

115. Udowodnij, że zbiór spójników  $\{1, \vee, \neg, \Rightarrow\}$  jest 2-zupełny

Skorzystam z definicji k-zupełnego zbioru spójników - zbiór spójników jest k-zupełny, jeśli każdą co najmniej k-argumentową funkcję boolowską można opisać za pomocą formuły zbudowanej zawierającej jedynie spójniki z tego zbioru i zmienne

Rozpatrzmy wszystkie możliwe funkcje boolowskie 1 i 2 argumentowe

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
T	F	F	T	T
F	F	T	F	T

$f_1$  opisuje formuła  $\neg(x \vee \neg x)$

$f_2$  opisuje formuła  $\neg x$

$f_3$  opisuje formuła  $x$

$f_4$  opisuje formuła  $x \vee \neg x$

x	y	$f_5(x,y)$	$f_6(x,y)$	$f_7(x,y)$	$f_8(x,y)$	$f_9(x,y)$	$f_{10}(x,y)$	$f_{11}(x,y)$	$f_{12}(x,y)$	$f_{13}(x,y)$	$f_{14}(x,y)$
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T

x	y	$f_{15}(x,y)$	$f_{16}(x,y)$	$f_{17}(x,y)$	$f_{18}(x,y)$	$f_{19}(x,y)$	$f_{20}(x,y)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F	T

$f_5$  opisuje formuła  $\neg(x \vee \neg x)$

$f_6$  opisuje formuła  $\neg x \wedge \neg y$

$f_7$  opisuje formuła  $\neg x \wedge y$

$f_8$  opisuje formuła  $\neg x$

$f_9$  opisuje formuła  $x \wedge \neg y$

$f_{10}$  opisuje formuła  $\neg y$

$f_{11}$  opisuje formuła  $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge y)$

$f_{12}$  opisuje formuła  $\neg(x \wedge y)$

$f_{13}$  opisuje formuła  $x \wedge y$

$f_{14}$  opisuje formuła  $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$

$f_{15}$  opisuje formuła  $y$

$f_{16}$  opisuje formuła  $\neg x \vee y$

$f_{17}$  opisuje formuła  $x$

$f_{18}$  opisuje formuła  $x \vee \neg y$

$f_{19}$  opisuje formuła  $x \vee y$

$f_{20}$  opisuje formuła  $x \vee \neg x$

Jak możemy zauważyć - każdą funkcję boolowską 1 i 2 argumentową można opisać przy pomocy formuły zbudowanej ze zmiennych i spójników ze zbioru  $\{\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow\}$ , więc zbiór spójników  $\{1, \vee, \neg, \Rightarrow\}$  jest 2-zupełny