

Lista nr 11 z matematyki dyskretnej

1. Digraf D jest dany w postaci macierzy sąsiedztwa. Wykaż, że sprawdzenie, czy D zawiera źródło, czyli wierzchołek, z którego wychodzą łuki do wszystkich pozostałych wierzchołków, ale nie wchodzi do niego żaden łuk, może być wykonane w czasie liniowym względem liczby wierzchołków w D . Zapisz swój algorytm w języku programowania i określ dokładnie jego złożoność obliczeniową, jako funkcję zmiennej liczby wierzchołków w digrafie.
2. Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie $O(m + n)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i, j) jest krawędzią skierowaną w D , to $i < j$.
3. Digraf, w którym każda para różnych wierzchołków jest połączona dokładnie jedną krawędzią skierowaną, nazywamy turniejem. Pokaż, że w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego wierzchołka po drodze o długości co najwyżej 2.
4. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki.
5. Czy n -wymiarowa kostka zawiera ścieżkę Hamiltona?
6. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym nieskierowanym z wagami na krawędziach $c : E \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$. Św. Mikołaj chce rozwiązać prezenty do mieszkańców wszystkich ulic - każda ulica jest reprezentowana jako krawędź w G . Jak obliczyć trasę dla Św. Mikołaja, w której przejeżdża on każdą ulicą *przynajmniej* raz i która jest minimalna wagowo?
Wskazówka: Zakładamy, że mamy do dyspozycji wielomianowy algorytm obliczający skojarzenie doskonałe o minimalnej wadze.
7. Krawędzie pewnego grafu G pokolorowano na czerwono i niebiesko. Kiedy graf ten zawiera drzewo rozpinające niemonochromatyczne?
8. Krawędzie pewnego grafu spójnego G niezawierającego pętli ani krawędzi równoległych pokolorowano na czerwono, zielono i niebiesko. G ma

przynajmniej 4 krawędzie oraz przynajmniej jedną krawędź każdego z trzech kolorów. Czy graf ten w każdym przypadku zawiera drzewo rozpinające trójkolorowe?

A gdyby kolorów było cztery i G był dodatkowo dwudzielny, czy zawsze zawierałby drzewo rozpinające zawierające przynajmniej jedną krawędź każdego z czterech kolorów? Czy dwudzielność jest potrzebna?

9. (-) Udowodnij lub obal: Nie istnieje graf eulerowski (tj. zawierający cykl Eulera) o parzystej liczbie wierzchołków i nieparzystej liczbie krawędzi.
10. Rozwiąż problem cyklu/drogi Eulera w grafach skierowanych.