Matemática Discreta

Unidade V – Conjuntos Ordenados e Reticulados

Profa. Vládia Pinheiro

Relações de Ordem Parcial

- Seja uma relação binária $R:S \rightarrow S$, onde S é um conjunto não vazio.
- R é uma **relação de ordem parcial** ou uma **relação de ordem** se R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva, ou seja:
  - Para todo $a \in A$, temos que $(a,a) \in R$
  - Se $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$, então $a = b$
  - Se (a,b) e $(b,c) \in R$, então $(a,c) \in R$

- O conjunto S com a relação de ordem parcial é dito um conjunto parcialmente ordenado ou, simplesmente, um conjunto ordenado.

Relações de Ordem Parcial

- Dois elementos ordenados de S (conjunto ordenado parcialmente pela relação R) são comumente denotados por
  - $a \preceq b$, lê-se "a precede b"
  - $b \succeq a$, significa que $a \preceq b$ e lê-se "b sucede a"
  - $a \prec b$, significa $a \preceq b$ e $a \neq b$ e lê-se "a precede b estritamente"
  - $b \succ a$, significa $a \prec b$ e lê-se "b sucede a estritamente"

- Dois elementos **a** e **b** de S, dizemos que **a** e **b** são comparáveis se $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ ou $\mathbf{b} \preceq \mathbf{a}$. Caso contrário **a** e **b** são não-comparáveis, e denotamos por **a ll b**

Relações de Ordem Parcial

- **Exemplos**:
  - A relação "$\subseteq$ " é uma relação de ordem parcial no conjunto S, onde S é uma coleção qualquer de conjuntos
  - Ex:
    - S = { [a,b,c}, {a}, {a,b} }
    - $\subseteq$ = { ({a},{a}), ({a},{a,b}), ({a}, {a,b,c}), ({a,b},{a,b}), ({a,b},{a,b,c}), ({a,b,c},{a,b,c}) }

  - A relação "| " de divisibilidade no conjunto Z (inteiros) **não é** uma ordem parcial, pois não é anti-simétrica (2|-2 e -2|2 mas 2≠-2)

Relações de Ordem Total

- O conjunto S é parcialmente ordenado quando alguns elementos de S são não-comparáveis.
- No caso em que todo par de elementos **a** e **b** de S são comparáveis (**a** $\preceq$ **b** ou **b** $\preceq$ **a**), tem-se que S é um conjunto totalmente ordenado ou linearmente ordenado.
- Neste caso, S é uma cadeia (*chain*)
- **Exemplos:**
  - O conjunto N (inteiros positivos), parcialmente ordenado pela divisibilidade, **não é** linearmente ordenado, pois 3 e 5 são não-comparáveis.
  - O conjunto N (inteiros positivos) é linearmente ordenado pela relação “<=“

Minimal, Maximal, Primeiro e Ultimo

- Seja S parcialmente ordenado,
  - **a** $\in$ S é elemento **minimal** se nenhum elemento **b** $\in$ S, **b** precede estritamente **a** (ou seja, não **b** $\preceq$ **a**)
  - **a** $\in$ S é elemento **maximal** se nenhum elemento **b** $\in$ S, **b** sucede estritamente **a** (ou seja, não **b** $\succeq$ **a**)
  - **a** $\in$ S é um **primeiro** elemento se **a** $\preceq$ **b**, para qualquer **b** $\in$ S
  - **a** $\in$ S é um **ultimo** elemento se **a** $\succeq$ **b**, para qualquer **b** $\in$ S

- **Exemplo:**
  - Seja A={1,2,3,4,6,8,9,12,18,24}. Quais os elementos minimal, maximal, primeiro e último de A?

Limite Superior, Supremum, Limite Inferior, Infimum

- Seja S parcialmente ordenado e A um subconjunto de S,
  - **m** $\in$ S é um limite superior de A se **m** sucede todo elemento de A (ou seja, **m** $\succeq$ **a,** para todo **a** $\in$ A)
  - **m** $\in$ S é um limite inferior de A se **m** precede todo elemento de A (ou seja, **m** $\preceq$ **a,** para todo **a** $\in$ A)
  - Se um limite superior de A precede qualquer outro limite superior de A então ele é dito o **supremum** de A, denotado por **sup(A)**
    - **sup(A)** é o menor dos limites superiores de A
  - Se um limite inferior de A sucede qualquer outro limite inferior de A então ele é dito o **infimum** de A, denotado por **inf(A)**
    - **inf(A)** é o maior dos limites inferiores de A

- **Exemplo:**
  - Seja S={a,b,c,d,e}, ordenado como na figura 14.3 (a), e A = {b,c,d}, defina o limite superior, limite inferior, supremum e infimum de A

Conjuntos Ordenados Isomorfos

- Sejam X e Y parcialmente ordenados, uma função injetora $f:X \rightarrow Y$ é um mapeamento de similaridade de X em Y se f preserva a relação de ordem, ou seja, se para todo **a, a'** $\in$ X:
  - Se **a** $\preceq$ **a'** então **f(a)** $\preceq$ **f(a')**
  - Se **a** $\|$ **a'** então **f(a)** $\|$ **f(a')**

- Dois conjuntos X e Y são **isomorfos** ou **similares** se existe uma função bijetora $f:X \rightarrow Y$ que preserva a relação de ordem
- **Exemplo:**
  - Seja X={1,2,6,8,12} e Y={1,2,6,12,16}, ordenados pela divisibilidade. Defina um mapeamento de similaridade. X e Y são isomorfos?

