232.

Lemat 1: Dla dowolnej rodziny zstępującej $\{A_i\}_{i\in N}$ oraz dowolnego indeksu $k\in N$ zachodzi

- ~~dla~~ jeśli $x\in A_k$, to dla każdego $j<k$ $x\in A_j$ $(j\in N)$
- jeśli $x\notin A_k$, to dla każdego $j>k$ $x\notin A_j$ $(j\in N)$

$$\underbrace{\bigcap_{i\in N}(A_i\cup B_i)}_{L}=\underbrace{\left(\bigcap_{i\in N}A_i\right)\cup\left(\bigcap_{i\in N}B_i\right)}_{P}$$

1. $P\subseteq L$

Weźmy dowolne x i załóżmy, że $x\in P$. Rozpatrzmy dwa przypadki:

- $x\in\bigcap_{i\in N}A_i$, wtedy x musi również należeć do $\bigcap_{i\in N}(A_i\cup B_i)$
- $x\in\bigcap_{i\in N}B_i$, wtedy $x\in\bigcap_{i\in N}(A_i\cup B_i)$

Zatem $P\subseteq L$

2. $L\subseteq P$

Weźmy dowolne $x\in L$. Wtedy dla ~~d~~ każdego $i\in N$ $x\in A_i\cup B_i$

lub

$x\in A_i$

$x\in B_i$ - Symetrycznie jak $x\in A_i$

istnieje $j>i$ takie, że $x\in B_j \wedge x\notin A_j$

Wtedy jeśli $x\in B_j$, to dla każdego $j'<j$ $x\in B_{j'}$. Jeśli $x\notin A_j$, to dla każdego $j''>j$ $x\notin A_{j''}$, więc z założenia musi należeć do każdego $B_{j''}$, zatem $x\in\bigcap_{i\in N}B_i$, więc $L\subseteq P$

nie istnieje $j>i$ takie, że $x\in B \wedge x\notin A_j$

Wtedy dla każdego $j>i$ $x\in A_j$, zatem $x\in\bigcap_{i\in N}A_i$, więc $L\subseteq P$

Powyższa równość nie zachodzi dla np.

$A_0=\{1\}$ $B_0=\emptyset$

$A_1=\emptyset$ $B_1=\{1\}$

$A_2=\{1\}$ $B_2=\emptyset$

$\vdots$ $\vdots$

Rodziny wstępujące

$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \dots$

$\bigcap_{i \in N} A_i = A_0$ $\bigcap_{i \in N} B_i = B_0$ $\left(\bigcap_{i \in N} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i \in N} B_i\right) = A_0 \cup B_0$

$\bigcap_{i \in N} (A_i \cup B_i) = A_0 \cup B_0$ ponieważ $(A_0 \cup B_0) \subseteq (A_1 \cup B_1) \subseteq (A_2 \cup B_2) \dots$