Marcin Sarnecki 323034

Zadanie 2

Najpierw policzę ile jest liczb niezawierających cyfry 9.
Każdą z nich można przedstawić w następujący sposób:

$$\underline{c_9}\ \underline{c_8}\ \underline{c_7}\ \underline{c_6}\ \underline{c_5}\ \underline{c_4}\ \underline{c_3}\ \underline{c_2}\ \underline{c_1}\ \underline{c_0}$$

$$\text{liczba} = c_0 \cdot 10^0 + c_1 \cdot 10^1 + c_2 \cdot 10^2 + \ldots + c_9 \cdot 10^9$$

Ten sposób nie uwzględnia liczby 10^{10}, jednak nie przeszkadza to w obliczeniach, ponieważ zawiera liczbę 0, obie z nich są takie same pod względem zawierania cyfry 9

Na każdej pozycji możemy wybrać cyfrę na 9 sposobów, zatem jest $9^{10} = 3486784401$ liczb niezawierających cyfry 9

Zatem liczb zawierających cyfrę 9 jest $10^{10} - 9^{10} = 6513215599$, więc jest ich więcej niż liczb niezawierających cyfry 9

Zadanie 3

n-elementowy zbiór ma 2^{n-1} podzbiorów o nieparzystej ilości elementów i tyle samo podzbiorów o parzystej ilości elementów

Dowód indukcyjny:

Podstawa: $n=1$

Zbiór 1-elementowy zawiera 1 podzbiór o nieparzystej ilości elementów, jest to podzbiór zawierający jedyny element, i 1 podzbiór pusty

$1 = 2^{1-1} = 2^0$

Krok indukcyjny:

Weźmy dowolny zbiór n-elementowy i załóżmy, że dla n zachodzi warunek *

Rozszerzmy ten zbiór o jeden element

$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \dots\ \_\ \_}_{n\ \text{elementów}}\ \underbrace{\_}_{\text{nowy element}}$

Ile podzbiorów parzystych ma nowy zbiór? Podzielmy te podzbiory na 2 grupy: te zawierające nowy element i te niezawierające nowego elementu

• zawiera

Jeśli podzbiór zawiera nowy element, to musi zawierać nieparzystą liczbę elementów spośród poprzednich n elementów zbioru. Zatem wszystkich parzystych podzbiorów zawierających nowy element jest tyle, ile nieparzystych podzbiorów w zbiorze n-elementowym: 2^{n-1}

• nie zawiera

Jeśli podzbiór nie zawiera nowego elementu, to musi zawierać parzystą liczbę elementów spośród poprzednich n elementów zbioru. Zatem wszystkich parzystych podzbiorów niezawierających nowego elementu jest tyle, ile parzystych podzbiorów z zbiorze n-elementowym, czyli 2^{n-1}

$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$

Zatem zbiór $(n+1)$-elementowy zawiera 2^n podzbiorów o parzystej liczbie elementów. Wszystkich podzbiorów jest 2^{n+1}, zatem tych o nieparzystej liczbie elementów jest $2^{n+1} - 2^n = 2^n$

Zatem dla liczby $n+1$ również spełniony jest warunek *

Zatem na mocy indukcji dla każdego $n \geq 1$ zbiór n-elementowy ma 2^{n-1} podzbiorów o parzystej i nieparzystej liczbie elementów

---

Zadanie 4

Każda osoba ma 4 możliwości: albo nigdzie nie pojedzie, albo tylko do kanionu, albo tylko nad wodospad, albo na to i to.

Zatem jest 4^n możliwości uformowania wycieczek

Zadanie 6

Jeśli suma dwóch liczb jest parzysta, to albo obie liczby są parzyste, albo obie są nieparzyste.

Dla n parzystego:

$$\underbrace{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}}_{\text{parzyste}} + \underbrace{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}}_{\text{nieparzyste}} = \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2}$$

Dla n nieparzystego:

$$\underbrace{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}_{\text{parzyste}} + \underbrace{\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}_{\text{nieparzyste}} = \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-2n+1+n^2+2n+1}{4} = \frac{2n^2+2}{4} = \frac{n^2+1}{2}$$

Zadanie 12

Rumianki możemy podzielić pomiędzy 2 dzieci na 11 sposobów: pierwsze dziecko może otrzymać $\underbrace{0, \text{ albo } 1, \text{ albo } 2, \ldots, \text{ albo } 10}_{11 \text{ możliwości}}$ rumianków.

Bławatki możemy podzielić na 17 sposobów, niezapominajki na 15 sposobów. Zatem wynikiem jest $11 \cdot 17 \cdot 15 = 2805$

Zadanie 13

Ilość sposobów podczas jednego dnia: $\underline{13}\cdot\underline{13}\cdot\underline{13}\cdot\underline{13}\cdot\underline{13}\cdot\underline{13}\cdot\underline{13} = 13^7$

Dni jest 7, zatem tę liczbę należy podnieść do 7 potęgi

$(13^7)^7 = 13^{49}$

Profesor może wysłać widokówki na 13^{49} sposobów