21) Mając dwa wierzchołki (nazwijmy je a oraz b) możemy stwierdzić w czasie stałym, który z nich mógłby być źródłem. Jeśli wierzchołek a jest źródłem, to musi istnieć krawędź ⓐ -> ⓑ oraz nie może istnieć krawędź ⓑ -> ⓐ. Możemy zatem przechodzić się po kolejnych wierzchołkach i pamiętać kandydata na źródło. Po przejściu wszystkich wierzchołków musimy oczywiście sprawdzić, czy dany kandydat faktycznie jest źródłem

```
graf[n][n]    - macierz sąsiedztwa
k = 0         - kandydat na źródło
for(i=1; i<n; i++)
    if(graf[i][k]==1 and graf[k][i]==0)    - jeśli (i) jest źródłem, to
        k=i                                  istnieje krawędź (i)->(k)
                                             oraz nie istnieje (k)->(i)

for(i=0; i<n; i++)
    if(k==i)
        continue     - sprawdzamy każdy wierzchołek oprócz kandydata
    if(graf[k][i]==0 or graf[i][k]==1)
        return false     - źródło nie istnieje

return k     - źródło istnieje, jest nim (k)
```

Jeśli n to liczba wierzchołków, to algorytm wykona co najwyżej 5n porównań i n przypisań wartości

22) Będziemy przetwarzali wierzchołki za pomocą kolejki. Poza listami sąsiedztwa trzymamy dla każdego wierzchołka informację o jego stopniu wejścia. Początkowo na kolejkę wrzucamy wierzchołki o stopniu wejścia równym 0. Następnie dopóki kolejka nie jest pusta, zdejmujemy z niej wierzchołek i zmniejszamy wszystkim jego sąsiadom stopień wejścia o 1. Jeśli po zmniejszeniu stopnia wejścia któryś z sąsiadów ma teraz stopień wejścia równy 0, to dodajemy go na kolejkę.

Kolejność, w jakiej zdejmujemy wierzchołki z kolejki, jest porządkiem topologicznym

23) Weźmy dowolny wierzchołek o największym stopniu wyjścia i nazwijmy go v. Możemy założyć, że jego stopień wyjścia jest mniejszy niż n-1 (inaczej v miałby krawędź wychodzącą do każdego innego wierzchołka, co zakończyłoby dowód)

Załóżmy nie wprost, że istnieje taki wierzchołek u, do którego nie można dojść z v po maksymalnie 2 krawędziach. Wierzchołek u musi mieć krawędzie wychodzące do wierzchołków, do których v ma krawędzie wychodzące - inaczej z v można by dojść do u po dwóch krawędziach. Wierzchołek u musi mieć jeszcze oczywiście krawędź wychodzącą do wierzchołka v - inaczej z v można by dojść bezpośrednio do u. Dochodzimy do sprzeczności, ponieważ u ma większy stopień wyjścia od v, a w założeniu v miał największy stopień wyjścia, zatem nie istnieje wierzchołek, do którego nie można dojść z v w maksymalnie dwóch krawędziach

24) Dowód indukcyjny

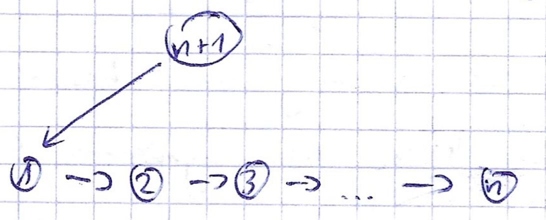
Dla $n=1$, $n=2$ działa

$1 \to 2$ ✓

Krok indukcyjny

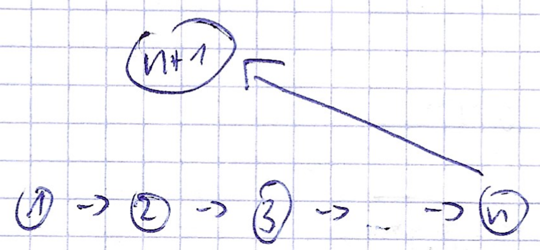
Załóżmy, że w każdym turnieju wielkości n istnieje ścieżka Hamiltona. Bez straty ogólności możemy założyć, że ścieżka Hamiltona przechodzi po kolei od wierzchołka 1 do n. Dodajmy do turnieju wierzchołek $n+1$ i rozpatrzmy różne przypadki:

