Marcin Sarnecki 323034 zadanie nr 5

Wyznacz promień zbieżności R. Rozstrzygnij zbieżność w punktach krańcowych

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n^2}$$

• dla $x = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n! = +\infty$ szereg rozbieżny

• dla $x > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} n! = +\infty$ szereg rozbieżny

• niech $x \in (0,1)$ korzystam z kryterium d'Alemberta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! \cdot x^{(n+1)^2}}{n! \cdot x^{n^2}} = (n+1)\, x^{2n+1} < (n+1) x^n$$

Korzystam z kryterium Cauchy'ego - szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n$ jest zbieżny

$$\sqrt[n]{(n+1)x^n} \xrightarrow{n \to \infty} x < 1$$

szereg jest zbieżny, więc jego wyrazy dążą do zera, zatem na mocy kryterium d'Alemberta $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n^2}$ jest zbieżny dla $x \in (0,1)$

• niech $x = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n^2} = \underbrace{(-1! + 2!)}_{1 \leq} + \underbrace{(-3! + 4!)}_{1 \leq} + \underbrace{(-5! + 6!)}_{1 \leq} + \ldots = +\infty$

Zatem promieniem zbieżności jest $R = 1$, dla $x = \{-R, R\}$ szereg jest rozbieżny