Zadanie 1)

Podczas przeszukiwania w głąb będziemy kolorowali wierzchołki na 2 kolory naprzemiennie. Jeśli kiedykolwiek okaże się, że dwa sąsiednie wierzchołki mają ten sam kolor, zwracamy false

Pseudokod:

```
is_bipartite = 1                      // globalna zmienna wynikowa
dfs(v, k){
  k = (k+1) mod 2                     // zamiana koloru
  visited[v] = 1
  color[v]= k                         // przypisujemy kolor
  for(u in G[v]){
    if(visited[u] == 0)               // standardowy dfs
      dfs(u, k)
  for(u in G[v])
    if(color[v]==color[u])            // sprawdzenie kolizji kolorów
      is_bipartite = 0

}
```

W programie wywołujemy dfs(1, 0)

Zadanie 2)

t_i - liczba wierzchołków stopnia i w drzewie

$$|E| = n-1 = \sum_{i=1}^{n} t_i - 1$$

liczba krawędzi to liczba wierzchołków minus jeden, można to zapisać jako suma t_i minus jeden

$$2|E| = \sum_{i=1}^{n} (t_i \cdot i)$$

stopień wierzchołka to liczba jego krawędzi, dla każdego wierzchołka sumując jego krawędzie otrzymamy podwojoną liczbę wszystkich krawędzi

$$\sum_{i=1}^{n} t_i - 1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(t_i \cdot i)$$

$$t_1+t_2+t_3+\ldots+t_n - 1 = \frac{1}{2}(t_1+2t_2+3t_3+\ldots+nt_n)$$ // rozpisuję sumę

$$t_1+t_3+t_4+\ldots+t_n = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}(3t_3+4t_4+\ldots+nt_n)+1$$ // t_2 się skraca, -1 na prawo

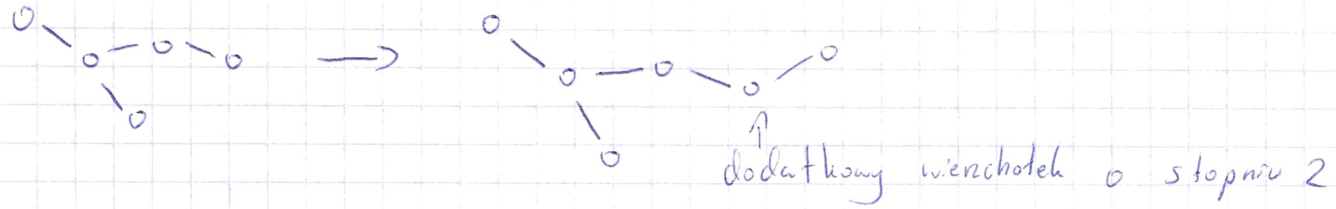
$$t_1+\sum_{i=3}^{n} t_i = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n}(i \cdot t_i)+1$$

$$2t_1 = t_1 + \sum_{i=3}^{n}(i t_i) - 2\sum_{i=3}^{n} t_i + 2$$ // mnożę przez 2, sumę na prawo

$$t_1 = \sum_{i=3}^{n} t_i(i-2) + 2$$ // zbijam do jednej sumy

w równaniu nie ma t_2

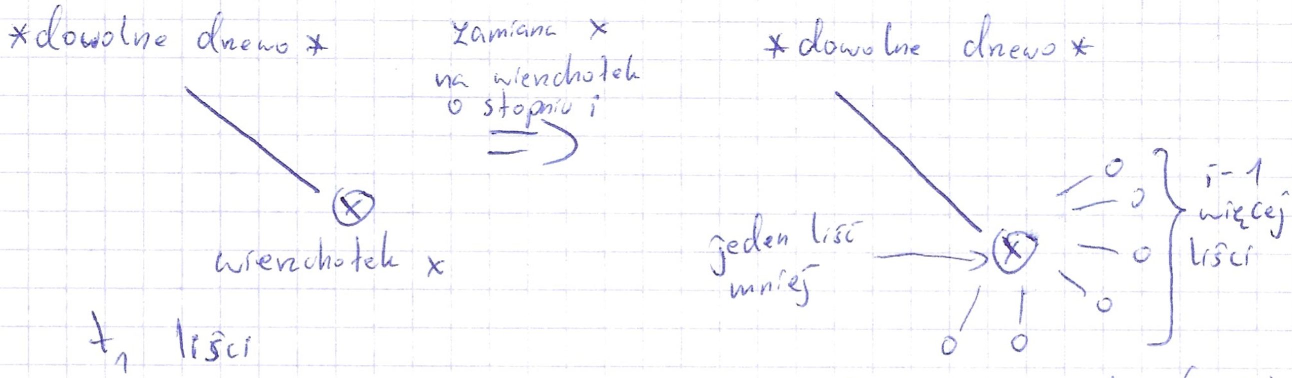
Można pomyśleć o tym w inny sposób: dokładając wierzchołki do liści drzewa zwiększamy liczbę wierzchołków o stopniu 2, a liczba liści się nie zmienia