I



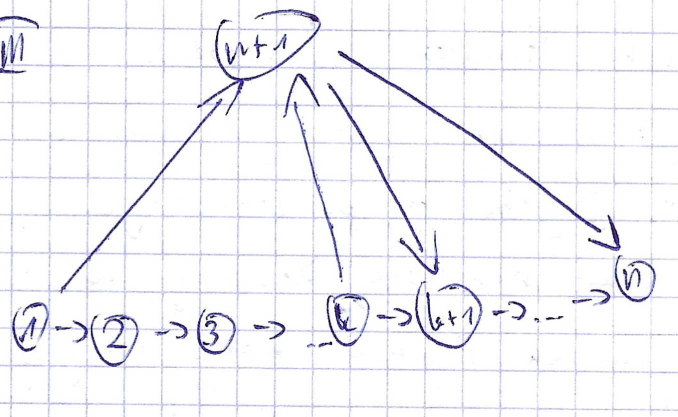
istnieje krawędź od $n+1$ do 1, dostajemy ścieżkę Hamiltona $n+1, 1, 2, 3, \dots, n$

II



istnieje krawędź od n do $n+1$, dostajemy ścieżkę Hamiltona $1, 2, 3, \dots, n, n+1$

III



$k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$

istnieją krawędzie $1 \to n+1$ oraz $n+1 \to n$

Zauważmy, że bez względu na pozostałe krawędzie, gdzieś muszą istnieć takie dwa kolejne wierzchołki, że istnieją krawędzie $k \to n+1$ oraz $n+1 \to k+1$, zatem powstaje ścieżka $1, 2, \dots, \underbrace{k, n+1, k+1}_{\text{wciskamy } n+1 \text{ pomiędzy te dwa wierzchołki}}, \dots, n$

Zatem w dowolnym turnieju o $n+1$ wierzchołkach istnieje ścieżka Hamiltona

25) Q_n oznacza graf n-wymiarowej kostki, zbiór wierzchołków to wszystkie n-elementowe ciągi 0 i 1, dwa wierzchołki są sąsiednie jeśli różnią się dokładnie jedną współrzędną

Dowód indukcyjny

Dla $n=1$, $n=2$ działa

1 — 0 ✓

$1 \to 0$

```
00 — 01
|     |   ✓
10 — 11
```

$00 \to 01 \to 11 \to 10$

Krok indukcyjny

Weźmy dowolne n i załóżmy, że w n wymiarowej kostce istnieje ścieżka Hamiltona. Rozważmy kostkę n+1 wymiarową i podzielmy jej wierzchołki na dwie grupy ze względu na pierwszy bit

I grupa: $0\underbrace{\qquad\qquad}_{n \text{ zer/jedynek}}$

II grupa: $1\underbrace{\qquad\qquad}_{n \text{ zer/jedynek}}$

W pierwszej grupie istnieje ścieżka Hamiltona z założenia. Zauważmy, że w drugiej grupie wierzchołków jest tyle samo, oraz różnią się one tylko dodatkową jedynką na początku ciągu, zatem tam również istnieje ścieżka Hamiltona. Zauważmy, że wierzchołki, które są początkami ścieżek Hamiltona w obu grupach są połączone krawędzią, ponieważ różnią się one tylko jednym bitem, zatem w grafie kostki n+1 wymiarowej również istnieje ścieżka Hamiltona. Widać to dobrze na przykładzie:

```
100 ← 101 ← 111 ← 110
 |     |     |     ↑
00 →  01  →  11 →  10
```

analogiczne ścieżki w dwóch grupach dla n=3, dla dowolnego ciągu długości n-1 ciągi $1\_\_$ oraz $0\_\_$ są połączone krawędzią