Exercícios resolvidos sobre Função de probabilidade e densidade de probabilidade

Você aprendeu o que é função probabilidade e função densidade de probabilidade e viu como esses conceitos são importantes para o estudo estatístico. Estudando esse conjunto de Exercícios Resolvidos, terá mais uma oportunidade de aprender como os conceitos estudados nesta Unidade se aplicam a situações típicas do dia a dia das sociedades contemporâneas.

Exercício 1

Visando aprimorar a capacitação do seu quadro de funcionários, uma empresa sorteia mensalmente quatro colaboradores que vão participar de programas intensivos de treinamento. Nessa empresa, 1/3 dos colaboradores são mulheres. Estamos interessados na distribuição de probabilidade da variável aleatória “número de colaboradoras do sexo feminino”. Considerando que o número de funcionários da empresa é suficientemente grande para que possamos aplicar a distribuição binomial, calcule:

a) qual é a probabilidade de nenhum dos 4 colaboradores ser mulher “p(0)” ?

b) qual é a probabilidade de 1 dos 4 colaboradores ser mulher “p(1)” ?

c) qual é a probabilidade de 2 dos 4 colaboradores serem mulheres “p(2)” ?

d) qual é a probabilidade de 3 dos 4 colaboradores serem mulheres “p(3)” ?

e) qual é a probabilidade de todos os 4 colaboradores serem mulheres “p(4)” ?

Solução

Enunciado

Visando aprimorar a capacitação do seu quadro de funcionários, uma empresa sorteia mensalmente quatro colaboradores que vão participar de programas intensivos de treinamento. Nessa empresa, 1/3 dos colaboradores são mulheres. Estamos interessados na distribuição de probabilidade da variável aleatória "número de colaboradoras do sexo feminino". Considerando que o número de funcionários da empresa é suficientemente grande para que possamos aplicar a distribuição binomial, calcule:

a) qual é a probabilidade de nenhum dos 4 colaboradores ser mulher "p(0)" ?

b) qual é a probabilidade de 1 dos 4 colaboradores ser mulher "p(1)" ?

c) qual é a probabilidade de 2 dos 4 colaboradores serem mulheres "p(2)" ?

d) qual é a probabilidade de 3 dos 4 colaboradores serem mulheres "p(3)" ?

e) qual é a probabilidade de todos os 4 colaboradores serem mulheres "p(4)" ?

Solução

Neste exercício, devemos descrever toda a distribuição de probabilidades da variável aleatória *discreta* X = "número de colaboradoras sorteadas".

x	0	1	2	3	4
p(x)					

Isso significa que devemos calcular as probabilidades de cada um dos valores que a variável X pode assumir. Sabemos que a probabilidade de uma colaboradora ser mulher é p =1/3, então:

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^4\times 1=\frac{16}{81}\cong 0{,}20$$

$$P(X=1)=\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times 4=\frac{32}{81}\cong 0{,}40$$

$$P(X=2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times 6=\frac{24}{81}\cong 0{,}30$$

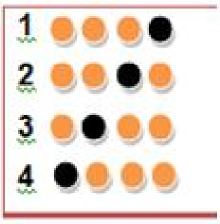
$$P(X=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^1\times 4=\frac{8}{81}\cong 0{,}10$$

$$P(X=4)=\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^0\times 1=\frac{1}{81}\cong 0{,}012$$

Aqui vale um comentário importante. Os números que estão multiplicando as probabilidades têm origem na maneira como se desenha o exercício. Peguemos, por exemplo, o número *4* que está presente na $P(x = 3)$.

$$P(X=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^1\times 4=\frac{8}{81}\cong 0{,}10$$

Essa multiplicação ocorre porque importa a ordem de acontecimento dos fatores. Além disso, são 4 as maneiras possíveis dessa ocorrência, ilustradas a seguir.



Agora podemos completar a tabela da função de probabilidade:

x	0	1	2	3	4
p(x)	0,20	0,40	0,30	0,10	0,012

Com base nessas informações, basta comparar os resultados obtidos com as afirmações propostas:

- *A probabilidade de nenhum dos 4 colaboradores ser mulher é de aproximadamente 20%.*

$$P(X = 0) \cong 0{,}20$$

- *A probabilidade de 1 dos 4* colaboradores *ser mulher é de aproximadamente 40%*

$$P(X = 1) \cong 0{,}40$$

- *A probabilidade de 2 dos 4* colaboradores *serem mulheres é de aproximadamente 30%*

$$P(X = 2) \cong 0{,}30$$

- *A probabilidade de 3 dos 4* colaboradores *serem mulheres é próxima de 10%.*

$$P(X = 3) \cong 0{,}10$$

- *A probabilidade de todos os 4* colaboradores *serem mulheres é de aproximadamente 1%.*

$$P(X = 4) \cong 0{,}012$$

Exercício 2

Uma caixa contém 8 bombons, dos quais 5 são feitos com chocolate meio amargo e 3 são feitos com chocolate branco. Se uma criança pegar dois bombons da caixa, aleatoriamente, qual será a distribuição da probabilidade para o número de bombons feitos com chocolate branco?

Solução

Enunciado

Uma caixa contém 8 bombons, dos quais 5 são feitos com chocolate meio amargo e 3 são feitos com chocolate branco. Se uma criança pegar dois bombons da caixa, aleatoriamente, qual será a distribuição da probabilidade para o número de bombons feitos com chocolate branco?

Solução

Devemos fazer a descrição completa da distribuição de probabilidades da variável aleatória discreta X = "número de bombons brancos".

Sabendo-se que, de 8 bombons de um pacote, 3 são brancos e 5 são meio amargos, vamos calcular as probabilidades de cada um dos valores que X pode assumir.

$$P(X=0)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}=\frac{10}{28}$$

$$P(X=1)=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\times 2=\frac{15}{28}$$

$$P(X=2)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$$

Observe que no caso "escolher um meio amargo e um branco", você deve multiplicar as probabilidades por dois, ou seja, deve considerar as duas combinações possíveis: "branco, meio amargo" e "meio amargo, branco".

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X = "número de bombons brancos" é dada pela tabela a seguir.

x	0	1	2
p(x)	10/28	15/28	3/28

Exercício 3

Enunciado

Uma fábrica de tintas está estudando a aplicação de métodos estatísticos para melhorar a qualidade do seu processo produtivo. Um dos indicadores importantes de qualidade para a tinta é a sensibilidade à luz, descrita pela variável aleatória X que apresenta a seguinte distribuição de probabilidade:

$$f(x) = \frac{w}{x}, para\, x = 1,3,5,7$$

Com base nisso, calcule:

a) O valor da constante w

b) O valor de $P(2 \leq X \leq 6)$

c) O valor de F(5)

Solução

Enunciado

Uma fábrica de tintas está estudando a aplicação de métodos estatísticos para melhorar a qualidade do seu processo produtivo. Um dos indicadores importantes de qualidade para a tinta é a sensibilidade à luz, descrita pela variável aleatória X que apresenta a seguinte distribuição de probabilidade:

$$f(x) = \frac{w}{x}, para\, x = 1,3,5,7$$

Com base nisso, calcule:

a) O valor da constante w

b) O valor de $P(2 \leq X \leq 6)$

c) O valor de F(5)

Solução

a) Como X pode assumir valores de um conjunto finito, trata-se de uma variável aleatória discreta. Sabemos que, a função de probabilidade deve obedecer à seguinte regra:

$$\sum p(x) = 1$$

Então,

$$\sum_x \frac{w}{x} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{w}{1} + \frac{w}{3} + \frac{w}{5} + \frac{w}{7} = 1$$

$$\frac{(105 + 35 + 21 + 15)w}{105} = \frac{176w}{105}$$

$$\rightarrow w = \frac{105}{176}$$

b) Sabemos que, no intervalo $2 \leq X \leq 6$, a variável X pode assumir os valores 5 ou 3, então:

$$P(2 \leq X \leq 6) = P(X = 3) + P(X = 5) = p(3) + p(5) = \frac{w}{3} + \frac{w}{5}$$
$$= \frac{\frac{105}{176}}{3} + \frac{\frac{105}{176}}{5} = \frac{35}{176} + \frac{21}{176} = \frac{56}{176} = \frac{7}{22}$$

c) A função de repartição ou função de distribuição acumulada, no caso discreto, é calculada por:

$$F(a) = \sum_{x_i \le a} p(x_i)$$

Então, $F(5)$ será:

$$F(5) = \sum_{x_i \le 5} p(x_i) = p(1) + p(3) + p(5) = \frac{w}{1} + \frac{w}{3} + \frac{w}{5} =$$

$$\frac{(15 + 5 + 3)w}{15} = \frac{23}{15} \cdot \frac{105}{176} = \frac{161}{176}$$

Exercício 4

Observe a função de distribuição acumulada *F*(x) abaixo e calcule as probabilidades de:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{50}, & 0 \le x \le 5 \\ -\frac{x^2}{50} + \frac{2}{5}x - 1, & 5 \le x < 10 \\ 1, & x \ge 10 \end{cases}$$

a) $X \le 2$
b) $3 \le X \le 8$
c) $1 \le X \le 7$
d) $X \le 6$
e) $X > 1$

Solução

Enunciado

Observe a função de distribuição acumulada *F*(x) abaixo e calcule as probabilidades de:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{50}, & 0 \leq x \leq 5 \\ -\frac{x^2}{50} + \frac{2}{5}x - 1, & 5 \leq x < 10 \\ 1, & x \geq 10 \end{cases}$$

a) X ≤ 2
b) 3 ≤ X ≤ 8
c) 1 ≤ X ≤ 7
d) X ≤ 6
e) X > 1

Solução

Você deve se lembrar que a função de repartição dá a probabilidade acumulada de um determinado valor.

a) X ≤ 2

A probabilidade de *X* assumir valores de no máximo 2 é o acúmulo das probabilidades de todos os valores até 2. Este valor é dado pela função de repartição *F*(*x*):

$$\boldsymbol{P(X \leq 2) = F(2) = \frac{2^2}{50} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}}$$

b) 3 ≤ X ≤ 8

Uma das propriedades da função de repartição é:

$$\boldsymbol{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a), sendo\, b > a}$$

Então,

$$\boldsymbol{P(3 \leq X \leq 8) = F(8) - F(3) = \left(-\frac{8^2}{50} + \frac{2 \times 8}{5} - 1\right) - \left(\frac{3^2}{50}\right)}$$

$$\boldsymbol{= -\frac{32}{25} + \frac{16}{5} - 1 - \frac{9}{50} = \frac{-64 + 160 - 50 - 9}{50} = \frac{37}{50} = 0,74}$$

c) 1 ≤ X ≤ 7

Este item é resolvido da mesma forma que o anterior.

$$P(1 \leq X \leq 7) = F(7) - F(1) = \left(-\frac{7^2}{50} + \frac{2 \times 7}{5} - 1\right) - \left(\frac{1^2}{50}\right)$$

$$= -\frac{49}{50} + \frac{14}{5} - 1 - \frac{1}{50} = \frac{-49 + 140 - 50 - 1}{50} = \frac{40}{50} = 0,80$$

d) X ≤ 6

Este item é semelhante ao item a.

$$P(X \leq 6) = F(6) = -\frac{6^2}{50} + \frac{2 \times 6}{5} - 1 = -\frac{36}{50} + \frac{12}{5} - 1$$

$$= \frac{-36 + 120 - 50}{50} = \frac{34}{50} = 0,68$$

e) X > 1

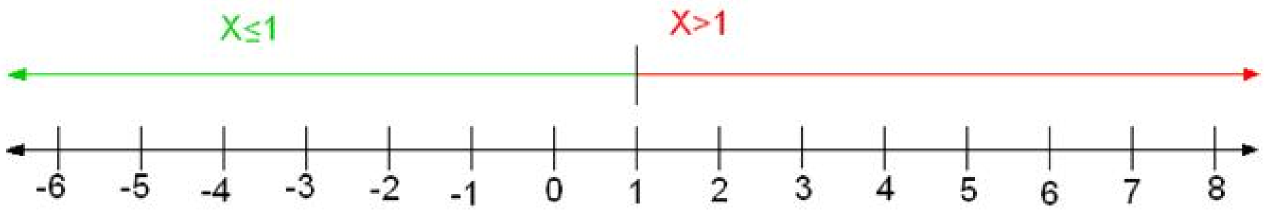
A função de repartição dá apenas o valor da probabilidade de uma variável assumir valores menores ou iguais a um determinado valor. Nesse caso, só podemos calcular a probabilidade de *X* assumir valores menores ou iguais a 1:

$$P(X \leq 1) = F(1) = \frac{1^2}{50} = \frac{1}{50}$$

Já, a probabilidade de *X* ser maior que 1 é dada pelo evento complementar:

$$P(X > 1) = 1 - P(\leq 1) = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$$

Essa solução é aceitável, pois se marcarmos os eventos mencionados anteriormente sobre a reta real, veremos que o espaço amostral fica completamente coberto.



Exercício 5

Considere uma variável aleatória X assumindo os valores 0,1,2,3,4,5 e tal que

$$P(X = j) = k^{*}0{,}8^{*}0{,}2^{j}, j = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5$$

a) Para qual valor de k a expressão anterior é uma função de probabilidade?
b) Calcule $P(X = 2|X < 3)$

Solução

Enunciado

Considere uma variável aleatória X assumindo os valores 0,1,2,3,4,5 e tal que

$$P(X = j) = k^{*}0{,}8^{*}0{,}2^{j}, j = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5$$

a) Para qual valor de k a expressão anterior é uma função de probabilidade?
b) Calcule P(X = 2|X < 3)

Solução

Para resolver esse exercício, podemos começar fazendo uma tabela que relacione o valor de $p(x)$ com cada X em função de k.

x	0	1	2	3	4	5
p(x)	$0{,}8k$	$0{,}16k$	$0{,}032k$	$0{,}0064k$	$0{,}00128k$	$0{,}000256k$

a) Sabemos no entanto que :

$$\sum p(x) = 1$$

$$\rightarrow 0{,}8\,k + 0{,}16\,k + 0{,}032\,k + 0{,}0064\,k + 0{,}00128\,k + 0{,}000256\,k = 1$$

$$\rightarrow k \cong 1$$

b) Agora podemos calcular P(X = 2|X < 3)

$$P(X = 2|X < 3) = \frac{P(X = 2)}{P(X < 3)} = \frac{0{,}032}{0{,}992} \cong 0{,}032$$

Nesse ponto vale reforçar que o calculado na expressão anterior é uma probabilidade condicionada. Esse conceito foi visto em Unidades anteriores. Se você ficou com dúvida na maneira de calcular a probabilidade condicionada, reveja o conteúdo que trata do tema.

Exercício 6

A transfusão de sangue é uma prática médica que ajuda a salvar muitas vidas. No entanto, para uma transfusão de sangue ser bem-sucedida, alguns cuidados devem ser tomados. O sangue doado, além de ser testado para evitar a transmissão de doenças, deve ser de tipo compatível com o tipo sanguíneo do receptor. Esse procedimento é necessário pois cada organismo aceita ou rejeita o sangue recebido e isso pode causar sérios problemas ao doente. Podemos considerar uma pessoa que tenha sangue do tipo O^- como um "doador universal". Considerando um grupo de cinco possíveis doadores, onde somente 2 deles são do tipo O^- , se testarmos cada um dos 5 aleatoriamente, até que um dos indivíduos O^- seja identificado,qual é a função de probabilidade da variável aleatória "número de indivíduos testados"?

Solução

Enunciado

A transfusão de sangue é uma prática médica que ajuda a salvar muitas vidas. No entanto, para uma transfusão de sangue ser bem-sucedida, alguns cuidados devem ser tomados. O sangue doado, além de ser testado para evitar a transmissão de doenças, deve ser de tipo compatível com o tipo sanguíneo do receptor. Esse procedimento é necessário pois cada organismo aceita ou rejeita o sangue recebido e isso pode causar sérios problemas ao doente. Podemos considerar uma pessoa que tenha sangue do tipo O^- como um "doador universal". Considerando um grupo de cinco possíveis doadores, onde somente 2 deles são do tipo O^-, se testarmos cada um dos 5 aleatoriamente, até que um dos indivíduos O^- seja identificado, qual é a função de probabilidade da variável aleatória "número de indivíduos testados"?

Solução

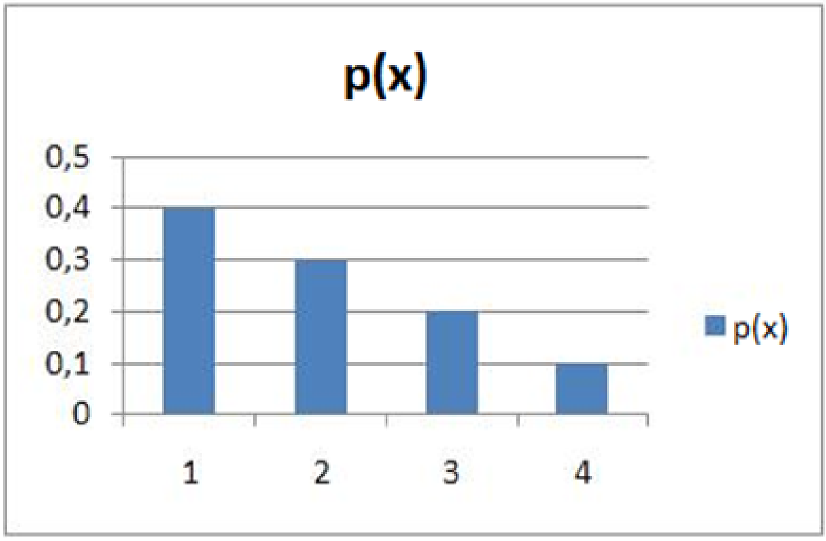
Mais uma vez, para encontrar a função procurada, podemos procurar seu valor ponto a ponto. Façamos isso preenchendo uma tabela para melhor visualização dos resultados.

$$P(X = 1) = \frac{2}{5} = 0{,}4$$
$$P(X = 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0{,}3$$
$$P(X = 3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0{,}2$$
$$P(X = 4) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = 0{,}1$$

	1	2	3	4
p(x)	0,4	0,3	0,2	0,1

Vale lembrar que as probabilidades calculadas foram feitas com base no conteúdo das Unidades anteriores do curso. Se você ficou com alguma dúvida nesse tópico, retorne às Unidades em que se estudou o cálculo de probabilidades e reveja os tópicos que apresentaram dificuldades para você.

Para efeito de ilustração, segue uma explicação sobre o cálculo de $P(x = 3)$: é a probabilidade de o primeiro paciente não ter sangue tipo O^-, multiplicada pela probabilidade de o segundo paciente também não ter esse tipo sanguíneo, finalmente multiplicada pela probabilidade de o terceiro ter esse tipo de sangue.


p(x)
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
p(x)

Exercício 7

O sexo de um indivíduo é definido pela interação de cromossomos sexuais. Nos seres humanos, o sexo é determinado pelo sistema XY. Nesse sistema, os homens têm o cromossomo XY e as mulheres, XX. Na reprodução, cada um cede um dos genes para o descendente com igual possibilidade de ocorrência. Observando então uma maternidade e anotando o sexo de cada criança que nasce, até que nasça uma menina, estabeleça a função de probabilidades para a variável aleatória "crianças nascidas até que nasça a primeira menina". (Recomenda-se resolver esse exercício de maneira literal.)

Solução

Enunciado

O sexo de um indivíduo é definido pela interação de cromossomos sexuais. Nos seres humanos, o sexo é determinado pelo sistema XY. Nesse sistema, os homens têm o cromossomo XY e as mulheres, XX. Na reprodução, cada um cede um dos genes para o descendente com igual possibilidade de ocorrência. Observando então uma maternidade e anotando o sexo de cada criança que nasce, até que nasça uma menina, estabeleça a função de probabilidades para a variável aleatória "crianças nascidas até que nasça a primeira menina". (Recomenda-se resolver esse exercício de maneira literal.)

Solução

Comecemos calculando a função ponto a ponto. Definindo a probabilidade de nascer menina como *p*:

$$\begin{aligned}
&P(X=1)=p\\
&P(X=2)=(1-p)p\\
&P(X=3)=(1-p)^2p\\
&\vdots\\
&P(X=n)=(1-p)^{n-1}p
\end{aligned}$$

Aqui foram utilizados os conhecimentos anteriores de cálculo de probabilidades e evento complementar. Se você ficou com alguma dúvida , reveja esses conceitos nas Unidades anteriores.

A fórmula geral que decorre do desenvolvimento acima é:

$$p(x)=\begin{cases}(1-p)^{x-1}\cdot p & para\ x=1,2,3,\ldots\\ 0 & caso\ contrário\end{cases}$$

Exercício 8

Suponha que em uma produção diária de 750 canetas, 50 delas não vão escrever imediatamente assim que usadas pela primeira vez. Um consumidor compra duas canetas desse lote. Sendo X a variável aleatória que designa o número de canetas que não escrevem de imediato, qual a função repartição de X?

Solução

Enunciado

Suponha que em uma produção diária de 750 canetas, 50 delas não vão escrever imediatamente assim que usadas pela primeira vez. Um consumidor compra duas canetas desse lote. Sendo X a variável aleatória que designa o número de canetas que não escrevem de imediato, qual a função repartição de X?

Solução

Calculemos a função ponto a ponto.

$$P(X=0)=\frac{700}{750}\cdot\frac{699}{749}\cong 0,871$$

$$P(X=1)=\frac{700}{750}\cdot\frac{50}{749}+\frac{50}{750}\cdot\frac{700}{749}\cong 0,125$$

$$P(X=2)=\frac{50}{750}\cdot\frac{49}{749}\cong 0,004$$

Função repartição:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & para\ x<0 \\ 0,871 & para\ 0\leq x<1 \\ 0,871+0,125=0,996 & para\ 1\leq x<2 \\ 1 & para\ x\geq 2 \end{cases}$$