Zadanie 1)

Udowodnij, że liczba podziałów (n+2)-kąta wypukłego na rozłączne trójkąty jest równa n-tej liczbie Catalana

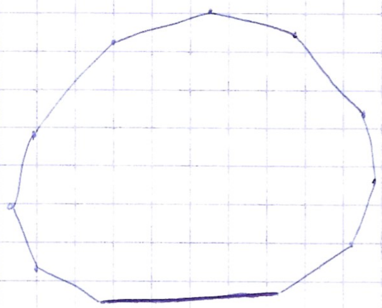
Niech q_i oznacza liczbę podziałów i-kąta wypukłego na rozłączne trójkąty

$\Delta \to q_3 = 1$

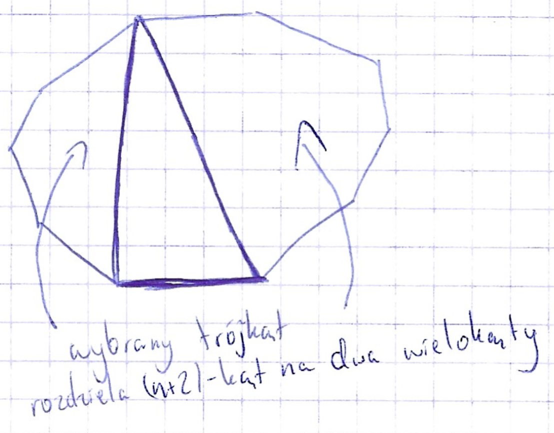
 $\to q_4 = 2$, można podzielić na  oraz 

Możemy przyjąć $q_2 = 1$

Weźmy teraz (n+2)-kąt wypukły i wybierzmy jeden z jego boków



Wybrany bok musi być częścią jakiegoś trójkąta. Rozważmy je wszystkie, łącznie jest ich n, ponieważ zostało nam n wierzchołków do wyboru. Dla każdego wyboru trójkąta możemy policzyć liczbę sposobów podziałów (n+2)-kąta poprzez iloczyn liczby sposobów podziałów dwóch wielokątów, które powstały z (n+2)-kąta poprzez rozdzielenie go wybranym trójkątem



$$q_{n+2} = q_{n+1} \cdot q_2 + q_n \cdot q_3 + q_{n-1} \cdot q_4 + \dots + q_2 \cdot q_{n+1}$$

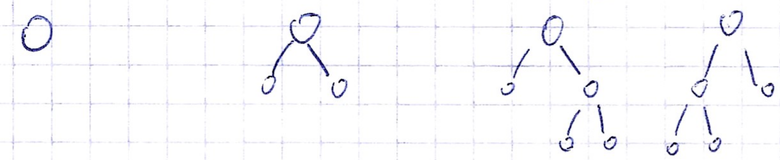
Można zauważyć, że po przeindeksowaniu o 2 uzyskujemy liczbę Catalana

Zadanie 2)

Doprecyzowując def. wierzchołka wewnętrznego - jest to wierzchołek niebędący liściem

Niech d_n oznacza liczbę drzew binarnych o n wierzchołkach wewn.

$d_0 = 1$ $\quad d_1 = 1$ $\quad d_2 = 2$



← początkowe wartości d_n

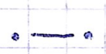
Weźmy dowolne drzewo binarne zawierające n wierzchołków wewn. Korzeń jest wierzchołkiem wewnętrznym, więc liczba wierzchołków wewn. w poddrzewie lewego syna i poddrzewie prawego syna korzenia wynosi $n-1$. Rozważmy wszystkie możliwości drzew binarnych w poddrzewach synów korzenia. Dla odpowiednio lewego i prawego syna mamy 0 i $n-1$ wierzchołków wewn., 1 i $n-2$, 2 i $n-3$, ..., $n-1$ i 0

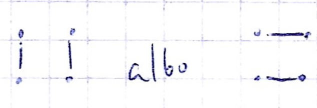
Zatem $d_n = d_0 d_{n-1} + d_1 d_{n-2} + \dots + d_{n-1} d_0$

Otrzymaliśmy liczbę Catalana

Zadanie 3)

