

---

# Exercício sobre Aproximação Polinomial

---

Prof. Frederico Coelho

August 14, 2019

## APROXIMAÇÃO POLINOMIAL

### INTRODUÇÃO TEÓRICA

Considere um polinômio de grau  $p$  conforme representado na sua forma geral na Equação 0.1.

$$p(x) = w_p x^p + w_{p-1} x^{p-1} + \cdots + w_1 x + w_0 \quad (0.1)$$

em que  $x$  é o argumento e  $w_i$  é o coeficiente do termo de grau  $i$ .

Dadas as observações  $(x_i, y_i)$  representadas na forma do conjunto de dados  $D = \{x_i, y_i\}_{i=1}^N$ , deseja-se encontrar o polinômio de grau  $p$  que melhor aproxima a função geradora  $f_g(x)$  do conjunto  $D$ . O objetivo é, a partir das amostras de dados, encontrar o grau  $p$  e os coeficientes  $w_i$  de forma tal que  $p(x) \approx f_g(x) \forall x$ . A aproximação de  $f_g(x)$  é usualmente feita com base na minimização do erro dos termos quadráticos  $(y_i - p(x_i))^2$  ( $i = 1 \cdots N$ ). Espera-se que o conjunto  $D$  contenha informação suficiente para que seja possível aproximar  $f_g(x)$  por  $p(x)$  com base somente nas suas  $N$  amostras. Os parâmetros de  $p(x)$  são ajustados de forma tal que  $y_i = w_p x_i^p + w_{p-1} x_i^{p-1} + \cdots + w_1 x_i + w_0 \forall x_i \in D$ , conforme representado no sistema de equações 0.2.

$$\begin{array}{cccccc} y_1 = w_p x_1^p & + w_{p-1} x_1^{p-1} & + & \cdots & + w_1 x_1 & + w_0 \\ y_2 = w_p x_2^p & + w_{p-1} x_2^{p-1} & + & \cdots & + w_1 x_2 & + w_0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & \\ y_N = w_p x_N^p & + w_{p-1} x_N^{p-1} & + & \cdots & + w_1 x_N & + w_0 \end{array} \quad (0.2)$$

O sistema representado em 0.2 possui  $N$  equações e  $p$  incógnitas, podendo também ser representado na forma matricial 0.3.

$$\mathbf{H}\mathbf{w} = \mathbf{y} \quad (0.3)$$

em que  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{y}$  são representados em 0.4, 0.5 e 0.6.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} x_1^p & x_1^{p-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^p & x_2^{p-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_N^p & x_N^{p-1} & \cdots & x_N & 1 \end{bmatrix} \quad (0.4)$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_p \\ w_{p-1} \\ \vdots \\ w_1 \\ w_0 \end{bmatrix} \quad (0.5)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad (0.6)$$

A matriz  $\mathbf{H}$  possui um papel importante na resolução do problema de aproximação, pois ela contém os termos não-lineares que compõem o polinômio  $p(x)$ , os quais serão responsáveis pela projeção dos elementos  $x_i$  no espaço composto pelo sistema de coordenadas caracterizado pelas colunas de  $\mathbf{H}$ . Como  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{y}$  são dados pelo problema, a solução da Equação 0.3 pode ser obtida por meio da pseudoinversa, conforme Equação 0.7.

$$\mathbf{w} = \mathbf{H}^+ \mathbf{y} \quad (0.7)$$

em que  $\mathbf{H}^+$  é a pseudoinversa de  $\mathbf{H}$ .

## EXERCÍCIOS

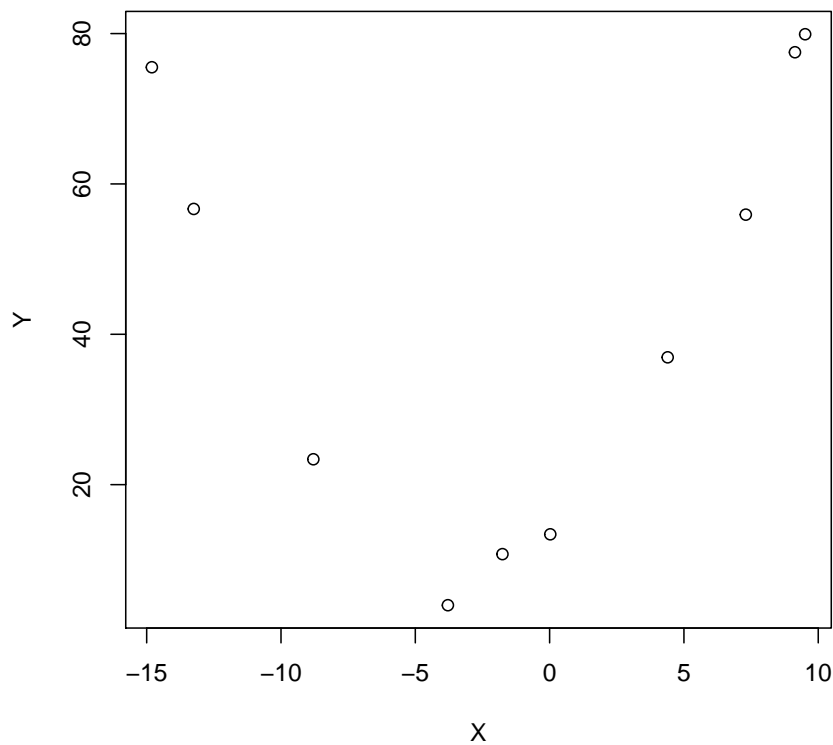
Considerando a aproximação polinomial das seções anteriores, faça:

1. Obtenha aproximações polinomiais a partir de 10 amostras da função geradora  $f_g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 10$  somadas com um ruído gaussiano  $N(mean = 0, sd = 4)$  amostradas entre  $x = -15$  e  $x = 10$ , com um número de amostras  $N = 20$  e grau do polinômio variando entre  $p = 1$  a  $p = 8$ . Para cada aproximação, mostre um gráfico com a função geradora, as amostras e o polinômio obtido.
2. Responda: Ocorreu Overfitting? Ocorreu Underfitting? Em quais casos ocorreu estes fenômenos?

3. Repita o procedimento para 100 amostras ao invés de 10. Qual o impacto do número de amostras na aproximação polinomial?
4. Discorra sobre as semelhanças e diferenças entre os aproximadores polinomiais e as redes neurais artificiais.

Para o cálculo da pseudo-inversa o aluno deverá usar o pacote *library("corpcor")*.  
Exemplo de código para gerar as 10 amostras pedidas:

```
> Namostras = 10  
> X <- runif(n = Namostras,min = -15,max = 10)  
> Y <- (1/2)*X^2+3*X+10+rnorm(length(X),0,4)  
> plot(X,Y)
```



Forma de Entrega: Relatório em .pdf, descrevendo o que foi feito, mostrando os gráficos e as informações solicitadas e explicando os resultados obtidos. O relatório deve ser entregue via Moodle.

Baseado nos exercícios do Prof. A.P. Braga