La enseñanza del cálculo en ambientes tecnológicos

Book · January 2018

2 authors:


Cesar Martínez-Hernández
Universidad de Colima


Julio Cuevas
Universidad de Colima

Actividad con un enfoque técnico-teórico y uso de tecnología:
una aproximación al teorema del valor medio en ambiente GeoGebra
Cesar Martínez Hernández

Explorando el concepto de derivada y el diseño de actividades para su aprendizaje
José Carlos Cortés Zavala

Sistema de prácticas de modelación con el Tracker y GeoGebra de cuerpos en movimiento
para el aprendizaje del objeto matemático derivada
Rafael Pantoja Rangel
Otoniel Leal Medina

Actividades didácticas usando CAS de los aspectos básicos necesarios
para aprender el concepto de derivada
José Carlos Cortés Zavala
Eréndira Núñez Palenius

Actividad que promueve la comprensión del concepto de integral impropia
Liliana Aurora Tabares Sánchez

La integral impropia en un ambiente tecnologico digital
y su vinculación con la transformada de Laplace
Francisco Javier Cortés González

9 786078 062836

CENEJUS

Centro de Estudios Jurídicos y Sociales Mispat
Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Maestría en Derechos Humanos

LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULOEN AMBIENTES TECNOLÓGICOS   Martínez Hernández y Cuevas Romo (coords)

LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO EN AMBIENTES TECNOLÓGICOS

Diversas perspectivas sobre el diseño de actividades

Cesar Martínez Hernández
Julio Cuevas Romo
(coordinadores)

LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO EN AMBIENTES TECNOLÓGICOS

Cesar Martínez Hernández

Julio Cuevas Romo

(Coordinadores)

LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO EN AMBIENTES TECNOLÓGICOS

Centro de Estudios Jurídicos y Sociales Mispat

Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Aguascalientes/San Luis Potosí

2017

Martínez Hernández, Cesar (Coord.)

Enseñanza del cálculo en ambientes tecnológicos/ Cesar Martínez Hernández [y] Julio Cuevas Romo (Coordinadores). 1ª ed. Aguascalientes-San Luis Potosí: CENEJUS-UASLP, 2016.

230 p. 17x21 cm.

ISBN: 978-607-8062-83-6

1. Educación Matemática. 2. Procesos educativos. 3. Uso de tecnologías.

Primera edición, 2017
Colección Procesos educativos

ISBN: 978-607-8062-83-6

ÍNDICE

Segunda parte

Perspectivas sobre el diseño Actividades para la enseñanza del Cálculo Integral

PRÓLOGO

El uso de herramientas tecnológicas computacionales es importante en el aula de matemáticas. Este libro puede servir como material de guía y apoyo para los interesados en el uso de tecnología para la enseñanza y aprendizaje del cálculo, ya que el lector encontrará ejemplos de actividades de cálculo diferencial e integral que involucran diferentes tipos de tecnología.

Las actividades que se proponen en esta obra permiten reconocer la importancia de las distintas representaciones de los objetos matemáticos, y ponen de relieve lo fundamental que es el trabajo con papel y lápiz cuando se utilizan herramientas tecnológicas. Se presentan también diferentes perspectivas teóricas que sustentan el diseño de las actividades. Más allá de los diferentes contenidos matemáticos que se abordan en cada capítulo, lo importante es la discusión sobre las actividades y secuencias de enseñanza.

El contenido de este libro se ha estructurado en seis capítulos. En el primero, Cesar Martínez Hernández presenta un ejemplo de diseño de Actividad (y su secuencia) que aborda una aproximación al Teorema del Valor Medio en su interpretación geométrica en un ambiente GeoGebra, en el que es importante el trabajo con papel-y-lápiz que los alumnos llevan a cabo antes de usar el software, ya que se toma como punto de partida para posteriormente integrarlo con el desarrollado en GeoGebra y visceversa. El sustento teórico de la propuesta es la Aproximación instrumental (el enfoque Tarea-Técnica-Teoría).

El segundo capítulo, a cargo de José Carlos Cortés Zavala, muestra y explica una actividad de aprendizaje para el tema de Derivada sustentada en el uso de un software educativo especializado llamado *Fun Der* diseñado a partir de considerar el enfoque de las representaciones semióticas. En este se explica, de manera general, las características del software elaborado por el autor, así como la actividad propuesta en las que el tratamiento numérico y gráfico resultan importantes.

Por su parte, Rafael Pantoja Rangel y Otoniel Leal Medina en el tercer capítulo presentan una secuencia didáctica orientada a propiciar la comprensión del concepto de Derivada a partir de la razón de cambio y de la pendiente de una recta que pasa por dos puntos. La secuencia se sustenta en la teoría del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y de la Instrucción Matemática, específicamente con los objetos primarios: el lenguaje, la acción, la argumentación, el concepto y las propiedades. Se propone el uso GeoGebra y Tracker para la representación y resolución del problema planteado.

En el cuarto capítulo, José Carlos Cortés Zavala y Graciela Eréndira Nuñez Palenius presentan las bases teóricas de siete actividades diseñadas que abordan los diferentes aspectos relacionados con el concepto de Derivada (diferencias, pendientes, pendiente como función, límites, líneas secantes y tangentes, función derivada y aplicaciones) y proponen el uso de la calculadora simbólica Ti-Nspire CX CAS. Los autores ejemplifican su propuesta mediante una actividad ligada a uno de los siete aspectos (diferencias) relacionados con el concepto de derivada.

En el quinto capítulo, Liliana Aurora Tabares Sánchez muestra cómo la herramienta tecnológica (calculadora Voyage 200) puede ayudar al estudiante a obtener una mejor comprensión del concepto de integral impropia. La actividad que se propone está sustentada en el enfoque Tarea-Técnica-Teoría. De acuerdo con la autora, dicho enfoque ofrece formas de hacer más explicitas las conexiones entre las técnicas instrumentadas y los aspectos cognitivos y con ello lograr un mejor entendimiento de las dificultades de los estudiantes para resolver una Tarea dada. Así mismo, la autora menciona la importancia de que los alumnos estudien las integrales impropias en los dos ambientes: lápiz-y-papel y tecnológico.

En el capítulo seis, Francisco Javier Cortés González plantea la importancia de que el alumno del nivel superior construya conocimiento en un ambiente tecnológico digital sobre la integral impropia y su vinculación con la transformada de Laplace. En este capítulo se plantea la relevancia de utilizar la transformada de Laplace para resolver problemas en la ingeniería, en particular, se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales. En este sentido, el autor del capítulo propone una actividad basada en la aproximación instrumental y el uso del software Derive.

Finalizo este prólogo con una sugerencia para la lectura del libro: la estructura de esta obra no implica una lectura en la secuencia presentada ya que su importancia no radica en los temas matemáticos como tal, sino en el diseño de las actividades de enseñanza, el tipo de herramienta tecnológica que involucra y la discusión de sus bases teóricas.

Julio Cuevas Romo

PRESENTACIÓN

Con la aparición de la tecnología computacional en el ámbito de la educación matemática, distintas investigaciones han mostrado su potencial para promover nuevos acercamientos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, investigadores en el campo de la matemática educativa se han interesado en estudiar el papel de las nuevas tecnologías sobre el razonamiento matemático en torno al cálculo diferencial e integral en conceptos como el de función, límite, derivada, integral, entre otros.

Es también reconocido que el uso de nuevas tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas involucra replantear las actividades o secuencias didácticas utilizadas en el aula. Es decir, el uso de tecnología como un nuevo mediador en el aula impacta en las formas de trabajo tanto del profesor como del alumno. Así, es de interés las formas en que la tecnología puede ser utilizada o desarrollada y cómo ello se refleja en el diseño de actividades y secuencias didácticas que permitan un mejor aprovechamiento de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas.

En este sentido, el libro presenta una oportunidad de discusión sobre el diseño de actividades y secuencias de enseñanza en temas específicos de cálculo diferencial e integral a partir de la experiencia de distintos investigadores en el campo de la matemática educativa.

En las investigaciones sobre el uso de tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas poco se discute sobre el diseño mismo de las actividades. Por ello, toman relevancia preguntas tales como ¿de qué manera se refleja el uso de tecnología en el diseño de actividades o secuencias didácticas? ¿en qué sentido las bases teóricas de la educación matemática pueden apoyar el diseño de actividades que involucran el uso de tecnología?

A partir de la experiencia en la investigación sobre el uso de tecnología, de estudios previos y en curso, cada uno de los autores plantea, desde diferentes perspectivas teóricas y el uso de distintas tecnologías, actividades y secuencias que han elaborado y con las cuales han llegado a resultados alentadores para la enseñanza del cálculo.

La estructura del libro, por los temas que se abordan se ha planteado en dos secciones. La primera, con cuatro capítulos, abarca temas del cálculo diferencial. El nivel educativo en el que pueden ser ubicados estos cuatro trabajos es tanto para el nivel medio superior, como para un primer curso del nivel superior. La segunda sección, con dos capítulos, abordan temas del cálculo integral, el nivel educativo de estos se ubica en el nivel superior.

