MAT02014 - Planejamento de Experimentos II
Introdução aos delineamentos fatoriais (cont.)

Rodrigo Citton P. dos Reis
rodrigocpdosreis@gmail.com

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

Departamento de Estatística

Porto Alegre, 2018

Estimação dos parâmetros

Relembrando

■ **TABLE 5.2**

General Arrangement for a Two-Factor Factorial Design

		Factor B			
		1	2	. . .	b
Factor A	1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \ldots, y_{12n}$		$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \ldots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \ldots, y_{22n}$		$y_{2b1}, y_{2b2}, \ldots, y_{2bn}$
	$\vdots$				
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \ldots, y_{a2n}$		$y_{ab1}, y_{ab2}, \ldots, y_{abn}$

- O **modelo de efeitos**:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}, i = 1, \ldots, a, j = 1, \ldots,$$

Efeitos fixos e de interação

- $\tau_i = \mu_{i.} - \mu;$
- $\beta_j = \mu_{.j} - \mu;$
- $(\tau\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu + \tau_i + \beta_j) = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu.$

Suposições associadas ao modelo

Das definições do modelo seguem-se as seguintes restrições:

- $\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0;$
- $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0;$
- $\sum_{i=1}^{a} (\tau\beta)_{ij} = 0;$
- $\sum_{j=1}^{b} (\tau\beta)_{ij} = 0.$

Estimação dos parâmetros do modelo

- Os estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros do modelo são obtidos minimizando-se a expressão:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left[y_{ijk} - (\mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij})\right]^2$$

sob as restrições:

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0, \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0, \sum_{i=1}^{a} (\tau\beta)_{ij} = 0, \sum_{j=1}^{b} (\tau\beta)_{ij} =$$

Estimação dos parâmetros do modelo

- Assim procedendo obtemos os estimadores a seguir
  - $\hat{\mu} = \bar{y}_{...}$
  - $\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}$
  - $\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$
  - $(\hat{\tau\beta})_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}$
- Note que
  - $\hat{\mu}_{i.} = \bar{y}_{i..}$
  - $\hat{\mu}_{.j} = \bar{y}_{.j.}$
  - $\hat{y}_{ijk} = \hat{\mu}_{ij} = \bar{y}_{ij.}$
- A k-ésima observação na ij-ésima célula é estimada (predita) pela média das n observações nesta célula.
  - Este resultado foi usado para obter os resíduos modelo fatorial de dois fatores.
    - $\hat{\epsilon}_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk} = y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}$.

Estimação dos parâmetros do modelo

- **Exercício:** encontre os estimadores de mínimos quadrados do modelo fatorial de dois fatores.
  - *Dica:* veja minimização de uma função com restrições.
- **Exercício:** encontre as estimativas dos efeitos principais e de interação, médias global, de linha e coluna e resíduos para o exemplo da bateria.

Estimação dos parâmetros do modelo

```r
exbat.av <- aov(y ~ MT*T, data = D)
modt <- model.tables(exbat.av, type = "means", se = F)
modt$tables
```

```
## $`Grand mean`
## [1] 105.5278
##
## $MT
## MT
##         1         2         3
##  83.16667 108.33333 125.08333
##
## $T
## T
##        15        70       125
## 144.83333 107.58333  64.16667
##
## $`MT:T`
##     T
## MT  15     70     125
##   1 134.75  57.25  57.50
##   2 155.75 119.75  49.50
```

Estimação dos parâmetros do modelo

```
mu.chap <- modt$tables$`Grand mean`
mui.chap <- modt$tables$`MT`
mu.jchap <- modt$tables$`T`
muij.chap <- modt$tables$`MT:T`
tau.chap <- mui.chap - mu.chap
beta.chap <- mu.jchap - mu.chap
taubeta.chap <- muij.chap - rbind(mui.chap,mui.chap,mui.chap) - cbind(mu

mu.chap
```

```
## [1] 105.5278
```

```
mui.chap
```

```
## MT
##          1         2         3
##   83.16667 108.33333 125.08333
```

```
mu.jchap
```

```
## T
##         15          70         125
```

```
##        15        70       125
## 144.83333 107.58333  64.16667
```

```
muij.chap
```

```
##     T
## MT  15      70      125
##   1 134.75  57.25  57.50
##   2 155.75 119.75  49.50
##   3 144.00 145.75  85.50
```

```
tau.chap
```

```
## MT
##          1          2          3
## -22.361111   2.805556  19.555556
```

```
beta.chap
```

```
## T
##        15        70       125
##  39.30556   2.05556 -41.36111
```

```
taubeta.chap
```

```
##     T
## MT  15          70          125
##   1   12.27778  -90.38889 -106.88889
##   2   70.52778    9.36111  -77.63889
##   3  102.19444   78.77778    1.77778
```

