$$

Macierz A2

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2.34065520 & -0.05353743 & 0.00237792 & 0.32944082 & 0.72776588 \\ -0.05353743 & 0.37604149 & -0.70698859 & -0.22898376 & -0.75489595 \\ 0.00237792 & -0.70698859 & 2.54906441 & 0.87863502 & 0.07309288 \\ 0.32944082 & -0.22898376 & 0.87863502 & 1.54269444 & 0.34299341 \\ 0.72776588 & -0.75489595 & 0.07309288 & 0.34299341 & 3.19154447 \end{bmatrix}$$

Wektor b

$$b = \begin{bmatrix} 3.55652063354463 \\ -1.86337418741501 \\ 5.84125684808554 \\ -1.74587299057388 \\ 0.84299677124244 \end{bmatrix}$$

Obliczenie wektora b':

$$\boldsymbol{b'} = \boldsymbol{b} + \left(\mathbf{10^{-5}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\right)^{\boldsymbol{T}}$$

Wektor b'

$$b' = \begin{bmatrix} 3.55653063354463 \\ -1.86337418741501 \\ 5.84125684808554 \\ -1.74587299057388 \\ 0.84299677124244 \end{bmatrix}$$

Obliczanie Równań macierzowych

$A_i x_i = b$ oraz $A_i x_i = b'$ dla $i = 1, 2$

Do obliczenia niewiadomego wektora X_i używam biblioteki $numpy$ oraz zawierającej się w niej funkcji $linalg.solve(par1, par2)$.

Funkcja $numpy.linalg.solve(par1, par2)$ służy do rozwiązywania równań macierzowych postaci $Ax = b$ Gdzie parametry funkcji: $par1\ oraz\ par2$ są to odpowiednio : $macierz\ A\ oraz\ wektor\ b$

Macierz A_1

$$A_i x_i = b$$

$i = 1$

Uzyskany wynik: X_1

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2.03163246 \\ -1.03652186 \\ 3.22032664 \\ -3.52251753 \\ -0.1394951 \end{bmatrix}$$

$$A_i x_i = b'$$

$i = 1$

$$X_1{}' = \begin{bmatrix} 2.03163717 \\ -1.0365219 \\ 3.22032706 \\ -3.52251858 \\ -0.13949605 \end{bmatrix}$$

Z powyższych informacji wynika, że mała zmiana wprowadzona w wektorze wyrazów wolnych dla macierzy A_1 nie wpływa znacząco na końcowy wynik równania macierzowe $Ax = b$

Różnica wektorów X_1 - $X_1{}'$ wynosi:

$$X_1 - X_1' = \begin{bmatrix} -4.70704255e-6 \\ 4.36085246e-8 \\ -4.19696175e-7 \\ 1.05571402e-6 \\ 9.49379793e-7 \end{bmatrix}$$

Widać ze dla macierzy A_1 po minimalnej zmianie wektora wyrazów wolnych, poszczególne składowe wektora $X_1 - X_1'$ są Rzędu $e - 6$ i mniejsze, świadczy to o stosunkowo małych różnicach miedzy wynikami.

Pokazuję to , także że macierz A_1 może być dobrze uwarunkowana.

Postanowiłem sprawdzić współczynnik uwarunkowania macierzy A_1 Posłużyłem się następującym wzorem:

$$\kappa = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|},$$

Ponieważ macierz A_1 Jest macierzą symetryczną rzeczywistą, można zastosować powyższy wzór.

Po Wykonaniu obliczeń otrzymałem:

$$K_1 = 4.000000025064922$$

Jest to bardzo niski współczynnik uwarunkowania macierzy

Sprawdziłem także poprawność moich obliczeń stosując wbudowaną funkcje biblioteki $numpy$ służącą właśnie do obliczania współczynnika uwarunkowania macierzy $numpy.linalg.cond(a)$ gdzie parametr a jest to macierz. Porównanie wyników można ujrzeć wybierając opcje $3)$ $Dodatkowe$ z menu, programu zamieszczonego wraz z zadaniem

Macierz A_2

$$A_i x_i = b$$

$i = 2$

Uzyskany wynik: X_2

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1.99998045 \\ -0.33814056 \\ 3.42431038 \\ -3.56662167 \\ 0.0329788 \end{bmatrix}$$

$$A_i x_i = b'$$

$i = 2$

Uzyskany wynik $X_2{}'$

$$X_2{}' = \begin{bmatrix} 3.42873475 \\ -31.86258864 \\ -5.78337449 \\ -1.57579144 \\ -7.7523748 \end{bmatrix}$$

Z powyższych informacji wynika, że mała zmiana wprowadzona w wektorze wyrazów wolnych dla macierzy A_2 ma diametralny wpływ na wynik równania macierzowego $Ax = b$

Różnica wektorów X_2 - $X_2{}'$ wynosi:

$$X_2 - X_2' = \begin{bmatrix} -1.4287543 \\ 31.52444808 \\ 9.20768487 \\ -1.99083023 \\ 7.78535361 \end{bmatrix}$$

Oznaczać to może ,że macierz A_2 jest źle uwarunkowana, współczynnik uwarunkowania macierzy A_2 powinien być znacznie większy od współczynnika uwarunkowania macierzy A_1.

Po dokonaniu obliczeń otrzymałem:

$$K_2 = 320612866.41194546$$

Słownie w zaokrągleniu do części ułamkowych: 320 milionów 612 tysięcy 866

Można zauważyć, że współczynnik uwarunkowania macierzy A_2 jest ok. 80 Milionów razy większy od współczynnika uwarunkowania macierzy A_1 , Pokrywa się to z naszymi wynikami, po wprowadzeniu minimalnej zmiany w wektorze wyrazów wolnych.

Norma Euklidesowa Różnicy rozwiązań równań wektorowych

$$\Delta_1 = \left||x_1 - x_1'|\right|_2 = 4.934587135822541e - 06$$

$$\Delta_2 = \left||x_2 - x_2'|\right|_2 = 33.84063773584277$$

Różnica wartości norm Δ_2 $oraz$ Δ_1

$$\Delta_1 - \Delta_2 = -33.84063280125563$$

Normę Wektora można interpretować jako funkcje mierzącą długość tego wektora tak więc:

Δ_2 $oraz$ Δ_1 pokazują nam jak małe zaburzenie wektora wyrazów wolnych wpływa na „odległość” miedzy wynikami można to także interpretować jako „błąd” miedzy dwoma wektorami . widać ze Δ_2 jest znacznie większa co oznacza ze dla macierzy A_2 wprowadzenie małej zmiany w wektorze wyrazów wolnych powoduje znaczny wzrost „Błędu” miedzy x_2 $oraz$ x_2' a to z kolei oznacza, znaczącą różnice wartości składowych wektorów x_2 $oraz$ x_2'

Ogólna różnica $\Delta_1 - \Delta_2$ pokazuje jak bardzo błędy po zaburzeniu wektora wyrazów wolnych wpływają na wynik równania macierzowego $Ax = b$ macierze A_1 oraz A_2 różnią się od siebie, gdyby obydwie macierze były dobrze uwarunkowane tak jest to w przypadku macierzy A_1, to $\Delta_1 - \Delta_2$ była bardzo mała natomiast widać ,że A_2 Bardzo zaburzyła wynik I dlatego różnica $\Delta_1 - \Delta_2$ wyszła dosyć duża w porównaniu do normy Δ_1