Conceitos de onda vs. partículas, Pacotes de ondas e o Princípio da incerteza

Aula 6

Prof. Márcio Sampaio Gomes Filho

UFABC

Observação

- Esses slides são um complemento à aula ministrada em sala;
- Explicações/desenvolvimentos serão feitas no quadro.

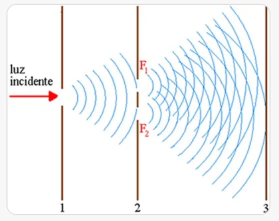
Informação

- Página do curso: `https://marciosampaio.github.io/fisica-quantica-2025.1.html`

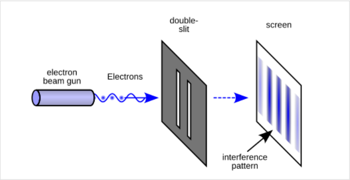
Sumário

- Experimento da dupla fenda (comportamento dual de ondas-partículas).
- Conceitos de onda vs. partículas
- Pacotes de onda
- Princípio da incerteza

Experimento da dupla fenda

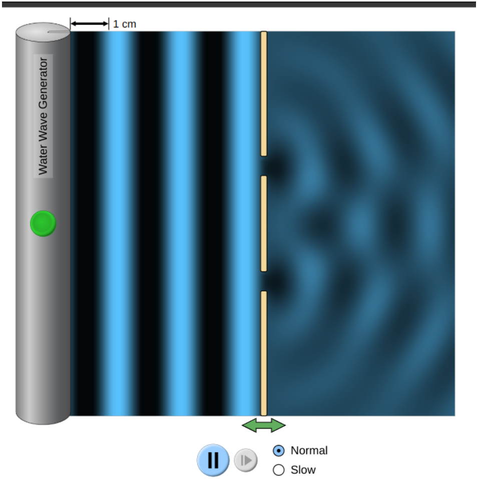


https://brasilescola.uol.com.br/fisica/experimento-das-duas-fendas.htm



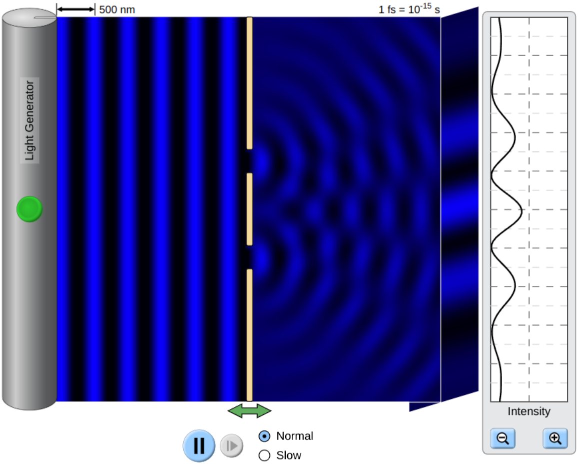
https://ideiasesquecidas.com/2018/06/17/o-experimento-da-fenda-dupla/

Faça uma simulação com água



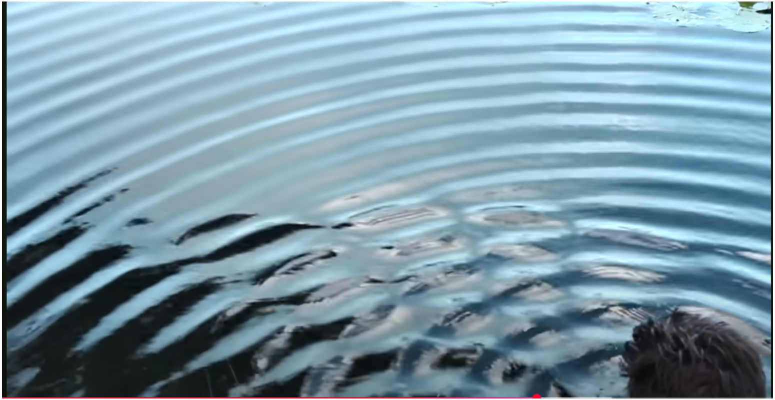
https://phet.colorado.edu/en/simulations/wave-interference

Faça uma simulação com a luz



https://phet.colorado.edu/en/simulations/wave-interference

Experimento com água

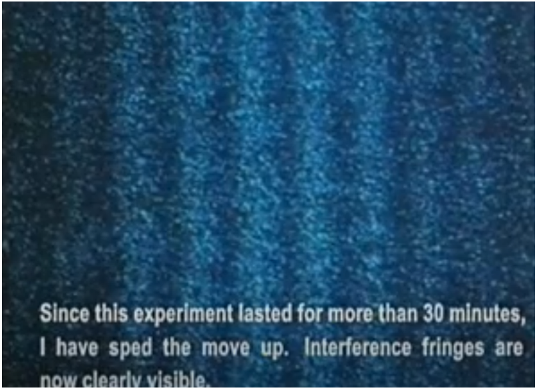


https://www.youtube.com/watch?v=Iuv6hY6zsd0

Experimento com fótons

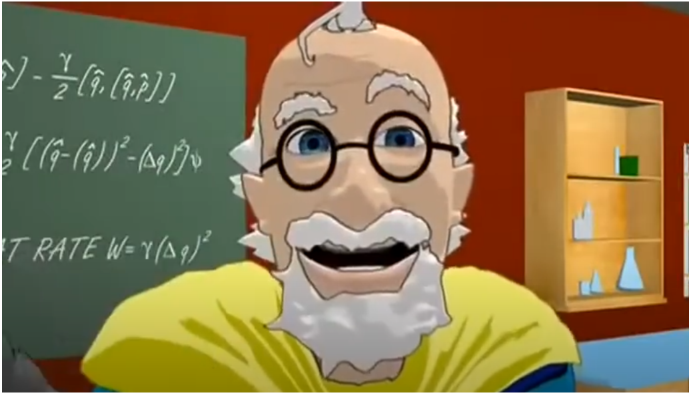
https://www.youtube.com/watch?v=_MpvDAQrKbs

E com elétros?



`https://www.youtube.com/watch?v=ZJ-0PBRuthc`

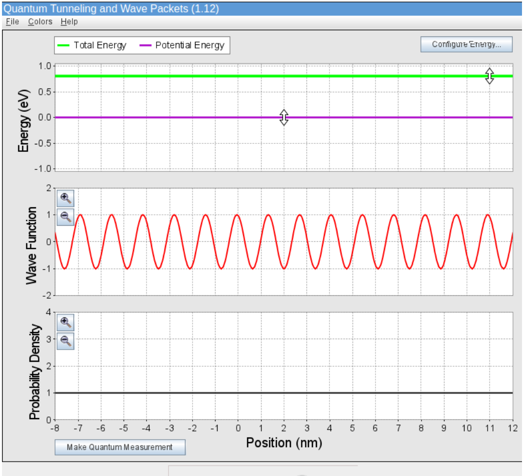
Dr Quantum



https://www.youtube.com/watch?v=NvzSLByrw4Q

Ondas vs Partículas

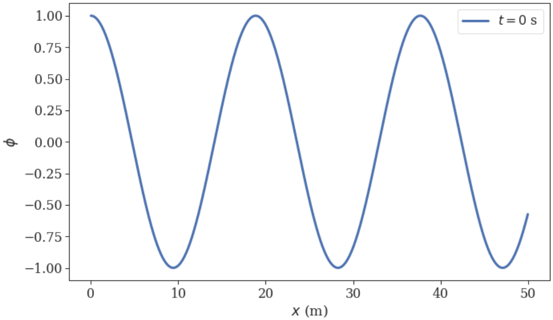
Exemplo: Onda se propagando (plane wave)



https://phet.colorado.edu/sims/cheerpj/quantum-tunneling/latest/quantum-tunneling.html?simulation=quantum-tunneling

