

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS DE TEORIA DOS GRAFOS

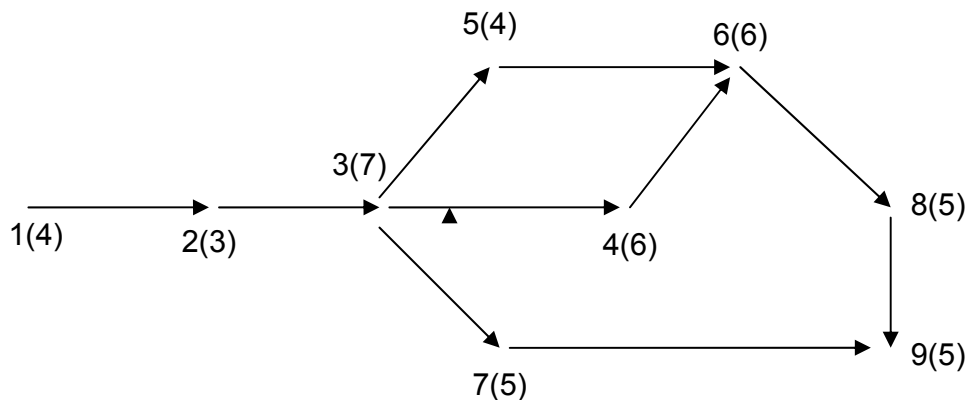
1.) Considere a tabela de tarefas a seguir para a construção de uma casa de madeira:

TAREFAS	PRÉ-REQUISITOS	DIAS
1. Limpeza do terreno	Nenhum	4
2. Produção e colocação da fundação	1	3
3. Produção da estrutura	2	7
4. Colocação do telhado	3	6
5. Colocação das tábuas externas	3	4
6. Instalação do encanamento e fiação	4 e 5	6
7. Colocação das janelas e portas	3	5
8. Instalação das janelas e portas	6	5
9. Pintura do interior	7 e 8	5

- Construa o diagrama PERT;
- Determine o tempo mínimo para construir a casa;
- Forneça o caminho crítico.

SOLUÇÃO

a)

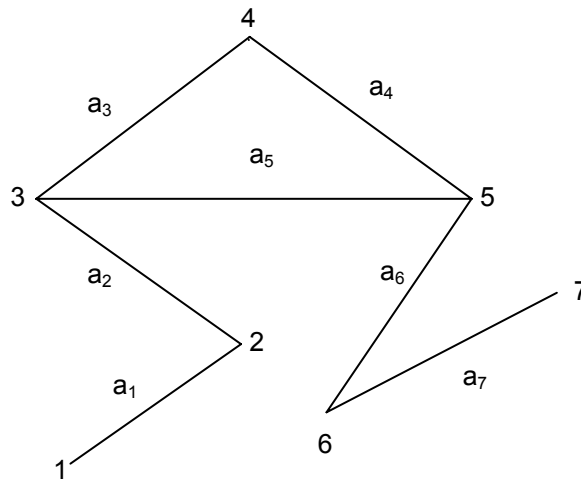


- b)
- TAREFA 1: 4 dias
 - TAREFA 2: $3 + 4 = 7$ dias
 - TAREFA 3: $7 + 7 = 14$ dias
 - TAREFA 4: $14 + 6 = 20$ dias
 - TAREFA 5: $14 + 4 = 18$ dias
 - TAREFA 6: $\max(\text{TAREFA 4}, \text{TAREFA 5}) + \text{TAREFA 6} = 20 + 6 = 26$ dias
 - TAREFA 7: $14 + 5 = 19$ dias
 - TAREFA 8: $26 + 5 = 31$ dias
 - TAREFA 9: $\max(\text{TAREFA 7}, \text{TAREFA 8}) + \text{TAREFA 9} = 31 + 5 = 36$ dias.

c) Percorrendo o diagrama PERT em ordem inversa e selecionando em cada ponto com mais de um pré-requisito o nó que contribui com o maior valor, resulta:

1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 8 – 9

2.) Considere o grafo:



e responda as seguintes perguntas:

- O grafo é simples?
- O grafo é completo?
- O grafo é conexo?
- É possível encontrar dois caminhos do nó 3 para o nó 6?
- É possível encontrar um ciclo?
- É possível encontrar um arco cuja remoção transforma o grafo em um grafo acíclico?
- É possível encontrar um arco cuja remoção transforma o grafo em um grafo não-conexo?

