$\mathbb{F}^n$ $\mathbb{R}^n$

$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

$\perp$, $\|\cdot\|$, $\sphericalangle$

Rozdział 11

wielomiany

Ogólny iloczyn skalarny

← Analiza numeryczna

$\mathbb{V}$, $\mathbb{F} \leftarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Definicja 11.1 (Iloczyn skalarny). *Iloczyn skalarny* to funkcja $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{V}^2 \mapsto \mathbb{F}$ (gdzie $\mathbb{V}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$) spełniająca warunki:

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ $\mathbb{R}/\mathbb{C}$

(SK1) liniowa po pierwszej współrzędnej

$\langle \alpha u + \beta u', v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u', v \rangle$

(SK2) symetryczna, tj. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$; (np. dla $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) lub antysymetryczny $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$ (np. dla $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

(SK3) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ dla $\vec{v} \neq \vec{0}$. $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} > 0$

Przestrzeń liniową, która ma tak określony iloczyn skalarny, nazywamy *przestrzenią Euklidesową* (jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) lub *unitarną* (jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

SK 3 $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \in \mathbb{R}$

Przykłady:

- standardowy il. skl. $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

wzór $\sum u_i v_i$

- dla wielomianów (funkcji) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

cel. $\langle f, g \rangle = \int_I f(x) g(x)\, dx$

$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$ waga $\int_{-1}^{1} f(x) g(x) \sqrt{1-x^2}\, dx$

- zm. prawd. X, Y $\mathbb{E}[X \cdot Y]$ $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) Y(\omega) \Pr[\omega]$

Definicja 11.2 (Wektory prostopadłe). Dwa wektory $\vec{u}, \vec{v}$ są *prostopadłe*, gdy $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Zapisujemy to też jako $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Definicja 11.3 (Długość i odległość). W przestrzenie Euklidesowej (unitarnej):

Norma (*długość*) wektora $\vec{v}$ to $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\vec{v}}$. $\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$

Odległość między $\vec{u}$ a $\vec{v}$ to norma z $(\vec{u} - \vec{v})$, tj. $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Przykład 11.4.

- Tradycyjny iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ spełnia te warunki.
- W przestrzeni wielomianów (nad $\mathbb{R}$) jako iloczyn skalarny można wziąć całkę (po odpowiednim zakresie):

$$\langle u, v\rangle = \int_I u(x)v(x)dx$$

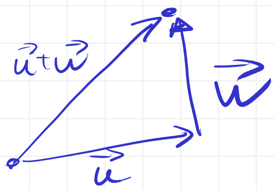
- dla zmiennych losowych X, Y iloczynem skalarnym jest $\mathcal{E}[X\cdot Y]$, tj.

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot Y(\omega)\cdot \mathcal{P}[\omega] \ .$$

Lemat 11.5. *Jeśli $\mathbb{V}$ jest przestrzenią Euklidesową (unitarną), to:*

1. $\|t\vec v\| = |t|\cdot\|\vec v\|$
2. $|\langle\vec u, \vec v\rangle| \le \|\vec u\|\cdot\|\vec v\|$ *(Nierówność Cauchy-Schwartz); równość* $\iff$ *są liniowo zależne*
3. $\|\vec u + \vec v\| \le \|\vec u\| + \|\vec v\|$ *(Nierówność Minkowsky)*
4. $\|\vec v\| - \|\vec w\| \le \|\vec v - \vec w\|$

$\to |\sum x_i y_i| \le \sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}$



Ad 1

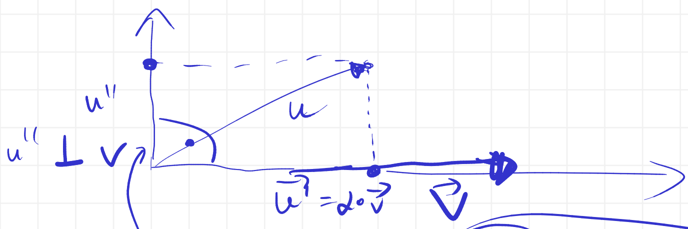
$$\|t\cdot v\| = \sqrt{\langle t\cdot v, t\cdot\vec v\rangle} = \sqrt{t\cdot t\cdot\langle\vec v,\vec v\rangle} = \sqrt{t^2}\cdot\|v\| = |t|\cdot\|v\|$$

