Marcin Sarnecki 323034 Logika Zadanie domowe I

Zadanie 69. Niech p^0 oznacza $\neg p$, oraz niech p^1 oznacza p. Dla jakich ciągów $(i_1, \dots, i_n) \in \{0,1\}^n$ formuła $(\dots((p^{i_1} \Rightarrow p^{i_2}) \Rightarrow p^{i_3}) \Rightarrow \dots) \Rightarrow p^{i_n}$ jest tautologią?

Definicje

W moim rozwiązaniu skorzystam z definicji formuły rachunku zdań (def. 12), definicji wartościowania (def. 13), definicji tautologii i formuły spełnionej (def 14), przykładów formuł równoważnych z zadania 42., oraz z kilku lematów, które udowodnię (+ zasada indukcji Twierdzenie 3.)

Rozwiązanie

Lemat 1: Dowolna formuła postaci $(\dots((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_3) \Rightarrow \dots) \Rightarrow p_n$ jest spełniona ~~tautologią~~, jeśli $\delta(p_n) = T$

Dowód: Korzystając z przykładu 13. z zadania 42. mamy

$$\delta\Big(\big(\dots((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_3) \Rightarrow \dots\big) \Rightarrow p_n\Big) \equiv \delta\Big(\neg\big(\dots((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_3) \Rightarrow \dots\big) \vee T\Big) \equiv T$$

Innymi słowy, jeśli ostatni element w tej formule będzie prawdziwy, to cała formuła będzie prawdziwa

Lemat 2: Formuła postaci $(\dots(\underbrace{(T \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \dots) \Rightarrow \perp}_{\text{parzysta ilość } \perp}$ jest ~~[illegible]~~ spełniona

Innymi słowy, jest to formuła $(\dots((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_3) \Rightarrow \dots) p_n$, w której $\sigma(p_1) = T$, $\sigma(p_i) = F$ dla $i \in \langle 2, n \rangle$, n jest nieparzyste

Dowód: Skorzystam z ~~[illegible]~~ indukcji.

Niech X będzie takim podzbiorem zbioru liczb naturalnych nieparzystych, że

1. $1 \in X$
2. dla wszystkich liczb naturalnych nieparzystych n jest spełniona implikacja: jeśli $n \in X$ to $(n+2) \in X$

Wtedy $X = N_{\text{nieparzyste}}$

Marcin Sarnecki 323034

Niech $X = \{ n \in N_{nieparzyste} \mid \vartheta(((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow p_n) = T, \vartheta(p_1) = T, \vartheta(p_i) = F$ dla $i \in \langle 2, n \rangle$, n jest nieparzyste $\}$

Podstawa indukcji:

dla $n = 1$ $\quad p_1 \equiv T$, ponieważ $\vartheta(p_1) = T$

$1 \in X$

Krok indukcyjny:

Weźmy dowolne n nieparzyste i załóżmy, że $n \in X$. Wtedy $(n+2) \in X$, ponieważ:
Dla uproszczenia dotychczasową formułę $(p_1 \Rightarrow p_2 \ldots) \Rightarrow p_n$ nazwę φ. $\vartheta(\varphi) = T$ z założenia. Na podstawie formuł z zadania 42. mamy

$(\varphi \Rightarrow p_{n+1}) \Rightarrow p_{n+2} \equiv (\varphi \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \equiv \neg(\varphi \Rightarrow \bot) \vee \bot \equiv \varphi \wedge T \vee \bot \equiv T$

$\vartheta(p_{n+1}) = \vartheta(p_{n+2}) = F$ z założenia

Więc $(n+2) \in X$

Zatem $X = N_{nieparzyste}$

Lemat 3. Formuła $(\ldots((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_3) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow p_n$ jest ~~[illegible]~~ fałszywa, jeśli $\vartheta(p_1) = T$, $\vartheta(p_i) = F$ dla $i \in \langle 2, n \rangle$ oraz n parzystego

