

# Aula 07

## Estruturas de dados recursivas

### *Listas ligadas*

*Programação II, 2020-2021*

2021-04-20

#### Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:

removeFirst

#### Polimorfismo

#### Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

## Lista Ligada

Implementação: `addFirst`

Implementação: `addLast`

Implementação:  
`removeFirst`

## Polimorfismo Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

## 1 Lista Ligada

Implementação: `addFirst`

Implementação: `addLast`

Implementação: `removeFirst`

## 2 Polimorfismo Paramétrico

## 3 Processamento recursivo de listas

# Como guardar colecções de dados?

## Lista Ligada

Implementação: `addFirst`

Implementação: `addLast`

Implementação:

`removeFirst`

Polimorfismo

Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- Temos utilizado vectores (***arrays***).
- Permitem guardar elementos preservando a sua ordem.
- Permitem **acesso aleatório**, i.e., acesso direto rápido a qualquer elemento, por qualquer ordem.
- No entanto, os **vectores têm limitações**:
  - A sua capacidade tem de ser fixada quando são criados.
  - Isto obriga a sobredimensionar um vector quando o número de elementos não é conhecido à partida.
  - Ou então, redimensionar o vector quando chegam novos elementos, com custos em tempo de processamento.
  - Inserir ou remover elementos numa posição intermédia pode demorar bastante tempo se for necessário deslocar muitos elementos.

## Lista Ligada

Implementação: `addFirst`

Implementação: `addLast`

Implementação:

`removeFirst`

Polimorfismo

Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- Estrutura de dados sequencial em que cada elemento da lista contém uma referência para o próximo elemento.
  - No último elemento, a referência é `null`.
- Ao contrário do vector, é completamente **dinâmica**.
- No entanto, obriga a um **acesso sequencial**.
- Recorre a uma estrutura auxiliar (um *nó*) para armazenar cada elemento.
- O nó é uma estrutura de dados **recursiva**, dado que a sua definição contém uma referência para si própria.

# Lista ligada simples: exemplo

## Lista Ligada

Implementação: `addFirst`

Implementação: `addLast`

Implementação:  
`removeFirst`

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas



# Lista ligada simples: exemplo

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

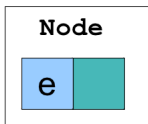
Implementação:

removeFirst

Polimorfismo

Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas



# Lista ligada simples: exemplo

## Lista Ligada

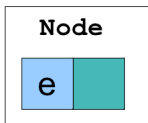
Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas



```
class Node
{
    int e;
    Node next;
}
```



## Lista Ligada

Implementação: `addFirst`

Implementação: `addLast`

Implementação:  
`removeFirst`

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- Exemplo: lista com os elementos 3, 7 e 1.
- A lista possui acesso direto ao primeiro e último elementos.
- É fácil acrescentar elementos no início e no fim da lista.
- É fácil remover elementos do início da lista.



## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:

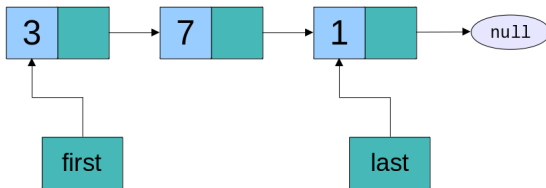
removeFirst

Polimorfismo

Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- Exemplo: lista com os elementos 3, 7 e 1.



- A lista possui acesso direto ao primeiro e último elementos.
- É fácil acrescentar elementos no início e no fim da lista.
- É fácil remover elementos do início da lista.

# Nós para uma lista de inteiros

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

```
class NodeInt {  
  
    final int elem;  
    NodeInt next;  
  
    NodeInt(int e, NodeInt n) {  
        elem = e;  
        next = n;  
    }  
  
    NodeInt(int e) {  
        elem = e;  
        next = null;  
    }  
}
```

## Lista Ligada

Implementação: `addFirst`

Implementação: `addLast`

Implementação:  
`removeFirst`

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- Nome do módulo:
  - `LinkedList`
- Serviços:
  - `addFirst`: insere um elemento no início da lista.
  - `addLast`: insere um elemento no fim da lista.
  - `first`: devolve o primeiro elemento da lista.
  - `last`: devolve o último elemento da lista.
  - `removeFirst`: retira o elemento no início da lista.
  - `size`: devolve a dimensão actual da lista.
  - `isEmpty`: verifica se a lista está vazia.
  - `clear`: limpa a lista (remove todos os elementos).

### Lista Ligada

Implementação: `addFirst`

Implementação: `addLast`

Implementação:  
`removeFirst`

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- **`addFirst(v)`**
  - Pós-condição: `!isEmpty() && (first() == v)`
- **`addLast(v)`**
  - Pós-condição: `!isEmpty() && (last() == v)`
- **`removeFirst()`**
  - Pré-condição: `!isEmpty()`
- **`first()`**
  - Pré-condição: `!isEmpty()`

# Lista de inteiros: esqueleto da implementação

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

```
public class LinkedListInt {
    private NodeInt first=null, last=null;
    private int size;

    public LinkedListInt() { }
    public void addFirst(int e) {
        ...
        assert !isEmpty() && first()==e;
    }
    public void addLast(int e) {
        ...
        assert !isEmpty() && last()==e;
    }
    public int first() {
        assert !isEmpty();
        ...
    }
    public int last() {
        assert !isEmpty();
        ...
    }
    public void removeFirst() {
        assert !isEmpty();
        ...
    }
    public boolean isEmpty() { ... }
    public int size() { ... }
    public void clear() {
        ...
        assert isEmpty();
    }
}
```

# Implementação de lista ligada: addFirst

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

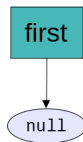
Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- `addFirst` - inserir o primeiro elemento.

`addFirst(6)`

`size == 0`



# Implementação de lista ligada: addFirst

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

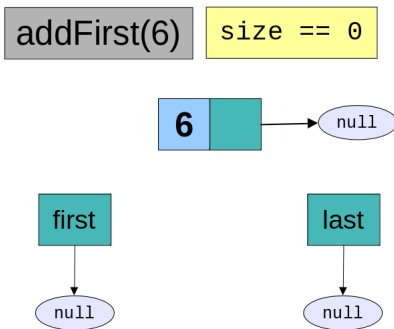
Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- addFirst - inserir o primeiro elemento.



# Implementação de lista ligada: addFirst

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

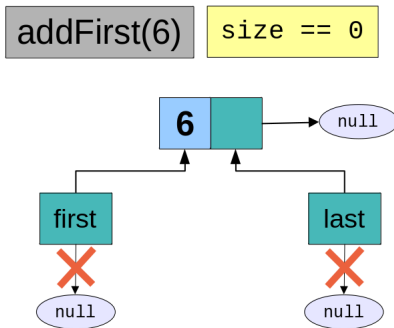
Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- addFirst - inserir o primeiro elemento.





# Implementação de lista ligada: addFirst

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

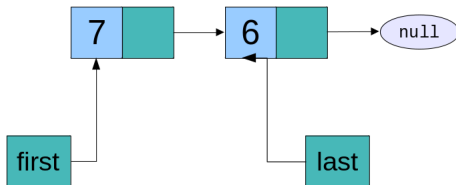
Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- addFirst - inserir novo elemento no início.



# Implementação de lista ligada: addFirst

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

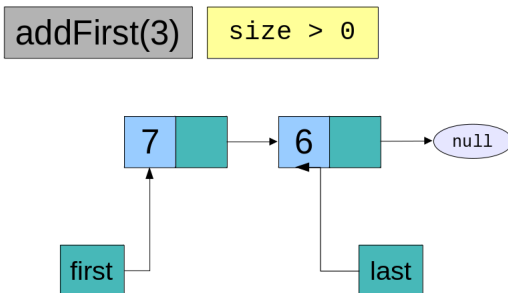
Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- `addFirst` - inserir novo elemento no início.



# Implementação de lista ligada: addFirst

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

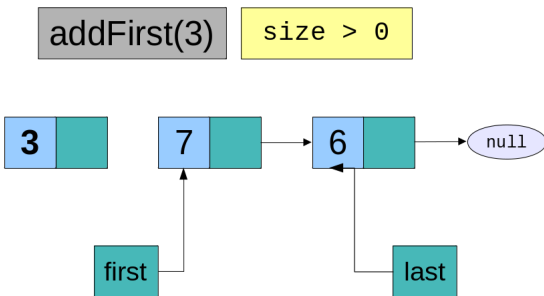
Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- `addFirst` - inserir novo elemento no início.



# Implementação de lista ligada: addFirst

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

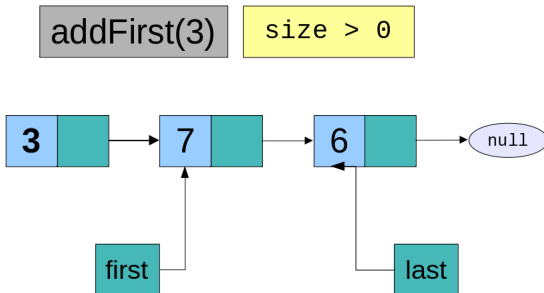
Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- addFirst - inserir novo elemento no início.



# Implementação de lista ligada: addFirst

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

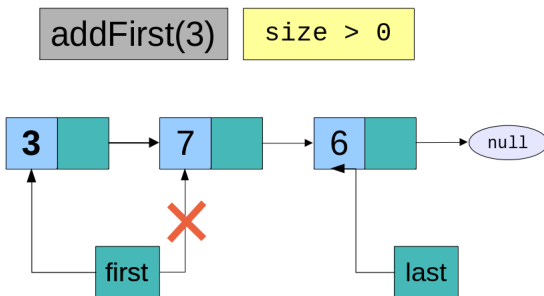
Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- addFirst - inserir novo elemento no início.



# Implementação de lista ligada: addLast

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

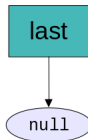
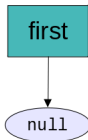
Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- addLast - acrescentar novo elemento no fim.
- Caso de lista vazia: similar a addFirst.

**addLast(1)**

size == 0



# Implementação de lista ligada: addLast

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

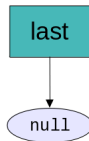
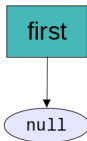
Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- addLast - acrescentar novo elemento no fim.
- Caso de lista vazia: similar a addFirst.

**addLast(1)**

size == 0



# Implementação de lista ligada: addLast

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

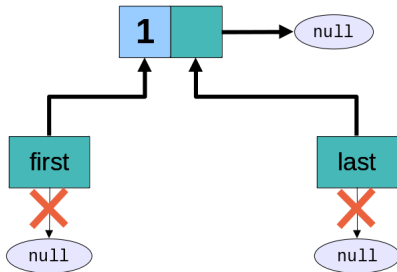
Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- addLast - acrescentar novo elemento no fim.
- Caso de lista vazia: similar a addFirst.

**addLast(1)**

size == 0





# Implementação de lista ligada: addLast

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- addLast - acrescentar novo elemento no fim.

**addLast(4)**

size > 0

# Implementação de lista ligada: addLast

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

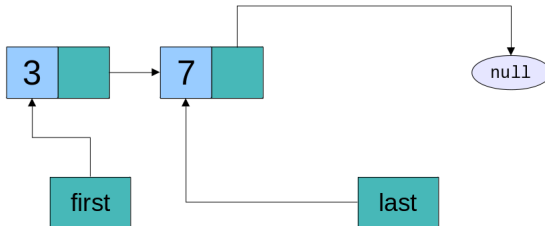
Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- addLast - acrescentar novo elemento no fim.

**addLast(4)**

size > 0



# Implementação de lista ligada: addLast

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

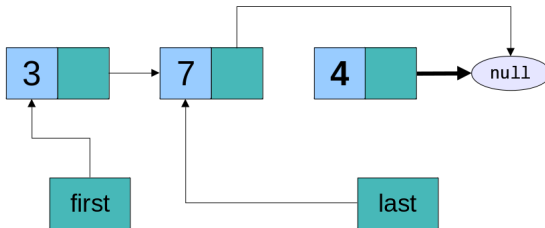
Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- addLast - acrescentar novo elemento no fim.

