

Lista nr 9 z matematyki dyskretnej

1. Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb. Złożoność Twojego algorytmu powinna być $O(m + n)$.
2. Niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w drzewie. Wyprowadź dokładny wzór na t_1 , liczbę liści w dowolnym drzewie. Dlaczego ta liczba nie zależy od t_2 ?
3. Pokaż, że graf G jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej pary wierzchołków $u, v \in G$ w G istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca.
4. (2 punkty) Niech $d(u, v)$ oznacza odległość wierzchołków u i v , czyli długość najkrótszej ścieżki łączącej u i v . Dla każdego wierzchołka v grafu G definiujemy $r(v) = \max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$. Wierzchołek w , dla którego $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$ nazywa się *wierzchołkiem centralnym* grafu G , a liczba $r(G) = r(w)$ – *promieniem* grafu G .
 - (a) (Jordan) Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo z pary wierzchołków sąsiednich.
 - (b) Podaj algorytm znajdowania wierzchołków centralnych w drzewie, działający w czasie $O(m + n)$.
5. Niech $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ będzie ciągiem liczb naturalnych większych od zera. Wykaż, że d jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa o n wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$. *Uwaga:* w zadaniu tym trzeba pokazać implikację w obie strony.
6. Niech Q_k oznacza graf k -wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k -elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że jest to graf dwudzielny.
7. Udowodnij, że graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy z rodziny $\{G_v : v \in V\}$ są spójne, gdzie G_v jest grafem powstałym z G przez usunięcie wierzchołka v i incydentnych z nim krawędzi.

8. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny wierzchołek.
9. Wykaż, że przynajmniej jeden z grafów $G = (V, E)$ i \bar{G} (\bar{G} jest dopełnieniem grafu G) jest spójny. Dopełnienie $\bar{G} = (V, E')$ grafu G zdefiniowane jest jako graf (V, E') taki, że $\{u, v\} \in E' \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$.
10. Udowodnij następujące twierdzenie:

Niech G będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej k . Wówczas G zawiera ścieżkę o długości k . Jeśli $k \geq 2$, to G zawiera cykl o długości przynajmniej $k + 1$.