

Capítulo 4

Cuadriláteros

Contenido breve

Módulo 14

Paralelismo y perpendicularidad

Módulo 15

Ángulos especiales

Módulo 16

Propiedades de cuadriláteros

Módulo 17

Rectas y puntos notables

Autoevaluación

Capítulo 4, módulos 14 al 17

Presentación



En este capítulo se presenta quizás el postulado que más polémica ha causado —el 5° postulado de Euclides o postulado de las paralelas—, el cual ha creado la independencia de las geometrías y ha dado lugar a las geometrías no euclidianas.

Si la paralela por el punto exterior de una recta es única, se tiene la geometría euclidiana; si no es única, entonces aparece la geometría de Lovachesky; y si no pasa ninguna, se origina la geometría rimaniana. Las paralelas cortadas por transversales permiten determinar las medidas de los ángulos formados y las de los polígonos, al aplicar la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Al final del capítulo se analizan los puntos y rectas notables en el triángulo, así como las condiciones mínimas que debe cumplir un cuadrilátero para ser un paralelogramo. Se analizan los teoremas de la paralela y la base media en un triángulo y en un trapecio, respectivamente.

Módulo 14

Paralelismo y perpendicularidad

Contenidos del módulo

- 14.1 Rectas perpendiculares
- 14.2 Rectas paralelas

Objetivos del módulo

1. Identificar rectas perpendiculares y rectas paralelas.
2. Diferenciar rectas perpendiculares, paralelas y oblicuas.
3. Relacionar rectas paralelas y perpendiculares.
4. Aplicar la demostración por reducción al absurdo.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es una recta perpendicular levantada por un punto de una recta?
2. ¿Cómo se levanta (traza) dicha perpendicular? (módulo 28, apartado 28.4)
3. ¿Qué es una perpendicular bajada a una recta desde un punto exterior a ella?
4. ¿Cómo se traza dicha recta? (módulo 28, apartado 28.4)
5. ¿Qué son rectas oblicuas?
6. ¿Cuál es la distancia de un punto a una recta?
7. ¿Qué propiedades tienen las rectas paralelas?
8. ¿Qué relación hay entre rectas paralelas y rectas perpendiculares?
9. ¿Qué dice el postulado de las paralelas?
10. ¿Cómo se traza una paralela a una recta? (módulo 28, apartado 28.4)

Introducción

En este módulo se demuestra la existencia y unicidad de las rectas perpendiculares (bajada – levantada) a una recta. Se muestra la existencia de la recta paralela a otra recta por un punto exterior a ella, se enuncia el postulado de las paralelas (quinto postulado de Euclides), se da el concepto de recta oblicua y se define la distancia de un punto a una recta.



John Playfair

(1748-1819). Matemático y geólogo escocés.



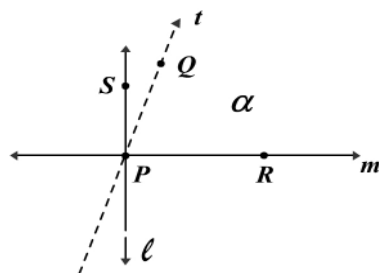
Vea el módulo 14
del programa de
televisión
*Geometría
Euclidiana*

14.1 Rectas perpendiculares

En el capítulo 2 se había definido la perpendicularidad entre dos rectas. Veamos ahora algunas propiedades que son importantes porque tratan de existencia y unicidad. Para su demostración se aplicará la demostración indirecta o reducción al absurdo.

Teorema 14.1.1

En un plano dado, por un punto cualquiera de una recta dada puede pasar una y sólo una recta perpendicular a la recta dada (figura 14.1).



Hipótesis: la recta m

P un punto de la recta m

Tesis:

- a. Existe una recta $\ell \perp m$ que contiene a P (existencia)
- b. Hay una sola recta $\ell \perp m$ que pasa por P (unicidad)

Figura 14.1

a. Demostración de la existencia: sea R un punto de la recta m , diferente de P . Existe un punto S en el semiplano α , tal que \widehat{RPS} es recto (por el postulado de la construcción de ángulos); entonces la recta PS es perpendicular a la recta m . Como $\overleftrightarrow{PS} = \ell$, entonces $\ell \perp m$; se ha demostrado así que existe la recta.

b. Demostración de la unicidad: hay que demostrar que ℓ es única. La demostración se hará por reducción al absurdo, así:

Existe más de una recta que pasa por P y es perpendicular a m o bien no existe más de una recta que pasa por P y es perpendicular a m (ley del tercero excluido).

Supongamos que hay otra recta t que pasa por P y es perpendicular a m (suposición temporal). Sea Q un punto en la recta t , entonces \widehat{RPQ} es recto (porque $t \perp m$ y forman ángulos rectos).

Tenemos entonces que \widehat{RPS} y \widehat{RPQ} son rectos, lo cual es una contradicción con el postulado de la construcción de ángulos; lo anterior significa que el supuesto es falso y concluimos que la recta ℓ es única.

Teorema 14.1.2

Por un punto dado, que no esté en una recta dada, pasa una y sólo una recta perpendicular a la recta dada.

Hipótesis: la recta m . El punto P no está en m

Tesis:

- Existe por lo menos una recta que contiene a P y es perpendicular a m (existencia)
- La recta que pasa por P y es perpendicular a m es única (unicidad)

a. Demostración de la existencia (figura 14.2).

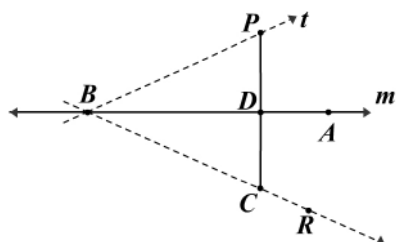


Figura 14.2

Sean A, B dos puntos sobre m . Trazamos

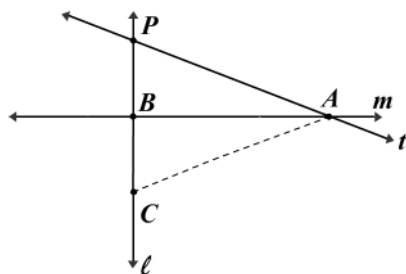
\overrightarrow{BP} y se forma el ángulo ABP .

Existe un punto R en el semiplano
 m ($\sim P$) tal que $\widehat{ABR} \cong \widehat{ABP}$ (postulado
de la construcción de ángulos).

Existe en \overrightarrow{BR} un punto C tal que $\overline{BC} \cong \overline{BP}$ (postulado de la construcción de segmentos).

Trazamos \overleftrightarrow{PC} que corta a m en D . Tenemos entonces que $\triangle CBD \cong \triangle PBD$ (L-A-L) y de la congruencia se deduce que $\widehat{PDB} \cong \widehat{CDB}$, y como son un par lineal ($P-D-C$), tenemos que \widehat{PDB} y \widehat{CDB} son rectos (definición) y sus lados son perpendiculares. Luego $\overleftrightarrow{PC} \perp m$.

b. Demostración de la unicidad (figura 14.3). Se usará el método de reducción al absurdo.

**Figura 14.3**

Por la ley del tercero excluido existe más de una recta que pasa por P y es perpendicular a m , o bien no existe más de una recta que pasa por P y es perpendicular a m . Supongamos que l y t son las dos rectas que pasan por P y son perpendiculares a m , y las cuales cortan a m en B y A , respectivamente.

Existe un punto C en la semirrecta opuesta a \overrightarrow{BP} tal que $\overline{BC} \cong \overline{BP}$ y trazamos \overline{AC} . $P\hat{B}A$ y $C\hat{B}A$ son rectos porque $\ell \perp m$ (teorema 9.3.5) y $P\hat{B}A \cong C\hat{B}A$, luego $\triangle PBA \cong \triangle CBA$ por L-A-L y los ángulos correspondientes son congruentes: $C\hat{A}B \cong B\hat{A}P$ y serían ángulos rectos porque $\ell \perp m$; luego $\overline{CA} \perp m$, lo cual es imposible porque $\ell \perp m$ en A y $\overline{CA} \perp m$ contradicen el teorema 14.1.1. El supuesto es falso y sólo hay una recta que pasa por P y es perpendicular a m .

John Playfair

El progreso de John Playfair en las ciencias matemáticas fue tan rápido que sustituyó a su profesor de física cuando éste enfermó. En 1785 fue nombrado Profesor Asociado de Matemáticas en la Universidad de Edimburgo. Niveló la notación de los puntos y lados de las figuras en los primeros seis libros de su edición de Euclides. A estos libros añadió otros tres como suplemento, y agregó una sección de notas como apéndices en las que daba sus razones para haber alterado los volúmenes anteriores y una exposición brillante en el complicado asunto de las líneas paralelas.

Playfair popularizó el axioma de las paralelas, que es equivalente al quinto postulado de las paralelas de Euclides, y cuyo enunciado es el siguiente: *Axioma de las paralelas*: «Por un punto dado que no esté en una recta dada sólo se puede trazar una única línea recta paralela».

Corolario 14.1.1

Ningún triángulo puede tener dos ángulos rectos.

Definición 14.1.1: Recta oblicua

Una recta que no corte a otra perpendicularmente se dice que es una *recta oblicua* o simplemente una *oblicua*.

Definición 14.1.2: Distancia de un punto a una recta

La distancia entre una recta y un punto que no está en la recta es la medida del segmento perpendicular trazado desde el punto a la recta. Si el punto dado está sobre la recta, la distancia es 0.

Teorema 14.1.3

El segmento de menor medida trazado desde un punto a una recta es el segmento de la perpendicular bajada a la recta desde el punto (figura 14.4).

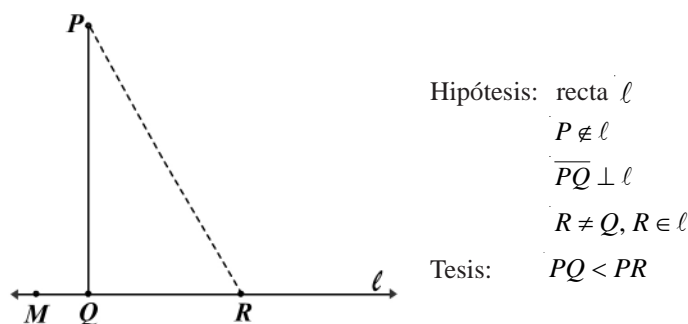


Figura 14.4

Demostración

Sean M y R puntos sobre ℓ tal que $M - Q - R$. $m(\hat{R}) < m(\hat{M}\hat{Q}P)$ porque $\hat{M}\hat{Q}P$ es exterior al $\triangle PQR$. Ahora, $\hat{M}\hat{Q}P \cong \hat{R}\hat{Q}P$ por ser rectos ($\overline{PQ} \perp \ell$). Sustituyendo queda: $m(\hat{R}) < m(\hat{P}\hat{Q}R)$. Luego $PQ < PR$ (relación A-L en $\triangle PQR$).

14.2 Rectas paralelas

Recordemos que dos rectas coplanares son *paralelas* si y sólo si no se cortan o son coincidentes (figura 14.5).

El paralelismo como relación entre rectas es una relación de equivalencia (cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva).

El paralelismo también se aplica a los rayos o segmentos de rectas paralelas.

Podemos afirmar que si en la figura 14.6 $\ell \parallel m$, entonces $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DF}$, $\overline{AB} \parallel \overline{AC}$, $\overline{AC} \parallel \overline{EF}$, etc.

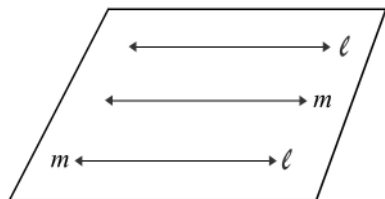


Figura 14.5

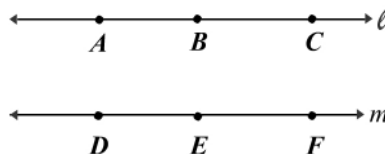


Figura 14.6

Es claro entonces que dos rectas coplanarias son paralelas o incidentes. Si las rectas no son coplanarias es posible que no sean paralelas ni incidentes, como ocurre con las rectas \overline{AB} y \overline{CD} de la figura 14.7, las cuales están en planos diferentes. De estas rectas se dice que son “rectas cruzadas”.

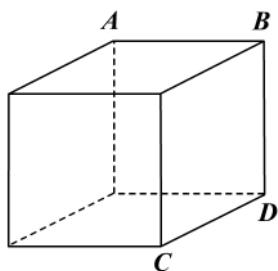


Figura 14.7

En esta parte de la geometría plana siempre vamos a usar rectas en un mismo plano.

Teorema 14.2.1

Dos rectas paralelas diferentes determinan un único plano que las contiene (figura 14.8).

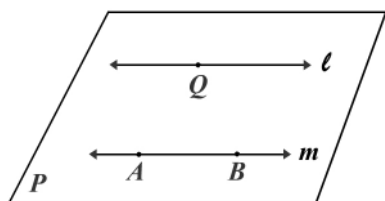


Figura 14.8

Hipótesis: $\ell \neq m$; $\ell \parallel m$

Tesis: el plano P las contiene y es único

Demostración

Si $\ell \parallel m$, entonces, por la misma definición de rectas paralelas, existe un plano P que contiene a ℓ y m . Si Q es un punto de ℓ , y A y B son puntos de m , entonces son puntos no colineales y existe un único plano que los contiene (postulado 7.1.4) y el cual contiene a ℓ y m , luego P es el único plano que las contiene.

Teorema 14.2.2

Dos rectas coplanares son paralelas si son perpendiculares a una misma recta (figura 14.9).

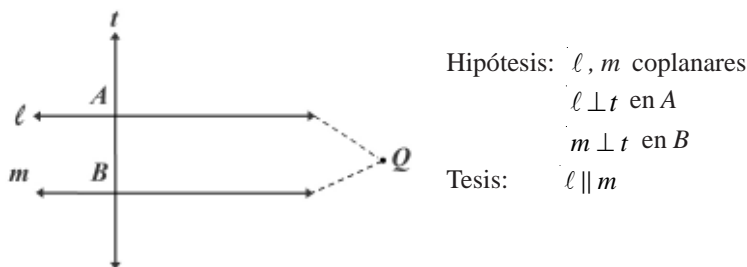


Figura 14.9

Demostración (reducción al absurdo)

Como ℓ y m son coplanares, entonces, por la ley del tercero excluido, ℓ es paralela a m ($\ell \parallel m$) o bien ℓ no es paralela a m ($\ell \not\parallel m$). Si $\ell \not\parallel m$, las rectas deben cortarse en un punto Q (las rectas coplanares no paralelas son incidentes). Por el punto Q que es exterior a la recta t pasan dos rectas ℓ y m que son perpendiculares a t y esto contradice el teorema 14.1.2, luego el supuesto $\ell \not\parallel m$ es falso y concluimos que $\ell \parallel m$.

Teorema 14.2.3

Sea ℓ una recta y P un punto que no está en la recta, entonces existe por lo menos una recta que pasa por P y es paralela a la recta dada (figura 14.10).

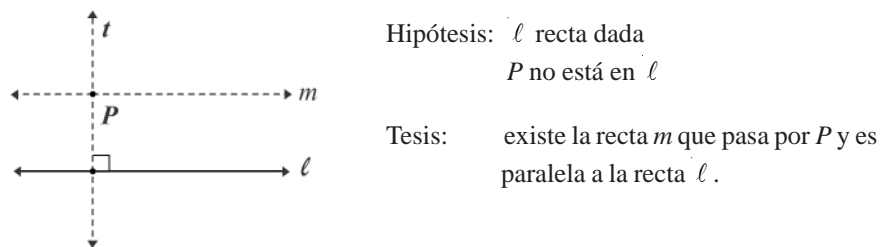


Figura 14.10

Demostración

Existe una única recta t que pasa por P y es perpendicular a la recta ℓ (teorema 14.1.2). Sea m una recta que pasa por P y es perpendicular a la recta t (teorema 14.1.1). Por el teorema 14.2.2 concluimos que $\ell \parallel m$.

Postulado 14.2.1 (Postulado de las paralelas)

Por un punto dado exterior a una recta dada pasa una y sólo una recta paralela a la recta dada.

El postulado así enunciado se debe a Jhon Playfaire (1748-1819), siendo esta la razón por la cual el postulado de las paralelas se conoce como postulado de Playfaire y es equivalente al enunciado por Euclides que dice: “Si dos rectas son cortadas por una transversal de tal manera que la suma de los ángulos interiores (colaterales) a las rectas y de un mismo lado de la transversal es menor que 180° , entonces las rectas se cortan al mismo lado de la transversal”.

La existencia de la recta paralela en el postulado de las paralelas está justificado con el teorema 14.2.3. La unicidad de esta paralela es la que en realidad constituye el postulado.

Teorema 14.2.4

Dos rectas paralelas a un tercera recta son paralelas entre sí (figura 14.11).

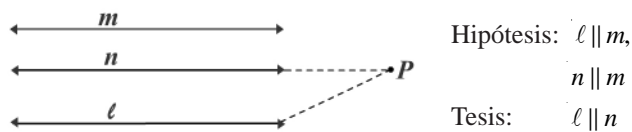


Figura 14.11

Demostración (reducción al absurdo)

$\ell \parallel n$ o bien $\ell \not\parallel n$ (ley del tercero excluido). Si $\ell \not\parallel n$ entonces se cortan en un punto P . Por P estarían pasando dos rectas paralelas (por la hipótesis) a la misma recta m y esto es imposible porque contradice el postulado de las paralelas. Luego el supuesto ($\ell \not\parallel n$) es falso y concluimos que $\ell \parallel n$.

Teorema 14.2.5

Si dos rectas coplanares son paralelas y una tercera recta es perpendicular a una de ellas, entonces es perpendicular a la otra (figura 14.12).

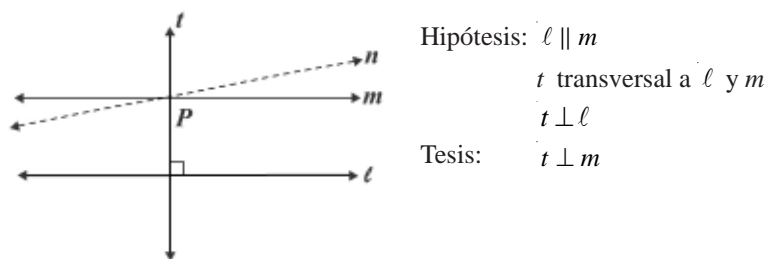


Figura 14.12

Demostración (reducción al absurdo)

La recta t es perpendicular a m o bien t no es perpendicular a m (ley del tercero excluido).

Si t y m no son perpendiculares, entonces existe una recta n que es perpendicular a t en P , donde m intercepta a t ; la recta n sería entonces paralela a ℓ (teorema 14.2.2), lo cual es imposible porque $n \parallel \ell$ y $m \parallel \ell$ contradicen el postulado de las paralelas.

Módulo 15

Ángulos especiales

Contenidos del módulo

- 15.1 Paralelas y ángulos especiales
- 15.2 Ángulos en figuras geométricas

Objetivos del módulo

1. Definir una recta transversal.
2. Estudiar los ángulos formados entre rectas.
3. Analizar las condiciones para el paralelismo.
4. Estudiar ángulos en las figuras geométricas.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es una recta transversal?
2. ¿Cómo se llaman los ángulos formados por dos rectas que son intersecadas por una transversal?
3. ¿Cómo saber si dos rectas son paralelas?
4. ¿Cómo son los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal?
5. ¿Cuánto mide el ángulo exterior de un triángulo?
6. ¿Qué propiedades tienen los ángulos interiores de un triángulo? ¿De un cuadrilátero? ¿De un polígono?

Introducción

En este módulo analizaremos los ángulos determinados por rectas cortadas por una transversal, los cuales nos llevan a determinar si las rectas son o no paralelas de acuerdo con la característica del ángulo. Estudiaremos además los ángulos relacionados con las figuras geométricas, especialmente en los triángulos.



Nikolái Ivánovich Lobachevski

(1793-1856). Matemático ruso nacido en Nizni Nóvgorod.



Vea el módulo 15
del programa de
televisión
*Geometría
Euclidiana*

15.1 Paralelas y ángulos especiales

Definición 15.1.1: Recta transversal

Una recta es *transversal* a dos o más rectas coplanares si y sólo si las interseca en puntos diferentes. En la figura 15.1, la recta S no es transversal a las rectas r y n porque las interseca en el mismo punto, pero la recta t es transversal a ℓ y m porque las interseca en A y B , respectivamente.

Cuando dos rectas son cortadas por una transversal se forman ocho ángulos (figura 15.1). Cuatro de ellos están por “fuera” de las rectas ℓ y m y se llaman “ángulos exteriores”; son los ángulos 1, 2, 7, 8. Otros cuatro están “entre” las rectas ℓ y m y se llaman “ángulos interiores”; son los ángulos 3, 4, 5, 6.

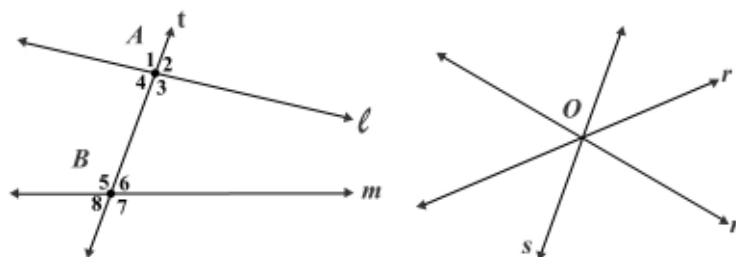


Figura 15.1

Las parejas de ángulos a diferentes lados de la secante se llaman “ángulos alternos”; son los ángulos 1 y 2, 1 y 3, ..., 1 y 7, ...

Las parejas de ángulos interiores no adyacentes que están situados en diferente semiplano respecto a la transversal se llaman “ángulos alternos internos”; son los ángulos 4 y 6, 3 y 5.

Las parejas de ángulos exteriores no adyacentes que están situados en diferentes semiplanos respecto a la transversal se llaman “ángulos alternos externos”; son los ángulos 1 y 7, 2 y 8.

Las parejas de ángulos no adyacentes, uno interior y otro exterior, que están situados en un mismo semiplano respecto a la transversal se llaman “ángulos correspondientes” o “ángulos colaterales”; son los ángulos 1 y 5, 4 y 8, 2 y 6, 3 y 7.

Las parejas de ángulos interiores en un mismo semiplano respecto a la transversal se llaman “ángulos colaterales interiores”; son los ángulos 4 y 5, 3 y 6.

Las parejas de ángulos exteriores en un mismo semiplano respecto a la transversal se llaman “ángulos colaterales exteriores”; son los ángulos 1 y 8, 2 y 7.

Teorema 15.1.1

Si dos rectas al ser cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos congruentes, son paralelas (figura 15.2).

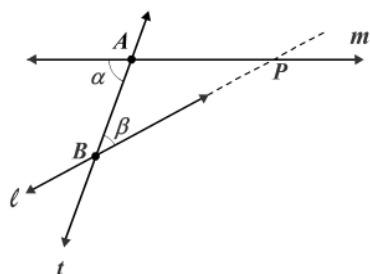


Figura 15.2

Hipótesis: t transversal a ℓ y m en A y B

$\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$ son alternos internos

Tesis: $\ell \parallel m$

Demostración (reducción al absurdo)

$\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$ por la hipótesis.

Por el principio del tercero excluido $\ell \parallel m$ o bien $\ell \not\parallel m$. Supongamos que $\ell \not\parallel m$, entonces ℓ interseca a m en un punto P (en el plano dos rectas son paralelas o incidentes), y en el $\triangle ABP$ α es un ángulo exterior, lo cual implica que $\alpha > \beta$, que es imposible porque contradice la hipótesis $\alpha = \beta$ (ley de tricotomía). Luego $\ell \parallel m$ (negación del supuesto).

Teorema 15.1.2

Si dos rectas al ser cortadas por una transversal forman ángulos correspondientes congruentes, son paralelas (figura 15.3).

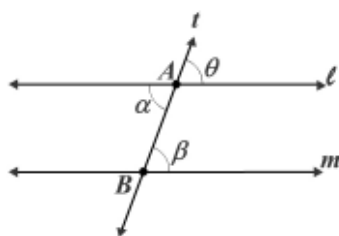


Figura 15.3

Hipótesis: t transversal a ℓ y m en A y B

$\hat{\theta} \cong \hat{\beta}$ son correspondientes

Tesis: $\ell \parallel m$

Demostración

Por hipótesis $\theta = \beta$ y por opuestos por el vértice $\alpha = \theta$. De la transitividad:

$\alpha = \beta$. Luego $\ell \parallel m$ por el teorema 15.1.1.

Corolario 15.1.1

Si dos rectas al ser cortadas por una transversal forman ángulos colaterales interiores suplementarios, son paralelas. La demostración de este corolario se deja como ejercicio.

Corolario 15.1.2

Si dos rectas cortadas por una transversal forman ángulos alternos externos congruentes, son paralelas. Su demostración se deja como ejercicio.

Nikolái Ivánovich Lobachevski

Fue uno de los primeros en aplicar un tratamiento crítico a los postulados fundamentales de la geometría euclidiana. En forma independiente del húngaro János Bolyai y del alemán Carl Gauss, Lobachevski descubrió un sistema de geometría no euclidiana. Entre sus obras más importantes están *Sobre los principios de la geometría* y *Geometría imaginaria*.

Teorema 15.1.3

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes (figura 15.4).

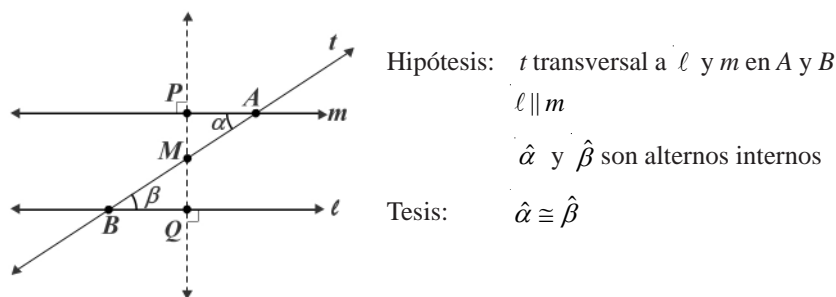


Figura 15.4

Demostración

Sea M el punto medio de \overline{AB} (M es único). Por M se traza $\overline{QP} \perp m$ ($M \notin m$ y teorema 14.1.1). Por el teorema 14.2.5, $\overline{QP} \perp \ell$.

$\triangle AMP \cong \triangle BMQ$ por H-A (son triángulos rectángulos con $\overline{AM} \cong \overline{BM}$) y $\hat{PAM} \cong \hat{QBM}$ (por opuestos por el vértice). $\therefore \hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$ por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes.

La demostración de los siguientes teoremas se deja como ejercicio.

Teorema 15.1.4

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.

Teorema 15.1.5

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos externos son congruentes, y recíprocamente.

Teorema 15.1.6

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos colaterales interiores son suplementarios, y recíprocamente.

Teorema 15.1.7

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos colaterales exteriores son suplementarios, y recíprocamente.

Ejemplo 15.1.1

En la figura 15.5:

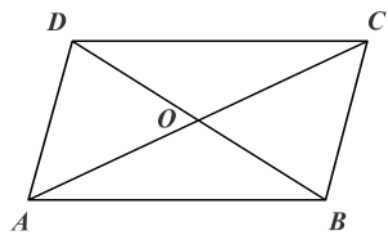


Figura 15.5

Hipótesis: $ABCD$ cuadrilátero
 \overline{AC} y \overline{BD} diagonales
 $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$
 $\overline{DO} \cong \overline{OB}$, $\overline{AO} \cong \overline{OC}$
Tesis: $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Demostración

$\triangle DOC \cong \triangle BOA$ por L-A-L ($\overline{DO} \cong \overline{OB}$, $\widehat{DOC} \cong \widehat{BOA}$ y $\overline{AO} \cong \overline{OC}$), $\widehat{DCO} \cong \widehat{OAB}$ por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes. Por el teorema 15.1.1 concluimos que $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$. $\triangle DOA \cong \triangle BOC$ por L-A-L. Por ángulos correspondientes en triángulos congruentes: $\widehat{ADO} \cong \widehat{CBO}$.

Concluimos entonces que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ por el teorema 14.2.5.

Ejemplo 15.1.2

En la figura 15.6:

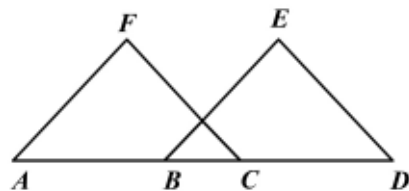


Figura 15.6

Hipótesis: $A - B - C - D$
 $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
 $\overline{AF} \cong \overline{BE}$
 $\overline{FC} \cong \overline{ED}$
Tesis: $\overline{FC} \parallel \overline{DE}$

Demostración

Por adición de segmentos $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. Ahora, el $\triangle AFC \cong \triangle BED$ por L-L-L; por ángulos correspondientes en triángulos congruentes se tiene que $\widehat{ACF} \cong \widehat{BDE}$. Luego $\overline{FC} \parallel \overline{DE}$ por el teorema 15.1.2.

