

Lemat 1: Dla dowolnej rodziny zstępującej  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  oraz dowolnego indeksu  $k \in \mathbb{N}$  zachodzi

- jeśli jest  $x \in A_k$ , to dla każdego  $j < k$   $x \in A_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ )
- jeśli  $x \notin A_k$ , to dla każdego  $j > k$   $x \notin A_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ )

$$\underbrace{\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i)}_{L} = \underbrace{\left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)}_P \cup \underbrace{\left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i \right)}_P$$

1.  $P \subseteq L$

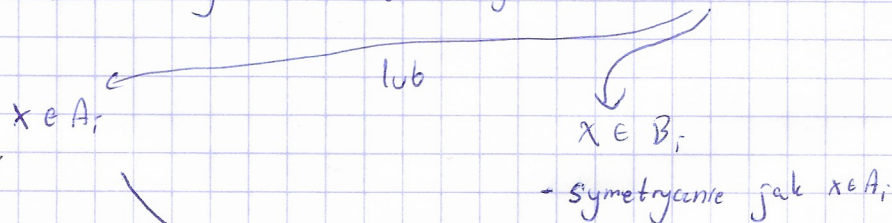
Wzimy dowolne  $x$  i założymy, że  $x \in P$ . Rozpatrzmy dwa przypadki:

- $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ , wtedy  $x$  musi również należeć do  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i)$
- $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i$ , wtedy  $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i)$

Zatem  $P \subseteq L$

2.  $L \subseteq P$

Wzimy dowolne  $x \in L$ . Wtedy dla każdego  $i \in \mathbb{N}$   $x \in A_i \cup B_i$



istnieje  $j > i$  takie, że  
 $x \in B_j$  a  $x \notin A_j$

nie istnieje  $j > i$  takie, że  
 $x \in B_j$  a  $x \notin A_j$

Wtedy jest  $x \in B_j$ , to dla  
każdego  $j' < j$   $x \in B_{j'}$ . Jeśli  $x \notin A_j$ ,  
to dla każdego  $j'' > j$   $x \notin A_{j''}$ ,  
więc z założenia musi należeć  
do każdego  $B_{j''}$ , zatem  $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i$ ,  
więc  $L \subseteq P$

Wtedy dla każdego  $j > i$   $x \in A_j$ ,  
zatem  $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ , więc  $L \subseteq P$

Powyższa równość nie zachodzi dla np.

$$A_0 = \{1\} \quad B_0 = \emptyset$$

$$A_1 = \emptyset \quad B_1 = \{1\}$$

$$A_2 = \{1\} \quad B_2 = \emptyset$$

⋮

⋮



Rochyng wstępujące

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \dots$$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_0$$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = B_0$$

$$\left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i \right) = A_0 \cup B_0$$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i) = A_0 \cup B_0$$

ponieważ  $(A_0 \cup B_0) \subseteq (A_1 \cup B_1) \subseteq (A_2 \cup B_2) \dots$