Zadanie 4)

Podzielmy wierzchołki na grupy względem kolorów. Mamy k grup. Zauważmy, że pomiędzy dowolnymi dwiema grupami musi istnieć jakaś krawędź, ponieważ gdyby tak nie było, to te grupy mogłyby mieć ten sam kolor. Zatem w grafie jest przynajmniej $\binom{k}{2}$ krawędzi

Skoro do pokolorowania grafu potrzeba $\chi(G)$ kolorów, to graf musi zawierać przynajmniej $\binom{\chi(G)}{2}$ krawędzi

Zadanie 7)

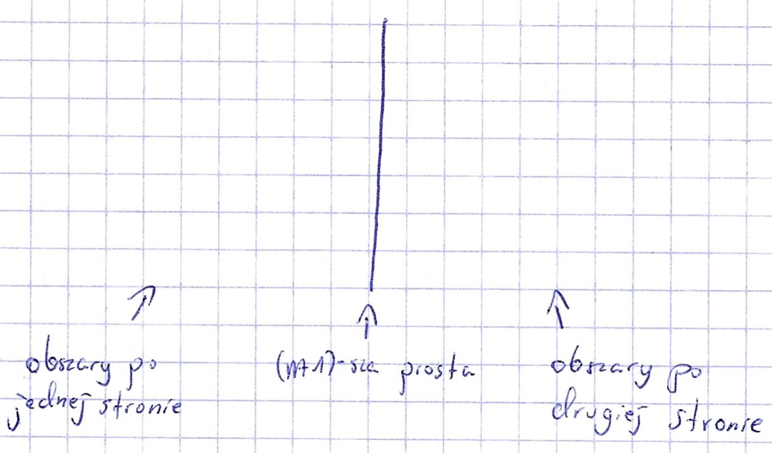
Dowód indukcyjny

Podstawa $n=1$

Jedna prosta dzieli płaszczyznę na 2 obszary, zatem 2 kolory wystarczą

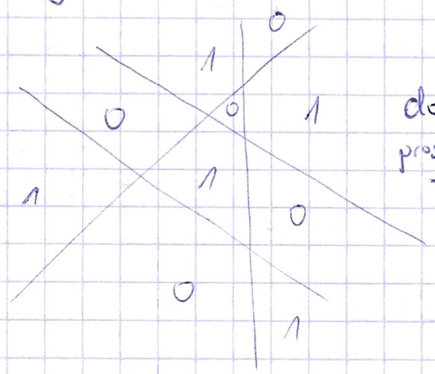
Krok indukcyjny

Weźmy dowolne n prostych i załóżmy, że utworzone obszary możemy pokolorować dwoma kolorami bez kolizji. Dodajmy do tego $(n+1)$-szą prostą w dowolnym ~~m~~ miejscu

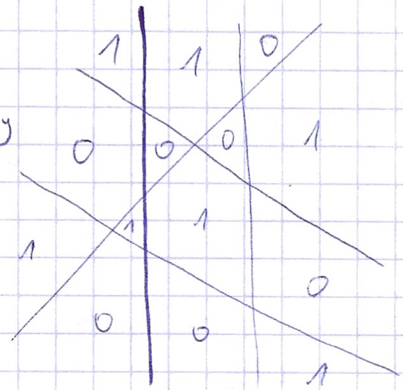


Z zał. indukcyjnego nie ma kolizji w obrębie obszarów po jednej i drugiej stronie. Problemem są obszary, które przecięła $(n+1)$-sza prosta. Można to jednak łatwo rozwiązać - wszystkie obszary po jednej stronie zmienią swój kolor, w ten sposób nie powstaną nowe kolizje pomiędzy nimi, a jednocześnie wyeliminujemy kolizje powstałe poprzez przecięcia obszarów na dwie części $(n+1)$-szą prostą

Przykład:

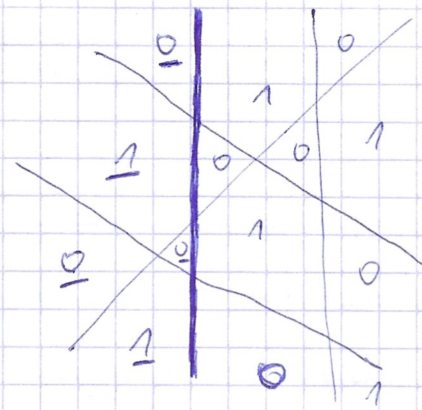


dodajemy prostą →



powstały problemy w obszarach przeciętych na dwie części

↓ zmieniamy kolory po jednej stronie, np. po lewej



teraz jest wszystko okej

Zatem dla $n+1$ warunek jest również spełniony

zadanie 8)

Możemy stworzyć graf, w którym wierzchołkami są uczniowie, a krawędzie oznaczają przyjaźnie. Z tw. Diraca nasz graf zawiera cykl Hamiltona. Niech $\underbrace{}_{\text{ciąg wierzchołków}}$ $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2n-1}, v_{2n}, v_1$ będzie cyklem Hamiltona

Możemy w łatwy sposób rozmieścić uczniów w ławkach na dwa sposoby:

- v_1 i v_2, v_3 i v_4, …, v_{2n-1} i v_{2n}
- v_2 i v_3, v_4 i v_5, …, v_{2n-2} i v_{2n-1}, v_{2n} i v_1

Przypadek $n=1$ jest trywialny

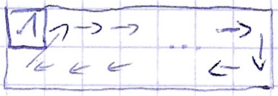
Zadanie 9)

Dla n parzystego: $n-1$ dni

Zawodników ustawiamy tak: $\begin{matrix} 1 & 2 & \dots & \frac{n}{2} \\ n & n-1 & \dots & \frac{n}{2}+1 \end{matrix}$

W każdym dniu grają osoby z tej samej kolumny

w kolejnych dniach gracz nr 1 nie zmienia pozycji, natomiast pozostałe osoby poruszają się w następujący sposób:



W ten sposób wszyscy zagrają ze wszystkimi. Przykład:

$$\begin{matrix}1&2&3\\6&5&4\end{matrix} \to \begin{matrix}1&6&2\\5&4&3\end{matrix} \to \begin{matrix}1&5&6\\4&3&2\end{matrix} \to \begin{matrix}1&4&5\\3&2&6\end{matrix} \to \begin{matrix}1&3&4\\2&6&5\end{matrix}$$

Dla n nieparzystego: n dni

W tym przypadku w ciągu jednego dnia i tak nie wszyscy zagrają - zawsze jedna osoba zostanie sama. Do zbioru zawodników możemy dodać jednego nieistniejącego zawodnika i wykonać te same kroki jak w przypadku parzystego n. Jeśli ktoś trafi na nieistniejącego zawodnika, to nie gra danego dnia.

Zadanie 10)

Kontrprzykład $n=5$