A suposição de não interação no modelo de dois fatores

A suposição de não interação no modelo de dois fatores

- Ocasionalmente, um pesquisador pensa que um **modelo de dois fatores sem interação** é apropriado.

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ijk}, i = 1, \ldots, a, j = 1, \ldots, b, k = 1,$$

- Devemos ter muito cuidado em dispensar o termo de interação do modelo, pois a presença de interação significativa tem um grande impacto na interpretação dos resultados.

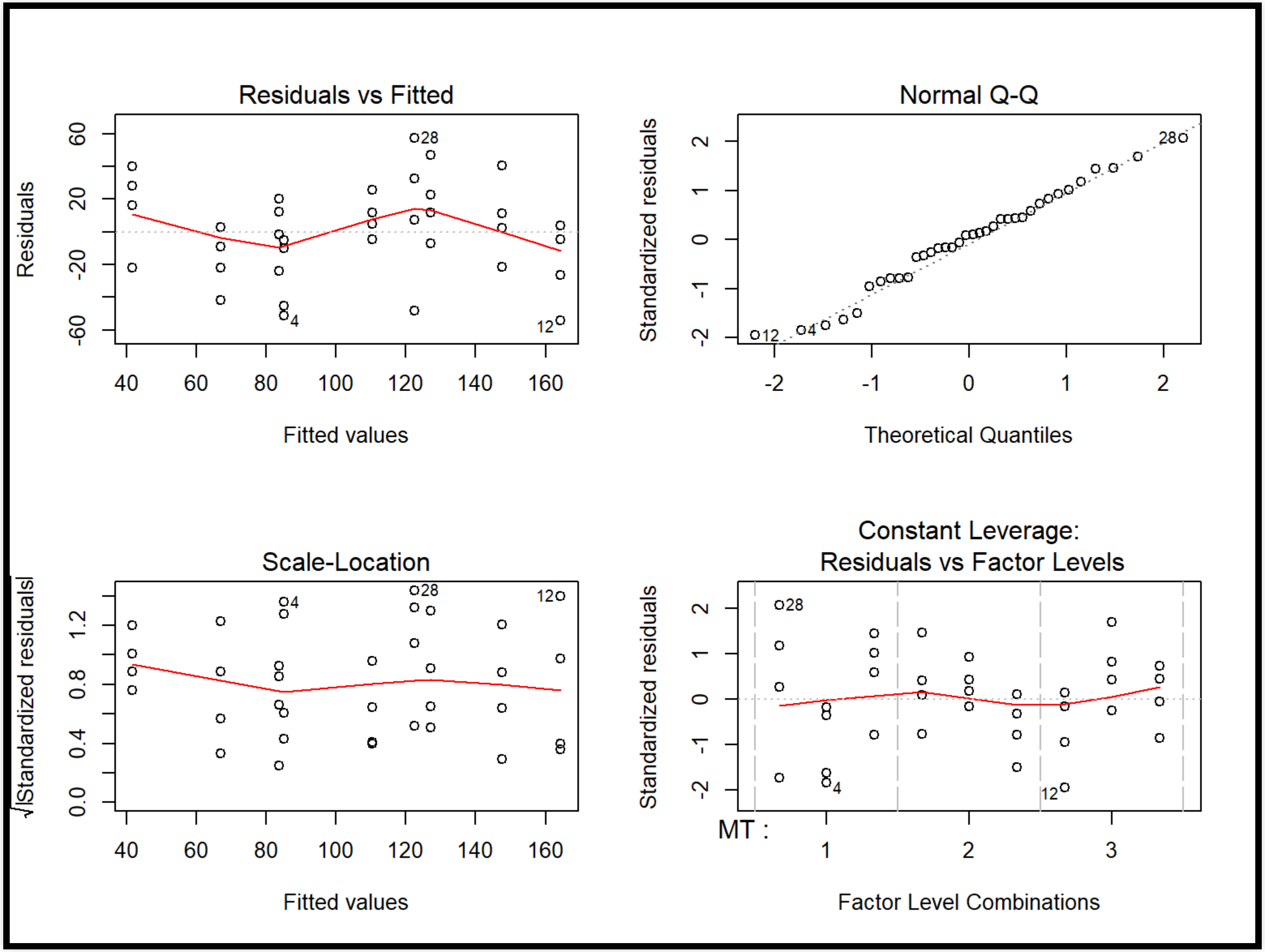
A suposição de não interação no modelo de dois fatores

```r
exbat.av.si <- aov(y ~ MT + T, data = D)
summary(exbat.av.si)
```

```
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)    
## MT           2  10684    5342   5.947  0.00651 ** 
## T            2  39119   19559  21.776 1.24e-06 ***
## Residuals   31  27845     898                     
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

A suposição de não interação no modelo de dois fatores