Wzór $\sum_{i=3}^{n} t_i(i-2)+2$ można zinterpretować następująco:

zaczynamy od drzewa 2-wierzchołkowego o—o, $t_1 = 2$

teraz zamieniając liść na wierzchołek o stopniu i usuwamy 1 liść, ale tworzymy $i-1$ liści, stąd $(i-2)$ we wzorze



$$t_1 - 1 + i - 1 = t_1 + (i-2)$$

Możemy zbudować dowolne drzewo zaczynając od o—o i dokładając kolejne wierzchołki

zadanie 3)

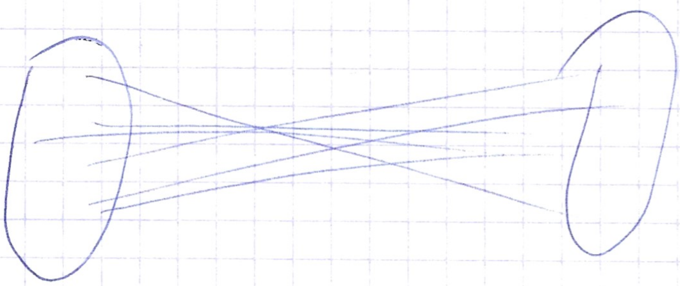
G ~~jest~~ drzewem $\Leftrightarrow$ dla dowolnej pary (v,u) istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca

$L \Rightarrow P$: Z definicji drzewa nie ma w nim cykli, a więc między każdą parą wierzchołków nie istnieje więcej niż jedna ścieżka, a musi istnieć przynajmniej jedna, ponieważ drzewo jest grafem spójnym

$L \Leftarrow P$: Wiemy, że dla dowolnej pary (v,u) istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca. Wynika z tego, że graf G jest spójny i acykliczny (gdyby był cykliczny to istniałyby ~~[illegible]~~ dwa wierzchołki z dwiema różnymi ścieżkami łączącymi je), zatem spełnia definicję drzewa

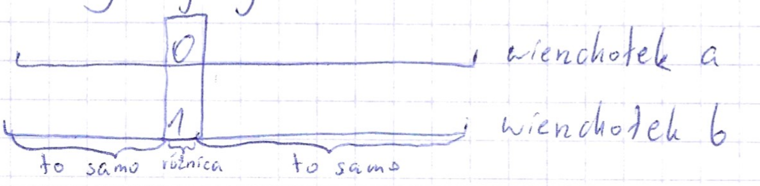
Zadanie 6)

Podzielmy wierzchołki na dwie grupy ze względu na parzystość liczby jedynek w ciągu



parzyste nieparzyste

Jeśli dwa ciągi różnią się tylko na jednej pozycji, to ich liczby jedynek różnią się dokładnie o jeden

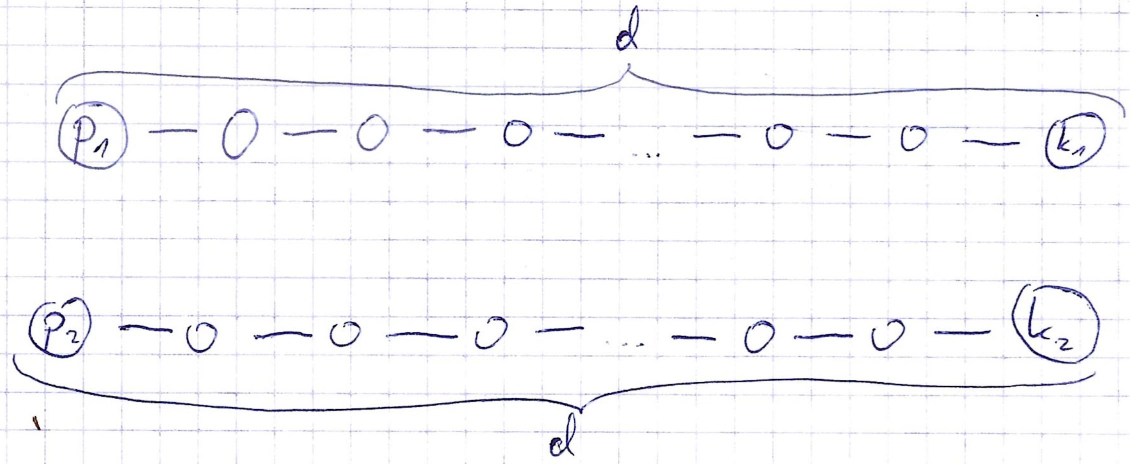


zatem nie ma krawędzi wśród wierzchołków z tej samej grupy, co dowodzi dwudzielności