Ad 2

Dla liniowo zależnych:

$$\langle v, \alpha\cdot v\rangle = \alpha\cdot\langle v, v\rangle = \alpha\cdot\|\vec v\|^2 \overset{?}{\le} \|v\|\cdot\|\alpha v\| = \|v\|^2\cdot|\alpha|$$

Co dla niezależnych



$$u'' = \vec u - t\cdot\vec v$$

$$0 < \|u - t\cdot v\|^2 = \langle tv - u, tv - u\rangle = \langle tv, tv\rangle - 2\langle tv, u\rangle + \langle u, u\rangle$$

$$t^2 \cdot \|v\|^2 - 2t\langle v,u\rangle + \|u\|^2 > 0$$ ← jako funkcja t

trójmian kwadratowy dla t

$$\Delta < 0$$

$$\Delta = 4\langle v,u\rangle^2 - 4\|v\|^2\cdot\|u\|^2 < 0$$

$$\|v\|^2\cdot\|u\|^2 > \langle u,v\rangle^2 \quad / \sqrt{\ }$$

$$\|v\|\cdot\|u\| > |\langle u,v\rangle|$$

To chcieliśmy pokazać.

Ad 3

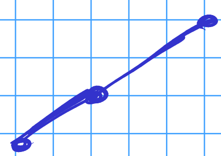
$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$
$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u,v\rangle|$$

Nier. Schw. $\le \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\|$

$$= (\|u\|+\|v\|)^2$$

$$\|u+v\|^2 \le (\|u\|+\|v\|)^2 \quad / \sqrt{\ }$$

$$\|u+v\| \le \|u\|+\|v\|$$ ← równość $\Leftrightarrow$ u,v – liniowo zal.



Ad 4

$$\|u\| - \|v\| \le \|u-v\|$$

$$\|u\| \le \|u-v\| + \|v\|$$ z nier. Mink.

$$|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\cdot\|v\|$$

$$-1 \le \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} \le 1$$

Definicja 11.6. W przestrzeni Euklidesowej (unitarnej) dla wektorów u, v kąt między nimi to jedyne takie $\alpha \in [0, \pi]$, że

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

11.1 Baza ortonormalna

Definicja 11.7 (Układ (baza) ortogonalny, układ (baza) ortonormalny)**.** Układ wektorów $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ jest *układem ortogonalnym*, jeśli dla $i \neq j$ mamy $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle = 0$. Jest układem *ortonormalnym*, jeśli dodatkowo $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i\rangle = 1$.

Analogicznie definiujemy bazę ortogonalną i ortonormalną.

To jest w pewnym sensie odpowiednik bazy standardowej w $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 11.8. *Niech $\mathbb{V}$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią Euklidesową (unitarną). Wtedy $\mathbb{V}$ ma bazę ortonormalną.* Dla ul. ik. sk. w $\mathbb{F}^n$

Dowód wynika z bardziej technicznego lematu:

Lemat 11.9. *Niech $\mathbb{V}$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią Euklidesową (unitarną), niech B będzie niezależnym układem ortogonalnym. Wtedy* $\mathrm{LIN}(B) = \mathbb{V}$ *lub istnieje $\vec{b}' \in \mathbb{V} \setminus B$, taki że $B' = B \cup \{\vec{b}'\}$ jest ortogonalny i niezależny.*

$B \neq 0$ $\quad B \leftarrow$ ortonormalny: $\quad \vec{b} \in B$

$$\left\| \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \right\| = \frac{1}{\|b\|} \cdot \|b\| = 1$$

$$\langle b_1, b_2 \rangle = 0$$

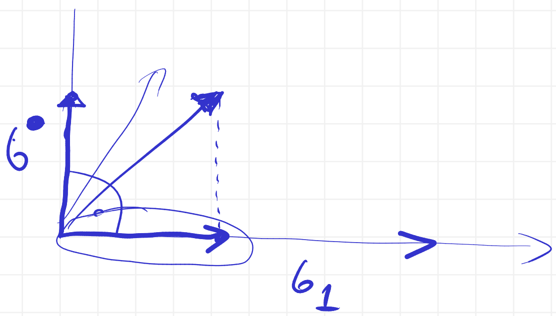
$$\left\langle \frac{b_1}{\|b_1\|}, \frac{b_2}{\|b_2\|} \right\rangle = \frac{1}{\|b_1\|} \cdot \frac{1}{\|b_2\|} \cdot \overbrace{\langle b_1, b_2 \rangle}^{0} = 0$$

$$\mathrm{LIN}(B) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{OK} \\ \subsetneq \mathbb{V} & (*) \end{cases}$$

$(*)$ $\quad \exists \ \vec{b}' \in \mathbb{V} \setminus \mathrm{LIN}(B)$ $\qquad B = \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$

$$\vec{b}' = \alpha \cdot b^\circ + \beta \cdot b_1$$

$$\langle b_1, b' \rangle = \alpha \cdot \underbrace{\langle b^\circ, b' \rangle}_{0} + \beta \cdot \underbrace{\langle b_1, b_1 \rangle}_{1} = \beta$$



$$\vec{b'} = \alpha \cdot b^\circ + \langle b_1, b' \rangle \cdot b_1$$

$$\alpha \cdot b^\circ = \vec{b'} - \langle b_1, b' \rangle \cdot b_1$$

Tak zrobimy dla wszystkich.

$\{\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_k}\} = B \leftarrow$ ortonormalny

$\vec{b'} \in W \setminus LIN(B)$

$$\vec{b} = \underbrace{\vec{b'}}_{\notin LIN(B)} - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle \vec{b_i}, \vec{b'} \rangle \cdot \vec{b_i}}_{\in LIN(B)}$$

$$\forall_j \quad \langle \vec{b}, b_j \rangle = \left\langle \vec{b'} - \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\langle b_i, \vec{b'} \rangle}_{\in \mathbb{R}} \vec{b_i}, \vec{b_j} \right\rangle$$

$$\langle \vec{b'}, \vec{b_j} \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle b_i, \vec{b'} \rangle \cdot \underbrace{\langle \vec{b_i}, \vec{b_j} \rangle}_{\in \mathbb{R}} \quad \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$= \langle \vec{b'}, \vec{b_j} \rangle - \langle \vec{b_j}, \vec{b'} \rangle$$

$$= 0$$

$$\vec{b} \perp \vec{b_j} \qquad B \cup \{\vec{b}\} \leftarrow \text{ortogonalny}$$

$$\vec{b} \cdot \frac{1}{\|\vec{b}\|}$$

$$\vec{b} \neq \vec{0}$$

$\square$

Lemat 11.10. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową (unitarną), $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ bazą ortonormalną a $\vec{v}$ wektorem wyrażanym w tej bazie jako*

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i \quad .$$

Wtedy

$$\alpha_i = \langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle \quad .$$

$\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$

B baza

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \leftarrow$ baza

$\vec{v}$ ma jedyne przedst. w bazie

$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i$

$\langle \vec{v}, \vec{v}_j \rangle =$

$\langle \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i}_{v}, \vec{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}}$

$= \alpha_i$

Lemat 11.11. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową (unitarną). Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ będzie przekształceniem linowym, zaś $B = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ bazą ortonormalną. Wtedy*

$$M_{BB}(F) = (\langle F(\vec{v}_j), \vec{v}_i \rangle)_{i,j=1,\ldots,n} \quad .$$

$M_{BB}(F) = [\, (Fv_1)_B \mid F(v_2)_B \mid \ldots \,]$

Fv_1 $\quad F(v_2)$

$\langle (Fv_1), v_1 \rangle$

$\langle Fv_1, v_2 \rangle$

$\langle Fv_1, v_3 \rangle$

Uwaga:

st. il. sk:

$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ \boxed{5} \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5

Lemat 11.12. *Jeśli $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni Euklidesowej (lub unitarnej) $\mathbb{V}$, $B = \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ jest bazą ortonormalną, to*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (\vec{u})_B \cdot (\vec{v})_B$$

tj. wartość iloczynu skalarnego $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ to standardowy iloczyn skalarny reprezentacji $\vec{u}$ oraz $\vec{v}$.

W szczególności

$$\|\vec{u}\| = \|(\vec{u})_B\|$$

st. dł w $\mathbb{R}^n$

przy czym długość po prawej to zwykła długość wektorów w $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

funkcja 2-zm $\langle u, v \rangle$ — Liniowa po u, v

funkcja 2 zm. $(u)_B \cdot (v)_B$ — Liniowa po u, v

$f, g : \mathbb{V}^2 \to \mathbb{R}$

f, g. liniowe p 1, 2 wsp.

$f(b_i, b_j) = g(b_i, b_j)$ dla każdych $b_i, b_j \in B \leftarrow$ baza

to $f = g$

$u = \sum \alpha_i b_i$

$v = \sum \beta_j b_j$

$f(u,v) = g(u,v)$

$$f\left(\sum_i \alpha_i b_i, \sum_j \beta_j b_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(b_i, b_j)$$

$$g(u, v) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j g(b_i, b_j)$$

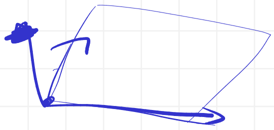
$$f(u,v) = g(u,v)$$

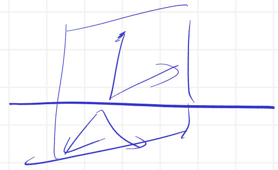
Sprawdzamy równości na parach el. z B

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$(\vec{b}_i)_B \cdot (b_j)_B = \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\in}{\vec{E}_i}} \cdot \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\in}{\vec{E}_j}} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

11.2 Dopełnienie ortogonalne





Definicja 11.13 (Dopełnienie ortogonalne)**.** Niech $U \subseteq \mathbb{V}$ będzie podzbiorem przestrzeni Euklidesowej (lub unitarnej). Wtedy *dopełnienie ortogonalne* U to:

$$U^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{V} \ : \ \forall_{\vec{w} \in U}\ \vec{v} \perp \vec{w}\}$$

Fakt 11.14. *Jeśli B jest bazą $\mathbb{W}$ to $\vec{v} \in \mathbb{W}^\perp$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{v}$ jest prostopadły do każdego wektora z B.*

$v \in B^\perp$

$B^\perp$

$\Rightarrow$ $B \subseteq \mathbb{W}$ $v \in \mathbb{W}^\perp$ jest prost. do wszystkich wekt. z B

$\Leftarrow$ $\vec{v} \in B^\perp$ $\omega \in \mathbb{W}$

$w = \sum \alpha_i \vec{b_i}$, $\vec{b_i} \in B$

$$\langle \vec{v}, \underset{w}{\vec{\omega}} \rangle = \langle \vec{v}, \sum \alpha_i \vec{b_i} \rangle$$

$$= \sum_i \alpha_i \underbrace{\langle \vec{v}, \vec{b_i} \rangle}_{0}$$

$$= 0$$

Lemat 11.15. *Niech $U \subseteq \mathbb{V}$, gdzie $\mathbb{V}$ jest przestrzenią Euklidesową (lub unitarną). Wtedy*

$\vec{0} \in U^\perp$

$\vec{v}, \vec{v}' \in U^\perp$

- $U^\perp \leq \mathbb{V}$ *jest przestrzenią liniową;*

$\alpha\vec{v}, \ \vec{v} + \vec{v}' \in U^\perp$

dowolne $\vec{u} \in U$

$\langle u, \alpha\vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

$\langle u, v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle = 0 + 0 = 0$

- $U \cap (U^\perp) \subseteq \{\vec{0}\}$*;*

$u \in U \cap U^\perp$ $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow u = \vec{0}$

U $U^\perp$

- $(U^\perp)^\perp \supseteq U$*.*

$(U^\perp)^\perp \supseteq U$ dowolny $\vec{u} \in U$

dowolne $\vec{v} \in U^\perp$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow u \in (U^\perp)^\perp$

Lemat 11.16. *Jeśli $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ jest bazą ortonogonalną przestrzeni Euklidesowej lub unitarnej $\mathbb{V}$, to*

$$\mathrm{LIN}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)^{\perp} = \mathrm{LIN}(\vec{b}_{k+1}, \dots, \vec{b}_n) \ .$$

W szczególności, jeśli $\mathbb{W} \le \mathbb{V}$ to

$$\overset{n-k}{\dim(\mathbb{W}^{\perp})} = \overset{n}{\dim \mathbb{V}} - \overset{k}{\dim \mathbb{W}} \ .$$

