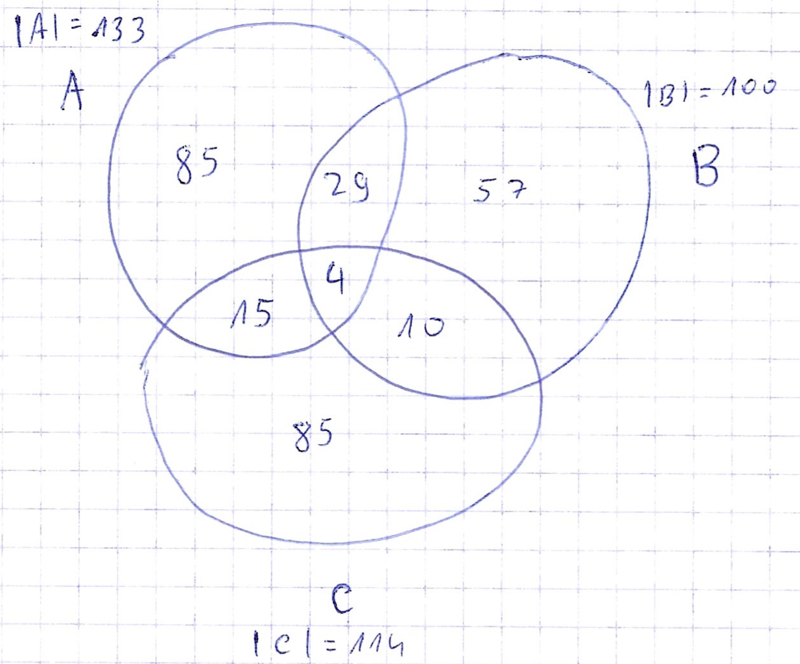
Zadanie 1

A - zbiór liczb podzielnych przez 6 wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 800$

B - zbiór liczb podzielnych przez 8 wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 800$

C - zbiór liczb podzielnych przez 7 wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 800$



$|A| = \left\lfloor \frac{800}{6} \right\rfloor = 133$

$|B| = \left\lfloor \frac{800}{8} \right\rfloor = 100$

$|C| = \left\lfloor \frac{800}{7} \right\rfloor = 114$

Zacznijmy od liczb podzielnych ~~prze~~ jednocześnie przez 6, 7 i 8.
Najmniejsza wspólna wielokrotność 6, 7 i 8 to $NWW(7, NWW(6,8))$
$= NWW(7, 24) = 7 \cdot 24 = 168$, zatem $|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{800}{168} \right\rfloor = 4$

Następnie obliczamy $|A \cap B|$, $|A \cap C|$, $|B \cap C|$

$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{800}{24} \right\rfloor = 33 \Rightarrow |(A \cap B) \setminus C| = 29$

$|A \cap C| = \left\lfloor \frac{800}{42} \right\rfloor = 19 \Rightarrow |(A \cap C) \setminus B| = 15$

$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{800}{56} \right\rfloor = 14 \Rightarrow |(B \cap C) \setminus A| = 10$