Exemplo: propagação de ondas

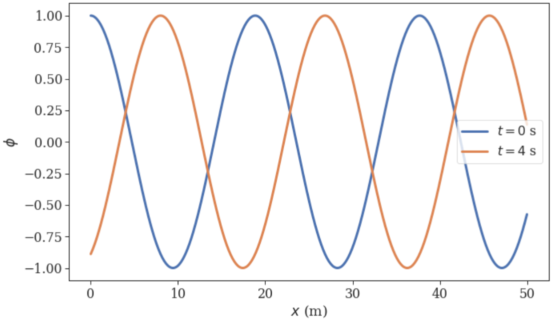
...



https://github.com/andlessa/Teaching/blob/master/FisicaQuantica/ondaPropagacao.ipynb

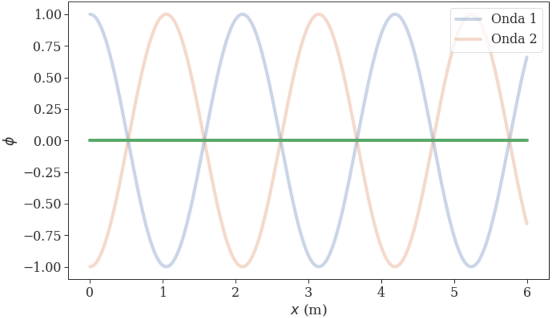
Exemplo: propagação de ondas

...



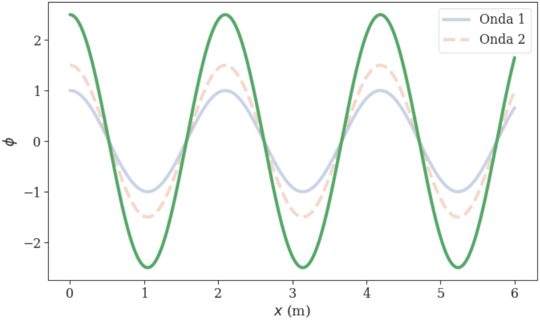
https://github.com/andlessa/Teaching/blob/master/FisicaQuantica/ondaPropagacao.ipynb

Exemplo: Interferências de ondas



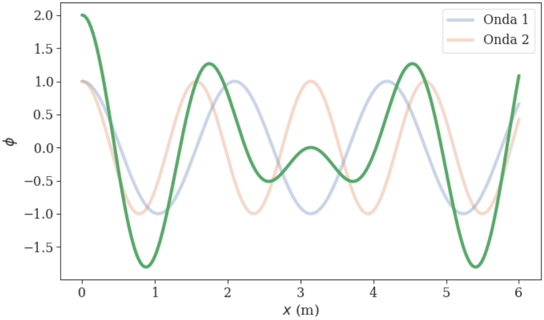
https://github.com/andlessa/Teaching/blob/master/FisicaQuantica/ondaInterferencia.ipynb

Exemplo: Interferências de ondas



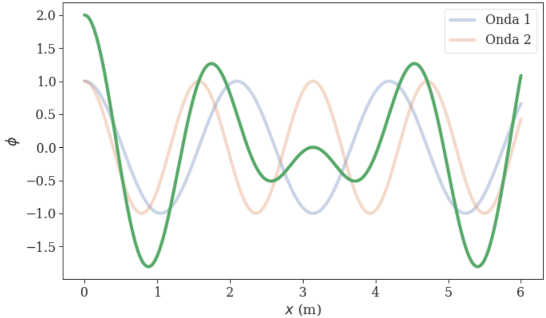
https://github.com/andlessa/Teaching/blob/master/FisicaQuantica/ondaInterferencia.ipynb

Exemplo: Interferências de ondas



`https://github.com/andlessa/Teaching/blob/master/FisicaQuantica/ondaInterferencia.ipynb`

Exemplo: Interferências de ondas



`https://github.com/andlessa/Teaching/blob/master/FisicaQuantica/ondaInterferencia.ipynb`

Ondas de matéria

Em qualquer discussão a respeito de ondas, sempre surge a questão: o que está ondulando?

- No caso de ondas mecânicas, a grandeza que "ondula" é o deslocamento de um ponto do sistema em cada ponto x no tempo t.
- No caso de ondas sonoras, a grandeza que ondula é a pressão.
- No caso das ondas eletromagnéticas, são os campos elétrico e magnético que ondulam.
- No caso de uma onda de máteria?

Pacotes de ondas de matéria

- No caso de uma onda de máteria?
  - No caso das ondas de matéria o que está "ondulando" é uma grandeza, $\psi(x, t)$ chamada **função de onda**, que está relacionada com a **probabilidade de observar** a partícula em cada ponto x do espaço no instante t.

Pacotes de ondas de matéria

Considere, por exemplo, uma **onda** associada a **um elétron** com uma única frequência ν e um único comprimento de onda λ.

- Uma onda desse tipo pode ser representada de várias formas diferentes, por exemplo:

$$\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{1}$$

ou ainda

$$\psi(x,t) = A\exp[i(kx - \omega t)] \tag{2}$$

(falaremos mais sobre a função de onda e suas propriedades nas próximas aulas!!).

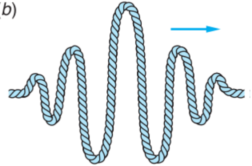
Pacotes de onda

Pacotes de onda

(a)

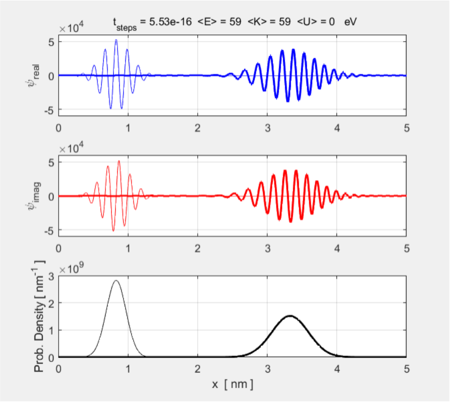
(a) Uma deformação isolada que se propaga ao longo de uma corda e um exemplo de um pulso. O pulso é um fenômeno localizado, ao contrário das ondas harmônicas, que se estendem indefinidamente no espaço e no tempo.

(b)



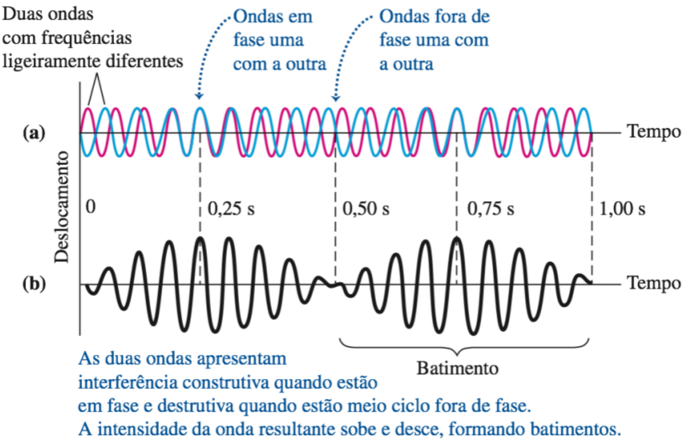
(b) Um pacote de ondas formado pela superposição de ondas harmônicas.

Pacote de ondas

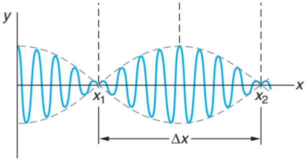


https://d-arora.github.io/Doing-Physics-With-Matlab/mpDocs/se_fdtdA.htm

Pacote de ondas



Pacote de ondas



$$y(x,t) = 2y_0 \cos\left(\tfrac{1}{2}\Delta k x - \tfrac{1}{2}\Delta\omega t\right)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

amplitude que varia com o tempo; envoltória

onda harmônica

- A soma de duas ondas harmônicas não chega a produzir um pacote de ondas localizado. Contudo, podemos assumir a região de localização como sendo a largura da envoltória, Δx. Veja que Δx corresponde a meio comprimento de onda da envoltória.

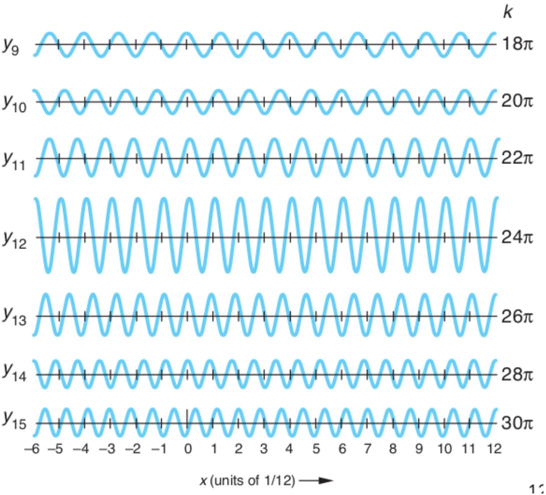
Pacote de ondas

- Podemos construir um pacote de ondas mais localizado se, em vez de somar apenas duas ondas senoidais, somarmos um número maior de ondas com comprimentos de onda ligeiramente diferentes e amplitudes diferentes.
- Sejam sete ondas harmônicas da forma:

$$y_k(x, t) = \cos(kx - \omega t) \tag{3}$$

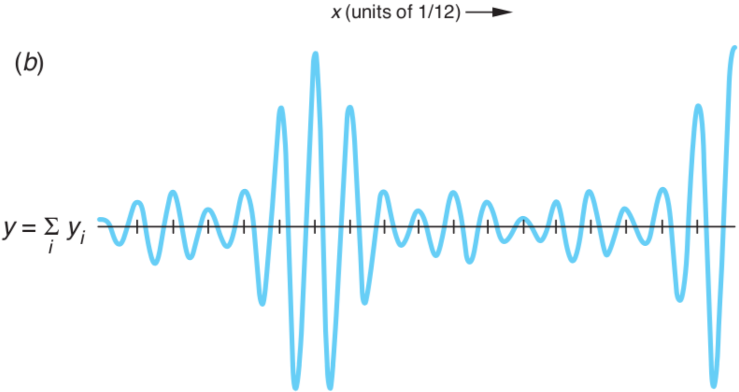
- Números de onda igualmente espaçados? $k = 9(2\pi)$ até $k = 15(2\pi)$, com amplitudes $1/4$, $1/3$, $1/2$, 1, $1/2$, $1/3$ e $1/4$.

Pacote de ondas



❖ O resultado é obtido fazendo a soma:

$$y(x, t_0) = \sum_{i=9}^{15} y_i(x, t_0) \qquad (4)$$

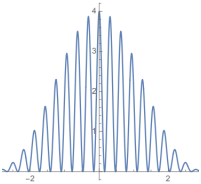


Pacote de ondas

Para se obter um pulso isolado, é preciso construir um pacote com uma distribuição contínua de ondas. Nesse caso, é possível obter um pulso "central" e os grupos secundários desaparecem.

- Se realizamos a superposição de uma infinidade ondas senoidais com:
  - valores de k dentro de um intervalo Δk
  - frequências dentro de um intervalo $\Delta\omega$

  Obteremos um pacote de ondas com uma largura Δx e duração Δt.



Algumas definições

❖ A velocidades de fase e velocidade de grupo são dadas por:

$$v_f = \frac{\omega}{k} \tag{5}$$

e

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} \tag{6}$$

Algumas definições

- Como $\omega = kv_f$, então

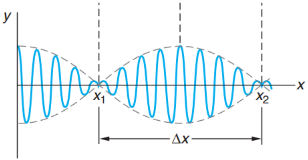
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_f)}{dk} = v_f + k\frac{dv_f}{dk} \tag{7}$$

- A velocidade de grupo fica igual à velocidade de fase $v_g = v_f$, quando $\frac{dv_f}{dk} = 0$. Um meio no qual a velocidade de fase é a mesma para todos os comprimentos de onda é chamado de não dispersivo (como o vácuo para ondas eletromagnéticas)
- Quando $v_g \neq v_f$, o pulso muda de forma enquanto se propaga. Alguns exemplos de meios dispersivo: vidro ou água para as ondas luminosas (meio dispersivo).

Relações de indeterminação clássicas.

Relações de indeterminação clássicas.

Vimos que é possível construir um pacote de ondas de largura Δx e duração Δt usando ondas senoidais com números de onda dentro de um intervalo de números de onda Δk e frequências $\Delta \omega$



$$y(x,t) = 2y_0 \cos\left(\tfrac{1}{2}\Delta k x - \tfrac{1}{2}\Delta\omega t\right) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

amplitude que varia com o tempo; envoltória

onda harmônica

- Caso particular: $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$
- Demonstração: $\Delta k \Delta x = 2\pi$

Relações de indeterminação clássicas.

- Os intervalos de Δk e $\Delta\omega$ das ondas harmônicas necessárias para formar um pacote de ondas dependem da extensão e duração do pulso:
  - É possível mostrar que se a extensão do pulso é pequena Δx, o pacote de onda deve ocupar um grande intervalo de números de onda Δk.
  - Da mesma forma, se a duração do pulso é pequena Δt , o pacote deve ocupar um grande intervalo de frequências $\Delta\omega$.

Relações de indeterminação clássicas.

- Em geral, é possível mostrar (análise de Fourier) que para qualquer pacote de ondas valem as relações:

$$\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2} \tag{8}$$

e

$$\Delta \omega \Delta t \geq \frac{1}{2} \tag{9}$$

- Estas expressões são denominadas relações de indeterminação clássicas.

Relações de indeterminação clássicas

Das relações: $\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2}$ e $\Delta \omega \Delta t \geq \frac{1}{2}$

Usando as relações de de Broglie na forma $E = \hbar\omega$ e $p = \hbar k$, temos $\Delta E = \hbar \Delta\omega$ e $\Delta p = \hbar \Delta k$, portanto, encontramos as relações de incerteza de Heisenberg (1927), como

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{10}$$

e

$$\Delta \omega \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{11}$$

As relações da incerteza de Heisenberg podem ser interpretadas como segue:

- Se Δx é o desvio padrão das medidas de posição e Δp é o desvio padrão das medidas de momento, o produto $\Delta p \Delta x$ tem um valor mínimo de $\frac{\hbar}{2}$ quando as duas distribuições são gaussianas.
- Em qualquer outro caso $\Delta p \Delta x$ deve ser maior que $\frac{\hbar}{2}$.
- Não podemos conhecer **simultaneamente** a posição e o momento de uma partícula com precisão arbitrária.
- Esta limitação não se deve a qualquer problema técnico na concepção dos equipamentos de medição que possa ser resolvida usando instrumentos melhores. Pelo contrário, trata-se de uma limitação física devido à natureza onda-partícula tanto da matéria quanto da luz.

Exercício: Considere uma partícula em um recipiente muito pequeno. A incerteza na posição da partícula é dada como $\Delta x = 1 \times 10^{-10}$ m. Calcule a mínima incerteza no momento (Δp) dessa partícula.