Lista nr 2 z matematyki dyskretnej

1. Dla $k \geq 1$ wykaż tożsamość absorbcyjną:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

   Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

2. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

   .

3. Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}.$$

   Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

4. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego n zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}.$$

5. Pokaż, że liczba przedstawień liczby naturalnej n w postaci sumy k liczb naturalnych (różnych od zera) wynosi $\binom{n-1}{k-1}$, jeśli przedstawienia różniące się kolejnością składników uważamy za różne. Ile jest przedstawień liczby n w postaci sumy dowolnej ilości liczb naturalnych?

6. (2p) Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

7. (2p) Udowodnij, że $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

   Czy potrafisz zwinąć tę sumę?

8. Sprawdź prawdziwość następujących relacji:

   $n^2 \in O(n^3)$; $n^3 \in O(n^{2.99})$; $2^{n+1} \in O(2^n)$; $(n+1)! \in O(n!)$; $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$; $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$.

9. Niech $f, g, h : N \to R$. Pokaż,że:

   (a) jeśli $f(n) = O(g(n)$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$,

   (b) $f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$,

   (c) $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Theta(f(n))$.

10. Niech f i g będą dowolnymi wielomianami o stopniach k i l takimi, że $k < l$.

    Pokaż, że wówczas $f(n) = o(g(n)$.

11. Niech n będzie liczbą całkowitą. Ile rozwiązań ma równanie $\lfloor nx \rfloor + 3x = 5$?