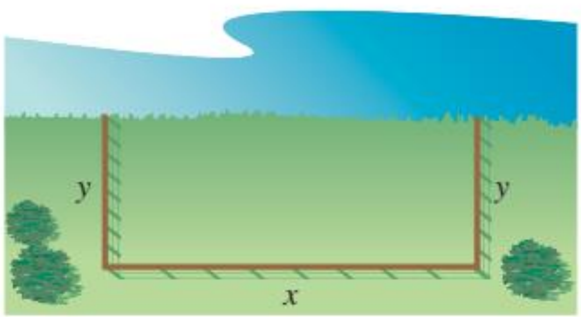
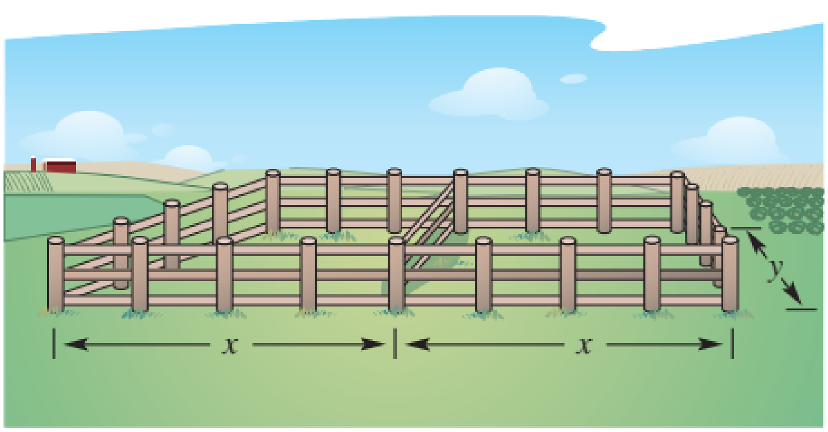
En los ejercicios 3 a 8, encontrar dos números positivos que satisfagan los requerimientos dados.

3. La suma es S y el producto es un máximo.
4. El producto es 185 y la suma es un mínimo.
5. El producto es 147 y la suma del primero más tres veces el segundo es un mínimo.
6. El segundo número es el recíproco del primero y la suma es un mínimo.
7. La suma del primero y el doble del segundo es 108 y el producto es un máximo.
8. La suma del primer número al cuadrado y el segundo es 54 y el producto es un máximo.

21. ***Área*** Un granjero planea cercar un pastizal rectangular adyacente a un río. El pastizal debe contener 245 000 m^2 para proporcionar suficiente pastura para el rebaño. ¿Qué dimensiones requeriría la cantidad mínima de cercado si no es necesario vallar a lo largo del río?



22. ***Área máxima*** Un ganadero tiene 400 pies de cercado con los cuales delimita dos corrales rectangulares adyacentes (ver la figura). ¿Qué dimensiones deben utilizarse de manera que el área delimitada será un máximo?



54. ***Costo mínimo*** Un pozo petrolero marino se encuentra a 2 kilómetros de la costa. La refinería está a 4 kilómetros por la costa. La instalación de la tubería en el océano es dos veces más cara que sobre tierra. ¿Qué trayectoria debe seguir la tubería para minimizar el costo?

14. Un recipiente rectangular de almacenaje con la parte superior abierta debe tener un volumen de 10 m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado. El material para los costados, \$6 por metro cuadrado. Encuentre el costo de los materiales para tener el más barato de esos recipientes.

15. Resuelva el ejercicio 14 suponiendo que el recipiente tiene una tapa que se fabrica del mismo material que los lados.

16. (a) Demuestre que de todos los rectángulos con un área dada, el que tiene el perímetro menor es un cuadrado.
(b) Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene el área máxima es un cuadrado.

17. Encuentre el punto en la recta $y = 4x + 7$ que está más cerca al origen.

18. Determine el punto en la recta $6x + y = 9$ que está más cerca al punto $(-3, 1)$.

47. Una refinería se localiza al norte de la orilla de un río recto que es de 2 km de ancho. Se debe construir una tubería desde la refinería hasta un tanque de almacenamiento que se localiza al sur de la orilla del río 6 km al este de la refinería. El costo de instalación de la tubería es 400 000 dólares/km en tierra hasta el punto P al norte de la orilla y 800 000 dólares/km bajo el río hasta el tanque. Con la finalidad de minimizar el costo de la tubería, ¿dónde se localiza P?

57. Un fabricante ha vendido 100 aparatos de televisión por semana a $450 cada uno. Una investigación de mercado indica que por cada $10 de descuento que ofrezca, el número de aparatos se incrementará en 1 000 por semana.

(a) Encuentre la función de demanda.

(b) ¿Cuán grande debe ser el descuento que ofrezca la compañía para maximizar su ingreso?

(c) Si la función de costo semanal es $C(x) = 68\,000 + 150x$, ¿cuál tiene que ser la magnitud del descuento para maximizar la utilidad?

58. Por experiencia, el gerente de un complejo de apartamentos de 100 unidades sabe que se ocuparán todas si la renta es de $800 al mes. Una investigación del mercado sugiere que, en promedio, quedará una unidad vacía por cada incremento de $10 en la renta. ¿Cuánto debe cobrar el gerente por renta para maximizar el ingreso?

8. *(Costos de cercas)* Un granjero desea delimitar una parcela rectangular de área 900 metros cuadrados. La cerca tiene un costo de $15 por metro. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la parcela de modo que se minimice el costo del cercado? ¿Cómo cambia su respuesta si el costo de cercado sube a $20 por metro?

