Marcin Sarnecki 323034 zadanie domowe nr 3 analiza matematyczna

Zbadaj zbieżność, w przypadku zbieżności znajdź granicę:

$$a_n = \sqrt[n]{5^n + 3^n + (-2)^n}$$

$$a_n = \sqrt[n]{5^n + 3^n + (-2)^n} = \sqrt[n]{5^n\left(1 + \frac{3^n}{5^n} + \frac{(-2)^n}{5^n}\right)} = 5\sqrt[n]{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{-2}{5}\right)^n}$$

Zauważmy, że $0 < \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{-2}{5}\right)^n < 1$ dla dowolnego $n \in N$

Skorzystajmy z twierdzenia o trzech ciągach:

$$5 < a_n < 5\sqrt[n]{1+1}$$

$5\sqrt[n]{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 5$, ponieważ $\sqrt[n]{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Dowód: niech $e_n = \sqrt[n]{2} - 1 > 0$.

Z nierówności Bernouliego mamy $(1+e_n)^n \geq 1 + e_n \cdot n$ $\quad (1+e_n)^n = 2$

Więc $0 < e_n < \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$, zatem $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\Rightarrow \sqrt[n]{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Więc jeśli $5\sqrt[n]{2}$ dąży do 5, to ciąg a_n jest zbieżny do granicy równej 5