Weźmy b. ort. $b_1 \dots b_k$ dla W
wz. do b. ort. $b_1, \dots b_n$

· prostopadłe:

b_{k+j} : prostopadły do $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$

$\Rightarrow b_{k+j} \in LIN(b_1 \dots b_k)^{\perp}$

$$LIN(b_{k+1}, \dots, b_n) \le LIN(b_1, \dots b_k)^{\perp}$$

Weźmy dowolny $v \in LIN(b_1, \dots, b_k)^{\perp}$

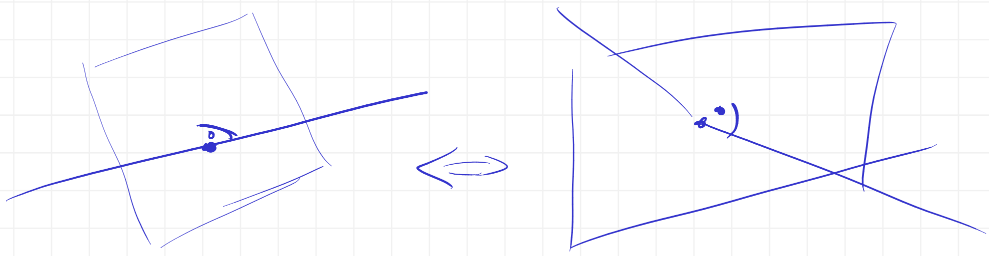
nie wprost: $\vec{v} \notin LIN(b_{k+1}, \dots, b_n)$

czyli jego reprezentacja w B ma jakiś $\alpha_j \neq 0$ dla $j \le k$

$\vec{v} = \sum \alpha_i b_i$

wiemy, że $\alpha_j = \langle v, b_j \rangle = 0$ ↯

$v \perp b_j$



· $\mathbb{R}^3$

Lemat 11.17. *Niech $\mathbb{V}$ będzie skończenie-wymiarową przestrzenią Euklidesową (lub unitarną) oraz niech $\overset{k}{\mathbb{W}} \leq \overset{n}{\mathbb{V}}$. Wtedy*

- $(\mathbb{W}^{\perp})^{\perp} = \mathbb{W}$.
- $\mathbb{W} + \mathbb{W}^{\perp} = \mathbb{V}$
- *dla każdego wektora $v \in \mathbb{V}$ reprezentacja $\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}_{\perp}$, gdzie $\vec{w} \in \mathbb{W}$ i $\vec{w}_{\perp} \in \mathbb{W}^{\perp}$ jest jedyna.*

$W \leq (W^{\perp})^{\perp}$ $\dim((W^{\perp})^{\perp}) = n - \dim(W^{\perp}) = n - (n-k) = k = \dim(W)$

ad 2 $b_1, \dots, b_k \leftarrow$ baza ort. $\mathbb{W}$

rozszerzamy $b_1, \dots, b_n \leftarrow$ baza ort $\mathbb{V}$

$b_{k+1}, \dots, b_n \leftarrow$ baza ort. $\mathbb{W}^{\perp}$

$$W + W^{\perp} = Lin(b_1 \dots b_n) = \mathbb{V}$$

ad 3 $W + W^{\perp} = \mathbb{V}$ $v \in \mathbb{V}$ $\vec{\omega} + \vec{\omega}_{\perp}$, $\vec{\omega} \in \mathbb{W}$, $\vec{\omega}_{\perp} \in \mathbb{W}^{\perp}$

$\overset{\omega}{\overrightarrow{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i}}$ $\overset{\omega_{\perp}}{\overrightarrow{\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i b_i}}$

$\omega', \omega_{\perp}'$

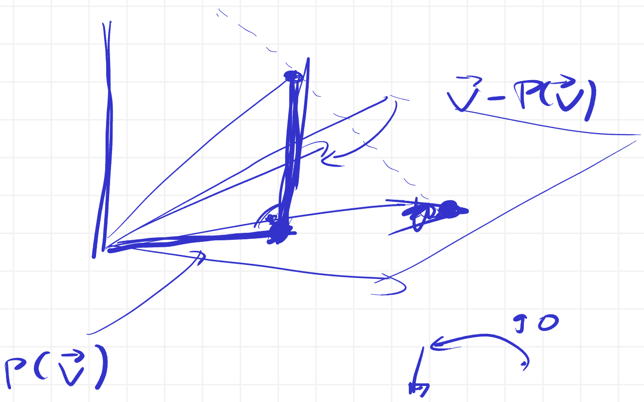
$\overrightarrow{\sum_i \alpha_i b_i} = \overrightarrow{\sum_i \beta_i b_i}$ $\overrightarrow{\sum_{i=1}^{k} \beta_i b_i}$ $\sum_{i=k+1}^{n} \beta_i b_i$

dwie różne repr. w bazie B ↯

11.3 Rzuty i rzuty prostopadłe.

Definicja 11.18 (Rzut, rzut prostopadły)**.** *Rzutem* nazywamy przekształcenie liniowe $P : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ takie że $P^2 = P$. O rzucie P mówimy, że jest *rzutem na podprzestrzeń* $\operatorname{Im} P$.