Como podrá darse cuenta el lector, la tecnología para la enseñanza del cálculo es diversa, así como las perspectivas teóricas que pueden sustentar los planteamientos para el diseño de actividades y secuencias de enseñanza. En este libro sólo se ha propuesto el uso de algunas de las tecnologías disponibles y se han expuesto también sólo algunas perspectivas teóricas de la matemática educativa que permiten fundamentar dichas actividades.

Se pretende que este libro sea un referente para investigadores, profesores de matemáticas en servicio o en formación y demás interesados en implementar tecnología en el aula, de manera que les sirva como apoyo para el diseño de sus propias actividades de trabajo o secuencias didácticas.

Cesar Martínez Hernández

ACTIVIDAD CON UN ENFOQUE TÉCNICO-TEÓRICO Y USO DE TECNOLOGÍA: UNA APROXIMACIÓN AL TEOREMA DEL VALOR MEDIO EN AMBIENTE GEOGEBRA

Cesar Martínez Hernández,
Universidad de Colima

Resumen

En este capítulo se exponen algunas ideas sobre el diseño de Actividades en la Educación Matemática, con base en literatura especializada en el tema, en particular cuando se hace uso de tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se presenta un ejemplo de diseño de Actividad (y su secuencia) que aborda una aproximación al Teorema del Valor Medio en su interpretación geométrica en un ambiente GeoGebra. La perspectiva teórica en la que se sustenta el diseño de la actividad es la conocida como Tarea-Técnica-Teoría (Artigue, 2002; Lagrange, 2003, 2005). Para mostrar el potencial de la Actividad diseñada, se hace referencia a resultados obtenidos con la implementación de una versión preliminar a ésta.

Palabras clave: Teorema del Valor Medio, Tarea-Técnica-Teoría, GeoGebra.

Introducción

Las investigaciones en Matemática Educativa que abordan problemáticas sobre el cálculo diferencial e integral se han centrado en el estudio, tanto en ambientes de papel y lápiz como tecnológicos, de conceptos centrales tales como covariación, función, límite, derivada e integral, lo anterior puede ser constatado en distintas compilaciones a lo largo de las tres últimas décadas (e.g., Ferrara, Pratt & Robutti, 2006; Hitt & Gonzalez-Martín, 2016; Tall, 1992; entre otros).

El estudio de dichos conceptos es fundamental en la matemática escolar, tanto en el nivel medio superior como superior, lo es también el aprendizaje de objetos matemáticos en los que tales conceptos centrales están involucrados, por ejemplo el Teorema del Valor Medio de Lagrange (TVM). Por lo tanto, su enseñanza es importante, en el sentido de que es el sustento de los resultados de carácter práctico del cálculo, por ejemplo, para la discusión de los criterios de máximos y mínimos (Rivera, 2007). El estudio usual de este teorema y su demostración es en términos sólo analíticos; poco se explota, en la enseñanza, su interpretación geométrica, ya que una aproximación mediante los recursos tradicionales permiten sólo un tratamiento estático de dicho teorema.

En este sentido, el presente capítulo aborda una propuesta de Actividad matemática que incorpora tanto el uso de papel-y-lápiz como de GeoGebra. De esta manera, la Actividad propone la idea de explorar el uso de geometría dinámica como una forma de aproximación al TVM, basado en su interpretación geométrica. Si bien el teorema en cuestión es de existencia, en este capítulo se plantea la importancia de abordarlo desde una perspectiva en la que alumno identifique y discuta los distintos objetos matemáticos que involucra, por ejemplo, función, continuidad, derivada, rectas parelelas, rectas tangentes, etc.

Antes de plantear el diseño de la Actividad, primero se presentan algunos antecedentes con base en la revisión de la literatura sobre algunos referentes teóricos y principios generales en torno al diseño de Actividades en la educación matemática. Segundo, se plantea la perspectiva teórica en la que se sustenta el diseño y la secuencia. Tercero, se propone la Actividad y su secuencia. Cuarto, se exponen algunos resultados que se han obtenido con una versión preliminar a la que aquí se plantea.

Antecedentes

Referentes teóricos para el diseño de Actividades

Uno de los temas actuales y relevantes en la matemática educativa gira en torno al diseño de Actividades[1] para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (e.g., Margolinas, 2013; Watson & Ohtani, 2015). En estos reportes, se presenta una compilación de diferentes perspectivas y variables que influyen en el diseño éstas. Por ejemplo, Watson y Ohtani (2015) señalan que entre los principales elementos se encuentran: los marcos teóricos y principios para el diseñode Actividades; la relación entre el

[1] En la literatura especializada en el tema, a la Actividad (matemática) también se le menciona como Tarea o Secuencia de Tareas; sin embargo, en este capítulo el término Tarea está reservado como elemento del sustento teórico, que se plantea más adelante. Así, el término Actividad debe entenderse como una secuencia en torno a una o más preguntas de una Tarea específica.

diseño, la pedagogía anticipada y la perspectiva del estududiante; el rol de las herramientas, entre otros.

La Actividad que se propone en este documento está relacionada con tres de los elementos planteados por Watson y Ohtani (2015), los enfoques teoricos, principios identificados en la literatura para el diseño y el rol de las herramientas tecnológicas. En particular, sobre los principios generales para el diseño, se toman en cuenta los planteados por Kieran y Saldanha (2008). Con base en estos elementos, la secuencia de la Actividad, que gira en torno al Teorema del Valor Medio, promueve el uso tanto de papel-y-lápiz como de GeoGebra[2].

Respecto a los referentes teóricos como elemento fundamental para el diseño de Actividades, Kieran, Doorman y Ohtani (2015) identifican que los marcos teóricos puedes ser adoptados, adaptados o bien desarrollados. En el presente capítulo, interesa adoptar los conceptos de la perspectiva Tarea-Técnica-Teoría (Artigue, 2002, Lagrange, 2003, 2005) como elemento central para el diseño de la Actividad.

Los marcos teóricos, de acuerdo con Kieran et al. (2015), pueden ser utilizados desde distintas perspectivas, entre otras, respecto al desarrollo del conocimiento matemático (conceptos, procedimientos, representaciones, etc.), para el desarrollo de procesos y razonamiento matemático (conjeturar, generalizar, probar, argumengtar, etc.), sobre la evaluación del conocimiento matemático, para la modelación y resolución de problemas, o bien para la integración de herramientas tecnológicas particulares. En este sentido, para Kieran et al (2015), los referentes teóricos permiten iluminar, inspirar, guiar, sistematizar e incluso contener el diseño de las Actividades.

Otra forma de uso de los referentes teóricos, de acuerdo con Kieran et al. (2015), consiste en relacionarlos e interpretarlos por niveles y con el aprendizaje de conceptos y procesos matemáticos específicos, a lo cual estos investigadores llaman marcos teóricos de: gran nivel, de nivel intermedio y de dominio específico. O bien relacionarlos con características particulares del ambiente de aprendizaje (e.g., el uso de herramientas

---

[2] En este documento, el uso de papel-y-lápiz y de GeoGebra se debe entender como *ambiente GeoGebra*. En la Actividad se propone el uso de papel-y-lápiz y de GeoGebra, tanto por separado como de manera conjunta. Es decir, el trabajo en un ambiente tecnológico (como GeoGebra) no debe excluir el uso de papel-y-lápiz.

tecnológicas). Respecto al uso de marcos teórico de gran nivel, éste implica el uso de teorías del aprendizaje en general, por lo que pueden ser utilizados para cualquier área de las matemáticas; por referentes de nivel intermedio, se refieren a marcos más especializados, sin embargo, también pueden ser aplicados a diferentes áreas de las matemáticas. Finalmente, los de dominio específico, implican marcos que especifican procesos de razonamiento o de contenido particulares. Esta clasificación por niveles, no excluye que puedan relacionarse entre sí.

Así, de acuerdo con Kieran et al. (2015) los referentes teóricos, ya sean interpretados por niveles o bien relacionados con características particulares del ambiente de aprendizaje, influyen en la forma en que la Actividad es diseñada, en cuanto a puntos específicos del inicio de ésta (o de la secuencia completa) o bien respecto a los objetivos de aprendizaje. De esta manera, los referentes teóricos adoptados o adaptados guían el desarrollo del proceso del diseño de la Actividad; lo que da como resultado características específicas de la misma, relacionadas principalmente con el contexto de la Actividad y con las oportunidades de aprendizaje que ofrece (e.g., construir sobre la base de la comprensión actual del alumno, compartir ideas y estrategias iniciales, etc.).

Diseño de Actividades que involucran el uso de herramientas tecnológicas

Referente al uso de herramientas (entre otras, las digitales), es reconocido, desde una perspectiva sociocultural, que éstas son mediadores que extienden las habilidades del usuario para llevar a cabo Tareas específicas, en nuestro caso, matemáticas (Kieran & Drijvers, 2006; Leun & Bolite-Frant, 2015). En este sentido, de acuerdo con Leun y Bolite-Frant (2015), la enseñanza de las matemáticas que involucra el uso de herramientas tecnológicas digitales le permite al profesor guiar al estudiante en la (re)invención de las matemáticas, en la que se debe tener en cuenta, entre otros, aspectos epistemológicos sobre el aprendizaje de las matemáticas y sobre cómo el profesor concibe el conocimiento matemático.