Z rysunku uzupełniam $|A \setminus (B \cup C)| = 133 - 29 - 4 - 15 = 85$

$|B \setminus (A \cup C)| = 100 - 4 - 10 - 29 = 57$

$|C \setminus (A \cup B)| = 114 - 15 - 4 - 10 = 85$

Ostatecznym wynikiem jest $85 + 29 + 57 = 171$

Zadanie 2

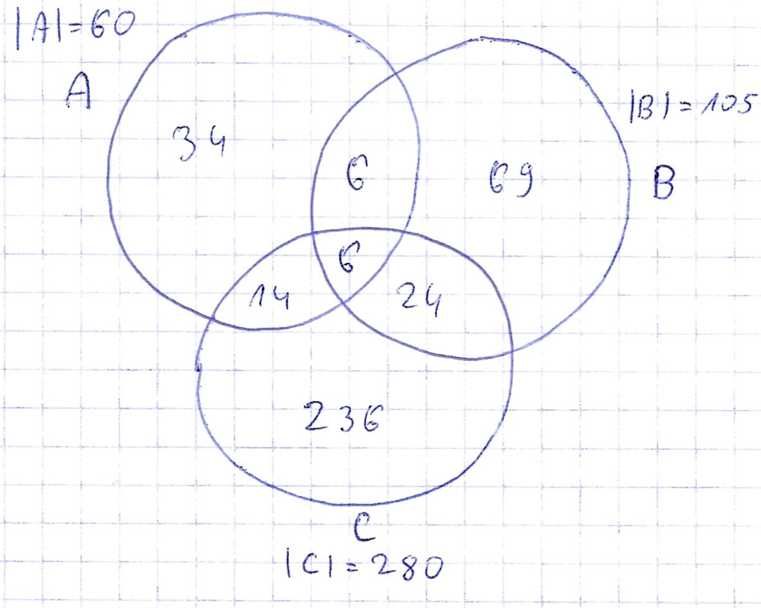
A - zbiór ustawień w których aaaa są w jednym bloku
B - zbiór ustawień w których bbb są w jednym bloku
C - zbiór ustawień w których cc są w jednym bloku

$|A| = 6 \cdot \binom{5}{2} = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 60$ ponieważ 6 możliwości pozycji początkowej dla bloku aaaa, następnie $\binom{5}{2}$ możliwości ustawień reszty liter (na przykład wybór dwóch pozycji dla liter c spośród 5 pozostałych miejsc)

W ten sam sposób liczę $|B|$ i $|C|$

$|B| = 7 \cdot \binom{6}{2} = 105$

$|C| = 8 \cdot \binom{7}{3} = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 280$



$|A \cap B \cap C| = 3! = 6$ ponieważ 3! sposobów ustawienia 3 bloków pomiędzy sobą

$|A \cap B| = 2 \cdot \binom{2+3-1}{3-1} = 2 \cdot \binom{4}{2} = 2 \cdot 6 = 12$

kolejność aaaa i bbb

mamy do ustawienia dwie literki c oraz 3 możliwości miejsc: _aaaa_bbb_, wzór z wykładu na ile sposobów można wrzucić n kulek do k szuflad: $\binom{n+k-1}{k-1}$

W ten sam sposób liczę $|A \cap C|$ i $|B \cap C|$

$|A \cap C| = 2 \cdot \binom{3+3-1}{3-1} = 2\binom{5}{2} = 20$

$|B \cap C| = 2\binom{4+3-1}{3-1} = 2\binom{6}{2} = 30$

Z zasady włączeń - wyłączeń

$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$

$= 60 + 105 + 280 - 12 - 20 - 30 + 6 = 389$

Zatem jest 389 ustawień w których występuje przynajmniej jeden blok tych samych liter

Wszystkich ustawień jest $\binom{9}{4}\binom{5}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 5}{2} =$

$= 7\cdot 6\cdot 3\cdot 2\cdot 5 = 1260$

Więc końcową odpowiedzią jest $1260 - 389 = 871$

Zadanie 3

A - zbiór wszystkich permutacji n-elementowych

A_i - zbiór permutacji, w których $i\in N$ jest na swoim miejscu

Wtedy $d_n = |A \setminus (A_1\cup A_2\cup A_3\cup\dots\cup A_n)| = |A\setminus(\bigcup_{i\in N} A_i)|$

