3 Séries Numéricas

3.1 Conceitos básicos e exemplos

Desde muito cedo aprendemos a lidar com a soma de um número finito de parcelas. Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais ($n \in \mathbb{N}$), então a sua soma pode ser representada por

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Pensemos agora na possibilidade de considerar a "soma" de uma infinidade de parcelas. Vamos ver que tal é possível e, em certos casos, podemos mesmo calcular essa "soma". Antes de apresentarmos um significado preciso para estas questões vamos considerar o seguinte problema[29]:

> Imagine-se um corredor a deslocar-se, com velocidade constante, de um certo ponto I (inicial) para um certo ponto F (final). Sejam M_1 o ponto médio do segmento $[IF]$, M_2 o ponto médio de $[M_1F]$, etc. (para cada $k \in \mathbb{N}$, M_{k+1} será o ponto médio de $[M_kF]$). Sendo t o tempo gasto pelo corredor a percorrer a distância $\overline{IM_1}$, então $\frac{t}{2}$ será o tempo gasto a percorrer $\overline{M_1M_2}$, $\frac{t}{4}$ será o tempo gasto a percorrer $\overline{M_2M_3}$ e assim sucessivamente. Deste modo, Zenão argumentava que o tempo total T gasto pelo corredor para completar o percurso de I até F corresponde a uma "soma" de uma infinidade de "tempos parciais",
>
> $$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \cdots, \tag{3.1}$$
>
> pelo que T teria de ser necessariamente infinito! Mas isto significaria que o corredor jamais chegaria ao seu destino, o que resulta numa contradição evidente com o facto de o tempo total T ser claramente $2t$, visto o movimento ser uniforme.

O problema anterior sugere que, em algumas situações, a "soma" de uma infinidade de quantidades pode ser finita.

[29]Este problema, também conhecido pelo *Paradoxo do Atleta*, foi colocado pelo filósofo grego Zenão.

Pretende-se então dar um sentido à "soma" de uma infinidade de parcelas, tentando, na medida do possível, conservar as propriedades já conhecidas da adição de números reais.

Seja (a_n) uma sucessão de números reais. A expressão

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{3.2}$$

traduz a ***série*** *gerada* pela sucessão (a_n). Diz-se também que a_n é o ***termo geral da série***. Por exemplo, o termo geral da série (3.1) é $\frac{t}{2^{n-1}}$. Recordando a simbologia já conhecida dos somatórios, podemos também denotar a série (3.2) pelos símbolos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geq 1} a_n.$$

Vamos agora associar à série (3.2) a sucessão (S_n) definida por

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 = S_1 + a_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_{n-1} + a_n, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

A sucessão (S_n) designa-se por ***sucessão das somas parciais***. Vemos, portanto, que na série de termo geral a_n aparecem envolvidas duas sucessões, (a_n) e (S_n), em que a segunda é obtida a partir da primeira da forma já descrita.[30]

No caso da série envolvida no Paradoxo de Zenão, temos

$$S_n = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{2^2} + \cdots + \frac{t}{2^{n-1}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Como

$$\frac{S_n}{2} = \frac{t}{2} + \frac{t}{2^2} + \frac{t}{2^3} + \cdots + \frac{t}{2^n}\,,$$

[30]Importa registar que podemos também obter a_n a partir de S_n do seguinte modo:

$$a_1 = S_1\,, \quad a_n = S_n - S_{n-1}\,, \;\; n = 2, 3, \ldots$$

Assim, é sempre possível obter qualquer uma destas sucessões a partir da outra.

então

$$S_n - \frac{S_n}{2} = t - \frac{t}{2^n}$$

e, por conseguinte, temos

$$S_n = 2t\Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Podemos agora dar um significado preciso à "soma" indicada em (3.1) do seguinte modo:

$$t+\frac{t}{2}+\frac{t}{2^2}+\frac{t}{2^3}+\cdots = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{t}{2^{k-1}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2t\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big) = 2t, \quad (3.4)$$

valor que corresponde, efetivamente, ao tempo total T gasto pelo corredor.

A noção rigorosa de "soma" de uma infinidade de parcelas conduz-nos a um conceito fundamental na teoria das séries: o conceito de *convergência*[31].

Definição 3.1 (convergência de uma série)
A ***série*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diz-se* ***convergente*** *(ou que converge) se a respetiva sucessão das somas parciais* (S_n) *for convergente, i.e., se existir e for finito o limite* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$*. Nesse caso, chama-se* ***soma da série*** *ao valor desse limite e escreve-se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Caso contrário, i.e., se a sucessão das somas parciais for divergente, a ***série*** *diz-se* ***divergente*** *(ou que diverge).*

Um dos objectivos principais deste capítulo é analisar a natureza de uma série numérica, ou seja, averiguar se ela é convergente ou divergente. Em

[31] Apesar de as séries aparecerem envolvidas em certos problemas desde a Antiguidade, o rigor que permitiu criar uma teoria de séries apenas foi alcançado a partir do Séc. XVIII, graças a trabalhos de grandes matemáticos como Euler, Cauchy e Weierstrass. Convém salientar, neste âmbito, a contribuição do matemático português José Anastácio da Cunha (1744 – 1787) para uma primeira definição rigorosa de convergência de uma série.
Note-se que as contradições que existiam na Antiguidade sobre "somas infinitas" resultavam da ausência do conceito de limite, o qual apareceu séculos mais tarde, passando a desempenhar um papel central no Cálculo e na Análise Matemática.

certos casos é relativamente simples estudar a natureza da série e calcular mesmo a sua soma em caso de convergência.

Exemplo 3.1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente e tem soma igual a 1. Tal pode ser verificado seguindo os argumentos que conduziram a (3.4) (tomando $t = 1$ e observando que o primeiro termo é agora $\frac{1}{2}$).

Exemplo 3.2 A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ é divergente, visto que a sucessão das somas parciais associada não tem limite:

$$S_n = \begin{cases} -1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Exemplo 3.3 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente e tem soma igual a 1. De facto, como

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

($n \in \mathbb{N}$), então $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ e, portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Como mera informação e curiosidade, indicamos aqui outros exemplos de séries convergentes, algumas delas famosas na história e no desenvolvimento do Cálculo:

- Série dos inversos dos factoriais:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e \tag{3.5}$$

- Série "alternada" dos inversos dos naturais:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \ln 2 \tag{3.6}$$

- *Série de Gregory*:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots = \frac{\pi}{4} \tag{3.7}$$

- *Séries de Euler*:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

Mais adiante teremos oportunidade de provar, efetivamente, a convergência destas séries quando discutirmos *critérios de convergência*. No que respeita às respetivas somas, a sua confirmação apenas será feita com conhecimentos dos capítulos seguintes quando estudarmos séries cujos termos são funções. Voltaremos a este assunto quando tal se justificar.

As séries dos Exemplos 3.1 e 3.3 são casos particulares de certos tipos de séries cujo estudo vamos agora detalhar.

Séries geométricas. Chama-se *série geométrica* a toda a série que é gerada por uma progressão geométrica, ou seja, trata-se de uma série da forma

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \tag{3.8}$$

onde $a \neq 0$ é o *primeiro termo* e $r \in \mathbb{R}$ é a *razão*.
Convencionando $0^0 = 1$, podemos também representar a série geométrica (3.8) numa das formas

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty} ar^n.$$

Por exemplo, a série discutida no contexto do Paradoxo de Zenão é uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e com primeiro termo igual a t.

A natureza de uma série geométrica depende da sua razão. Tal pode ser justificado através de argumentos já usados anteriormente no estudo da série de razão $\frac{1}{2}$. Em geral, dada uma série geométrica de razão r (e primeiro termo a), para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$S_n = \begin{cases} n\,a, & \text{se} \quad r = 1 \\ a\dfrac{1-r^n}{1-r}, & \text{se} \quad r \neq 1. \end{cases}$$

Recordando o comportamento de r^n quando $n \to \infty$, conclui-se que:
A série geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ *converge se e só se* $|r| < 1$ *e, nesse caso, temos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

Exemplo 3.4 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

é uma série geométrica de razão $\frac{2}{3}$. Como $-1 < \frac{2}{3} < 1$ a série é convergente e tem soma $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$.

Exemplo 3.5 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{e}\right)^n$$

é uma série geométrica de razão $-\frac{\pi}{e}$. Esta série é divergente uma vez que $\left|-\frac{\pi}{e}\right| \geq 1$.

Séries redutíveis. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se *redutível* (ou *telescópica*, ou *de Mengoli*) se o termo geral a_n pode ser escrito numa das formas

$$a_n = u_n - u_{n+p} \quad \text{ou} \quad a_n = u_{n+p} - u_n$$

para alguma sucessão (u_n) e para algum $p \in \mathbb{N}$. A série do Exemplo 3.3 é uma série redutível (com $p = 1$ e $u_n = \frac{1}{n}$).

Considere-se o caso em que $a_n = u_n - u_{n+p}$ (o outro caso poderá ser tratada do mesmo modo). Após alguns cálculos simples, vemos que as somas parciais são dadas por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k+p}) = u_1 + \cdots + u_p - (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a série converge se e só se é convergente a sucessão de termo geral $u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}$ (lembrar que p está fixo). Nesse caso, a soma da série é

$$u_1 + \cdots + u_p - \lim_{n\to\infty} \big(u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}\big).$$

É claro que se (u_n) for ela própria convergente, então

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n+p}) = u_1 + \cdots + u_p - p \cdot \lim_{n\to\infty} u_n. \qquad \text{[Porquê?]}$$

Exemplo 3.6 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\Big)$$

é uma série telescópica convergente (e a sua soma é $\frac{25}{12}$).

Exemplo 3.7 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\ln n - \ln(n+1)\big)$$

é uma série telescópica divergente.

3.2 Propriedades gerais

Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, o que acontece se retirarmos "os primeiros termos"? Não é difícil provar que tal não altera a natureza da série, podendo, no entanto, alterar o valor da soma (no caso da série convergir).

Teorema 3.2 *Para qualquer $p \in \mathbb{N}$, as séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{p+n} + \cdots \tag{3.9}$$

têm a mesma natureza, i.e., ou são ambas convergentes ou ambas divergentes.

Exemplo 3.8 As séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \;,\; \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \;,\; \ldots,\; \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad (p \in \mathbb{N})$$

têm todas a mesma natureza. Tratando-se de séries geométricas de razão $\frac{1}{2}$, são todas convergentes, diferindo, naturalmente, no valor da soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \;,\; \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \;,\; \ldots \;,\; \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

A natureza de uma série não depende, portanto, de um (qualquer) número finito dos seus primeiros termos. Em caso de convergência, a soma da série do lado direito de (3.9) designa-se por **resto de ordem p da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$** e denota-se por R_p. Observe-se que, para qualquer $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = S_p + R_p.$$

A partir desta igualdade não é difícil mostrar o seguinte:

Teorema 3.3 *Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{p\to\infty} R_p = 0$.*

Seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ o termo geral da sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Uma vez que

$$a_1 = S_1, \qquad a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

se a sucessão das somas convergir, então (S_n) e (S_{n-1}) tendem para o mesmo limite (real). Daqui resulta que a sucessão (a_n) é, afinal, um infinitésimo. Acabámos de deduzir o seguinte *critério de convergência*:

Teorema 3.4 (condição necessária de convergência)
Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Observação 3.1 O Teorema 3.4 pode ser visto como um *teste de divergência*. De facto, podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente sempre que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Exemplo 3.9 A série

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{11}+\frac{3}{16}+\cdots+\frac{n}{5n+1}+\cdots$$

é divergente, uma vez que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{5n+1}=\frac{1}{5}\neq 0$.

Observação 3.2 Embora necessária, a condição $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ não é suficiente para a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (i.e., o recíproco do Teorema 3.4 é falso). Veja-se o que acontece, por exemplo, nos seguintes casos:
Temos $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0$ e, como vimos, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ é convergente.
Contudo, também temos $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, mas $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente. De facto,

$$\begin{aligned} S_n &= 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ parcelas}} \\ &= n\times\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\ \to +\infty. \end{aligned}$$

Face ao exposto é de registar o seguinte:

- *Se* (a_n) *não tem limite ou se* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*
- *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, *então nada se pode concluir sobre a natureza de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Pensemos agora em algumas operações com séries. Será que a "soma" de duas séries convergentes é ainda uma série convergente? A proposição seguinte, cuja prova se baseia nas propriedades dos limites de sucessões, dá resposta a esta e a outras questões.

Proposição 3.1

(i) *Se* $\lambda\in\mathbb{R}$ *e a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente, então* $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n$ *converge e*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n=\lambda\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(ii) *Se* $\lambda \neq 0$ *e a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente, então* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ *diverge.*

(iii) *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são ambas convergentes, então* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *converge e*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(iv) *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é divergente, então* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ *diverge.*

Observação 3.3 Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são ambas divergentes, então nada se pode concluir, em geral, quanto à natureza de $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$. Atenda-se aos seguintes exemplos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$$

são todas séries divergentes, mas

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n + 2n) \quad \text{diverge} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n + (-1)^{n+1}] \quad \text{converge.}$$ [Porquê?]

Exemplo 3.10 Uma vez que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ são convergentes (recordar os Exemplos 3.1 e 3.3), então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

é também convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - 1 = 0.$$

Exemplo 3.11 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

é divergente, pois $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverge [Porquê?] e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge.

3.3 Séries de termos não negativos

Como já tivemos oportunidade de observar, o objetivo principal é estudar a natureza de uma série. Em algumas situações o estudo pode ser feito diretamente a partir da definição (e.g., nos exemplos discutidos da Secção 3.1 e variantes destes). No entanto, são relativamente poucos os casos em que tal é possível devido à dificuldade em explicitar as somas parciais). Importa então conhecer métodos indiretos que permitam decidir se uma dada série é convergente ou divergente. Aliás, já vimos um resultado nesse sentido, nomeadamente o teste de divergência que resultou do Teorema 3.4. Vamos agora estudar mais alguns *critérios de convergência*.

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se de *termos não negativos* se $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Recordando que toda a sucessão (real) monótona e limitada é convergente, podemos provar facilmente o seguinte resultado:

Teorema 3.5 *Uma série de termos não negativos converge se, e só se, a sua sucessão das somas parciais é limitada superiormente.*

Exemplo 3.12 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente, visto que $\frac{1}{n!} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a sucessão (S_n) é limitada superiormente:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2\Big(1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^n\Big) \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observação 3.4 Da convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ resulta imediatamente a convergência da série indicada em (3.5).

O critério seguinte relaciona a natureza de séries (de termos não negativos) com a natureza de integrais impróprios (já estudados em Cálculo I).

Teorema 3.6 (Critério do Integral)
Sejam $a_n \geq 0$ e $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função decrescente tal que $f(n) = a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e o integral impróprio $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ têm a mesma natureza.

Exemplo 3.13 *[séries de Dirichlet]* Vamos usar o Critério do Integral para estudar as chamadas *séries de Dirichlet*[32]:

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$, podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{é:} \quad \begin{cases} \text{convergente} & \text{se} \quad \alpha > 1, \\ \text{divergente} & \text{se} \quad \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Em particular, a chamada **série harmónica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

No Exemplo 3.12 usou-se um argumento que passou, de certo modo, por comparar as somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ com as somas parciais da série geométrica de razão $\frac{1}{2}$. O critério seguinte esclarece em que condições podemos usar técnicas de comparação para estudar a natureza de uma série.

Teorema 3.7 (Critério de Comparação)
Suponha-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \qquad \textit{para todo } \; n \geq n_0.$$

Então:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge* $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge* $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge.*

Exemplo 3.14 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$$

é convergente. A conclusão resulta do Critério de Comparação tendo em conta a desigualdade

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e a convergência da série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

[32]Estas séries são também conhecidas como *séries harmónicas de ordem α*.

Exemplo 3.15 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

é divergente. Novamente isto resulta do Critério de Comparação, observando agora a desigualdade

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e a divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$. [Porquê?]

Observação 3.5 O Critério de comparação nada diz nas situações em que a série de termo geral mais pequeno é convergente, ou quando a série de termo geral maior é divergente.

A comparação dos termos gerais de duas séries pode também ser feita na forma de limite do seguinte modo:

Corolário 3.8 (comparação por passagem ao limite)
Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tais que $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha-se que existe o limite

$$\ell := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Então:

(i) *Se $\ell \in]0, +\infty[$, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são da mesma natureza.*

(ii) *Se $\ell = 0$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

(iii) *Se $\ell = +\infty$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

Exemplo 3.16 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{1+n^4}$$

é convergente. A conclusão resulta da comparação por passagem ao limite com a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. De facto, como

$$\frac{2n+5}{1+n^4} \geq 0\ , \quad \frac{1}{n^3} > 0\ , \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+5}{1+n^4}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+5n^3}{1+n^4} = 2 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série dada tem a mesma natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (que é convergente, como vimos no Exemplo 3.13).

Exemplo 3.17 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$$

é convergente. Tal decorre da comparação por passagem ao limite com a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (a qual é convergente), uma vez que

$$\frac{1}{2^n+3^n} \geq 0\ ,\quad \frac{1}{2^n} > 0\ ,\quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n+3^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n+3^n} = 0.$$

Exemplo 3.18 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\big(1/n\big)$$

é divergente. A conclusão decorre novamente por comparação por passagem ao limite, agora com a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. De facto, temos

$$\operatorname{sen}\big(1/n\big) \geq 0\ ,\quad \frac{1}{n} > 0\ ,\quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

pelo que a série dada tem a mesma natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

3.4 Convergência simples e absoluta

Enquanto que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

é convergente (cf. Exemplo 3.26), a série obtida a partir desta por substituição de cada termo pelo seu módulo (i.e., a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$) é divergente. Isto mostra que, em geral, a convergência de uma dada série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ não implica a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. No entanto, em sentido oposto, é válido o seguinte resultado, o qual poderá ser justificado usando operações com séries e o critério de comparação:

Proposição 3.2 *Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente, então também é convergente a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e tem-se*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Repare-se que a proposição anterior generaliza às séries uma desigualdade há muito conhecida para somas com um número finito de termos.

Face ao exposto importará então distinguir entre dois conceitos de convergência (não equivalentes).

Definição 3.9 (convergência absoluta; convergência simples) [33] *Diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **absolutamente convergente** se a série dos módulos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **simplesmente convergente** se for convergente e a sua série dos módulos for divergente.*

Exemplo 3.19 Qualquer série convergente de termos não negativos é absolutamente convergente.

Exemplo 3.20 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

é absolutamente convergente.

[33] Uma das vantagens de uma série absolutamente convergente reside no facto de ela continuar a convergir perante qualquer reordenação dos seus termos. Esta propriedade não é garantida com a mera convergência simples. Em geral, a convergência absoluta assegura a validade das propriedades já conhecidas da adição (comutatividade, associatividade, etc.) de um número finito de termos.

Exemplo 3.21 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

é simplesmente convergente, uma vez que é convergente (cf. Exemplo 3.26) e a sua série dos módulos, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, é divergente.

Teorema 3.10 (Critério de D'Alembert)
Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não nulos. Suponhamos que existe o limite

$$\ell := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Então:

(i) *Se $\ell < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.*

(ii) *Se $\ell > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.*

Exemplo 3.22 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

é (absolutamente) convergente, pois

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Note-se que da convergência daquela série podemos concluir que $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. [Porquê?]