SOLUÇÃO

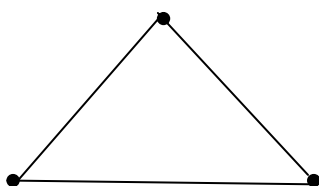
- Sim.
- Não. Os nós 5 e 7, por exemplo, não são adjacentes.
- Sim.
- Sim: 1º caminho: $3 - a_5 - 5 - a_6 - 6$ e 2º caminho: $3 - a_3 - 4 - a_4 - 5 - a_6 - 6$.
- Sim: $3 - a_3 - 4 - a_4 - 5 - a_5 - 3$.
- Sim: a_5 .
- Sim: a_7 , por exemplo.

3.) Esboce um grafo com as seguintes características:

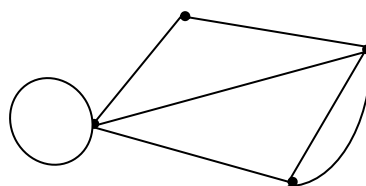
- simples com 3 nós, cada um com grau 2;
- 4 nós e ciclos de comprimento 1, 2, 3 e 4;
- não completo com 4 nós, cada um com grau 4.

SOLUÇÃO

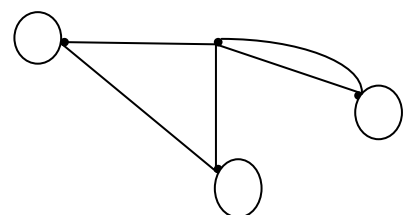
a)



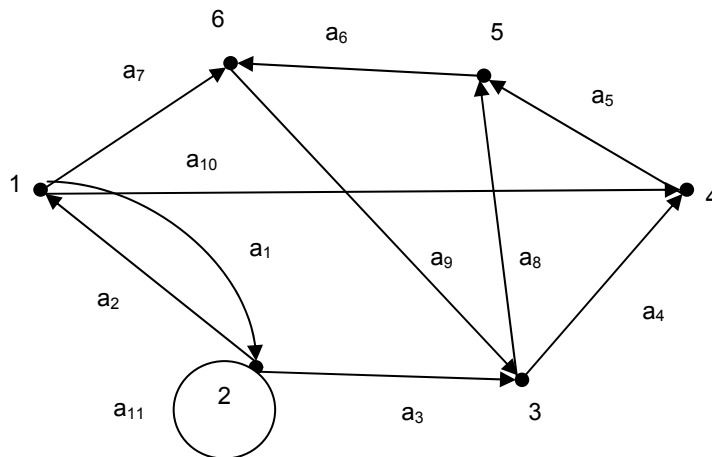
b)



c)



4.) Observe o seguinte grafo direcionado:



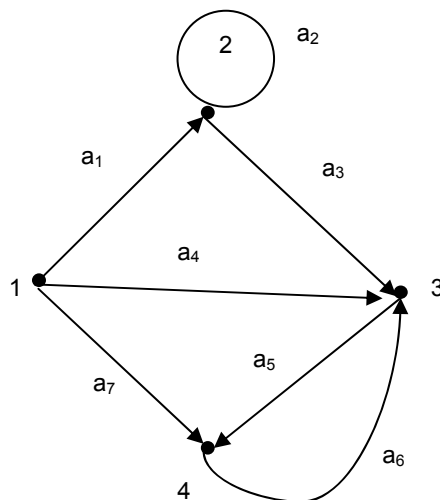
e responda as seguintes perguntas:

- Quais são os nós acessíveis a partir do nó 3?
- Qual o caminho mais curto do nó 3 para o nó 6?
- Qual o caminho de comprimento 8 do nó 1 para o nó 6?

SOLUÇÃO

- Os nós: 3, 4, 5 e 6.
- $3 - a_8 - 5 - a_6 - 6$.
- $1 - a_1 - 2 - a_{11} - 2 - a_2 - 1 - a_1 - 2 - a_3 - 3 - a_4 - 4 - a_5 - 5 - a_6 - 6$.

5.) Observe o grafo direcionado abaixo:



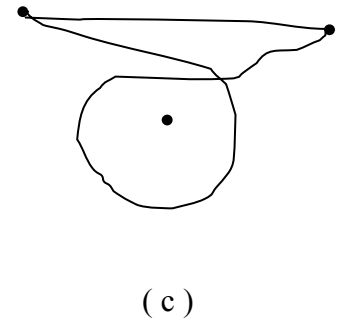
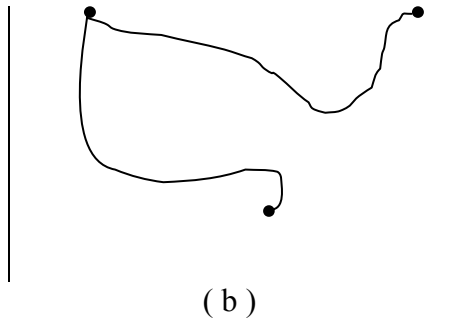
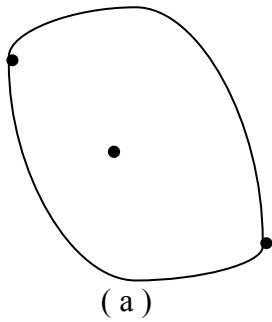
e responda as seguintes perguntas:

- Existe um caminho de comprimento 5 do nó 1 para o nó 4?
- É possível acessar o nó 1 de algum outro nó?
- Quais são os ciclos deste grafo?

SOLUÇÃO

- Sim: $1 - a_1 - 2 - a_2 - 2 - a_2 - 2 - a_3 - 3 - a_5 - 4$
- Não.
- O laço a_2 e o caminho: $3 - a_5 - 4 - a_6 - 3$.

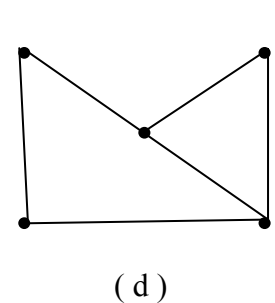
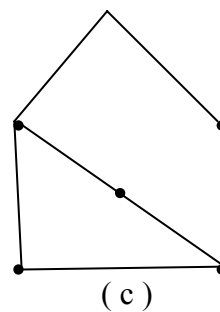
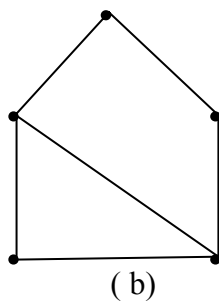
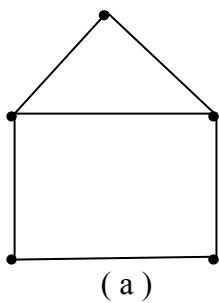
6.) Qual dos grafos não é isomorfo aos outros e por quê?



SOLUÇÃO

O grafo (b) pois não tem nenhum nó de grau zero.

7.) Qual dos grafos não é isomorfo aos outros e por quê?



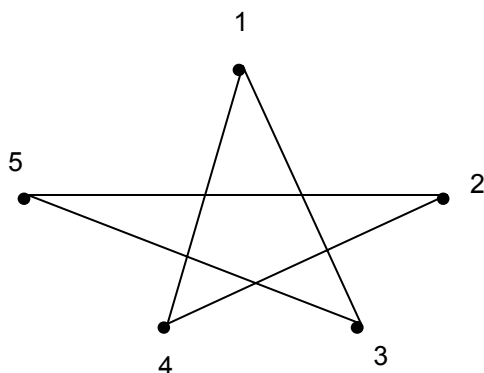
SOLUÇÃO

O grafo (c) pois embora:

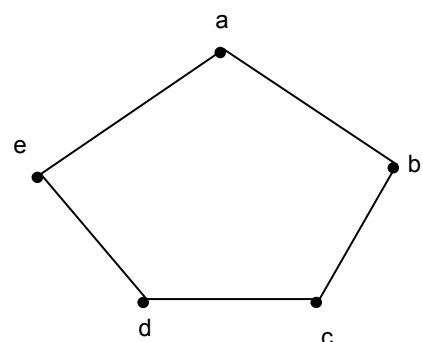
- 1º) Todos tenham 5 nós e 6 arcos;
 - 2º) Nenhum deles tenha arcos paralelos ou laços;
 - 3º) Todos tenham 2 nós de grau 3 e 3 nós de grau 2;
 - 4º) Todos sejam conexos;
 - 5º) Todos tenham 3 ciclos;
- no grafo (c) os 2 nós de grau 3 não são adjacentes.

Nos exercícios a seguir (8 , 9 e 10) verifique se os grafos são isomorfos. Se forem, forneça a bijeção (no caso de grafos simples) ou bijeções que estabelecem o isomorfismo. Se não forem, explique por quê.

8.) (a)



(b)



SOLUÇÃO

Inicialmente notemos que os grafos:

- 1º) tem 5 nós e 5 arcos;
- 2º) não tem arcos paralelos ou laços;
- 3º) tem 5 nós de grau 2;
- 4º) são conexos;
- 5º) tem apenas 1 ciclo.

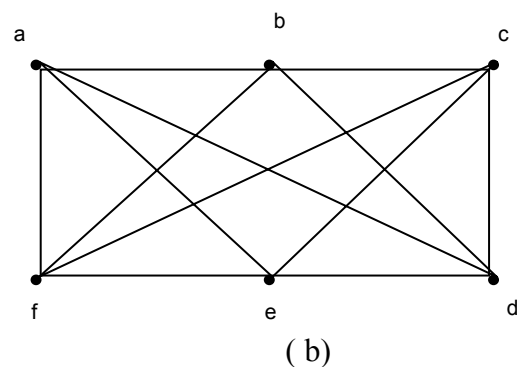
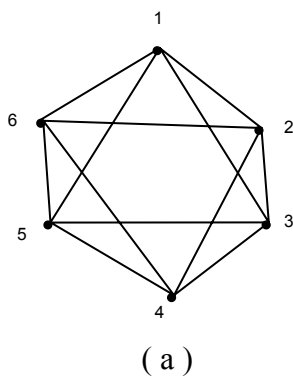
Como nenhum outro fato chama a nossa atenção e como os grafos são simples vamos tentar encontrar a bijeção que gera o isomorfismo.

Observando que no grafo (a) o nó 1 é adjacente aos nós 3 e 4 e no grafo (b) o nó **a** é adjacente aos nós **b** e **e**, segue o isomorfismo:

$$\begin{aligned} f: 1 &\rightarrow a \\ 2 &\rightarrow d \\ 3 &\rightarrow b \\ 4 &\rightarrow e \\ 5 &\rightarrow c \end{aligned}$$

Observando que, nós adjacentes no grafo (a) correspondem por **f** a nós adjacentes no grafo (b) segue que os grafos são isomorfos.

9.)



SOLUÇÃO

Inicialmente notemos que os grafos:

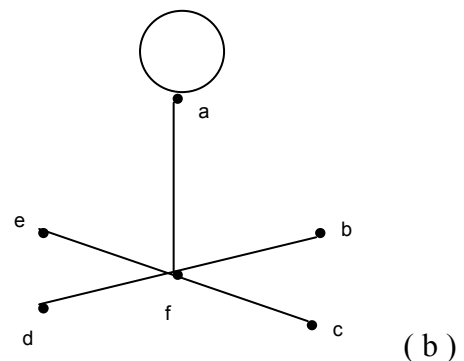
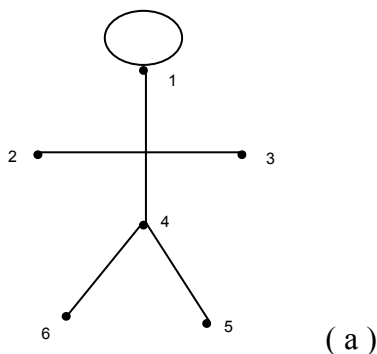
- 1º) tem 6 nós e 12 arcos;
- 2º) não tem arcos paralelos ou laços;
- 3º) são conexos;
- 4º) tem 6 nós de grau 4.

Como a verificação do número de ciclos parece ser trabalhosa e nada mais chama a nossa atenção vamos apostar no isomorfismo.

Observando que no grafo (a) o nó 1 é adjacente aos nós 2, 3, 5 e 6 e não é adjacente ao nó 4 enquanto no grafo (b) o nó **a** é adjacente aos nós **b**, **d**, **e** e **f** e não é adjacente ao nó **c** segue a bijeção que garante o isomorfismo:

$$f: 1 \rightarrow a, 2 \rightarrow b, 3 \rightarrow d, 4 \rightarrow c, 5 \rightarrow e, 6 \rightarrow f$$

10.)

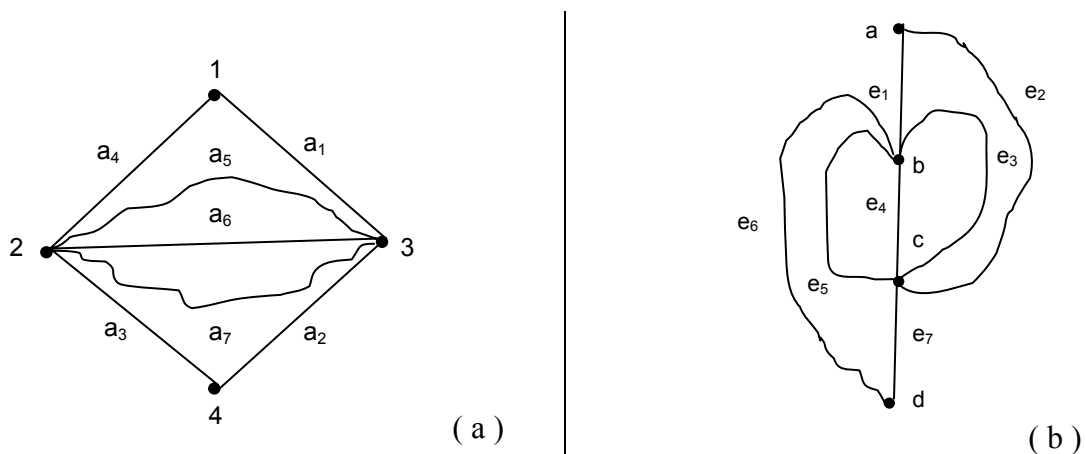


SOLUÇÃO

Observando que:

- 1º) O grafo (a) tem 5 arcos e o grafo (b) tem 6 arcos;
 - 2º) O grafo (b) tem um nó (f) com grau 5 e o grafo (a) não tem.
- segue que os grafos não são isomorfos.

11.) Sabendo que os grafos abaixo são isomorfos determine um par de bijeções que garante o isomorfismo.



SOLUÇÃO

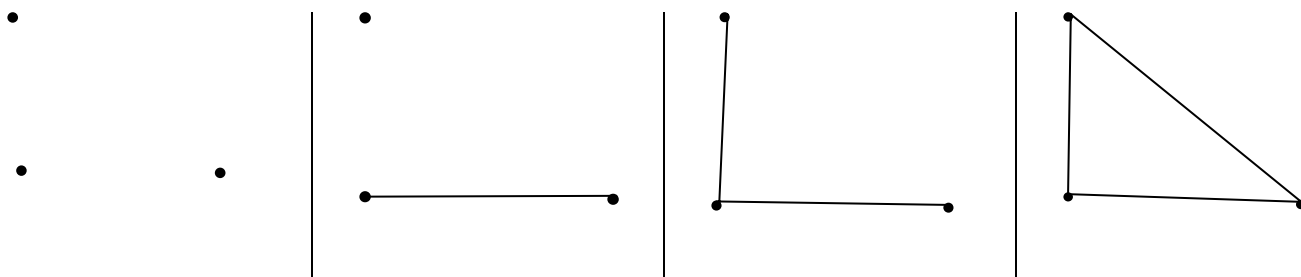
As bijeções são:

1ª) Entre nós: $f_1: 1 \rightarrow a, 2 \rightarrow b, 3 \rightarrow c, 4 \rightarrow d$

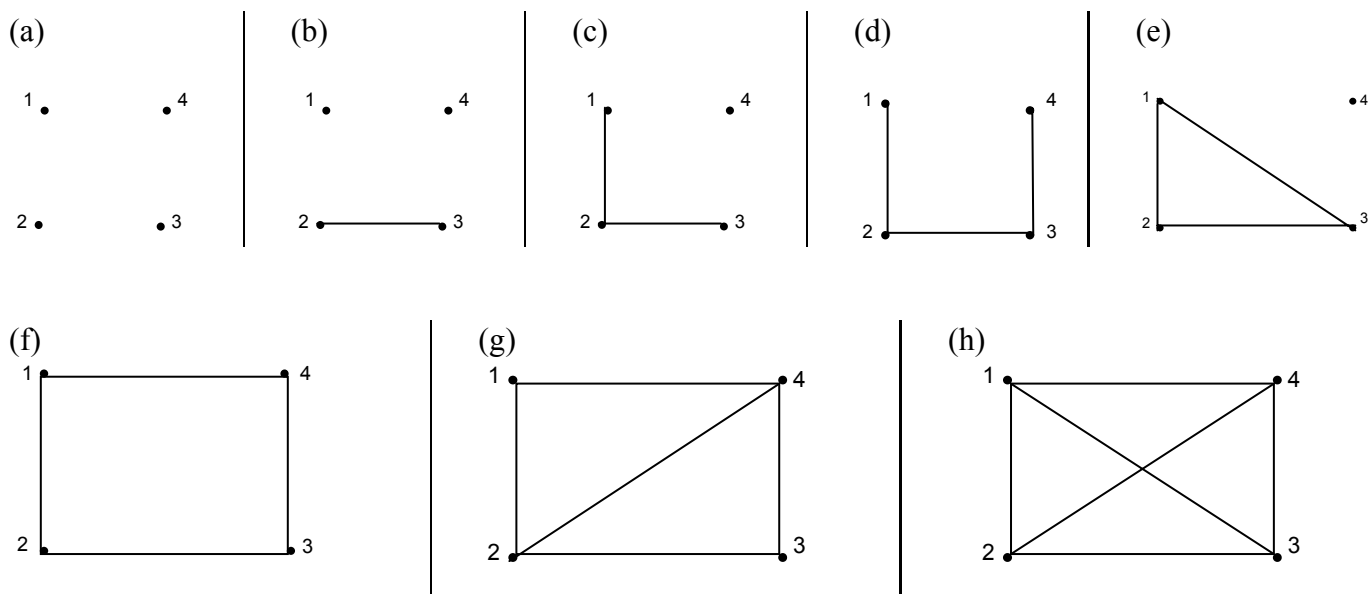
2ª) Entre arcos: $f_1: a_1 \rightarrow e_2, a_2 \rightarrow e_7, a_3 \rightarrow e_6, a_4 \rightarrow e_1, a_5 \rightarrow e_3, a_6 \rightarrow e_4, a_7 \rightarrow e_5$

12.) Construa todos os grafos não-isomorfos com 3 nós.

SOLUÇÃO



13.) Apresentamos abaixo um conjunto de grafos não-isomorfos com 4 nós que chamaremos de G4:



Verifique se os grafos abaixo pertencem a esta coleção ou se são isomorfos a algum dos grafos desenhados acima:

13.1)



RESPOSTA

Não é isomorfo a nenhum dos grafos acima pois possui 2 arcos e nenhum nó de grau zero, como o grafo (c). Pertence, portanto, ao conjunto G4

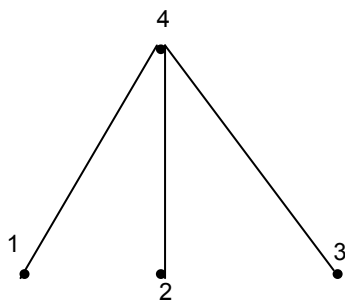
13.2)



RESPOSTA

Não pertence ao conjunto G4 pois é isomorfo ao grafo (d).

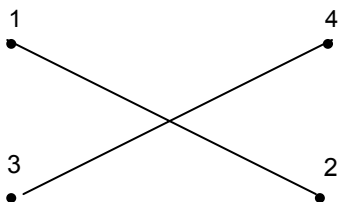
13.3)



RESPOSTA

Não é isomorfo a nenhum grafo de G4 pois possui 3 arcos e 1 nó de grau 3

13.4)

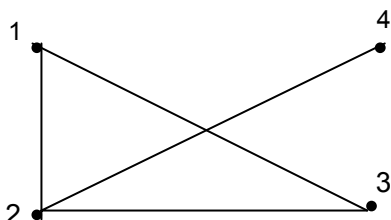


RESPOSTA

Não é isomorfo a nenhum grafo de G_4 pois possui 2 arcos e nenhum nó de grau zero. Pertence portanto a G_4 .

Observe, entretanto, que este grafo é isomorfo ao grafo do exercício 13.1, assim apenas um deles pode pertencer a G_4 .

13.5)

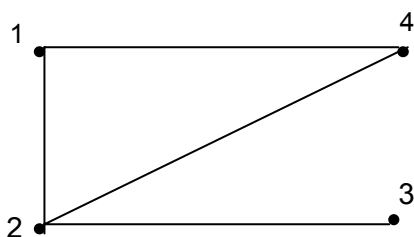


RESPOSTA

Não é isomorfo a nenhum grafo de G_4 pois tem 4 arcos e um nó de grau 1.

Portanto pertence a G_4 .

13.6)

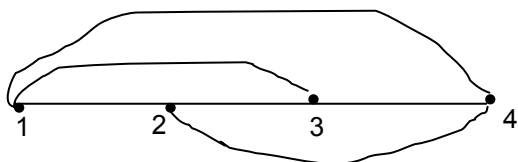


RESPOSTA

Não é isomorfo a nenhum grafo de G_4 pois tem 4 arcos e um nó de grau 1.

Observe, entretanto, que este grafo é isomorfo ao grafo do exercício 13.5, assim apenas um deles pode pertencer a G_4 .

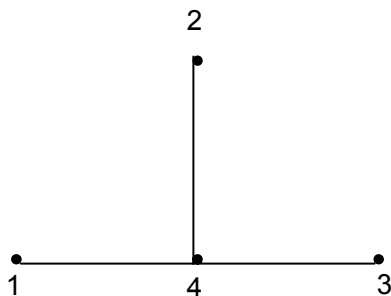
13.7)



RESPOSTA

Não pertence ao conjunto G_4 , pois é isomorfo ao grafo (h)

13.8)



RESPOSTA

Não é isomorfo a nenhum grafo de G_4 pois tem 3 arcos e 1 nó de grau 3.

Observe, entretanto, que este grafo é isomorfo ao grafo do exercício 13.3, assim apenas um deles pode pertencer a G_4 .