

# Mecânica Estatística

Descrição estatística de sistemas físicos

Ensembles de Gibbs

Prof. Márcio Sampaio Gomes Filho



# Observação

- ❖ Esses slides são um complemento à aula ministrada em sala;
- ❖ Explicações/desenvolvimentos serão feitas no quadro.
- ❖ Caso não tenha assistido à aula em sala, fique atento, pois o conteúdo completo não está disponível apenas nos slides.



# Informação

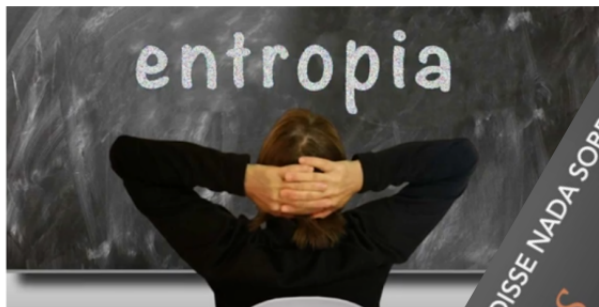
- ❖ Página do curso: <https://marciosampaio.github.io/mec-estatistica-2025.3.html>

# Entropia

## Visão macroscópica

- ❖ Formulada por Rudolf Clausius (1850's)
  - Máquinas térmicas de Carnot (1824)
  - Definição da entropia como uma função de estado.
  - Segunda lei da termodinâmica  $\mapsto$  Variação de entropia ( $\Delta S \geq 0$ )

# Contextualização



## Entropia de Boltzmann (1877)

$$S = k_B \ln W$$



# Entropia de Boltzmann (1877)

- ❖ O **primeiro postulado** da **mecânica estatística de equilíbrio** estabelece que todos os estados microscópicos de um sistema fechado, com energia fixa, são igualmente prováveis, definindo o **ensemble microcânico**.

# Entropia de Boltzmann (1877)

- ❖ O **segundo postulado** é a definição de entropia  $S$ , dada pelo logaritmo do número de **microestados acessíveis ao sistema**:

$$S(E, V, N) = k_B \ln W(E, V, N), \quad (1)$$

onde  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  é a constante de Boltzmann.

- ❖  $W(E, V, N)$ : número de **microestados acessíveis** (multiplicidade) para um dado macroestado.



# Entropia de Boltzmann (1877)

## Interpretação estatística da entropia

- ❖ Exemplo (analogia): **Lançamento de dados**
- ❖ Microestado: uma possível configuração dos dados.
- ❖ Macroestado: a soma do número dos dados.



# Interpretação estatística da entropia

## Dois dados

- ❖ Apenas 1 microestado leva ao macroestado “2”



# Entropia de Boltzmann (1877)

## Dois dados

- ❖ 6 microestados diferentes levam ao macroestado "7"

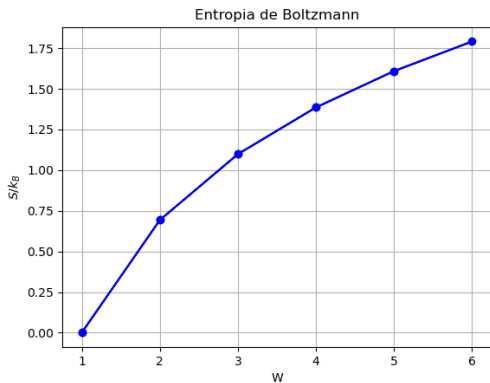
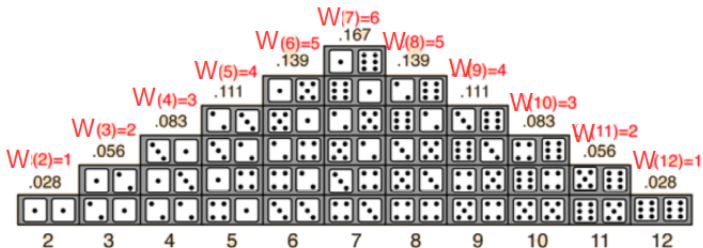


# Entropia de Boltzmann (1877)

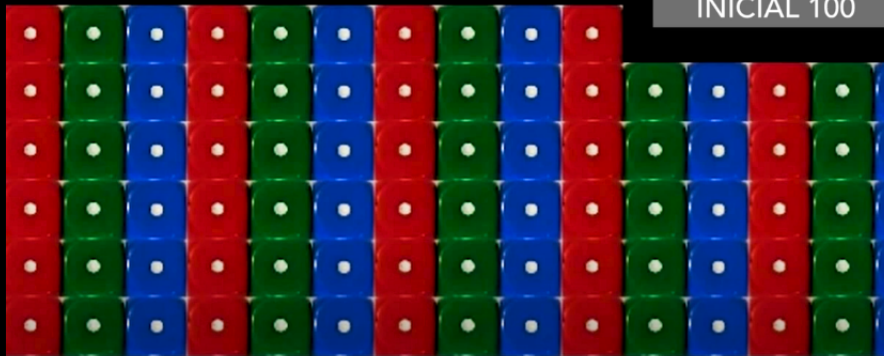
## Dois dados

Macroestado	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de Microestados	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

- ❖ Microestados Ordenados  $\mapsto$  Baixa probabilidade
- ❖ Microestados Desordenados  $\mapsto$  Alta probabilidade



MACROESTADO  
INICIAL 100



# Entropia de Boltzmann (1877)

- ❖ “Em qualquer sistema termodinâmico, o **estado macroscópico mais provável** é aquele com o **maior número de estados microscópicos correspondentes**, que é também o estado macroscópico com a **maior entropia**”.

$$S = k_B \ln W$$

# Entropia de Boltzmann (1877)

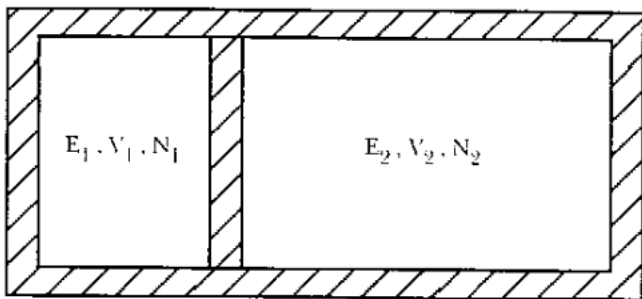
❖ Variação de entropia:

$$\Delta S = S_{\text{final}} - S_{\text{inicial}} = k_B \ln W_{\text{final}} - k_B \ln W_{\text{inicial}} = k_B \ln \left( \frac{W_{\text{final}}}{W_{\text{inicial}}} \right).$$



# Equilíbrio termodinâmico

- ❖ Adiábrica  $\mapsto$  diatérmica:  $E_1 + E_2 = E_0$  (constante)
- ❖ Fixa  $\mapsto$  móvel:  $V_1 + V_2 = V_0$  (constante)
- ❖ Impermeável  $\mapsto$  permeável:  $N_1 + N_2 = N_0$  (constante)



❖ Aulas passadas:  $dS = \frac{1}{T}dE + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$

## Equilíbrio térmico

$$\frac{\partial \ln P(E_1, V_1, N_1)}{\partial E_1} = \frac{\partial \ln W_1(E_1, V_1, N_1)}{\partial E_1} - \frac{\partial \ln W_2(E_2, V_2, N_2)}{\partial E_2} = 0$$

$$\mapsto T_1 = T_2.$$

❖ Aulas passadas:  $dS = \frac{1}{T}dE + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$

## Equilíbrio térmico

$$\frac{\partial \ln P(E_1, V_1, N_1)}{\partial E_1} = \frac{\partial \ln W_1(E_1, V_1, N_1)}{\partial E_1} - \frac{\partial \ln W_2(E_2, V_2, N_2)}{\partial E_2} = 0$$

$$\mapsto T_1 = T_2.$$

## Equilíbrio mecânico

$$\frac{\partial \ln P(E_1, V_1, N_1)}{\partial V_1} = \frac{\partial \ln W_1(E_1, V_1, N_1)}{\partial V_1} - \frac{\partial \ln W_2(E_2, V_2, N_2)}{\partial V_2} = 0$$

$$\mapsto \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}.$$

❖ Aulas passadas:  $dS = \frac{1}{T}dE + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$

## Equilíbrio térmico

$$\frac{\partial \ln P(E_1, V_1, N_1)}{\partial E_1} = \frac{\partial \ln W_1(E_1, V_1, N_1)}{\partial E_1} - \frac{\partial \ln W_2(E_2, V_2, N_2)}{\partial E_2} = 0$$

$$\mapsto T_1 = T_2.$$

## Equilíbrio mecânico

$$\frac{\partial \ln P(E_1, V_1, N_1)}{\partial V_1} = \frac{\partial \ln W_1(E_1, V_1, N_1)}{\partial V_1} - \frac{\partial \ln W_2(E_2, V_2, N_2)}{\partial V_2} = 0$$

$$\mapsto \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}.$$

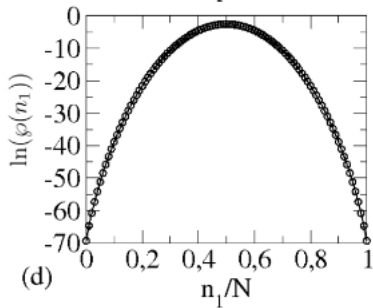
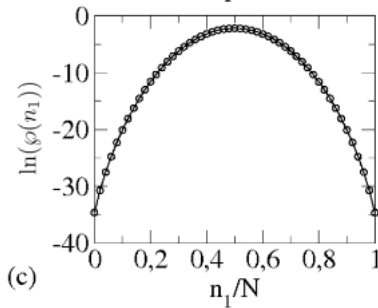
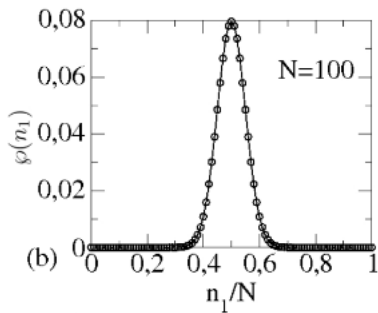
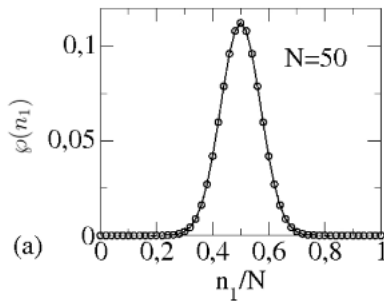
## Equilíbrio químico

$$\frac{\partial \ln P(E_1, V_1, N_1)}{\partial N_1} = \frac{\partial \ln W_1(E_1, V_1, N_1)}{\partial N_1} - \frac{\partial \ln W_2(E_2, V_2, N_2)}{\partial N_2} = 0$$

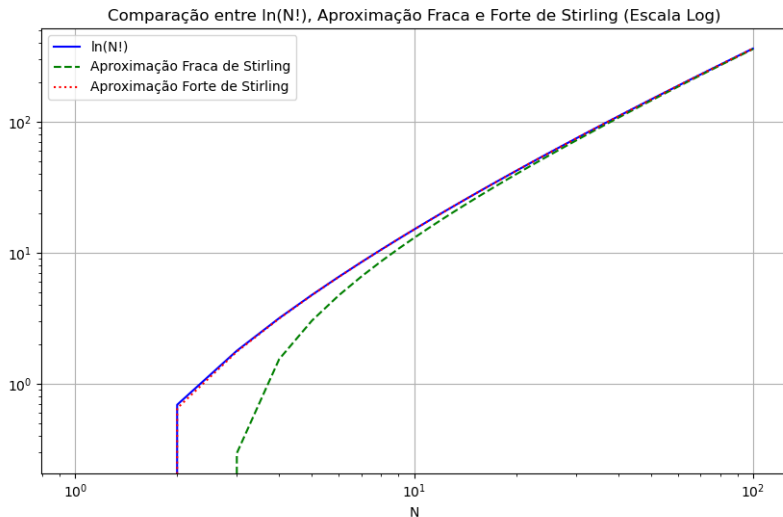
$$\mapsto \frac{\mu_1}{T_1} = \frac{\mu_2}{T_2}.$$

$n_1$	$n_1!$	$\ln(n_1!)$	$n_1$	$n_1!$	$\ln(n_1!)$
0	1	0	980	$4,871938 \times 10^{2.507}$	5.774,165
1	1	0	981	$4,779371 \times 10^{2.510}$	5.781,053
2	2	0,6931472	982	$4,693343 \times 10^{2.513}$	5.787,942
3	6	1,791759	983	$4,613556 \times 10^{2.516}$	5.794,833
4	24	3,178054	984	$4,539739 \times 10^{2.519}$	5.801,725
5	120	4,787492	985	$4,471643 \times 10^{2.522}$	5.808,617
6	720	6,579251	986	$4,409040 \times 10^{2.525}$	5.815,511
7	5.040	8,525162	987	$4,351722 \times 10^{2.528}$	5.822,406
8	40.320	10,60460	988	$4,299502 \times 10^{2.531}$	5.829,301
9	362.880	12,80183	989	$4,252207 \times 10^{2.534}$	5.836,198
10	3.628.800	15,10441	990	$4,209685 \times 10^{2.537}$	5.843,096
50	$3,41409 \times 10^{64}$	148,4778	991	$4,171798 \times 10^{2.540}$	5.849,995
51	$1,551118 \times 10^{66}$	152,4096	992	$4,138423 \times 10^{2.543}$	5.856,894
52	$8,065817 \times 10^{67}$	156,3608	993	$4,109455 \times 10^{2.546}$	5.863,795

Edson Denis Leonel. **Fundamentos da Física Estatística**. São Paulo: Blucher, 2015.



# Aproximação de Stirling



# Função $\Gamma(n)$

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt \quad (2)$$

- ❖  $\Gamma(1) = 0!$
- ❖  $\Gamma(2) = 1!$
- ❖  $\Gamma(3) = 2!$
- ❖  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- ❖  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

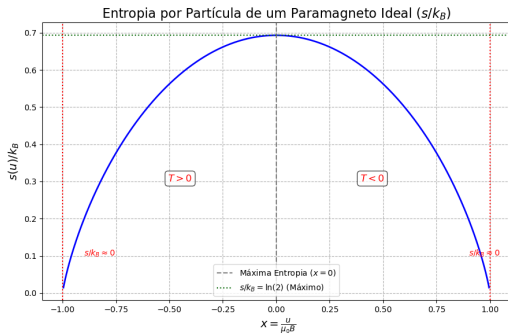




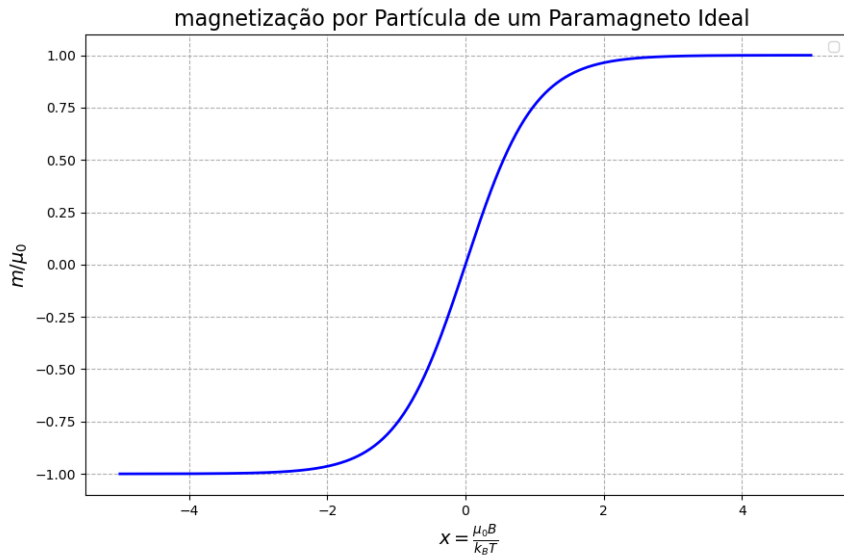
Paramagneto ideal  
no  
ensemble microcânico



# Paramagneto ideal



# Paramagneto ideal



## Paramagneto ideal