(ta sama formuła co w lemacie 2 tylko parzystej długości)

Dowód: Skorzystam z indukcji

$X = \{ n \in N_{parzyste \geq 2} \mid \vartheta(((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_3) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow p_n) = F, \vartheta(p_1) = T, \vartheta(p_i) = F$ dla $i \in \langle 2; n \rangle$, n jest parzyste $n \geq 2 \}$

Podstawa indukcji

$n = 2 \quad p_1 \equiv T \quad p_2 \equiv \bot \quad \vartheta(p_1) = T \quad \vartheta(p_2) = F$

$\vartheta((p_1 \Rightarrow p_2)) = F$

Więc $2 \in X$

Marcin Samecki
323034

Krok indukcyjny

Weźmy dowolne n parzyste, $n \geq 2$ i załóżmy, że $n \in X$. Dla uproszczenia dotychczasową formułę $((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow \dots) \Rightarrow p_n$ nazwę φ.

Z założenia $\vartheta(\varphi) = F$. Niech $\vartheta(p_{n+1}) = \vartheta(p_{n+2}) = F$.

Wtedy $(\varphi \Rightarrow p_{n+1}) \Rightarrow p_{n+2} \equiv \varphi \wedge \top \vee \bot \equiv \bot$

Więc $(n+2) \in X$

Zatem $X = \mathbb{N}_{parzyste \geq 2}$

Zastanówmy się, w jaki sposób mogą wyglądać ciągi 0 i 1.
Rozpatrzmy następujące przypadki:

- dowolny ciąg 0 i 1
  - jego ostatni element to 1
    - wszystkie elementy to 1
      - parzysta długość (1)
      - nieparzysta długość (2)
    - zawiera przynajmniej jedno 0
      - za ostatnim 0 znajduje się parzysta ilość 1 (3)
      - za ostatnim 0 znajduje się nieparzysta ilość 1 (4)
  - jego ostatni element to 0
    - wszystkie elementy to 0
      - parzysta długość (5)
      - nieparzysta długość (6)
    - zawiera przynajmniej jedną 1
      - za ostatnią 1 znajduje się parzysta ilość 0 (7)
      - za ostatnią 1 znajduje się nieparzysta ilość 0 (8)

Teraz przeanalizuję każdy przypadek z osobna

Marcin Sarnecki 323034

1. Ciąg złożony z samych 1, parzysta długość

Aby formuła z treści zadania była tautologią, musi być spełniona dla wartościowania $\sigma(p) = T$ oraz $\sigma(p) = F$. Nazwę je odpowiednio σ_T oraz σ_F ($\sigma_T(p) = T$, $\sigma_F(p) = F$, w pozostałych przypadkach też będę tego używał)

Rozpatrzmy każde wartościowanie

$\sigma_T(p) = T$ $\quad p \equiv T$ $\quad \sigma_T((((p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow p) \equiv T$ na mocy lematu 1.

$\hat{\sigma}_T(p) = T$

$\sigma_F(p) = F$ $\quad p \equiv \bot$ $\quad$ w tym przypadku mamy do czynienia z parzystą liczbą fałszywych zmiennych

$\hat{\sigma}_F(p) = F$

$\hat{\sigma}_F(p^{i_1} \Rightarrow p^{i_2}) = T$ $\quad$ więc nasza formuła wygląda następująco:

$$((((\underset{\substack{\uparrow \\ \text{prawda}}}{T}) \underbrace{\Rightarrow p^{i_3}) \Rightarrow p^{i_4}) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow p^{i_n}}_{\text{parzysta ilość fałszywych zmiennych}}$$

Zauważmy, że:

Więc na mocy lematu 2. ta formuła będzie spełniona przy wartościowaniu σ_F

Zatem dla ciągu złożonego z samych 1 parzystej długości formuła $((p^{i_1} \Rightarrow p^{i_2}) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow p^{i_n}$ jest tautologią

