Zadanie 2)

K_n - graf pełny n-wierzchołkowy

$|E(K_n)| = \binom{n}{2}$ - liczba krawędzi grafu pełnego

$|E(G)| + |E(\bar{G})| = \binom{n}{2}$

Jeden z grafów G i $\bar{G}$ ma co najmniej $\frac{\binom{n}{2}}{2}$ krawędzi

Bez straty ogólności możemy założyć, że jest to graf G

Liczbę jego krawędzi możemy ograniczyć przez $3n-6$ (własność grafów planarnych)

$$\frac{\binom{n}{2}}{2} \leq |E(G)| \leq 3n-6$$

$$\frac{n!}{4(n-2)!} \leq 3n-6$$

$$n(n-1) \leq 12n-24$$

$$n^2 - 13n + 24 \leq 0$$

$$\Delta = 73$$

$$n_1 = \frac{13-\sqrt{73}}{2} \qquad n_2 = \frac{13+\sqrt{73}}{2}$$

$$n \in \left\langle \frac{13-\sqrt{73}}{2}, \frac{13+\sqrt{73}}{2} \right\rangle \qquad \frac{13+\sqrt{73}}{2} < 11$$

z treści $n \geq 11$

Sprzeczność

Zadanie 3)

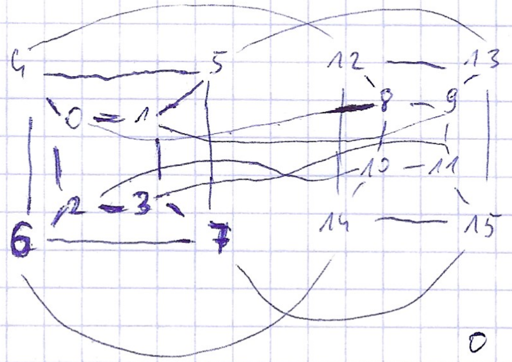
Q_1 0 — 1 ✓

Q_2 00 — 01, 10 — 11 ✓

Q_3 100 — 101, 000 — 001, 010 — 011, 110 — 111 ✓

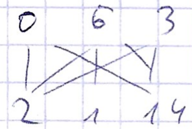
każda kostka > 4 również nie jest planarna

Q_4 nie da się



na mocy twierdzenia Kuratowskiego nie jest planarny

zawiera podgraf homeomorficzny z $K_{3,3}$



8 14 10 5 7

Zadanie 5)

G - spójny planarny, $n \geq 3$, t_i - liczba wierzchołków stopnia i

a) $\sum_{i=1}^{n} (6-i) t_i \geq 12$

$6 \sum_{i=1}^{n} t_i - \sum_{i=1}^{n} i t_i \geq 12$

wszystkie wierzchołki

podwójna liczba krawędzi

$6n - 2|E| \geq 12$

$|E| \leq 3n - 6$ własność grafów planarnych

b) Przypuśćmy, że G zawiera mniej niż 3 wierzchołki stopnia ≤ 5

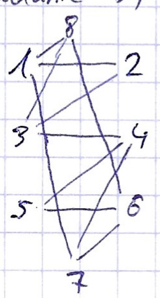
$\sum_{i=1}^{n} (6-i) t_i = \sum_{i=1}^{5} (6-i) t_i + \sum_{i=6}^{n} (6-i) t_i \leq 10 \not\geq 12$

sprzeczność

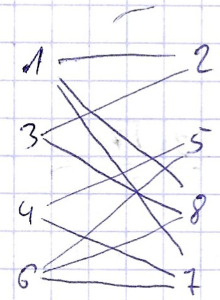
ponieważ: $\sum_{i=1}^{5} (6-i) t_i \leq 10$

$\sum_{i=6}^{n} (6-i) t_i \leq 0$

Zadanie 9)



a)



usuwamy (3, 4)

10 krawędzi zostaje

b) 6 wierzchołków ma nieparzysty stopień, dokładamy 3 krawędzie (1,4), (3,6), (7,8)

wtedy każdy wierzchołek ma stopień parzysty

c) cykl hamiltona (1, 2, 3, 8, 6, 5, 4, 7, 1)