Lista nr 8 z matematyki dyskretnej

1. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

   $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

   Wskazówka: Trzeba użyć funkcji tworzącej $\frac{1}{1-x}$.

2. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n^2$
   (b) $a_n = n^3$
   (c) $\binom{n+k}{k}$

   Wskazówka: Wszędzie przyda się funkcja tworząca $\frac{1}{1-x}$. W ostatnim podpunkcie będzie to odpowiednia potęga tej funkcji.

3. Oblicz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych n
   (b) $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ $(H_0 = 0)$.

4. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Znajdź funkcję tworzącą ciągu b_n postaci $(a_0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_6, \ldots)$, czyli takiego, że dla każdego naturalnego k, $b_{3k} = a_{3k}$ oraz $b_{3k+1} = b_{3k+2} = 0$.

   Wskazówka: Użyj zespolonych pierwiastków stopnia 3 z 1.

5. (-) Przekonaj się, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieje 11 grafów z czterema wierzchołkami.

6. Niech Q_k oznacza graf k-wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k-elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Oblicz, ile wierzchołków i krawędzi ma graf Q_k.

7. Problem izomorfizmu dwóch grafów jest trudny. Załóżmy natomiast, że w komputerze są dane dwa grafy G i H, określone na tym samym zbiorze wierzchołków $V(G) = V(H) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Niech m oznacza liczbę krawędzi grafu G. Podaj algorytm sprawdzający w czasie $O(m + n)$, czy te grafy są identyczne.

8. Rozważ reprezentacje grafu G: macierzową (za pomocą macierzy sąsiedztwa), listową. Dla każdej z tych reprezentacji, określ złożoność wykonania na grafie G następujących operacji:

   (a) oblicz stopień ustalonego wierzchołka,

   (b) przeglądnij wszystkie krawędzie grafu,

   (c) sprawdź, czy krawędź (u, v) należy do grafu G,

   (d) usuń z grafu G krawędź (u, v),

   (e) wstaw do grafu G krawędź (u, v).

9. (-) Niech $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ będzie ciągiem stopni wierzchołków grafu prostego. Podaj algorytm porządkowania ciągu d działający w czasie $O(n)$.

10. Pokaż, że jeśli w grafie G istnieje droga z u do v, to istnieje też scieżka z u do v.