Zadanie 2)

a) $a_0 = a_1 = 1$

$a_{n+1} = \lfloor \sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2} \rfloor$

Niech $b_{n+1} = a_n^2 + a_{n-1}^2$

$a_{n+1} = \sqrt{b_{n+1}}$

$a_{n+1}^2 = b_{n+1} \Rightarrow b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ Zatem ciąg $b_n$ to liczby Fibonacciego (definiując początek jako $b_0 = b_1 = 1$)

$a_{n+1} = \sqrt{Fib_{n+1}}$.

b) $b_0 = 8$ $b_{n+1} = \sqrt{b_n^2 + 3}$

Obliczmy kilka początkowych liczb

$b_1 = \sqrt{b_0^2 + 3} = \sqrt{64 + 3} = \sqrt{67}$

$b_2 = \sqrt{b_1^2 + 3} = \sqrt{67 + 3} = \sqrt{70}$

$b_3 = \sqrt{b_2^2 + 3} = \sqrt{70 + 3} = \sqrt{73}$

$b_4 = \sqrt{b_3^2 + 3} = \sqrt{73 + 3} = \sqrt{76}$

Wzór na $b_{n+1}$ wygląda następująco: $b_{n+1} = \sqrt{64 + 3(n+1)}$

c) $c_0 = 0$ $c_1 = 1$ $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1}$

Obliczmy kilka pierwszych wyrazów

$c_0 = 0$

$c_1 = 1$

$c_2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2$

$c_3 = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 12$

$c_4 = 4 \cdot 12 + 12 \cdot 2 = 72$

$c_5 = 5 \cdot 72 + 20 \cdot 12 = 600$

$c_6 = 6 \cdot 600 + 30 \cdot 72 = 5760$

wyłączając silnię przed liczbę otrzymujemy:

$c_0 = 0! \cdot 0$

$c_1 = 1! \cdot 1$

$c_2 = 2! \cdot 1$

$c_3 = 3! \cdot 2$

$c_4 = 4! \cdot 3$

$c_5 = 5! \cdot 5$

$c_6 = 6! \cdot 8$

Zauważamy zależność $c_n = n! \cdot Fib_n$, którą można udowodnić indukcyjnie

Podstawa indukcji:

Dla $n=0$ $c_0 = 0 = 0! \cdot Fib_0 = 0$ ✓ Dla $n=1$ $c_1 = 1 = 1! \cdot Fib_1$ ✓

Krok indukcyjny: załóżmy, że dla $n \geq 1$ zachodzi $c_n = n! \cdot Fib_n$

Pokażę, że dla $n+1$ powyższa równość również zachodzi

$$c_{n+1} = (n+1)! \cdot Fib_{n+1}$$

$$= (n+1)! \, (Fib_n + Fib_{n-1})$$

$$= (n+1)n! \cdot (Fib_n + Fib_{n-1})$$

$$= \underbrace{(n+1)n! \cdot Fib_n}_{(n+1)c_n} + \underbrace{(n+1)n! \cdot Fib_{n-1}}_{(n+1)(n) \cdot \underbrace{(n-1) Fib_{n-1}}_{c_{n-1}}}$$

$$= (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1}$$ otrzymaliśmy wzór z treści

Zadanie 4)

Iloczyn kolejnych $k$ liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$

Niech $n$ będzie największą z nich $(n \geq k)$

zadanie sprowadza się do pokazania, że

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \in N \quad // \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \cdot (n-k)(n-k-1) \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \in N$$ otrzymaliśmy symbol Newtona

Zadanie 6)

$$a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1, \quad a_0 = 2, \quad a_n > 0$$

Niech $b_n = a_n^2$

$b_{n+1} = 2b_n + 1$ $\qquad$ $b_{n+1} - 2b_n - 1 = 0$

$$(E-2)\langle b_n \rangle = E\langle b_n \rangle - 2\langle b_n \rangle$$

$= \langle b_{n+1} \rangle - 2\langle b_n \rangle$

$= \langle 2b_n + 1 \rangle - 2\langle b_n \rangle$

$= \langle 1 \rangle$

$(\mathcal{E}-2)$ anihiluje $b_{n+1} - 2b_n$

$(\mathcal{E}-1)$ anihiluje $-1$

$$\underbrace{(\mathcal{E}-2)}\underbrace{(\mathcal{E}-1)}\langle b_n \rangle = \langle 0 \rangle$$

wzór na $b_n$: $\alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 1^n$

$$\begin{aligned} b_0 &= 4 = \alpha + \beta \\ b_1 &= 9 = 2\alpha + \beta \end{aligned} \Rightarrow \alpha = 5, \beta = -1$$

$$b_n = 5 \cdot 2^n + (-1) \cdot 1^n = 5 \cdot 2^n - 1$$

Zatem $a_n = \sqrt{b_n} = \sqrt{5 \cdot 2^n - 1}$

Zadanie 7)