Conjuntos Bem-Ordenados

- Um conjunto S é bem-ordenado se todo subconjunto de S tem um primeiro elemento
- **Exemplo:**
  - O conjunto N (inteiros positivos) é bem-ordenado pela relação “<=“
  - O conjunto Z (inteiros) é linearmente ordenado mas não é bem-ordenado pela relação “<=“
- Todo subconjunto de um conjunto bem-ordenado é também bem-ordenado
- Todo conjunto bem-ordenado é linearmente ordenado
- Todos os conjuntos finitos linearmente ordenados com n elementos são bem-ordenados e isomorfos entre si. De fato, todos são isomorfos ao conjunto A={1,2,3,..., n} pela ordem usual “<=“

Conjuntos fechados sobre $\mathscr{F}$

- Seja $\mathscr{F}$ um conjunto de funções
- Diz-se que um conjunto A é fechado sobre $\mathscr{F}$ quando o resultado da aplicação de qualquer $f \in \mathscr{F}$ sobre elementos de A é ainda um elemento de A
  - R é fechado sobre a operação de subtração
  - $\mathbb{N}$ não é fechado sobre a operação de subtração
    - $2-5=-3$

Reticulados

- Seja L um **conjunto não vazio e fechado** sob duas operações binárias $\wedge$ e $\vee$.
- $(L, \wedge, \vee)$ é um reticulado se valem os axiomas abaixo para a,b,c $\in$ L.

  A_1: Lei da comutatividade

  1a. $a \wedge b = b \wedge a$ 1b. $a \vee b = b \vee a$

  A_2:Lei da associatividade

  2a. $(a \wedge b) \wedge c) = a \wedge (b \wedge c)$ 2b. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

  A_3:Lei da absorção

  3a. $a \wedge (a \vee b) = a$ 3b. $a \vee (a \wedge b) = a$
- **Exemplo:**
  - A coleção C de conjuntos fechada sob união e interseção, denotada por $(C, \cap, \cup)$ é um reticulado.

Reticulados

- A declaração dual de qualquer declaração em um reticulado $(L, \wedge, \vee)$ é a declaração obtida pela troca de $\wedge$ por $\vee$.
  - **Exemplo**:
  - Dual de $a \wedge (b \vee a) = a \vee a$ é $a \vee (b \wedge a) = a \wedge a$
- **Princípio da dualidade**: o dual de qualquer teorema em um reticulado também é um teorema
- **Lei de idempotência**:

  (i) $a \wedge a = a$

  (ii) $a \vee a = a$

  Prova de (i):

  - $a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge b))$ (pelo axioma 3b)
  - $a \wedge a = a \wedge (a \vee c)$ (com $a \wedge b = c$)
  - $a \wedge a = a$ (pelo axioma 3a)

Reticulados e ordem parcial

- Dado um reticulado $(L, \wedge, \vee)$, podemos definir uma ordem parcial em L como:
  - $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ se $a \wedge b = a$
  - $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ se $a \vee b = b$

- Seja L um reticulado então:
  - $a \wedge b = a$ se, e somente se, $a \vee b = b$
  - A relação $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ (definida como acima) é uma relação de ordem parcial em L

- **Exemplo:**
  - Seja o conjunto L formado pelos subconjuntos do conjunto {a,b,c}, fechado sobre as operações de união e interseção
  - $L = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$
  - $(L, \cap, \cup)$ é um reticulado
  - A relação de ordem parcial é a relação $\subseteq$

Reticulados e ordem parcial

- **Definição alternativa**: um reticulado é um conjunto parcialmente ordenado no qual, para qualquer par *a* e *b*
  - $a \wedge b = \inf(a,b)$
  - $a \vee b = \sup(a, b)$

- **Exemplo:**
  - Seja o conjunto D_{12} formado pelos divisores do número 12 = {1,2,3,4,6,12}. D_{12} é um reticulado sob a relação de divisibilidade.
    - $1 \wedge 2 = 1$ (inf(1,2))
    - $1 \vee 2 = 2$ (sup(1,2)), logo $\mathbf{1} \preceq \mathbf{2}$
    - $2 \wedge 4 = 2$ (inf(2,4))
    - $2 \vee 4 = 4$ (sup(2,4)) , logo $\mathbf{2} \prec \mathbf{4}$

Sub-reticulados

- Seja M um subconjunto de um reticulado L. M é um sub-reticulado de L, se M, por si, for um reticulado (com respeito às operações de L).
- M é um sub-reticulado de L se, e somente se, M é fechado sob as operações $\wedge$ e $\vee$ de L
- **Exemplo:**
  - Seja o conjunto D_m formado pelos divisores do número m. D_m é um sub-reticulado dos inteiros positivos N sob a relação de divisibilidade.

Reticulados Isomorfos

- Dois reticulados L e L' são isomorfos se existe um correspondência biunívoca (uma função bijetora) $f:L \rightarrow L'$ tal que, para todo *a* e *b* em L
  - $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$
  - $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$

Exercícios

- 14.5, 14.6, 14.7
- 14.40, 14.41, 14.44, 14.47, 14.48
- 14.58, 14.60
- 14.64, 14.69, 14.70
- 14.75, 14.76