Lista nr 4 z matematyki dyskretnej

1. Wśród liczb naturalnych $1, 2, \ldots, 800$, ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.

2. Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawienie $a, a, a, a, b, c, b, c, b$ jest zakazane, ale ustawienie $a, a, a, b, a, c, b, c, b$ jest dobre.

3. *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączeń-wyłączeń.

4. Udowodnij indukcyjnie, że $NWD(F_m, F_n) = F_{NWD(m,n)}$.

5. Podwójna wieża Hanoi składa się z $2n$ krążków n różnych rozmiarów, po 2 krążki każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokadnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego krążka na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych, aby przenieść wieżę z pręta A na pręt B, posługując się przy tym prętem C?

6. Na płaszczyźnie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę. Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

7. Na ile maksymalnie obszarów można podzielić trójwymiarową przestrzeń za pomocą n płaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

8. (3p) Przestrzeń R^n to zbiór wszystkich punktów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o n rzeczywistych współrzędnych. Hiperpłaszczyzna w R^n zadana jest wzorem $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, gdzie przynajmniej jedno a_i jest niezerowe. Na ile maksymalnie obszarów można podzielić n-wymiarową przestrzeń R^n za pomocą n hiperpłaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej. (*Wskazówka:* przyda się rozwiązanie poprzedniego zadania.)

9. Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?

10. Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów moze zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.

11. Wykaż, że dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze. Wskazówka: Skorzystaj z algorytmu Euklidesa.

12. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: pistacjowy lub morelowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.