Nome: ______________________ RA: ____________

Disciplina: Mecânica Estatística

Lista 2: Métodos estatísticos

Prof. Márcio Sampaio Gomes Filho

1. Uma variável aleatória Y pode assumir os seguintes valores com as respectivas probabilidades: $Y = 1$ com probabilidade 0.2, $Y = 3$ com probabilidade 0.3,m $Y = 5$ com probabilidade 0.4, e $Y = 7$ com probabilidade 0.1.

   a) Calcule a média da variável aleatória Y;

   b) Calcule o quadrado da média de Y;

   c) Calcule a média do quadrado de Y;

   d) Calcule o desvio quadrático médio de Y.

2. Mostre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\mathrm{dx} = \sqrt{\pi} \tag{1}$$

3. Cálcule o primeiro e segundo momento da distribuição Gaussiana:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{2}$$

4. Defina e explique o conceito de assimetria (Skewness) e da curtose (Kurtosis) de uma distribuição. Dê exemplos numéricos e/ou gráficos.

5. Mostre que a Transformada de Fourier da Gaussiana é:

$$I(k) = \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\mathrm{k}^2}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{ik}\mu} \tag{3}$$

6. Seja a variável aleatória x contínua e definida com igual probabilidade, no intervalo $x \in [0, \pi]$. Obtenha:

   a) $\overline{x}$;

   b) $\overline{\mathrm{sen(x)}}$ Faz sentido o resultado? Explique. Dica: análise o gráfico da função.

7. Um gás ideal monoatômico está confinado em um recipiente e segue a distribuição de Maxwell-Boltzmann para as velocidades moleculares. A temperatura do gás é T e a massa de cada molécula é m. Cálcule:

   a) Velocidade mais provável: $v_{\text{mp}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$

   b) Velocidade média: $\overline{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$;

   c) Velocidade quadrática média: $v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$.

   d) Discussão sobre os efeitos da temperatura e da massa: Explique os efeitos de aumentar ou diminuir a temperatura T e a massa m das moléculas no comportamento das velocidades características.

8. Considere a variável aleatória X, que assume valores $x \in [0, \infty)$ cuja densidade de probabilidade dada por:

$$P(x) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{D}}}, \tag{4}$$

   onde A e D são constantes não negativas.

   a) Calcule a constante de normalização A, de modo que $P(x)$ seja uma densidade de probabilidade válida.

   b) Determine o valor esperado (médio) $\langle x \rangle$.

9. Considerando que $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ representam o valor médio de x e o valor médio de x^2 em um dado estado ψ, calcule $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ e $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ e $\sigma_x \sigma_p$ para o estado fundamental do poço quadrado infinito. O resultado do produto $\sigma_x \sigma_p$ é consistente com o princípio de incerteza? Explique.