Marcin Sarnecki 323034

Zadanie 193. Udowodnij, że dla dowolnych ~~[illegible]~~ zbiorów A i B następujące formuły są równoważne

$A \subseteq B$ $\quad A \cup B = B \quad$ $A \cap B = A \quad$ $A \setminus B = \emptyset$

1° $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

$(A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B) \wedge (A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B)$

- Załóżmy, że $A \subseteq B$. Wtedy $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$, więc $A \cup B = B$

- Załóżmy, że $A \cup B = B$. Wtedy $A \cup B \subseteq B$ oraz $B \subseteq A \cup B$. Jeżeli $A \cup B \subseteq B$, to $A \subseteq B$.

Zatem formuły $A \subseteq B$ oraz $A \cup B = B$ są równoważne

2° $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

$(A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A) \wedge (A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B)$

- Załóżmy, że $A \subseteq B$. Wtedy $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$, więc jeśli $x \in A$ oraz $x \in B$, to naturalnie $x \in A$, więc $A \cap B$ jest podzbiorem A $\quad A \cap B \subseteq A$

Jeśli $x \in A$, to $x \in A$ oraz $x \in B$ z założenia, więc $A \subseteq A \cap B$, zatem $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

- Załóżmy, że $A \cap B = A$. Wtedy $A \cap B \subseteq A$ oraz $A \subseteq A \cap B$. Więc $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B)$.

Zatem $A \subseteq B$

Zatem formuły $A \subseteq B$ oraz $A \cap B = A$ są równoważne

3° $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$

$(A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset) \wedge (A \setminus B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B)$

- Załóżmy, że $A \subseteq B$. Wtedy $A \setminus B = \emptyset$. Załóżmy nie wprost, że tak nie jest. Wtedy istnieje x t.ż. $x \in A \wedge x \notin B$, a to jest sprzeczne z implikacją $x \in A \Rightarrow x \in B$ wynikającą z założenia $A \subseteq B$

- Załóżmy, że $A \setminus B = \emptyset$

Marcin Sarnecki 323034

Wtedy nie istnieje x t. ż. $x \in A \land x \notin B$

$\neg(\exists x \; x \in A \land x \notin B) \equiv \forall x \; x \notin A \lor x \in B$

Wtedy $A \subseteq B$. Przeprowadzę dowód nie wprost - załóżę, że tak nie jest.

Wtedy $\exists x \; x \in A \land x \notin B$, a to jest sprzeczne ze zdaniem, że nie istnieje

x taki, że $x \in A \land x \notin B$, więc doszedłem do sprzeczności, zatem $A \subseteq B$

Zatem $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$

Podsumowując, mamy $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$, $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$, $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$$