Marcin Sarnecki 323034 zadanie domowe z logiki

Zadanie 177. Liczbę naturalną q nazywamy liczbą bliźniaczą, jeżeli liczby q oraz $q+2$ są pierwsze. Używając symboli $+, \times, 0, 1, 2, =$ oraz nawiasów, zmiennych, kwantyfikatorów i spójników logicznych zapisz formalnie zdanie: „Istnieje największa liczba bliźniacza taka, że pomiędzy nią a poprzednią liczbą bliźniaczą jest co najwyżej jedna liczba pierwsza

Rozwiązanie

Na początku zdefiniuję kilka makr

- dzielnik(a, b) $\exists d \; b = a \times d$

  makro „a jest dzielnikiem b"
- p(a) $\forall d$ dzielnik(d, a) $\Rightarrow (d = 1 \vee d = a)$

  makro „a jest liczbą pierwszą"
- bli(a) $p(a) \wedge p(a+2)$

  makro „a jest liczbą bliźniaczą"
- g(a, b) $\exists d \; a = b + d$

  makro na zastąpienie operatora większe-równe niż $(a \geq b)$
- pomiędzy(x, a, b) $\cancel{g(x,a) \wedge \neg g(x, b+1)}$. $g(x, a+1) \wedge \neg g(x, b)$

  makro „x jest pomiędzy liczbami a i b" $\cancel{(a \leq x \leq b)}$ $(a < x < b)$
- ~~f(x) bli(x) ∧ (∃y bli(y) ∧ g(x, y+1)) ∧ (∀k p(k) => ¬pomiędzy(k, y, x))~~
- f(x) $\underbrace{\text{bli}(x)}_{\text{x jest bliźniacza}} \wedge \underbrace{(\exists y \; \text{bli}(y) \wedge g(x, y+1))}_{\text{poprzednia liczba bliźniacza}} \wedge \underbrace{\neg(\exists a \exists b \; p(a) \wedge p(b) \wedge \neg(a=b) \wedge \text{pomiędzy}(a,y,x) \wedge \text{pomiędzy}(b,y,x))}_{\text{pomiędzy nimi nie istnieją dwie różne liczby pierwsze}}$

makro „pomiędzy x a poprzednią bliźniaczą jest co najwyżej jedna liczba pierwsza"

Zatem ostatecznie zdanie z treści zadania wygląda następująco:

$$(\exists x \; f(x)) \wedge (\forall y \; f(y) \Rightarrow g(x, y))$$