Rzut jest rzutem *prostopadłym* jeśli dla każdego $\vec{v}$ mamy $P(\vec{v}) \perp (\vec{v} - P(\vec{v}))$.



$\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$

1) $P : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$

$P|_{\mathbb{W}} = \mathrm{Id}$

$P : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

$$\begin{cases} \bullet \ \operatorname{Im} P = \mathbb{W} \\ \bullet \ P^2 = P \end{cases}$$

rzut na $\mathbb{W}$

Lemat 11.19. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową (unitarną) i $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Rzut prostopadły na $\mathbb{W}$ jest zdefiniowany jednoznacznie.*

Niech $P : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ będzie rzutem prostopadłym na $\mathbb{W}$. Jeśli $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ jest bazą ortogonalną $\mathbb{W}$ zaś $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$: przestrzeni $\mathbb{V}$, to

$$P_W\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{b}_i . \in W$$

$\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i b_i \in W^\perp$

Uwaga. Zauważmy, że skoro $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ jest bazą, to to definiuje P na całej przestrzeni $\mathbb{V}$.

$W, W^\perp$

Wniosek 11.20. Dla wektora $\vec{v}$ oraz P — rzutu prostopadłego na $\mathbb{W}$ — para $P(\vec{v})$, $\vec{v} - P(\vec{v})$ jest rozkładem $\vec{v}$ na wektory z $\mathbb{W}$, $\mathbb{W}^\perp$.

$\underset{\in W}{P_W(v)}, \quad \underset{\in W^\perp}{v - P_W(v)}$

d-d

Jeśli rzut prostopadły istnieje, to jest zdef. jednoznacznie

$b_1, \dots, b_k \to$ baza ortogonalna W

$b_1, \dots, b_n$ – // – V

1° rzut P jest na W, $\operatorname{Im} P = W$

$\exists \; v_1, \dots, v_k \qquad \underbrace{P \vec{v}_i = \vec{b}_i}$ $\qquad P\vec{b}_i = \vec{b}_i$, $1 \leq i \leq k$

$P^2 \vec{v}_i = P \vec{b}_i$

$P \vec{v}_i = \vec{b}_i$

$P(\vec{b}_i) \perp \vec{b}_i - P(\vec{b}_i)$

$\underline{0} = \langle P(b_i), \vec{b}_i - P(\vec{b}_i) \rangle$

$i > k \quad = \langle \underset{\in W}{P(b_i)}, \underset{\in W^\perp}{b_i} \rangle - \underbrace{\langle P(b_i), P(b_i) \rangle}_{\|P(b_i)\|^2}$

$= 0 - \|P(b_i)\|^2 = 0$

$\|P(b_i)\|^2 = 0 \Rightarrow P(b_i) = \vec{0}$.

$P\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{b}_i$ – dobrze określony rzut prost. na W

1° jest na $W \qquad \operatorname{Im} P \leq W \quad b_1, \dots, b_k \in W \qquad b_1 \dots b_k$

$w \in W \quad P(\vec{w}) = \vec{w}$

$\operatorname{Im} P = W$

2° rzut jest prostopadły

v $$P(\vec{v}) \perp \vec{v} - P(\vec{v})$$

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{b}_i \qquad P(v) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{b}_i$$

$$v - P(v) = \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_j b_j$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{b}_i , \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_j \vec{b}_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_i \alpha_j \underbrace{\langle b_i , b_j \rangle}_{0} = 0$$

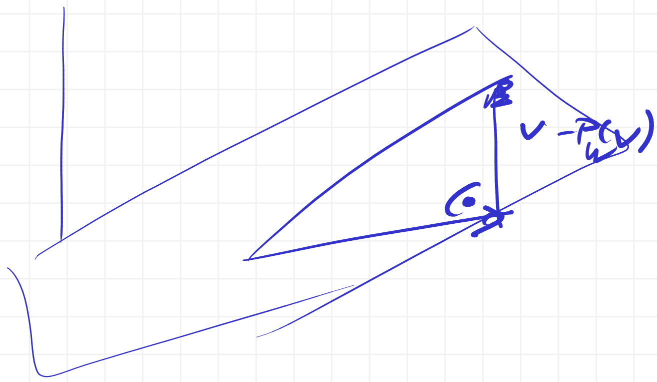
11.4 Algorytm Grama-Schmidta ortonormalizacji bazy

