ICEN
Instituto de Ciências Exatas e Naturais

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Prof. Mauro Larrat
maurolarrat@ufpa.br
Primeiro semestre de 2016

Resolução de Sistemas Não Lineares

Introdução

Relembrando sobre linearidade...

Suponha que, sem muito esforço, você pode atirar uma bola de tênis cerca de 32Km/h. Agora, suponha que você está pedalando uma bicicleta a 16 Km/h e atira uma bola de tênis pra frente.

A bola vai viajar para a frente a 32Km/h. A linearidade é, essencialmente, a ideia de que a combinação de duas entradas - como a velocidade do seu braço e a velocidade da bicicleta - irá produzir a soma das respectivas saídas - a velocidade da bola.

Introdução

Agora, suponha que, em vez de jogar uma bola de

tênis, você lança um avião de papel.

Dependendo do design do avião, ele pode navegar para a frente ou pode rodopiar. Alguns aviões de papel parecem comportar-se irregularmente quanto mais força impomos no lançamento.

Acrescentando a velocidade da bicicleta é quase impossível obter qualquer coisa previsível a respeito do avião de papel. Isso porque o fluxo de ar sobre as asas de um avião de papel pode comportar-se de forma não linear.

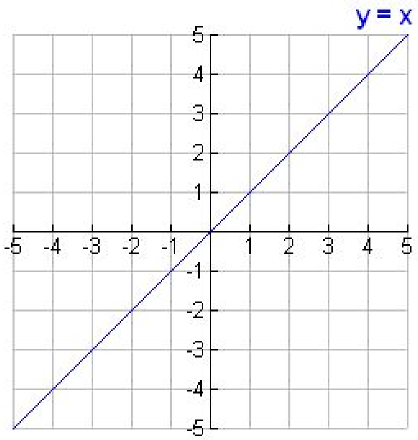
Introdução

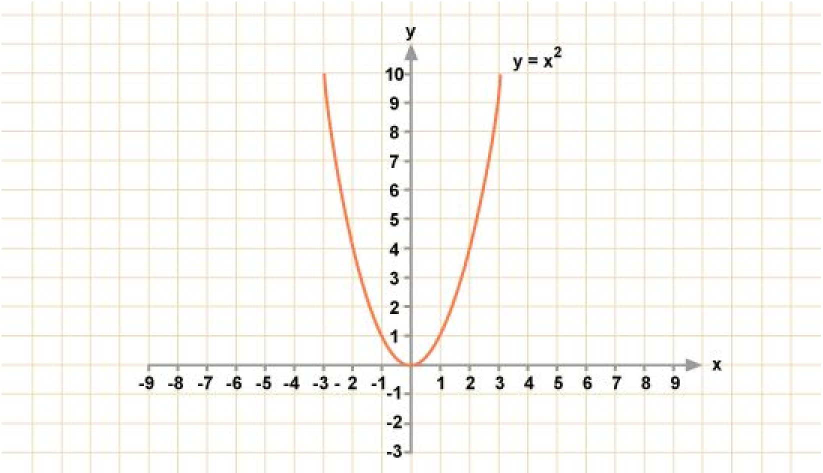
Se a bicicleta possuir sensores embutidos e um computador de bordo, poderíamos calcular a velocidade da bola de tênis em uma fração de segundos.

Ainda sim, seria impossível calcular todos os fluxos de ar sobre a asa do avião de papel na hora de (de repente :)) fazer alguma coisa útil.

Introdução

Um exemplo mais evidente diz respeito a forma do gráfico da equação linear mais simples de $y = x$, que descreve uma linha reta, enquanto que o gráfico de uma equação não linear (também a mais simples) $y = x^2$ descreve uma curva.





Introdução

Enquanto as funções lineares são bastante fáceis de se definir, é impossível construir uma única teoria sobre sistemas não lineares, porque coisas arbitrárias poderiam satisfazer essa definição.

Justamente porque equações lineares são muito mais fácil de resolver do que equações não lineares, muitas pesquisas dedicam-se a encontrar aproximações lineares para fenômenos não lineares.

Resolução de Sistemas Não Lineares
Método de Newton

Método de Newton

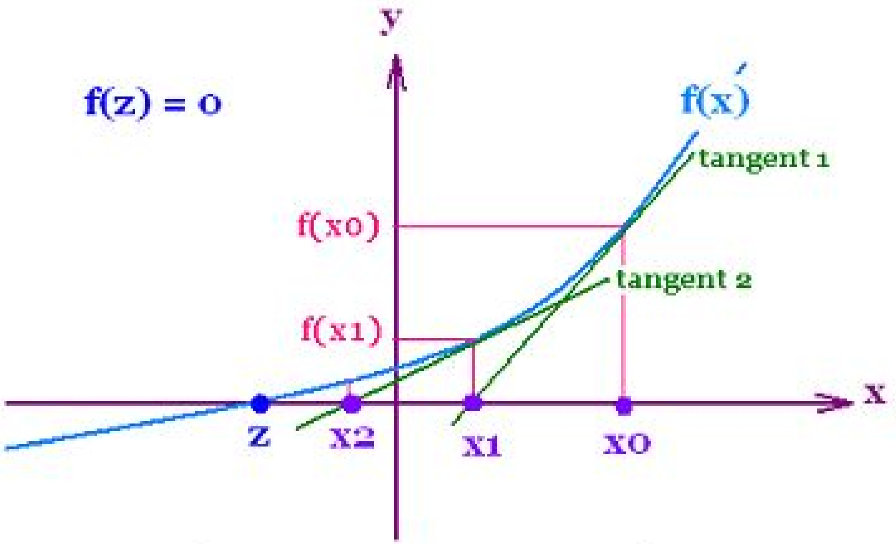
desenvolvido por Isaac Newton (1643-1727) foi utilizado para calcular as **raízes reais** de qualquer função. Em 1690, o método foi simplificado pelo matemático Joseph Raphson (1648-1715), passando a ser conhecido como Método de Newton-Raphson.

É o método mais conhecido para resolução de sistemas não lineares.

Baseia-se no princípio de linearização sucessiva - uma técnica em que o problema mais difícil não linear é substituído por uma sucessão de **problemas (retas) lineares** cujas soluções **convergem** para a solução do problema não linear.

Método de Newton

Objetivo: Determinar a nova aproximação como a intersecção (com o eixo x) de uma reta tangente à curva.



Newton-Raphson Method

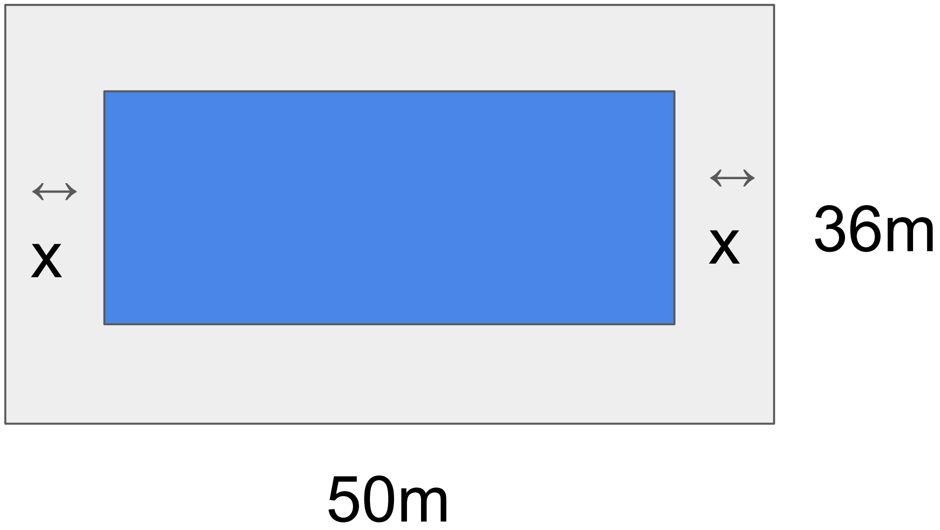
Método de Newton - preliminares

Para que encontrar as raízes reais de qualquer função?

Método de Newton - preliminares

Para que serve encontrar as raízes reais de qualquer função?

Qual seria a expressão algébrica para representar o maior lado da piscina?

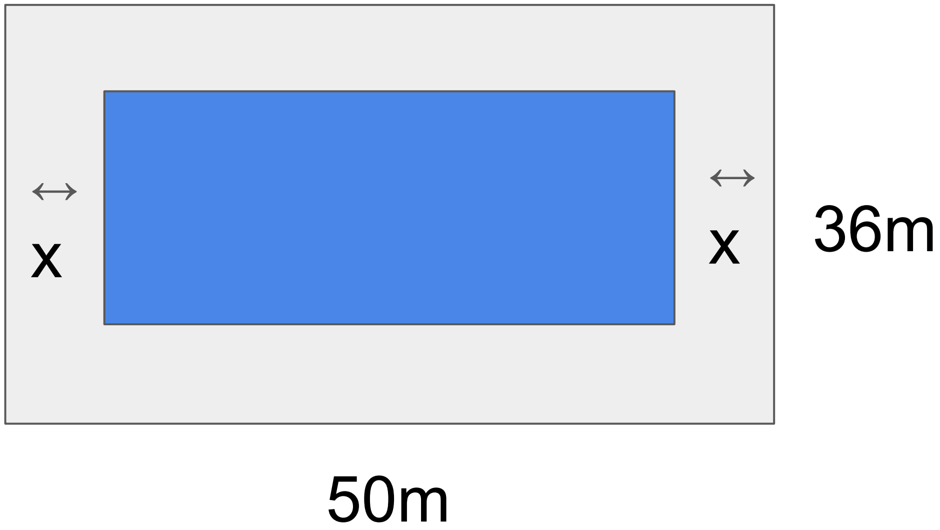


Método de Newton - preliminares

Para que serve encontrar as raízes reais de qualquer função?

Qual seria a expressão algébrica para representar o maior lado da piscina?

$50 - 2x$

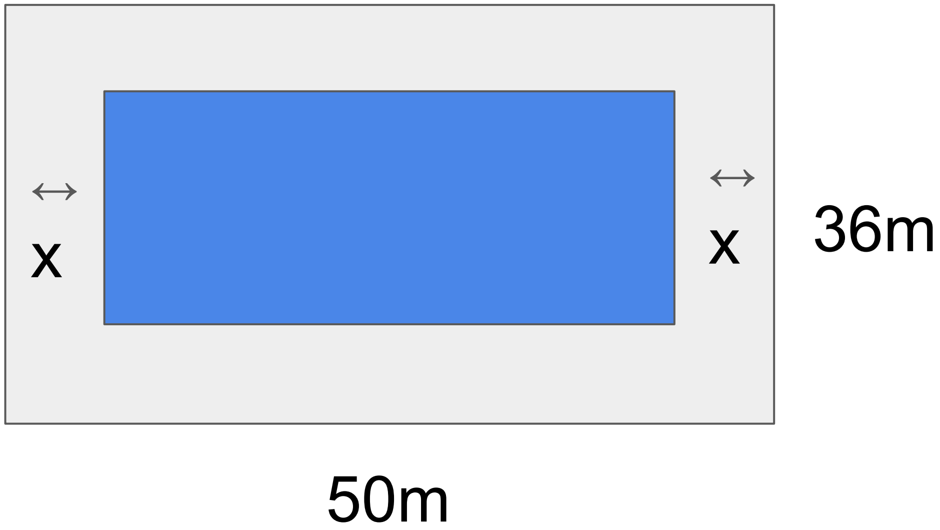


Método de Newton - preliminares

Para que serve encontrar as raízes reais de qualquer função?

E qual seria a expressão algébrica para representar o menor lado da piscina?

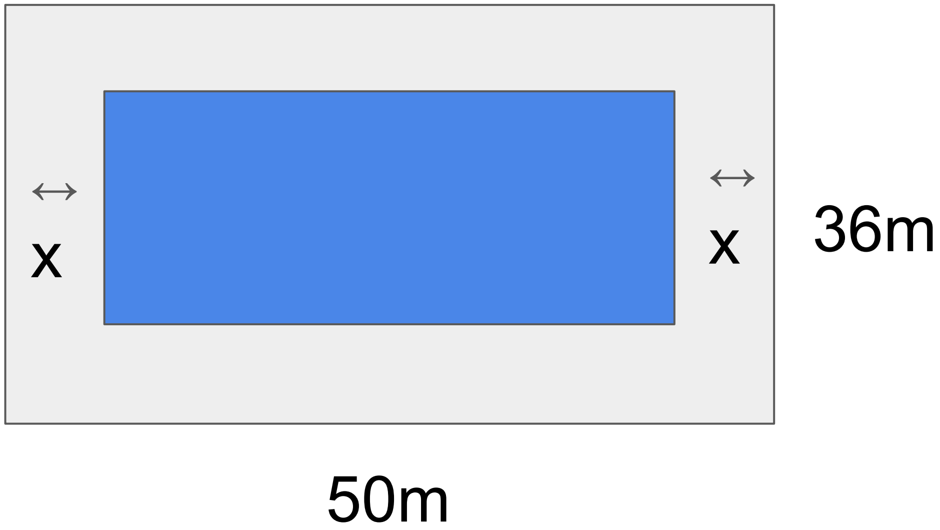
$36 - 2x$



Método de Newton - preliminares

Para que serve encontrar as raízes reais de qualquer função?

E qual seria a expressão algébrica para representar a área (em azul) da piscina?



Método de Newton - preliminares

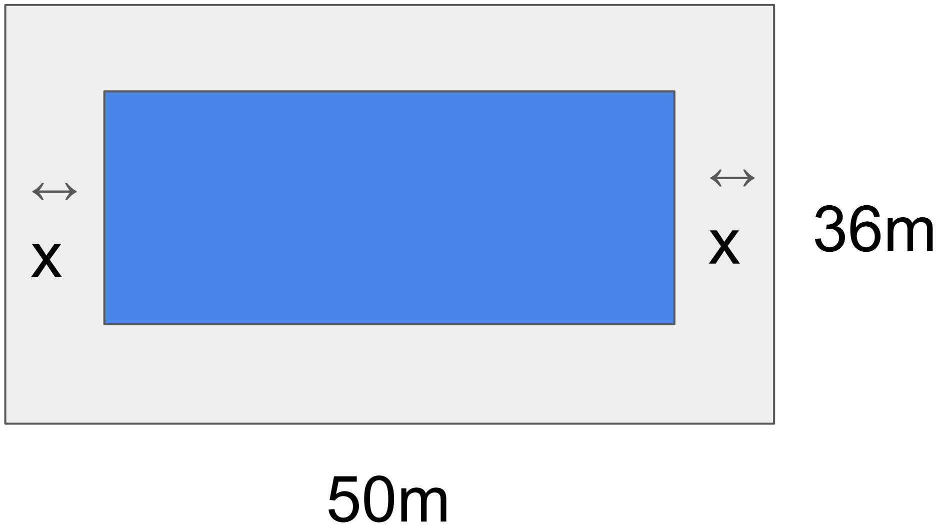
Para que serve encontrar as raízes reais de qualquer função?

E qual seria a expressão algébrica para representar a área (em azul) da piscina?

$$(50 - 2x)(36 - 2x) =$$

$$1800 - 100x - 72x + 4x^2 =$$

$$\mathbf{4x^2 - 172x + 1800}$$



Método de Newton - preliminares

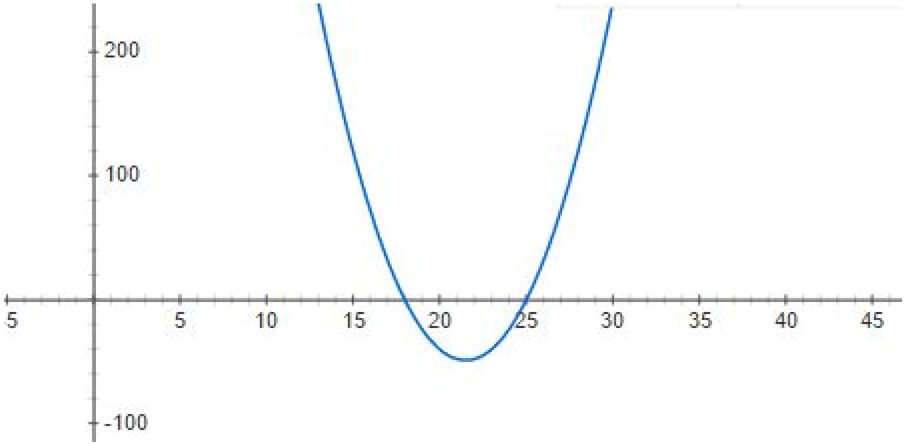
$$\boxed{4x^2 - 172x + 1800} = \boxed{(50 - 2x)(36 - 2x)}$$

Expressão não linear e Fatores lineares da Expressão não linear

Método de Newton - preliminares

Como encontrar **X** em uma <u>expressão</u> como esta?

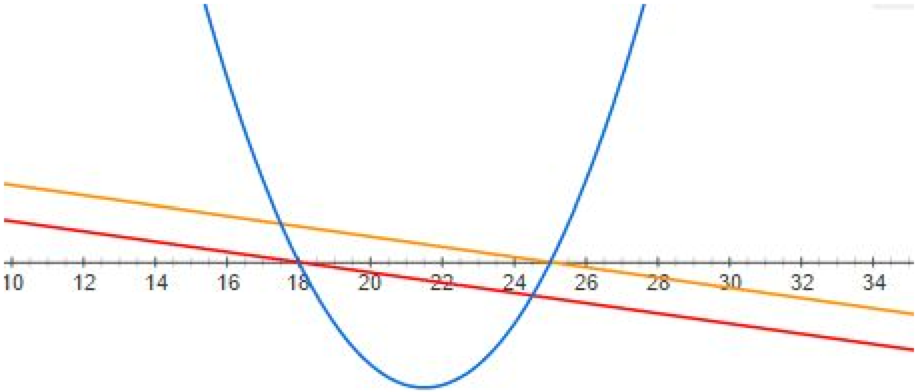
$$4x^2 - 172x + 1800$$



Método de Newton - preliminares

Como encontrar **X** em uma expressão como esta?

$$4x^2 - 172x + 1800$$



Vamos incluir os fatores lineares no gráfico à esquerda.

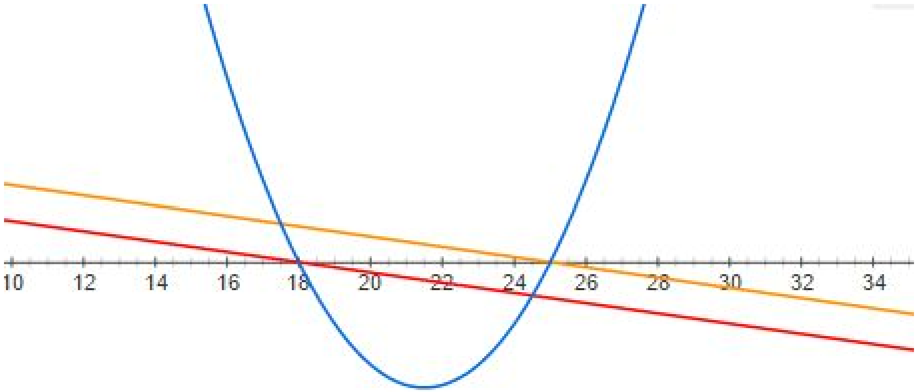
(50 - 2x)

(36 - 2x)

Método de Newton - preliminares

Como encontrar **X** em uma <u>expressão</u> como esta?

$$4x^2 - 172x + 1800$$



Vamos incluir os fatores lineares no gráfico à esquerda.

(50 - 2x)

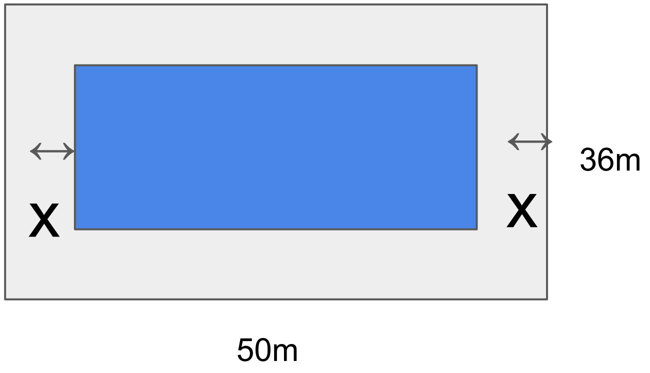
(36 - 2x)

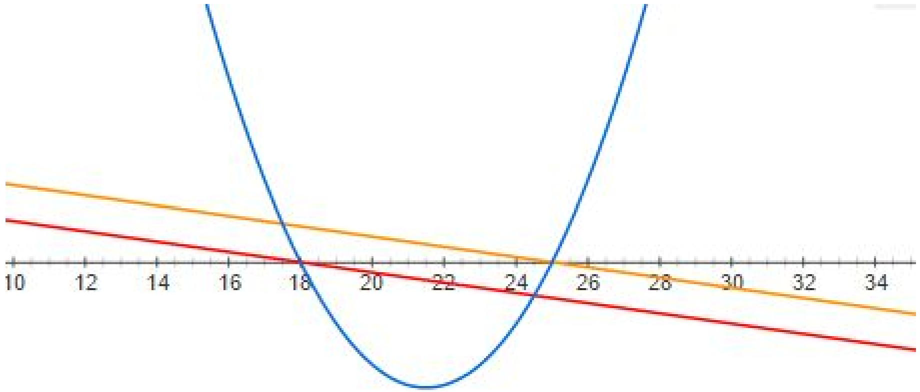
Ainda lembram o que os fatores lineares representam?

Método de Newton - preliminares

Como encontrar **X** em uma expressão como esta?

$$4x^2 - 172x + 1800$$





Vamos incluir os fatores lineares no gráfico à esquerda.

(50 - 2x)

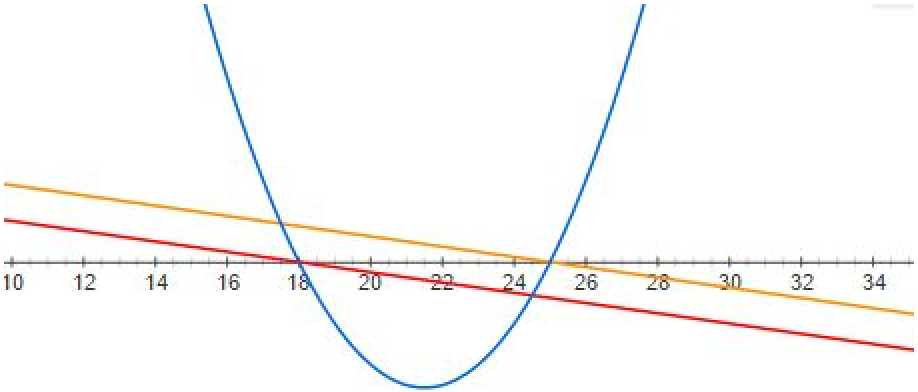
(36 - 2x)

Exatamente a resposta do nosso problema!

Método de Newton - preliminares

Como encontrar **X** em uma **equação** como esta?

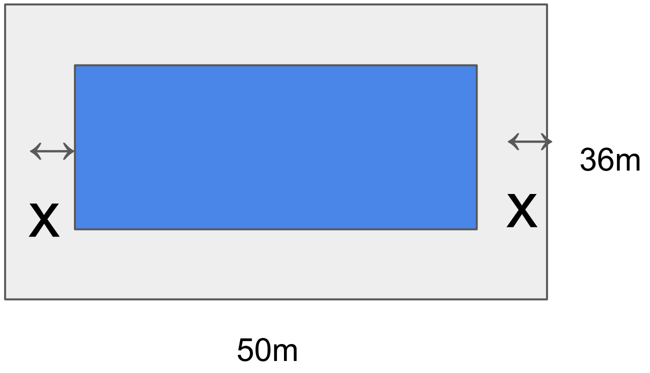
$$4x^2 - 172x + 1800 = 0$$



Igualando a expressão á zero teremos um equação quadrática.

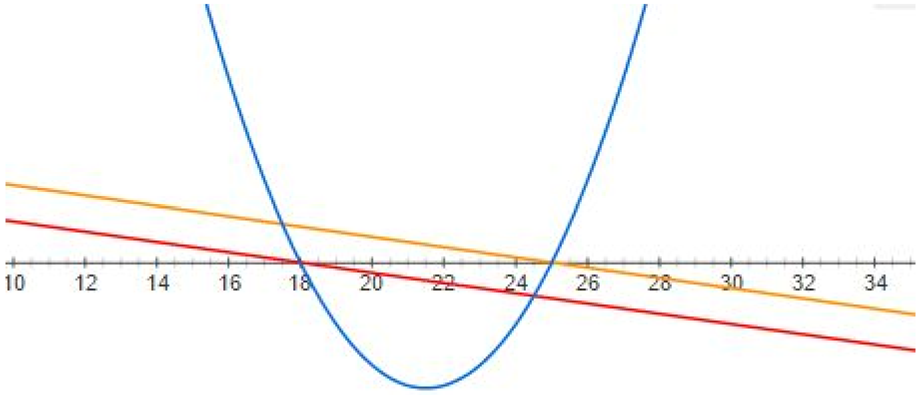
Como a expressão à esquerda da equação é formada pela manipulação dos fatores lineares, os quais representam a área (em azul) da piscina, igualar a zero é o mesmo que dizer que a piscina possui área zero. A partir de zero poderemos calcular diversas áreas (em azul) para a piscina.

Método de Newton - preliminares



Como encontrar **X** em uma <u>expressão</u> como esta?

$4x^2 - 172x + 1800 = 0$



Vamos incluir os fatores lineares no gráfico à esquerda.

(50 - 2x)

(36 - 2x)

A <u>raiz</u> da euquação está onde os as retas dos fatores lineares interceptam o eixo x!

Método de Newton - preliminares

Interpretação da resposta:
Sabe-se que a área (externa) total da piscina é $1800m^2$ (50x36).

Consideramos, inicialmente, a área (azul) da piscina = 0.
As raízes são x1=25 e x2=18.

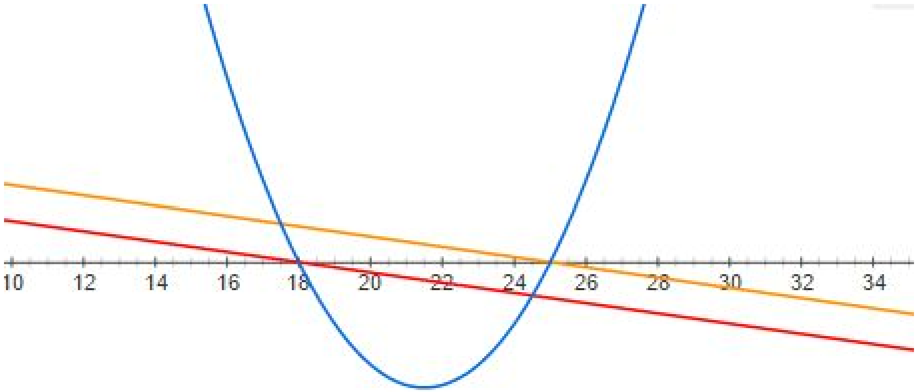
para x1 = 25, teríamos (50-2x25)x(26-2x25) = 0.
para x2 = 18, teríamos (50-2x18)x(26-2x18) = 0.

Podemos substituir o zero por outro valor (em m^2) o qual desejamos que a piscina (parte azul) possua.

Método de Newton - preliminares

Como encontrar **X** em uma **equação** como esta?

$$4x^2 - 172x + 1800 = 0$$



Resposta:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Método de Newton

Dado um sistema de equações não lineares, transformamos estas equações em funções com n variáveis e n funções.

Dadas a lista de variáveis soluções ($x^0{}_0$, $x^1{}_0$,..., $x^2{}_0$), devemos encontrar outra lista aproximada de variáveis soluções ($x^0{}_1$, $x^1{}_1$,..., $x^2{}_1$) , ($x^0{}_2$, $x^1{}_2$,..., $x^2{}_2$), …, ($x^0{}_n$, $x^1{}_n$,..., $x^2{}_n$), tal que a solução final seja aproximada considerando o erro mínimo esperado $\mathcal{E}$.

Método de Newton

Então, os valores aproximados da lista de solução (x^0_{n+1}, x^1_{n+1},..., x^2_{n+1}) serão dados por:

$$(x^0_{n+1}, x^1_{n+1},..., x^2_{n+1}) = (x^0_{n}, x^1_{n},..., x^2_{n}) - [Det / Det(J)]$$

onde Det(J) é denominado de matriz Jacobiana e seu determinante deve ser diferente de zero, caso contrário o sistema será indeterminado. Essa condição determina a convergência da solução.

Det é a matriz formada pelas funções geradas das equações não lineares e pelas derivadas das outras variáveis que não a nova variável x^0_n a ser calculada.

Método de Newton

Derivadas parciais no ponto.

Funções no ponto.

Matriz Jacobiana com as derivadas parciais das variáveis.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\det \begin{bmatrix} F(x,y) & \frac{\partial F}{\partial y} \\ G(x,y) & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}}$$

Obs.: estamos considerando duas variáveis, x e y, e o cálculo da variável x_{n+1} em função de y.

Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x,y)\dfrac{\partial G}{\partial y} - G(x,y)\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial G}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial G}{\partial x}}$$

Obs.: estamos considerando duas variáveis, x e y, e o cálculo da variável x_{n+1} em função de x_n e y_n.

Método de Newton

Exemplo simples com duas variáveis e duas equações.

Dada a equação não linear a seguir:

$x^2 + y^2 = 4$

$x^2 - y^2 = 1$

convertemos esta para as funções não lineares F(x,y) e G(x,y) a seguir:

$F(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

$G(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$

com soluções iniciais iguais à $x_0 = 1{,}5$ e $y_0 = 1{,}5$.

Método de Newton

Calculamos as derivadas parciais das funções F(x,y) e G(x,y):

Derivada parcial em relação a x:

$\delta F(x,y) = \delta(x^2 + y^2 - 4) = 2x + 0 - 0 = 2x$

$\delta G(x,y) = \delta(x^2 - y^2 - 1) = 2x - 0 - 0 = 2x$

Derivada parcial em relação a y:

$\delta F(x,y) = \delta(x^2 + y^2 - 4) = 0 + 2y - 0 = 2y$

$\delta G(x,y) = \delta(x^2 - y^2 - 1) = 0 - 2y - 0 = -2y$

Método de Newton

Calculamos as derivadas parciais das funções F(x,y) e G(x,y):

Derivada parcial em relação a x:

$\delta F(x,y) = \delta(x^2 + y^2 - 4) = 2x + 0 - 0 = 2x$

$\delta G(x,y) = \delta(x^2 - y^2 - 1) = 2x - 0 - 0 = 2x$

Derivada parcial em relação a y:

$\delta F(x,y) = \delta(x^2 + y^2 - 4) = 0 + 2y - 0 = 2y$

$\delta G(x,y) = \delta(x^2 - y^2 - 1) = 0 - 2y - 0 = -2y$

Matriz Jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}$$

Método de Newton

Calculamos as derivadas parciais das funções F(x,y) e G(x,y):

Derivada parcial em relação a x:

$\delta F(x,y) = \delta(x^2 + y^2 - 4) = 2x + 0 - 0 = 2x$

$\delta G(x,y) = \delta(x^2 - y^2 - 1) = 2x - 0 - 0 = 2x$

Derivada parcial em relação a y:

$\delta F(x,y) = \delta(x^2 + y^2 - 4) = 0 + 2y - 0 = 2y$

$\delta G(x,y) = \delta(x^2 - y^2 - 1) = 0 - 2y - 0 = -2y$

Matriz Jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}$$

cada coluna consiste nas derivadas parciais de cada variável do sistema de equações.

Método de Newton

$$J(1{,}5{,}1{,}5) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1{,}5) & 2(1{,}5) \\ 2(1{,}5) & -2(1{,}5) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$Det[J(x_0,y_0)] = Det[J(1{,}5{,}1{,}5)] = -18.$

Observe que o determinante é diferente de zero. Satisfaz a regra de convergência.
Então podemos continuar com o procedimento do método de Newton.

Método de Newton

Encontrar os valores de $F(x_0,y_0)$ e de $G(x_0,y_0)$ nos ponto x_0 e y_0:

$F(x_0,y_0) = x^2 + y^2 - 4 = (1,5)^2 + (1,5)^2 - 4 = 0,5$
$G(x_0,y_0) = x^2 - y^2 - 1 = (1,5)^2 - (1,5)^2 - 1 = -1$ (observe que 1,5 não é negativo!!!)

De posse da matriz jacobiana e do seu determinante, além dos valores de $F(x_0,y_0)$ e $G(x_0,y_0)$, poderemos seguir para calcular x_1 e y_1.

Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x,y)\frac{\partial G}{\partial y} - G(x,y)\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}}$$

$$x_1 = 1{,}5 - \frac{0{,}5(-3) - (-1)3}{-18} = 1{,}5 + 0{,}083 = 1{,}58$$

$$y_1 = 1{,}5 - \frac{(-1)(3) - (0{,}5)3}{-18} = 1{,}5 - 0{,}25 = 1{,}25$$

Método de Newton

Verificamos que:

$x_0 \neq x_1$, pois 1,5 ≠ 1,58, e que $y_0 \neq y_1$, pois 1,5 ≠ 1,25.

Precisamos encontrar x_2 e y_2 a partir de x_1 e y_1:

$$J(x_1, y_1) = J(1{,}58, 1{,}25) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1{,}58) & 2(1{,}25) \\ 2(1{,}58) & -2(1{,}25) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3{,}16 & 2{,}5 \\ 3{,}16 & -2{,}5 \end{bmatrix} = -15{,}80$$

Método de Newton

Encontrar os valores de $F(x_1,y_1)$ e de $G(x_1,y_1)$ nos pontos x_1 e y_1:

$F(x_1,y_1) = x^2 + y^2 - 4 = (1{,}58)^2 + (1{,}25)^2 - 4 = 0{,}058$
$G(x_1,y_1) = x^2 - y^2 - 1 = (1{,}58)^2 - (1{,}25)^2 - 1 = -0{,}066$ (observe que 1,25 não é negativo!!!)

De posse da matriz jacobiana e do seu determinante -15,80, além dos valores de $F(x_1,y_1)$ e $G(x_1,y_1)$, poderemos seguir para calcular x_2 e y_2.

Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x,y)\dfrac{\partial G}{\partial y} - G(x,y)\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial G}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial G}{\partial x}}$$

$$x_2 = 1{,}5 - \frac{0{,}058(-2{,}5) - (-0{,}066)2{,}5}{-15{,}80} = 1{,}5 + 0{,}0013 = 1{,}58$$

$$y2 = 1{,}25 - \frac{(-0{,}066)(3{,}16) - (0{,}058)3{,}16}{-15{,}80} = 1{,}25 - 0{,}012 = 1{,}24$$

Método de Newton

Verificamos que:

$x_1 = x_2$, pois 1,58 = 1,58, **MAS** $y_1 \neq y_2$, pois 1,25 ≠ 1,24.

Precisamos encontrar x_3 e y_3 a partir de x_2 e y_2, <u>mesmo que x esteja satisfeito</u>:

$$J(x_2, y_2) = J(1{,}58, 1{,}24) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1{,}58) & 2(1{,}24) \\ 2(1{,}58) & -2(1{,}24) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3{,}16 & 2{,}48 \\ 3{,}16 & -2{,}48 \end{bmatrix} = -14{,}84$$

Método de Newton

Encontrar os valores de $F(x_2,y_2)$ e de $G(x_2,y_2)$ nos ponto x_2 e y_2:

$F(x_2,y_2) = x^2 + y^2 - 4 = (1{,}58)^2 + (1{,}24)^2 - 4 = 0{,}034$

$G(x_2,y_2) = x^2 - y^2 - 1 = (1{,}58)^2 - (1{,}24)^2 - 1 = -0{,}041$ (observe que 1,24 não é negativo!!!)

De posse da matriz jacobiana e do seu determinante -14,88, além dos valores de $F(x_2,y_2)$ e $G(x_2,y_2)$, poderemos seguir para calcular x_3 e y_3.

Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x,y)\frac{\partial G}{\partial y} - G(x,y)\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}}$$

$$x_3 = 1{,}58 - \frac{0{,}034(-2{,}48) - (-0{,}041)2{,}48}{-14{,}88} = 1{,}58 + 0{,}0012 =$$

$1{,}58$

$$y_3 = 1{,}24 - \frac{(-0{,}041)(3{,}16) - (0{,}034)3{,}16}{-14{,}88} = 1{,}24 - 0{,}012 =$$

$1{,}24$

Método de Newton

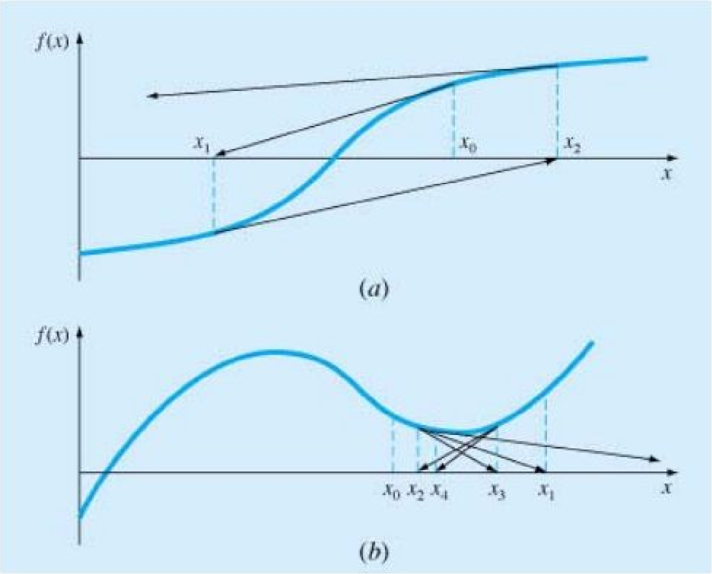
Verificamos que:

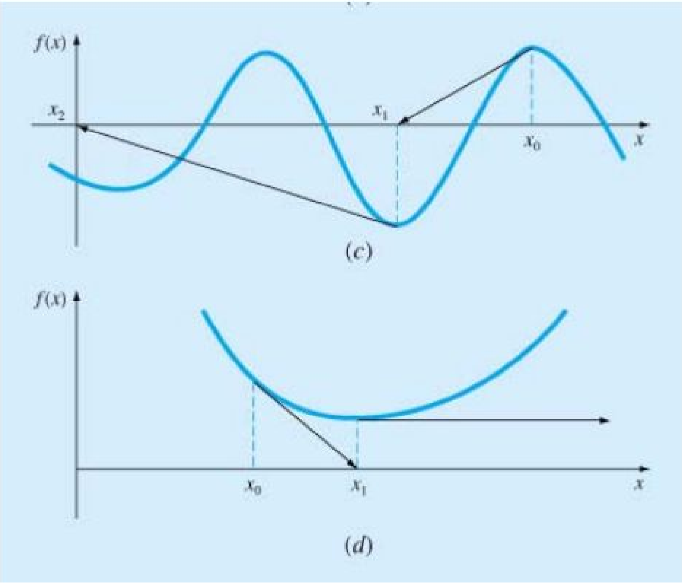
$x_2 = x_3$, pois 1,58 = 1,58, **E** $y_2 = y_3$, pois 1,24 = 1,24.

Chegamos à solução do sistema.

Método de Newton

Possíveis desastres de convergência do método de Newton convencional:





a) Ponto de inflexão perto da solução;
b) Oscilação ao redor de mínimos ou máximos locais.
c) Salta sobre diversas soluções.
a) Inclinação igual a zero (zero slope).

Método de Newton

Resolva utilizando o método de Newton, para $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$:

$4x^2 - y^3 + 28 = 0$

$3x^3 - 4y^2 - 145 = 0$

Resolução de Sistemas Não Lineares
Método de Newton Modificado
(Método de Broyden)

Método de Broyden

Quando o ponto inicial está longe da solução pode não ocorrer uma convergência, ou essa convergência pode ser prejudicada por conta de a iteração cair em uma região onde a função não é convexa.

O método modificado tem a vantagem de calcular uma única vez a matriz Jacobiana.

Contudo, necessita de mais iterações do que o método de Newton convencional.

Método de Broyden

Consideremos o sistema não linear a seguir

$$\begin{pmatrix} x^2 + xy - 10 = 0 \\ x + xy^2 - 57 = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x_0 = 1.5, y_0 = 3.5)$$

e o processo iterativo de Newton-Raphson:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - J^{-1} \begin{pmatrix} F(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

Método de Broyden

Passo 1: Calculamos $F(x_0, y_0)$ e $G(x_0, y_0)$:

$$\begin{pmatrix} F(x_0, y_0) \\ G(x0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5^2 + (1.5)(3.5) - 10 = -2.5 \\ 1.5 + (1.5)(3.5)^2 - 57 = 1.63 \end{pmatrix}$$

assim como a matriz Jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & x \\ 3y^2 & 1 + 6xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 & 1.5 \\ 36.75 & 32.50 \end{pmatrix}$$

Método de Broyden

Passo 2: Calculamos a inversa da matriz jacobiana (p.e., por Gauss-Jacobi):

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 6.5 & 1.5 \\ 36.75 & 32.50 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.21 & -0.01 \\ -0.24 & 0.04 \end{pmatrix}$$

Passo 3: encontramos x_1 e y_1 utilizando a fórmula Newton-Raphson:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.21 & -0.01 \\ -0.24 & 0.04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2.5 \\ 1.63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.04 \\ 2.83 \end{pmatrix}$$

x_1, y_1 = x_0, y_0 - inversa da matriz Jacobiana * $F(x_0, y_0), G(x_0, y_0)$

Método de Broyden

Passo 4: Aplicamos a fórmula de Sherman-Morrison.
A partir daqui, não calcularemos mais a inversa da matriz Jacobiana.
Em Sherman-Morrison, a inversa da matriz Jacobiana da próxima iteração é geralmente representada por A^{-1}_{n}, onde n é a próxima iteração, a partir da primeira iteração n-1, calculada anteriormente no Passo 3 (x_1, y_1). Então, $A^{-1}_{0} = J^{-1}$.

$$A_n^{-1} = A_{n-1}^{-1} - \frac{(S_n - A_{n-1}^{-1} Y_n) S_n^T A_{n-1}^{-1}}{S_n^T - A_{n-1}^{-1} Y_n}$$

onde:
$Y_n = F(x^n) - F(x^{n-1})$

$S_n = x^n - x^{n-1}$

$A^{-1}_{0} = J^{-1}$

T especifica que a matriz é transposta.

Método de Broyden

Passo 5: Para calcular $Y_1 = F(x^1) - F(x^0)$, já possuímos $F(x^0)$, então buscamos $F(x^1)$:
Observe que temos duas funções neste exemplo, então:

$$F(x^n) = \left(F(x_n y_n)\ G(x_n y_n)\right)^T$$

$F(x^1)$ = $F(x_1, y_1) = (2.04)^2 + (2.04-2.83) - 10 = -0.07$
$G(x_1, y_1) = (2.83) + 3(2.04)(2.83)^2 - 57 = -05.16$

Seguindo com o cálculo de Y_1:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -0.07 \\ -5.16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2.5 \\ 1.63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.43 \\ -6.79 \end{bmatrix}$$

Método de Broyden

Passo 6: Para calcular $S_1 = X^1 - X^0$:

$$S_1 = X^1 - X^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.04 \\ 2.83 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.54 \\ -0.67 \end{bmatrix}$$

A matriz transposta de S_1 é : $S_1^T = [0.54 \quad -0.67]$

Método de Broyden

Passo 7: podemos calcular o denominador da fórmula de Sherman-Morrison:

$$S_1^T - A_0^{-1}Y_1 = [0.54 \quad -0.67]^T \begin{bmatrix} 0.21 & -0.01 \\ -0.24 & 0.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.43 \\ -6.79 \end{bmatrix} = 0.88$$

calcula primeiro esta multiplicação,
depois o resultado com a transposta.

$$A_1^{-1} = A_0^{-1} - \frac{(S_1 - A_0^{-1}Y_1)S_1^T A_0^{-1}}{S_1^T - A_0^{-1}Y_1}$$

Método de Broyden

Passo 8: calcular as duas componentes do numerador da fórmula de Sherman-Morrison:

$$(S_1 - A_0^{-1}Y_1) = \begin{bmatrix} 0.54 \\ -0.67 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.21 & -0.01 \\ -0.24 & 0.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.43 \\ -6.79 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 \\ 0.18 \end{bmatrix}$$

$$S_1^T A_0^{-1} = [0.54 \quad -0.67]^T \begin{bmatrix} 0.21 & -0.24 \\ -0.01 & 0.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.27 \\ -0.03 \end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1} = A_0^{-1} - \frac{(S_1 - A_0^{-1}Y_1) S_1^T A_0^{-1}}{S_1^T - A_0^{-1}Y_1}$$

Método de Broyden

Observe que já havíamos calculado uma parte de uma das componentes do numerador, portanto, não precisamos refazer este cálculo:

$$A_1^{-1} = A_0^{-1} - \frac{(S_1 - A_0^{-1}Y_1)S_1^T A_0^{-1}}{S_1^T - A_0^{-1}Y_1}$$

Método de Broyden

Passo 9: multiplicar as componentes do numerador:

$$(S_1 - A_0^{-1}Y_1)S_1^T A_0^{-1} = \begin{bmatrix} -0.04 \\ 0.18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.27 & -0.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0108 & 0.0012 \\ 0.0486 & -0.0054 \end{bmatrix}$$

Método de Broyden

Passo 10: Resolvemos a fórmula de Sherman-Morrison:

$$A_1^{-1} = A_0^{-1} - \frac{\begin{bmatrix} -0.0108 & 0.0012 \\ 0.0486 & -0.0054 \end{bmatrix}}{0.88} = \begin{bmatrix} 0.20 & -0.01 \\ -0.18 & 0.03 \end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.21 & -0.01 \\ -0.24 & 0.04 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -0.0108 & 0.0012 \\ 0.0486 & -0.0054 \end{bmatrix}}{0.88} = \begin{bmatrix} 0.20 & -0.01 \\ -0.18 & 0.03 \end{bmatrix}$$

Método de Broyden

Passo final da iteração: calculamos x_2, y_2:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - [J]^{-1} \begin{bmatrix} F(x_1, y_1) \\ G(x_1, y_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.04 \\ 2.83 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.20 & -0.01 \\ -0.18 & 0.03 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.07 \\ -5.16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 2.97 \end{bmatrix}$$

O método se repete desde o **Passo 5** até que as soluções da iteração n sejam iguais as soluções da iteração n-1.