

Lista nr 5 z matematyki dyskretnej

1. (-) Stosując metodę podstawiania rozwiąż następujące zależności rekurencyjne
 - (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.
 - (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.
2. Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:
 - (a) $a_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2} \right\rfloor$, $a_0 = a_1 = 1$,
 - (b) $b_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{b_n^2 + 3} \right\rfloor$, $b_0 = 8$,
 - (c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2 + n)c_{n-1}$, $c_0 = 0$, $c_1 = 1$.
3. (-) Rozwiąż zależności rekurencyjne:
 - (a) $c_0 = 1, c_n = c_0 + c_1 + \dots, c_{n-1}$
 - (b) $d_0 = 1, d_1 = 2, d_n = d_{n-1}^2/d_{n-2}$.
4. Wykaż, że iloczyn dowolnych kolejnych k liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$.
5. Wyprowadź zależność rekurencyjną dla liczby nieporządków: $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. Jakie należy przyjąć warunki początkowe dla tej zależności?
6. Rozwiąż zależność rekurencyjną
$$a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$$
z warunkiem początkowym $a_0 = 2$ i założeniem, że $a_n > 0$ dla każdego naturalnego n .
7. Ile jest wyrazów złożonych z n liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzystą liczbę liter a ?
8. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:
 - (a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.
 - (b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

(c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

9. Niech c_n oznacza liczbę ciągów długości n złożonych z n cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, nie zawierających dwóch następujących po sobie zer i dwóch następujących po sobie jedynek. Wyprowadź zależność rekurencyjną, jaką spełniają liczby c_n przyjmując $c_0 = 1$. Rozwiąż otrzymaną zależność rekurencyjną.
10. Na ile sposobów można rozdać n różnych nagród wśród czterech osób A, B, C, D tak, aby:
- (a) A dostała przynajmniej jedną nagrodę?
 - (b) A lub B nie dostała nic?
 - (c) Zarówno A jak i B dostała przynajmniej jedną nagrodę?
 - (d) Przynajmniej jedna spośród A, B, C nic nie dostała?
 - (e) Każda z 4 osób coś dostała?