Ejemplo 15.1.3

En la figura 15.7:

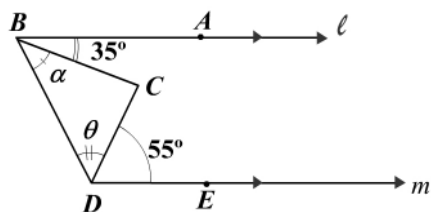


Figura 15.7

Hipótesis: $\ell \parallel m$
 $m(\widehat{ABC}) = 35^\circ$
 $m(\widehat{EDC}) = 55^\circ$
Tesis: $\alpha + \theta = ?$

Solución

\widehat{EDB} y \widehat{ABD} son colaterales interiores suplementarios porque $\ell \parallel m$, y por el teorema 15.1.6 $\alpha + 35^\circ + \theta + 55^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \theta = 90^\circ$.

Ejemplo 15.1.4

Demuestre que si dos ángulos tienen sus lados paralelos son congruentes o son suplementarios (figuras 15.8, 15.9 y 15.10).

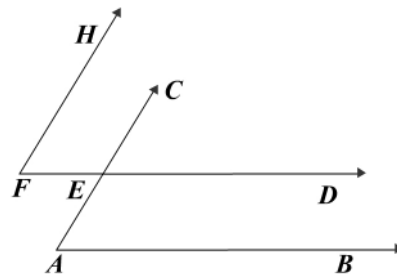


Figura 15.8

a. Hipótesis: \widehat{FHD} y \widehat{CAB} con

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DF}$$

$$\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{FH}$$

Tesis: $\widehat{A} \cong \widehat{F}$

Demostración

$\widehat{CED} \cong \widehat{A}$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{FD}$). Por la misma razón anterior $\widehat{CED} \cong \widehat{F}$, ya que $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{FH}$. Por transitividad se concluye que $\widehat{A} \cong \widehat{F}$.

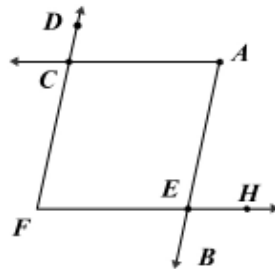


Figura 15.9

b. Hipótesis: \widehat{DFH} y \widehat{EAC} con

$$\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{FH}$$

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{FD}$$

Tesis: $\widehat{A} \cong \widehat{F}$

Demostración

$\widehat{A} \cong \widehat{AEH}$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas ($\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{FH}$). Por ser ángulos correspondientes entre paralelas ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{FD}$), los ángulos \widehat{AEH} y \widehat{F} son congruentes. Luego $\widehat{A} \cong \widehat{F}$ por transitividad.

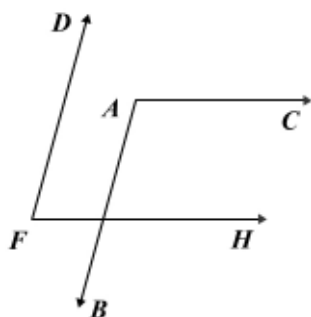


Figura 15.10

c. Hipótesis: \widehat{CAB} y \widehat{DFH} con

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{FD}$$

$$\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{FH}$$

Tesis: \widehat{A} y \widehat{F} suplementarios

Demostración

$\widehat{ABH} \cong \widehat{F}$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{FD}$); \widehat{CAB} y \widehat{ABH} son suplementarios por ser ángulos colaterales interiores entre paralelas ($\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{FH}$). Luego \widehat{A} y \widehat{F} son suplementarios.

Ejemplo 15.1.5

En forma similar a la del ejemplo 15.1.4 analice la proposición: “si dos ángulos tienen sus lados perpendiculares, entonces los ángulos son congruentes o suplementarios”.

15.2 Ángulos en figuras geométricas

Teorema 15.2.1

En todo triángulo la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes (figura 15.11).

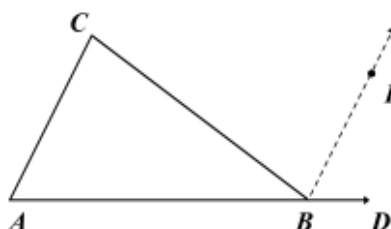


Figura 15.11

Hipótesis: $\triangle ABC$ con \widehat{CBD} exterior

Tesis: $m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{C}) + m(\widehat{A})$

Demostración

Trazamos $\overrightarrow{BP} \parallel \overrightarrow{AC}$ como construcción auxiliar

$\widehat{CBP} \cong \widehat{C}$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas

$\widehat{DBP} \cong \widehat{A}$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas

$m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{CBP}) + m(\widehat{DBP})$ por adición de ángulos

Luego $m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{C}) + m(\widehat{A})$

Teorema 15.2.2: Medida de los ángulos de un triángulo

En todo triángulo la suma de las medidas de los ángulos interiores es 180° (figura 15.12).

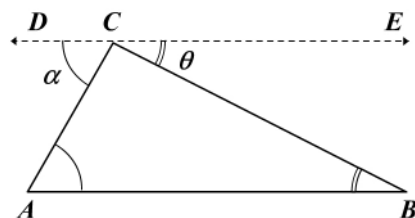


Figura 15.12

Hipótesis: $\triangle ABC$

Tesis: $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$

Demostración

Por cualquiera de los vértices se traza una recta paralela al lado opuesto. Sea

$\overleftrightarrow{DCE} \parallel \overline{AB}$.

$\hat{\alpha} \cong \hat{A}$ y $\hat{\theta} \cong \hat{B}$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas ($\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DCE}$).

$m(\hat{\alpha}) + m(\hat{C}) + m(\hat{\theta}) = 180^\circ$ porque \overleftrightarrow{DCE} es rectilíneo ($D-C-E$). Sustituyendo las congruencias podemos concluir que $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) + m(\hat{B}) = 180^\circ$.

Corolario 15.2.1

En todo triángulo no puede haber más de un ángulo interior cuya medida sea mayor o igual a 90° .

Corolario 15.2.2

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

Corolario 15.2.3

Cada ángulo interior de un triángulo equilátero mide 60° .

Corolario 15.2.4

Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son agudos.

Corolario 15.2.5

Si dos triángulos tienen dos ángulos congruentes, sus terceros ángulos son congruentes.

Corolario 15.2.6

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360° .

Corolario 15.2.7

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2)180^\circ$.

Desde un vértice se trazan las posibles diagonales y se forman $(n-2)$ triángulos cuya suma de ángulos interiores es igual a la suma de los del polígono. Queda como ejercicio determinar que la suma de la medida de los ángulos exteriores de un polígono de n lados es 360° .

Ejercicios

Módulos 14 y 15

1. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

- Dos rectas paralelas determinan un plano.
- Dos rectas perpendiculares determinan un plano.
- Por un punto de una recta puede trazarse cualquier número de rectas.
- Por un punto exterior de una recta se puede trazar cualquier número de rectas paralelas a la recta.
- Desde un punto que no esté en una recta se puede trazar más de una recta perpendicular a la recta.
- Los ángulos alternos internos son congruentes.
- Los ángulos colaterales son congruentes.
- Los ángulos alternos externos entre paralelas son suplementarios.
- Si dos ángulos colaterales interiores son congruentes, la transversal es perpendicular a las paralelas.
- Si dos rectas son perpendiculares a una tercera recta, entonces son perpendiculares entre sí.
- Si dos rectas son paralelas a una tercera recta, entonces son paralelas entre sí.
- Los ángulos alternos internos entre paralelas son suplementarios.
- Hay ángulos correspondientes suplementarios.
- Si $\ell \parallel m$, $n \perp \ell$, $s \perp m$, entonces $n \parallel s$.

2. Sea la recta XOX' . A partir de O y en un mismo semiplano se toman los rayos OA y OB lo mismo que las bisectrices de los ángulos XOA , AOB y BOX' . Halle la medida de los ángulos si la bisectriz del ángulo AOB es perpendicular a $X'OX$ y las bisectrices de los ángulos externos forman un ángulo cuya medida es 100° .

3. En la figura 1 se tiene:

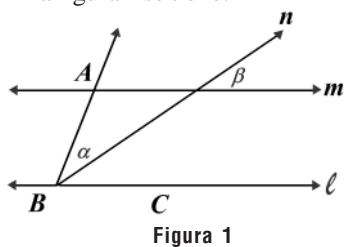


Figura 1

Hipótesis: $\ell \parallel m$
 $\alpha = \beta$

Tesis: n bisectriz de \widehat{ABC}

4. En la figura 2 se tiene:

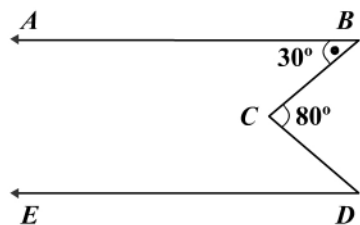


Figura 2

Hipótesis: $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{DE}$
 $m(\widehat{B}) = 30^\circ$
 $m(\widehat{C}) = 80^\circ$

Tesis: $m(\widehat{D}) = ?$

5. En la figura 3 se tiene:

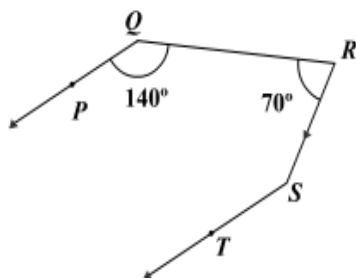


Figura 3

Hipótesis: $\overrightarrow{QP} \parallel \overrightarrow{ST}$
 $m(\widehat{PQR}) = 140^\circ$
 $m(\widehat{R}) = 70^\circ$

Tesis: $m(\widehat{S}) = ?$

6. En la figura 4 se tiene:

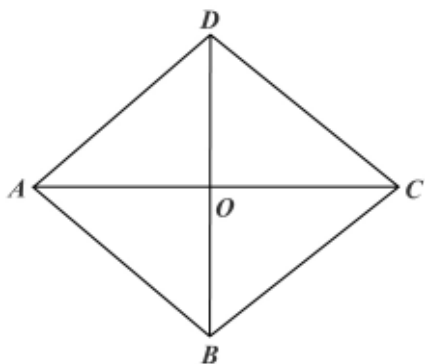


Figura 4

Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$
 $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$

Tesis: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
 $\overline{DC} \parallel \overline{AB}; \overline{BC} \parallel \overline{AD}$

7. En la figura 5 se tiene:

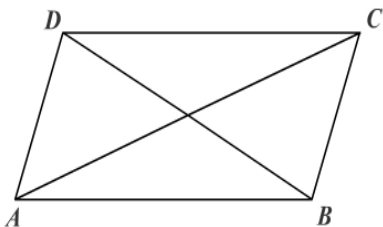


Figura 5

Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Tesis: $\overline{BD} \cong \overline{AC}$
 $\overline{BO} = \overline{DO}$
 $\overline{OC} = \overline{OA}$

8. En la figura 6 se tiene:

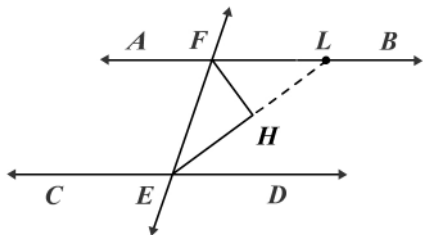


Figura 6

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$
 \overleftrightarrow{EH} bisectriz de \widehat{FED}
 \overleftrightarrow{FH} bisectriz de \widehat{EFL}
Tesis: $\overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{FH}$

9. En la figura 7 se tiene:

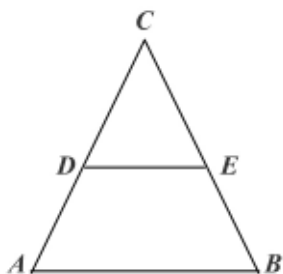


Figura 7

a. Hipótesis: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$; $\overline{DC} \cong \overline{CE}$
Tesis: $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$
b. Hipótesis: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$; $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$
Tesis: $\overline{CD} \cong \overline{CE}$
c. Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$
Tesis: $\overline{DE} \cong \overline{DC}$

10. En la figura 8 se tiene:

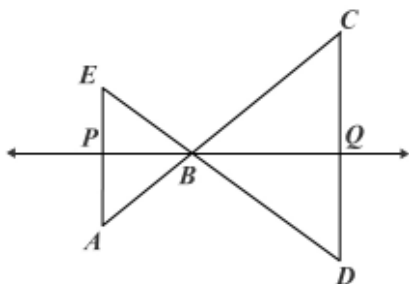


Figura 8

Hipótesis: $P - B - Q$
 P punto medio de \overline{EA}
 Q punto medio de \overline{CD}
 $BE = BA$, $BC = BD$
Tesis: $\overline{EA} \parallel \overline{CD}$; $\overline{PQ} \perp \overline{EA}$
 $\overline{PQ} \perp \overline{CD}$

11. Demuestre el corolario 15.1.1.
12. Demuestre el corolario 15.1.2.
13. Demuestre el teorema 15.1.4.
14. Demuestre el teorema 15.1.5.
15. Demuestre el teorema 15.1.6.

16. Demuestre las siguientes proposiciones.
 - a. Las bisectrices de dos ángulos de lados perpendiculares son perpendiculares o paralelas.
 - b. La bisectriz exterior del ángulo del vértice de un triángulo isósceles es paralela a la base.
 - c. Si la bisectriz exterior de un ángulo de un triángulo es paralela al lado opuesto al vértice, el triángulo es isósceles.
 - d. Las bisectrices de dos ángulos de lados paralelos son perpendiculares o paralelas.
17. ¿Cuánto mide cada ángulo de un triángulo si el mayor mide tres veces lo que mide el menor y éste es la mitad del tercer ángulo?
18. Las bisectrices de dos ángulos interiores de un triángulo se cortan formando un ángulo de 120° . ¿Cuál es la medida del tercer ángulo del triángulo?
19. Uno de los ángulos de un triángulo isósceles mide tres veces lo que mide el otro. ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos?
20. Si la medida de un ángulo de un triángulo isósceles es el doble de la medida de otro ángulo, ¿cuál es la medida de cada ángulo?
21. En un triángulo, un ángulo exterior mide 110° y el mayor de los interiores mide 70° . ¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos interiores?
22. La medida de un ángulo de un triángulo es cinco veces la medida de un segundo ángulo, y la medida del ángulo exterior del tercer vértice es 100° . ¿Cuánto mide cada ángulo?
23. Las medidas de los ángulos de un triángulo están en la relación 1: 2: 3. Encuentre la medida de cada ángulo.
24. Halle las medidas de cada ángulo interior de un cuadrilátero si:
 - a. Los ángulos internos están representados por $x - 10$, $x - 20$, $x + 20$, $3x + 50$.
 - b. Los ángulos externos están en la relación 1: 2: 5: 7.
25. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo tienen las siguientes medidas: $m(B) = 24^\circ$, $m(C) = 66^\circ$. Halle las medidas del ángulo formado por la altura y la mediana trazada desde A.
26. En un triángulo rectángulo en A, $m(\hat{B}) = \frac{2}{5} m(\hat{A})$.
 - a. Halle las medidas de los ángulos determinados por la altura desde A.
 - b. Halle la medida de los ángulos determinados sobre la hipotenusa por la mediana y la bisectriz desde A.
27. El ángulo del vértice de un triángulo isósceles mide 82° . Se trazan las bisectrices interiores de los ángulos de la base y la bisectriz exterior de uno de ellos. Halle la medida del ángulo entre las bisectrices interiores y entre una bisectriz interior y la exterior.
28. Identifique el triángulo cuyos ángulos están:
 - a. Representados por $2x + 10$, $4x - 40$, $3x - 15$.
 - b. Representados por $2x + 18$, $4x - 14$, $5x$.
 - c. En la proporción 2: 4: 6.

