Zadanie 1)

Każdą liczbę naturalną możemy przedstawić jako $2^m \cdot q$, gdzie q jest liczbą naturalną nieparzystą. Zbiór $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ podzielmy na szufladki składające się z liczb $2^m \cdot q$ o ustalonym $q \geq 1$ (w pierwszej szufladzie są liczby postaci $2^m \cdot 1$, w następnej $2^m \cdot 3$, w następnej $2^m \cdot 5$ itd.). Nieparzystych liczb w zbiorze $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ jest n, mamy zatem n szufladek. Wybierając $n+1$ liczb, dwie z nich muszą wpaść do jednej szufladki. Nazwijmy je a, b.

$a = 2^{m_1} \cdot q$

$b = 2^{m_2} \cdot q$

$a \geq b \Rightarrow m_1 \geq m_2$

$$\frac{a}{b} = \frac{2^{m_1} \cdot q}{2^{m_2} \cdot q} = 2^{m_1 - m_2} \geq 2$$

ich iloraz jest wielokrotnością 2, więc jedna z nich dzieli drugą

Zadanie 2)

Mamy 4 możliwości wyboru punktów: (p,p), (p,n), (n,p), (n,n) gdzie n to liczba nieparzysta, a p to liczba parzysta. Wybierając 5 punktów musieliśmy wybrać dwa tego samego rodzaju. Suma dwóch liczb parzystych jest parzysta, oraz suma dwóch liczb nieparzystych jest również parzysta, więc nieważne jakie punkty wybierzemy, środek odcinka który je łączy będzie mieć współrzędne całkowite.

Zadanie 3)

Rozpatrzmy sumy prefiksowe $s_i = \sum_{k=1}^{i} a_k$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n$

$s_0 = 0 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad \dots \quad s_n$

$\sum_{k=i}^{j} a_k = s_j - s_{i-1}$ suma na przedziale od i do j

bez straty ogólności możemy przyjąć $s_0 = 0$

Przyjrzyjmy się liczbom $s_i \bmod n$

Jeśli ~~[illegible]~~ suma na jakimś przedziale od i do j dzieli się przez n, to liczby s_{i-1} oraz s_j muszą mieć taką samą resztę z dzielenia przez n

$$\sum_{k=i}^{j} a_k = s_j - s_{i-1}$$

$$\left(\sum_{k=i}^{j} a_k\right) \bmod n = 0 \Rightarrow s_j \bmod n = s_{i-1} \bmod n$$

Podsumowując, mamy $n+1$ sum prefiksowych oraz n dostępnych wartości postaci $s_i \bmod n$

Zatem istnieją dwie sumy prefiksowe o takiej samej reszcie z dzielenia przez n

Więc istnieje przedział o sumie podzielnej przez n

Zadanie 4)

Przyjrzyjmy się następującym liczbom:

$1, 11, 111, 1111, \dots, \underbrace{111\dots111}_{n+1 \text{ jedynek}}$

Mamy n możliwości reszt z dzielenia przez n

Mamy $n+1$ liczb, zatem istnieją takie dwie liczby o tej samej reszcie z dzielenia

~~[illegible]~~ Odejmując je od siebie otrzymamy liczbę podzielną przez n

Zadanie 5)

dla dowolnego n mamy $2n+1$ możliwych do uzyskania sum, jeśli będziemy sumować n liczb ze ~~[illegible]~~ zbioru $\{-1, 0, 1\}$

$$\underbrace{-n, -n+1, \ldots}_{n}, \underbrace{0}_{1}, \underbrace{\ldots, n-1, n}_{n} \rightarrow 2n+1 \text{ możliwości}$$

Na planszy $n \times n$ mamy n wierszy, n kolumn i dwie przekątne, więc łącznie mamy $2n+2$ liczb

Zatem istnieją dwie takie same sumy

Zadanie 6)

Spośród tych 10 liczb nie rozważajmy jedynki. Pozostałe 9 liczb jest obok siebie, ich suma wynosi $\frac{(2+10)9}{2} = 54$. Podzielmy je na trzy grupy po 3 elementy. Mamy dwie możliwości: albo każda grupa ma sumę $54/3 = 18$, co zakończyłoby dowód, albo ~~[illegible]~~ sumy ~~[illegible]~~ w grupach są różne. Jeśli jakaś grupa ma sumę mniejszą niż 18, to jakaś inna grupa musi mieć sumę większą niż 18, co kończy dowód w tym przypadku