Zadanie 8)

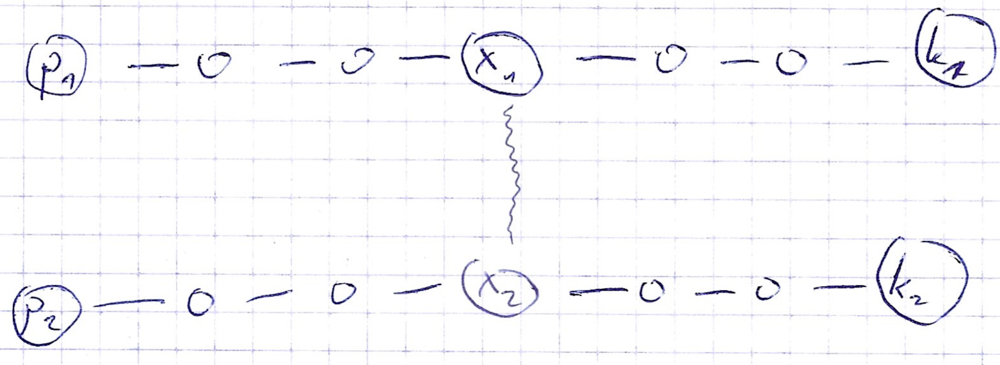
Udowodnij, że w spójnym grafie każde dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny wierzchołek

Weźmy dwie dowolne najdłuższe ścieżki i załóżmy nie wprost, że nie mają one wspólnych wierzchołków



Oznaczmy ich początki i końce przez p_1, k_1, p_2, k_2, oraz długość przez d

Nasz graf jest spójny, zatem istnieje ścieżka łącząca nasze dwie najdłuższe ścieżki. Oznaczmy przez x_1 i x_2 wierzchołki leżące na naszych dwóch najdłuższych ścieżkach. Poza x_1 nie ma żadnych innych wspólnych wierzchołków na pierwszej ścieżce i łączącej ścieżce, analogicznie x_2 z drugą najdłuższą ścieżką i ścieżką łączącą



Niech $odl(a,b)$ oznacza odległość pomiędzy dwoma wierzchołkami

Zauważmy, że $\max(odl(p_1, x_1), odl(x_1, k_1)) \geq \frac{d}{2}$

Podobnie $\max(odl(p_2, x_2), odl(x_2, k_2)) \geq \frac{d}{2}$

Dodając $odl(x_1, x_2) > 0$ otrzymaliśmy ścieżkę dłuższą niż d, co przeczy założeniu o braku wspólnych wierzchołków

Zadanie 9)

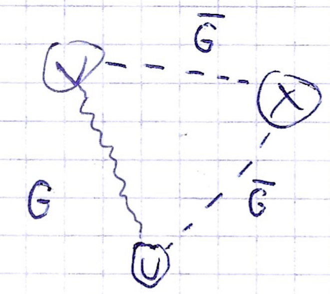
Wykaż, że G albo $\bar{G}$ jest spójny

Jeśli G jest spójny to spełnione jest założenie z zadania, zatem zakładamy, że graf G nie jest spójny

Dla każdej pary (v,u) z grafu G:

- jeśli nie istnieje ścieżka pomiędzy v i u, to oczywiście nie istnieje krawędź (v,u) w G, zatem w $\bar{G}$ istnieje krawędź (v,u), więc v i u są połączone w $\bar{G}$

- jeśli istnieje ścieżka pomiędzy v i u w grafie G, a graf G nie jest spójny, to istnieje wierchołek x taki, że nie istnieje ścieżka do x z wierchołków v i u, zatem nie istnieje krawędź (v,x) i (u,x) w G, natomiast w $\bar{G}$ istnieją wtedy krawędzie (v,x) i (u,x), co implikuje połączenie pomiędzy v i u w grafie $\bar{G}$



Zatem jeśli G nie jest spójny, to każda para wierchołków jest wzajemnie osiągalna w $\bar{G}$, zatem $\bar{G}$ jest spójny, co kończy dowód