Exercícios resolvidos sobre Distribuições Normal e Exponencial

Observe, neste conjunto de Exercícios Resolvidos, várias aplicações das distribuições Exponencial e Normal. Acompanhar a resolução desses exercícios com atenção é mais uma atividade que vai ajudá-lo a fixar o conteúdo estudado nesta Unidade.

Exercicío 1

Os níveis de glicose no sangue são continuamente ajustados com as ações da insulina. Se os níveis de glicose estiverem muito altos ou muito baixos, eles serão ajustados para que retornem ao normal. O conteúdo de glicose no sangue, em pessoas adultas, pode ser considerado como uma distribuição normal. Sua média é de 80 mg/ml e sua variância é de 16 $(mg/mL)^2$. Considerando os resultados de um exame de glicose em determinado paciente, indique a probabilidade de o exame apresentar:

a) níveis entre 80 e 86 mg/mL;

b) níveis entre 76,2 e 80 mg/mL;

c) níveis menores que 77 mg/mL;

d) níveis entre 75 e 79 mg/mL.

Solução

Enunciado

Os níveis de glicose no sangue são continuamente ajustados com as ações da insulina. Se os níveis de glicose estiverem muito altos ou muito baixos, eles serão ajustados para que retornem ao normal. O conteúdo de glicose no sangue, em pessoas adultas, pode ser considerado como uma distribuição normal. Sua média é de 80 mg/ml e sua variância é de 16 (mg/mL)². Considerando os resultados de um exame de glicose em determinado paciente, indique a probabilidade de o exame apresentar:

a) níveis entre 80 e 86 mg/mL;

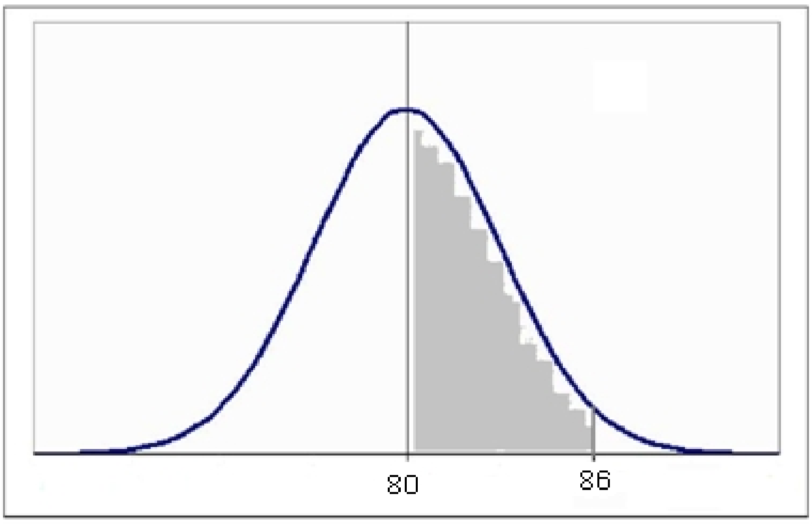
b) níveis entre 76,2 e 80 mg/mL;

c) níveis menores que 77 mg/mL;

d) níveis entre 75 e 79 mg/mL.

Solução

a) Queremos, no item a, calcular a área da curva normal representada a seguir.



$$P(80 \leq X \leq 86)$$

Para tanto, utilizaremos o que aprendemos sobre *distribuições normais*. Primeiro precisaremos "converter" a unidade X em uma unidade de trabalho Z apropriada para utilização em curva normal. Para isso, utilizaremos a fórmula $z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

Esta transformação pode ser feita da seguinte forma:

$$P(80 \leq X \leq 86) = P\left(\frac{80-80}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-80}{\sqrt{16}} \leq \frac{86-80}{\sqrt{16}}\right)$$

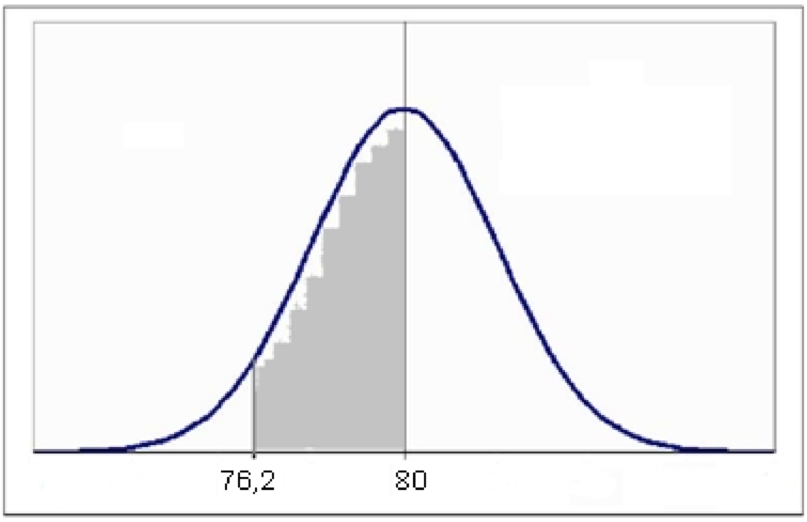
$$\rightarrow P(0 \leq Z \leq 1{,}5)$$

Desta maneira, sabemos qual o intervalo de Z que estamos procurando. Utilizando uma tabela de

$P(0 \leq Z \leq Z_0)$, facilmente encontrada em qualquer livro didático (disponível no apêndice do livro que você estiver utilizando), encontramos o valor procurado.

$$P(0 \leq Z \leq 1{,}5) = 0{,}4332$$

b) No item b, vamos calcular a área da curva normal representada a seguir.



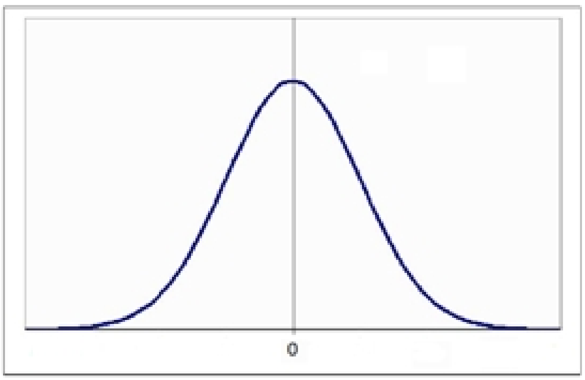
$$P(76{,}2 \leq X \leq 80)$$

Como o procedimento foi apresentado em detalhes no item anterior, prosseguiremos com o desenvolvimento da primeira parte dos cálculos sem maior detalhamento.

$$P(76{,}2 \leq X \leq 80) = P\left(\frac{76{,}2-80}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-80}{\sqrt{16}} \leq \frac{80-80}{\sqrt{16}}\right)$$

$$\rightarrow P(-0{,}95 \leq Z \leq 0)$$

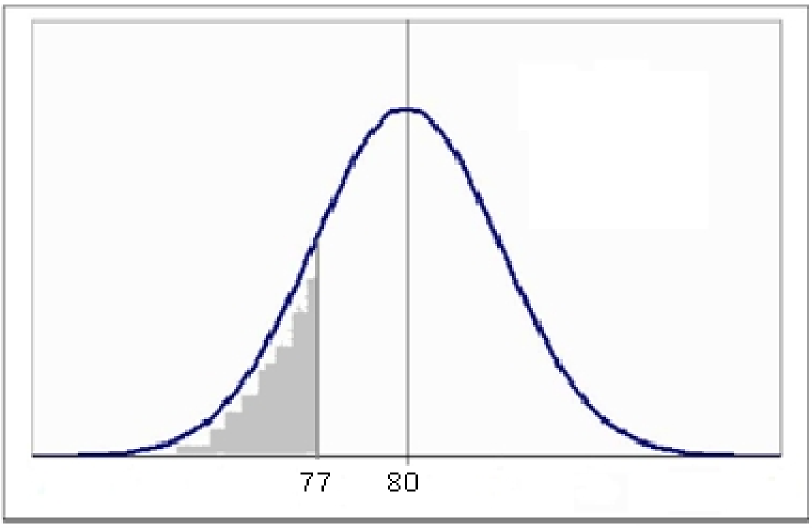
No entanto, agora nos deparamos com um problema. O intervalo tomado envolve números negativos. Vamos retomar o gráfico original da distribuição normal



Observamos que o gráfico é simétrico em relação à reta que passa pelo ponto 0.Desta forma, podemos considerar que $P(-0{,}95 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 0{,}95)$

Resolvido nosso problema, procuramos na tabela $P(0 \leq Z \leq 0{,}95)$ e encontramos $P(0 \leq Z \leq 0{,}95) = 0{,}3289$.

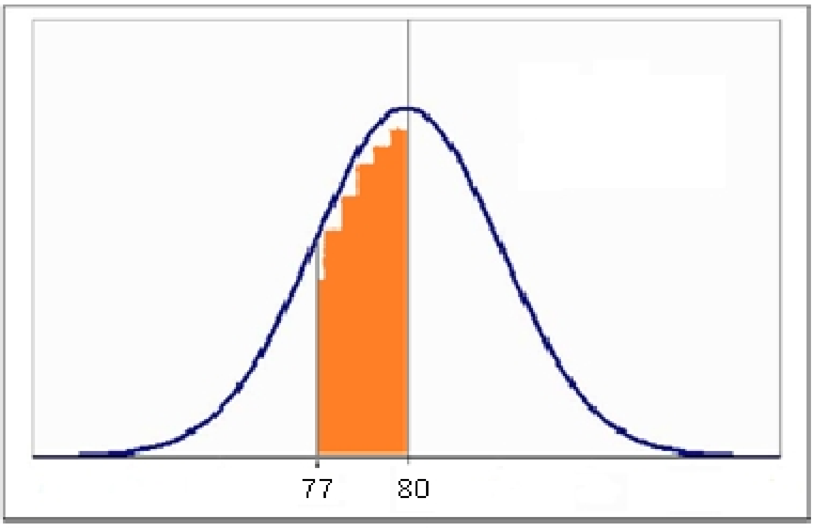
c) No item c, queremos calcular a área da curva normal representada a seguir.



$$P(X \leq 77)$$

No entanto, a maneira como aprendemos a calcular a *distribuição normal* não pode ser diretamente aplicada para o cálculo solicitado nesse item. Sabemos efetuar este cálculo com o uso de fórmulas e tabelas:

Sabemos também pela definição da *distribuição normal* que exatamente 50% dos valores estão localizados antes da média e 50% dos valores estão localizados depois da média nesse gráfico.



$$P(77 \leq X \leq 80)$$

Com isso podemos calcular $P(77 \leq X \leq 80)$ e calcular $P(X \leq 77) = 0{,}5 - P(77 \leq X \leq 80)$.

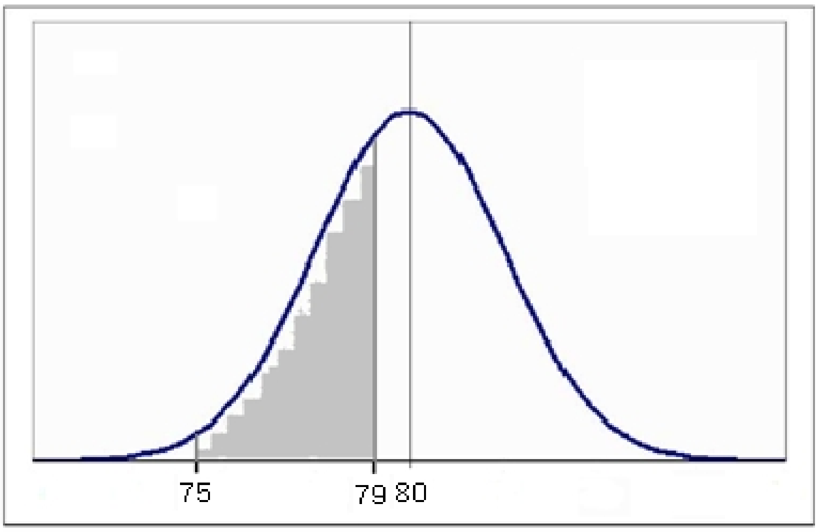
$$P(77 \leq X \leq 80) = P\left(\frac{77-80}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-80}{\sqrt{16}} \leq \frac{80-80}{\sqrt{16}}\right)$$

$$\rightarrow P(-0{,}75 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 0{,}75) = 0{,}2734$$

Para concluir:

$$P(X \leq 77) = 0{,}5 - P(77 \leq X \leq 80) = 0{,}2266$$

d) No item d, vamos calcular a área da curva normal representada a seguir.

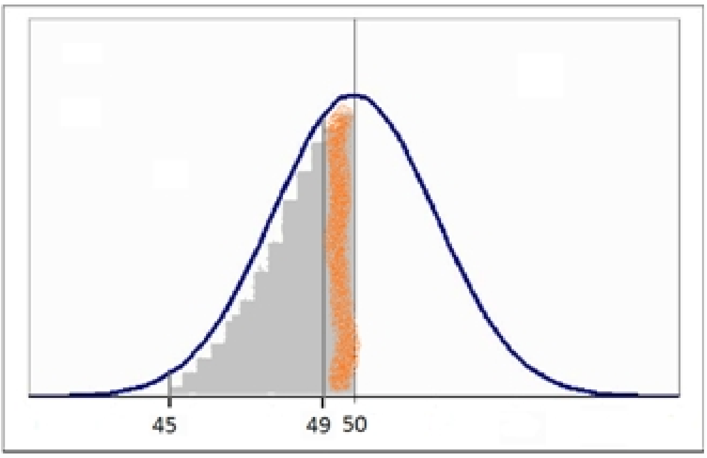


$$P(75 \leq X \leq 79)$$

Após resolvermos os itens anteriores, esta deveria ser intuitiva. O procedimento para encontrarmos a área demarcada anteriormente, com as ferramentas que temos, é:

$$P(75 \leq X \leq 79) = P(75 \leq X \leq 80) - P(79 \leq X \leq 80)$$

Calculamos a área do ponto 50 até o ponto 45, depois subtraímos a parte correspondente à faixa compreendida entre os pontos 50 e 49 (a diferença entre a área cinza e a área laranja representada no gráfico a seguir).



$$P(75 \leq X \leq 80) = P\left(\frac{75-80}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-80}{\sqrt{16}} \leq \frac{80-80}{\sqrt{16}}\right)$$

$$\rightarrow P(-1{,}25 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 1{,}25) = 0{,}3944$$

$$P(79 \leq X \leq 80) = P\left(\frac{79-80}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-80}{\sqrt{16}} \leq \frac{80-80}{\sqrt{16}}\right)$$

$$\rightarrow P(-0{,}25 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 0{,}25) = 0{,}0987$$

$$P(75 \leq X \leq 79) = P(75 \leq X \leq 80) - P(79 \leq X \leq 80)$$
$$= 0{,}3944 - 0{,}0987 = 0{,}2957$$

Exercicío 2

O *Grande Prêmio Poli-NSK de Carrinhos de Rolimã* (GP), competição realizada pelo Centro Acadêmico da Mecânica (CAM) da Escola Politécnica (Poli) da USP, é um evento tradicional de nossa universidade. Nele, os competidores se arriscam na descida da Rua do Matão, localizada na Cidade Universitária, a bordo de seus próprios veículos. O evento costuma ser muito divertido, com carrinhos alegóricos, churrasco, cerveja e muitos tropeços das equipes. Quando você monta uma equipe e decide participar, recebe um conjunto de rolamentos para montar um veículo para a competição. O diâmetro ideal do rolamento é de 0,500 polegadas. São aceitos rolamentos com diâmetros em uma faixa de 0,004 polegadas maior ou menor que o valor-alvo. Se um lote de 100 rolamentos obedecer a uma distribuição normal com média 0,499 e desvio-padrão de 0,002, quantos dos rolamentos, em média, não estarão na medida aceitável?

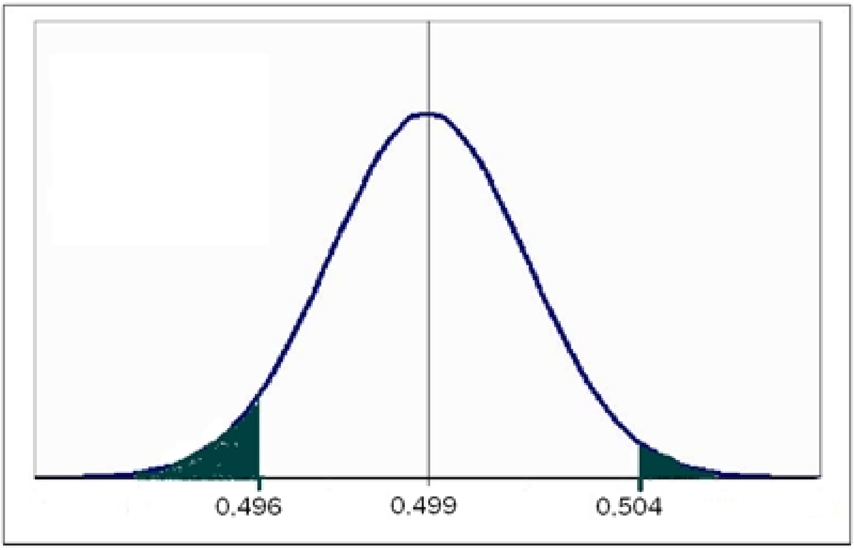
Solução

Enunciado

O *Grande Prêmio Poli-NSK de Carrinhos de Rolimã* (GP), competição realizada pelo Centro Acadêmico da Mecânica (CAM) da Escola Politécnica (Poli) da USP, é um evento tradicional de nossa universidade. Nele, os competidores se arriscam na descida da Rua do Matão, localizada na Cidade Universitária, a bordo de seus próprios veículos. O evento costuma ser muito divertido, com carrinhos alegóricos, churrasco, cerveja e muitos tropeços das equipes. Quando você monta uma equipe e decide participar, recebe um conjunto de rolamentos para montar um veículo para a competição. O diâmetro ideal do rolamento é de 0,500 polegadas. São aceitos rolamentos com diâmetros em uma faixa de 0,004 polegadas maior ou menor que o valor-alvo. Se um lote de 100 rolamentos obedecer a uma distribuição normal com média 0,499 e desvio-padrão de 0,002, quantos dos rolamentos, em média, não estarão na medida aceitável?

Solução

De acordo com o enunciado do problema, o valor aceitável está entre 0,496 e 0,504. Sabemos também que a média do lote é 0,499 e seu desvio-padrão é de 0,002. Queremos então calcular a área da curva apresentada a seguir:



$$P(x \leq 0{,}496) + P(x \geq 0{,}504)$$

$$P(x \leq 0{,}496) = 0{,}5 - P(0{,}496 \leq x \leq 0{,}499) \rightarrow$$

$$= 0{,}5 - P\left(\frac{0{,}496 - 0{,}499}{0{,}002} \leq Z \leq \frac{0{,}499 - 0{,}499}{0{,}002}\right) \rightarrow$$

$$= 0{,}5 - P(-1{,}5 \leq x \leq 0) \rightarrow$$

$$= 0{,}5 - 0{,}4332 = \mathbf{0{,}0668}$$

$$P(x \geq 0{,}504) = 0{,}5 - P(0{,}499 \leq x \leq 0{,}504) \rightarrow$$

$$= 0{,}5 - P\left(\frac{0{,}499 - 0{,}499}{0{,}002} \leq Z \leq \frac{0{,}504 - 0{,}499}{0{,}002}\right) \rightarrow$$

$$= 0{,}5 - P(0 \leq x \leq 2{,}5) \rightarrow$$

$$= 0{,}5 - 0{,}4938 = \mathbf{0{,}0062}$$

$$P(x \leq 0{,}496) + P(x \geq 0{,}504) = 0{,}0668 + 0{,}0062 = \mathbf{0{,}073}$$

Conclui-se que, em média, 7,3 rolamentos não estarão de acordo com o esperado.

Exercicío 3

Os serviços de remessas e entregas, como os dos Correios, cobram um preço relativo ao peso do pacote a ser enviado. Contudo, o cálculo desse custo não é tão simples quanto possa parecer. Quando o objeto a ser enviado tem grandes dimensões e pouco peso, existe outra análise a ser feita. Obviamente, enviar um pacote somente pelo peso traria grandes distorções de preço para a remessa de objetos muito leves. A solução que essas empresas empregam é chamada de *peso dimensional* . O *peso dimensional* leva em conta a *densidade* do pacote, que é a quantidade de espaço que ele ocupa em relação ao seu peso real. A fórmula mais utilizada para esse cálculo é a divisão do volume em centímetros cúbicos por 5 cm^3/kg, obtendo-se dessa forma o resultado em quilos. É claro que esse novo peso em quilos é só um valor fictício. Desta forma, cobra-se pelo maior dos pesos, entre o real e o dimensional. Considere uma empresa que faça muitas remessas de produtos leves e queira elaborar um contrato especial com uma empresa de remessas. Seus pacotes têm dimensão distribuída normalmente com média 60 cm^3. O desvio-padrão, observado após as conversões devidas e diretamente utilizado, é de 3,5kg. Estabeleça um valor C de negociação entre as empresas, de forma que 99% dos pacotes fiquem, no mínimo, 1 kg abaixo do peso esperado.

Solução

Enunciado

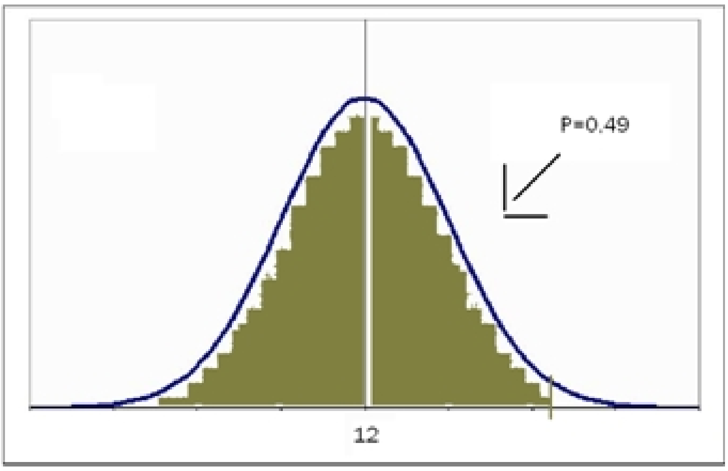
Os serviços de remessas e entregas, como os dos Correios, cobram um preço relativo ao peso do pacote a ser enviado. Contudo, o cálculo desse custo não é tão simples quanto possa parecer. Quando o objeto a ser enviado tem grandes dimensões e pouco peso, existe outra análise a ser feita. Obviamente, enviar um pacote somente pelo peso traria grandes distorções de preço para a remessa de objetos muito leves. A solução que essas empresas empregam é chamada de *peso dimensional* . O *peso dimensional* leva em conta a *densidade* do pacote, que é a quantidade de espaço que ele ocupa em relação ao seu peso real. A fórmula mais utilizada para esse cálculo é a divisão do volume em centímetros cúbicos por 5 cm^3/kg, obtendo-se dessa forma o resultado em quilos. É claro que esse novo peso em quilos é só um valor fictício. Desta forma, cobra-se pelo maior dos pesos, entre o real e o dimensional. Considere uma empresa que faça muitas remessas de produtos leves e queira elaborar um contrato especial com uma empresa de remessas. Seus pacotes têm dimensão distribuída normalmente com média 60 cm^3. O desvio-padrão, observado após as conversões devidas e diretamente utilizado, é de 3,5kg. Estabeleça um valor *C* de negociação entre as empresas, de forma que 99% dos pacotes fiquem, no mínimo, 1 kg abaixo do peso esperado.

Solução

Primeiro vamos calcular o peso médio que será tarifado

$$Peso\ dimensional = \frac{60cm^3}{5cm^3/kg} = 12\ kg.$$

Queremos, neste exercício, calcular a área marcada no gráfico a seguir.



$$P\left(XC \leq \frac{X-12}{3,5}\right) = 0,49$$

Agora, faremos o caminho inverso do habitual para a consulta da tabela de distribuição normal. Consultando os valores internos da tabela vamos procurar a probabilidade que queremos e, depois, voltamos às margens para verificar qual o valor que encontramos

$$0,49 = P(2,33)$$

$$P\left(XC \leq \frac{X-12}{3,5}\right) = P(2,33) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{X-12}{3,5} = 2,33 \rightarrow$$

$$x = 20,155$$

Finalmente, de posse do valor de *X*, fica fácil encontrar o valor de *C*. Como devemos ter uma margem de 1 kg para o peso dos pacotes, C = X +1 = 21,155 kg.

Exercicío 4

Uma empresa produz equipamentos de ar-condicionado. Existem equipamentos de dois tipos, gama e delta. Esses equipamentos têm garantia de 6 meses contra defeitos de fabricação. O tempo até a ocorrência de um defeito nos aparelhos segue uma distribuição normal, sendo que para os aparelhos do tipo gama, a média para a ocorrência de um defeito é de 10 meses e o desvio-padrão é de 2 meses. Para os aparelhos do tipo delta essa média é de 11 meses e o desvio-padrão é de 3 meses. O lucro na venda dos aparelhos gama é de R$ 1200,00 e na venda dos aparelhos delta é de R$ 2100,00. Se, por algum motivo, um aparelho quebrar antes do prazo final de garantia, os custos de reparo serão de R$ 2500,00 para os aparelhos gama e de R$7000,00 para os aparelhos delta. Qual equipamento é economicamente mais vantajoso para a empresa incentivar a venda?

Solução

Enunciado

Uma empresa produz equipamentos de ar-condicionado. Existem equipamentos de dois tipos, gama e delta. Esses equipamentos têm garantia de 6 meses contra defeitos de fabricação. O tempo até a ocorrência de um defeito nos aparelhos segue uma distribuição normal, sendo que para os aparelhos do tipo gama, a média para a ocorrência de um defeito é de 10 meses e o desvio-padrão é de 2 meses. Para os aparelhos do tipo delta essa média é de 11 meses e o desvio-padrão é de 3 meses. O lucro na venda dos aparelhos gama é de R$ 1200,00 e na venda dos aparelhos delta é de R$ 2100,00. Se, por algum motivo, um aparelho quebrar antes do prazo final de garantia, os custos de reparo serão de R$ 2500,00 para os aparelhos gama e de R$7000,00 para os aparelhos delta. Qual equipamento é economicamente mais vantajoso para a empresa incentivar a venda?

Solução

Em primeiro lugar, devemos calcular as chances de os equipamentos quebrarem durante o tempo de garantia.

$$
\begin{aligned}
&P(T_g < 6) = \\
&= P\left(\frac{T_g - 10}{2} < \frac{6 - 10}{2}\right) = \\
&= P(Z < -2) = \\
&= 0{,}5 - P(2 \leq Z \leq 0) = \\
&= 0{,}5 - 0{,}4772 = \\
&= 0{,}0228
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(T_d < 6) = \\
&= P\left(\frac{T_d - 11}{3} < \frac{6 - 11}{3}\right) = \\
&= P(Z < -1{,}667) = \\
&= 0{,}5 - P(-1{,}667 \leq Z \leq 0) = \\
&= 0{,}5 - 0{,}4522 = \\
&= 0{,}0478
\end{aligned}
$$

Agora, com as probabilidades calculadas, passamos a avaliar o lucro médio de cada tipo de aparelho de ar-condicionado.

O lucro médio do tipo gama é igual a:

$$
\begin{aligned}
&(1 - 0{,}0228) \cdot (R\$\,1200) + 0{,}0228 \cdot (R\$\,1200 - R\$\,2500) = \\
&= R\$\,1143{,}00
\end{aligned}
$$

Fazendo cálculos semelhantes para o tipo delta, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&(1 - 0{,}0478) \cdot (R\$\,2100) + 0{,}0478 \cdot (R\$\,2100 - R\$\,7000) = \\
&= R\$\,1765{,}40
\end{aligned}
$$

Concluímos que é mais vantajoso para a empresa incentivar a venda de um aparelho do tipo delta.

Exercicío 5

O atendimento telefônico é uma área de muita preocupação para as empresas atualmente, pois a maneira como ele é feito tem impacto direto na imagem da empresa para o cliente. Existem muitos métodos para padronizar e fiscalizar esse tipo de atendimento com o objetivo de minimizar possíveis problemas. Os tempos de espera e de ligação são controlados por gerentes, assim como o conteúdo da conversa. O tempo necessário para atendimento de clientes em uma central de atendimento telefônico de uma empresa de telefonia móvel segue uma distribuição normal com média de 8 minutos e desvio-padrão de 2 minutos. Calcule o tempo de ligação para que pelo menos 85% das conversas tenham duração menor que esse tempo calculado.

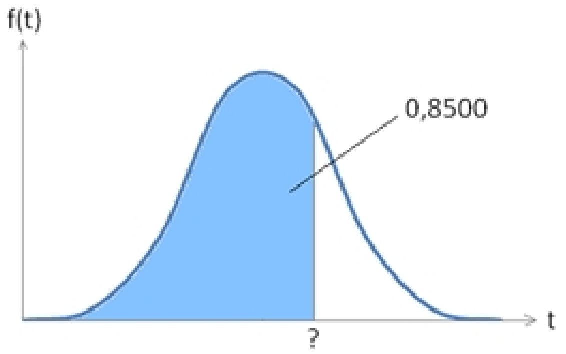
Solução

Enunciado

O atendimento telefônico é uma área de muita preocupação para as empresas atualmente, pois a maneira como ele é feito tem impacto direto na imagem da empresa para o cliente. Existem muitos métodos para padronizar e fiscalizar esse tipo de atendimento com o objetivo de minimizar possíveis problemas. Os tempos de espera e de ligação são controlados por gerentes, assim como o conteúdo da conversa. O tempo necessário para atendimento de clientes em uma central de atendimento telefônico de uma empresa de telefonia móvel segue uma distribuição normal com média de 8 minutos e desvio-padrão de 2 minutos. Calcule o tempo de ligação para que pelo menos 85% das conversas tenham duração menor que esse tempo calculado.

Solução

Para resolver este exercício você deve utilizar a *tabela da Distribuição Normal Padronizada* de maneira inversa à do exercício anterior. Isso significa que devemos encontrar um valor para que a probabilidade do tempo de duração de cada chamada seja menor ou igual a 85%.



$$P(T \leq x) = 0{,}85 \rightarrow P(\mu \leq T \leq x) = 0{,}85 - 0{,}5 = 0{,}35$$

Observe que na tabela da Distribuição Normal Padronizada não há um valor cuja probabilidade associada é exatamente 0,3500, mas temos dois valores bem próximos a este.

z	0	1	2	3	4	5
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,01
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,05
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,09
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,13
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,17
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,20
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,24
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,27
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,30
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,32
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,35
1,1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Em situações como essa você pode fazer uma *interpolação* entre os valores da tabela para encontrar um valor mais preciso de Z..

$$1{,}03 \rightarrow 0{,}3485$$
$$z \rightarrow 0{,}3500$$
$$1{,}04 \rightarrow 0{,}3508$$

$$\frac{1{,}04 - z}{1{,}04 - 1{,}03} = \frac{0{,}3508 - 0{,}3500}{0{,}3508 - 0{,}3485} \rightarrow \frac{1{,}04 - z}{0{,}01} = \frac{0{,}0008}{0{,}0023} \rightarrow z \cong 1{,}037$$

Agora, faremos o processo inverso da expressão de z para encontrar o valor procurado.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow 1{,}037 = \frac{x - 8}{2} \rightarrow x = 2{,}074 + 8$$

$$x \cong 10{,}07 \; minutos$$

Há 85% de chance de uma chamada durar menos de 10,07 minutos.

Exercicío 6

Uma das aplicações interessantes do processo de Poisson é na modelagem da *intensidade de chuva*. Foi descoberto que o número dos pingos de chuva que caem sobre determinada área obedece ao processo de Poisson. Dessa maneira, esse modelo é utilizado nos cálculos dos famosos milímetros de chuva por área. Este método consiste em medir a altura de uma área alagada de teste (grosseiramente falando, um tipo de balde), em um determinado tempo − geralmente o padrão usado é um dia inteiro. Considere que em determinada região foi avaliado que cai em média 25 mm de chuva por dia. Para simplificar, vamos considerar que os milímetros de chuva, nesse exercício, são variáveis discretas que assumem valores como 0, 1, 2, 3,...; e que 1 mm de chuva pode cair independentemente dos demais.

a) Sabendo-se que o horário de maior tráfego nessa região acontece entre 17h53min e 20h17min, qual a probabilidade de chover durante o horário de *rush*?

b) Se 1 mm de chuva cair no instante 0, qual é a probabilidade de que o tempo até o próximo mm de chuva esteja entre 48 minutos e 1 hora e 12 minutos?

Solução

Enunciado

Uma das aplicações interessantes do processo de Poisson é na modelagem da *intensidade de chuva***.** Foi descoberto que o número dos pingos de chuva que caem sobre determinada área obedece ao processo de Poisson. Dessa maneira, esse modelo é utilizado nos cálculos dos famosos milímetros de chuva por área. Este método consiste em medir a altura de uma área alagada de teste (grosseiramente falando, um tipo de balde), em um determinado tempo − geralmente o padrão usado é um dia inteiro. Considere que em determinada região foi avaliado que cai em média 25 mm de chuva por dia. Para simplificar, vamos considerar que os milímetros de chuva, nesse exercício, são variáveis discretas que assumem valores como 0, 1, 2, 3,...; e que 1 mm de chuva pode cair independentemente dos demais.

a) Sabendo-se que o horário de maior tráfego nessa região acontece entre 17h53min e 20h17min, qual a probabilidade de chover durante o horário de *rush*?

b) Se 1 mm de chuva cair no instante 0, qual é a probabilidade de que o tempo até o próximo mm de chuva esteja entre 48 minutos e 1 hora e 12 minutos?

Solução

a) Vamos calcular a duração do horário de maior tráfego transformando os dados em minutos:

$$\begin{cases} 17 \cdot 60 + 53 = 1073\, minutos \\ 20 \cdot 60 + 17 = 1217\, minutos \end{cases}$$

$$1217 - 1073 = 144\, minutos$$

Vamos transformar a média de Poisson de dias para minutos para que tenhamos os dados em uma mesma unidade.

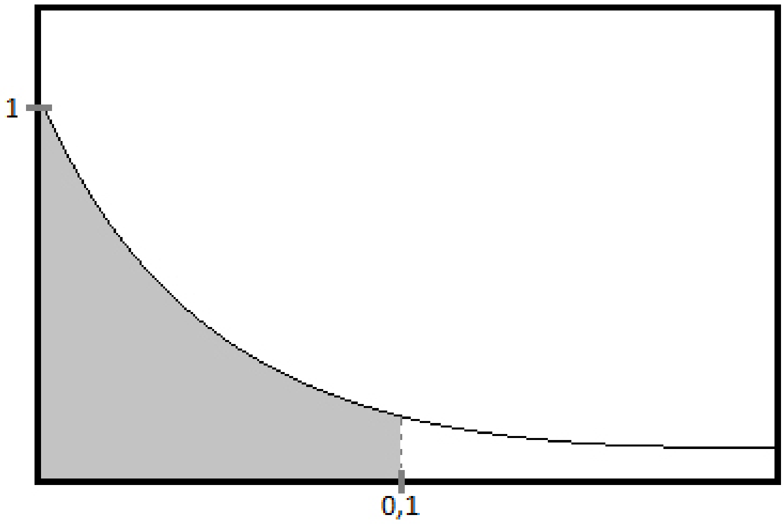
$$1 \cdot 24 \cdot 60 = 1440\, minutos$$

Observe que o horário de *rush* corresponde a exatamente 10% do dia. Como vimos na teoria, em um fenômeno de Poisson, o intervalo T entre dois sucessos consecutivos é uma *variável aleatória* que tem *distribuição exponencial*.

$$P(T > 144) = P(X > 0{,}1)$$

Como estamos lidando com a distribuição exponencial, que não tem memória, os momentos que antecedem o *rush* não nos interessam, pois não alteram nossas probabilidades. Procuramos então a probabilidade de que o tempo até o próximo mm de chuva cair não seja superior a 144 minutos, considerando t = 0 o inicio do *rush*.

Com isso, buscamos a área do gráfico demarcada a seguir.



$$P(X \leq 0{,}1) = \int_0^{0{,}1} 25\ e^{-25 \cdot x} dx = -\frac{1}{25} \cdot 25\ e^{-25x}\Big|_0^{0{,}1} = -e^{-25 \cdot 0{,}1} + \ e^{-25 \cdot 0}$$
$$= 1 - e^{-2{,}5} = \mathbf{0,918}$$

b) Em primeiro lugar, vamos colocar todos os dados na mesma unidade.

$$0 \cdot 60 + 48 = 48\ minutos$$

$$1 \cdot 60 + 12 = 72\ minutos$$

$$\frac{48}{1440} \cong 0{,}033\ ;\ \frac{72}{1440} = 0{,}05$$

Queremos, portanto, calcular:

$$P(0{,}033 \leq X \leq 0{,}05) \rightarrow$$

$$= \int_{0{,}033}^{0{,}05} 25 \cdot e^{-25 \cdot X} dX \rightarrow$$

$$= -\frac{1}{25} \cdot 25 \cdot e^{-25 \cdot X}\Big|_{0{,}033}^{0{,}05} = \mathbf{0,152}$$

Exercicío 7

Quando falamos em tecnologia LCD, existem diversos aspectos que podem interessar ao usuário. Se o intuito for jogar *videogame*, por exemplo, uma característica que deve ser observada é o *tempo de resposta* do aparelho. O *tempo de resposta* é aquele em que o monitor de LCD muda completamente a imagem da tela. Este fator é importante pois, caso não seja rápido o suficiente, teremos efeitos indesejados como "objetos fantasmas" ou sombra nos movimentos do jogo. Supondo que esse *tempo de resposta* tenha distribuição exponencial com média igual a 5 milissegundos, responda:

a) Qual a probabilidade de o *tempo de resposta* ser de no máximo 10 milissegundos?

b) Qual a probabilidade de o *tempo de resposta* estar entre 5 e 10 milissegundos?

Solução

Enunciado

Quando falamos em tecnologia LCD, existem diversos aspectos que podem interessar ao usuário. Se o intuito for jogar *videogame*, por exemplo, uma característica que deve ser observada é o *tempo de resposta* do aparelho. O *tempo de resposta* é aquele em que o monitor de LCD muda completamente a imagem da tela. Este fator é importante pois, caso não seja rápido o suficiente, teremos efeitos indesejados como "objetos fantasmas" ou sombra nos movimentos do jogo. Supondo que esse *tempo de resposta* tenha distribuição exponencial com média igual a 5 milissegundos, responda:

a) Qual a probabilidade de o *tempo de resposta* ser de no máximo 10 milissegundos?

b) Qual a probabilidade de o *tempo de resposta* estar entre 5 e 10 milissegundos?

Solução

Em primeiro lugar, precisamos encontrar os parâmetros da distribuição em questão. Lembre-se de que:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & para\, x \geq 0 \\ 0 & para\, x < 0 \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$F(a) = P(x \leq a) = 1 - e^{-a \cdot \lambda}$$

Encontremos então λ:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 5\frac{ms}{resposta}$$

$$\rightarrow \lambda = 0{,}2\, resposta/ms$$

a)

$$P(x \leq 10) = F(10) = 1 - e^{-10 \cdot 0{,}2} \rightarrow$$

$$P(x \leq 10) = \mathbf{0{,}865}$$

b)

$$P(5 \leq x \leq 10) = F(10) - F(5) \rightarrow$$
$$= (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-1}) \rightarrow$$
$$= 0{,}8647 - 0{,}6321 = \mathbf{0,233}$$

Exercicío 8

As indústrias químicas têm alto custo de pesquisa para descobrir novas formas para agilizar certas reações químicas. Quanto mais rápido elas ocorram, mais economicamente interessante passam a ser essas reações, pois aumentam seu potencial de lucro. Uma maneira muito conhecida de acelerar reações é a utilização de catalisadores. Uma das formas de aceleração é a catalisação por enzimas. O estudo do efeito das enzimas em reações químicas é chamado *cinética enzimática*. Boa parte da *cinética enzimática* envolve justamente distribuições exponenciais, uma vez que foi descoberto que essa distribuição se adéqua à realidade. Considerando que uma dessas reações com catalisação de enzimas demore em média 4.000 segundos, calcule:

a) a probabilidade de uma reação durar mais de 2.000 segundos.

b) a probabilidade de uma reação durar pelo menos 6.000 segundos, sabendo-se que ela já durou 4.000 segundos?

Solução

Enunciado

As indústrias químicas têm alto custo de pesquisa para descobrir novas formas para agilizar certas reações químicas. Quanto mais rápido elas ocorram, mais economicamente interessante passam a ser essas reações, pois aumentam seu potencial de lucro. Uma maneira muito conhecida de acelerar reações é a utilização de catalisadores. Uma das formas de aceleração é a catalisação por enzimas. O estudo do efeito das enzimas em reações químicas é chamado *cinética enzimática*. Boa parte da *cinética enzimática* envolve justamente distribuições exponenciais, uma vez que foi descoberto que essa distribuição se adéqua à realidade. Considerando que uma dessas reações com catalisação de enzimas demore em média 4.000 segundos, calcule:

a) a probabilidade de uma reação durar mais de 2.000 segundos.

b) a probabilidade de uma reação durar pelo menos 6.000 segundos, sabendo-se que ela já durou 4.000 segundos?

Solução

Em primeiro lugar, precisamos encontrar os parâmetros da distribuição em questão. Lembramos que:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & para\, x \geq 0 \\ 0 & para\, x < 0 \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$F(a) = P(x \leq a) = 1 - e^{-a \cdot \lambda}$$

Vamos calcular o valor de λ.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 4000^{seg}/_{reação} \rightarrow$$

$$\lambda = 0{,}00025\, reações/seg$$

a)

$$P(x \geq 2000) = 1 - P(x < 2000) = 1 - F(2000) \rightarrow$$

$$= 1 - (1 + e^{-2000 \cdot 0{,}00025}) \rightarrow$$

$$P(x \geq 2000) = \mathbf{0,6065}$$

b)

$$P(x > 6000 \mid x > 4000) = \frac{P(x > 6000 \cap x > 4000)}{P(x > 4000)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1 - P(x < 6000)}{1 - P(x < 4000)} = \frac{1 - F(6000)}{1 - F(4000)} \rightarrow$$

$$= \frac{e^{-6000 \cdot \frac{1}{4000}}}{e^{-1}} = e^{-0,5} \rightarrow$$

$$P(x > 6000 \mid x > 4000) = \mathbf{0,6065}$$

Para finalizar a resolução deste exercício, cabe um comentário bastante pertinente. Esse modelo exponencial não tem memória, pois as respostas do item a e do item b são iguais.