En este sentido, las diferentes aproximaciones epistemológicas al conocimiento matemático influyen en el diseño de la Actividad matemática, por ejemplo, éste puede estar orientado hacia la participación del estudiante en la construcción de experiencias matemáticas compartidas, o bien hacia el uso de las herramientas para explorar y construir conocimiento matemático personal. Además, las consideraciones epistemológicas y matemáticas deben estar ligadas con el potencial de las herramientas para representar y manifestar el conocimiento matemático (Leun & Bolite-Frant, 2015). Es decir, a la capacidad de las herramientas tecnológicas para representar los conceptos matemáticos y hasta dónde tienen la capacidad de establecer una correspondencia con la naturaleza simbólica de los objetos matemáticos.

Otro factor que influye en el diseño de Actividades matemáticas que involucra el uso de tecnología, son las consideraciones pedagógicas. Leun y Bolite-Frant (2015) plantean que éstas se refieren a identificar en la herramienta los modos de representación: basado en la acción (e.g., por medios físicos sensoriales), basado en la imágen estática o dinámica (e.g., graficadores) o basado en el lenguaje (e.g., el uso de comandos en los Sistemas Algebraicos Computacionales, CAS por sus siglas en inglés).

Principios generales para el diseño de Actividades

Además de tomar en cuenta la influencia que pueden tener las perspectivas teóricas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como el potencial y restricciones de la herramienta tecnológica elegida, en la literatura sobre el tema es posible identificar algunos principios generales para el diseño de Actividades. Por ejemplo, Prusak (2013, citado en Kieran et al, 2015) presenta, a partir de la revisión de la literatura los siguientes principios:

- Fomentar la producción de múltiples soluciones.
- Crear situaciones colaborativas.
- Involucrar (a los alumnos) en conflictos socio-cognitivos.
- Proveer a los estudiantes de herramientas para verificar hipótesis.
- Invitar a los estudiantes a reflexionar sobre sus soluciones.

Otro principio, que puede ser tomado en cuenta para las etapas de la Actividad matemática es la metodología ACODESA (Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Auto-reflexión) planteada en Hitt y Gozález-Martín (2015), ésta se refiere a:

- Trabajo individual, en el que los alumnos deben enfrentar al problema a resolver de manera individual para producir significados propios, correctos o incorrectos.
- Trabajo en Equipo, esta fase se plantea para que los alumnos, al trabajar sobre el mismo problema, lleguen a un refinamiento de sus

planteamientos iniciales a través de procesos de argumentación y validación.

- Debate (Discusión Grupal), en esta fase se espera que continúe el proceso de refinamiento de sus procesos de solución mediante la discusión con todo el grupo.
- Auto-reflexión, se trata de un proceso individual de reconstrucción de lo elaborado por el grupo.
- Institucionalización, el profesor introduce los conceptos y procesos matemáticos que involucra la Actividad, basado en las producciones de los estudiantes.

Otros principios para el diseño son los planteados en Kieran y Drijvers (2006) y Kieran y Saldanha (2008), éstos en particular están propuestos a partir de experiencias de los investigadores en estudios sobre el uso de tecnología CAS; sin embargo, como se describe más adelante, tales principios pueden ser aplicados cuando la tecnologia es geometría dinámica. Entre otros, de acuerdo con estos investigadores, algunos lineamientos a tomar en cuenta para el diseño de Actividades que involucran el uso de tecnología son:

- Interacción entre el trabajo con papel-y-lápiz y el trabajo con tecnología.
- Contraste de resultados obtenidos con los dos ambientes.
- Efecto sorpresa (de los resultados dados por la tecnología).
- Integración de trabajo previo (de la misma Actividad).
- Predicción de resultados (con tecnologia).
- Discusión de resultados.
- Verificación y reconciliación de resultados (de un ambiente a otro y visceversa).
- Movilización de conocimiento emergente.

Como se mencionó en párrafos precendentes, estos últimos principios han sido explotados en investigaciones que involucraron el uso de CAS, además de haberse basado en conceptos de la perspectiva teórica conocida como Tarea-Técnica-Teoría (Artigue, 2002, Lagrange, 2003, 2005). Algunos de estos principios son aplicados para el diseño de la Actividad planteada en este capítulo, que se sustenta en esa misma perspectiva teórica.

Perspectiva teórica

Como es planteado en Kieran et al. (2015) para el diseño de Actividades es importante tener en cuenta sustentos teóricos, de manera tal que sus conceptos se vean reflejados en dicho diseño. Uno de los marcos, de acuerdo con Leung y Bolite-Frant (2015) que puede ser y ha sido utilizado en el diseño de Actividades que involucran el uso de herramientas tecnológicas es la Aproximación instrumental; en particular su enfoque antropológico (Artigue, 2002; Lagrange, 2003, 2005). Éste enfoque ha sido utilizado en Actividades que involucran el uso de CAS (Kieran & Drijvers, 2006; Kieran & Saldanha, 2008; Martínez, Kieran & Guzmán, 2012). Este capítulo plantea la posibilidad de utilizarlo en una Actividad que utiliza Geometría Dinámica.

Con base en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1999), la cual plantea que los objetos matemáticos emergen en un sistema de prácticas (Chevallard la denomina *praxeologie*) caracterizado por cuatro componentes (*Tarea*, *Técnica*, *Tecnología* y *Teoría*), Artigue (2002) y sus colegas desarrollan la perspetica antropológoca de la Aproximación Instrumental. En términos de Chevallard (1999), la Tarea se entiende como el problema a resolver, se expresa mediante un verbo (e.g., calcular, resolver, simplificar, trazar, etc.) y en ésta se encuentra el objeto matemático de interés. La Técnica es el procedimiento o las formas de resolver la Tarea. La Tecnología es el discurso que explica y justifica la Técnica; finalmente, la Teoría es el discurso que provee de una base estructural a la Tecnología.

Estos cuatro componentes, Artigue (2002) y Lagrange (2003, 2005) los reducen a tres. A esta perspectiva se le conoce como: Tarea-Técnica-Teoría (T-T-T). Las primeras dos componentes coinciden con lo plateado en la TAD, mientras que el término Teoría combina las componentes Tecnología y Teoría propuestos por Chevallard (1999). En este sentido, la perspeciva T-T-T, no involucra el término tecnología; el cuál se deja para denominar a los instrumentos tecnológicos que median el trabajo de los alumnos.

Lo importante de la perspectiva T-T-T no es una simple reducción de las cuatro componentes de la TAD, sino la identificación de dos roles que juega la Técnica. Ésta, de acuerdo con Artigue (2002) y Lagrangue (2003, 2005), además de tener un rol pragmático, tiene también un papel epistémico. El pragmático es el que usualmente se le adjudica a la Técnica, en el sentido de que permite resolver la Tarea. Sin embargo, para Artigue y Lagrangue, la Técnica es en realidad más que la forma en que está definida en la TAD. Además de ser el procedimiento de resolver (o intentar resolver) la Tarea, su aplicación puede conducir al sujeto a reflexionar sobre los objetos (matemáticos) que involucra el problema.

Respecto a la Técnica, Artigue (2002) menciona que ésta es un ensamble complejo de razonamiento y trabajo rutinario, a la que sólo se le suele percibir y evaluar en términos de su valor pragmático; sin embargo, su valor epistémico contribuye a la comprensión de los objetos que involucra; es la fuente de preguntas sobre el conocimiento matemático. En este sentido, para Lagrangue (2003) la Técnica tiene un papel epistémico ya que contribuye a la comprensión de los objetos matemáticos que involucra durante su elaboración, promueve la reflexión conceptual cuando la Técnica es comparada con otras y cuando se discute su consistencia. Para Lagrange (2005) tal discusión ocurre en un nivel Teórico, en donde conceptos matemáticos, propiedades y un lenguaje específico aparecen.

Estos tres elementos son fundamentales en el diseño de la Actividad que se propone en este capítulo. Es decir, la Actividad matemática está alrededor de un problema a resolver (i.e., una Tarea o secuencia de Tareas), los procedimientos que involucra dicha Tarea (i.e., la Técnica o Técnicas) y las justificaciones que se solicita a los alumnos sobre las Técnica (i.e., la Teoría). De especial interés es tomar encuenta, no sólo el papel pragmático de la Técnica, sino también su rol epistémico, como a continuación se propone.

La Actividad y su secuencia

Lo planteado en los párrafos precedentes no son todos los factores que inciden en el diseño de Actividades, en este sentido, coincidimos con Kieran et al. (2015) respecto a otras variables que pueden influir en ello. Sin embargo, para los propósitos de este capítulo y como elementos primordiales para el diseño de las Actividades, la que aquí es planteado se sustenta en los antecedentes mencionados; principalmente, en los principios identificados por Kieran y Drijvers (2006) y Kieran y Saldanha (2008).

Así, el primer elemento que se toma en cuenta es la *interacción entre el trabajo con papel-y-lápiz y el trabajo con tecnología*, por lo que la Actividad comprende apartados de trabajo con papel-y-lápiz y trabajo con GeoGebra.

Respecto del la perspectiva T-T-T como perspectiva teórica que sustenta la Actividad, ésta incluye preguntas que se caracterizan como *técnicas* (si se pregunta por un procedimiento), *teóricas* (si se pide una justificación o explicación) y *técnico-teóricas* si incluyen ambas características, en torno a una *Tarea* específica: *trazar una recta tangente a la curva de una función y paralela a una secante*, de acuerdo con condiciones planteadas (i.e., una interpretación geométrica del TVM), como a continuación se detalla.

Parte I de la Actividad: Trabajo con papel-y-lápiz

La primera parte de la Actividad "Trazo de tangentes" consiste en presentar al estudiante una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, sobre la que se desarrollará todo el trabajo. Se propone este tipo de función para que el alumno identifique el punto máximo de ésta; con ello provocar dos posibles tipos de respuestas a la pregunta planteada. La Tarea principal de la Actividad consiste en *trazar una recta tangente a la curva de la función propuesta*. Sin embargo, a lo largo de la primera parte de la Actividad se plantean sub-tareas que conducirán a la Tarea principal. El objetivo de esta Parte I es identificar qué Técnicas emplea el estudiante para graficar rectas tangentes a la curva de la función propuesta y hacerlo reflexionar sobre la existencia o no de dicha recta tangente; además, averiguar el tipo de explicaciones que ofrece.

La Figura 1 muestra la Parte I de la Actividad. Ésta se compone de cuatro ítems. De los cuales tres son de carácter técnico en torno a las sub-tareas: graficar, determinar coordenadas y ecuaciones de rectas. El cuarto ítem es una pregunta teórica sobre la existencia de una recta tangente a la curva de la función propuesta y paralela a una secante.

El ítem Ia) es una sub-tarea que consiste en graficar la función planteada; se espera que los alumnos utilicen utilicen distintos procedimientos para graficarla. En este sentido, se podrán observar diferentes Técnicas para esta sub-tarea. El ítem Ib) es de carácter técnico, ya que en éste se solicita determinar dos coordenadas y la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos, se pide también gáficarla.

Trazo de tangentes
Parte I: Trabajo con papel-y-lápiz
Instrucciones: para contestar las siguientes preguntas, puede utilizar cualquier herramienta matemática (álgebra, geometría, cálculo, etc.)

Ia) Dada $f(x) = -(x-3)^2 + 4$, trace su gráfica.
Ib) Determine las coordenadas $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ de dos de sus puntos A y B. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos? (muestre su procedimiento) Trace la gráfica de la recta en el plano del inciso anterior
Ic) ¿Existe una recta que sea paralela a la recta secante anterior y tangente a la curva de la función en el intervalo (x_1, x_2)? Explique
Id) Si su respuesta a la pregunta del inciso anterior es afirmativa, determine la ecuación de dicha recta paralela a la secante y tangente a la curva de la función. Trace las gráficas correspondientes (de la función dada, la recta secante y la tangente) en un mismo plano cartesiano.

Figura 1. Parte I de la Actividad: trabajo con papel-y-lápiz.

En cuanto a Ic), es un ítem de tipo teórico, ya que se solicita un explicación sobre la existencia o no de una recta tangente con determinadas condiciones, en las que entra en juego el TVM. En tanto que esta pregunta se plantea con base en lo desarrollado en los dos ítems previos, esta parte de la Actividad incluye otro de los lineamientos sugeridos por Kieran y Saldanha (2008), *la integración de trabajo previo*. Por la forma de la función planteada al inicio de la Actividad, se espera que los alumnos respondan afirmativamente este ítem; puede ser en dos sentidos. El primero, a partir de considerar una recta no paralela al eje de las abscisas; el segundo, con base en una recta paralela a las abscisas. Este segundo sentido, es el más simple, ya que el punto máximo de la función les guiará su razonamiento, puesto que este punto (el máximo) es el punto de tangencia.

Por último, Id) es de tipo técnico, ya que en este se plantea la sub-tarea determinar la ecuación de la recta referida en Ic), además de pedir sean trazadas las gráficas correspondientes. En este momento de la Actividad, pueden emerger al menos dos tipos de respuestas. La primera relacionada con rectas no paralelas al eje de las abscisas; por lo que es posible que las técnicas empleadas estén basadas en el cálculo diferencial acerca de los métodos usuales para determinar rectas tangentes. La segunda, relacionada con rectas secantes paralelas al eje de las abscisas, por lo que no será necesario ninguna técnica que involucre la derivación, sino identificar el máximo de la función como el punto de tangencia.

En este sentido, esta parte de la Actividad promueve lo que Kieran y Saldanha (2008) llaman *la movilización de conocimiento emergente*. Una vez, que los alumnos utilizan lápiz-y-papel para resolver la primera parte de la Actividad, se propone una segunda (Parte II), con las mismas sub-Tareas para resolverlas mediante GeoGebra.

Parte II de la Actividad: Trabajo con GeoGebra y papel-y-lápiz

El objetivo de la segunda parte de la Actividad es que el alumno reelabore mediante GeoGebra el trabajo llevado con papel-y-lápiz, con la intención de que, mediante una construcción dinámica de la situación planteada, el estudiante visualice la posibilidad de trazar una recta tangente con las condiciones dadas. Para ello, se promueve el trabajo en la representación gráfica con GeoGebra, de manera que el arrastre que permite este software y el modelo matemático dinámico (en el sentido de Reyes & Santos, 2009) de la Tarea planteada (la situación en su conjunto), además del uso de comandos específicos de GeoGebra, promuevan un acercamiento gráfico para abordar la Tarea. Es decir, el uso de geometría dinámica, se plantea como una nueva Técnica que permite resolver la Tarea principal. La Figura 2 muestra los ocho ítems de que se compone la Parte II de la Actividad.

Trazo de tangentes (continuación)
Parte II: Trabajo con GeoGebra y papel-y-lápiz
Instrucciones: para responder a lo que se solicita utilice sólo las herramientas y comandos de las vistas albraica y geométrica, excepto para el último inciso.
IIa) Introduzca (grafique) la función $f(x) = -(x-3)^2 + 4$ en GeoGebra
IIb) Trace, mediante la herramienta “punto sobre objeto” dos puntos A y B sobre la gráfica de la función dada.
IIc) Trace una recta L1, mediante la herramienta “recta” que pase por A y B. ¿Cuál es la ecuación de la recta L1, de acuerdo con la vista algebraica? Explique y verifique analíticamente (con papel-y-lápiz) dicha ecuación:
IId) Con base en las herramientas y comandos de la vista gráfica, ¿es posible trazar una recta L2 que sea paralela a L1 y tangente a la curva de la función dada en el intervalo determinado por las abscisas de A y B?

Elabore un Modelo Dinámico de la situación planteada. Explique el modelo:
IIe) De ser posible trazar L2, ¿Cuál es su ecuación de acuerdo con la vista algebraica de GeoGebra? Explique cómo determinar el punto de tangencia:
IIf) "Arrastre" los puntos A y B (sobre la gráfica), ¿se mantiene la construcción realizada? Es decir, ¿la recta L2 es siempre paralela a L1 y tangente a la curva? Explique
IIg) Si la construcción se mantiene, aún si son arrastrados los puntos A y B, ¿cómo enunciaría el hecho matemático que se observa en dicha construcción?
IIh) Verifique analíticamente (con papel-y-lápiz) que en efecto L2 es tangente a la curva y paralela a L1 en el intervalo determinado por las abscisas de A y B.

Figura 2. Parte II de la Actividad: trabajo con GeoGebra y papel-y-lápiz.

Los ítems IIa) y IIb) son de carácter técnico, ya que en ellos se solicita utilizar GeoGebra para llevar a cabo las sub-tareas graficar y trazar dos puntos sobre dicha gráfica. De acuerdo con el marco T-T-T, el uso de las herramientas matemáticas es una nueva Técnica que permite resolver la Tarea, en este sentido Kieran y Drijvers (2006) mencionan que los artefactos tecnológicos son herramientas matemáticas que pueden ser consideradas como herramientas cognitivas que extienden las capacidades del usuario. Con base en este punto de vista de las herramientas tecnológicas, el uso de GeoGebra es considerado fundamental a lo largo de la Actividad aquí propuesta.

Por su parte, IIc) es un ítem técnico-teórico, ya que por un lado se solicita trazar mediante GeoGebra una recta con ciertas condiciones y, por otro, se pide una explicación sobre la recta que de manera automática proporciona la Técnica GeoGebra. Este ítem IIc) es una parte de la Actividad donde se promueve una interacción del trabajo con papel-y-lápiz y el trabajo con GeoGebra, en el sentido de que el alumno puede recurrir a su Técnica y explicaciones dadas en en la Parte I para fundamentar los resultados que obtiene en la Parte II, y visceversa, si es el caso.

El ítem IId) es de carácter teórico. En éste se solicita una explicación a la posibilidad de trazar o no una recta tangente que cumpla con las condiciones planteadas, a partir de un modelo dinámico de la situación (i.e., *predicción de resultados con tecnología*). Es decir, con base en la construcción previa de los ítems IIa) y IIb) (i.e., *integración de trabajo previo*), en IIc) se pide la elaboración de un modelo dinámico como medio que le permita al estudiante explorar la posibilidad de trazar la recta tangente sobre la curva de la función dada. La Figura 3 muestra representaciones de dos posibles modelos dinámicos que pueden emerger en IId).

