Zadanie 8

- $H_1 \cup H_2$ nie musi być podgrupą $G$

Kontrprzykład

$G = (\{0,1,2,3,4,5\}, +_{mod\ 6})$

$H_1 = (\{0,1,5\}, +_{mod\ 6})$

$H_2 = (\{0,3\}, +_{mod\ 6})$

$3+1=4$ nie należy do $H_1 \cup H_2$

- jeśli $H_1 \cup H_2$ jest podgrupą $G$, to $H_1 \leq H_2$ lub $H_2 \leq H_1$

Załóżmy nie wprost, że $\neg(H_1 \leq H_2 \vee H_2 \leq H_1)$

Wtedy $H_1 \nsubseteq H_2 \wedge H_2 \nsubseteq H_1$

Zatem $\exists h_1 \in H_1 / h_1 \notin H_2$ oraz $\exists h_2 \in H_2 / h_2 \notin H_1$

$h_1 \circ h_2 \notin (H_1 \cup H_2)$

$h_1 \circ h_2 \notin H_1 \wedge h_1 \circ h_2 \notin H_2$

Dochodzimy do sprzeczności, ponieważ $(H_1 \cup H_2)$ jest podgrupą $G$,

więc $\forall h_1 \in H_1\ \forall h_2 \in H_2\ h_1 \circ h_2 \in (H_1 \cup H_2)$

$h_1 \circ h_2 \in H_1 \vee h_1 \circ h_2 \in H_2$

- jeśli $G$ jest przemienna, to $\langle H_1 \cup H_2 \rangle = \{h_1 h_2 : h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$

$P \subseteq L$ dowolne $h_1 h_2$ musi zawierać się w grupie zawierającej $H_1 \cup H_2$

$L \subseteq P$ załóżmy, że istnieje $x$ t.ż. $x \in \langle H_1 \cup H_2 \rangle$

oraz $\forall h_1 \in H_1\ \forall h_2 \in H_2\ h_1 h_2 \neq x$

Korzystając z Lematu 14.25 oraz przemienności grupy $G$ dochodzimy do sprzeczności