

Exercícios Resolvidos sobre Distribuições de Bernoulli, Binomial e de Poisson

Estudando os enunciados e as soluções destes exercícios sobre distribuições de Bernoulli, Binomial e Poisson você estará bem preparado para resolver os Exercícios Propostos deste Módulo.

Exercício 1

Em uma indústria, 60% das peças torneadas são polidas. Se observarmos uma amostra de 10 peças torneadas de um lote qualquer, qual a probabilidade de encontrarmos ao menos 8 peças polidas? Calcule também a média e a variância do número de peças polidas.

Solução

Enunciado

Em uma indústria, 60% das peças torneadas são polidas. Se observarmos uma amostra de 10 peças torneadas de um lote qualquer, qual a probabilidade de encontrarmos ao menos 8 peças polidas? Calcule também a média e a variância do número de peças polidas

Solução

Seja X o número de peças torneadas da amostra que são polidas. X tem distribuição binomial.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

Você já sabe que n é o número de peças da mostra e que p é a probabilidade de ocorrência do evento desejado (polimento).

Então, temos $\rightarrow n = 10; p = 0,6$

Devemos recordar também a fórmula para o cálculo da binomial, que é:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

É intuitivo que se desejamos calcular $p(X \geq 8)$, esta será igual a:

$$p(X \geq 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(x = 10) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow p(X \geq 8) \\ &= \binom{10}{8} \cdot (0,6)^8 \cdot (0,4)^2 + \binom{10}{9} \cdot (0,6)^9 \cdot (0,4)^1 + \binom{10}{10} \\ &\quad \cdot (0,6)^{10} \cdot (0,4)^0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow p(X \geq 8) = 0,121 + 0,040 + 0,006 = 0,167$$

Passemos agora para o cálculo da média e da variância. Como vimos na parte teórica do curso:

$$\mu(X) = n \cdot p$$

$$\sigma^2(x) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Então, temos:

$$\mu(X) = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ peças polidas}$$

$$\sigma^2(X) = 10 \cdot 0,6 \cdot (0,4) = 2,4$$

Exercício 2

Uma pequena indústria produz 10 bicicletas por dia. Há uma probabilidade constante ($p = 0,1$) de produzir bicicletas com problemas. Antes de serem distribuídas no mercado, as bicicletas são inspecionadas e as que apresentam defeitos são descartadas. A probabilidade de uma bicicleta defeituosa ser mal classificada é 0,2 ($q = 0,2$); a probabilidade de uma bicicleta boa ser mal classificada é 0,3 ($p = 0,3$).

Determine a função de probabilidade da variável X , número de bicicletas classificadas como defeituosas ao final do dia. Além disso, determine o número médio de bicicletas classificadas como defeituosas por dia.

Solução

Enunciado

Uma pequena indústria produz 10 bicicletas por dia. Há uma probabilidade constante ($p = 0,1$) de produzir bicicletas com problemas. Antes de serem distribuídas no mercado, as bicicletas são inspecionadas e as que apresentam defeitos são descartadas. A probabilidade de uma bicicleta defeituosa ser mal classificada é 0,2 ($q = 0,2$); a probabilidade de uma bicicleta boa ser mal classificada é 0,3 ($p = 0,3$).

Determine a função de probabilidade da variável X , número de bicicletas classificadas como defeituosas ao final do dia. Além disso, determine o número médio de bicicletas classificadas como defeituosas por dia.

Solução

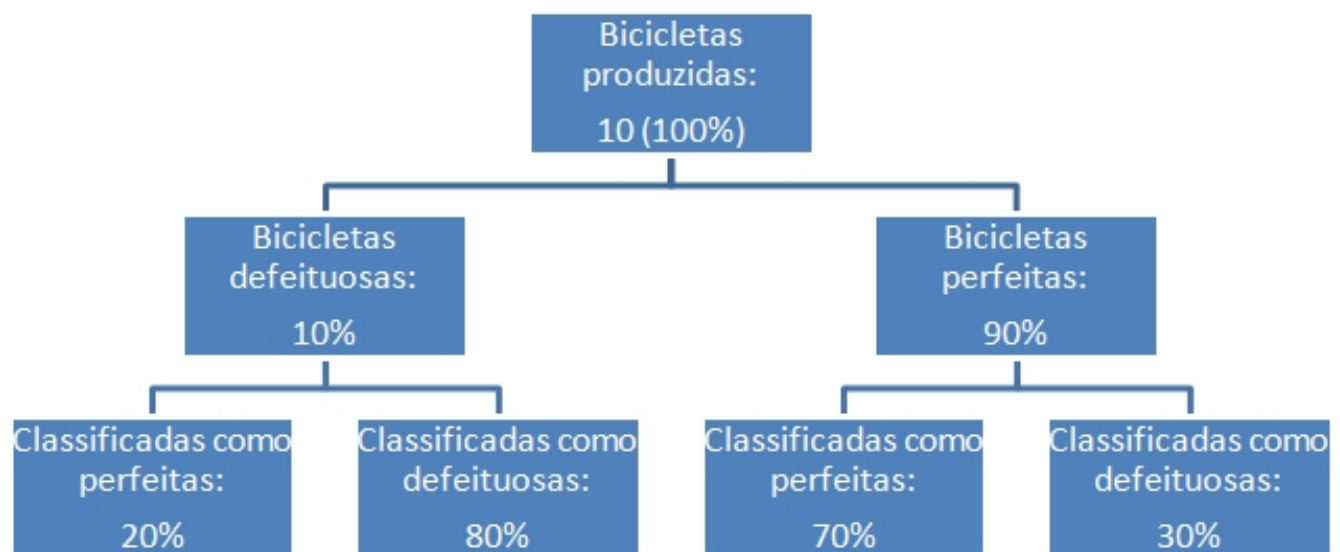
Assumindo independência na classificação, e adotando uma distribuição binomial, temos: $X = B(n, p)$

Você já sabe que n é o número de peças da mostra e que p é a probabilidade de ocorrência do evento estudado.

Devemos recordar também a fórmula para o cálculo da binomial que é:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

Uma maneira mais ilustrativa de resolver esse exercício é criar uma árvore de probabilidades.



O que vimos na árvore de probabilidades:

$$p(CD \cap P) = 0,9 * 0,3 = 0,27$$

$$p(CD \cap D) = 0,1 * 0,8 = 0,08$$

$$p(CD) = 0,27 + 0,08 = 0,35$$

O número de bicicletas classificadas como defeituosas no fim do dia é igual:

$$p(CD) = p[(CD \cap P) \cup (CD \cap D)]$$

Sendo:

$p(\text{CD})$ = probabilidade de ser classificada como defeituosa

$p(\text{CD}/\text{P})$ = probabilidade de ser classificada como defeituosa dado que é perfeita = 0,3

$p(\text{CD}/\text{D})$ = probabilidade de ser classificada como defeituosa dado que é defeituosa = 0,8

Então façamos os cálculos, de acordo com o que vimos na árvore de probabilidades:

$$p(\text{P}).p(\text{CD}/\text{P}) = 0,9 * 0,3 = 0,27$$

$$p(\text{D}).p(\text{CD}/\text{D}) = 0,1 * 0,8 = 0,08$$

$$p(\text{CD}) = 0,27 + 0,08 = 0,35$$

Como podemos observar, o resultado é o mesmo encontrado na primeira resolução!

Agora que sabemos o valor de p ($p = 0,35$), e já sabíamos o valor de n ($n = 10$), temos os dados necessários para efetuar o restante dos cálculos:

$$X \sim \text{Bin}(10; 35) \rightarrow P(X = k) = \binom{10}{k} 0,35^k 0,65^{10-k}$$

Por fim, calculamos a média:

$$\mu(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0,35 = 3,5 \text{ bicicletas/dia}$$

Exercício 3

Cada um de seis consumidores de chocolate selecionados aleatoriamente recebe uma barra do chocolate S e uma barra do chocolate F . As barras são idênticas, exceto por um código na embalagem que identifica o chocolate. Suponha que não haja uma tendência de preferência entre os consumidores, então, $p = P(\text{um indivíduo selecionado prefere } S) = 0,5$.

- a) Qual a probabilidade de exatamente 3 consumidores preferirem S ?
- b) Qual a probabilidade de pelo menos 3 consumidores preferirem S ?
- c) Qual a probabilidade de no máximo 1 consumidor preferir S ?

Solução

Enunciado

Cada um de seis consumidores de chocolate selecionados aleatoriamente recebe uma barra do chocolate S e uma barra do chocolate F . As barras são idênticas, exceto por um código na embalagem que identifica o chocolate. Suponha que não haja uma tendência de preferência entre os consumidores, então, $p = P(\text{um indivíduo selecionado prefere } S) = 0,5$.

- a) Qual a probabilidade de exatamente 3 consumidores preferirem S ?
- b) Qual a probabilidade de pelo menos 3 consumidores preferirem S ?
- c) Qual a probabilidade de no máximo 1 consumidor preferir S ?

Solução

a) Assumindo se tratar de uma distribuição binomial, utilizaremos a fórmula a seguir:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

Assim,

$$P(X = 3) = \binom{6}{3} (0,5)^3 (1 - 0,5)^{6-3} = 20 \cdot 0,125 \cdot 0,125 = 0,3125$$

b) A probabilidade de pelo menos 3 consumidores preferirem S é a soma das probabilidades a seguir:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) \\ \rightarrow P(X \geq 3) &= \binom{6}{3} (0,5)^3 (0,5)^3 + \binom{6}{4} (0,5)^4 (0,5)^2 \\ &\quad + \binom{6}{5} (0,5)^5 (0,5)^1 + \binom{6}{6} (0,5)^6 (0,5)^0 \\ &= 0,3125 + 0,234375 + 0,09375 + 0,015625 = \\ &= 0,65625 \end{aligned}$$

c) A probabilidade de no máximo 1 consumidor preferir o chocolate S é:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ \rightarrow P(X \leq 1) &= \binom{6}{0} (0,5)^0 (0,5)^6 + \binom{6}{1} (0,5)^1 (0,5)^5 = \\ &= 0,015625 + 0,09375 = 0,109375 \end{aligned}$$

Exercício 4

O gerente de uma indústria estava preocupado com a queda de qualidade do seu processo e resolveu investigar a causa. Ele tinha um palpite de que a causa da queda de qualidade era uma injetora plástica mal regulada que estaria produzindo mais defeitos do que o esperado. Considere X o número de defeitos apresentados no processo dessa máquina durante um período de tempo. Suponha que X tenha na realidade uma distribuição de Poisson com $\lambda = 4,5$, de forma que, na média, em cada dia de trabalho a máquina faça 4,5 peças com defeito. Por fim, considere que para esse gerente e esse processo são aceitáveis um máximo de 5 defeitos diários. Calcule então a probabilidade de em um dia ocorrerem exatamente 5 defeitos e a probabilidade de existirem no máximo 5 defeitos por dia. Considere que não existem “meios defeitos”; uma peça é defeituosa ou não.

Solução

Enunciado

O gerente de uma indústria estava preocupado com a queda de qualidade do seu processo e resolveu investigar a causa. Ele tinha um palpite de que a causa da queda de qualidade era uma injetora plástica mal regulada que estaria produzindo mais defeitos do que o esperado. Considere X o número de defeitos apresentados no processo dessa máquina durante um período de tempo. Suponha que X tenha na realidade uma distribuição de Poisson com $\lambda = 4,5$, de forma que, na média, em cada dia de trabalho a máquina faça 4,5 peças com defeito. Por fim, considere que para esse gerente e esse processo são aceitáveis um máximo de 5 defeitos diários. Calcule então a probabilidade de em um dia ocorrerem exatamente 5 defeitos e a probabilidade de existirem no máximo 5 defeitos por dia. Considere que não existem “meios defeitos”; uma peça é defeituosa ou não.

Solução

Sabendo que se trata de uma distribuição de Poisson, poderemos utilizar a seguinte fórmula:

$$P(X_t = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

As probabilidades procuradas são $k = 5$ (exatamente 5 defeitos); $k \leq 5$ (até 5 defeitos, ou seja, processo aceito como bom). Utilizaremos $t = 1$ dia, que é o intervalo a ser considerado

$$P(X = 5) = \frac{e^{-4,5} (4,5)^5}{5!} = 0,1708$$

Para o cálculo de $P(X \leq 5)$, utilizaremos uma somatória, pois:

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &\quad + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ \rightarrow P(X \leq 5) &= \sum_{k=0}^5 \frac{e^{-4,5} (4,5)^k}{k!} = 0,7029 \end{aligned}$$

Dessa maneira, percebe-se que o gerente tem um pouco mais de 70% de possibilidade de achar que o processo está bom, após observá-lo por um dia. Além disso, vimos que a chance de ocorrer exatamente 5 defeitos é próxima de 17%.

Exercício 5

Em uma fábrica de bolas, o couro utilizado para o revestimento é sujeito ao aparecimento aleatório de defeitos na razão de 3 defeitos a cada 4 m^2 . Isso ocorre por causa do método utilizado para a confecção das peças de couro. Qual a probabilidade de que uma bola com raio de $14,1 \text{ cm}$ apresente ao menos um defeito?

Utilize: $\pi \cong 3,14$

Solução

Enunciado

Em uma fábrica de bolas, o couro utilizado para o revestimento é sujeito ao aparecimento aleatório de defeitos na razão de 3 defeitos a cada 4 m². Isso ocorre por causa do método utilizado para a confecção das peças de couro. Qual a probabilidade de que uma bola com raio de 14,1cm apresente ao menos um defeito?

Utilize: $\pi \cong 3,14$

Solução

Podemos iniciar a resolução desse exercício calculando a área da bola (esfera) que será produzida. Utilizaremos metro como unidade padrão para a resolução.

A área da esfera é dada pela fórmula:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \rightarrow$$

$$A = 4 \cdot 3,14 \cdot 0,141^2 \cong 0,25 \text{ m}^2$$

Temos como dado do exercício que:

$$\lambda = 3/4 \left(\text{defeitos} / \text{m}^2 \right)$$

Com esses dados em mãos, podemos começar a desenvolver a resolução do exercício. De acordo com o enunciado, podemos formular as seguintes hipóteses para considerar essa distribuição como uma distribuição de Poisson:

Hipóteses

- É conhecida uma taxa λ de ocorrências por unidade de medida.
- A taxa λ é constante no intervalo considerado.
- O número de ocorrências em intervalos distintos é independente.

Um conceito que será muito útil na resolução desse exercício é o de evento complementar. Sabemos que é menos trabalhoso calcular $P(X = 0)$ do que $P(X \geq 1)$, pois esse cálculo envolve somente uma parcela da somatória da fórmula que usamos para Poisson, enquanto o outro envolve uma somatória com maior número de parcelas.

$$P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$$

Sabemos também que $P(X = 0) = 1 - P(X \geq 1)$, pois os eventos $X = 0$ e $X \geq 1$ são eventos complementares.

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{4}\right)^0}{0!} = e^{-\frac{3}{4}}$$

$$\rightarrow P(X \geq 1) = 1 - e^{-\frac{3}{4}} \cong 1 - 0,83 = 0,17$$

Assim, a probabilidade de que uma bola qualquer venha apresentar defeitos é de aproximadamente 17%.

Exercício 6

Um aluno de engenharia ao redigir seu TCC (trabalho de conclusão de curso) cometeu alguns erros de gramática. Suponha que 25 erros foram feitos ao longo do trabalho de 400 páginas. Determine a probabilidade de:

- a) Uma página conter exatamente um erro.
- b) A soma dos erros em duas páginas ser 2.
- c) Na primeira página não haver erro e na última página haver exatamente um erro.
- d) Calcule o número médio de erros por página.

Solução

Enunciado

Um aluno de engenharia ao redigir seu TCC (trabalho de conclusão de curso) cometeu alguns erros de gramática. Suponha que 25 erros foram feitos ao longo do trabalho de 400 páginas. Determine a probabilidade de:

- a) Uma página conter exatamente um erro.
- b) A soma dos erros em duas páginas ser 2.
- c) Na primeira página não haver erro e na última página haver exatamente um erro.
- d) Calcule o número médio de erros por página

Solução

Primeiro, devemos saber com que tipo de distribuição estamos lidando. Observando as seguintes hipóteses, podemos concluir se tratar de uma distribuição de Poisson:

Hipóteses

- É conhecida uma taxa λ de ocorrências por unidade de medida.
- A taxa λ é constante no intervalo considerado.
- O número de ocorrências em intervalos distintos é independente.

O próximo passo é identificar os parâmetros envolvidos e calcular seus valores. No caso da distribuição de Poisson, precisamos conhecer λ e t .

$$\lambda = 25/400 (\text{erros}/\text{páginas}) = \frac{1}{16}$$

Podemos então, aplicar a fórmula:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

a) Nesse item estamos procurando $P(X = 1)$.

$$P(X = 1) = \frac{e^{-\frac{1}{16} \cdot 1} \left(\frac{1}{16} \cdot 1\right)^1}{1!} \cong 0,0587$$

Nessa resolução, é importante observar a aplicação de cada parâmetro na fórmula e também como os dados estão relacionados. Os cálculos foram omitidos, pois do ponto de vista didático, eles não têm tanto interesse e podem ser facilmente feitos com calculadora ou por meio de *software* adequado.

b) Nesse item, precisamos encontrar $P(X = 2)$. Para isso, usaremos conceitos aprendidos em outras Web Aulas e, assim, concluir a resolução do exercício, encontrando a chance da soma dos erros em 2 páginas ser igual a 2.

$$P(X = 2) = \frac{e^{-\frac{1}{16} \cdot 2} \left(\frac{1}{16} \cdot 2\right)^2}{2!} \cong 0,00689$$

Lembrando que aqui o λ é o mesmo que no item anterior, contudo, de acordo com o enunciado, $t = 2$.

c) Nesse item, precisamos encontrar a interseção entre o evento “não haver erro na primeira página” ($1^a \tilde{n}$) e o evento de “haver exatamente um erro na última página” ($400^a s$). Como os eventos são independentes, a probabilidade da interseção será a multiplicação das probabilidades específicas.

$$P(1^a \tilde{n} \cap 400^a s) = P(1^a \tilde{n}) \cdot P(400^a s)$$

$$P(1^a \tilde{n} \cap 400^a s) = \frac{e^{-\frac{1}{16} \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{16} \cdot 1\right)^0}{0!} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{16} \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{16} \cdot 1\right)^1}{1!}$$

$$P(1^a \tilde{n} \cap 400^a s) \cong 0,0552$$

d) Finalmente, calculamos a média utilizando a fórmula:

$$E(x) = \lambda t = 1/16 \text{ erros / página}$$

Exercício 7

Os exames de raio-x são ainda muito utilizados em diagnósticos médicos, como em ortopedia. Para realizar um exame desses, é necessário um tipo especial de filme fotográfico para o registro da parte do corpo que se quer examinar. Na fabricação desse filme, ocorrem defeitos, segundo as hipóteses de Poisson, com média de 1 defeito a cada 90 cm de filme. Estes filmes são vendidos em rolos de 20 cm que só podem ser comercializados, caso não apresentem defeitos. Em um lote de 10 desses rolos, qual a probabilidade de encontrarmos:

- a) Pelo menos três rolos com defeito.
- b) No máximo nove rolos sem defeito.
- c) Qual o número esperado de rolos sem defeitos?

Solução

Enunciado

Os exames de raio-x são ainda muito utilizados em diagnósticos médicos, como em ortopedia. Para realizar um exame desses, é necessário um tipo especial de filme fotográfico para o registro da parte do corpo que se quer examinar. Na fabricação desse filme, ocorrem defeitos, segundo as hipóteses de Poisson, com média de 1 defeito a cada 90 cm de filme. Estes filmes são vendidos em rolos de 20 cm que só podem ser comercializados, caso não apresentem defeitos. Em um lote de 10 desses rolos, qual a probabilidade de encontrarmos:

- a) Pelo menos três rolos com defeito.
- b) No máximo nove rolos sem defeito.
- c) Qual o número esperado de rolos sem defeitos?

Solução

Considere:

X , o número de rolos de filme com defeito no lote;

Y , número de defeitos em 1 rolo de 20 cm do lote;

N , o tamanho do lote (10 rolos);

P , a probabilidade de 1 rolo ter defeito;

$$\lambda = \frac{1}{90} \left(\frac{\text{defeitos}}{\text{cm}} \right);$$

a) Feitas essas considerações, devemos começar o exercício calculando o valor de P .

A probabilidade de um rolo qualquer ter defeito é igual ao complementar desse rolo não ter defeito nenhum:

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$$

Como Y tem também distribuição de Poisson, temos:

$$P(Y = 0) = \frac{e^{-(1/90 \cdot 20)} \cdot (1/90 \cdot 20)^0}{0!} = 0,8007$$
$$P(Y \geq 1) = 1 - 0,8007 = 0,1993.$$

Logo $P(P) = 0,1993$.

Solucionada esta parte do exercício, devemos partir para a próxima etapa de cálculos. Vamos calcular:

$$X \sim \text{Binomial}(10; 0,1993)$$

Para que fique claro, essa notação significa que X tem distribuição binomial com parâmetros 10 e 0,1993. Sendo 10 o tamanho do lote e 0,1993 a probabilidade de o rolo ter defeito.

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) \rightarrow \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \end{aligned}$$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot (0,1993)^0 \cdot (0,8007)^{10} \cong 0,1083$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot (0,1993)^1 \cdot (0,8007)^9 \cong 0,2696$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot (0,1993)^2 \cdot (0,8007)^8 \cong 0,3020$$

$$P(X \geq 3) = 1 - (0,1083) - (0,2696) - (0,3020) \cong 0,3201$$

b) Novamente, aplicar a noção de complementar é mais efetiva, pois calcular a probabilidade de “no máximo 9 rolos sem defeitos” é igual ao complemento de “nenhum com defeito no lote”.

Queremos agora calcular:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

Como já calculamos $P(X = 0)$, esse item não apresenta grandes dificuldades.

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,1083 = 0,8917$$

c) Aqui, começaremos calculando a média $E(X)$.

$$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0,1993 = 1,993$$

Aplicando mais uma vez o complementar de X , o número que queremos é igual $N - E(X) = 10 - 1,993 = \underline{8,007}$.

Exercício 8

É comprovado que variações muito grandes no humor dos motoristas colaboram para o aumento do número de acidentes de trânsito, pois desviam o foco da atenção da condução do veículo. Logo após jogos de futebol, os entornos dos estádios passam a ser lugares onde a probabilidade de acontecer um acidente é maior. Imaginando que a média de acidentes nas proximidades do estádio após um jogo final de um campeonato é 3, responda o que se pede. Considere que o fenômeno seja uma distribuição de Poisson.

- a) Qual a probabilidade de que, em um dia de final de campeonato, quatro acidentes de trânsito ocorram?
- b) Qual a probabilidade de que mais de quatro acidentes de trânsito ocorram em um dia de final de campeonato?

Solução

Enunciado

É comprovado que variações muito grandes no humor dos motoristas colaboram para o aumento do número de acidentes de trânsito, pois desviam o foco da atenção da condução do veículo. Logo após jogos de futebol, os entornos dos estádios passam a ser lugares onde a probabilidade de acontecer um acidente é maior. Imaginando que a média de acidentes nas proximidades do estádio após um jogo final de um campeonato é 3, responda o que se pede. Considere que o fenômeno seja uma distribuição de Poisson.

- a) Qual a probabilidade de que, em um dia de final de campeonato, quatro acidentes de trânsito ocorram?
- b) Qual a probabilidade de que mais de quatro acidentes de trânsito ocorram em um dia de final de campeonato?

Solução

O primeiro passo é identificar os parâmetros envolvidos no enunciado do problema, para em seguida, calcular seus valores. No caso da distribuição de Poisson, precisamos conhecer λ e t . Nosso t é 1, ou seja, 1 jogo final. Nosso λ é igual a 3 acidentes/jogo.

Podemos então aplicar a fórmula:

$$P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$$

- a) Nesse item, procuramos a probabilidade de que X seja igual a 4:

$$P(X = 4) = \frac{e^{-3 \cdot 1} (3 \cdot 1)^4}{4!} \cong 0,168$$

- b) Aqui, vamos calcular a probabilidade de que “ X seja maior que 4”:

$$P(X > 4) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4)$$

Aplicaremos a noção de complementar.

$$P(X > 4) = 1 - e^{-3} \cdot \left(\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} \right)$$

$$P(X > 4) = 1 - e^{-3} \cdot (16,375)$$

$$P(X > 4) = 0,1847$$