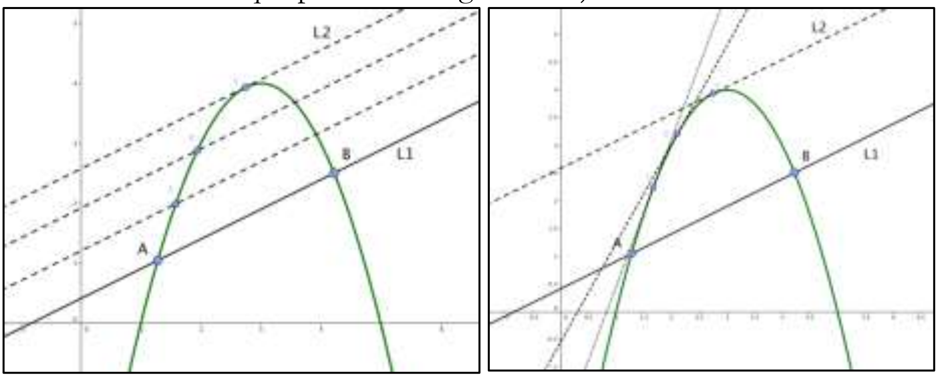


Figura 3. Posibles construcciones dinámicas (modelos dinámicos).

Dos de las posibles construcciones dinámicas que pueden llevar a cabo los alumnos, en esta parte de la Actividad, se presentan en la Figura 3. En el lado derecho de ésta, se representa un modelo que consiste en trazar rectas paralelas a la secante que pasa por A y B, y mediante el arrastre, determinar el punto de tangencia, de manera que L2 cumpla con las condiciones solicitadas. En el lado izquierdo de la Figura 3 se representa una situación similar en la que se utiliza la herramienta tangente, hasta localizar un punto en que L2 es paralela a L1.

Estos ejemplos (Figura 3) son construcciones que pueden ser inmediatas de elaborar, en el sentido de que se construyen partiendo de una de las condiciones (paralelismo o tangencia) para buscar la segunda (tangencia o paralelismo, respectivamente). Por supuesto, existen otras alternativas de construcción, por ejemplo mediante el uso de deslizadores. Sin embargo, se pretende que el modelo dinámico guíe el razonamiento del estudiante para determinar, de manera exacta el punto de tangencia mediante las exploraciones que el software permite (considerando las limitaciones de GeoGebra) a través de visualizar las interacciones entre los objetos matemáticos que el modelo dinámico involucra y otros que emergen en dichas exploraciones (e.g., el punto medio del segmento AB y el rastro o lugar geométrico que éste determina, el cual conduce a la solución de la Tarea). Lo anterior se cuestiona en IIe), por lo que este ítem es técnico-teórico, ya que se pregunta por la ecuación que se obtiene mediante GeoGebra y una explicación sobre cómo resolver la Tarea en este ambiente tecnológico; es decir esta parte de la Actividad cumple con la idea de *movilización de conocimiento emergente*.

Con base en la idea de que las posibles construcciones dinámicas que realicen los estudiantes sean como las planteadas en la Figura 3, se propone la pregunta del ítem IIf). En éste se pide que sean arrastrastrados los puntos A y B, de manera que se ponga a prueba la construcción desarrollada y, por lo tanto, la solución propuesta. Es decir, las construcciones planteadas en la Figura 3, son casos particulares, ya que si la recta secante es modificada, las soluciones propuestas sólo cumplen con una de las dos condiciones solicitadas, paralela a la secante o tangente a la curva; pero no ambas, por lo que en esta parte se explota el *efecto sorpresa* dado por el arrastre de la recta secante, respecto a la solución planteada. En este sentido, la pregunta de este ítem es caracterizada como técnico-teórica.

En IIg) se pregunta por las regularidades que los alumnos observan en su construcción dinámica. Esta pregunta es abierta, con la intención de que manifiesten todo aquello que son capaces de observar en la construcción. En esta parte de la Actividad, el papel del profesor es fundamental para que ellos, los estudiantes, hagan las conexiones con conceptos del cálculo diferencial y no sólo hagan alusión a aspectos geométricos; con ello, lograr una aproximación efectiva al TVM. En este sentido, este ítem es teórico.

Finalmente, en IIh) se promueve una *interacción entre el trabajo con papel-y-lápiz y con tecnología*, ya que se solicita al alumno verificar de manera analítica (en papel-y-lápiz) que la recta L2 determinada mediante GeoGebra cumple con las condiciones solicitadas. En este sentido, también se promueve la *verificación y reconciliación de resultados*. Es decir, el alumno mediante las técnicas usuales del cálculo diferencial, podrá validar si la recta en L2 es paralela a la secante L1 y tangente a la gráfica de la función. Este ítem se caracteriza como técnico-teórico, ya que mediante las técnicas del cálculo diferencial explicará y justficará la respuesta que se obtiene en GeoGebra.

Parte III de la Actividad: Trabajo con GeoGebra y papel-y-lápiz

Si los estudiantes, sólo son capaces de encontrar soluciones particulares a la Tarea; es decir, si sólo llevan a cabo construcciones dinámicas como las de la Figura 3, se sugiere guiar a los alumnos a que utilicen otras herramientas de GeoGebra (e.g., lugar geométrico) en ciertos puntos que se visualizan como importantes en las exploraciones que permite GeoGebra mediante el modelo dinámico. Como lo plantean Guven (2008) y Reyes y Santos (2009), el arrastre y el lugar geométrico que emergen de las exploraciones en la Geometría Dinámica promueven el desarrollo de conjeturas en torno a las relaciones matemáticas de los objetos que involucran las construcciones dinámicas. Es en este sentido que se propone la tercera parte de la Actividad (para promover otros modelos dinámicos). La Figura 4 muestra la estructura de la Parte III y las preguntas que involucra.

Trazo de tangentes (continuación)
Parte III: Trabajo con GeoGebra y papel-y-lápiz
Instrucciones: para resover lo que se solicita utilice las herramientas y comandos de las vistas algebraica y geométrica, así como papel-y-lápiz donde se indique.
IIIa) Con base en el modelo dinámico construido en la Parte II de esta Actividad, explore nuevamente en dicha construcción y especifique lo que para usted son todos aquellos elementos que entran en juego para resolver la Tarea planteada (trazar una recta tangente a la curva y paralela a la secante).
IIIb) A partir del modelo dinámico, cuya construcción involucra el trazo de rectas paralelas a la secante (si su modelo involucra rectas tangentes y no paralelas a la secante, haga las modificaciones necesarias), arrastre la recta paralela que pasa por A' y B' hasta que visualmente parezca tangente. Utilice un acercamiento (zoom) para determinar si en efecto es tangente[3]. Explique:
IIIc) Explore nuevamente con el modelo dinámico. Observe el segmento que une los puntos A' y B'. Trace la mediatriz de dicho segmento. ¿Considera que la intersección de la mediatriz y la gráfica de la función es el punto de tangencia? Explique
IIId) Continúe explorando con el modelo dinámico. Considere ahora el

[3] La Figura 5 muestra el tipo de construcción sobre la que se desarrolla la Parte III de la Actividad.

punto medio M del segmento que une los puntos A' y B'. Arrastre la recta paralela, ¿qué observa respecto al punto M cuando mueve la recta paralela?
IIIe) Continúe explorando con el modelo dinámico. Determine el lugar geométrico de M. ¿Considera que el lugar geométrico de M se relacionan con el punto de tangencia buscado? Explique
IIIf) De ser el caso, ¿cómo determinar el punto de tangencia a partir de considerar el lugar geométrico de M? Explique
IIIg) De haber determido el posible punto de tangencia, verifique anlíticamente (con papel-y-lápiz) si en efecto dicho punto permite trazar una recta para resolver la Tarea.

Figura 4. Parte III de la Actividad: trabajo con GeoGebra y papel-y-lápiz.

En la tercera parte de la Actividad se guía al estudiante a visualizar elementos geométricos que emergen de las exploraciones llevadas a cabo mediante el arrastre (ver Figura 5) en el modelo dinámico de la construcción basada en trazar rectas paralelas a la recta secante. En el sentido de la T-T-T, la Parte III de la Actividad se propone para ayudar al alumno a utilizar otras técnicas que posiblemente no sean tan inmediatas de aplicar, o incluso por el desconocimiento de ciertos comandos y herramientas de GeoGebra. De esta manera, se promueve lo planteado Sinclair y Robutti (2013) referente a la necesidad de ayudar a los estudiantes a utilizar las herramientas tecnológicas como instrumentos (en el sentido de la aproximación instrumental), en nuestro caso como herramientas matemáticas, es decir, como una Técnica que permite resolver la Tarea.

La tercera parte de la Actividad, al igual que las dos primeras, incluye ítems de carácter técnico, teórico y técnico-teóricos. Es decir, esta Parte III se enfoca en una discusión de las exploraciones del modelo dinámica que incluye el trazo de rectas paralelelas entre sí. De esta manera, en IIIa) se pregunta por una reflexión general acerca de los elementos geométricos que involucra dicho modelo, para posteriormente en IIIb) centrarse en discutir la construcción del tipo que se muestra en la Figura 5.

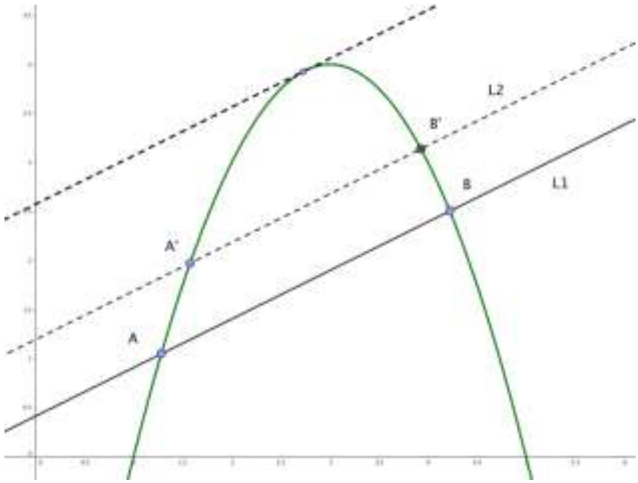


Figura 5. Construcción dinámica que involucra el trazo de paralelas y el arrastre.

Con base en una construcción como la que se plantea en la Figura 5, se pretende que el alumno discuta mediante el uso de la herramineta *zoom* la validez de una respuesta basada en esta construcción. Se plantea de esta manera, ya que posiblmente, sea una de las soluciones que ellos propongan en la segunda parte de la Actividad; por lo que resulta necesario hacer una discusión al respecto.

Otros elementos geométricos que pueden emerger se muestran en la Figura 6. Por ello, también en la Parte III, específicamente en el ítem IIIc), se explicita la construcción de la mediatriz del segmento que une A con B; con lo cual, es posible que dicha construcción sea tambien planteada como una solución. Esta parte de la Actividad permite una discusión al respecto.

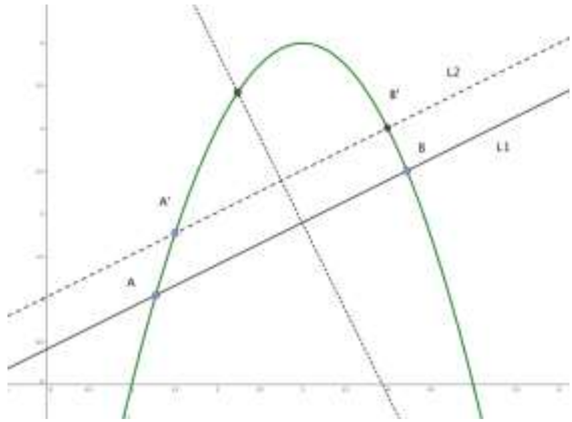


Figura 6. Construcción dinámica que involucra el trazo de la mediatriz del segmento A'B'

En el ítem IIId) se propone una discusión sobre el papel que juega el punto medio M del segmento que une A con B. De las exploraciones llevadas a cabo, se espera que se visualice M como elemento importante de las relaciones entre los objetos matemáticos que se observan en la construcción. Si en la Parte II de la Actividad no emergen este tipo de planteamientos en los estudiantes, la terecera parte de la Actividad lo propone explícitamente. Es decir, se propone en IIId)que el alumno trace una recta paralela L2 a la secante L1 y utilice el arrastre visualizando el punto medio M de los puntos donde la recta paralela corta a la gráfica de la función (Figura 7). Más aún, en IIIe) se solicita sea analizado el lugar geométrico de dicho punto M y su posible conexión con la solución a la Tarea (Figura 8).

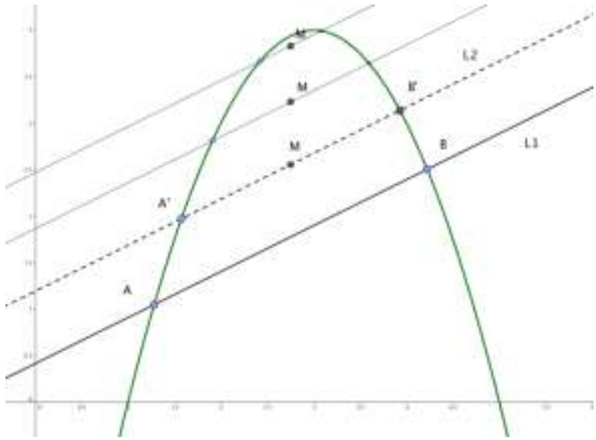


Figura 7. Construcción dinámica que involucra el punto medio del segmento AB

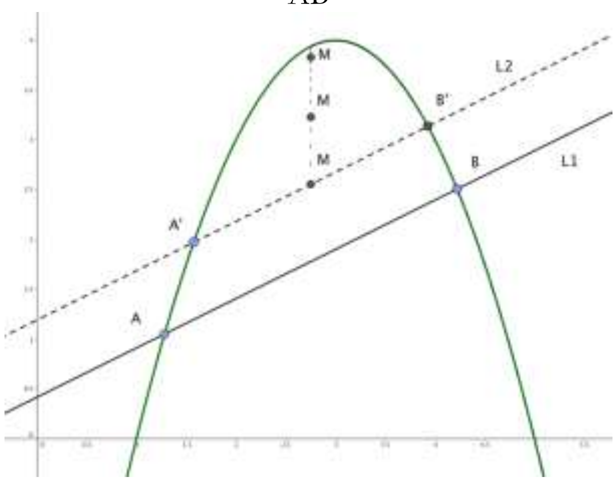


Figura 8. Construcción dinámica que involucra el lugar geométrico del punto medio M

En IIIf) el estudiante estará en condiciones de discutir cómo determinar el punto de tangencia a partir del lugar geométrico del punto M (Figura 8). Es decir, se pretende que los alumnos identifiquen la intersección de este lugar geométrico con la curva. Sin embargo, para ello será necesario un trazo auxiliar, la construcción de una recta que pase por dos puntos del lugar geométrico. De esta manera, la intersección entre esta última recta y la gráfica de la función determina el punto de tangencia. Por último, en IIIg) el alumno podrá verificar mediante técnicas del cálculo que el punto de tangencia calculado en los ítems previos, efectivamente, permite resolver la Tarea planteada.

Limitaciones de la Actividad propuesta

La Actividad propuesta bajo el enfoque T-T-T como una aproximación al TVM en su interpretación geométrica permite una discusión más amplia a partir del uso de GeoGebra, ya que mediante la exploración con el software es posible visualizar una serie de relaciones entre los objetos matemáticos de la construcción dinámica; lo que conduce a elaborar conjeturas en torno a dicha construcción. Sin embargo, la Actividad se desarrolla en torno a una Tarea que involucra sólo un tipo de función; por lo que es preferible que ésta sea expandida y se involucren otros tipos de funciones, aunque el modelo dinámico y las posibles relaciones matemáticas subyacentes a éste pueden ser de mayor complejidad.

Por ejemplo, si se considera una función polinomial de grado tres, puede ocurrir el caso en que existan dos rectas tangentes a la curva y parelelas a una secante; por lo que se debe tener precaución al considerar otras funciones. Ello no implica que no puedan ser tomadas en cuenta otras para visualizar la interpretación geométrica del teorema en cuestión. Otro elemento para ampliar la Actividad es considerar la demostración usual del teorema; es decir, en GeoGebra, llevar a cabo la diferencia de funciones que se plantea en dicha demostración y la aplicación del Teorema de Rolle; con ello, promover una discusión en la representación gráfica de la demostración usual. Puede considerarse también adaptar la Actividad, para que sea implementada utilizando otros softwares de geometría dinámica.

Tipos de resultados obtenidos con la Actividad

Una versión preliominar de las Partes I y II la Actividad propuesta se implementó con estudiantes de licenciatura y posgrado en enseñanza de las matemáticas. Con base en dicha implementación, se modificó la Actividad y se incluyó la Parte III. Algunos de los principales resultados obtenidos en la experimentación de la versión preliminar son los siguientes:

- Los alumnos utilizaron técnicas del cálculo diferencial para resolver la Tarea en el ambiente de papel-y-lápiz.

- Los estudiantes explicaron la posibilidad de trazar la recta tangente solicitada con base en la continuidad de la función planteada.
- La Técnica principal que utilizaron los alumnos para resolver la Tarea es el *arrastre* y el uso de *deslizadores*.
- Los estudiantes indentificaron relaciones matemáticas en los modelos dinámicos que construyen. De esta manera logran movilizar conocimientos que emergen de dichas construcciones.
- Para algunos estudiantes les fue complicado desprenderse de sus técnicas de papel-y-lápiz. Utlizaron GeoGebra sólo para verificar geométricamente sus resultados de papel-y-lápiz.
- En general, utilizar GeoGebra como herramienta matemática permitió a los estudiantes ampliar su repertorio de técnicas, por lo que su uso se convirtió en un factor principal de discusión y de contraste con sus técnicas de papel-y-lápiz.

Para mayores detalles de los resultados que se han obtenido hasta el momento mediante la experimentación llevada a cabo con estudiantes de posgrado, el lector puede consultar los avances reportados en Martínez y Ulloa (2015).

