DEFINICIONES

DEFINICIÓN DE ASÍNTOTA VERTICAL

Si $f(x)$ tiende a infinito (o menos infinito) cuando x tiende a c por la derecha o por la izquierda, se dice que la recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f.

TEOREMA 1.14 ASÍNTOTAS VERTICALES

Sean f y g funciones continuas en un intervalo abierto que contiene a c. Si $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$, y existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ en el intervalo, entonces la gráfica de la función está dada por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene una asíntota vertical en $x = c$.

DEFINICIÓN DE UNA ASÍNTOTA HORIZONTAL

La recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de f si

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Estrategia para determinar límites en $\pm\infty$ de funciones racionales

1. Si el grado del numerador es *menor que* el grado de denominador, entonces el límite de la función racional es 0.
2. Si el grado del numerador es *igual al* grado de denominador, entonces el límite de la función racional es el cociente de los coeficientes dominantes.
3. Si el grado del numerador es *mayor que* el grado del denominador, entonces el límite de la función racional no existe.

EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 4, determinar si $f(x)$ tiende a ∞ o a $-\infty$ cuando x tiende a 4 por la izquierda y por la derecha.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x - 4}$

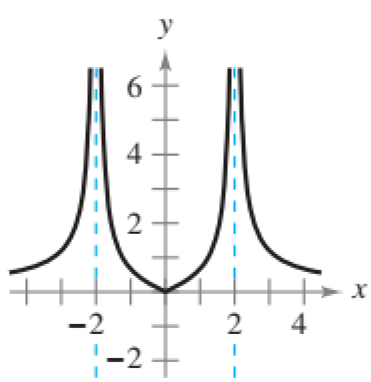
2. $f(x) = \dfrac{-1}{x - 4}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 4)^2}$

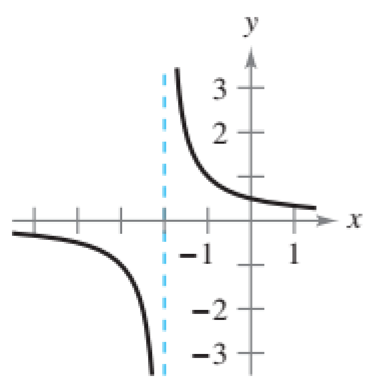
4. $f(x) = \dfrac{-1}{(x - 4)^2}$

En los ejercicios 5 a 8, determinar si $f(x)$ tiende a ∞ o a $-\infty$ cuando x tiende a -2 por la izquierda y por la derecha.

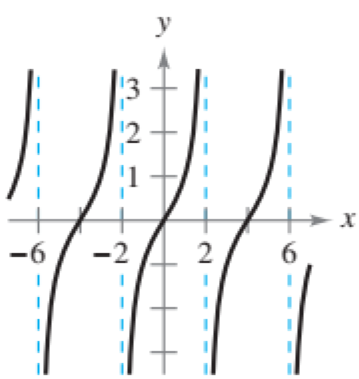
5. $f(x) = 2\left|\dfrac{x}{x^2 - 4}\right|$



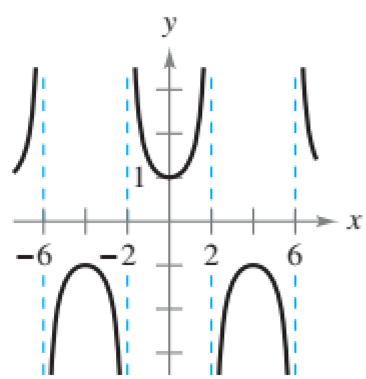
6. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$



7. $f(x) = \tan \dfrac{\pi x}{4}$



8. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{4}$



En los ejercicios 13 a 32, encontrar las asíntotas verticales (si las hay) de la gráfica de la función.

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

14. $f(x) = \dfrac{4}{(x - 2)^3}$

15. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

16. $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2 + 4}$

17. $g(t) = \dfrac{t - 1}{t^2 + 1}$

18. $h(s) = \dfrac{2s - 3}{s^2 - 25}$

19. $h(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - x - 2}$

20. $g(x) = \dfrac{2 + x}{x^2(1 - x)}$

21. $T(t) = 1 - \dfrac{4}{t^2}$

22. $g(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^3 - x^2 - 4x}{3x^2 - 6x - 24}$

23. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + x - 2}$

24. $f(x) = \dfrac{4x^2 + 4x - 24}{x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 18x}$

25. $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$

26. $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$

27. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^3 - 5x^2 + x - 5}$

28. $h(t) = \dfrac{t^2 - 2t}{t^4 - 16}$

29. $f(x) = \tan \pi x$

30. $f(x) = \sec \pi x$

31. $s(t) = \dfrac{t}{\operatorname{sen} t}$

32. $g(\theta) = \dfrac{\tan \theta}{\theta}$

En los ejercicios 37 a 54, calcular el límite.

