

MAT02014 - Planejamento de Experimentos II

Experimentos com fatores aleatórios

Rodrigo Citton P. dos Reis
rodrigocpdosreis@gmail.com

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

Porto Alegre, 2018

Introdução

Modelos de efeitos aleatórios

- Quando o objetivo do experimento é estudar a variância na resposta causada pela variação dos níveis de dois fatores independentes, o delineamento é similar ao delineamento fatorial de dois fatores que discutimos anteriormente.
- No entanto, no delineamento apresentado anteriormente, os níveis dos fatores seriam selecionados pelo pesquisador porque este estaria interessado na comparação de respostas médias entre estes níveis.
- Nos modelos de efeitos aleatórios os níveis dos fatores são apenas uma **amostra representativa** ou **aleatória** dos **níveis possíveis**.
 - O objetivo é determinar quanto da variância na resposta pode ser atribuída à variação dos níveis dos fatores.

Efeitos fixos *vs* efeitos aleatórios

Duas situações:

1. Uma indústria de parafusos adquiriu 5 máquinas de uma determinada marca para produzir parafusos, e está interessada em realizar um experimento para verificar se as 5 máquinas são homogêneas com relação a resistência média dos parafusos por elas produzidos.
2. A indústria de máquinas do exemplo anterior está interessada em realizar um experimento para verificar se as máquinas produzidas por ela são homogêneas com relação à resistência média dos parafusos que estas máquinas irão produzir. Como a população de máquinas produzidas pela indústria é muito grande o pesquisador quer realizar o experimento com uma amostra de máquinas (5, por exemplo), mas as conclusões devem ser estendidas para a população de máquinas.

Exemplo (Gage R & R)

- *Gage*: (**Gauge?**), “bitola” ou “medidor”.
- *R & R*: repetibilidade e reprodutibilidade.
- Estudos *Gage R & R* são comuns nos departamentos de qualidade das indústrias.
- Nestes estudos o objetivo é classificar a variabilidade em características medidas de produtos fabricados ou componentes de produtos.
- Assumindo que o medidor, ou o instrumento de medida está devidamente calibrado, um valor medido determinado durante uma inspeção de qualidade pode ser considerado uma função da verdadeira dimensão da característica, a **repetibilidade do medidor**, e a **reprodutibilidade do medidor**.

Exemplo (Gage R & R)

- A repetibilidade do medidor é a habilidade de um único operador obter o mesmo valor medido múltiplas vezes usando o mesmo instrumento de medida (medidor).
- A reprodutibilidade do medidor é a habilidade de diferentes operadores de obter o mesmo valor medido múltiplas vezes usando o mesmo medidor na mesma *parte*.
 - Se a variabilidade nas medidas causadas pela repetibilidade do medidor mais a reprodutibilidade é **maior que 10% variação tolerada**, as **medições não devem ser precisas (acuradas)** o suficiente para serem usadas no monitoramento da qualidade do produto.

Exemplo (Gage R & R)

TUBOS ESTRUTURAIS VALLOUREC: QUALIDADE ASSEGURADA PARA DIFERENTES APLICAÇÕES.

A Vallourec é líder na produção de tubos de aço sem costura no país e está presente nos setores de energia, petrolífero, automotivo e construção civil, além de abastecer a indústria de bens de capital nos segmentos ferroviário, máquinas e equipamentos, naval e offshore. Possui usina integrada com alto-forno, aciaria, laminações e unidades de tratamento que produz tubos laminados a quente, nas seções circular e retangular. Nos setores naval e offshore, a empresa oferece soluções customizadas para as necessidades do cliente, não apenas em tubos para extração e condução de petróleo, mas também em estruturas para navios, plataformas, torres do flare, helicopter decks, containers e outros.



CONTATOS

VALLOUREC

USINA BARREIRO

Av. Olinto Meireles, 65 - Barreiro de Baixo
30640-010 - Belo Horizonte - MG
Caixa Postal: 1453-30161-970
Telefone: + (31) 3328-2121
E-mail: contato.vallourecubos-bra@vallourec.com
vallourec.com/br

VENDAS:

E-mail: vendas.estrutural-bra@vallourec.com
Telefone: + (31) 3328-2874

Exemplo (Gage R & R)

Table 5.5 *Data from Gage R & R Study*

Part	Operator		
	1	2	3
1	0.71	0.56	0.52
	0.69	0.57	0.54
2	0.98	1.03	1.04
	1.00	0.96	1.01
3	0.77	0.76	0.81
	0.77	0.76	0.81
4	0.86	0.82	0.82
	0.94	0.78	0.82
5	0.51	0.42	0.46
	0.51	0.42	0.49
6	0.71	1.00	1.04
	0.59	1.04	1.00
7	0.96	0.94	0.97
	0.96	0.91	0.95
8	0.86	0.72	0.78
	0.86	0.74	0.78
9	0.96	0.97	0.84
	0.96	0.94	0.81
10	0.64	0.56	1.01
	0.72	0.52	1.01

Exemplo (Gage R & R)

- O estudo Gage R & R consiste na seleção de um conjunto de partes (ou componentes) manufaturadas que são representativas da variabilidade “parte-a-parte” da fabricação normal.
 - No exemplo, 10 partes foram selecionadas e estas partes representam os níveis do primeiro fator no experimento.
- A seguir, uma amostra aleatória ou representativa de inspetores (operadores) é selecionado.
 - Os inspetores representam os níveis do segundo fator no experimento.
- Por fim, cada inspetor mede cada parte duas vezes.

Exemplo (Gage R & R)

Das model



Exemplo (Gage R & R)

Das model

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}, i = 1, \dots, a, j = 1, \dots,$$

Exemplo (Gage R & R)

Das model

- A **diferença** para o modelo que especificamos para delineamento fatorial de *efeitos fixos* é que assume-se que τ_i , β_j e $(\tau\beta)_{ij}$ são variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas com médias zero e variâncias σ_τ^2 , σ_β^2 e $\sigma_{\tau\beta}^2$.

$$\Rightarrow Var(y) = \sigma_y^2 = \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\tau\beta}^2 + \sigma^2$$

Exemplo (Gage R & R)

Das model

- σ_{τ}^2 representa a porção da variância total devida a diferenças nas partes.
- σ_{β}^2 é a porção da variância causada pelas diferenças entre operadores.
- $\sigma_{\tau\beta}^2$ é a porção da variância causada pela interação operador e parte.
- σ^2 é a porção da variância causada pela medidas replicadas ou **repetibilidade do medidor**.
- A soma $\sigma_{\beta}^2 + \sigma_{\tau\beta}^2$ é a reprodutibilidade do medidor.
- A repetibilidade mais a reprodutibilidade, $\sigma_{\beta}^2 + \sigma_{\tau\beta}^2 + \sigma^2$, é uma medida da variância atribuível ao erro de medição.

Estimando os componentes de variância

- Para o caso com número igual de replicações por subclasse é conveniente usar o **método dos momentos** ou **máxima verossimilhança restrita (REML)**.

Table 5.6 <i>Expected Mean Squares in Two-Factor Sampling Design</i>		
Source	df	EMS
A	$a - 1$	$\sigma^2 + r\sigma_{AB}^2 + rb\sigma_A^2$
B	$b - 1$	$\sigma^2 + r\sigma_{AB}^2 + ra\sigma_B^2$
AB	$(a - 1)(b - 1)$	$\sigma^2 + r\sigma_{AB}^2$
Error	$(r - 1)ab$	σ^2

Estimando os componentes de variância

```
library(daewr)  
head(gagerr)
```

```
##      part oper      y  
## 1      1     1 0.71  
## 2      1     1 0.69  
## 3      1     2 0.56  
## 4      1     2 0.57  
## 5      1     3 0.52  
## 6      1     3 0.54
```

Estimando os componentes de variância

```
modr1 <- aov( y ~ part + oper + part:oper,  
             data = gagerr)  
summary(modr1)
```

```
##              Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)        
## part          9  1.4489  0.16099   214.18 < 2e-16 ***  
## oper          2  0.0297  0.01485    19.76 3.35e-06 ***  
## part:oper     18  0.4839  0.02689    35.77 1.87e-15 ***  
## Residuals     30  0.0225  0.00075                
## ---  
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Estimando os componentes de variância

Método dos momentos

```
sigma2 <- .000752
sigma2po <- (0.026885 - sigma2) / 2
sigma2o <- (0.014852 - sigma2 - 2 * sigma2po) / 20
sigma2p <- (.160991 - sigma2 - 2 * sigma2po) / 6
cat("Method of Moments Variance Component Estimates", "\n",
    "Var(error)=", sigma2, "\n", "Var(part x oper)=", sigma2po, "\n",
    "Var(oper)=", sigma2o, "\n", "Var(part)=", sigma2p, "\n")
```

```
## Method of Moments Variance Component Estimates
## Var(error)= 0.000752
## Var(part x oper)= 0.0130665
## Var(oper)= -0.00060165
## Var(part)= 0.022351
```

Estimando os componentes de variância

Método dos momentos

```
library(lme4)
modr2 <- lmer(y ~ 1 + (1|part) + (1|oper) + (1|part:oper),
              data = gagerr)
summary(modr2)
```

```
## Linear mixed model fit by REML ['lmerMod']
## Formula: y ~ 1 + (1 | part) + (1 | oper) + (1 | part:oper)
##      Data: gagerr
##
## REML criterion at convergence: -133.9
##
## Scaled residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.43502 -0.36558 -0.01169  0.38978  1.94190
##
## Random effects:
##      Groups      Name                Variance Std.Dev.
## part:oper (Intercept) 0.0124650 0.11165
## part      (Intercept) 0.0225515 0.15017
## oper      (Intercept) 0.0000000 0.00000
## Residual                    0.0007517 0.02742
## Number of obs: 60, groups:  part:oper, 30; part, 10; oper, 3
##
```

Estimando os componentes de variância

Exemplo (Gage R & R)

- Dos resultados, podemos ver que $94.3\% = 100 \times [0.01247 / (0.01247 + 0.0007517)]$ do erro de medição é devido a reprodutibilidade.
- Assim, para **reduzir** o erro de medição, os esforços devem se concentrar em treinamentos para os operadores ao invés de investir em medidores (*gages*) mais precisos.

Para casa (para aula)

- Discuta outras aplicações que você considera que o delineamento de fatores aleatórios é apropriado.

