

1. Determine o termo geral da sucessão das somas parciais, S_n , e a soma S (se possível) de cada uma das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2n$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-2n+3}$;

(d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$;

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} \right)$;

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

2. Calcule, se possível, a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1} + b_n \right]$, sabendo que a sucessão das somas parciais associadas à série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é dada por $S_n = \sqrt[n]{\frac{e}{n^n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica, convergente e de soma igual a S . Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[3a_n + \frac{2}{3^n} \right]$.

4. Determine, se existir, a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, onde

$$u_n = \begin{cases} 1 + 2(n-1) & \text{se } n < 4 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}.$$

5. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{(a+1)^n}$ (onde a é um parâmetro real, com $a \neq -1$).

- (a) Determine os valores de a para os quais a série dada é convergente.
(b) Para um dos valores encontrados na alínea anterior, determine a soma da série.

6. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- (a) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais.
- i. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, então a série converge.
 - ii. Se a série converge, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
 - iii. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$, então a série diverge.
- (b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e só se:
- i. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = 0$;
 - ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k < 1$;
 - iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S \in \mathbb{R}$.

7. Estude a natureza das séries seguintes:

- (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{3n^2 - 2}}$
- (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 + 2n)^{\frac{1}{n}}$
- (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n^2 \pi}{2} \right)$
- (d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$
- (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$
- (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^5 + n^3}}$
- (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$
- (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[(-1)^n + 5]^n}$
- (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}$
- (j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$
- (k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{n+1} \right)^{n^3}$

- (l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n} \quad (0 < b < 1)$
- (m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{d^n} \quad (d > 0)$
- (n) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^n$
- (o) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$
- (p) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
- (q) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$
- (r) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{50} \right)}{2^n}$
- (s) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$
- (t) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n! + n - 1}$
- (u) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n + 1}{2^n - 1}$
- (v) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n \cos(n\alpha)}{n^{2n}}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}$
- (w) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\text{arctg } n}{n^2 + 1}$

8. Estude a natureza das séries seguintes:

- (a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4+1} + \frac{5}{9+1} + \frac{7}{16+1} + \dots$
- (b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$

9. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos, tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{3}$

e $a_n = b_n + \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$.

10. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso afirmativo, indique se são absolutamente ou simplesmente convergentes:

- (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$
- (b) $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$

- (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}$
- (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{e^n + 1}$
- (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^2$
- (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$
- (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$
- (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$

11. Sabendo que as sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são tais que

$$\sum_{n=1}^8 a_n = 15, \quad a_n = \left(\frac{3}{2} \right)^n, \quad \text{para } n \geq 9 \quad \text{e} \quad b_n > a_n, \quad \text{para } n > 20,$$

estude a natureza das séries numéricas $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

12. Considere as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2 + 1}$.

(a) Estude a natureza de cada uma das séries.

(b) Indique o limite do termo geral das séries.

(c) Sendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{n!}{n^n} + b_n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2 + 1}$, indique a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Justifique.

13. Uma bola de borracha cai de uma altura de 10 metros. Sempre que bate no chão, a bola sobe $2/3$ da última distância descida. Qual é a distância total percorrida pela bola (até ficar em repouso)?

14. (*Exame de Recurso, julho de 2010*)

Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_1 \neq 0$ e $a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} a_n$, para

todo $n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

15. (*1.º teste, março de 2011*)

Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + n^2}{3^n n^2}$ sabendo que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

16. Estude a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta) das seguintes séries numéricas:

- (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ (*Exame de Recurso, julho de 2011*);
- (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+3n^2+4}$ (*1.º teste, março de 2011*);
- (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)!}$ (*1.º teste, março de 2011*).