Conclusiones y reflexiones finales

El presente capítulo representa una contribución al campo de la Matemática Educativa cuyo interés se enfoca en el desarrollo de Tareas matemáticas que involucran el uso de tecnología. El propósito ha sido proponer una Actividad que permite aproximarse a la comprensión de un Teorema de existencia que involucra el concepto de derivada, más que en aprender dicho concepto com tal. De esta manera, la Actividad propuesta está en línea respecto a lo que plantean Watson y Ohtnai (2015), en torno a tomar en cuenta tres elementos: enfoques teoricos, principios para el diseño y el rol de las herramientas tecnológicas.

Respecto alenfoque teórico, la Actividad se sustenta en uno de nivel intermedio, de acuerdo con la caracterización de Kieran et al. (2015). Sobre los principios para el diseño, la Actividad toma en cuenta, principalmente lo propuesto por Kieran y Drijvers (2006) y Kieran y Saldahna (2008). En cuanto al rol de las herramientas tecnológicas, la Actividad se sustenta en lo planteado por Leun y Bolite-Frant (2015) respecto a las consideraciones epistemológicas del conocimiento matemático. Es decir, por un lado, la

Actividad promueve la construcción de experiencias matemáticas compartidas mediante el uso de la herramienta tecnológica para la exploración con modelos dinámicos. Por otro, se toma en cuenta la capacidad de la herramienta para representar los conceptos matemáticos que la Tarea involucra, mediante los modos de representación con que cuenta GeoGebra. Respecto al enfoque T-T-T, la Actividad propuesta muestra la capacidad de dicho enfoque para caracterizarla.

Finalmente, se sugiere que la la Actividad se para resuelva en Equipos de dos o tres estudiantes, para promover en ellos una discusión sobre la resolución de la Tarea. Esperamos que el lector interesado en el tema aplique la Actividad aquí propuesta y que la tome de referente para elaborar otras que aborden diferentes tópicos matemáticos en las que se hagan uso de otras tecnologías digitales, o bien que sean dirigidas a distintos niveles educativos.

Referencias

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*, 245-274.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*, 221-266.

Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 237-274). The Netherlands: Sense Publishers.

Guven, B. (2008). Using dynamic geometry software to gain insight into a proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*(3), 251–262.

Hitt, F. & González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a Modelling process: the ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*, 201-219.

Hitt, F. & González-Martín, A.S. (2016). Generalization, Covariation, Functions, and Calculus. En A. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 3-38). The Netherlands: Sense Publishers.

Kieran, C., Doorman, M. & Ohtani, M. (2015). Frameworks and principles for task design. En A. Watson & M Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 19-82). New York: Springer.

Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*, 205-263.

Kieran, C., & Saldanha, L. (2008). Designing tasks for the co-development of conceptual and technical knowledge in CAS activity: An example from factoring. En G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2, Cases, and perspectives* (pp. 393–414). Charlotte, NC: Information Age.

Lagrange, J-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J. T. Fey (Ed.), *Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (pp. 269–283). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lagrange, J-B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 113-135). New York: Springer.

Leung, A. & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The Role of Tools. En A. Watson & M Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 192-228). New York: Springer.

Margolinas, C. (2013, Ed.). *Task design in mathematics mducation. Proceedings of ICMI Study 22*. Okford, UK: ICMI. Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054v3/document.

Martínez, C., Kieran, C. & Guzmán, J. (2012). The use of CAS in the simplification of rational expressions and emerging paper-and-pencil techniques. En L. R. Van Zoest, J-J. Lo & J. L. Kratky (Eds.), *Proceedings of the 34th annual conference of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 1089-1096). Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Martínez, C. & Ulloa, R. (2015). Dynamic geometry software and tracing tangents in the context of the mean value theorem. En. T. Bartell, K. Bieda et al. (Eds.), *Proceedings of the 37th annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 1210-1217). East Lansing, MI: Michigan State University

Watson, A. & Ohtani, M. (2015, Eds.). *Task Design in Mathematics Education*. New York: Springer.

Reyes, A. & Santos, L. M. (2009). Teachers' construction of dynamic mathematical models based on the use of computational tools. In S. L. Swars, D. W. Stinson & L-S. Shonda (Eds.), *Proceedings of 31st annual Meeting of the north American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 218-225). Atlanta, GA: PME-NA.

Rivera, A. (2007). Cálculo y sus fundamentos para ingeniería y ciencias. México: Grupo Editorial Patria.

Sinclair, N. & Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of Dinamy Geometry. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 571-596). New York: Springer.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). USA: Macmillan Publishing Company.

EXPLORANDO EL CONCEPTO DE DERIVADA Y EL DISEÑO DE ACTIVIDADES PARA SU APRENDIZAJE

José Carlos Cortés Zavala,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Resumen
En este capítulo se muestran y se explican los objetivos, la metodología y el contenido de una actividad de aprendizaje que se diseñó para el tema de Derivada. Esta actividad fue diseñada en papel y se realizó una experimentación piloto de ella. Las ideas básicas de este primer diseño fueron posteriormente implementadas en una aplicación informática o software educativo.

Palabras Clave: Derivada, Software Educativo, Diseño de actividades, aplicación informática.

Introducción
En este trabajo se explicita la manera en que fue elaborada una actividad virtual (a través de una aplicación tecnológica) con la finalidad de intentar resolver un problema educativo en el bachillerato relacionada con la enseñanza del tema de derivadas. Así mismo se expone cuáles fueron los motivos principales que llevaron a plantear esta actividad y en qué fundamentos teóricos y metodológicos se basa el diseño de ella.

En la literatura especializada se hace referencia a la problemática que tiene el aprendizaje de los diversos conceptos de Cálculo Diferencial e Integral, uno de estos concepto es el de Derivada. Uno de los problemas de aprendizaje del concepto de Derivada está relacionado con la forma en que se enseña. Es en este sentido que se entrevistó, de manera individual, a cinco profesores que imparten el curso de Cálculo Diferencial en el bachillerato con la finalidad de conocer cómo enseñan ellos el concepto de derivada. El aspecto más importante, resultado de estas entrevistas, fue la respuesta de todos los profesores en el sentido de que los estudiantes deben tener suficientes conocimientos en el manejo operatorio del álgebra, de hecho algunos de ellos comentaron "si un estudiante no sabe Algebra no le puedo enseñar Cálculo Diferencial".

Sabemos, con base en diversos estudios, que el concepto de derivada se enseña con métodos predominantemente algebraicos y estos reportes mencionan también que al usar solamente el proceso algebraico, se oculta información relevante para el aprendizaje del concepto de Derivada. Por ejemplo, Hughes (1990) ha observado que muchos estudiantes pueden calcular algebraicamente las derivadas de diversas funciones, pero no son capaces de determinar, en una gráfica, el signo de la derivada. Hughes (ídem) hace notar que pocas veces se utiliza un acercamiento numérico para enseñar este concepto. Por su parte, Confrey (1993) indica que la presencia de tablas numéricas puede "iluminar" la conexión funcional de los valores contenidos en ellas y la presentación algebraica.

Propuestas como la de Duval (1988, 1993, 1995), Confrey (1993), Scher (1993), Mejía (1997), Hitt (2002), Pluvinage (2005), Cortés et al. (2005) mencionan la importancia de que los contenidos matemáticos se traten desde un aspecto gráfico y numérico ya que al ser representaciones de objetos matemáticos, cada uno de ellos, presenta distinta información y permite diferentes actividades cognitivas (por ejemplo en las tablas numéricas se puede visualizar más claramente los incrementos de las variables). Cuando se usa un solo tipo de representación, se corre el riesgo de confundir al objeto con la representación, por lo que se propone el uso de múltiples representaciones (Duval, 1988).

Por otro lado diversos investigadores señalan la importancia de introducir el concepto de derivada a través del uso de razones de cambio, por ejemplo Scher (1993) menciona que "la noción de razón de cambio debe ser accesible para todos los estudiantes".

Con base en las dos ideas:

1) No solo usar el aspecto algebraico.
2) Introducir el concepto de Derivada a través del uso de razón de cambio.

se diseñó y desarrolló el software denominado *"Fun_Der"* en el que se incorporaron actividades que resaltan aspectos relacionados con diferencias, incrementos, razón de incrementos, pendientes de secantes, pendientes de tangentes, construcción de la función razón de cambio y construcción de la función derivada. Los temas anteriores se explican a través de ideas tanto visuales como gráficas y numéricas.

Marco teórico

Las ideas teóricas con las cuales se diseñaron las actividades fue la Teoría sobre Representaciones Semióticas de Duval (1988). Dentro de esta teoría, las representaciones juegan un papel importante para las matemáticas, ya que permiten trasformar ideas intangibles en imágenes u objetos manipulables, que pueden ser apreciados por nuestros sentidos como la vista, el tacto, etc. (Cortés, 2002). Es en este sentido que Duval (1993) menciona la necesidad de proporcionar representaciones de los objetos matemáticos, ya que estos objetos no son directamente accesibles a la percepción o a experiencias intuitivas inmediatas.

