MAT02014 - Planejamento de Experimentos II
Introdução aos delineamentos fatoriais

Rodrigo Citton P. dos Reis
rodrigocpdosreis@gmail.com

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

Departamento de Estatística

Porto Alegre, 2018

Príncipios e definições básicas

Fatores e delineamentos fatoriais

- Muitos experimentos envolvem o estudo de efeitos de dois ou mais **fatores**.
- Em geral, **delineamentos fatoriais** são mais eficientes para este tipo de experimento.
- Por delineamento fatorial, queremos dizer que em cada replicação completa do experimento todas as possíveis combinações são investigadas.
  - Por exemplo, se existem a níveis do fator A e b níveis do fator B, cada replicação contém todas as combinações de tratamentos ab.
- Quando os fatores são organizados em um delineamento fatorial, eles costumam ser **cruzados**.

Fatores e delineamentos fatoriais (comentários)

- De maneira geral, quando se fala de fatoriais não se está falando em delineamentos de experimentos, e sim em **delineamentos de tratamentos**.
  - No entanto, como será visto no curso, existem algumas modificações nos delineamentos básicos que só podem ser aplicadas aos ensaios fatoriais.

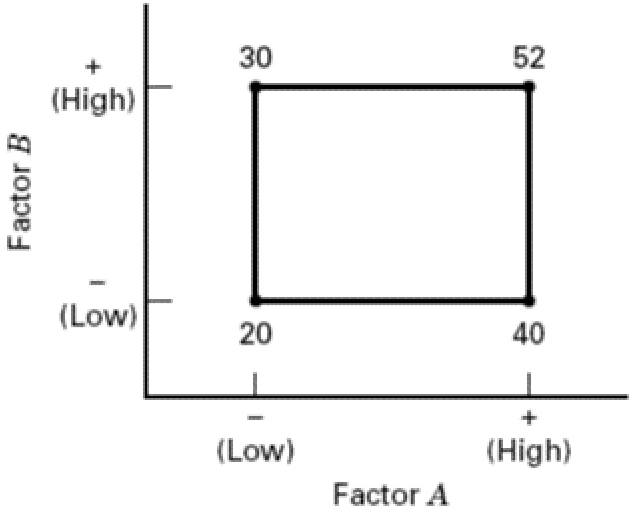
Fatores e delineamentos fatoriais (comentários)

- Chama-se de fator àquilo que se quer testar e de níveis às suas diferentes manifestações.
  - Por exemplo, em estudos de adubação de plantas, três elementos - nitrogênio (N), fósforo (P) e potássio (K) - são considerados os macronutrientes.
    - Assim, cada elemento é considerado um fator, e suas diferentes doses de aplicação níveis.
    - Se apenas um elemento for testado num ensaio, cada nível será chamado de tratamento.
    - Por sua vez, se dois ou três elementos forem testados, cada combinação entre seus níveis é que será declarada como um tratamento.
- Os fatores podem ser **quantitativos**: doses, espaçamento entre plantas, etc; ou **qualitativos**: cultivares, etc.

Efeitos principais

- O efeito de um fator é definido como a mudança na resposta produzida pela mudança no nível do fator.
  - Este é frequentemente chamado de **efeito principal** porque se refere aos principais fatores no experimento.

Experimento fatorial com dois fatores com dois níveis



■ **FIGURE 5.1** A two-factor factorial experiment, with the response (y) shown at the corners

Efeitos principais

$$A = \bar{y}_{A^+} - \bar{y}_{A^-} = \frac{40+52}{2} - \frac{20+30}{2} = 21$$

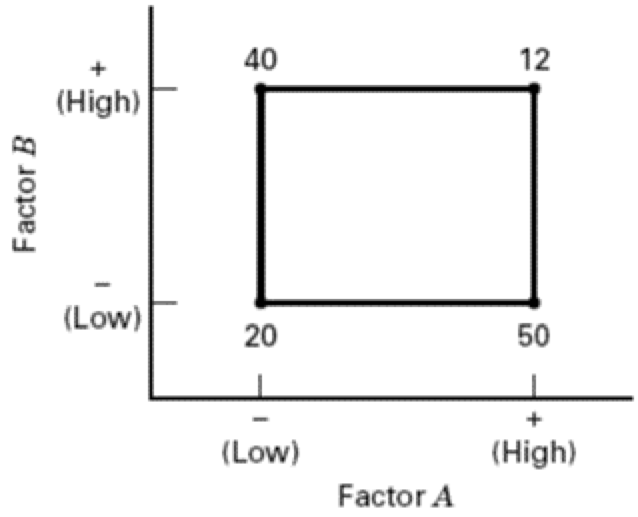
- **Aumento na média da resposta** de 21 unidades.
- Similarmente, temos que o efeito principal de B é

$$B = \bar{y}_{B^+} - \bar{y}_{B^-} = \frac{30+52}{2} - \frac{20+40}{2} = 11$$

Efeito de interação

- Em alguns experimentos, nós poderemos encontrar que a diferença na resposta entre os níveis de um fator não é o mesmo em todos os níveis dos outros fatores.
- Quando isto ocorre, existe uma **interação** entre os fatores.

Outro experimento fatorial com dois fatores com dois níveis



■ **FIGURE 5.2** A two-factor factorial experiment with interaction

Efeito de interação

- No nível B^-, o efeito de A é

$$A = 50 - 20 = 30$$

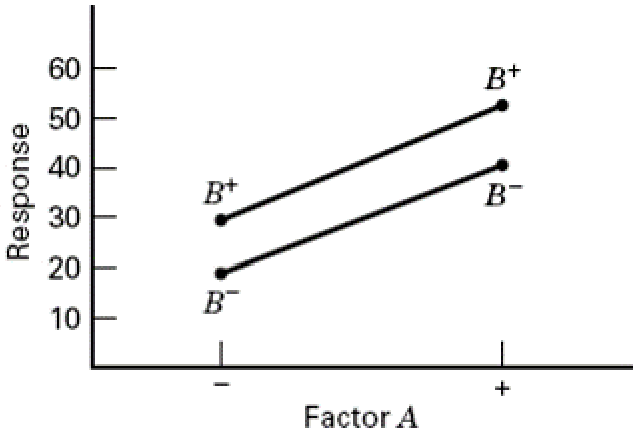
- No nível B^+, o efeito de A é

$$A = 12 - 40 = -28$$

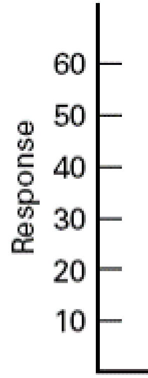
- A magnitude do efeito de interação é a diferença média desses dois efeitos A, ou

$$AB = \frac{-28 - 30}{2} = -29$$

Efeito de interação



■ **FIGURE 5.3** A factorial experiment without interaction



■ **FIGU**
experime

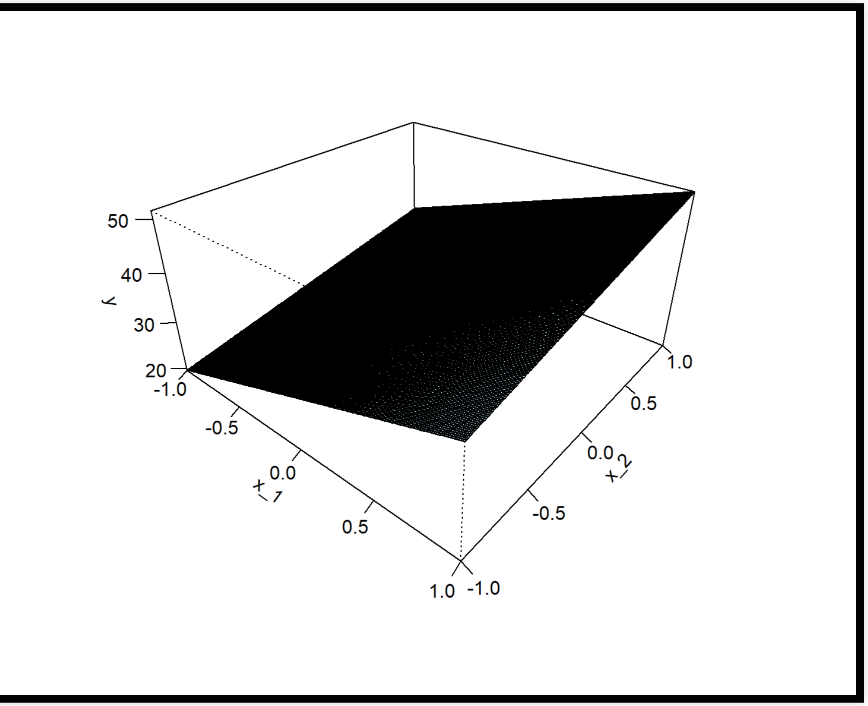
Representação por modelo de regressão

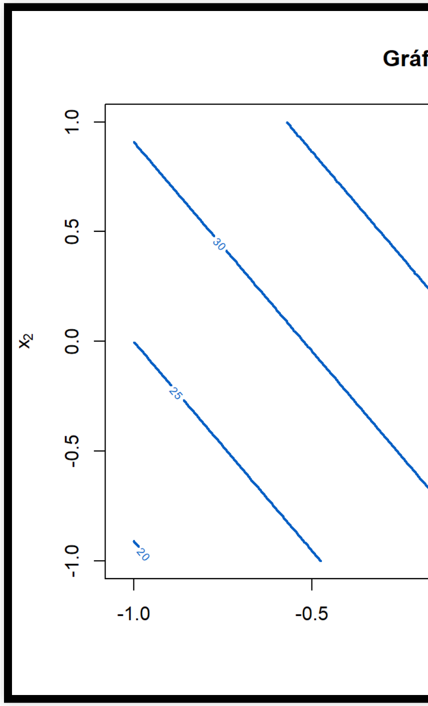
$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \epsilon$$

- y é a resposta
- β's são parâmetros
- x_1 representa o fator A (escala contínua de -1 a 1)
- x_2 representa o fator B (escala contínua de -1 a 1)
- ϵ é o erro aleatório

Representação por modelo de regressão (ausência de interação)

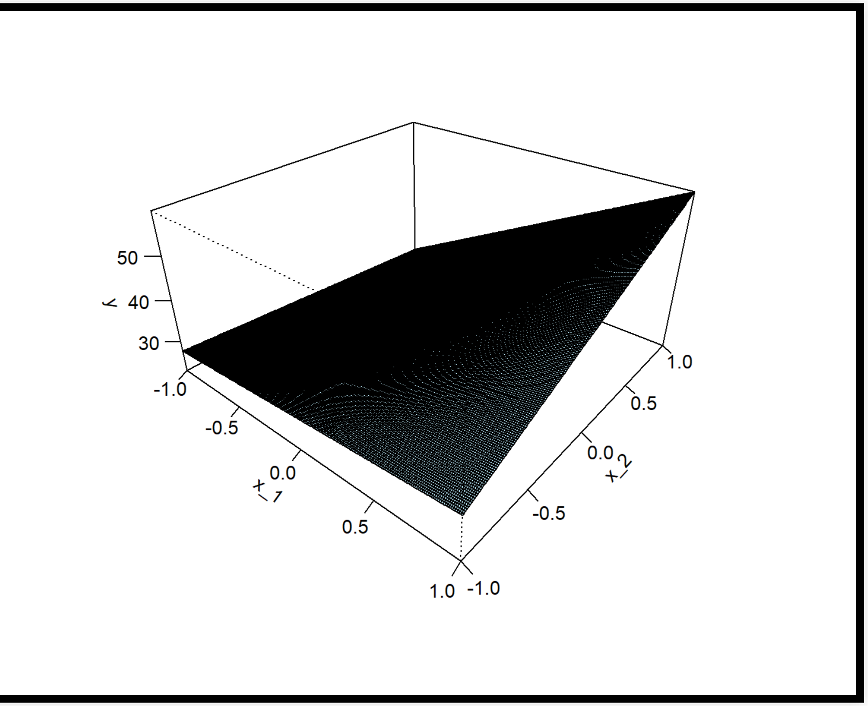
$$\hat{y} = 35.5 + 10.5x_1 + 5.5x_2 + 0.5x_1x_2 \approx 35.5 + 10.5x_1 +$$

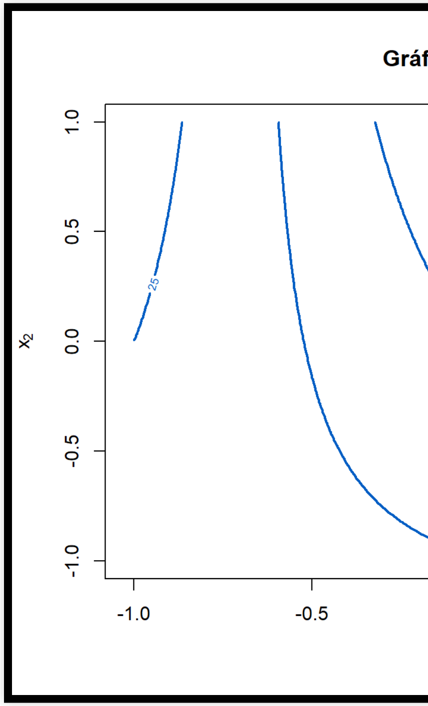




Representação por modelo de regressão (presença de interação)

$$\hat{y} = 35.5 + 10.5x_1 + 5.5x_2 + 8x_1x_2$$

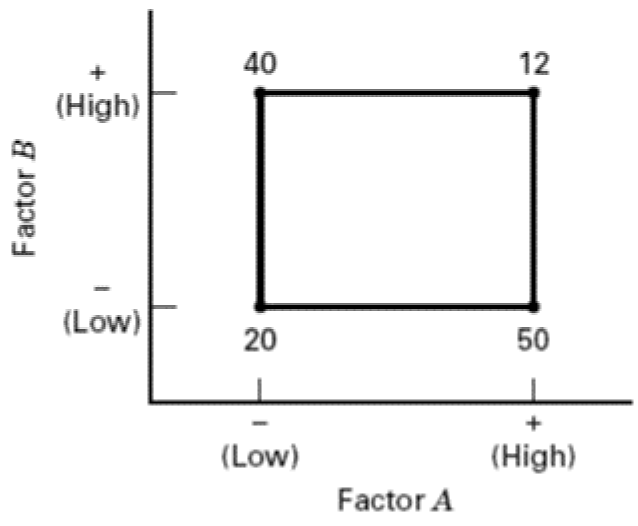




“Interação é uma forma de curvatura”

Efeitos principais *vs* efeito de interação

- Geralmente quando um efeito de interação é grande, os efeitos principais correspondentes têm pouco significado prático.



■ **FIGURE 5.2** A two-factor factorial experiment with interaction

- $A = \bar{y}_{A^+} -$
  que é bem p
  tentados a c
  devido ao A
- No entanto,
  efeitos de A
  vemos que is
  - O fator A
    do nível do

Efeitos principais *vs* efeito de interação

- Ou seja, o conhecimento da interação AB é mais útil que o conhecimento do efeito principal.
- Uma interação significativa geralmente irá **mascarar** a significância dos efeitos principais.
- Na presença de interação significativa, o pesquisador deve usualmente examinar os níveis de um fator, fator A, com os níveis do outro fator fixados para obter conclusões sobre efeito principal de A.

Delineamento fatorial com dois fatores

Delineamento fatorial com dois fatores

- Os tipos de delineamentos fatoriais mais simples envolvem apenas dois fatores ou conjuntos de tratamentos.
- Existem a níveis do fator A e b níveis do fator B, e estes são organizados em um delineamento fatorial.

Exemplo da bateria

- Um engenheiro está desenhando uma bateria para ser usada em um dispositivo que estará sujeita a variações de temperatura.
  - Três tipos de materiais (MT) são possíveis para a fabricação da bateria.
  - Três temperaturas, consistentes com as temperaturas do ambiente de uso.
  - Quatro baterias foram testadas em cada combinação de material e temperatura.
- **Delineamento fatorial 3^2.**

Exemplo da bateria

■ TABLE 5.1

Life (in hours) Data for the Battery Design Example

Material Type	Temperature (°F) 15		70		125	
1	130	155	34	40	20	70
	74	180	80	75	82	58
2	150	188	136	122	25	70
	159	126	106	115	58	45
3	138	110	174	120	96	104
	168	160	150	139	82	60

1. Quais os efeitos do tipo e temperatura do material na vida?
2. Existe uma escolha de material que daria vida longa, independentemente da temperatura (um **produto robusto**)?

Exemplo da bateria

TABLE 5.2
General Arrangement for a Two-Factor Factorial Design

		Factor B			
		1	2	...	b
Factor A	1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \ldots, y_{12n}$		$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \ldots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \ldots, y_{22n}$		$y_{2b1}, y_{2b2}, \ldots, y_{2bn}$
	$\vdots$				
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \ldots, y_{a2n}$		$y_{ab1}, y_{ab2}, \ldots, y_{abn}$

- a níveis do fator A; b níveis do fator B; n replicações.
- Este é um **delineamento completamente aleatorizado**.

Exemplo da bateria

■ **TABLE 5.2**

General Arrangement for a Two-Factor Factorial Design

		Factor B			
		1	2	...	b
Factor A	1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \ldots, y_{12n}$		$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \ldots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \ldots, y_{22n}$		$y_{2b1}, y_{2b2}, \ldots, y_{2bn}$
	$\vdots$				
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \ldots, y_{a2n}$		$y_{ab1}, y_{ab2}, \ldots, y_{abn}$

- O **modelo de efeitos**:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}, i = 1, \ldots, a, j = 1, \ldots,$$

Exemplo da bateria

- Em um experimento fatorial com dois fatores, os fatores A e B são de igual interesse.
- Especificamente, estamos interessados em **testar hipóteses** sobre a igualdade dos efeitos de tratamento das linhas

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0 \quad vs. \quad H_1 : \text{pelo menos um}$$

e a igualdade dos efeitos de tratamento das colunas

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_b = 0 \quad vs. \quad H_1 : \text{pelo menos um}$$

- Também estamos interessados em determinar em que linha e coluna os tratamentos *interagem*

$$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0 \quad vs. \quad H_1 : \text{pelo menos um } (\tau\beta)_{ij} \neq 0$$

- **Pergunta:** O que estas hipóteses representam na prática? -

Cenas dos próximos capítulos: **Análise de variância de dois fatores**

Criando um planejamento fatorial com dois fatores no R

Exemplo da bateria

```r
D <- expand.grid(MT = 1:3, T = c(15, 70, 125))
D
```

```
##   MT   T
## 1  1  15
## 2  2  15
## 3  3  15
## 4  1  70
## 5  2  70
## 6  3  70
## 7  1 125
## 8  2 125
## 9  3 125
```

```r
D <- rbind(D, D, D, D)
set.seed(2591)
D <- D[order(sample(1:36)), ]
BatteryDes <- D[ c( "MT", "T" )]
BatteryDes
write.csv(BatteryDes, file = "BatteryDes.csv", row.names = FALSE)
```

As vantagens dos delineamentos fatoriais

Para casa

- Discuta as vantagens dos delineamentos fatoriais em comparação com o delineamento *um fator por vez*.
  - Veja Czitrom, V. "One-Factor-at-a-Time Versus Designed Experiments". *The American Statistician*, 53:126-131, 1999.