- d. Así: uno de ellos mide 30° y el mayor de los otros dos mide 10° más que seis veces la medida del más pequeño.
29. Calcule el número de lados de un polígono regular si cada ángulo interno mide:
- a. 60° b. 90° c. 120° d. 150° e. 160° f. 175°
30. Calcule el número de lados de un polígono regular si cada uno de sus ángulos externos mide:
- a. 40° b. 60° c. 120° d. 150°
31. Halle la medida de cada ángulo externo de un polígono regular de:
- a. 6 lados b. 12 lados c. 18 lados d. 24 lados
32. Halle la medida de cada ángulo interior de los polígonos del ejercicio anterior.
33. Cuál es el número de lados de un polígono si la suma de las medidas de sus ángulos internos es:
- a. 1.080° b. 1.260° c. 4.500°
34. Halle la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono de:
- a. 11 lados b. 32 lados c. 24 lados.
35. Determine la medida de cada ángulo en la figura 9.

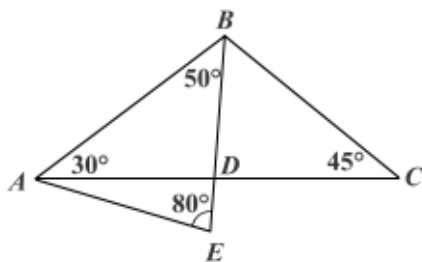


Figura 9

36. En la figura 10, el segmento más corto es: ____

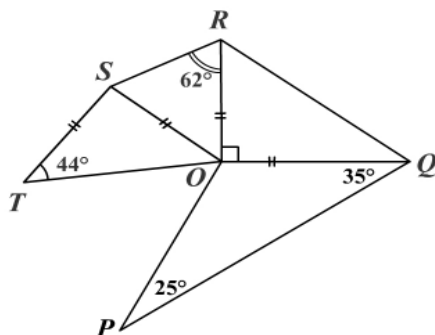


Figura 10

37. En la figura 11 demuestre que $\beta + \theta = \alpha + \lambda$. (Sugerencia: trace \overline{NQ} .)

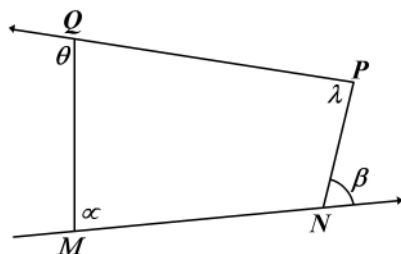


Figura 11

38. En la figura 12:

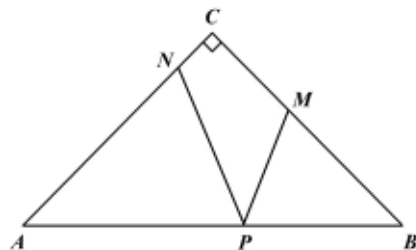


Figura 12

Hipótesis: $\triangle ABC$ con

$$\overline{CA} \perp \overline{CB}$$

$$BM = BP$$

$$AP = AN$$

Tesis: $m(\widehat{NPM}) = 45^\circ$

39. Demuestre que una recta paralela a la base de un triángulo isósceles y que interseca a los otros lados en puntos diferentes, determina otro triángulo isósceles.
40. Desde el punto medio de uno de los lados de un triángulo se trazan segmentos perpendiculares a los otros lados. Si los segmentos perpendiculares son congruentes, demuestre que el triángulo es isósceles.
41. Demuestre que si en un triángulo una bisectriz es mediana, el triángulo es isósceles.
42. Demuestre que si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, las bisectrices de dos ángulos correspondientes cualesquiera son paralelas.
43. En el $\triangle ABC$, la bisectriz del ángulo A interseca a \overline{BC} en M , y la mediatriz de \overline{AM} interseca a \overline{AC} en N . Demuestre que $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$.
44. En el $\triangle ABC$, $m(\widehat{B}) = 58^\circ$ y $m(\widehat{C}) = 70^\circ$. Halle la medida de los siguientes ángulos:
- El ángulo formado por las bisectrices interiores \overline{BD} y \overline{CF} .
 - El ángulo de las bisectrices exteriores \overline{AO} y \overline{OC} .
 - El ángulo formado por la bisectriz \overline{BD} y la altura \overline{BH} .
 - El ángulo entre las alturas desde B y A .

45. En un triángulo rectángulo en A , $m(\hat{B}) = 2m(\hat{C})$ y \overline{AH} es la altura relativa a \overline{BC} . Se da $A - B - D$ tal que $\overline{BD} \cong \overline{BH}$ y se traza \overline{DH} que corta a \overline{AC} en O . Demuestre que $OC = OH = OA$.

Módulo 16

Propiedades de cuadriláteros

Contenidos del módulo

16.1 Cuadriláteros en el plano

Objetivos del módulo

1. Identificar los elementos de un cuadrilátero.
2. Clasificar los cuadriláteros según los lados y los ángulos.
3. Demostrar algunas propiedades de los paralelogramos y los trapecios.
4. Establecer las condiciones bajo las cuales un cuadrilátero es un paralelogramo.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es un cuadrilátero?
2. ¿Cómo se clasifican los cuadriláteros?
3. ¿Qué propiedades tienen los paralelogramos?
4. ¿Cuándo un cuadrilátero es un paralelogramo?
5. ¿Qué propiedades tiene un trapecio isósceles?

Introducción

En este módulo se estudian los diferentes cuadriláteros y las propiedades que tienen, y se analizan las condiciones mínimas que debe cumplir un cuadrilátero para ser paralelogramo.



Bernhard Riemann

(1826-1866). Matemático alemán nacido en Breselenz.



Vea el módulo 16
del programa de
televisión
*Geometría
Euclidiana*

16.1 Cuadriláteros en el plano

Definición 16.1.1

Un cuadrilátero es un polígono (convexo) de cuatro lados.

En la figura 16.1 A, B, C y D son los vértices, \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{DA} son los lados, $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ y \hat{D} son los ángulos interiores del cuadrilátero y \overline{DB} y \overline{AC} son las diagonales.

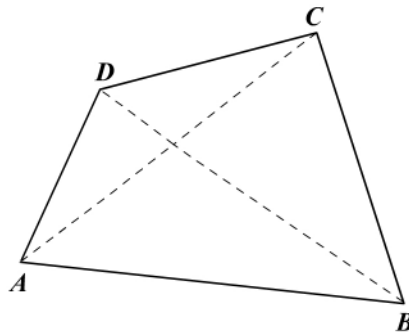


Figura 16.1

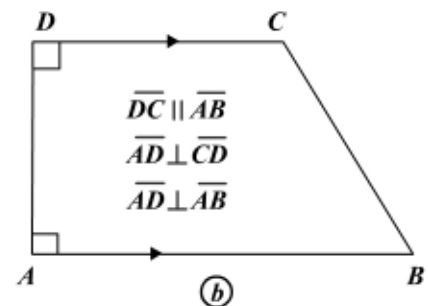
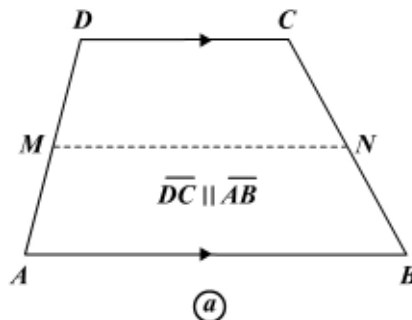
El perímetro del cuadrilátero, denotado $2p$, es la suma de las medidas de los lados, es decir: $2p = AB + BC + CD + DA$.

Los cuadriláteros reciben diferentes nombres de acuerdo con algunas propiedades de sus lados o ángulos.

Un cuadrilátero que tiene por lo menos un par de lados paralelos se llama *trapezio* (figura 16.2a).

Un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos y uno de los otros lados es perpendicular a los lados paralelos se llama *trapezio rectángulo* (figura 16.2b).

Un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos y los otros dos lados congruentes se llama *trapezio isósceles* (figura 16.2c).



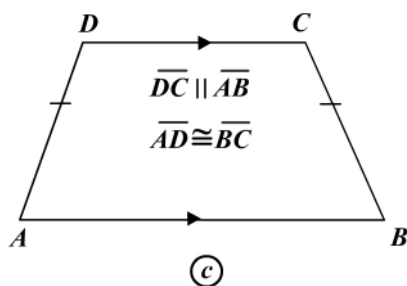


Figura 16.2

En todo trapecio los lados paralelos se llaman *bases del trapecio*; los ángulos cuyos vértices coinciden con los vértices de las bases se llaman *ángulos de las bases*. El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos se llama *base media* o *mediana del trapecio*. El segmento MN en la figura 16.2a es la mediana o base media.

Un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos se llama *paralelogramo* (figura 16.3a).

Un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos y sus ángulos interiores congruentes se llama *rectángulo* (figura 16.3b).

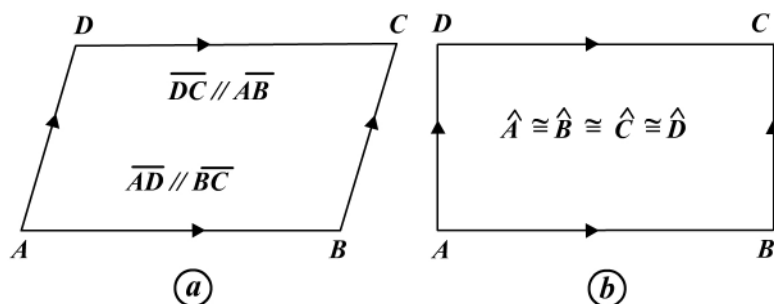


Figura 16.3

Un cuadrilátero que tiene sus lados congruentes se llama *rombo* (figura 16.4a).

Un cuadrilátero que tiene sus ángulos congruentes y sus lados congruentes se llama *cuadrado* (figura 16.4b).

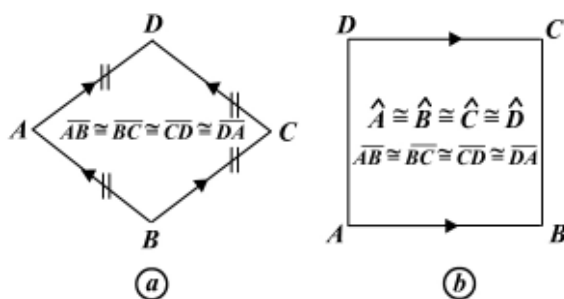


Figura 16.4

Bernhard Riemann

Riemann elaboró un sistema de geometría que contribuyó a desarrollar la física teórica moderna. La importancia de su geometría radica en el uso y la extensión de la geometría euclidiana y de la geometría de superficies, que lleva a muchas otras geometrías diferenciales generalizadas. Lo más importante de estos trabajos fue que hicieron posible elaborar una aplicación geométrica para algunas grandes abstracciones del análisis de tensores, que condujeron a algunos de los conceptos que más tarde utilizó Albert Einstein en su teoría de la relatividad. La geometría de Riemann también se necesita para abordar la electricidad y el magnetismo en la teoría de la relatividad general. Clarificó el concepto de integral, al definir lo que actualmente se conoce como *Integral de Riemann*. Su aportación más conocida fue su geometría no euclidiana, que expuso en forma detallada en su célebre obra *Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría*. Esta geometría se sigue si se considera la superficie de una esfera y se restringen las figuras a esa superficie.

Teorema 16.1.1

Los segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas son congruentes (figura 16.5).

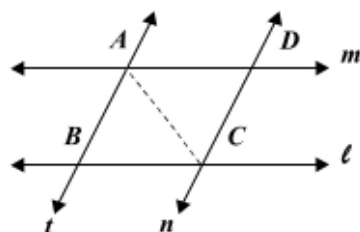


Figura 16.5

Hipótesis: t transversal a ℓ y m en B y A
 n transversal a ℓ y m en C y D
 $t \parallel n, m \parallel \ell$

Tesis: $\overline{AB} \cong \overline{DC}; \overline{AD} \cong \overline{BC}$

Demostración

De la hipótesis se concluye que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. ¿Por qué?

Trazamos la diagonal \overline{AC} .

$\angle DAC \cong \angle ACB$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas ($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$) y
 $\angle BAC \cong \angle ACD$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$). En-
 tonces $\triangle ACD \cong \triangle CAB$ por A-L-A, lo cual implica que $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ por
 ser lados correspondientes en triángulos congruentes.

Corolario 16.1.1

Dos rectas paralelas equidistan en todos sus puntos.

Corolario 16.1.2 (recíproco del corolario 16.1.1)

Si dos rectas equidistan en todos sus puntos, son paralelas.

Teorema 16.1.2

En todo paralelogramo una cualquiera de las diagonales determina dos triángulos congruentes (figura 16.6).

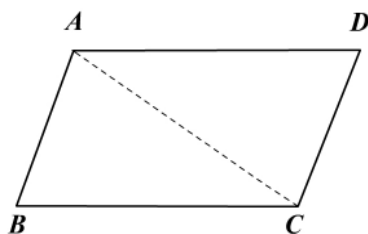


Figura 16.6

Hipótesis: $ABCD$ es paralelogramo

\overline{AC} diagonal

Tesis: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

Demostración

$\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, por la definición del paralelogramo $ABCD$.

$\angle DAC \cong \angle BCA$ por ser ángulos alternos internos entre paralelos ($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$). Por la
 misma razón $\angle BAC \cong \angle DCA$ y los dos triángulos tienen a AC común. Luego
 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ por A-L-A.

Teorema 16.1.3

Todo paralelogramo tiene los lados opuestos congruentes.

En efecto, de la congruencia de triángulos del teorema 16.1.2 se concluye que

$$\overline{DC} \cong \overline{AB} \text{ y } \overline{AD} \cong \overline{BC}.$$

Teorema 16.1.4

En todo paralelogramo los lados opuestos son paralelos y congruentes.

En efecto, de la definición de paralelogramo los lados opuestos son paralelos, y del teorema 16.1.2 son congruentes.

Teorema 16.1.5

Todo paralelogramo tiene los ángulos opuestos congruentes.

En efecto, de la congruencia de los triángulos del teorema 16.1.2 se tiene que $\hat{D} \cong \hat{B}$,

y por la adición de los ángulos $\hat{DCA} \cong \hat{CAB}$ y $\hat{BCA} \cong \hat{DAC}$ se obtiene $\hat{DAB} \cong \hat{DCB}$.

Teorema 16.1.6

En todo paralelogramo las diagonales se intersecan en sus puntos medios (figura 16.7).

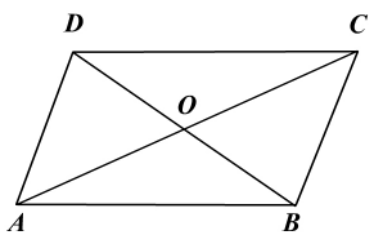


Figura 16.7

Hipótesis: $ABCD$ es paralelogramo

\overline{AC} , \overline{BD} diagonales

$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$

Tesis:

$\overline{AO} \cong \overline{OC}$; $\overline{BO} \cong \overline{OD}$

Demostración

Por la definición de paralelogramo $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y este paralelismo implica que $\hat{DCA} \cong \hat{BAC}$ y $\hat{CDB} \cong \hat{DBA}$ (¿por qué?), y según el teorema 16.1.3 se tiene que $\overline{DC} \cong \overline{AB}$. Por tanto, $\triangle DOC \cong \triangle BOA$ por A-L-A (¿cuáles?) y concluimos de esta congruencia que $\overline{AO} \cong \overline{OC}$ y $\overline{BO} \cong \overline{OD}$.

Los teoremas anteriores se refieren a las propiedades de los elementos en un paralelogramo. Veamos ahora las condiciones mínimas (suficientes) que debe cumplir un cuadrilátero para ser un paralelogramo.

Teorema 16.1.7 (recíproco del teorema 16.1.3)

Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo (figura 16.8).

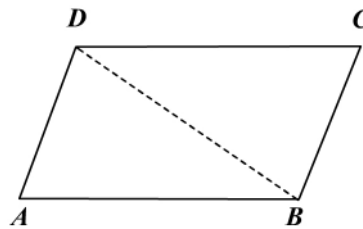


Figura 16.8

Hipótesis: $ABCD$ cuadrilátero
 $\overline{DC} \cong \overline{AB}$
 $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
 Tesis: $ABCD$ es un paralelogramo

Demostración

Trazamos la diagonal \overline{BD} . Como $\overline{DC} \cong \overline{AB}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (hipótesis) y \overline{DB} es común, entonces $\triangle DCB \cong \triangle BAD$ por L-L-L; de esta congruencia concluimos que $\widehat{CDB} \cong \widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD} \cong \widehat{ADB}$.

Los ángulos anteriores no sólo son congruentes, sino también alternos internos, lo cual implica que $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, según el teorema 15.1.1.

Podemos entonces concluir que $ABCD$ es un paralelogramo por tener sus lados opuestos paralelos (definición).

Teorema 16.1.8 (recíproco del teorema 16.1.5)

Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo (figura 16.9).

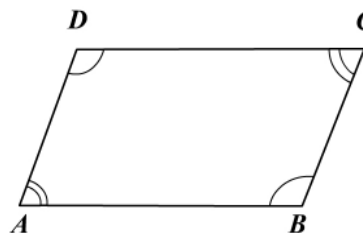


Figura 16.9

Hipótesis: $ABCD$ cuadrilátero
 $\hat{A} = \hat{C}$
 $\hat{D} \cong \hat{B}$
 Tesis: $ABCD$ es un paralelogramo

Demostración

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360° . Entonces: $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360^\circ$.

Como $\hat{A} \cong \hat{C}$ y $\hat{D} \cong \hat{B}$, entonces $m(\hat{A}) = m(\hat{C})$ y $m(\hat{D}) = m(\hat{B})$, y si reemplazamos en la ecuación anterior obtenemos: $2m(\hat{A}) + 2m(\hat{D}) = 360^\circ$.

Simplificando: $m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180^\circ$. Luego \hat{A} y \hat{D} son ángulos colaterales interiores suplementarios y $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, según el corolario 15.1.1.

Si al hacer las sustituciones correspondientes en la primera ecuación obtenemos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180^\circ$, entonces por ser \hat{A} y \hat{B} colaterales interiores suplementarios

rios $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, según el corolario 15.1.1.

Como $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, tenemos que $ABCD$ es un paralelogramo (definición).

Teorema 16.1.9 (recíproco del teorema 16.1.6)

Si en un cuadrilátero las diagonales se intersecan en sus puntos medios, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 16.1.10

Si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos y congruentes, entonces es un paralelogramo (figura 16.10).

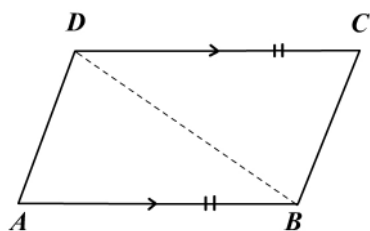


Figura 16.10

Hipótesis: cuadrilátero $ABCD$

$$\overline{DC} \parallel \overline{AB}$$

$$\overline{DC} \cong \overline{AB}$$

Tesis: $ABCD$ es un paralelogramo

Demostración

Trazamos la diagonal \overline{DB} .

$\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{DC} \cong \overline{AB}$, de la hipótesis.

$\angle CDB \cong \angle ABD$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas. Luego $\triangle CDB \cong \triangle ABD$ por L-A-L, y por ángulos correspondientes en triángulos congruentes $\angle ADB \cong \angle CBD$, lo cual implicaría que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (teorema 15.1.1) y concluimos entonces que $ABCD$ es un paralelogramo por tener a $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

Teorema 16.1.11

Los ángulos de un paralelogramo cuyos vértices son los vértices consecutivos del paralelogramo son suplementarios. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 16.1.12

Las diagonales de un rectángulo son congruentes (figura 16.11).

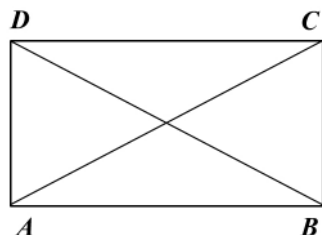


Figura 16.11

Hipótesis: $ABCD$ rectángulo

\overline{AC} y \overline{BD} diagonales

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Demostración

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\widehat{DAB} \cong \widehat{CBA}$ por ser $ABCD$ rectángulo.

$\triangle DAB \cong \triangle CBA$ por C-C, luego $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Teorema 16.1.13

Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, el paralelogramo es un rectángulo. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 16.1.14

Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí y bisectrices de los ángulos correspondientes (figura 16.12).

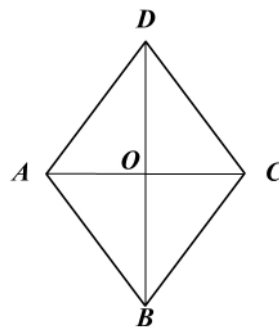


Figura 16.12

Hipótesis: rombo $ABCD$

\overline{AC} y \overline{BD} diagonales que se intersectan en O

Tesis: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

\overline{AC} bisectriz de \widehat{A} y \widehat{C}

\overline{BD} bisectriz de \widehat{D} y \widehat{B}

Demostración

$\overline{AD} \cong \overline{DC} \cong \overline{CB} \cong \overline{BA}$ porque $ABCD$ es un rombo.

$\triangle ADC \cong \triangle ABC$ por L-L-L, luego $\widehat{DAC} \cong \widehat{BAC}$ y $\widehat{DCA} \cong \widehat{BCA}$ por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes. Por tanto, \overline{AC} es bisectriz de \widehat{A} y \widehat{C} .

En forma similar se demuestra que \overline{BD} es bisectriz de \widehat{D} y \widehat{B} .

Como $D-O-B$ y $A-O-C$ (hipótesis) y las bisectrices a la base de triángulos isósceles son alturas, entonces $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Teorema 16.1.15

Las diagonales de un cuadrado son congruentes, se bisecan, son perpendiculares y bisectrices. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 16.1.16

En todo trapecio isósceles los ángulos que tienen por vértices los extremos de las bases correspondientes son congruentes. Las diagonales son congruentes. El punto de intersección de las prolongaciones de los lados no paralelos, los puntos medios de las bases y el punto de intersección de las diagonales son puntos colineales (figura 16.13).

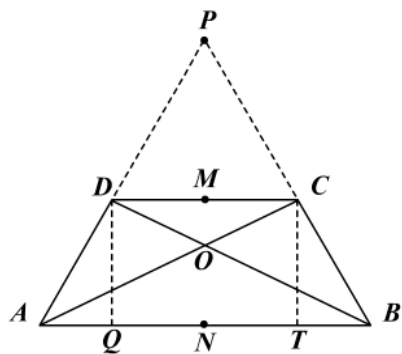


Figura 16.13

Hipótesis: trapecio $ABCD$

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AD} \cong \overline{CB}$$

$$\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{P\}$$

$$AC \cap BD = \{O\}.$$

Diagonales

M : punto medio de \overline{DC}

N : punto medio de \overline{AB}

Tesis: $\widehat{DAB} \cong \widehat{CBA}$

$$\widehat{ADC} \cong \widehat{DCB}$$

$$\overline{AC} \cong \overline{BD}$$

P, M, O, N colineales

Demostración

Se espera que el lector complete la demostración de acuerdo con las siguientes sugerencias:

1. Trace las alturas del trapecio desde D y C y demuestre que ellas son congruentes.

2. Los puntos P, M, O, N son colineales si y sólo si tienen la misma propiedad.

Demuestre que ellos pertenecen a la mediatriz de \overline{AB} (equidistan de A y B).

Ejemplo 16.1.1

Demuestre que las bisectrices de los ángulos opuestos de un paralelogramo son paralelas (figura 16.14).

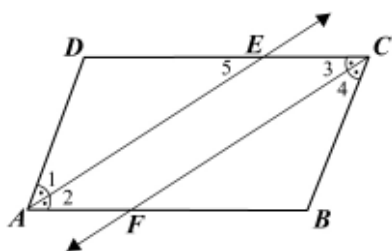


Figura 16.14

Hipótesis: paralelogramo $ABCD$

\overrightarrow{AE} bisectriz de \hat{A}

\overrightarrow{CF} bisectriz de \hat{C}

Tesis: $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{CF}$

Demostración

Por ser $ABCD$ un paralelogramo podemos afirmar que $DC \parallel AB$ y $\hat{A} \cong \hat{C}$ (¿por qué?).

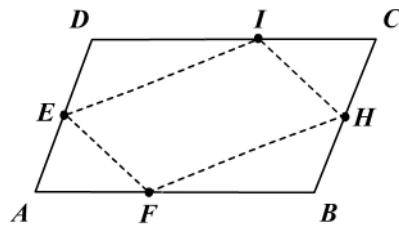
$\hat{A}_1 \cong \hat{A}_2 \cong \hat{C}_3 \cong \hat{C}_4$ por ser \overrightarrow{AE} y \overrightarrow{CF} bisectrices de ángulos congruentes ($\hat{A} \cong \hat{C}$).

$\hat{E}_5 \cong \hat{A}_2$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas ($\overline{DCE} \parallel \overline{AB}$), y por

transitividad, entonces $\hat{E}_5 \cong \hat{C}_3$. Luego $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{CF}$ por el teorema 15.1.2.

Ejemplo 16.1.2

En la figura 16.15:



Hipótesis: \overline{ABCD} es un paralelogramo
 $\overline{DE} \cong \overline{BH}$
 $\overline{AF} \cong \overline{CI}$
 Tesis: $EFHI$ es un paralelogramo

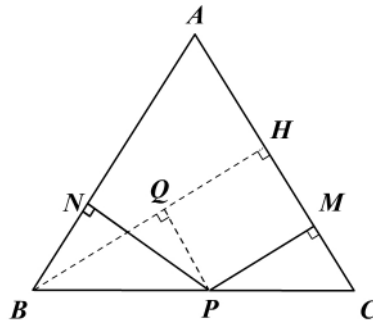
Figura 16.15

Demostración

Como $\overline{DC} \cong \overline{AB}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ($ABCD$ es un paralelogramo), y de la hipótesis $\overline{DE} \cong \overline{BH}$ y $\overline{AF} \cong \overline{CI}$, entonces $\overline{AE} \cong \overline{CH}$ y $\overline{DI} \cong \overline{FB}$ (sustracción de segmentos). Además $\hat{D} \cong \hat{B}$ y $\hat{A} \cong \hat{C}$ (¿por qué?). De lo anterior tenemos que $\triangle EDI \cong \triangle HBF$ y $\triangle EAF \cong \triangle HCI$ por L-A-L. Por tanto, $\overline{EI} \cong \overline{FH}$ y $\overline{EF} \cong \overline{HI}$, luego $EFHI$ es un paralelogramo (teorema 16.1.7).

Ejemplo 16.1.3

Desde un punto cualquiera de la base de un triángulo isósceles se trazan segmentos perpendiculares a los lados congruentes. Demuestre que la suma de las medidas de estos segmentos es una constante (la altura es una constante) (figura 16.16).



Hipótesis: $\triangle ABC$ isósceles
 $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
 $P \in \overline{BC}$
 $\overline{PM} \perp \overline{AC}$, $\overline{PN} \perp \overline{AB}$
 Tesis: $PN + PM = \text{cte}$

Figura 16.16

Demostración

Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ (\overline{BH} altura) y $\overline{PQ} \perp \overline{BH}$.

$\overline{QH} = \overline{PM}$ por ser $QHMP$ un rectángulo.

$\hat{ABP} \cong \hat{ACP} \cong \hat{QPB}$ (¿por qué?)

$\triangle QPB \cong \triangle NBP$ por H-A. Luego $\overline{BQ} \cong \overline{PN}$ y $BH = BQ + QH = PN + PM = h = \text{cte}$.

Ejemplo 16.1.4

Los ángulos opuestos de un paralelogramo tienen por medida $(x + 40)^\circ$ y $(3x - 20)^\circ$. Halle la medida (en grados) de cada uno de los ángulos del paralelogramo.

Solución

Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes. Por tanto $x + 40^\circ = 3x - 20^\circ \Rightarrow 60^\circ = 2x \therefore x = 30^\circ$. Entonces cada uno de estos ángulos opuestos mide 70° . Cada uno de los otros dos ángulos mide $(360^\circ - 140^\circ)/2 = 110^\circ$ (¿por qué?).

Ejemplo 16.1.5

Las diagonales \overline{DB} y \overline{AC} de un paralelogramo se cortan en O . Si $OA = 15$, $OC = x + 2y$, $OB = x$, $OD = 3y - 5$, ¿cuánto mide cada diagonal?

Solución

$$\left. \begin{array}{l} OA = OC \Rightarrow 15 = x + 2y \\ OB = OD \Rightarrow x = 3y - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 4 \\ x = 7 \end{array}$$

$$\text{Luego: } AC = 15 + x + 2y \Rightarrow AC = 30$$

$$DB = x + 3y - 5 \Rightarrow DB = 14$$

Ejercicios

Módulo 16

1. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.
 - Todo cuadrilátero equilátero es un cuadrado.
 - Todo cuadrilátero equilátero es un rombo.
 - Un cuadrilátero equiángulo es un cuadrado.
 - Un rectángulo es un cuadrilátero equiángulo.
 - Un rombo es un trapecio equilátero.
 - Todo paralelogramo equiángulo es un cuadrado.
 - Todo rombo equiángulo es un cuadrado.
 - Todo rectángulo equilátero es un rombo.
 - Un cuadrilátero que tenga dos lados paralelos y los otros dos congruentes es un paralelogramo.
 - Si una diagonal de un cuadrilátero determina dos triángulos congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo.
 - Un cuadrilátero que tenga tres ángulos rectos es un paralelogramo.
 - Las diagonales de un cuadrado son mediatrices entre sí.
 - Las diagonales de un paralelogramo son congruentes.
 - Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, los demás son rectos.
 - Las diagonales de un cuadrilátero se cortan en sus puntos medios.
 - Los lados no paralelos de un trapecio isósceles forman ángulos congruentes con las bases.
 - Si un cuadrilátero tiene dos ángulos congruentes es un trapecio.
 - Las diagonales de un rectángulo son bisectrices.
 - Las bisectrices de dos ángulos “adyacentes” de un rectángulo son perpendiculares.
 - Las bisectrices de dos ángulos “adyacentes” de un rombo son perpendiculares.
 - Las bisectrices de dos ángulos “adyacentes” de un paralelogramo son perpendiculares.
 - Las bisectrices de dos ángulos adyacentes” de un cuadrado forman triángulos isósceles.
2. Halle las medidas de cada uno de los ángulos de un paralelogramo $ABCD$ si:
 - a. La medida de uno de ellos es 40° .
 - b. $m(\hat{A}) = 2m(\hat{B})$.
 - c. Dos ángulos adyacentes miden $x + 30^\circ$ y $2x - 50^\circ$.
3. Halle la medida de cada uno de los ángulos de un trapecio $ABCD$ con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ si:
 - a. $m(\hat{A}) = x + 10$, $m(\hat{B}) = 80^\circ$, $m(\hat{C}) = y$, $m(\hat{D}) = 2x - 5$.
 - b. $AD = BC$, $m(\hat{A}) = 5x$, $m(\hat{B}) = 2x + 30$, $m(\hat{C}) = y$.
 - c. $AD = BC$, $m(\hat{A}) = y$, $m(\hat{B}) = 2x$, $m(\hat{C}) = 3x$.
 - d. $AD = BC$, $m(\hat{A}) = 4x - 25$, $m(\hat{B}) = 2x + 15$, $m(\hat{D}) = 2y$.

4. $ABCD$ es un rombo. Halle x , y si:
- $m(\hat{C}) = 60^\circ$, $BC = 30$, $BD = y$, $CD = 3x - 12$.
 - $m(\hat{CBD}) = 3x + 10$, $m(\hat{ABD}) = 5x - 20$, $m(\hat{A}) = y$.
 - $AD = 7x$, $AB = 3x + 10$, $BC = y$.
5. $ABCDE$ es un pentágono regular. Se trazan las diagonales \overline{AC} , \overline{AD} y \overline{EC} . Halle la medida de los siguientes ángulos:
- $\angle ABC$, $\angle AED$, $\angle ECA$ y $\angle CAD$.
 - El que se forma entre \overline{AD} y \overline{EC} .

Resuelva los siguientes ejercicios (6 a 13) de acuerdo con la figura adjunta.

6. En la figura 1:

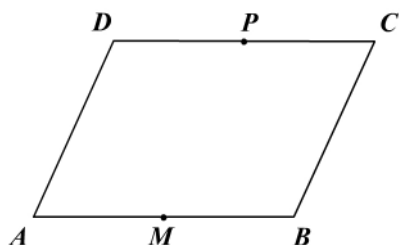


Figura 1

Hipótesis: $ABCD$ paralelogramo
 M punto medio de \overline{AB}
 P punto medio de \overline{DC}
 Tesis: $APCM$ es un paralelogramo

7. En la figura 2:

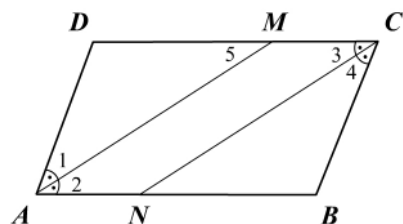


Figura 2

Hipótesis: $ABCD$ paralelogramo
 \overline{AM} bisectriz de \hat{A}
 \overline{CN} bisectriz de \hat{C}
 Tesis: $AMCN$ es un paralelogramo

8. En la figura 3:

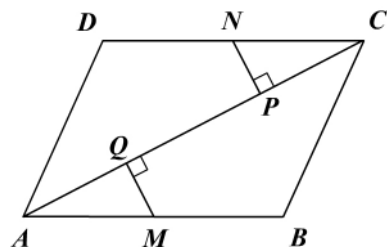


Figura 3

Hipótesis: $ABCD$ paralelogramo
 \overline{AC} diagonal
 N punto medio de \overline{DC}
 M punto medio de \overline{AB}
 $\overline{NP} \perp \overline{AC}$, $\overline{MQ} \perp \overline{AC}$
 Tesis: $QMPN$ es un paralelogramo

9. En la figura 4:

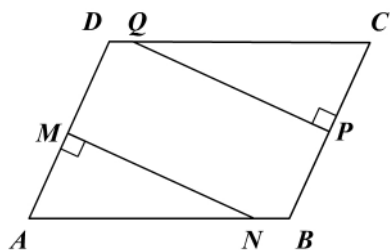


Figura 4

Hipótesis: $ABCD$ paralelogramo
 M punto medio de \overline{AD}
 P punto medio de \overline{CB}
 $\overline{MN} \perp \overline{AD}$, $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$
 Tesis: $MNPQ$ es un paralelogramo

10. En la figura 5:

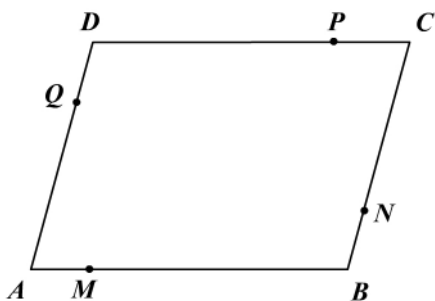


Figura 5

Hipótesis: paralelogramo $ABCD$
 $AM = BN = CP = DQ$
 Tesis: $MNPQ$ es un paralelogramo

11. En la figura 6:

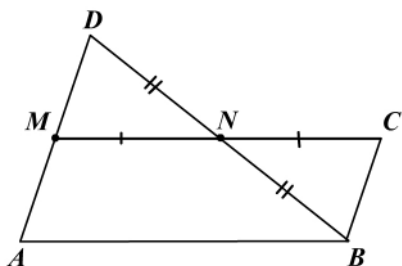


Figura 6

Hipótesis: $\triangle ABD$ con M punto medio de \overline{AD}
 N punto medio de \overline{DB} , $M - N - C$,
 $\overline{MN} \cong \overline{NC}$
 Tesis: $ABCM$ es un paralelogramo

12. En la figura 7:

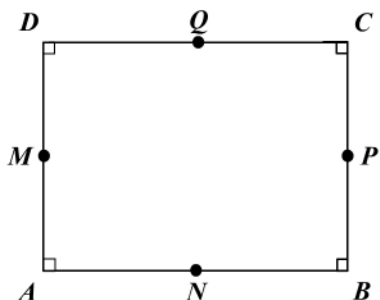


Figura 7

Hipótesis: rectángulo $ABCD$
 M, N, P, Q son los puntos medios
 de \overline{AD} , \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD}
 Tesis: $MNPQ$ es un rombo

13. En la figura 8:

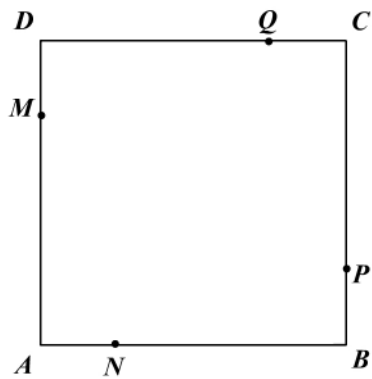


Figura 8

Hipótesis: $ABCD$ es un cuadrado

$AN = BP = CQ = DM$

Tesis: $MNPQ$ es un cuadrado

Módulo 17

Rectas y puntos notables

Contenidos del módulo

- 17.1 Puntos y segmentos notables en el triángulo
- 17.2 Transversales a rectas paralelas

Objetivos del módulo

1. Determinar las propiedades de la paralela media.
2. Establecer la relación entre la mediana y la hipotenusa.
3. Demostrar que las alturas, las medianas, las bisectrices y las mediatrices de un triángulo se cortan en puntos especiales (ortocentro, baricentro, incentro, circuncentro).
4. Analizar el teorema fundamental del paralelismo.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es la paralela media de un triángulo y qué propiedad tiene?
2. ¿Qué es la base media de un trapecio y qué propiedad tiene?
3. ¿En qué consiste el teorema mediana-hipotenusa?
4. ¿Qué relación establece el teorema 30° - 60° - 90° ?
5. ¿Qué es el baricentro de un triángulo y qué propiedad tiene?
6. ¿Qué es el incentro de un triángulo y qué propiedad tiene?
7. ¿Qué es el circuncentro de un triángulo y qué propiedad tiene?
8. ¿Qué es el ortocentro de un triángulo?
9. ¿En qué consiste el teorema fundamental del paralelismo?
10. ¿Qué es la recta de Euler?

Introducción

Se estudian en este módulo unos segmentos (notables) en el triángulo que tienen una propiedad especial y cuya intersección determina puntos especiales, como son: baricentro, incentro, circuncentro y ortocentro. Se termina con el estudio del teorema fundamental del paralelismo y las propiedades de la base media de un trapecio.



Leonhard Euler

(1707-1783). Matemático suizo nacido en Basilea y muerto en San Petersburgo (antes Petrogrado y luego Leningrado, en Rusia).



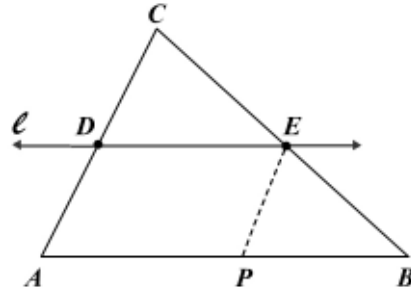
Vea el módulo 17
del programa de
televisión
*Geometría
Euclidiana*

17.1 Puntos y segmentos notables en el triángulo

En los triángulos hay segmentos y puntos llamados notables que tienen unas características especiales. Veamos:

Teorema 17.1.1

Si una recta interseca un lado de un triángulo en su punto medio y es paralela a uno de los lados, entonces interseca al tercer lado en su punto medio (figura 17.1).



Hipótesis: $\triangle ABC$
 $\ell \cap \overline{CA} = \{D\}$
 $\ell \cap \overline{CB} = \{E\}$
 D punto medio de \overline{CA}
 E punto medio de \overline{CB}

Tesis:

Figura 17.1

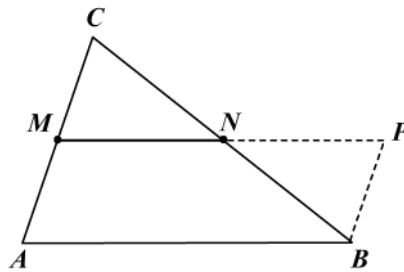
Demostración

Trazamos $\overline{EP} \parallel \overline{AC}$, y como $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, entonces $APED$ es un paralelogramo. Por tanto $\overline{EP} \cong \overline{AD} \cong \overline{DC}$ y $\widehat{PEB} \cong \widehat{ACB}$, $\widehat{EPB} \cong \widehat{A} \cong \widehat{CDE}$.

$\triangle EPB \cong \triangle CDE$ por A-L-A, lo cual implica que $\overline{CE} \cong \overline{EB}$, luego E es punto medio de \overline{CB} .

Teorema 17.1.2: De la paralela media

En todo triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado y su medida es la mitad de la medida del tercer lado (figura 17.2).



Hipótesis: $\triangle ABC$ con M punto medio de \overline{AC}
 N punto medio de \overline{BC}

Tesis: $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$
 $MN = AB/2$

Figura 17.2

Demostración

Prolongamos \overline{MN} hasta P tal que $\overline{MN} \cong \overline{NP}$ y unimos P con B .

$\triangle CNM \cong \triangle BNP$ por L-A-L ($CN = NB$, $\widehat{CNM} \cong \widehat{BNP}$, $MN = NP$).

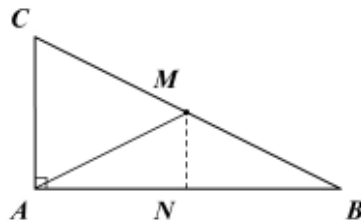
De esta congruencia se deduce que $\overline{PB} \cong \overline{CM} \cong \overline{MA}$ y $\widehat{PBN} \cong \widehat{C}$, lo cual implica (por el teorema 15.1.1) que $\overline{BP} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{AM}$; $ABPM$ es entonces un paralelogramo ($\overline{AM} \cong \overline{BP}$ y $\overline{AB} \cong \overline{MP}$) y sus lados opuestos son paralelos, o sea que $\overline{MP} \parallel \overline{AB}$ y tendríamos $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$.

Como $ABPM$ es un paralelogramo, entonces $AB = MP = MN + NP = 2MN$, de donde $MN = (AB)/2$.

Nota: \overline{MN} se llama *paralela media* (el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo).

Teorema 17.1.3: Mediana-Hipotenusa

El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo está a igual distancia (equidista) de los vértices del triángulo (figura 17.3).



Hipótesis: $\triangle ABC$ rectángulo en A
 M punto medio de \overline{BC}

Tesis: $MC = MB = MA$

Figura 17.3

Demostración

Trazamos por M , $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$.

$\overline{MN} \perp \overline{AB}$ (¿por qué?), y $\overline{AN} \cong \overline{NB}$ según el teorema 17.1.1. Ahora bien, el $\triangle MNA \cong \triangle MNB$ por C-C, luego $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, y como M es un punto medio de CB concluimos que $\overline{AM} \cong \overline{MB} \cong \overline{MC}$.

El teorema anterior también se suele enunciar como: “La mediana relativa a la hipotenusa tiene por medida la mitad de la medida de la hipotenusa”.

Corolario 17.1.1

La mediana relativa a la hipotenusa determina dos triángulos isósceles.

Teorema 17.1.4 (recíproco del teorema 17.1.3)

Si en un triángulo el punto medio de un lado equidista de los vértices, el triángulo es rectángulo. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 17.1.5: 30° - 60° - 90°

Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de medida 30°, entonces el cateto opuesto a este ángulo tiene una medida igual a la mitad de la medida de la hipotenusa (figura 17.4).

Leonhard Euler

Euler refinó los métodos y las formas del cálculo integral y ayudó a desarrollar la teoría de las funciones trigonométricas y logarítmicas. En el campo de la geometría desarrolló conceptos básicos como los del ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo, y revolucionó la forma de abordar el estudio de las funciones trigonométricas al adoptar razones numéricas y relacionarlas con los números complejos mediante la denominada «identidad de Euler». En el campo del álgebra también consiguió importantes resultados, como el de la reducción de una ecuación cúbica a una bicuadrada y el de la determinación de la constante que lleva su nombre. Aunque su principal formación académica era la de matemático, hizo aportes destacados a la astronomía, la mecánica, la óptica y la acústica. Es el matemático más prolífico de la historia, con una obra científica compuesta por más de ochocientos tratados.

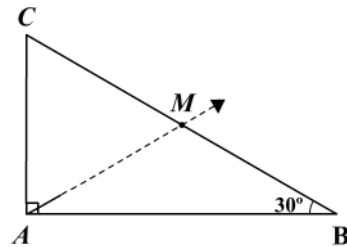


Figura 17.4

Hipótesis: $\triangle ABC$ con \hat{A} recto, $m(\hat{B}) = 30^\circ$

Tesis: $AC = CB/2$

Demostración

Como $m(\hat{A}) > 30^\circ$, construimos $\hat{MAB} \cong \hat{B}$ con $M \in \overline{CB}$.

Si $m(\hat{B}) = 30^\circ = m(\hat{MAB})$, entonces $m(\hat{C}) = 60^\circ = m(\hat{CAM})$ por ser complemento de 30° y $m(\hat{CMA}) = 60^\circ$. Luego $\triangle CAM$ es equilátero y $CA = CM = AM =$

$$MB = \frac{1}{2} CB.$$

Teorema 17.1.6 (recíproco del teorema 17.1.5)

Si un cateto mide la mitad de la medida de la hipotenusa en un triángulo rectángulo, entonces el ángulo opuesto al cateto mide 30° .

La demostración se deja como ejercicio. Puede considerar el punto medio de la hipotenusa o bien construir en el ángulo recto un ángulo congruente con un ángulo agudo del triángulo rectángulo.

Teorema 17.1.7: De las medianas

Las medianas de un triángulo se intersecan en un punto (baricentro) situado sobre cada mediana a los $2/3$ del vértice (figura 17.5).

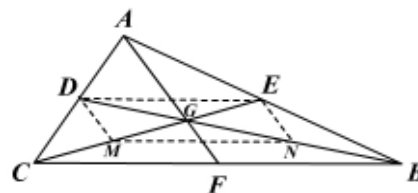


Figura 17.5

Hipótesis: $\triangle ABC$ con

\overline{BD} , \overline{CE} y \overline{AF} medianas

Tesis: G está en \overline{AF} , \overline{BD} y \overline{CE}

$$GB = \frac{2}{3} BD, GC = \frac{2}{3} CE$$

$$GA = \frac{2}{3} AF$$

Demostración

Sea G el punto de intersección de las medianas \overline{BD} y \overline{CE} ; además M y N los puntos medios de \overline{CG} y \overline{BG} . Entonces \overline{ED} y \overline{MN} son paralelas medias en el

$\triangle ABC$ y $\triangle BGC$, respectivamente, luego $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ y $ED = \frac{1}{2} BC$;

$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y $MN = \frac{1}{2} BC$.

Por transitividad $\overline{ED} \parallel \overline{MN}$ y $ED = MN$, entonces $EMND$ es un paralelogramo y

sus diagonales se cortan en sus puntos medios; por tanto: $GD = GN = NB = \frac{1}{3} BD$

y $EG = GM = MC = \frac{1}{3} EC$. Luego $BG = \frac{2}{3} BD$ y $CG = \frac{2}{3} CE$.

Sea ahora G' el punto de intersección de \overline{AF} y \overline{BD} , además P y M los puntos medios de \overline{AF} y \overline{BD} . En forma similar a la anterior se demostraría que $PDFM$ es un paralelogramo y por tanto $FG' = G'P = PA = \frac{1}{3} AF$ y $DG' = G'M = MB = \frac{1}{3} BD$.

Luego $AG' = \frac{2}{3} AF$ y $BG' = \frac{2}{3} BD$, entonces $BG' = \frac{2}{3} BD = BG$, y por tanto G' coincide con G y las tres medianas se cortan en G .

Teorema 17.1.8: De las mediatrices

Las mediatrices de los lados de un triángulo se intersecan en un punto (circuncentro) equidistante de los vértices del triángulo (figura 17.6).

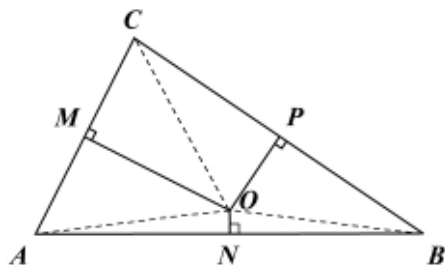


Figura 17.6

Hipótesis: $\triangle ABC$ con \overline{MO} mediatriz de \overline{AC}

\overline{PO} mediatriz de \overline{CB}

$\overline{NO} \perp \overline{AB}$

Tesis: N es punto medio de \overline{AB}

$\overline{AO} \cong \overline{BO} \cong \overline{CO}$

Demostración

Al decir en la hipótesis que $\overline{NO} \perp \overline{AB}$ y en la tesis que N es punto medio, entonces se puede concluir que NO es mediatriz de AB y está pasando por O , punto de intersección de las otras dos mediatrices.

$\triangle CMO \cong \triangle AMO$ por C-C ($\overline{OM} \perp \overline{AC}$ y M punto medio), luego $\overline{OA} \cong \overline{OC}$. (1)

$\triangle CPO \cong \triangle BPO$ por C-C ($\overline{OP} \perp \overline{CB}$ y P punto medio), luego $\overline{OB} \cong \overline{OC}$. (2)

Por transitividad de (1) y (2) $\overline{OA} \cong \overline{OB}$, y como $\overline{ON} \perp \overline{AB}$, entonces \overline{ON} es mediana y N es punto medio de \overline{AB} , por tanto \overline{NO} es mediatriz de \overline{AB} y pasa por O .

De (1) y (2) tenemos: $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$.

Teorema 17.1.9: De las bisectrices

Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo se intersecan en un punto (incentro) equidistante de los lados del triángulo (figura 17.7).

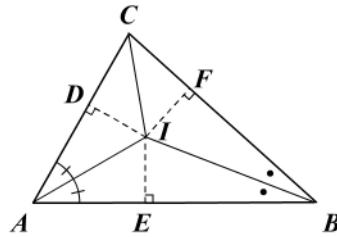


Figura 17.7

Hipótesis: $\triangle ABC$

\overrightarrow{AI} bisectriz de \hat{A}

\overrightarrow{BI} bisectriz de \hat{B}

$\overline{IE} \perp \overline{AB}$, $\overline{IF} \perp \overline{BC}$,

$\overline{ID} \perp \overline{AC}$

Tesis: $\overline{IE} \cong \overline{IF} \cong \overline{ID}$

\overrightarrow{CI} bisectriz de \hat{C}

Demostración

$\triangle AEI \cong \triangle ADI$ por H-A, de donde $\overline{ID} \cong \overline{IE}$.

$\triangle BEI \cong \triangle BFI$ por H-A, de donde $\overline{IE} \cong \overline{IF}$.

Por transitividad: $\overline{ID} \cong \overline{IE} \cong \overline{IF}$.

$\triangle CFI \cong \triangle CDI$ por H-C, de donde $\overline{DCI} \cong \overline{FCI}$ y \overrightarrow{CI} es bisectriz de \hat{C} .

El siguiente teorema no está relacionado con puntos y segmentos en el triángulo, pero nos servirá para demostrar el de las alturas.

Teorema 17.1.10

Si por cada vértice de un triángulo se traza una paralela al lado opuesto, se obtiene un nuevo triángulo en el cual los puntos medios de sus lados son los vértices del triángulo original (figura 17.8).

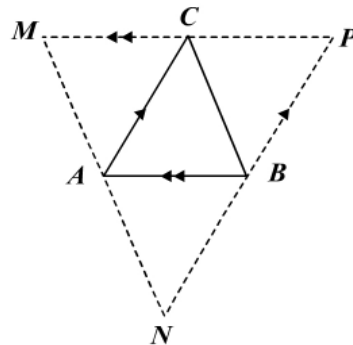


Figura 17.8

Hipótesis: $\triangle ABC$

$\overline{MAN} \parallel \overline{BC}$, $\overline{NBP} \parallel \overline{AC}$,

$\overline{MCP} \parallel \overline{AB}$

Tesis: $\overline{CM} \cong \overline{CP}$, $\overline{BP} \cong \overline{BN}$, $\overline{AM} \cong \overline{AN}$

Demostración

$ACPB$ y $ACBN$ son paralelogramos, por consiguiente $\overline{AC} \cong \overline{BP}$ y $\overline{AC} \cong \overline{BN}$; por transitividad se obtiene que $\overline{BP} \cong \overline{BN}$. (1)

$ABCM$ y $ACBN$ son paralelogramos, por consiguiente $\overline{AM} \cong \overline{CB}$ y $\overline{CB} \cong \overline{AN}$; por transitividad se obtiene que $\overline{AM} \cong \overline{AN}$. (2)

$ABCM$ y $ACPM$ son paralelogramos, por consiguiente $\overline{AB} \cong \overline{CM}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CP}$; por transitividad se obtiene que $\overline{CM} \cong \overline{CP}$. (3)

De (1), (2) y (3) queda demostrado el teorema.

Nota: podemos observar que los triángulos ABC , AMC , BPC y BNA son congruentes entre sí.

Teorema 17.1.11: De las alturas

Las alturas de un triángulo se intersectan en un punto (ortocentro) (figura 17.9).

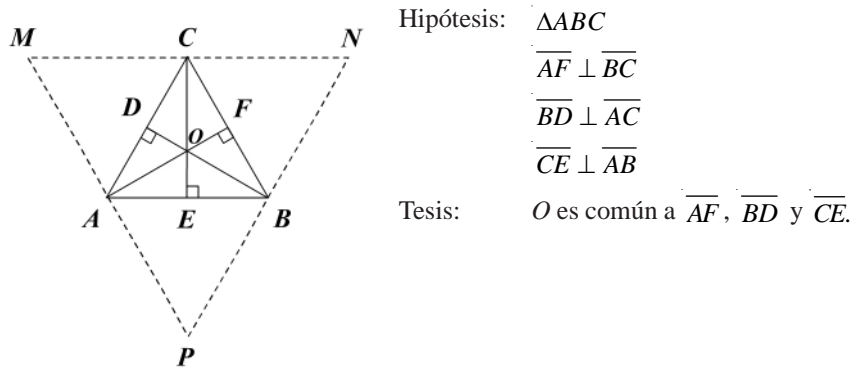


Figura 17.9

Demostración

Por los vértices del $\triangle ABC$ se trazan paralelas a los lados opuestos

($\overline{PAM} \parallel \overline{BC}$, $\overline{PBN} \parallel \overline{AC}$, $\overline{MCN} \parallel \overline{AB}$). Según el teorema 17.1.10, A , B y C son los puntos medios del $\triangle PNM$ resultante.

Como $\overline{AF} \perp \overline{BC}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{PM}$, y según el teorema 17.1.10, entonces la altura \overline{AF} es mediatriz de \overline{PM} ; con un razonamiento similar podemos afirmar que \overline{BD} y \overline{CE} son mediatrices de \overline{PN} y \overline{MN} , respectivamente, y las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto (teorema 17.1.8). Ese punto es el punto de intersección de las alturas.

Ejemplo 17.1.1

Si un triángulo tiene dos medianas congruentes, el triángulo es isósceles (figura 17.10).

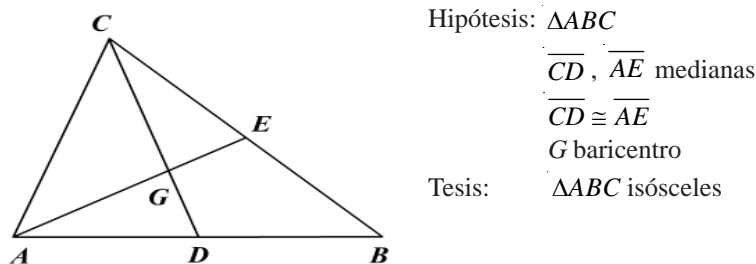


Figura 17.10

Demostración

Si G es el baricentro se tiene que $CG = \frac{2}{3} CD$ y $AG = \frac{2}{3} AE$ (teorema 17.1.7), y

como $AE = CD$ entonces $CG = AG$ y $\widehat{ACG} \cong \widehat{CAG}$.

$\triangle CAD \cong \triangle ACE$ por L-A-L ($CD = AE$, $\widehat{ACG} \cong \widehat{CAG}$, CA común). De esta congruencia se tiene que $\widehat{ACE} \cong \widehat{CAB}$ y en consecuencia $\overline{CB} \cong \overline{AB}$. Por tanto $\triangle ABC$ es isósceles.

Ejemplo 17.1.2

En un triángulo rectángulo la mediana relativa a la hipotenusa es de medida igual al segmento que une los puntos medios de los catetos (figura 17.11).

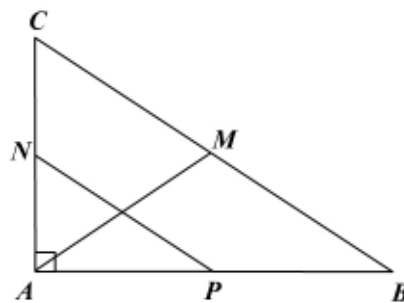


Figura 17.11

Hipótesis: $\triangle ABC$ con \hat{A} recto

\overline{AM} mediana

N punto medio de \overline{AC}

P punto medio de \overline{AB}

Tesis: $AM = NP$

Demostración

$PN = \frac{1}{2} CB$ porque \overline{PN} es paralela media (teorema 17.1.2).

$AM = \frac{1}{2} CB$ por teorema mediana-hipotenusa, luego $AM = PN$ por transitividad.

Ejemplo 17.1.3

Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo (figura 17.12).

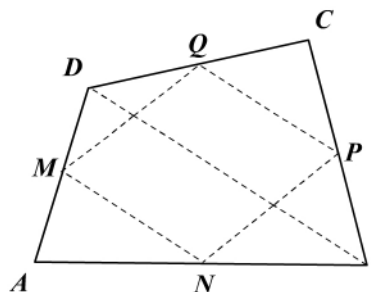


Figura 17.12

Hipótesis: cuadrilátero $ABCD$

M punto medio de \overline{AD}

N punto medio de \overline{AB}

P punto medio de \overline{BC}

Q punto medio de \overline{DC}

Tesis: $MNPQ$ es un paralelogramo

Demostración

Trazamos la diagonal \overline{BD} .

$\overline{MN} \parallel \overline{BD}$ y $MN = \frac{1}{2} BD$. \overline{MP} paralela media.

$\overline{PQ} \parallel \overline{BD}$ y $PQ = \frac{1}{2} BD$. \overline{PQ} paralela media.

Por transitividad se tiene que $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ y $\overline{MN} = \overline{PQ}$. Luego $MNPQ$ es un paralelogramo (teorema 16.1.10).

Ejemplo 17.1.4: La recta de Euler

En todo triángulo, el ortocentro H , el centroide G y el circuncentro O están alineados, y además $HG = 2GO$ (figura 17.13).

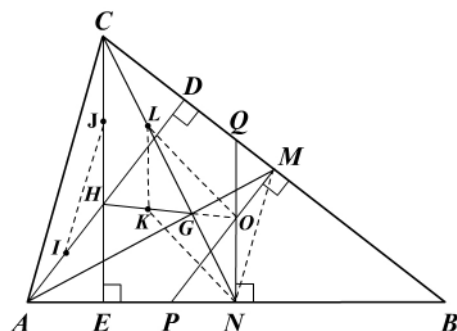


Figura 17.13

Hipótesis: $\triangle ABC$ con

H : ortocentro

G : baricentro

O : circuncentro

Tesis: $H - G - O$ colineales

$HG = 2GO$

Demostración

Sean I, J puntos medios de \overline{AH} y \overline{CH} , respectivamente. Entonces \overline{IJ} es paralela media en el $\triangle CHA$ y además \overline{MN} es paralela media en el $\triangle ABC$ (\overline{CN} y \overline{AM} son medianas), luego $\overline{IJ} \parallel \overline{AC}$, $IJ = \frac{1}{2} AC$ y $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, $MN = \frac{1}{2} AC$; por transitividad, $\overline{MN} \parallel \overline{IJ}$ y $MN = IJ$.

Ahora bien: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ y $\overline{MP} \perp \overline{BC}$, luego $\overline{AD} \parallel \overline{MP}$. Además $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ y $\overline{NQ} \perp \overline{AB}$, luego $\overline{CE} \parallel \overline{NQ}$.

Por tener los lados paralelos, $\hat{JID} \cong \hat{NMP}$ y $\hat{EJI} \cong \hat{QNM}$; estos ángulos congruentes y $\overline{IJ} \cong \overline{MN}$ implican que $\triangle JIH \cong \triangle NMO$ y en consecuencia $HJ = ON$ (1).

Sea L el punto medio de \overline{GC} y K el punto medio de \overline{HG} , entonces \overline{LK} es paralela media en el $\triangle CHG$ y por tanto $LK = \frac{1}{2} CH = HJ = ON$ (2) y además $\overline{LK} \parallel \overline{CH} \parallel \overline{CE} \parallel \overline{QN} \parallel \overline{ON}$; tenemos así que $LK = ON$ y $\overline{LK} \parallel \overline{ON}$, luego $LKNO$ es un paralelogramo (teorema 16.1.10) en el cual G es el punto medio (teorema 16.1.6) de \overline{LN} y \overline{KO} .

Como K es punto medio de \overline{HG} y G es punto medio de \overline{KO} , o sea $H - K - G$ y $K - G - O$, concluimos que $H - G - O$ son colineales y además $HG = 2GO$.

La demostración anterior está basada en la demostración hecha por el célebre matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). La recta que pasa por H, G y O se conoce con el nombre de “recta de Euler”.

17.2 Transversales a rectas paralelas

Cuando varias rectas paralelas son cortadas o intersecadas por otras rectas, se presentan segmentos con propiedades especiales.

Teorema 17.2.1 Teorema fundamental del paralelismo

Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una transversal, entonces determinan segmentos congruentes en cualquier otra transversal (figura 17.14).

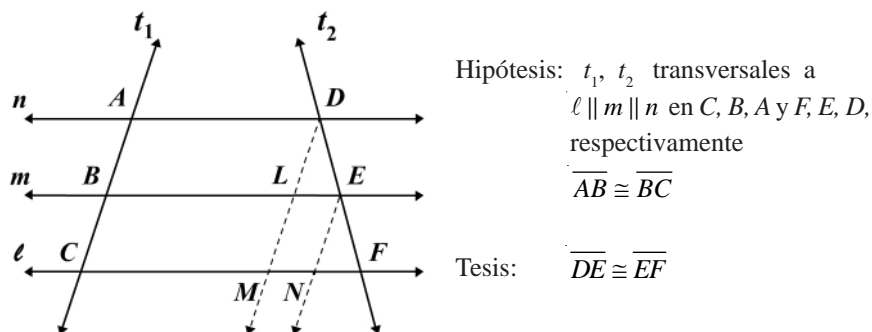


Figura 17.14

Demostración

Por D y E trazamos \overline{DLM} y \overline{EN} paralelas a t_1 .

$ABLD$ y $BCNE$ son paralelogramos (los lados opuestos son paralelos), luego $\overline{AB} \cong \overline{DL}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EN}$ por ser lados opuestos de paralelogramos.

$\widehat{NEF} \cong \widehat{LDE}$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas ($\overline{EN} \parallel \overline{DM} \parallel t_1$), y

por la misma razón $\widehat{ENF} \cong \widehat{BCN} \cong \widehat{ABE} \cong \widehat{DLE}$.

Si $\overline{AB} \cong \overline{DL}$, $\overline{BC} \cong \overline{EN}$ y $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, entonces $\overline{DL} \cong \overline{EN}$ y $\triangle DLE \cong \triangle ENF$ por A-L-A ($\widehat{NEF} \cong \widehat{LDE}$, $DL = EN$, $\widehat{ENF} \cong \widehat{DLE}$), de lo cual se concluye que $\overline{DE} \cong \overline{EF}$.

Nota: el teorema anterior es independiente de las posiciones relativas entre las transversales.

Teorema 17.2.2: De la base o mediana

En todo trapecio el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos (mediana) es paralelo a la base y su medida es la semisuma de las medidas de las bases (figura 17.15).

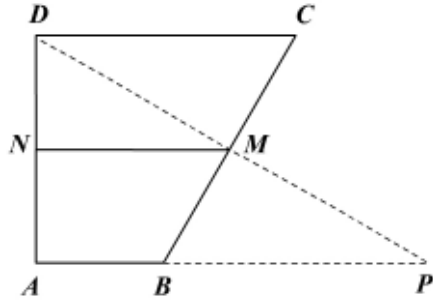


Figura 17.15

Hipótesis: trapecio $ABCD$
 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
 N punto medio de \overline{AD}
 M punto medio de \overline{BC}

Tesis: $\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$
 $MN = \frac{AB + DC}{2}$

Demostración

Trazamos \overline{DM} y lo prolongamos hasta cortar la prolongación de \overline{AB} en P .

$\triangle MCD \cong \triangle MBP$ por A-L-A ($\hat{C} \cong \hat{M}BP$, $CM = BM$, $\hat{CMD} \cong \hat{BMP}$); entonces

$\overline{DM} \cong \overline{MP}$ y M es punto medio de \overline{DP} , además $\overline{DC} \cong \overline{BP}$.

N y M son puntos medios de \overline{DA} y \overline{DP} , luego \overline{NM} es paralela media en $\triangle APD$ y

por el teorema 17.1.2 $\overline{MN} \parallel \overline{AP}$ y $MN = \frac{1}{2} AP$.

Si $A - B - P$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{AP}$, entonces $\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

Si $DC = BP$, $AP = AB + BP$ y $NM = \frac{1}{2} AP$, entonces $MN = \frac{AB + DC}{2}$.

Corolario 17.2.1

La mediana o base media de un trapecio biseca cualquier segmento que una las bases. Demuéstrelo.

Teorema 17.2.3

En todo trapecio el segmento que une los puntos medios de las diagonales es paralelo a las bases y su medida es la semidiferencia de las medidas de las bases (figura 17.16).

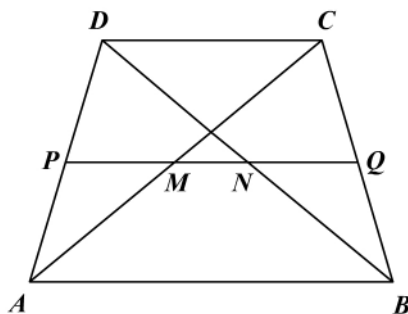


Figura 17.16

Hipótesis: trapecio $ABCD$
 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
 M punto medio de \overline{AC}
 N punto medio de \overline{BD}

Tesis: $\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$
 $MN = \frac{AB - DC}{2}$

Demostración

Sea P punto medio de \overline{AD} y Q punto medio de \overline{CB} . Por el teorema de la paralela media en el $\triangle ADC$ tendremos que $\overline{PM} \parallel \overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $PM = \frac{1}{2} DC$. Por el mismo

teorema en el $\triangle ACB$ tendremos que $\overline{MQ} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $MQ = \frac{1}{2} AB$.

Aplicando el mismo teorema en el $\triangle BCD$ tendremos $\overline{NQ} \parallel \overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $NQ = \frac{1}{2} DC$.

Por transitividad $\overline{PM} \parallel \overline{MQ} \parallel \overline{NQ} \parallel \overline{DC} \parallel \overline{AB}$, lo cual indica que P, M, N, Q

tienen que ser colineales porque de lo contrario se tendrían rectas diferentes paralelas a AB y DC por P, M, N, Q , contradiciendo el postulado de las paralelas. Por consiguiente $\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

$$\text{Además } MN = PQ - PM - NQ = \frac{AB + DC}{2} - \frac{DC}{2} - \frac{DC}{2}.$$

$$\therefore MN = \frac{AB - DC}{2}.$$

Ejemplo 17.2.1

Se prolongan hasta O los lados no paralelos de un trapecio $ABCD$ isósceles. Se une el punto medio M de \overline{AO} con el punto medio N de \overline{BO} . Sean P y Q los puntos medios de las diagonales. Demuestre que $MPQN$ es un trapecio isósceles (figura 17.17).

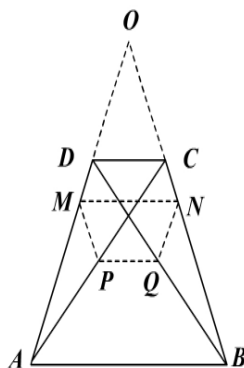


Figura 17.17

Hipótesis: $ABCD$ trapecio con:

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$$

$$\overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BC} = \{O\}$$

M punto medio de \overline{AO}

N punto medio de \overline{BO}

P punto medio de \overline{AC}

Q punto medio de \overline{BD}

Tesis: $PQNM$ es un trapecio isósceles

Demostración

$\widehat{DAB} \cong \widehat{OBA}$ son ángulos de la base del trapecio isósceles (teorema 16.1.16), por consiguiente $\overline{AO} \cong \overline{BO}$, y por sustracción de segmentos se tiene que $\overline{DO} \cong \overline{CO}$ (1).

Por el teorema de la paralela media en el triángulo AOB tendremos que $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ (2),

y por el mismo 17.2.3 tendremos que $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$. (3)

De (2) y (3) tenemos $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ y por tanto $PMNQ$ es un trapecio. (4)

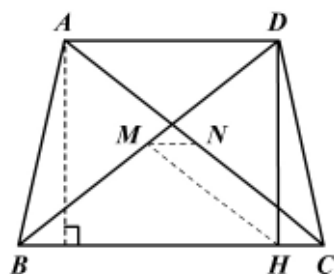
Por el teorema de la paralela media en los triángulos ACO y BDO y de (1) tendremos

$$\text{que } MP = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} OD = NQ. \quad (5)$$

De (4) y (5) concluimos que $MPQN$ es un trapecio isósceles. ¿Podrían llegar a ser M, P, Q, N colineales?

Ejemplo 17.2.2

En la figura 17.18:



Hipótesis: trapecio $ABCD$ con
 $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
 $\overline{DH} \perp \overline{BC}$
 M, N puntos medios de las diagonales
 Tesis: $MNCH$ es paralelogramo

Figura 17.18

Demostración

$\overline{MN} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{HC}$ y $MN = \frac{BC - AD}{2}$ por el teorema 17.2.3.

Trazamos $\overline{AI} \perp \overline{BC}$ y se obtiene que $IH = AD$ (¿por qué?). Además el $\triangle AIB \cong \triangle DHC$ por H-C ($AB = DC$ y $AI = DH$). Luego $BI = HC$.

$$\text{Tenemos entonces que } MN = \frac{AC - AD}{2} = \frac{BI + IH - HC - AD}{2} = HC.$$

Podemos por tanto afirmar que $MNCH$ es un paralelogramo ($\overline{MN} \parallel \overline{HC}$ y $MN = HC$).

¿De qué otra forma se puede demostrar que $MNCH$ es un paralelogramo?