

Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2022

Najkrótsze ścieżki

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym.

Jak znaleźć najkrótszą ścieżkę z s do t ?

Jak znaleźć najkrótszą ścieżkę z s do v dla każdego wierzchołka $v \in V$?

Najkrótsze ścieżki

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach $c : E \rightarrow R \geq 0$.

Waga ścieżki P to suma wag krawędzi leżących na P .

Najlżejsza / najkrótsza (względem c) ścieżka z s do t to ta ze ścieżek z s do t , która ma najmniejszą wagę.

Jak znaleźć najkrótszą (wzgl. c) ścieżkę z s do t ?

Jak znaleźć najkrótszą (wzgl. c) ścieżkę z s do v dla każdego wierzchołka $v \in V$?

Najkrótsze ścieżki

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach $c : E \rightarrow R \geq 0$,
a s ustalonym wierzchołkiem z V .

Niech $S \subseteq V$. Ścieżka P z s do v jest **prawie S -owa / osiągalna bezpośrednio z S** jeśli wszystkie wierzchołki na P oprócz v są w S .

$d(v)$ - waga najkrótszej ścieżki z s do v

$t(v)$ - waga najkrótszej prawie S -owej ścieżki z s do v ; jeśli takiej ścieżki nie ma, to $t(v) = \infty$

Algorytm Dijkstry

$G = (V, E)$ - graf spójny; $c : E \rightarrow R \geq 0$, $s \in V$

$d(v)$ - waga najkrótszej ścieżki z s do v

$t(v)$ - waga najkrótszej prawie S -owej ścieżki z s do v ; jeśli takiej ścieżki nie ma, to $t(v) = \infty$

$S \leftarrow \{s\}$, $d(s) \leftarrow 0$

dla każdego sąsiada v wierzchołka s : $t(v) \leftarrow c(s, v)$

dla pozostałych wierzchołków: $t(v) \leftarrow \infty$

dopóki $S \neq V$ wykonaj:

$u \leftarrow \operatorname{argmin}\{t(u) : u \notin S\}$

dodaj u do S

zaktualizuj wartości $t(v)$:

dla każdego sąsiada $v \notin S$ wierzchołka u :

$t(v) \leftarrow \min\{t(v), d(u) + c(u, v)\}$

Jak zmodyfikować algorytm Dijkstry, by znajdować najkrótsze ścieżki a nie tylko wagi najkrótszych ścieżek?

Czy algorytm ten działa również:

- w grafach skierowanych?
- gdy wagi krawędzi mogą być ujemne?

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem a $W \subseteq V$ podzbiorem wierzchołków.

Sąsiedztwo W oznaczane jako $N(W)$ definiujemy jako zbiór
 $\{v \in V : \exists_{w \in W} \{v, w\} \in E\}.$

Niech $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym.

Warunek Halla

Dla każdego $A' \subseteq A$ zachodzi $|N(A')| \geq |A'|$ oraz dla każdego $B' \subseteq B$ zachodzi $|N(B')| \geq |B'|.$

Skojarzenie doskonałe w grafie dwudzielnym

Niech $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym.

Warunek Halla

Dla każdego $A' \subseteq A$ zachodzi $|N(A')| \geq |A'|$ oraz dla każdego $B' \subseteq B$ zachodzi $|N(B')| \geq |B'|$.

Skojarzenie doskonałe w grafie dwudzielnym

Graf dwudzielnym G zawiera skojarzenie doskonałe wtw, gdy spełniony jest w nim warunek Halla.

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem.

Pokrycie wierzchołkowe grafu G to dowolny podzbiór $V' \subseteq V$ taki, że każda krawędź z E ma przynajmniej jeden z końców w V' .

Najmniejsze pokrycie wierzchołkowe grafu G to to spośród pokryć wierzchołkowych G , które zawiera najmniej wierzchołków.

Pokrycie wierzchołkowe a skojarzenie

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem.

Pokrycie wierzchołkowe grafu G to dowolny podzbiór $V' \subseteq V$ taki, że każda krawędź z E ma przynajmniej jeden z końców w V' .

Niech M będzie jakimś skojarzeniem G a W jakimś pokryciem wierzchołkowym.

Czy możemy jakoś porównać $|M|$ i $|W|$? $|M| \leq |W|$? $|M| \geq |W|$

Pokrycie wierzchołkowe a skojarzenie

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem.

Niech M będzie jakimś skojarzeniem G a W jakimś pokryciem wierzchołkowym.

Wtedy $|M| \leq |W|$.

Pokrycie wierzchołkowe a skojarzenie

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem.

Niech M_{max} będzie największym skojarzeniem G a W_{min} najmniejszym pokryciem wierzchołkowym.

Wtedy $|M_{max}| \leq |W_{min}|$.

A może zachodzi równość?

Twierdzenie Koeniga

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem dwudzielnym, M_{max} największym skojarzeniem G a W_{min} najmniejszym pokryciem wierzchołkowym. Wtedy $|M_{max}| = |W_{min}|$.