Marcin Sarnecki 323034 logika zadanie domowe

Zadanie 92

Dla każdego $k \geq 1$ wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą postaci DNF_k

Definicje

- Formuła ma postać DNF_j, gdzie j jest liczbą naturalną, jeżeli ma postać DNF i każda zmienna występuje w niej co najwyżej j razy
- Będę korzystał również z definicji formuły rachunku zdań (def. 12), definicji wartościowania (def. 13) oraz formuły spełnionej (def. 14) oraz def. 18 o równoważności formuł

Rozwiązanie:

Weźmy dowolne $k \geq 1$. Niech φ będzie formułą złożoną z $(k+1)$ zmiennych zdaniowych $\{p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1}\}$, $p_i \in \{T, F\}$ dla $i \in \langle 1, k+1 \rangle$. Formuła φ jest spełniona tylko w $(k+1)$ wartościowaniach, takich, że $p_i = T$, $p_j = F$, $i \in \langle 1, k+1 \rangle$, $j \in \langle 1, k+1 \rangle$, $i \neq j$ (tylko jedna zmienna jest prawdziwa). Dla każdego innego wartościowania σ mamy $\mathfrak{Z}(\varphi) = F$

$$\varphi = (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \dots \wedge \neg p_{k+1}) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \dots \wedge \neg p_{k+1}) \vee \dots \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge \neg p_k \wedge p_{k+1})$$

φ jest postaci DNF_{k+1}, w każdym nawiasie występuje $(k+1)$ zmiennych, w każdym z nich dokładnie jedna zmienna nie występuje w negacji, nawiasów łącznie jest $(k+1)$

Teraz pokażę, że nie istnieje formuła w postaci DNF_k równoważna formule φ

Założę nie wprost, że taka formuła jednak istnieje. Niech $\psi \equiv \varphi$ oraz ψ jest postaci DNF_k

Formuła ψ nie musi zawierać tych samych zmiennych, co formuła φ - może zawierać ich mniej, tyle samo, lub więcej. Rozpatrzę każdy przypadek osobno

Marcin Sarnecki 323034

(1) ψ zawiera mniej zmiennych niż φ

(2) ψ zawiera takie same zmienne co φ

(3) ψ zawiera więcej zmiennych niż φ

(1) Jeśli ψ zawiera mniej zmiennych niż φ, to istnieje zmienna, która występuje w φ, ale nie występuje w ψ. Nazwę ją p_i. Rozważmy następujące dwa wartościowania, takie, że

- $\sigma_1(p_i) = T$, $\sigma_1(p_j) = F$, $j \neq i$, $i,j \in \langle 1, k+1 \rangle$, wtedy $\hat{\sigma}_1(\varphi) = T$
- $\sigma_2(p_i) = F$, $\sigma_2(p_j) = F$, $j \neq i$, $i,j \in \langle 1, k+1 \rangle$, wtedy $\hat{\sigma}_2(\varphi) = F$

Formuła φ przyjmuje różne wartości logiczne w zależności od wartościowania p_i, zatem $\varphi \not\equiv \psi$, ponieważ tej zmiennej nie używa formuła ψ, φ nie jest równoważne ψ, więc otrzymaliśmy sprzeczność.

(2) ψ zawiera te same zmienne co φ

$\psi = \bigvee_{i=1}^{m} (\bigwedge \text{literał})$ ← koniunkcja literałów

- Lemat 1: Każda koniunkcja literałów w formule ψ zawiera $(k+1)$ ~~najmniej~~ wyróżnionych zmiennych.

Dowód: Załóżę nie wprost, że tak nie jest. Wtedy jest taka zmienna p, której nie ma w ~~...~~ co najmniej ~~jednym~~ jednej koniunkcji literałów. Wtedy dla formuły ψ istnieje wartościowanie prawdziwe używające ~~...~~ tylko wartościowania zdefiniowanego dla k zmiennych bez zmiennej p, więc istnieje wartościowanie prawdziwe dla ψ z dwoma prawdziwymi zmiennymi, zatem doszliśmy do sprzeczności, ponieważ formuła φ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy ~~...~~ tylko jedna zmienna zdaniowa jest prawdziwa

W każdym nawiasie występuje $(k+1)$ zmiennych, ψ jest postaci DNF_k, więc możemy użyć co najwyżej k nawiasów do budowy formuły ψ. Formuła φ jest spełniona dla $(k+1)$ wartościowań, więc formuła ψ również musi być spełniona dla $(k+1)$ wartościowań.

W tym momencie dochodzimy do sprzeczności, ponieważ:

- jeśli w formule ψ dysponujemy tylko k koniunkcjami literałów, a ψ ma $(k+1)$ wartościowań prawdziwych, to jakaś koniunkcja jest spełniona dla dwóch różnych wartościowań, a to jest sprzeczne z definicją i zasadami logiki koniunkcji.

Zatem $\psi \not\equiv \varphi$

(3) Dodajmy do ψ zmienną q, której nie używa formuła φ

Lemat 2: jeśli w ψ w koniunkcji literałów występuje zmienna q, to muszą też występować tam wszystkie zmienne z φ

Dowód: Załóżę nie wprost, że tak nie jest. Wtedy jest taka zmienna p, której nie ma w tej koniunkcji literałów. Wtedy istnieje wartościowanie formuły ψ dla którego $\vartheta(\psi) = T$ i w którym więcej niż jedna zmienna ze zbioru $\{p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}\}$ jest prawdziwa, a to jest sprzeczne z wartościowaniem formuły φ

I tutaj znowu dochodzimy do sprzeczności, analogicznie jak w przypadku nr (2) - mamy do dyspozycji tylko k koniunkcji literałów, a formuła ψ posiada $(k+1)$ prawdziwych wartościowań, więc jakaś koniunkcja zwraca prawdę dla dwóch różnych wartościowań

Sprzeczność w każdym z 3 przypadków, zatem nie istnieje formuła DNF_k równoważna formule φ