Korzystając z zasady włączeń i wyłączeń:

$$d_n = n! - \Big(\sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i,j:\, i<j}|A_i\cap A_j| + \sum_{i,j,k:\, i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1}|A_1\cap\dots\cap A_n|\Big)$$

$$= n! - \Big(n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \binom{n}{4}(n-4)! + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}0!$$

wszystkie permutacje

dla danej liczby elementów na swoich pozycjach liczymy na ile sposobów możemy je wybrać z symbolu Newtona, następnie resztę elementów ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby, stąd $\binom{n}{i}(n-i)!$

$$= n! - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}(n-i)! = n! - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{n!}{i!}$$

$$= n!\Big(1 - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{1}{i!}\Big) = n!\Big(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\Big)$$

$$= n!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots - (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\Big)$$

Zadanie 9)

A_n - liczba sposobów wejścia po schodach z n stopniami

$A_1 = 1$

$A_2 = 2$, ponieważ albo 1 krok po 2 schodki, albo 2 kroki po 1 schodku

Dla dowolnego $n > 2$ zastanówmy się nad ostatnim krokiem:

- jeśli ostatni krok ma długość 1, to do liczby sposobów należy dodać liczbę sposobów przejścia $n-1$ schodków
- jeśli ostatni krok ma długość 2, to do liczby sposobów należy dodać liczbę sposobów przejścia $n-2$ schodków

Otrzymujemy $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$

Zatem liczby różnych sposobów wejścia są liczbami Fibonacciego

Zadanie 10)

Wszystkich sposobów jest oczywiście $\binom{7}{3}^7$

$|A| = \binom{7}{3}^7$

Oznaczmy zbiór A_i dla $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ jako zbiór sposobów wysłania zaproszeń tak, że i-ty przyjaciel nigdy nie będzie zaproszony

Obliczmy $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7|$ używając zasady wł-wył:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_7| = \sum_{i=1}^{7} |A_i| - \sum_{i,j:i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k:i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{i,j,k,l:i<j<k<l} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l|$$

Obliczenia we wzorze kończymy na przekrojach 4 zbiorów, ponieważ przekroje 5 i więcej zbiorów są puste - jeśli nie zaprosimy co najmniej 5 osób to dochodzimy do logicznej sprzeczności z treścią zadania

$$\sum_{i=1}^{7} |A_i| = 7 \cdot \binom{6}{3}^7$$

$$\sum_{i,j:i<j} |A_i \cap A_j| = \underbrace{\binom{7}{2}}_{\text{wybór 2 osób}} \cdot \underbrace{\binom{5}{3}^7}_{\text{reszta spośród 5 osób, przez 7 dni więc potęga o wykładniku 7}}$$

$$\sum_{\substack{i,j,k:\\ i<j<k}} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \underbrace{\binom{7}{3}}_{\text{wybór 3 osób}} \underbrace{\binom{4}{3}^7}_{\text{reszta przez 7 dni}}$$

$$\sum_{\substack{i,j,k,l:\\ i<j<k<l}} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = \underbrace{\binom{7}{4}}_{\text{wybór 4 osób}} \underbrace{\binom{3}{3}^7}_{=1 \text{ bo zostały tylko 3 osoby}} = \binom{7}{4}$$

Ostateczny wynik:

$$\binom{7}{3}^7 - 7\binom{6}{3}^7 + \binom{7}{2}\binom{5}{3}^7 - \binom{7}{3}\binom{4}{3}^7 + \binom{7}{4}$$

Zadanie 11)

Użyję indukcji: dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi $nwd(F_n, F_{n+1}) = 1$

Podstawa

$n = 1 \quad F_1 = 1 \quad F_2 = 1$ ✓

$nwd(1,1) = 1$

Krok indukcyjny: weźmy dowolne $n \geq 1$ i załóżmy, że zachodzi $nwd(F_n, F_{n+1}) = 1$

$$\begin{aligned} nwd(F_{n+1}, F_{n+2}) &= nwd(F_{n+1}, F_{n+1} + F_n) && \text{z definicji } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ &= nwd(F_{n+1}, F_n) && \text{z własności } nwd(a, a+b) = nwd(a,b) \\ &= 1 && \text{z założenia} \end{aligned}$$

Zatem każde dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze