Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Faculdade de Computação

Grafos

1ª Lista de Exercícios

1) Mostre que:

   a) Considerando um grafo não orientado e simples, então **e ≤ Cv,2**.

   b) Considerando um grafo não orientado, simples e completo, então **e = Cv,2**.

   Onde:

   e = número de arestas
   v = número de vértices
   Cv,2 = número de combinações possíveis entre pares de elementos distintos de **v**

   c) O complemento de um grafo bipartido nem sempre é um grafo bipartido.

   d) Todo subgrafo induzido de um grafo completo é completo.

   e) Um grafo não orientado tem um número par de vértices de grau ímpar.

   f) Se um grafo bipartido é regular, os dois subgrafos **X** e **Y** que o compõem têm o mesmo número de vértices.

   g) Um grafo **G = (V, E)** é bipartido se e somente se todo ciclo de **G** possuir comprimento par.

   h) Um grafo bipartido com número ímpar de vértices não é Hamiltoniano.

2) Responda os itens abaixo:

   a) Qual é o grau mínimo de um vértice?

   b) Qual é o grau máximo de um vértice em um grafo não orientado e simples?

   c) Apresente uma fórmula para calcular o número máximo de arestas em um grafo não orientado, simples e bipartido.

   d) Grafos bipartidos possuem laços? Por quê?

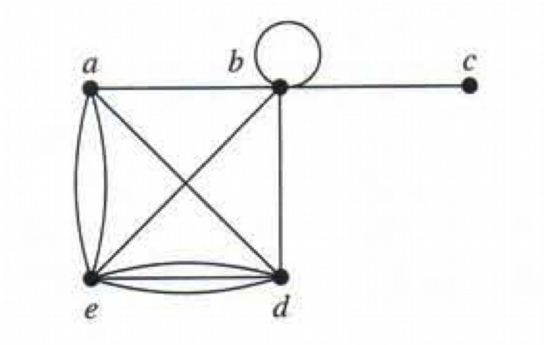
   e) Qual é o número máximo de arcos em um grafo orientado e simples?

   f) O grafo $\mathbf{K_{m,n}}$ é Euleriano desde que **m** e **n** sejam ímpares? Por quê?

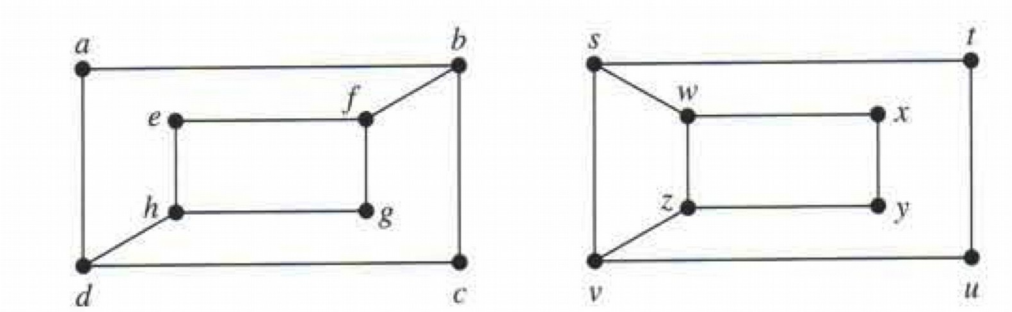
3) Dado o grafo **G = (V, E)**, prove o seguinte teorema:

$$\sum_{v \in V} \textbf{grau}(v) = 2 * e$$, onde **e** = número de arestas.

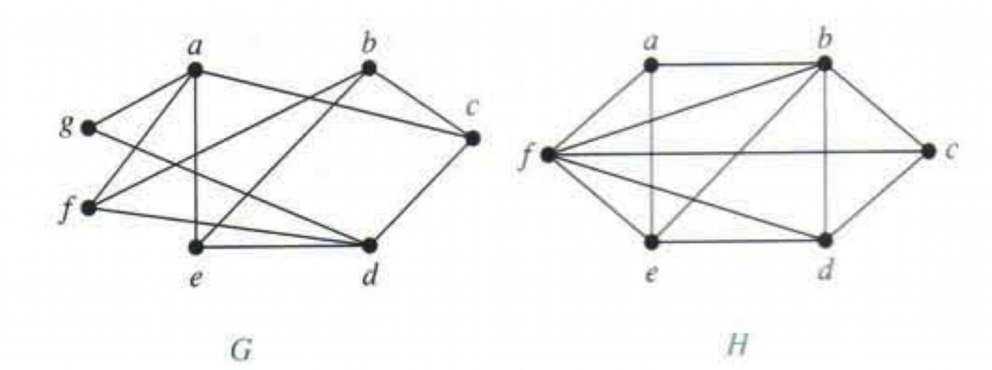
4) Encontre o grau dos vértices do multigrafo apresentado abaixo. Em seguida, indique a conectividade do grafo.



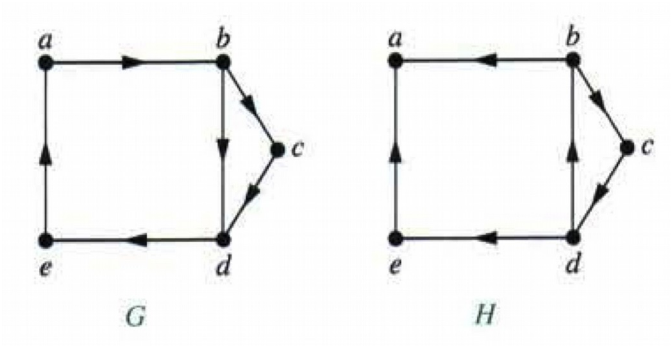
5) Os grafos da figura abaixo são isomorfos? Explique.



6) Os grafos **G** e **H** apresentados abaixo são bipartidos? Por quê?



7) Faça um estudo sobre a conexidade dos dígrafos **G** e **H** apresentados abaixo.



8) Sobre conectividade de vértices ($\mathbf{c_v}$) e arestas ($\mathbf{c_e}$), prove as afirmativas abaixo:

(i) Se **G** é um grafo desconexo, então $\mathbf{c_v = c_e = 0}$.

(ii) Para todo grafo vale $\mathbf{c_v \leq c_e}$.

(iii) Se **G** é um grafo completo $\mathbf{K_n}$, então $\mathbf{c_v = c_e = n - 1}$.

9) Seja **G** um grafo direcionado e simples de **v** vértices e **e** arestas.

a) Prove que, se **G** é conexo, então $\mathbf{v - 1 \leq e \leq v*(v - 1)}$.

b) Quais são os limites inferior e superior para **e** se **G** é fortemente conexo?

10) Considere as seguintes afirmações sobre um grafo **G** com $\mathbf{n > 0}$ vértices:

I – Se **G** é conexo o número de arestas é maior que **n**;

II – **G** será acíclico somente se o número de arestas for menor que **n**;

III – **G** é biconexo se, e somente se, ele for Hamiltoniano;

IV – **G** é Euleriano se, e somente se, todo grau é par.

As afirmativas verdadeiras são:

(A) I e II

(B) I e III

(C) II e III

(D) II e IV

(E) II, III e IV

11) Prove que, dado um grafo simples e conexo **G = (V, E)** com **|V| > 2**, então:

(i) Um vértice **v** que pertence a **V** é articulação de **G** se e somente se existirem vértices **w, u** $\neq$ **v** tais que v está contido em todo caminho entre **w** e **u** em **G**.

(ii) Uma ligação **(p, q)** que pertence a **E** é ponte se e somente se ela for o único caminho simples entre **p** e **q** em **G**.

12) Dado que o grafo **H** é complemento do grafo **G**, assinale a alternativa correta.

(A) **G** e **H** são grafos isomorfos.

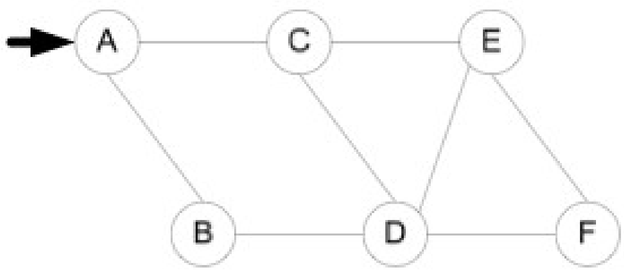
(B) Se o grafo **G** é conexo, então **H** é conexo.

(C) Se o grafo **G** não é conexo, então **H** é conexo.

(D) Se o grafo **G** não é conexo, então **H** não é conexo.

(E) Os grafos **G** e **H** têm o mesmo número de componentes conexas.

13) Considere o algoritmo de busca em largura em grafos. Dado o grafo abaixo e o vértice A como origem, a ordem em que os vértices são descobertos é dada por:



(A) ABCDEF

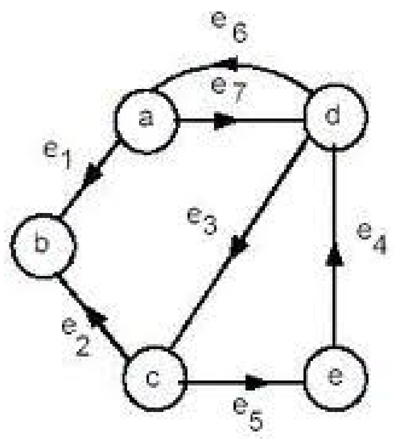
(B) ABDCEF

(C) ACDBFE

(D) ABCEDF

(E) ABDFEC

14) Considere o dígrafo abaixo e responda os itens a seguir.



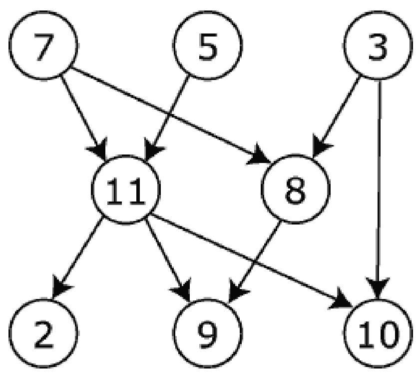
a. Informe sua conexidade: forte, unilateral, fraca ou desconexa?
b. Quais são os seus componentes fortemente conexos? Use o algoritmo visto em sala para responder este item.
c. Existe um caminho de comprimento 5 do vértice “a” para o vértice “e”?
d. Quantos e quais são os seus ciclos simples?
e. Seu grafo subjacente é bipartido? E regular?
f. Monte suas matrizes de adjacência e incidência.

15) Uma <u>fonte</u> é um vértice com grau de entrada nulo, enquanto que um <u>sumidouro</u> é um vértice com grau de saída nulo. Dados esses dois conceitos e o grafo orientado abaixo, responda os seguintes itens:

a. Represente o grafo usando lista de adjacência.

b. O que significa o total de elementos presente na lista de adjacência montada no item (a).

c. Como identificar um sumidouro e uma fonte numa lista de adjacência? Exemplifique usando o grafo abaixo como referência.



16) Considerando o grafo de Petersen (vide: pt.wikipedia.org/wiki/Grafo_de_Petersen), responda os itens abaixo:

a. O grafo é Hamiltoniano?

b. O grafo é biconexo?

c. Explique se o grafo satisfaz, ou não, as condições de Dirac e Ore.

17) Apresente a ordem dos vértices produzida pela ordenação topológica quando o algoritmo é executado sobre o grafo direcionado acíclico da Figura 7.23.

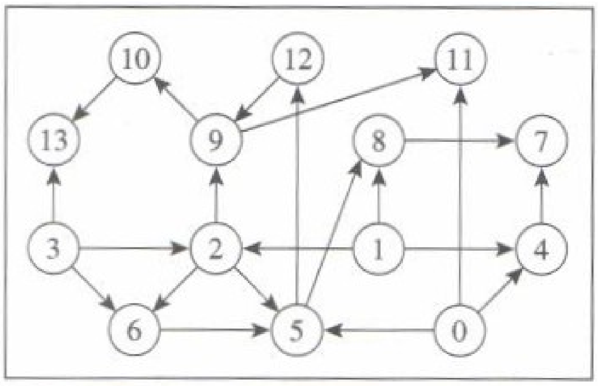


Figura 7.23 Grafo direcionado acíclico.

18) Seja **R** uma matriz de adjacências de um dígrafo acíclico **G**, construída segundo uma permutação de seus vértices que corresponde a uma ordenação topológica. Mostrar que **R** é uma matriz triangular. O grafo direcionado da Figura 7.23 pode ser tomado como exemplo.

19) Seja **G** um grafo conexo com **n** vértices. Considere duas rotulações dos vértices de **G** obtidas por duas buscas em **G**, uma em largura, **l()**, e outra em profundidade, **p()**, ambas iniciadas no vértice **v**. Em cada rotulação, os vértices receberam um número de **1** a **n**, o qual representa a ordem em que foram alcançados na busca em questão. Assim, $\mathbf{l(v) = p(v) = 1}$; enquanto $\mathbf{l(x) > 1}$ e $\mathbf{p(x) > 1}$ para todo vértice **x** diferente de **v**. Considere dois vértices **u** e **w** de **G** e denote por **d(u, w)** a distância em **G** de **u** até **w**. Com base nesses dados, assinale a alternativa correta.

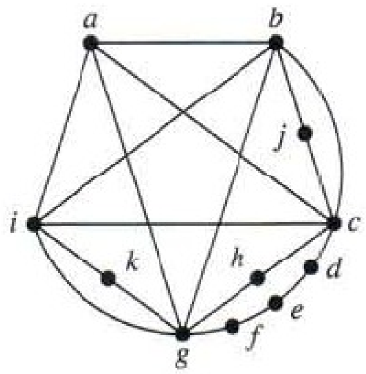
(A) Se $\mathbf{l(u) < l(w)}$ e $\mathbf{p(u) < p(w)}$, então $\mathbf{d(v, u) < d(v, w)}$.
(B) Se $\mathbf{l(u) < l(w)}$ e $\mathbf{p(u) > p(w)}$, então $\mathbf{d(v, u) = d(v, w)}$.
(C) Se $\mathbf{l(u) > l(w)}$ e $\mathbf{p(u) < p(w)}$, então $\mathbf{d(v, u) \leq d(v, w)}$.
(D) Se $\mathbf{l(u) > l(w)}$ e $\mathbf{p(u) > p(w)}$, então $\mathbf{d(v, u) < d(v, w)}$.
(E) Se $\mathbf{l(u) < l(w)}$ e $\mathbf{p(u) > p(w)}$, então $\mathbf{d(v, u) \leq d(v, w)}$.

20) Prove que os grafos $\mathbf{K_5}$ e $\mathbf{K_{3,3}}$ não são planares.

21) Qual a quantidade mínima de arestas que se deve remover do grafo completo com 7 vértices, $\mathbf{K_7}$, para se obter um grafo planar?

(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8

22) Determine se o grafo da figura abaixo é ou não planar. Explique seu raciocínio.



23) Para o grafo abaixo, responda se ele é bipartido, biconexo e planar. Justifique suas respostas.