Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2021

Nawiasowanie

Na ile sposobów można w poprawny sposób ustawić n par nawiasów?
Każda para składa się z nawiasu otwierającego i zamykającego.

c_i - liczba poprawnych nawiasowań i par nawiasów

$c_0 = 1$
$c_1 = 1$
$c_2 = 2$

Nawiasowanie

Problem równoważny nawiasowaniu:

Załóżmy, że punkt startowy to $(0, 0)$ w układadzie współrzednych. Mamy do dyspozycji n ruchów $\nearrow$ i n ruchów $\searrow$.

Na ile różnych sposobów możemy je wykonać tak, by nigdy nie znaleźć się pod poziomem 0?

Nawiasowanie

Jak zapisać c_i w postaci zależności rekurencyjnej?

Nawiasowanie

Jak zapisać c_i w postaci zależności rekurencyjnej?

Może $c_n = c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} \ldots + c_1 c_n + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i}$?

Nawiasowanie

Jak zapisać c_i w postaci zależności rekurencyjnej?

$c_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$, gdzie

d_i liczba "ponadziemnych" ustawień n par kroków $\nearrow$ i $\searrow$, w której poziom 0 osiągamy po raz pierwszy po $2i$ krokach.

Nawiasowanie

$c_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$, gdzie

d_i liczba "ponadziemnych" ustawień n par kroków $\nearrow$ i $\searrow$, w których poziom 0 osiągamy po raz pierwszy po $2i$ krokach.

$d_i = c_{i-1} c_{n-i}$

Nawiasowanie

$c_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$, gdzie

d_i liczba "ponadziemnych" ustawień n par kroków $\nearrow$ i $\searrow$, w których poziom 0 osiągamy po raz pierwszy po $2i$ krokach.

$d_i = c_{i-1} c_{n-i}$
$c_n = \sum_{i=1}^{n} c_{i-1} c_{n-i}$

Nawiasowanie

Problem równoważny nawiasowaniu:

Załóżmy, że punkt startowy to $(0,0)$ w układzie współrzędnych. Mamy do dyspozycji n ruchów $\rightarrow$ (przemieszczenie się o 1 w prawo) i n ruchów $\uparrow$ (przemieszczenie się o 1 w górę).

Na ile różnych sposobów możemy je wykonać tak, by nigdy nie przekroczyć prostej $y = x$?

Nawiasowanie

Załóżmy, że punkt startowy to $(0, 0)$ w układzie współrzędnych. Mamy do dyspozycji n ruchów $\rightarrow$ (przemieszczenie się o 1 w prawo) i n ruchów $\uparrow$ (przemieszczenie się o 1 w górę).

Na ile różnych sposobów możemy je wykonać tak, by nigdy nie przekroczyć prostej $y = x$?

$c_n = \binom{2n}{n} -$ liczba złych ustawień
Ile jest ustawień złych - przekraczających $y = x$?

Nawiasowanie

$c_n = \binom{2n}{n} -$ liczba złych ustawień

Ile jest ustawień złych - przekraczających $y = x$?

$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} =$

c_n - liczby Catalana

$c_0 = 0$, dla $n > 0$: $c_n = \sum_{i=1}^{n} c_{i-1} c_{n-i}$

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem.

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$

Jeśli $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = A(x)$ dla pewnej funcji $A(x)$, to

$A(x)$ jest funkcją tworzącą ciagu $< a_n >$.

Niech $< a_n >=< 1 >= (1, 1, 1 \ldots)$.

$\sum_{i=0}^{\infty} 1x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^i + \ldots$

$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

$\frac{1}{1-x}$ jest funkcją tworzącą ciagu $< 1 >$.

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >=< 7 >= (7, 7, 7 \dots)$.

$\sum_{i=0}^{\infty} 7x^i = 7 + 7x + 7x^2 + \dots + 7x^i + \dots$

$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{7}{1-x}$

$\frac{7}{1-x}$ jest funkcją tworzącą ciagu $< 7 >$.

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >=< 2^n >= (1, 2, 4, 8, \ldots)$.

$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^i = 1 + 2x + 4x^2 + \ldots + 2^i x^i + \ldots$

$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (2x)^i = \frac{1}{1-2x}$

$\frac{1}{1-2x}$ jest funkcją tworzącą ciagu $< 2^n >$.

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >=< (-1)^n >= (1, -1, 1, -1, \ldots)$.

$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^i = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^i x^i + \ldots$

? jest funkcją tworzącą ciagu $< (-1)^n >$.

Wydawanie reszty

Niech $< p_n >=$ liczba sposobów na jaką można wydać kwotę n za pomocą 5-złotówek.

$p_n = 1$ dla n podzielnych przez 5, $p_n = 0$ w p.p.

$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} x^{5i} = \frac{1}{1-x^5}$

Wydawanie reszty

Niech $< d_n >=$ liczba sposobów na jaką można wydać kwotę n za pomocą 2-złotówek.

$d_n = 1$ dla n podzielnych przez 2, $p_n = 0$ w p.p.

$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} = \frac{1}{1-x^2}$

Wydawanie reszty

Niech $< r_n >=$ liczba sposobów na jaką można wydać kwotę n za pomocą 2-złotówek oraz 5-złotówek.

$r_0 = 1, \; r_1 = 0, r_2 = 1, r_4 = 1, r_1 0 = 2$

Wydawanie reszty

Niech $< r_n >=$ liczba sposobów na jaką można wydać kwotę n za pomocą 2-złotówek oraz 5-złotówek.

Czy funkcja tworząca dla r_n to $P(x)D(x) = \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^2}$?

$$(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots) =$$
$$1 + x^2 + x^4 + x^5 + \ldots + 2x^{10} + \ldots$$

Jaki współczynnik stoi przy x^{17}?
Równy mocy zbioru $\{x^5x^{12}, x^{15}x^2\}$.

Jaki współczynnik stoi przy x^{44}?
Równy mocy zbioru $\{x^0x^{22}, x^{10}x^{32}, x^{20}x^{24}, x^{30}x^{14}, x^{40}x^4\}$.
Równy mocy zbioru $\{(i, j) : 5i + 2j = 44\}$.

Wydawanie reszty

Niech $< r_n >=$ liczba sposobów na jaką można wydać kwotę n za pomocą 1-złotówek, 2-złotówek oraz 5-złotówek.

Czy funkcja tworząca dla r_n to $\frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x}$?

Jaki współczynnik stoi przy x^7?
Równy mocy zbioru $\{x^0x^0x^7, x^0x^2x^5, x^0x^4x^3, x^0, x^6, x^1, x^5x^0x^2, x^5x^2x^0\}$.
Równy mocy zbioru $\{(i, j, k) : 5i + 2j + k = 7\}$.

Liczba przedstawień n za pomocą dowolnej liczby składników

Niech $< r_n >=$ liczba rozkładów n na składniki naturalne, gdy kolejność nie jest ważna

Liczba rozkładów n

Funkcja tworząca dla r_n to $\Pi_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$.

Liczba przedstawień n za pomocą różnych składników

Niech $< rr_n >=$ liczba rozkładów n na różne składniki naturalne, gdy kolejność nie jest ważna.
Np. rozkład $5 = 1 + 2 + 2$ nie jest wliczany do rr_5 bo 2 występuje dwukrotnie.

Liczba rozkładów n na różne składniki

Funkcja tworząca dla rr_n to $\Pi_{i=1}^{\infty}(1 + x^i)$.