---

2. Ciąg złożony z samych 1, nieparzysta długość

$\sigma(p) = \hat{\sigma}_T(p) = T$ $\quad$ na mocy lematu 1. formuła jest spełniona dla tego wartościowania

$\sigma_F(p) = \hat{\sigma}_F(p) = F$ $\quad \hat{\sigma}_F(p^{i_1} \Rightarrow p^{i_2}) = T$ $\quad \hat{\sigma}_F((\ldots((p^{i_1} \Rightarrow p^{i_2}) \Rightarrow p^{i_3}) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow p^{i_n}) \equiv$

$= \hat{\sigma}_F((\ldots((T) \Rightarrow \underbrace{p^{i_3}) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow p^{i_n}}_{\text{nieparzysta ilość zmiennych}})$

Marcin
Samecki
323034

Otrzymaliśmy fałsz dla σ_F, więc dla ciągu złożonego z 1 nieparzystej długości nasza formuła nie ~~...~~ jest tautologią

---

(3) ciąg zawiera 0 i 1, ostatni element to 1, za ostatnim (najbardziej na prawo) 0 znajduje się parzysta ilość 1

ciąg wygląda tak: $\underbrace{\ldots}_{\text{0 i 1 dowolnie ułożone}},\ \underbrace{0}_{\text{ostatnie } 0},\ \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{parzyste ilość } 1}$

$\sigma_T(p) = T$ $\qquad$ $\sigma(p^{in}) = T$, więc na mocy lematu 1 formuła jest spełniona (ostatni element prawdziwy)

$\sigma_F(p) = F$ $\qquad$ $\ldots, \neg p, p, p, \ldots, p$

$\sigma_F(\neg p) = T$

formuła z treści zadania przy wartościowaniu σ_F ~~...~~ ~~...~~ wygląda następująco: $(\ldots(\underbrace{(((\ldots) \Rightarrow \neg p)}_{\substack{\text{to jest spełnione,} \\ \text{bo } \sigma_F(\neg p) = T}} \underbrace{\Rightarrow p) \Rightarrow p) \ldots) \Rightarrow p}_{\substack{\text{parzysta liczba} \\ \text{wystąpień } p \\ \sigma_F(p) = F}}$

Jak widzimy, przy tym wartościowaniu formuła ta jest równa $(\ldots((T) \underbrace{\Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow \bot}_{\text{parzysta ilość}}$, zatem na mocy lematu 2. nasza formuła jest spełniona

Zatem dla ciągu zakończonego 0 i parzysta liczbą 1 formuła z treści zadania jest tautologią.

---

(4) ciąg 0 i 1, który kończy się zerem i nieparzystą liczbą jedynek

$\underbrace{\ldots}_{\text{dowolne 0 i 1}},\ \underbrace{0}_{\text{ostatnie } 0},\ \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{nieparzysta liczba } 1}$ $\qquad$ dla $\sigma_T(p) = T$ $\quad$ $\sigma_T(p^{in}) = T$ więc na mocy lematu 1 formuła jest spełniona

Marcin Sarnecki
323034

$\sigma_F(p)=F$ $\quad (\ldots(p^{i_1} \Rightarrow p^{i_2}) \Rightarrow p^{i_3}) \Rightarrow \ldots) p^{i_n} \equiv \underbrace{(\ldots((\ldots) \Rightarrow \neg p)}_{\substack{\text{to jest spełnione,}\\ \hat{\sigma}_F(\neg p)=T}} \Rightarrow \underbrace{p) \Rightarrow p) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow p}_{\substack{\text{nieparzysta liczba wystąpień}\\ \hat{\sigma}_F(p)=F}}$

Więc przy tym wartościowaniu nasza formuła jest fałszywa na mocy lematu 3.