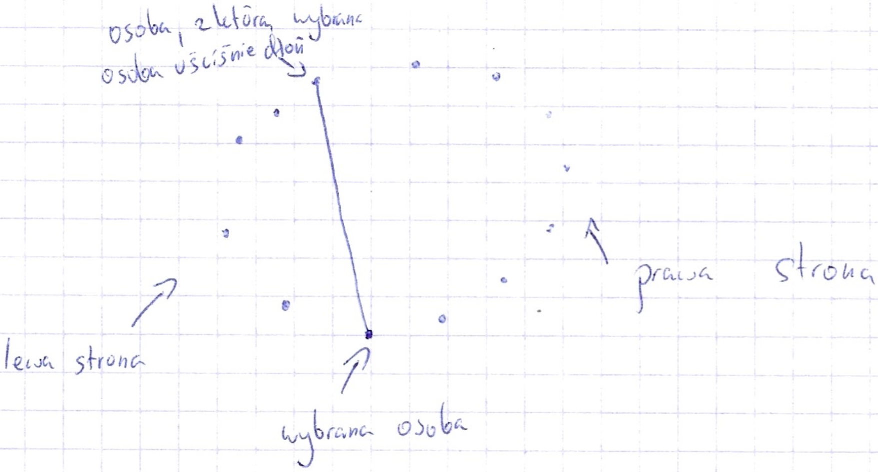
Niech a_n oznacza liczbę nie krzyżujących się uścisków dłoni, które może wykonać n par przy okrągłym stole.

$a_1 = 1$ 

$a_2 = 2$ ponieważ  albo

przyjmijmy $a_0 = 1$ bez straty ogólności

Weźmy dowolne n i ustawmy n par osób przy stole, a następnie wybierzmy 1 osobę.



Zauważmy, że po lewej stronie i prawej stronie musi znajdować się parzyście wiele osób, zatem możemy powiedzieć, że znajduje się tam pewna naturalna liczba par. Możliwe liczby tych par to 0 i $n-1$ po odpowiednich stronach, 1 i $n-2$, 2 i $n-3$, ...

Liczba możliwości w pojedynczym rozmieszczeniu to iloczyn możliwości po lewej i prawej stronie.

Zatem $a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + a_2 a_{n-3} + \dots + a_{n-1} a_0$

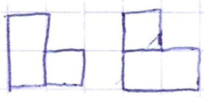
$a_n = C_n$ Otrzymaliśmy liczbę Catalana

Zadanie 4)

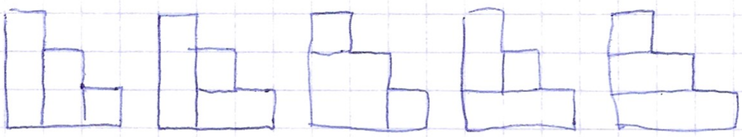
Niech a_n oznacza liczbę sposobów dla macierzy $n \times n$

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$, ponieważ



$a_3 = 5$, ponieważ



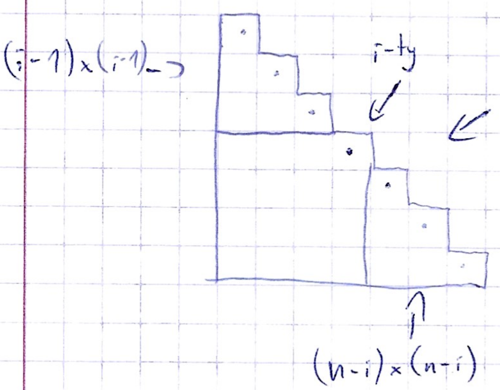
niech $a_0 = 1$

Weźmy dowolną macierz $n \times n$, usuńmy część nad przekątną, a na przekątnej rozmieśćmy n punktów

Zauważmy, że w każdym prostokącie znajdzie się dokładnie jeden punkt

Zauważmy, że któryś z prostokątów musi pokryć obszar przy lewym dolnym rogu

Jeśli ten obszar pokrywa i-ty prostokąt, ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) to dzieli on naszą macierz na obszary o wielkości $(i-1)\times(i-1)$ oraz $(n-i)\times(n-i)$ z ilością prostokątów odpowiednio $i-1$ oraz $n-i$



na przykład tutaj dla $i=4$ i-ty prostokąt pokrywa lewy dolny róg, nad nim jest obszar $(i-1)\times(i-1)$, pod nim $(n-i)\times(n-i)$

Jeśli i-ty prostokąt pokrywa lewy dolny róg, to liczba sposobów w tym przypadku jest $a_{i-1} \cdot a_{n-i}$

Sumując dla wszystkich $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ otrzymujemy

$$a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \dots + a_{n-1} a_0 = C_n$$

Otrzymaliśmy liczbę Catalana.