37. $\displaystyle \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x + 1}$

38. $\displaystyle \lim_{x \to 1^-} \frac{-1}{(x - 1)^2}$

39. $\displaystyle \lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x - 2}$

40. $\displaystyle \lim_{x \to 1^+} \frac{2 + x}{1 - x}$

41. $\displaystyle \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{(x - 1)^2}$

42. $\displaystyle \lim_{x \to 4^-} \frac{x^2}{x^2 + 16}$

43. $\displaystyle \lim_{x \to -3^-} \frac{x + 3}{x^2 + x - 6}$

44. $\displaystyle \lim_{x \to (-1/2)^+} \frac{6x^2 + x - 1}{4x^2 - 4x - 3}$

45. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)}$

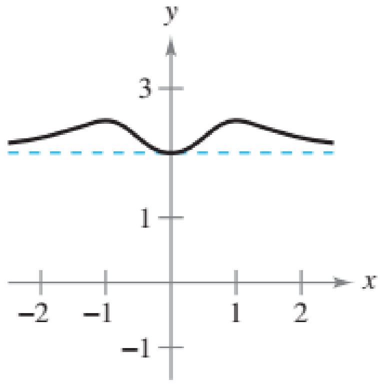
46. $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{x - 2}{x^2}$

47. $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

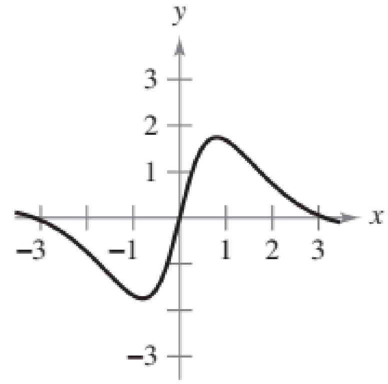
48. $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$

En los ejercicios 1 a 6, hacer que corresponda la función con una de las gráficas [*a*), *b*), *c*), *d*), *e*) o *f*)] utilizando como ayuda asíntotas horizontales.

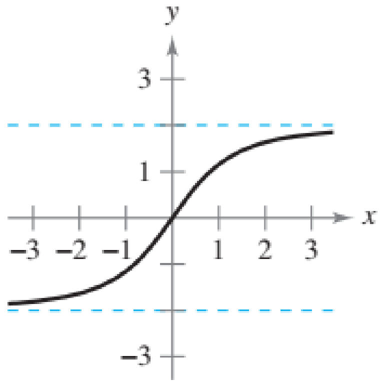
***a*)**



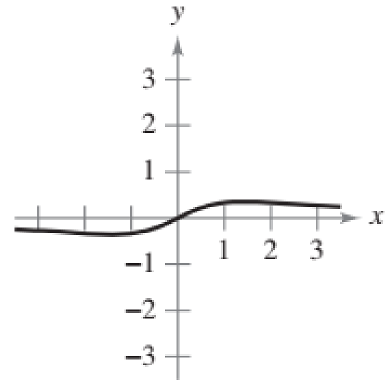
***b*)**



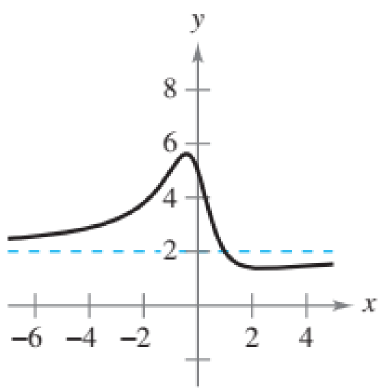
***c*)**



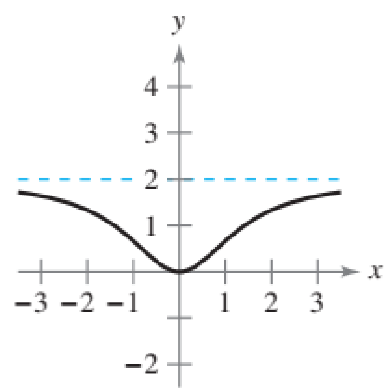
***d*)**



***e*)**



***f*)**



1. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 2}$

2. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

4. $f(x) = 2 + \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

5. $f(x) = \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$

6. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + 1}$

En los ejercicios 15 a 18, encontrar cada límite, si es posible.

15. *a*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2}{x^3-1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2}{x-1}$

16. *a*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-2x}{3x^3-1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-2x}{3x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-2x^2}{3x-1}$

17. *a*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-2x^{3/2}}{3x^2-4}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-2x^{3/2}}{3x^{3/2}-4}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-2x^{3/2}}{3x-4}$

18. *a*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^{3/2}}{4x^2+1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^{3/2}}{4x^{3/2}+1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^{3/2}}{4\sqrt{x}+1}$

En los ejercicios 59 a 76, dibujar la gráfica de la función utilizando extremos, intersecciones, simetría y asíntotas. Emplear después una herramienta de graficación para verificar el resultado.

59. $y = \dfrac{x}{1-x}$

60. $y = \dfrac{x-4}{x-3}$

61. $y = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

62. $y = \dfrac{2x}{9-x^2}$

63. $y = \dfrac{x^2}{x^2+16}$

64. $y = \dfrac{x^2}{x^2-16}$

65. $y = \dfrac{2x^2}{x^2-4}$

66. $y = \dfrac{2x^2}{x^2+4}$

67. $xy^2 = 9$

68. $x^2y = 9$

69. $y = \dfrac{3x}{1-x}$

70. $y = \dfrac{3x}{1-x^2}$

71. $y = 2 - \dfrac{3}{x^2}$

72. $y = 1 + \dfrac{1}{x}$

73. $y = 3 + \dfrac{2}{x}$

74. $y = 4\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

75. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}$

76. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$