Zadanie 1.

$$\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Możemy pomyśleć o wyborze k osób wraz z ich liderem. Po lewej stronie wybieramy k osób spośród n osób, a następnie wybieramy spośród nich lidera. Po prawej stronie najpierw wybieramy lidera spośród n osób, a następnie dobieramy do niego k-1 osób spośród n-1 osób

Zadanie 2.

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

$|N| = n \quad |K| = k \quad |M| = m$

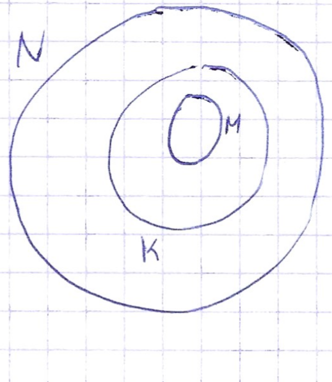
$M \subseteq K \subseteq N$

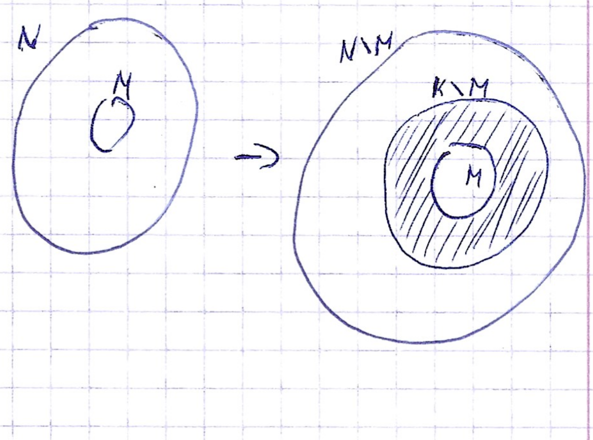
Lewa strona:

Ze zbioru N wybieramy podzbiór K, następnie wybieramy podzbiór M ze zbioru K

Prawa strona:

Ze zbioru N wybieramy podzbiór M, następnie wybieramy podbiór o k-m elementach ze zbioru $N \setminus M$





Zadanie 4.

Podstawa indukcji $n=1$

$$(a+b)^1 = a+b = \sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}a^i b^{1-i} = a^0 b^1 + a^1 b^0 = a+b$$

Krok indukcyjny: jeżeli $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$ zachodzi dla n, to zachodzi dla $n+1$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

$$= (a+b)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$$

$$= a\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i} + b\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{i+1}b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i+1}$$

dla $i=n$ składnik sumy równy jest a^{n+1}

start od 1

dla $i=0$ składnik sumy wynosi b^{n+1}

zakres o jeden mniejszy

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}a^{i+1}b^{n-i} + a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i+1} + b^{n+1}$$

przesunięcie: $\sum_{i=0}^{n-1} \to \sum_{i=1}^{n}$

wtedy $\binom{n}{i}$ zmienia się w $\binom{n}{i-1}$ oraz $a^{i+1}b^{n-i}$ w $a^i b^{n-i+1}$

$$= \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}a^i b^{n-i+1} + a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i+1} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right)a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1} + \binom{n+1}{0}b^{n+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1} + \binom{n+1}{0}b^{n+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^i b^{n+1-i}$$

Zatem równość zachodzi również dla $n+1$

Zadanie 6.

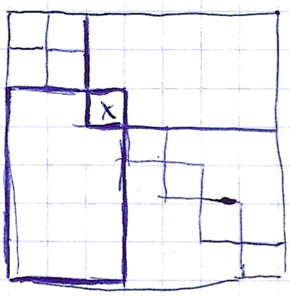
Zdefiniujmy wzniesienia jako różnicę w kolejnych wartościach funkcji f. Przykładowo, jeśli $f(1)=5$, a $f(2)=7$, to mamy 2 wzniesienia na liczbie 2. Dla liczby 1 ilość wzniesień to $f(1)-1$. Nasza funkcja f ma do dyspozycji n-1 wzniesień, nie musi ich wszystkich używać. Zauważmy, że funkcję f możemy zdefiniować poprzez rozkład n-1 wzniesień na n+1 liczbach (dla wygody obliczeń jeśli funkcja nie używa wszystkich wzniesień to lądują one na liczbie n+1). Zatem liczba funkcji f to liczba sposobów wyboru n-1 liczb spośród n+1 liczb, liczby mogą się powtarzać. Zatem jest to kombinacja z powtórzeniami.

$$C_n^k = \binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Ostateczna odpowiedź: $\frac{(n-1+n+1-1)!}{(n-1)!\,(n+1-1)!} = \frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}$

Zadanie 7.

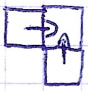
Przyjrzyjmy się komórkom znajdującym się na przekątnej



Zauważmy, że jeśli do danej komórki na przekątnej możemy dojść na x sposobów, to również na x sposobów możemy dojść od niej do prawego górnego rogu

Zatem możemy przejść do prawego górnego rogu na x^2 sposobów, jeśli przejdziemy przez komórkę na przekątnej do której możemy dojść na x sposobów.

Teraz zastanówmy się, na ile sposobów możemy dojść do każdej komórki. Zauważmy, że aby policzyć to dla konkretnej komórki, potrzebujemy informacji o komórkach z lewej strony i z dołu od naszej komórki



1
1 5
1 4 10
1 3 6 10
1 2 3 4 5
1 1 1 1 1 1

liczby sposobów dojść do kolejnych komórek będą pokrywały się z trójkątem Pascala

Liczby sposobów na przekątnej to n-ty wiersz trójkąta Pascala
Podnosząc je do kwadratu i sumując otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

k-ta liczba w n-tym wierszu to $\binom{n}{k}$

Sumę możemy przedstawić w prostszy sposób - zauważmy, że musimy wykonać n kroków w górę oraz n kroków w prawo.
Zatem liczba sposobów to ilość kombinacji n elementowych ze zbioru 2n elementowego : $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$

Zadanie 10.

$f(n) = o(g(n))$ jeśli

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

f jest wielomianem mniejszego stopnia niż g, zatem równość

$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ zachodzi, co kończy dowód