Zadanie 1)

Załóżmy nie wprost, że w grafie G istnieją dwa różne minimalne drzewa rozpinające A i B

Niech e będzie najlżejszą krawędzią w drzewie A, której nie zawiera drzewo B, oraz v i u będą wierzchołkami, które łączy krawędź e

Jeśli dodamy e do drzewa B, to powstanie w nim cykl, który nie istnieje w drzewie A

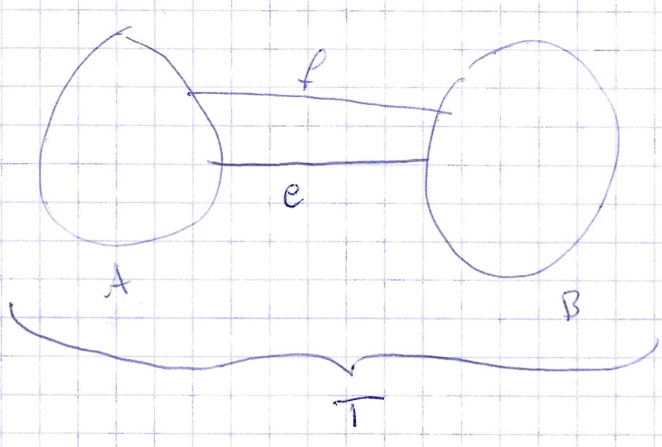
Oznacza to, że na ścieżce pomiędzy v i u w drzewie B istnieje krawędź nie występująca w drzewie A, nazwijmy ją f

Zauważmy, że skoro e jest najmniejszą krawędzią w A, której nie ma w B, a krawędź f jest w B, ale nie ma jej w A, to f jest cięższa niż e

Zatem jeśli usuniemy w B krawędź f i dodamy krawędź e, to otrzymamy mniejsze drzewo, zatem B nie jest MST, co dowodzi, że w grafie o różnych wagach krawędzi istnieje tylko jedno MST

Zadanie 2)

Załóżmy nie wprost, że T zawiera najcięższą krawędź z cyklu C. Nazwijmy ją e. Usunięcie e spowodowałoby rozdzielenie T na dwie spójne składowe A i B.



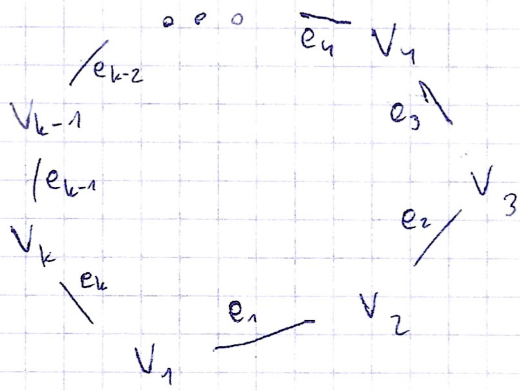
Krawędź e leży na cyklu C, zatem A i B mogłyby zostać połączone pewną krawędzią $f \in C$

Skoro e jest najcięższa na cyklu C, to f jest lżejsza od e. Zamieniając e na f, uzyskalibyśmy lżejsze drzewo, zatem T nie jest MST, sprzeczność.
Zatem T nie może zawierać jakieś najcięższej krawędzi z cyklu C

(W przypadku, gdy w C byłoby kilka krawędzi o największej wadze, to jeśli f miałoby taką samą wagę jak e, to drzewo T wprost nie zawierałoby jakieś najcięższej krawędzi z cyklu C)

Zadanie 5)

Załóżmy nie wprost, że podczas pewnej iteracji algorytm Boruvki znalazł cykl



Oznaczmy wierzchołki cyklu poprzez $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$
Oznaczmy krawędzie poprzez $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$

Bez straty ogólności możemy założyć, że aby powstał cykl, v_1 musiał wybrać e_1, v_2 musiał wybrać e_2, ..., v_k musiał wybrać e_k

$$e_k > e_1 > e_2 > e_3 > \dots > e_{k-1} > e_k$$ ponieważ krawędzie mają różne wagi

$$e_k > e_k$$

Doszliśmy do sprzeczności

Zadanie 6)

Jeśli krawędzie są różne, to cykl nie powstanie

Problem pojawia się, jeśli istnieje cykl o krawędziach z taką samą wagą

Jeśli uporządkujemy porządek wśród krawędzi o tych samych wagach, problem będzie rozwiązany.

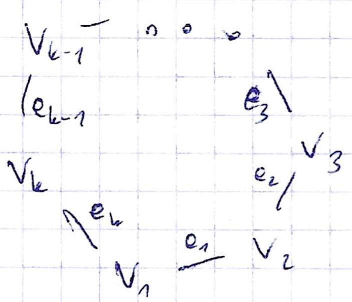
Możemy przypisać każdej krawędzi liczbę od 1 do $|E|$, dla każdej krawędzi inną. Teraz w algorytmie zawsze jednoznacznie wybierzemy krawędź spośród tych o identycznych wagach, np. tą o najmniejszym dodatkowym numerze.

Dowód poprawności

Niech f będzie funkcją różnowartościową $E \to N$ (ze zbioru krawędzi w liczby naturalne)

Załóżmy nie wprost, że w pewnej iteracji powstał cykl

- przypadek 1: krawędzie były różne, sprzeczność z zadania 5)
- przypadek 2 krawędzie były takie same wagowo



Skoro ~~kr~~ wagi krawędzi są takie same, to wierzchołki podejmują decyzje na podstawie funkcji f

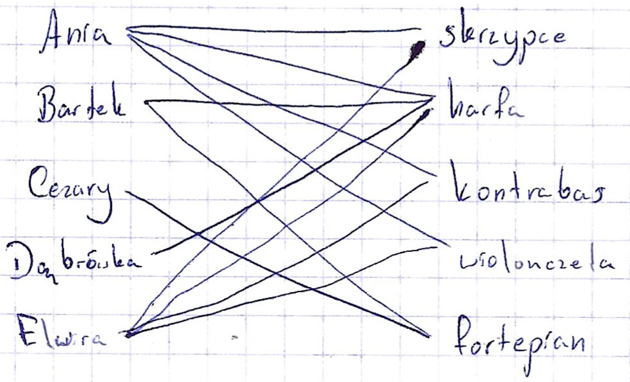
Aby powstał cykl, v_1 musiał wybrać e_1, v_2 wybrał e_2 itd.

$$f(e_k) > f(e_1) > f(e_2) > f(e_3) > \dots > f(e_{k-1}) > f(e_k)$$

$$f(e_k) > f(e_k)$$

Sprzeczność, f jest różnowartościowa, zatem cykl nie mógł powstać

Zadanie 10)



Cezary musi grać na fortepianie

Dąbrówka musi grać na harfie

Sprzeczność, ponieważ Bartek może tylko na fortepianie i harfie, zatem Bartek nie zagra, a 4 osoby nie obsłużą 5 instrumentów