```r
par(mfrow = c(2,2))
plot(exbat.av.si)
```



Residuals vs Fitted
Residuals
Fitted values
Normal Q-Q
Standardized residuals
Theoretical Quantiles
Scale-Location
√|Standardized residuals|
Fitted values
Constant Leverage:
Residuals vs Factor Levels
Standardized residuals
MT :
Factor Level Combinations

Uma observação por célula

Uma observação por célula

- Ocasionalmente, encontraremos um experimento com dois fatores com apenas **uma replicação**, ou seja, uma observação por célula.
  - Se existir poder suficiente para detectar os efeitos principais com $n = 1$ replicações por célula, poderá fazer sentido realizar um experimento com delineamento experimental com apenas uma observação por célula e $a \times b$ observações.
  - Realizar uma replicação adicional em cada célula iria duplicar os esforços, e usualmente não seria necessário.

Uma observação por célula

- O **modelo de efeitos**:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ij}, i = 1, \ldots, a, j = 1, \ldots, b.$$

- Neste modelo, **não é possível computar** a soma de quadrado do erro (SS_E).
  - Assim, não é possível realizar o teste F para os efeitos principais e de interação.

Uma observação por célula

```r
Cellmeans
```

```
## [1] 134.75 155.75 144.00  57.25 119.75 145.75  57.50  49.50  85.50
```

```r
modnr <- lm(Cellmeans ~ MT*T, data = cells)
anova(modnr)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Cellmeans
##           Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## MT         2 2670.9  1335.5
## T          2 9779.7  4889.8
## MT:T       4 2403.4   600.9
## Residuals  0    0.0
```

Uma observação por célula

- Se não há nenhuma interação no modelo, então $(\tau\beta)_{ij} = 0$, e um modelo plausível é

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij}, i = 1, \ldots, a, j = 1, \ldots, b.$$

Uma observação por célula

- Se este modelo estiver correto, então

```r
modnr2 <- lm(Cellmeans ~ MT + T, data = cells)
anova(modnr2)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Cellmeans
##           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
## MT         2 2670.9  1335.5  2.2226 0.22434
## T          2 9779.7  4889.8  8.1381 0.03892 *
## Residuals  4 2403.4   600.9
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

- Como saber se este modelo é adequado?

Uma observação por célula

- **Tukey** desenvolveu um teste para testar $H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0$, assumindo que $(\tau\beta)_{ij} = \gamma\tau_i\beta_j$, em que γ é uma constante desconhecida.
- Desta forma, a soma de quadrados fica

$$SS_{AB} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}y_{i.}y_{.j} - y_{..}(SS_A + SS_B + y_{..}^2/ab)\right.}{abSS_ASS_B}$$

com um grau de liberdade.

Uma observação por célula

```
library(daewr)
Tukey1df(cells[c(3,2,1)])
```

```
## Source            df      SS          MS          F       Pr>F
## A                  2    9779.681    4889.84
## B                  2    2670.931    1335.465
## Error              4    2403.444    2403.444
## NonAdditivity      1    24.1704    24.1704     0.03     0.8725
## Residual           3    2379.274    793.0913
```

Para casa (para aula)

- Interprete os resultados do modelo de dois fatores com uma observação por célula.