Zatem dla ciągu zakończonego zerem i nieparzystą liczbą jedynek formuła z treści zadania nie jest tautologią

---

(5) Ciąg złożony z samych 0, parzysta długość

Jest to przypadek bardzo podobny do przypadku (1)

$\sigma_T(p)=T$

$\hat{\sigma}_T(p)=T \quad \hat{\sigma}_T(\neg p)=F$

$$(\underbrace{\ldots((\neg p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow \neg p}_{\text{parzysta ilość zmiennych}} = (\ldots(((\underbrace{T}_{\text{pierwszy nawias}}) \Rightarrow \underbrace{\neg p) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow \neg p}_{\text{parzysta ilość zmiennych}}$$

Więc na mocy lematu 2. formuła jest spełniona

$\sigma_F(p)=F$

$\hat{\sigma}_F(p)=F \quad \hat{\sigma}_F(\neg p)=T$ $\quad$ Tutaj ostatni element jest prawdziwy, więc na mocy lematu 1. formuła jest spełniona

Zatem dla ciągu złożonego z zer o parzystej długości formuła z treści zadania jest tautologią.

---

(6) tylko zera, nieparzysta długość

$\sigma_T(p)=T$

$\hat{\sigma}_T(p)=T \quad \hat{\sigma}_T(\neg p)=F$

$$(\ldots((\underbrace{\neg p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow \neg p}_{\text{nieparzysta ilość}} = (\ldots((\underbrace{T}_{\text{prawda}}) \Rightarrow \underbrace{\neg p) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow \neg p}_{\text{nieparzysta ilość}}$$

pierwszy nawias jest spełniony

Więc na mocy lematu 3. formuła ta jest fałszywa przy wartościowaniu σ_T

Zatem dla ciągu złożonego z zer, o nieparzystej długości formuła z treści nie jest tautologią

Marcin
Sarnecki
23034

(7) W ciągu występują 0 i 1, za ostatnią jedynką znajduje się parzysta ilość zer

$\sigma_T(p) = T$ ciąg $\ldots, \underset{\text{ostatnia } 1}{1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{parzysta ilość } 0}$

$\hat{\sigma}_T(p) = T \quad \hat{\sigma}_T(\neg p) = F$

$\underbrace{(\ldots(((\ldots) \Rightarrow p)}_{\substack{\text{ta część jest} \\ \text{spełniona,} \\ \text{ponieważ } \hat{\sigma}_T(p)=T}} \underbrace{\Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow \neg p}_{\substack{\text{parzysta ilość} \\ \text{fałszywych zmiennych}}}$

Więc na mocy lematu 2. formuła jest spełniona

$\sigma_F(p) = F$ teraz w formule ostatni element jest prawdziwy,

$\hat{\sigma}_F(p) = F \quad \hat{\sigma}_F(\neg p) = T$ więc na mocy lematu 1. formuła jest spełniona

Zatem dla ciągu ~~~~ zakończonego na 1 i parzysta ilość 0 otrzymaliśmy tautologię

---

(8) W ciągu występują 0 i 1, za ostatnią jedynką znajduje się nieparzysta ilość zer

$\sigma_T(p) = T$ ciąg $\ldots, \underset{\text{ostatnia jedynka}}{1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{nieparzysta ilość zer}}$

$\hat{\sigma}_T(p) = T \quad \hat{\sigma}_T(\neg p) = F$

$\underbrace{(\ldots(((\ldots) \Rightarrow p)}_{\substack{\text{ta część jest} \\ \text{prawdziwa, bo} \\ \hat{\sigma}_T(p)=T}} \underbrace{\Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow \neg p}_{\substack{\text{nieparzysta ilość} \\ \text{fałszywych zmiennych} \\ \hat{\sigma}_T(\neg p)=F}}$

Więc na mocy lematu 3. ta formuła jest fałszywa przy wartościowaniu σ_T, zatem nie jest tautologią

Podsumowując, nasza formuła z treści zadania jest tautologią dla następujących ciągów:

- ciągi parzystej długości zawierające tylko jedynki albo tylko zera
- ciągi zakończone jedynką i parzystą liczbą zer
- ciągi zakończone zerem i parzystą liczbą jedynek