Niech $A$ oznacza moc alfabetu, $A = 25$, $a_n$ - ilość sposobów dla wyrazów długości $n$

$a_0 = 1 \to$ jeden pusty wyraz

$a_1 = A-1 \to$ jedna literka, $A-1$ sposobów

$$a_n = (A-1)a_{n-1} + 1 \cdot (A^{n-1} - a_{n-1})$$

ostatnia literka nie jest a, zatem mamy $A-1$ sposobów na ostatnią literę razy ilość sposobów dla długości $n-1$

ostatnia literka jest a, potrzebujemy ilości sposobów z nieparzystą liczbą wystąpień a, wszystkich wyrazów o długości $n-1$ jest $A^{n-1}$, więc otrzymujemy $A^{n-1} - a_{n-1}$

$$a_n = Aa_{n-1} - a_{n-1} + A^{n-1} - a_{n-1}$$
$$= A^{n-1} + (A-2)a_{n-1}$$

$$a_{n+1} = (A-2)a_n + A^n$$

teraz metoda anihilatorów

$$a_{n+1} - (A-2)a_n - A^n = 0$$

$a_{n+1} - (A-2)a_n \rightarrow$ anihiluje $(\mathcal{E} - (A-2))$

$-A^n \rightarrow$ anihiluje $(\mathcal{E} - A)$

$$(\mathcal{E} - (A-2))(\mathcal{E} - A)\langle a_n \rangle = \langle 0 \rangle$$

$$a_n = \alpha (A-2)^n + \beta A^n$$

$a_0 = 1 = \alpha + \beta$

$a_1 = A - 1 = \alpha(A-2) + A\beta$

$= \alpha A - 2\alpha + A\beta$

$= A(\alpha + \beta) - 2\alpha \Rightarrow -1 = -2\alpha$

$\alpha = \frac{1}{2}$

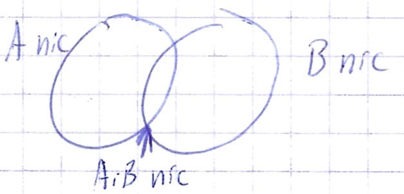
$\beta = \frac{1}{2}$

Podsumowując: $a_n = \frac{1}{2}\,2\,3^n + \frac{1}{2}\,2\,5^n$

Zadanie 10)

a) $4^n - 3^n$ wszystkie − te, w których A nic nie dostanie

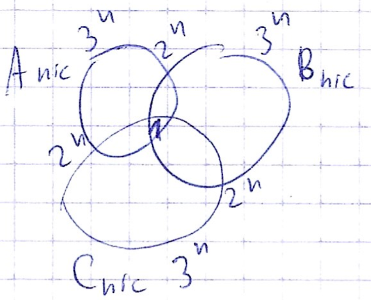
b)




$3^n + 3^n - 2^n$

c) odpowiedź: $4^n - 3^n - 3^n + 2^n$ wszystkie − te, w których A nic nie dostało lub B nic nie dostało (przeciwność do przypadku b)

d)




$$3 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n + 1$$

A i B i C nic więc wszystko dostaje D, jeden sposób e)

$$\underbrace{\underbrace{4^n}_{\text{wszystkie}} - \underbrace{\left( \underbrace{\binom{4}{1} 3^n}_{\text{pojedyncza osoba nic}} - \underbrace{\binom{4}{2} 2^n}_{\text{dwie osoby nic}} + \underbrace{\binom{4}{3} 1^n}_{\text{trzy osoby nic}} - \underbrace{\binom{4}{4} 0^n}_{\text{nikt nic}} \right)}_{\text{przynajmniej jedna osoba nic}}}_{\text{każdy coś dostał, odpowiedź ostateczna}}$$

$$= 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4$$