

Zadanie 2

Najpierw policz ile jest liczb niezawierających cyfry 9.

Każdą z nich można przedstawić w następujący sposób:

$$\underline{c_9} \ \underline{c_8} \ \underline{c_7} \ \underline{c_6} \ \underline{c_5} \ \underline{c_4} \ \underline{c_3} \ \underline{c_2} \ \underline{c_1} \ \underline{c_0}$$

$$\text{liczba} = c_0 \cdot 10^0 + c_1 \cdot 10^1 + c_2 \cdot 10^2 + \dots + c_9 \cdot 10^9$$

Ten sposób nie uwzględnia liczb 10^{10} , jednak nie przeszkadza to w obliczeniach, ponieważ zawiera liczbę 0, obie z nich są takie same pod względem zawierania cyfry 9

Na każdej pozycji możemy wybrać cyfrę na 9 sposobów, zatem jest $9^{10} = 3486784401$ liczb niezawierających cyfry 9

Zatem liczb zawierających cyfrę 9 jest $10^{10} - 9^{10} = 6513215599$, więc jest ich więcej niż liczb niezawierających ~~cyfry~~ cyfry 9

Zadanie 3

n -elementowy zbiór ma 2^{n-1} podzbiorów o nieparzystej ilości elementów i tyle samo podzbiorów o parzystej ilości elementów

Dowód indukcyjny:

Podstawa: $n=1$

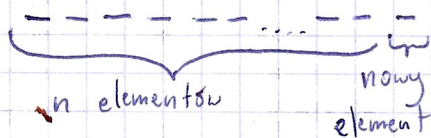
Zbiór 1-elementowy zawiera 1 podzbiór o nieparzystej ilości elementów, jest to podzbiór zawierający jedyny element, i 1 podzbiór pusty

$$1 = 2^{1-1} = 2^0$$

Krok indukcyjny:

Weźmy dowolny ~~n~~ i założymy, że dla n zachodzi warunek ~~*~~
zbiór n -elementowy

Rozszerzmy ten zbiór o jeden element



Ile podzbiorów parystych ma nowy zbiór? Podzielmy te podzbiory na 2 grupy: te zawierające nowy element i te niezawierające nowego elementu

- zawiera

Jeśli podzbiór zawiera nowy element, to musi zawierać nieparzystą liczbę elementów spośród poprzednich n elementów zbioru

Zatem wszystkich parystych podzbiorów zawierających nowy element jest tyle, ile nieparzystych podzbiorów w zbiorze n -elementowym: 2^{n-1}

- nie zawiera

Jeśli podzbiór nie zawiera nowego elementu, to musi zawierać parzystą liczbę elementów spośród poprzednich n elementów zbioru. Zatem wszystkich parystych podzbiorów niezawierających nowego elementu jest tyle, ile parystych podzbiorów w zbiorze n -elementowym, czyli: 2^{n-1}

$$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$$

Zatem zbiór $(n+1)$ -elementowy zawiera 2^n podzbiorów o parzystej liczbie elementów. Wszystkich podzbiorów jest 2^{n+1} , zatem tych o nieparzystej liczbie elementów jest $2^{n+1} - 2^n = 2^n$

Zatem dla każdej $n \geq 1$ również spełniony jest warunek *

Zatem na mocy indukcji dla każdego $n \geq 1$ zbiór n -elementowy ma 2^{n-1} podzbiorów o parzystej i nieparzystej liczbie elementów

Zadanie 4

Każda osoba ma 4 możliwości: albo nigdzie nie pojedzie, albo tylko do kantonu, albo tylko nał wódosped, albo na to i to.

Zatem jest 4^n możliwości sformowania wyjazdów

Zadanie 6

Jeśli suma dwóch liczb jest parzysta, to albo obie liczby są parzyste, albo obie są nieparzyste.

Dla n parzystego:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{n}{2} & \cdot & \frac{n}{2} & + & \frac{n}{2} & \cdot & \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2} \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \\ \text{parzyste} & & \text{nieparzyste} & & & & \end{array}$$

Dla n nieparzystego:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{n-1}{2} & \cdot & \frac{n-1}{2} & + & \frac{n+1}{2} & \cdot & \frac{n+1}{2} = \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2 - 2n + 1 + n^2 + 2n + 1}{4} = \frac{2n^2 + 2}{4} = \frac{n^2 + 1}{2} \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \\ \text{parzyste} & & \text{nieparzyste} & & & & \end{array}$$

Zadanie 12

Rumianki możemy podzielić pomiędzy 2 dzieci na 11 sposobów: pierwsze dziecko może otrzymać 0, albo 1, albo 2, ..., albo 10 rumianków.

11 możliwości

Blawatki możemy podzielić na 17 sposobów, niezapominając na 15 sposobów. Zatem wynikiem jest $11 \cdot 17 \cdot 15 = 2805$

Zadanie 13

Ilość sposobów podzielenia jednego dnia: $\underline{13} \cdot \underline{13} \cdot \underline{13} \cdot \underline{13} \cdot \underline{13} \cdot \underline{13} \cdot \underline{13} = 13^7$

Dni jest 7, zatem tę liczbę należy podnieść do 7 potęgi

$$(13^7)^7 = 13^{49}$$

Profesor może wysłać wiadomości na 13^{49} sposobów