9. *(Costos de cercas)* Repita el ejercicio 8 en el caso de que uno de los lados de la parcela es común a una cerca ya existente y sólo es necesario cercar tres lados.

21. *(Utilidad máxima)* Una empresa vende todas las unidades que produce a $4 cada una. El costo total de la empresa C por producir x unidades está dado en dólares por

$$C = 50 + 1.3x + 0.001x^2$$

a) Escriba la expresión para la utilidad total P como una función de x.

b) Determine el volumen de producción x de modo que la utilidad P sea máxima.

c) ¿Cuál es el valor de la utilidad máxima?

22. *(Utilidad máxima)* Una compañía advierte que puede vender toda la existencia de cierto producto que elabora a una tasa de \$2 por unidad. Si estima la función de costo del producto como $(1000 + \frac{1}{2}(x/50)^2)$ dólares por x unidades producidas:

a) Encuentre una expresión para la utilidad total si se producen y venden x unidades.

b) Determine el número de unidades producidas que maximizarían la utilidad.

c) ¿Cuál es la cantidad de utilidad máxima?

d) ¿Cuál sería la utilidad si se produjeran 6000 unidades?

25. *(Utilidad máxima)* Para cierto artículo, la ecuación de demanda es $p = 5 - 0.001x$. ¿Qué valor de x maximiza el ingreso? Si la función de costo es $C = 2800 + x$, encuentre el valor de x que maximiza la utilidad. Calcule la utilidad máxima.

26. *(Utilidad máxima)* Repita el ejercicio 25 para la ecuación de demanda $p = 8 - 0.02x$ y la función de costo $C = 200 + 2x$.

27. *(Efecto del impuesto en la producción)* La función de costo total de una fábrica está dada por

$$C(x) = 10 + 28x - 5x^2 + \frac{x^3}{3}$$

y la demanda del producto está dada por $p = 2750 - 5x$, donde p y x denotan el precio en dólares y la cantidad respectiva se grava con \$222 de impuesto por cada unidad producida, que el fabricante añade a su costo. Determine el nivel de producción (después de creado el impuesto) necesario para maximizar las utilidades. Muestre que la producción después del impuesto es menor que la producción antes del impuesto que maximiza las utilidades.

29. *(Tamaño del lote económico)* Un material se demanda a una tasa de 10,000 unidades por año; el precio del material es de \$2 por unidad; el costo de volver a surtir el almacén del material por orden, sin importar el tamaño de la orden (x), es de \$40 por orden; el costo de almacenar el material por un año es del 10% del valor de las existencias promedio ($x/2$). C es el costo anual de pedir y tener almacenado el material.

a) Demuestre que

$$C = 20{,}000 + \frac{400{,}000}{x} + \frac{x}{10}$$

b) Encuentre el tamaño económico del lote.

31. *(Modelo de costo de inventarios)* Un distribuidor de automóviles vende 100,000 autos al año y los pide a la fábrica en lotes de tamaño x. Cuesta \$1000 colocar cada pedido y los costos de almacenaje por automóvil son de \$200 al año. Calcule el tamaño óptimo de cada lote para minimizar la suma del costo del pedido y el costo de almacenaje.

33. *(Costo de la tierra)* Una compañía está buscando un terreno rectangular en el cual pueda construir un almacén nuevo. El área del almacén debe ser 6400 metros cuadrados. Debe tener en un lado del edificio 40 metros de ancho para la zona de carga y al frente 10 metros de ancho para estacionamiento. ¿Cuál es el área mínima de terreno que la compañía debe buscar?

34. *(Máximo ingreso)* Un restaurante especializado en carnes determina que al precio de \$5 por platillo de carne tendrán en promedio 200 clientes por noche, mientras que si lo vende a \$7 el número promedio de clientes bajará a 100. Determine la relación de demanda suponiendo que es lineal. Encuentre el precio que maximiza el ingreso.

35. *(Utilidad y satisfacción del cliente)* Un banco quiere recortar sus costos laborales reduciendo el número de sus cajeros, aunque espera una pérdida de negocios debido al descontento de los clientes por el tiempo de esperar. Supongamos que el salario de los cajeros es de \$80 diarios y la pérdida de utilidad por tener únicamente n cajeros es $5000/(n + 1)$ dólares diarios. Determine el valor de n que minimiza la suma de sus pérdidas más el costo del salario.

41. *(Rendimiento máximo de impuestos sobre las ventas)* La cantidad x de un artículo que puede venderse al mes a un precio p está dada por $x = 100(5 - p)$. La cantidad que los proveedores ofrecerán a un precio p_1 es $x = 200(p_1 - 1)$. Si existe un impuesto t por cada artículo (de modo que $p_1 = p - t$), determine la cantidad x que se vende al mes si el mercado está en equilibrio. Encuentre el valor de t que da el máximo impuesto total por mes al gobierno.

42. *(Rendimiento máximo de impuestos sobre las ventas)* Repita el ejercicio 41 si la ecuación de demanda es $x = 400(15 - p)$ y la ecuación de la oferta es $x = 400(2p_1 - 3)$. Calcule el rendimiento mensual del impuesto al gobierno.

38. *(Forma óptima de una lata)* Se desea fabricar latas cilíndricas con un volumen V dado. Pruebe que la forma de una lata que minimiza la cantidad de material utilizado (es decir, minimiza el área total de los lados, la base y la tapa), es tal que el radio es igual a dos veces la altura. (¿Por qué la mayoría de las latas no se hacen así?).