Marcin Sarnecki 323034

Zadanie 152

Sprawdź, czy podana formuła jest prawem rachunku kwantyfikatorów

$$((\forall_x \phi) \Leftrightarrow \neg(\forall_x \psi)) \Rightarrow \exists_x (\phi \Leftrightarrow \neg\psi)$$

Załóżmy nie wprost, że podana formuła nie jest prawem rachunku kwantyfikatorów. Wtedy równoważność $(\forall_x \phi) \Leftrightarrow \neg(\forall_x \psi)$ musi być prawdą, a $\exists_x (\phi \Leftrightarrow \neg\psi)$ fałszem. Rozważę oba przypadki, w których $(\forall_x \phi) \Leftrightarrow \neg(\forall_x \psi)$ jest prawdą:

- $\forall_x \phi$ oraz $\neg(\forall_x \psi)$ jest prawdą. $\exists_x (\phi \Leftrightarrow \neg\psi)$ jest fałszem, więc $\neg(\exists_x (\phi \Leftrightarrow \neg\psi)) \equiv \forall_x \neg(\phi \Leftrightarrow \neg\psi) \equiv \forall_x (\phi \Leftrightarrow \psi)$. Zatem otrzymujemy sprzeczność z założeniami $\forall_x \phi$ oraz $\neg(\forall_x \psi)$

- $\forall_x \phi$ oraz $\neg(\forall_x \psi)$ jest fałszem. Wtedy $\forall_x \psi$ jest prawdą, tak samo jak $\exists_x \neg\phi$. Znowu dochodzę do sprzeczności, ponieważ $\forall_x (\phi \Leftrightarrow \psi)$ musi być prawdą, $\forall_x \psi$ jest prawdą, ale istnieje taki x, że ϕ jest fałszem

W każdym przypadku doszedłem do sprzeczności, zatem formuła z treści zadania jest prawem rachunku kwantyfikatorów