B ← baza

B' ← baza ortonormalna

$\underbrace{b_1, \dots, b_k}$ b_{k+1}

baza ortnorm. $LIN(b_1, \dots b_k)$



v_i $\quad \sum \alpha_j v_j$

$\sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, v_j \rangle v_j \quad \langle v_i, v_j \rangle$

Algorytm 1 Algorytm Gram-Schmidta ortonormalizacji

$\vec{v}_1 \leftarrow \frac{\vec{v}_1}{\sqrt{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle}}$ ▷ Normowanie

$v - P(v)$

for $i \leftarrow 2..n$ **do**

  $\vec{v}_i \leftarrow \vec{v}_i - \boxed{\sum_{j=1}^{i-1} \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle \vec{v}_j}$ rzut na $LIN(v_1', \dots, v_{i-1}')$ ▷ Odjęcie rzutu na przestrzeń rozpiętą przez $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}$

  if $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = 0$ **then**

    return Wektory są liniowo zależne.

  $\vec{v}_i \leftarrow \frac{\vec{v}_i}{\sqrt{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle}}$ ▷ Normowanie

Uwaga. Ostatni krok, w którym ortonormalizujemy kolejne wektory, nie jest w zasadzie potrzebny (i możemy dostać bazę ortogonalną), jednak w takim przypadku musimy zmienić odpowiednio wyrażenie na rzut prostopadły.

Twierdzenie 11.21. *Jeśli układ na wejściu algorytmu Grama-Schmidta był niezależny, to uzyskane wektory są układem ortonormalnym.*

Jeśli układ $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i$ był zależny i układ $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}$ był niezależny, to w czasie algorytmu przekształcimy $\vec{v}_i$ na $\vec{0}$.

1) v_i' ← zmieniony przez alg.

Jeśli $v_1, \ldots, v_{i-1}$ ← liniowo niez., to

$v_1', \ldots, v_{i-1}'$ ← układ ortonormalny

$$LIN(v_1, \ldots, v_{i-1}) = LIN(v_1', \ldots, v_{i-1}')$$

v_i

a) v_i liniowo zal. $\in LIN(v_1 \ldots v_{i-1}) = LIN(v_1', \ldots, v_{i-1}')$

$$P(v_i) = v_i$$

$$\|\underbrace{v_i - P(v_i)}_{=\vec{0}}\| = 0 \quad \leftarrow \text{alg.}$$

b) niez.

$$P(v_i) \perp \underbrace{v_i - P(v_i)}$$

Przykład 11.22. Dla standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^4$ zortonormalizujemy układ wektorów

$$\{(4,4,-2,0)^T;(1,4,1,0)^T;(5,-4,-7,1)^T\}$$

i uzupełnimy go do bazy ortonormalnej.

Oznaczmy zadane wektory jako $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Dokonamy ortonormalizacji bazy metodą Grama-Schmidta; niech $\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3'$ to wektory po tym procesie.

1) v_1 $\quad \langle v_1, v_1\rangle = 16+16+4 = 36$

$v_1' = \boxed{v_1 \cdot \frac{1}{6}}$

2) $v_2 - \langle v_1', v_2\rangle \cdot \vec{v}_1$

$\frac{1}{6}(4,4,-2,0)^T \cdot (1,4,1,0) = \frac{1}{6}\cdot(4+16-2) = \frac{1}{6}\cdot 18 = 3$

$v_2 - 3\cdot v_1' = v_2 - \frac{1}{2}\cdot v_1 =$
$(1,4,1,0) - (2,2,-1,0) = (-1,2,2,0)$

$\sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

$v_2' = \boxed{\frac{1}{3}\cdot(-1,2,2,0)}$

3) v_3 $\quad \frac{1}{6}(4,4,-2,0)\cdot(5,-4,-7,1)$
$= \frac{1}{6}(20-16+14) = 3$

$\frac{1}{3}(-1,2,2,0)(5,-4,-7,1)$
$= \frac{1}{3}(-5-8-14) = -9$

$(5,-4,-7,1) - \frac{1}{2}\cdot(4,4,-2,0) + 3\cdot(-1,2,2,0)$
$= \boxed{(0,0,0,1)}$ ← dł. 1

$\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}$ ←