Nome: ______________________ RA: ____________

Disciplina: Mecânica Estatística

Lista 4

Prof. Márcio Sampaio Gomes Filho

1. Considere o modelo do paramagneto ideal. O sistema consiste em N partículas magnéticas não interagentes, localizadas e que podem se alinhar ou não em relação a um campo magnético externo. O hamiltoniano do sistema é escrito como:

$$H = H_1 + H_2 + \cdots + H_N, \tag{1}$$

onde

$$\begin{aligned} H_i &= -\vec{\mu}_0 \cdot \vec{B}, \\ &= -\sigma_i \mu_0 B, \end{aligned}$$

com $i = 1, 2, 3, ..., N$ e B sendo o módulo do campo magnético externo. O parâmetro σ_i pode assumir o valor $+1$ quando o spin está alinhado paralelamente ao campo e -1 quando o spin está alinhando antiparalelamente ao campo.

a) Obtenha a função de partição canônica do sistema de N partículas.

b) Encontre a energia livre de Helmholtz por partícula no limite termodinâmico.

c) Usando a energia livre de Helmholtz por partícula obtida no item anterior, derive a entropia por partícula.

d) Encontre a magnetização por partícula, $m = -\frac{\partial f}{\partial B}$.

e) Determine a susceptibilidade magnética, $\chi(T, B) = \frac{\partial m}{\partial B}$.

2. Considere um sistema de partículas magnéticas que interagem fracamente entre si e estão acopladas a um campo magnético externo. O hamiltoniano do sistema é dado por:

$$H = -J \sum_{i=1,3,5,\cdots,N-1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - \mu_0 B \sum_{i=1}^{N} \sigma_i, \tag{2}$$

onde J é uma constante que representa o acoplamento entre spins. $\sigma_i = \pm 1$ para qualquer sítio da rede. B é o módulo do campo magnético externo e $\mu_0 = \hbar/2$ é o momento magnético de cada spin.

   a) Obtenha a função de partição canônica por cluster de spins. (Dica: veja a discussão sobre esse modelo no livro do Prof. Edison Denis Leonel).

   b) Calcule a energia interna por cluster de spins. Esboce o gráfico de $u(T, B = 0)$ contra a temperatura T.

   c) Encontre a energia livre de Helmholtz por partícula por cluster de spins.

   d) Obtenha a expressão da entropia por cluster de spins;

   e) Encontre a magnetização por cluster.

   f) Determine a susceptibilidade magnética.

3. Considere um gás ideal composto por N partículas relativísticas, no qual a energia de cada uma delas é dada por $\epsilon = cp$, onde c é a velocidade da luz e p é o momento. O gás está confinado em um volume V, a uma temperatura T. Considere também que as partículas são indistinguíveis, não interagentes, e que a energia térmica é suficiente para desprezar os efeitos quânticos. Considere o volume específico do gás como $v = V/N$.

   a) Determine a função de partição canônica do gás ideal relativístico.

   b) Determine a expressão da energia livre de Helmholtz por partícula.

   c) Obtenha a expressão da pressão do gás.

   d) Obtenha a expressão da entropia por partícula.

   e) Obtenha também a energia interna por partícula.

   f) Compare as propriedades com as de um gás ideal clássico e, sempre que possível, esboce gráficos.

4. Dependendo das situações físicas de interesse, podemos construir ensembles estatísticos, colocando o sistema sob consideração em contato com um reservatório adequado. No ensemble das pressões, o sistema está em contato com um reservatório térmico e de trabalho (mecânico). Sobre o ensemble das pressões:

   a) Demonstre a expressão da probabilidade de encontrar o sistema no estado j no ensemble das pressões.

   b) Mostre que a conexão com a termodinâmica é estabelecida pela energia livre de Gibbs.

   c) Determine os valores esperados da energia e do volume.

   d) Mostre que $\langle (\Delta V)^2 \rangle = k_B T V \kappa_T$.

   e) Parta da relação de Euler e mostre que a energia livre de Gibbs por partícula é o próprio potencial químico μ.

   f) Explique o significado do potencial químico μ.