Exemplo 3.23 As séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\beta^n} \qquad (\beta \neq 0)$$

são divergentes, pois

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{\beta^{(n+1)}}}{\frac{n!}{\beta^n}} \right| = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|\beta|} = +\infty.$$

Observação 3.6 Se $\ell = 1$ não podemos tirar qualquer conclusão (a partir do Critério de D'Alembert). Veja-se, por exemplo, o que acontece com as séries de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = 1$$

para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. No entanto, como já se sabe, a série converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.

Teorema 3.11 (Critério da Raiz)
Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de números reais. Suponhamos que existe o limite*

$$\ell := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Então:

(i) *Se* $\ell < 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente.*

(ii) *Se* $\ell > 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

Exemplo 3.24 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)^{2n}$$

é (absolutamente) convergente, pois

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)^{2n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1.$$

Exemplo 3.25 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

é divergente, já que

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1.$$

Observação 3.7 Tal como no Critério de D'Alembert, nada podemos concluir através do critério anterior quando $\ell = 1$ (basta considerar novamente as séries de Dirichlet para verificar isso mesmo).

3.5 Séries alternadas

Uma **série alternada** é uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

em que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

O resultado seguinte dá-nos condições suficientes para a convergência de uma série alternada.

Teorema 3.12 (Critério de Leibniz)
Suponhamos que (a_n) é uma sucessão de termos positivos, monótona decrescente e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Então a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ é convergente. Além disso, se S representa a sua soma e S_n a n-ésima soma parcial, então verifica-se

$$0 < (-1)^n(S_n - S) < a_{n+1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Observação 3.8 Note-se que (3.10) diz-nos que o erro que se comete ao aproximar a soma da série por uma qualquer soma parcial não excede o módulo do primeiro termo que se despreza. Além disso, a aproximação será por excesso se esse termo for negativo e por defeito se for positivo.

Exemplo 3.26 A série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

(a indicada em (3.6)) é convergente. De facto, como a sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)$ é de termos positivos, monótona decrescente e $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, a conclusão sai pelo Critério de Leibniz. Além disso, tendo em conta a Observação 3.8, sabe-se também que a soma desta série se situa, por exemplo, entre $S_9 = 0,745(634920)$ e $S_{10} = 0,645(634920)$. Na verdade, tal como indicado em (3.6), a sua soma é exatamente $\ln 2 = 0,693147180\ldots$.

3.6 Material complementar

Nesta secção apresentamos algum material complementar sobre séries numéricas. Em primeiro lugar iremos ver como, em certos casos, podemos obter aproximações do valor da soma de uma série. Posteriormente, teremos oportunidade de observar como é que as séries aparecem na representação decimal de números reais.

3.6.1 Aproximação da soma de uma série

Muitas vezes sabemos que uma dada série é convergente (por aplicação dos critérios de convergência), mas desconhecemos o valor da sua soma. Ora, em algumas situações é suficiente conhecer uma aproximação da soma, desde que se tenha alguma ideia do erro que se está a cometer nessa aproximação. Vamos ver que o estudo do resto de uma série pode fornecer informação importante neste sentido.

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente de termos positivos (i.e., $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Suponha-se que existem $M \in [0,1[$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq M\,, \qquad \text{para todo} \;\; n > p.$$

Recordando o conceito de resto de uma série (discutido no início da Secção 3.2), temos

$$\begin{aligned} R_p &= a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3} + \cdots \\ &= a_{p+1}\left(1 + \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} + \frac{a_{p+3}}{a_{p+1}} + \cdots\right) \\ &= a_{p+1}\left(1 + \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} + \frac{a_{p+3}}{a_{p+2}} \cdot \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} + \cdots\right) \\ &\leq a_{p+1}\left(1 + M + M^2 + \cdots\right). \end{aligned}$$

Daqui obtemos a seguinte fórmula de majoração para o resto de ordem p:

$$R_p \leq \frac{a_{p+1}}{1-M}.$$

Exemplo 3.27 (aproximação da soma de uma série) A série (de termos positivos)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

é convergente (recordar o Exemplo 3.12). Podemos agora aproximar o valor da sua soma, S, usando a fórmula de majoração do resto. Ora,

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então, para qualquer p, temos

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{p!} + R_p$$

e, portanto,

$$S - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{p!} \right) = R_p \leq \frac{\frac{1}{(p+1)!}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{(p+1)!}.$$

Por exemplo, tomando $p = 3$, conclui-se que

$$S \simeq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \qquad \text{e} \qquad S - \frac{5}{3} \leq \frac{2}{(3+1)!} = \frac{1}{12}.$$

Repare-se que, pela informação dada em (3.5) (que será apenas confirmada nos capítulos seguintes), o valor (exato) da soma é $S = e - 1$.

3.6.2 Representação de dízimas infinitas periódicas

Todo o número real não negativo x pode ser aproximado por um número da forma

$$r_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

onde a_0 é um inteiro (não negativo), $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ e $n \in \mathbb{N}_0$. Este último pode ser escrito de forma mais compacta através da seguinte *representação decimal* (finita):

$$r_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n. \tag{3.11}$$

O número r_n pode ser escolhido tão próximo de x quanto se queira, tomando n suficientemente grande. Embora não se pretenda aqui entrar em muitos detalhes, podemos constatar este processo de aproximação usando um argumento "geométrico" relativamente simples. Vejamos: se x é ele próprio inteiro, então basta tomar $a_0 = x$ e os restantes dígitos nulos (para qualquer $n \geq 1$). Se x não é inteiro, então situa-se entre dois inteiros consecutivos, digamos $a_0 < x < a_0 + 1$. Pensando na reta real, podemos agora dividir o segmento correspondente a a_0 e $a_0 + 1$ em dez partes iguais. Se x coincidir com algum dos pontos resultantes dessa divisão o processo termina, caso contrário teremos

$$a_0 + \frac{a_1}{10} < x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}$$

para algum $a_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Prosseguimos subdividindo em dez partes iguais o segmento correspondente aos pontos $a_0 + \frac{a_1}{10}$ e $a_0 + \frac{a_1+1}{10}$. O processo terminará se x coincidir com um dos pontos desta última divisão. Se não for o caso, continua-se o processo. Este procedimento poderá repetir-se indefinidamente, gerando uma representação decimal de x da forma

$$x = a_0, a_1 a_2 \ldots \tag{3.12}$$

(com $a_0 \in \mathbb{N}_0$ e $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ para todo $k \geq 1$). Após a n-ésima subdivisão teremos

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n + 1}{10^n},$$

em que o lado esquerdo da primeira desigualdade corresponde à tal aproximação r_n. Subtraindo r_n a cada um dos membros das desigualdades anteriores, obtemos

$$0 \leq x - r_n < \frac{1}{10^n}.$$

Daqui resulta que $r_n \to x$ quando $n \to \infty$. Assim, x é dado pela soma da série

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}.$$

Se x for um número racional, então x admite uma representação decimal envolvendo uma dízima finita ou infinita periódica (i.e., do tipo (3.11) para certo n, ou então do tipo (3.12) em que uma sequência de um ou mais dígitos se repete indefinidamente). Reciprocamente, representações decimais envolvendo dízimas deste tipo representam sempre um número racional e, portanto, podem escrever-se na forma $\frac{p}{q}$ para alguns inteiros p, q (com $q \neq 0$).

Nos exemplos seguintes podemos observar a utilidade das séries geométricas nestas situações.

Exemplo 3.28 Vamos exprimir $0,(7) = 0,777\ldots$ como um quociente entre dois inteiros.

$$\begin{aligned} 0,(7) &= 0,7 + 0,07 + 0,007 + \cdots \\ &= \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \cdots \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.29 Para a representação decimal $1,(24) = 1,242424\ldots$ temos:

$$\begin{aligned} 1,(24) &= 1 + 0,24 + 0,0024 + 0,000024 + \cdots \\ &= 1 + \frac{24}{100} + \frac{24}{100^2} + \frac{24}{100^3} + \cdots \\ &= 1 + \frac{24}{100} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} \\ &= \frac{41}{33}. \end{aligned}$$

Fica como exercício justificar que $0,(9) = 0,999\ldots = 1$.