**addLast(4)**

size > 0



# Implementação de lista ligada: addLast

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

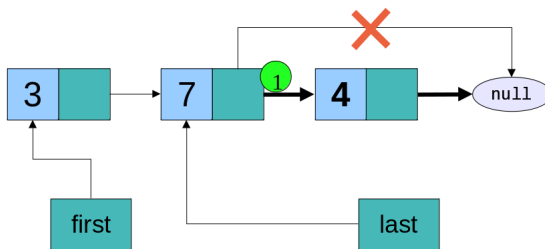
Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- addLast - acrescentar novo elemento no fim.

**addLast(4)**

size > 0



# Implementação de lista ligada: addLast

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

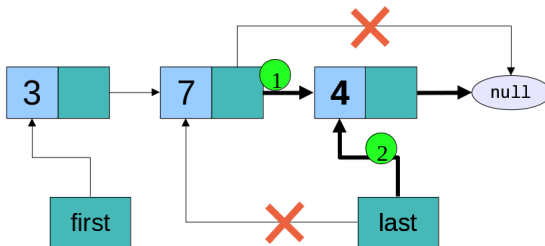
Polimorfismo  
Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

- addLast - acrescentar novo elemento no fim.

**addLast(4)**

size > 0



# Implementação de lista ligada: `removeFirst`

## Lista Ligada

Implementação: `addFirst`

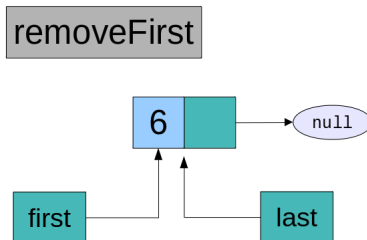
Implementação: `addLast`

Implementação:  
`removeFirst`

## Polimorfismo Paramétrico

## Processamento recursivo de listas

- `removeFirst` - remover o primeiro elemento.
- Quando `size==1`



# Implementação de lista ligada: `removeFirst`

## Lista Ligada

Implementação: `addFirst`

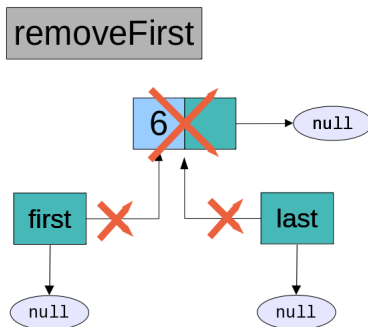
Implementação: `addLast`

Implementação:  
`removeFirst`

## Polimorfismo Paramétrico

## Processamento recursivo de listas

- `removeFirst` - remover o primeiro elemento.
- Quando `size==1`



# Implementação de lista ligada: `removeFirst`

## Lista Ligada

Implementação: `addFirst`

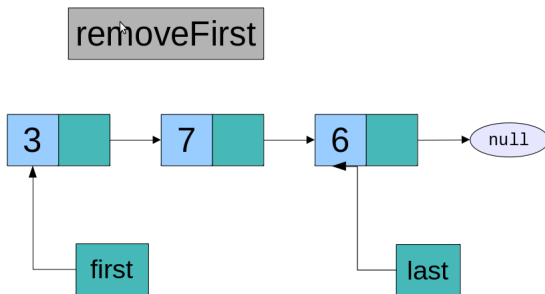
Implementação: `addLast`

Implementação:  
`removeFirst`

## Polimorfismo Paramétrico

## Processamento recursivo de listas

- `removeFirst` - remover o primeiro elemento.
- Quando `size > 1`





## Implementação de lista ligada: `removeFirst`

### Lista Ligada

Implementação: `addFirst`

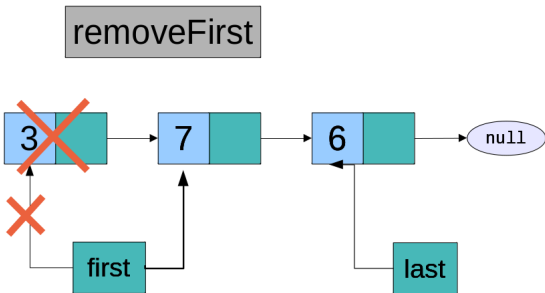
Implementação: `addLast`

Implementação:  
`removeFirst`

### Polimorfismo Paramétrico

### Processamento recursivo de listas

- `removeFirst` - remover o primeiro elemento.
- Quando `size > 1`



# Lista de inteiros: implementação completa

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

## Polimorfismo Paramétrico

## Processamento recursivo de listas

```
public class LinkedListInt {

    public void addFirst(int e) {
        first = new NodeInt(e, first);
        if (size == 0)
            last = first;
        size++;

        assert !isEmpty() && first() == e;
    }

    public void addLast(int e) {
        NodeInt n = new NodeInt(e);
        if (size == 0)
            first = n;
        else
            last.next = n;
        last = n;
        size++;

        assert !isEmpty() && last() == e;
    }

    public int size() {
        return size;
    }

    public boolean isEmpty() {
        return size == 0;
    }
}
```

```
public void removeFirst() {
    assert !isEmpty();

    first = first.next;
    size--;
    if (first == null)
        last = null;
}

public int first() {
    assert !isEmpty();

    return first.elem;
}

public int last() {
    assert !isEmpty();

    return last.elem;
}

public void clear() {
    first = last = null;
    size = 0;
}

private NodeInt first = null;
private NodeInt last = null;
private int size = 0;
}
```

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

## Polimorfismo Paramétrico

### Processamento recursivo de listas

- **Problema:** A classe `LinkedListInt`:
  - Permite guardar apenas elementos inteiros.
  - Para termos listas com elementos de outros tipos, teríamos de duplicar o código e fazer pequenas alterações para adaptar ao tipo pretendido.
  - O código seria praticamente igual, mas **não é prático** fazer esta “clonagem” de código para cada nova necessidade.
- **Solução:** Definir classes aplicáveis a qualquer tipo.
  - Diz-se que são classes parametrizadas por tipo, ou seja, o tipo de elemento passa a ser um parâmetro da classe.
  - As estruturas e funções passam a ser polimórficas.
  - Este mecanismo é conhecido como **polimorfismo paramétrico**.

## Tipos genéricos em Java

- Em Java, as classes que têm parâmetros que representam tipos são chamadas **classes genéricas**.
- Na *definição* de uma classe genérica, os **parâmetros de tipo** são indicados a seguir ao nome, entre < e >.

```
public class LinkedList<E> {           // generic class definition
    ...
    public void addFirst(E e) {        // use of type parameter E
        ...
    }
    ...
}
```

- Na *invocação e instanciação* de um tipo genérico os parâmetros são substituídos por **argumentos de tipo** concretos.

```
public static void main(String args[]) {
    ...
    LinkedList<Double> p1;              // generic type invocation
    p1 = new LinkedList<Double>();      // generic type instantiation
    ...
    LinkedList<Integer> p2 = new LinkedList<Integer>();
}
```

### Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:

removeFirst

### Polimorfismo Paramétrico

Processamento  
recursivo de listas

# Convenção sobre nomes de parâmetros de tipo

## Lista Ligada

Implementação: `addFirst`

Implementação: `addLast`

Implementação:  
`removeFirst`

## Polimorfismo Paramétrico

## Processamento recursivo de listas

- Em Java, por convenção, usam-se letras maiúsculas para os nomes dos parâmetros de tipo. Por exemplo:
  - E - *element*
  - K - *key*
  - N - *number*
  - T - *type*
  - V - *value*
- Assim, mais facilmente se distingue um nome que representa um tipo de outro que representa uma variável ou método, que começam (também por convenção) com letra minúscula (exemplo: `numberOfElements`).
- Para informação mais detalhada pode consultar o [tutorial da Oracle sobre tipos genéricos](#).

- **Problema:** Não é possível instanciar tipos genéricos com argumentos de tipos primitivos! (int, short, long, byte, boolean, char, float, double);

```
LinkedList<int> lst = new LinkedList<>(); // ERRO!
```

- **Solução:**
  - Utilizar os tipos referência correspondentes (Integer, Double, etc.).

```
LinkedList<Integer> lst = new LinkedList<>(); // OK!
```

- A linguagem faz a conversão automática entre os tipos primitivos e os tipos referência respectivos (*boxing* e *unboxing*).

- **Problema:** Não é possível criar arrays genéricos!

```
T[] a = new T[maxSize]; // ERRO!
```

- **Solução:**
  - Criar arrays de elementos do tipo Object e fazer a coerção de tipo para o *array* genérico:

```
T[] a = (T[]) new Object[maxSize];
```

- Para evitar o aviso gerado pelo compilador como resultado desta coerção pode-se associar ao método onde a coerção é feita a seguinte anotação:

```
@SuppressWarnings("unchecked")  
public Matrix<T>() { ... }
```

- O tutorial oficial tem mais informação sobre estas e outras restrições na utilização de genéricos.

# Lista ligada genérica: implementação completa

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:  
removeFirst

## Polimorfismo Paramétrico

## Processamento recursivo de listas

```
public class LinkedList<E> {

    public void addFirst(E e) {
        first = new Node<>(e, first);
        if (size == 0)
            last = first;
        size++;

        assert !isEmpty() && first().equals(e);
    }

    public void addLast(E e) {
        Node<E> n = new Node<>(e);
        if (size == 0)
            first = n;
        else
            last.next = n;
        last = n;
        size++;

        assert !isEmpty() && last().equals(e);
    }

    public int size() {
        return size;
    }

    public boolean isEmpty() {
        return size() == 0;
    }
}
```

```
    public void removeFirst() {
        assert !isEmpty();

        first = first.next;
        size--;
        if (isEmpty())
            last = null;
    }

    public E first() {
        assert !isEmpty();

        return first.elem;
    }

    public E last() {
        assert !isEmpty();

        return last.elem;
    }

    public void clear() {
        first = last = null;
        size = 0;
    }

    private Node<E> first = null;
    private Node<E> last = null;
    private int size = 0;
}
```



## Lista Ligada

Implementação: `addFirst`

Implementação: `addLast`

Implementação:  
`removeFirst`

## Polimorfismo Paramétrico

## Processamento recursivo de listas

- Quando a acção a realizar implica aceder ao meio da lista, é preciso percorrer a lista até ao nó que vai ser alterado.
- Sendo uma estrutura recursiva, as listas prestam-se naturalmente à utilização de algoritmos recursivos.
- **Exemplo:** saber se um elemento `e` existe na lista.
  - Condições de terminação da recursividade:
    - Chegou ao fim da lista (devolve `false`), ou
    - Encontrou o elemento `e` (devolve `true`).
  - Variabilidade: passar do nó actual (`n`) ao seguinte (`n.next`).
  - Convergência: está garantida, desde que haja forma de detetar o fim da lista.

## Exemplo: lista contém elemento

### Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:

removeFirst

### Polimorfismo

### Paramétrico

### Processamento recursivo de listas

- Versão recursiva:

```
public boolean contains(E e) {  
    return contains(first, e);  
}  
  
private boolean contains(Node<E> n, E e) {  
    if (n == null) return false;           // condicao terminacao 1  
    if (n.elem.equals(e)) return true;     // condicao terminacao 2  
    return contains(n.next, e);           // chamada recursiva  
}
```

- Versão iterativa:

```
public boolean contains(E e) {  
    Node<E> n = first;  
    while (n != null) {                    // condicao terminacao 1  
        if (n.elem.equals(e)) return true; // condicao terminacao 2  
        n = n.next;                       // continuacao  
    }  
    return false;  
}
```

# Um padrão que se repete...

## Lista Ligada

Implementação: addFirst

Implementação: addLast

Implementação:

removeFirst

## Polimorfismo

## Paramétrico

## Processamento recursivo de listas

- Muitas funções sobre listas fazem uma travessia da lista.
- Essa travessia segue um padrão que convém desde já assimilar.

### Implementação Iterativa

```
public class LinkedList<E> {  
    ...  
    public ... xpto(...) {  
        Node<E> n = first;  
        ...  
        while (n!=null && ...) {  
            ...  
            n = n.next;  
        }  
        return ...;  
    }  
    ...  
}
```

### Implementação Recursiva

```
public class LinkedList<E> {  
    ...  
    public ... xpto(...) {  
        return xpto(first, ...);  
    }  
    private ... xpto(Node<E> n, ...) {  
        if (n == null) return ...;  
        ...  
        ... xpto(n.next, ...);  
        return ...  
    }  
    ...  
}
```