Marcin Sarnecki 323034 gwu indukcja strukturalna

1) Wykaż przy pomocy indukcji strukturalnej, że dowolna formuła zbudowana ze zmiennej q oraz spójnika $\Leftrightarrow$ jest równoważna jednej z formuł ze zbioru $\{q, \top\}$

- Niech $F_{q,\Leftrightarrow}$ będzie najmniejszym zbiorem takim, że:
  - $q \in F_{q,\Leftrightarrow}$
  - dla dowolnych $\varphi_1, \varphi_2 \in F_{q,\Leftrightarrow}$ zachodzi $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \in F_{q,\Leftrightarrow}$

- Niech $X = \{ \varphi \in F_{q,\Leftrightarrow} \mid \varphi \equiv q \text{ lub } \varphi \equiv \top \}$

- Zasada indukcji strukturalnej:

  Jeśli $X \subseteq F_{q,\Leftrightarrow}$ spełnia:
  - $q \in X$
  - dla dowolnych $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ mamy $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \in X$

  to $X = F_{q,\Leftrightarrow}$

- Dowód indukcyjny:

  ① Podstawa indukcji

  $q \equiv q$ $q \in F_{q,\Leftrightarrow}$ więc $q \in X$

  ② Krok indukcyjny

  Weźmy dowolne φ_1, φ_2 i załóżmy, że należą do X.
  Wtedy $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \in X$. Aby to udowodnić, rozważę następujące przypadki:

  - $\varphi_1 \equiv q$ oraz $\varphi_2 \equiv q$ (z założenia że $\varphi_1, \varphi_2 \in X$)

  Wtedy $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \equiv (q \Leftrightarrow q) \equiv \top$, więc $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \in X$

Strona 1

Marcin Sarnecki 323034 quiz indukcja strukturalna

- $\varphi_1 \equiv T$ oraz $\varphi_2 \equiv T$

  Wtedy $(T \Leftrightarrow T) \equiv T$, więc $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \in X$

- $\varphi_1 \equiv q$, $\varphi_2 \equiv T$

  Wtedy $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \equiv (q \wedge T) \vee (\neg q \wedge \bot)$

  Wartość logiczna koniunkcji $\neg q$ oraz $\bot$ jest zawsze fałszywa, zatem

$(q \wedge T) \vee (\neg q \wedge \bot) \equiv q \wedge T$

Rozpatrzmy dwa wartościowania dla q:

- $\delta(q) = T$, wtedy ~~$q \wedge T \equiv T$~~ $\delta(q \wedge T) = T$
- $\delta(q) = F$, wtedy $\delta(q \wedge T) = F$

Zatem $q \wedge T \equiv q$, więc $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \in X$ dla $\varphi_1 \equiv q$ oraz $\varphi_2 \equiv T$

- $\varphi_1 \equiv T$, $\varphi_2 \equiv q$

Ten przypadek jest taki sam jak poprzedni $(\varphi_1 \equiv q, \varphi_2 \equiv T)$, ponieważ z definicji równoważności $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \equiv (\varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1)$

Więc $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \in X$

W każdym możliwym przypadku udowodniliśmy, że $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \in X$, a zatem na mocy indukcji $X = F_{q,\Leftrightarrow}$