

## Lista nr 7 z matematyki dyskretnej

1. Udowodnij, że liczba sposobów, na jaki można podzielić  $(n+2)$ -kąąt wypukły na płaszczyźnie na rozłączne trójkąty za pomocą  $n-1$  nieprzecinających się przekątnych jest równa  $n$ -tej liczbie Catalana.
2. Określ liczbę drzew binarnych, zawierających  $n$  wierzchołków wewnętrznych. W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.
3. Ile nie krzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie  $n$  par osób siedzących za okrągłym stołem?
4. Z macierzy  $n \times n$  usuwamy część nad przekątną otrzymując macierz "schodkową". Na ile sposobów można ją podzielić na  $n$  prostokątów?
5. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu  $(1, 3, 7, 15, 31, \dots)$ .
6. Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej  $n$  (czyli rozkładów liczby  $n$  na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):
  - (a) na dowolne składniki,
  - (b) na różne składniki nieparzyste,
  - (c) na składniki mniejsze od  $m$ ,
  - (d) na różne potęgi liczby 2.
7. Niech  $p_n$  oznacza liczbę podziałów liczby naturalnej  $n$ , w których każdy składnik nieparzysty występuje nieparzystą liczbę razy a każdy parzysty parzystą, np.  $p_4 = 2$ , bo interesujące nas podziały to  $1 + 3$  i  $2 + 2$ . Podaj funkcję tworzącą dla ciągu  $p_n$ .
8. (-) Danych jest 12 różnych liczb dwucyfrowych. Wykaż, że wśród nich istnieją takie dwie, których różnica jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach.