

Introdução à Análise de Algoritmos

Márcio Moretto Ribeiro

16 de setembro de 2021

Conteúdo

1	Introdução	7
1.1	Algoritmos	7
2	Método Empírico	11
3	Correção	21
4	Modelos	27

Apresentação

Esta apostila contém notas de aula do curso ministrado por mim no segundo semestre de 2021 para as duas turmas noturnas de Sistemas de Informação. Naquele ano o curso de Introdução à Análise de Algoritmos foi ministrado à distância por conta da pandemia de COVID19. Seu conteúdo está baseado nos livros que servem de bibliografia para o curso:

- [1] T. H. Cormen. *Algoritmos: teoria e prática*. Campus, 2012. ISBN: 9788535236996.
- [4] R. Sedgewick. *Algorithms in C*. Algorithms in C. Addison Wesley Professional, 2001. ISBN: 9780201756081.
- [5] R. Sedgewick e K. Wayne. *Algorithms: Algorithms 4*. Pearson Education, 2011. ISBN: 9780132762564.

Além dos livros, serviu de material para elaboração destas notas outros materiais citados ao longo do texto bem como as gravações dos cursos do professor Robert Sedgewick para o Coursera e do professor Ronald Rivest para o MIT.

A última versão desta apostila está disponível em um repositório no github (<https://github.com/marciomr/apostila-iaa.git>). Agradeço de antemão eventuais sugestões de correção que forem submetidas pela plataforma.

Alguns dos direitos sobre o conteúdo desta apostila estão protegidos pela licença Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0). Ou seja, você é livre para distribuir cópias e adaptar este trabalho desde que mantenha a mesma licença, dê o devido crédito ao autor e não faça uso comercial.



Capítulo 1

Introdução

1.1 Algoritmos

Um *problema computacional* é a especificação de uma relação desejada entre um certo *valor de entrada* escolhido em um conjunto de valores válidos e o *valor de saída* esperado.

Exemplo 1.1.1:

Problema da busca

Entrada: Uma sequência de n valores a_1, \dots, a_n em que $a_i \in \mathbb{Z}$ para $1 \leq i \leq n$ e $b \in \mathbb{Z}$.

Saída: $i \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = b$ se existir ou \perp caso contrário.

A sequência 3, 5, 16, 17, -1 junto do valor 5 é uma entrada válida para este problema. Qualquer entrada válida é chamada de *instância do problema*. A saída esperada para essa instância é 2, pois o valor 5 ocorre na segunda posição da sequência.

Outra instância do problema é dada pela mesma sequência junto do valor 42. Neste caso a saída esperada é \perp , uma vez que o valor 42 não ocorre na sequência.

Exemplo 1.1.2:

Problema da 3-soma

Entrada: Três sequências de $n \in \mathbb{N}$ valores cada a_1, \dots, a_n , b_1, \dots, b_n e c_1, \dots, c_n em que $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}$ para $1 \leq i \leq n$.

Saída: A quantidade de is , js e ks tais que $a_i + b_j + c_k = 0$.

Uma instância do problema é dada pelas sequências:

1, 2, 3

2, 4, 6

-4, -8, -10

A saída esperada neste caso é 2 porque:

$$2 + 2 - 4 = 0$$

$$2 + 6 - 8 = 0$$

Exemplo 1.1.3:**Problema da ordenação**

Entrada: Uma sequência de n valores a_1, \dots, a_n em que $a_i \in \mathbb{Z}$ para $1 \leq i \leq n$.

Saída: Uma permutação da sequência de entrada a'_1, \dots, a'_n tal que $a_i \leq a_j$ para todo $i \leq j$.

Para a instância 3, 42, 17, 2, -1 deste problema, a saída esperada é -1, 2, 3, 17, 42.

A disciplina de Introdução à Teoria da Computação (ITC) tem como objeto de estudo os problemas computacionais. Como eles se classificam entre os que tem solução ou não e entre os que tem solução eficiente ou não. A solução de um problema computacional é um algoritmo.

Os objetos de estudo desta disciplina são os algoritmos. Mas afinal, o que são algoritmos?

Um *algoritmo* parte de uma entrada escolhida em um conjunto potencialmente infinito de possibilidades (*princípio da massividade*) para produzir um valor de saída. O algoritmo processa a entrada por meio de uma sequência de passos (*princípio da discretude*) que produzem valores intermediários. Cada passo segue uma instrução simples (*princípio da elementaridade*) que só depende dos valores anteriores, não admitindo ambiguidades (*princípio da exatidão*) [3].

Um *programa* é a realização de um algoritmo em certa *linguagem de programação*. Assim, um algoritmo é, de um lado, a solução de um problema de computação e, de outro, uma abstração de um conjunto de programas, ele é a idéia por trás desses programas.

Um algoritmo é *correto* se para toda instância do problema ele produz a saída esperada depois de uma sequência finita de passos. Nesse caso dizemos que o algoritmo *resolve* o problema.

Há uma controversa se devemos ou não considerar uma sequência infinita de instruções como um algoritmo. Essa questão, complicada, está no coração do nascimento da ciência da computação e será tratada em ITC. Neste curso focaremos nos algoritmos corretos e, assim, escaparemos dela.

Para enfatizar o fato de que algoritmos abstrações de programas, eles serão apresentados neste curso em uma linguagem informal conhecida como *pseudo-código*.

Exemplo 1.1.4:

Considere a seguinte solução para o problema da busca.

```
BUSCASEQUENCIAL( $A, b$ )
1  ▷ Recebe  $a_1, \dots, a_n$  com  $a_i \in \mathbb{Z}$  e  $b \in \mathbb{Z}$ 
2  ▷ Devolve  $i$  tal que  $a_i = b$  se existir e  $\perp$  caso contrário
3  for  $i \leftarrow 1$  até  $n$ 
4      do if  $a_i = b$ 
5          then return  $i$ 
6  return  $\perp$ 
```

As duas primeiras linhas são apenas comentários que explicitam a especificação do problema que o algoritmo resolve. A linha 3 indica que um certo valor i deve variar de 1 até n . As duas linhas seguintes estabelecem que se a_i for igual a b então o valor de i

deve ser devolvido como resposta do problema. Por fim, a última linha indica que se o algoritmo chegou naquele ponto, então o valor \perp deve ser devolvido como solução do problema.

Esta disciplina estuda algoritmos. Como podemos garantir que certo algoritmo resolve um problema, ou seja, que ele é correto? O algoritmo do exemplo acima está correto? Por que? Como podemos comparar duas soluções distintas para um mesmo problema? Ou seja, se conhecemos dois ou mais algoritmos corretos para um mesmo problema, como avaliamos qual é melhor? O algoritmo do exemplo acima é o melhor algoritmo possível para o problema da busca? Como podemos garantir isso?

Avaliaremos os algoritmos corretos a partir da quantidade de recursos que eles consomem. Estudaremos particularmente dois recursos: espaço de memória e, principalmente, o tempo de execução.

Nos capítulos seguintes veremos uma série de algoritmos para resolver alguns problemas centrais da computação como o problema da busca e da ordenação. Em cada caso avaliaremos os algoritmos apresentados quanto sua corretude e sua eficiência em consumo de tempo e espaço de memória.

No Capítulo X apresentaremos o estudo dos algoritmos a partir do método empírico. Relembraremos o método e veremos um exemplo comparando o tempo de execução de duas soluções para o problema da busca em sequências ordenadas. Então exploraremos técnicas para arriscar modelos matemáticos adequados para avaliar o consumo de tempo dos algoritmos. E finalmente veremos ferramentas matemáticas úteis para comparar funções quanto ao seu crescimento, a chamada notação assintótica. No Capítulo X estudaremos algoritmos de ordenação como estudo de caso da teoria apresentada anteriormente. Veremos uma série de algoritmos que resolvem o mesmo problema e utilizaremos as técnicas apresentadas para construir e testar modelos do consumo de tempo deles. Estudaremos também um limite teórico da eficiência do problema da ordenação e veremos dois algoritmos que superam esse limite utilizando mais informações do que as assumidas no enunciado do teorema. Concluiremos a apostila no Capítulo X apresentando algoritmos e técnicas um pouco mais avançados como programação dinâmica e análise amortizada.

Capítulo 2

Método Empírico

Esquemáticamente, o método empírico pode ser descrito por cinco fases:

1. *Observação*: medições sobre algum aspecto do mundo
2. *Hipótese*: concepção de um modelo consistente com as observações
3. *Predição*: eventos são previstos de acordo com o modelo
4. *Verificação*: as predições são testadas fazendo-se novas observações
5. *Validação*: o processo se repete ajustando o modelo até que ele concorde com as observações

Dois pontos centrais sobre o método empírico é que as verificações devem ser *reprodutíveis* e as hipóteses *falseáveis*. Uma hipótese que não pode ser falseada por observações (empíricamente) não é científica e a o processo de verificação deve poder ser feito por outros cientistas independentes.

O aspecto do mundo que pretendemos investigar nesta disciplina é o tempo de processamento de um algoritmo. Lembre-se, porém, que um algoritmo é uma ideia que precede o advento dos computadores. O algoritmo de Euclides, por exemplo, data de 300 a.C., ou seja, séculos antes dos primeiros computadores começarem a ser construídos nos anos 40. Embora o algoritmo seja um conceito matemático, uma série de pesquisadores tiveram a ideia de investigá-los de maneira empírica no final dos anos 60. A série de livros *The Art of Programing*, de Donald Knuth, é um marco dessa abordagem dos estudos de algoritmos [2].

Em nosso recorte, observaremos o tempo de processamento da execução de um programa para diferentes entradas. Considere, por exemplo, o algoritmo para o problema da Busca apresentado no capítulo anterior:

BUSCASEQUENCIAL(A, b)

```

1  for  $i \leftarrow 1$  até  $n$ 
2      do if  $a_i = b$ 
3          then return  $i$ 
4  return  $\perp$ 
```

Vamos implementar esse algoritmo na linguagem C de maneira direta:

```

// devolve a posicao de n no arranjo ou -1 se nao encontrar
int buscasequencial(int* array, int n, int size){
    int i;
    for(i = 0; i < size; i++)
        if(array[i] == n)
            return i;
    return -1;
}
```

Realizamos observações usando uma máquina específica (um notebook Dell com processador intel core i7 de 8ª geração de 1,9GHz) em um sistema operacional específico (Linux 5.11). Medimos o tempo total de 300 buscas mal sucedidas em arranjos de tamanhos diferentes com valores inteiros positivos calculados aleatoriamente¹. Os programas que calcula o tempo da busca e que gera as entradas estão disponíveis em <https://github.com/marciomr/IAA>. Variamos o tamanho do arranjo entre um milhão e dez milhões. Obtivemos o seguinte resultado para dez observações:

As observações sugerem que para cada um milhão de valores no arranjo, o tempo de processamento aumenta mais ou menos um segundo. Essa poderia ser nossa hipótese, mas podemos fazer algo um pouco mais sofisticado. Vamos plotar os valores da tabela em um gráfico (Figura 2).

Como os pontos estão mais ou menos alinhados e como é razoável supor que um arranjo sem nenhum elemento retornaria instantaneamente o resultado, faremos a hipótese de que o tempo de processamento segue uma

¹Mais precisamente os valores seguem uma sequência pseudo-aleatória partindo de uma semente inicial.

tamanho do arranjo em milhões	tempo de 300 buscas em segundos
1	0,99
2	2,08
3	3,12
4	3,99
5	5,05
6	5,94
7	7,03
8	7,92
9	8,93
10	9,85

Busca Simples

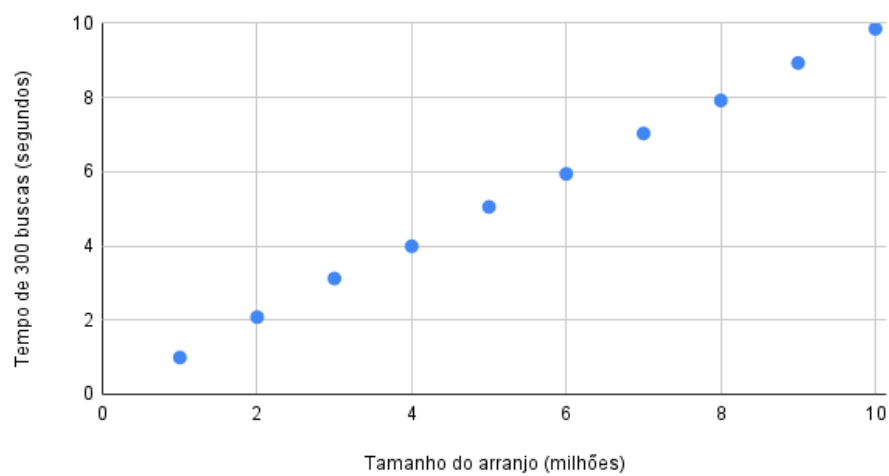


Figura 2.1: Tempo de processamento da busca sequencial.

função linear partindo do zero. Ou seja, a seguinte função descreve o tempo de processamento da nossa implementação em nosso ambiente:

$$t(x) = a.x$$

Podemos então usar uma regressão linear para estimar o valor de a que minimize a distância desse reta para cada um dos pontos. Obtemos então o valor $a = 0,997$. Na Figura 2 plotamos a função $t(x) = 0,997x$ no gráfico anterior.

Busca Simples

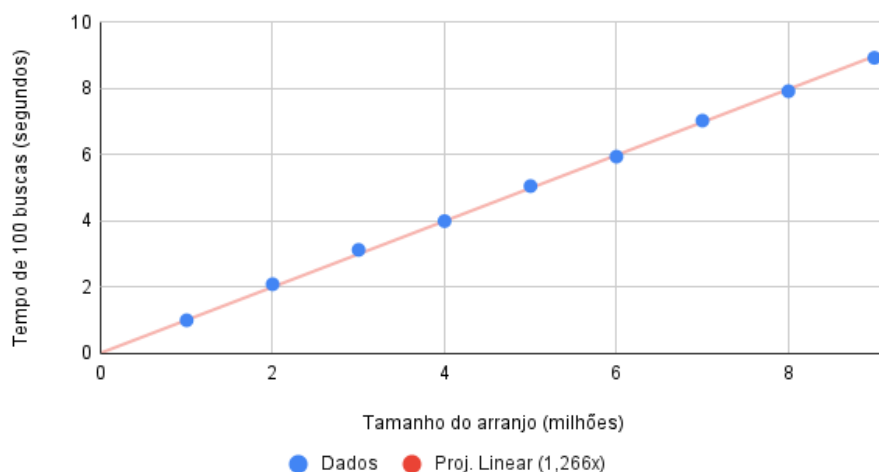


Figura 2.2: Gráfico ilustrando a hipótese de que o tempo de processamento da busca sequencial segue a função linear $t(x) = 0,997x$.

Podemos agora testar nossa hipótese de que o tempo de processamento da nossa implementação da busca sequencial para outros valores ainda não observados. A segunda coluna da Tabela 2 mostra os valores previstos pela hipótese para o tempo de processamento para entradas de tamanho 11 a 15 milhões. Finalmente, podemos testar a hipótese. Na última coluna da mesma tabela indicamos os valores observados para essas entradas:

Os valores observados são notavelmente próximos aos previstos. Ou seja, nossa hipótese foi verificada. Poderíamos neste momento utilizar um teste estatístico para verificar nossa hipótese, mas isso foge do escopo desta disciplina. Por hora diremos apenas que os dados parecem verificar a hipótese.

tamanho do arranjo em milhões	tempo previsto	tempo observado
11	10,97	10,87
12	11,97	11,81
13	12,97	12,78
14	13,96	14,00
15	14,96	14,74

Tabela 2.1: Tempo de processamento previsto e observado para tamanhos maiores de arranjos.

Consideremos agora a seguinte versão modificada do Problema da busca:

Problema da busca em uma sequência ordenada

Entrada: Uma sequência de n valores a_1, \dots, a_n em ordem crescente, isto é, $a_i \leq a_j$ para todo $i \leq j$ e $b \in \mathbb{Z}$.

Saída: $i \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = b$ se existir ou \perp caso contrário.

Note que este problema é uma versão restrita do problema anterior. Assim, toda solução do Problema da busca é também uma solução para o Problema da busca em uma sequência ordenada – o inverso não é necessariamente verdadeiro. Em particular, o algoritmo de Busca Sequencial resolve ambos os problemas. O seguinte algoritmo, por sua vez, resolve apenas o segundo:

BUSCABINARIA(A, b)

```

1  ▷ Recebe uma sequência ordenada  $a_1, \dots, a_n$  e um valor  $b$  todos inteiros
2  ▷ Devolve  $i$  tal que  $a_i = b$  ou  $\perp$  caso  $b$  não ocorra na sequência
3   $i \leftarrow 1$ 
4   $j \leftarrow |A|$ 
5  while  $i \leq j$ 
6      do  $m \leftarrow \lfloor \frac{j+i}{2} \rfloor$ 
7          if  $b < a_m$ 
8              then  $j \leftarrow m - 1$ 
9          else if  $b > a_m$ 
10             then  $i \leftarrow m + 1$ 
11             else return  $m$ 
12 return  $\perp$ 
```

tamanho do arranjo em milhões	tempo de 300 buscas em segundos
1	0,00
2	0,00
3	0,00
4	0,00
5	0,00
6	0,00
7	0,00
8	0,00
9	0,00
10	0,00

Este algoritmo é um pouco mais sofisticado do que o anterior. Começamos avaliando o elemento no centro da sequência (a_m). Como a sequência está em ordem crescent, se o valor procurado (b) for maior do que a_m então ele deve estar depois do valor central e podemos ignorar todos os valores anteriores a m . Analogamente, se b for menor que a_m ele deve estar antes de m e podemos ignorar todos os valores posteriores.

Como fizemos no exemplo anterior, vamos avaliar o tempo de processamento deste algoritmo utilizando o método empírico. O primeiro passo é fazer algumas observações. Vamos repetir as observações feitas no exemplo anterior.

As observações sugerem que o novo algoritmo é muito mais eficiente do que o primeiro. Porém, elas não nos ajudam a conceber um modelo.

Façamos então observações com mais repetições. Depois de alguns testes aprendemos que repetindo dez milhões de buscas o tempo de processamento passa a ser mensurável.

Desta vez conseguimos fazer as medições. As observações sugerem que o tempo de processamento é independente do tamanho do arranjo. Para arranjos de qualquer tamanho o tempo de processamento parece ser maior ou menos o mesmo. Podemos então levantar a hipótese de que o tempo de processamento é constante:

$$t(x) = a$$

Para calcular o valor de a peguemos a média das observações $a = 0,63$.

Assim, nosso modelo preveria que para entradas de qualquer tamanho, o tempo de processamento seria próximo a 0,63 segundos. Vamos testar essa

tamanho do arranjo em milhões	tempo de 10M buscas em segundos
1	0,66
2	0,64
3	0,60
4	0,59
5	0,62
6	0,63
7	0,63
8	0,63
9	0,66
10	0,65

Busca Binária

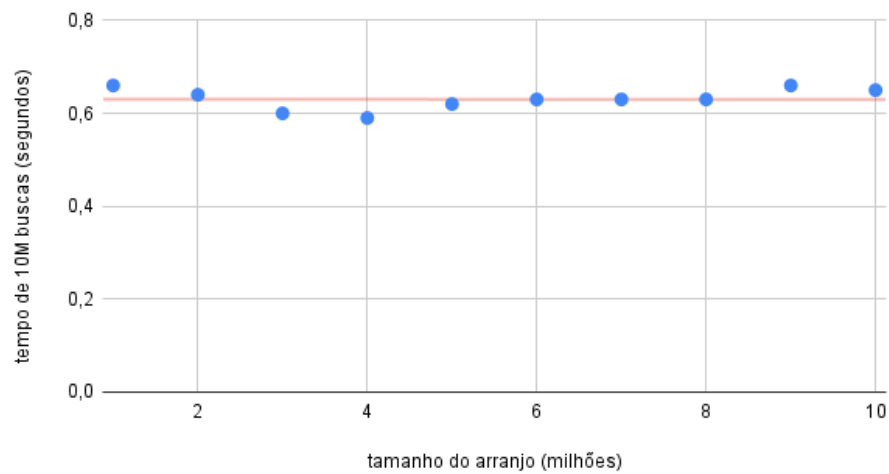


Figura 2.3: Gráfico ilustrando a hipótese de que o tempo de processamento da busca binária segue a função constante $t(x) = 0,63$.

tamanho do arranjo em milhões	tempo previsto	tempo observado
20	0,63	0,68
100	0,63	0,75
500	0,63	0,81
1000	0,63	0,89

Tabela 2.2: Tempo de processamento previsto e observado para tamanhos maiores de arranjos.

tamanho do arranjo em milhões	tempo de 10M buscas em segundos
1	0,59
2	0,62
4	0,69
8	0,69
16	0,74
32	0,76
64	0,79
128	0,83
256	0,96
512	1,01

hipótese com entradas de tamanhos bem maior para ver se a hipótese se verifica.

O processamento continua muito rápido mesmo para arranjos bem grandes, mas parece que a hipótese não foi verificada. Seguindo o método empírico, devemos fazer novas observações para tentar formular uma nova hipótese. Tentemos repetir nossas observações com uma maior amplitude de valores. Ao invés de aumentar o tamanho de nossa sequência em um tamanho fixo a cada observação, vamos tentar desta vez dobrar o tamanho da sequência a cada observação.

As observações sugerem que o tempo de processamento cresce linearmente conforme dobramos o tamanho da nossa entrada. Podemos arriscar então que o tempo de processamento segue o seguinte modelo:

$$t(2^y) = a.y + b$$

Como fizemos no exemplo anterior, podemos computar os valores de a e b utilizando uma técnica de regressão linear. Ficamos assim com $a = 0,043$

Busca Binária

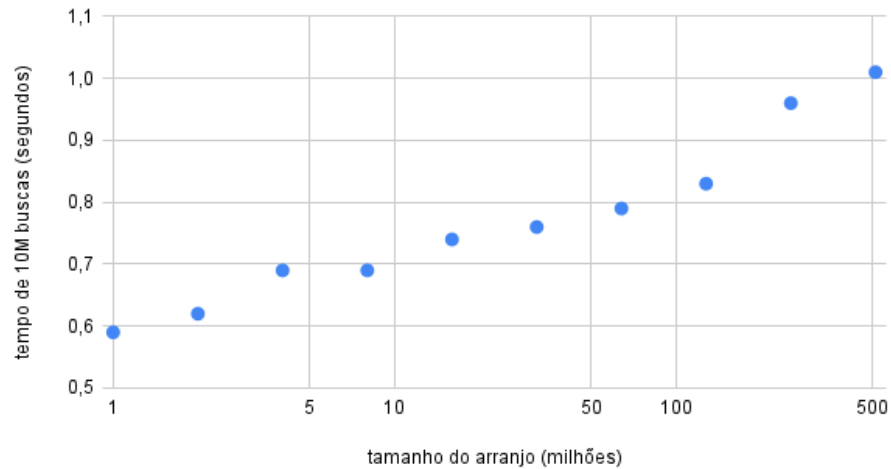


Figura 2.4: Gráfico ilustrando a hipótese de que o tempo de processamento da busca binária segue a função constante $t(2^y) = a.y + b$.

e $b = 0,529$.

Por fim, mudamos a variável $2^y = x$ e obtemos a seguinte equação:

$$t(x) = a.\log_2(x) + b = 0,043.\log_2(x) + 0,529$$

Capítulo 3

Correção

No capítulo anterior vimos que é possível utilizar o método empírico para avaliar tempo de processamento de diferentes soluções para um mesmo problema. Neste capítulo daremos um passo atrás. Como podemos garantir, para começo de conversa, que um algoritmo de fato resolve um problema? Em outras palavras, como podemos provar a correção de um algoritmo?

Para provar a correção de um algoritmo iremos usar uma forma de prova por indução. Assim, antes de partir para os exemplos de prova por indução em um algoritmo, vale a pena lembrar como funciona uma prova por indução em um contexto mais típico.

Normalmente, uma prova por indução é usada para provar alguma propriedade sobre números naturais. A ideia de uma prova por indução é relativamente simples. Ela se divide em três etapas. Primeiro precisamos provar que a propriedade vale para o 0 ou para o primeiro número que nos interessa. Isso é chamado de *Base da Indução*. Então supomos que a propriedade vale para um número n , *Hipótese da Indução*. Por fim, provamos que se vale para n então vale para $n + 1$, *Passo de Indução*. Assim, mostramos que vale para 0 e se vale para 0, deve valer para 1, e se vale para 1, deve valer para 2 e assim por diante. Com isso, provamos que a propriedade vale para todos os números naturais.

Vejam um exemplo. Considere a seguinte somatória:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Vamos provar por indução que esse resultado vale para qualquer número

natural n .

O primeiro passo é provar a base da indução. Vamos provar que o resultado vale para $n = 1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Agora vamos explicitar a Hipótese de Indução.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Por fim, fazemos o Passo de Indução.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Note que a primeira equação vale por conta da Hipótese de Indução.

Passemos agora para um problema computacional. Continuemos considerando o problema da busca em uma sequência ordenada e os dois algoritmos que conhecemos para ele. Primeiro o algoritmo da busca sequencial:

BUSCASEQUENCIAL(A, b)

```

1  for  $i \leftarrow 1$  até  $n$ 
2      do if  $a_i = b$ 
3          then return  $i$ 
4  return  $\perp$ 
```

Para mostrar que o algoritmo é correto temos que encontrar um *invariante*. Uma propriedade que vale em todas as iterações. No nosso caso, vamos considerar a linha 2 do algoritmo e a propriedade será a seguinte:

$$b \text{ não ocorre em } a_1, \dots, a_{i-1}$$

Para provar que essa propriedade é de fato invariante, usaremos um técnica similar às provas de indução. Primeiro precisamos mostrar que a propriedade vale na primeira vez que entramos no laço. Essa etapa é chamada de *inicialização* e corresponde à base da indução.

Neste caso, basta notar que neste caso a sequência é vazia e, portanto, b não pertence a ela.

Em seguida precisamos fazer o passo de indução supondo a hipótese da indução. Para tanto, faremos o seguinte. Iremos supor que a propriedade valia na iteração anterior do laço. Em seguida provaremos que a propriedade continua valendo depois de uma nova iteração. Essa etapa é chamada de *manutenção*.

Pela Hipótese da Indução, se b estivesse na sequência a_1, \dots, a_i então, necessariamente temos que $b = a_i$. Neste caso, não chegaríamos na linha 2, porque o algoritmo teria encerrado na linha 3.

Assim, sempre que chegamos na linha 2, b não ocorre em a_1, \dots, a_{i-1} . Ou seja, a propriedade de fato é um invariante.

Para concluir a prova vamos usar a propriedade invariante para provar que a saída esperada é aquela produzida pelo algoritmo. Para isso, precisamos analisar o que ocorre quando saímos do laço. Essa etapa é chamada de *término*.

No nosso exemplo, o invariante nos mostra que quando chegamos na linha 3, é a primeira vez em que $a_i = b$. E que se chegarmos na linha 4, sabemos que b não ocorre em a_1, \dots, a_n .

Resumindo o que vimos até aqui. Para demonstrar a correção de um algoritmo, o primeiro passo é encontrar uma propriedade *invariante*. Seguimos então os seguintes passos:

1. *Inicialização*: provamos que a propriedade vale na primeira iteração (isso equivale a prova da base da indução).
2. *Manutenção*: provamos que se a propriedade valia na iteração anterior (hipótese da indução), ela continua valendo na iteração atual (isso equivale ao passo de indução).
3. *Término*: usamos o invariante para avaliar o que acontece quando saímos do laço.

Os dois primeiros passos são inspirados na prova por indução e servem para provar que a propriedade escolhida é, de fato, invariante. O terceiro passo completa a prova da correção.

Vamos agora para um exemplo um pouco mais complexo:

```

BUSCABINARIA( $A, b$ )
1   $i \leftarrow 1$ 
2   $j \leftarrow |A|$ 
3  while  $i \leq j$ 
4      do  $m \leftarrow \lfloor \frac{j+i}{2} \rfloor$ 
5          if  $b < a_m$ 
6              then  $j \leftarrow m - 1$ 
7          else if  $b > a_m$ 
8              then  $i \leftarrow m + 1$ 
9              else return  $m$ 
10 return  $\perp$ 

```

Vamos mostrar que as seguintes propriedades são invariantes na linha 4:

b não ocorre em a_1, \dots, a_{i-1}

b não ocorre em a_{j+1}, \dots, a_n

A inicialização é simples, no primeiro momento $i = 1$ e $j = n$. Portanto ambas propriedades valem porque as duas sequências são vazias nessas condições.

A etapa de manutenção segue da seguinte forma. Vamos supor que a propriedade vale em um certo momento quando chegamos na linha 4. Agora imagine que chegamos mais uma vez nessa linha. Neste caso, não saímos do laço. Portanto, uma de duas coisas teve que ocorrer: $b < a_m$ ou $b > a_m$.

No primeiro caso, temos que $j = m - 1$. Como a sequência está ordenada, b não ocorre em $a_{j+1} = a_m, \dots, a_n$ porque $b < a_m$. Além disso, pela hipótese de indução, temos que b não ocorre em a_1, \dots, a_{i-1} .

No segundo caso, temos que $i = m + 1$. Como a sequência está ordenada, b não ocorre em $a_1 = a_1, \dots, a_n$ porque $b > a_m$. Além disso, pela hipótese de indução, temos que b não ocorre em a_{j+1}, \dots, a_n .

Para completar a prova, falta o término. O invariante vale sempre na linha 4. Se chegarmos na linha 9 é porque $a_m = b$ e se chegarmos na linha 10 é porque b não está nem em a_1, \dots, a_i nem em a_j, \dots, a_n e $i > j$. Portanto b não está em a_1, \dots, a_n .

Exercício 1: Considere o seguinte algoritmo:

3SOMA(A, B, C)

```
1   $m \leftarrow 0$ 
2  for  $i \leftarrow 1$  até  $n$ 
3      do for  $j \leftarrow 1$  até  $n$ 
4          do for  $k \leftarrow 1$  até  $n$ 
5              if  $a_i + b_j + c_k = 0$ 
6                  then  $m \leftarrow m + 1$ 
7  return  $m$ 
```

Prove que este algoritmo resolve o problema da 3-soma apresentado no Capítulo 1.

Capítulo 4

Modelos

Vimos no Capítulo ?? que podemos avaliar o tempo de processamento de um algoritmo usando o método empírico. Para isso, em algum momento precisamos de um *modelo* que iremos testar. Nos exemplos que vimos o modelo foi tirado intuitivamente a partir das observações. Há métodos mais adequados para conceber um modelo para o consumo de tempo de um algoritmo.

Vamos mais uma vez considerar os algoritmos de busca que temos estudado.

BUSCASEQUENCIAL(A, b)

```
1  for  $i \leftarrow 1$  até  $n$ 
2      do if  $a_i = b$ 
3          then return  $i$ 
4  return  $\perp$ 
```

Quando esse algoritmo for implementado e executado em uma máquina, as instruções seguidas tomarão um tempo que depende de uma série de fatores. A atualização da variável i na linha 1, por exemplo, deve tomar um tempo. Digamos que esse tempo seja representado por c_1 . A comparação de a_i com b na linha 2 deve tomar algum tempo, digamos c_2 . Devolver um valor na linha 3 tomará tempo c_3 e devolver o erro na linha 4 tomará tempo c_4 .

Não sabemos exatamente quanto é esse tempo e ele deve variar dependendo da máquina, do sistema operacional e outros fatores. A suposição que faremos é apenas que o tempo é constante. Deve variar ligeiramente o tempo que uma máquina leva para atualizar a variável i , mas essa variação deve

ficar em torno de uma média. Portanto, é razoável supor que esse tempo é constante.

O que devemos fazer, então é contar o número de vezes que cada operações ocorre. A primeira e a segunda linha ocorrerão no máximo n vezes. Já a terceira e a quarta linha no máximo uma vez. Assim, um bom modelo para o consumo de tempo que este algoritmo deve tomar em função do tamanho da sequência n é:

$$t(n) \leq c_1.n + c_2.n + c_3 + c_4$$

Nosso modelo varia com o tamanho e com os valores da entrada. Se quisermos um modelo que varia apenas com o tamanho, precisamos fazer alguma suposição. Na maior parte deste curso faremos uma *análise de pior caso*. No nosso exemplo, o pior caso ocorre quando o elemento b não está na sequência A .

Em algumas situações específicas é útil fazer uma análise de caso médio. Mas em geral não conhecemos o suficiente sobre a distribuição de probabilidade da entrada. Uma análise de pior caso nos dá um limite de quanto tempo o processamento dos dados tomará levando em conta apenas o tamanho da entrada.

No nosso caso, o modelo ficaria assim:

$$t(n) = c_1.n + c_2.n + c_3 + c_4 = (c_1 + c_2).n + c_3 + c_4 = a.n + b$$

Note que chegamos no mesmo modelo que apresentamos no Capítulo ??.

Vamos agora replicar esse mesmo tipo de análise para nosso outro algoritmo.

BUSCABINARIA(A, b)

```

1   $i \leftarrow 1$ 
2   $j \leftarrow |A|$ 
3  while  $i \leq j$ 
4      do  $m \leftarrow \lfloor \frac{j+i}{2} \rfloor$ 
5          if  $b < a_m$ 
6              then  $j \leftarrow m - 1$ 
7          else if  $b > a_m$ 
8              then  $i \leftarrow m + 1$ 
9          else return  $m$ 
10 return  $\perp$ 
```

Vamos atribuir constantes c_1, \dots, c_{10} para o tempo de processamento de cada uma das 10 linhas do algoritmo. Agora vamos contar as linhas. As linhas 1, 2 serão executadas uma vez cada. Contar as demais linhas é mais complicado.

Primeiro vamos lembrar que faremos uma análise de pior caso. Assim, a linha 9 não será executada nunca e a 10 será executada apenas uma vez. Outra observação é que toda vez que executarmos a linha 4, executaremos ou as linhas 5 e 6 ou as linhas 7 e 8. Para simplificar, vamos supor que o tempo de execução da linha 5 é o mesmo que da 7 (c_5) e que o tempo de execução da linha 6 é o mesmo que da 8 (c_6). Digamos que entremos x vezes no laço. Então nosso modelo até aqui é:

$$t(n) = c_3.x + c_4.x + c_5.x + c_6.x + c_1 + c_2 + c_{10} = (c_3 + c_4 + c_5).x + c_1 + c_2 + c_{10} = a.x + b$$

Precisamos agora calcular x em termos de n .

Para simplificar ainda mais um pouco nosso trabalho, vamos supor que o tamanho da sequência n é uma potência de 2, ou seja, $n = 2^y$ para algum y . Agora note que cada vez que entramos no laço, metade da sequência é descartada.

Na primeira iteração o pedaço da sequência que estamos considerando é $n = 2^y$. Na segunda iteração ele tem tamanho $\frac{n}{2} = 2^{y-1}$. Na terceira ele tem tamanho $\frac{n}{4} = 2^{y-2}$. Esse processo irá continuar até que o tamanho da nossa sequência seja $1 = 2^0$. Ou seja, do começo ao final do processo as linhas 3 - 6 serão executadas y vezes. Como $n = 2^y$ temos que $y = \log_2(n)$.

Neste curso, o logaritmo na base 2 será tão comum que vale a pena usar uma abreviação para ele. Escreveremos apenas lg .

Assim, nosso modelo fica:

$$t(n) = a.lg(n) + b$$

Mais uma vez, o modelo que chegamos ao contar o número de repetições de cada linha coincide com o modelo que chegamos a partir das observações.

Bibliografia

- [1] T. H. Cormen. *Algoritmos: teoria e prática*. Campus, 2012. ISBN: 9788535236996.
- [2] D.E. Knuth. *The Art of Computer Programming: Volume 1: Fundamental Algorithms*. Pearson Education, 1997. ISBN: 9780321635747.
- [3] A.I. Mal'cev. *Algorithms and Recursive Functions*. Wolters-Noorhoff, 1970.
- [4] R. Sedgewick. *Algorithms in C*. Algorithms in C. Addison Wesley Professional, 2001. ISBN: 9780201756081.
- [5] R. Sedgewick e K. Wayne. *Algorithms: Algorithms 4*. Pearson Education, 2011. ISBN: 9780132762564.