Las representaciones se pueden considerar en dos sentidos, por un lado las representaciones mentales y por otro a las representaciones semióticas. Es necesario resaltar la relación del sujeto con las mentales y con las semióticas; Dupuis (1997, p. 235) dice que "Las representaciones semióticas son conscientes (notorias para el sujeto) y externas (directamente visibles y observables) y las representaciones mentales son conscientes e internas". En este apartado haremos referencia a las representaciones semióticas, porque al considerar que los objetos matemáticos deben ser representados usando signos y símbolos que sean propios de cada representación, caemos en el terreno de la semiótica.

Duval (1993) hace una diferenciación de la aprehensión de las representaciones semióticas y la aprehensión conceptual del objeto matemático, denominando semiosis a la primera y noesis a la segunda. Además, señala que hay necesidad de utilizar en el aprendizaje las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático, ya que considera que toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y que de una representación a otra existen diferentes aspectos de contenido que son representados (Duval 1993). También alerta sobre la posibilidad de confundir los objetos matemáticos con alguna de sus representaciones y menciona que una de las posibilidades para no hacerlo, es usar múltiples sistemas de representación semiótica.

Es relevante mencionar que para una aprehensión conceptual de objetos matemáticos la coordinación de varios registros de representación semiótica es fundamental Duval (1993). Es decir, para lograr la aprehensión del objeto matemático (Noesis) debemos, entre otras cosas, primero lograr la aprehensión de los diferentes registros de representación (Semiosis). Por lo anterior en las actividades diseñadas se abordan conceptos de Cálculo Diferencial a través de un acercamiento numérico, gráfico y algebraico.

Hay dos aspectos importantes a tratar en los registros de representación semiótica:

1. El Tratamiento que es la transformación y manipulación en el mismo registro.
2. La Conversión que es la transformación de un registro a otro.

A cada uno de estos aspectos se le deben asociar tareas cognitivas que permitan al estudiante desarrollar habilidades para determinar en cual de los registros conviene trabajar con la información dada.

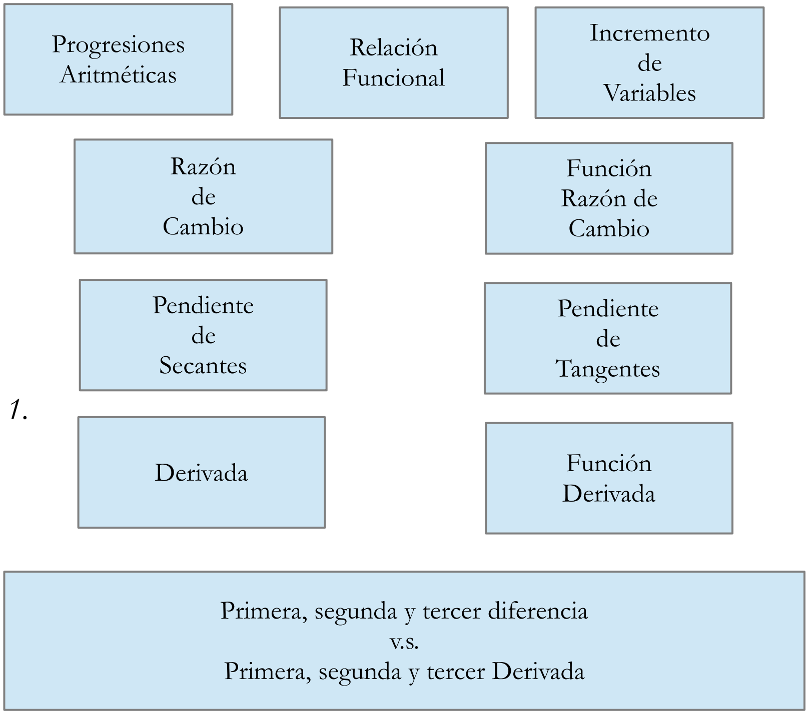
Las actividades diseñadas pretenden, por un lado, desarrollar en el estudiante habilidades como la visualización y la manipulación en el registro numérico y el registro gráfico (el Tratamiento), por otro, promover la transformación entre los registros numérico y gráfico (la Conversión).

La propuesta

El planteamiento propuesto en el software se ubica dentro de la Teoría de Sistemas de Representación Semióticos (Duval, 1988), por lo que se pretende que el software permita la manipulación de diferentes representaciones relativas a diferentes registros de representación, además de promover las tareas de tratamiento y conversión entre representaciones; es decir, deberá permitir el tratamiento de representaciones en cada uno de los registros y conversión entre representaciones.

Las actividades diseñadas están implementadas en el software de la siguiente manera:

Figura 1.



Actividades implementadas en el software.

En las actividades se desarrolla tratamiento numérico y gráfico.

Tratamiento numérico

Se propone un acercamiento numérico para la construcción de gráficas de funciones, a través utilizar la idea de Razón de Cambio. Un primer acercamiento es introducir las progresiones aritméticas y motivar al estudiante a desarrollar estrategias manipulando incrementos que le permitan resolver los ejercicios que se plantean en el software. El acercamiento discreto a través de Razones de Cambio para la construcción de gráficas, permite que el estudiante, por un lado, trabaje con elementos que para él son concretos (las operaciones elementales) y por otro lado se introduce el concepto de pendiente de una recta (la razón de incrementos) como parte esencial en la construcción de gráficas de funciones, es decir dar significado a lo que representa una Razón de Cambio gráficamente.

Progresiones Aritméticas para introducir la noción de diferencia de dos datos y aproximación gráfica de estos

Primeramente se da una explicación de lo que es una progresión aritmética y cómo a través de conectar dos progresiones aritméticas podemos realizar una relación funcional. Posteriormente se inicia el trabajo con este tipo de relaciones funcionales como se describe a continuación.

El tema de Progresiones Aritméticas se aborda en cuatro niveles (Figura 2), con el objetivo de iniciar un acercamiento numérico al concepto de Razón de Cambio.

Nivel I

posición	1	2	3	4	5	6	7	8
valor	28	30	32					

Nivel II

posición	1	11	21	31	41	51	61	71
valor	8	28	48					

Nivel III

posición	1	14	33	48	64	77	80	94
valor	-1	38	95					

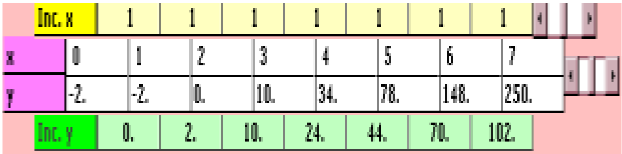
Nivel IV

posición	1	19	33	44	60	72	85	93
valor		15			56			

Figura 2. Progresiones aritméticas y sus niveles.

La diferencia principal en cada uno de los niveles es la información que se da en relación a como aparece la posición. En el nivel I la diferencia entre las posiciones es de 1, en el II puede ser diferente de 1 pero es constante, en el III esta diferencia ya no es constante y en el IV los valores pueden no aparecer en forma consecutiva, como sucede en los otros tres niveles.

Es en este sentido que consideramos que en las tablas de valores, que se presentan en la forma tradicional, se oculta información importante que es la relacionada con los incrementos, los cuales están allí, pero tradicionalmente no se hacen explícitos. En la siguiente actividad se hacen visibles la relación de los incrementos tal como se muestra en la Figura 3.



Inc. x	1	1	1	1	1	1	1	
x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	-2.	-2.	0.	10.	34.	78.	148.	250.
Inc. y	0.	2.	10.	24.	44.	70.	102.	

Figura 3. Visualizando los incrementos.

En esta actividad se inicia con una aproximación gráfica de lo que representan los incrementos (Figura 4).

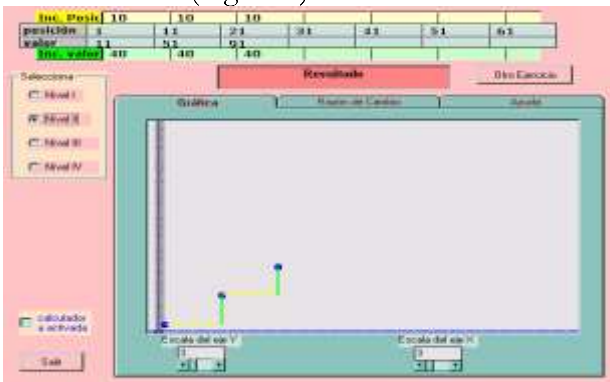


Figura 4. Aproximación gráfica de los incrementos.

En conclusión, estas dos actividades tienen como objetivo que el estudiante aprenda a obtener la diferencia de dos datos y que pueda analizar y conocer la representción gráfica de los datos y la diferencia de ellos.

Razones de cambio

Bajo este acercamiento discreto al concepto de Razón de Cambio se logra que el estudiante trabaje con elementos que para él son concretos. Además, se puede introducir después la pendiente de una recta como la razón de incrementos, es decir, dar significado a lo que representa una Razón de Cambio. La Razón de Cambio se aborda como el cociente de dos incrementos, obteniéndose una nueva función. Se pueden seleccionar diferentes tipos de funciones. Si se selecciona una función cúbica de la forma: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se generan aleatoriamente los parámetros *a, b, c* y *d* tal y como se muestra en las Figuras 5 y 6.

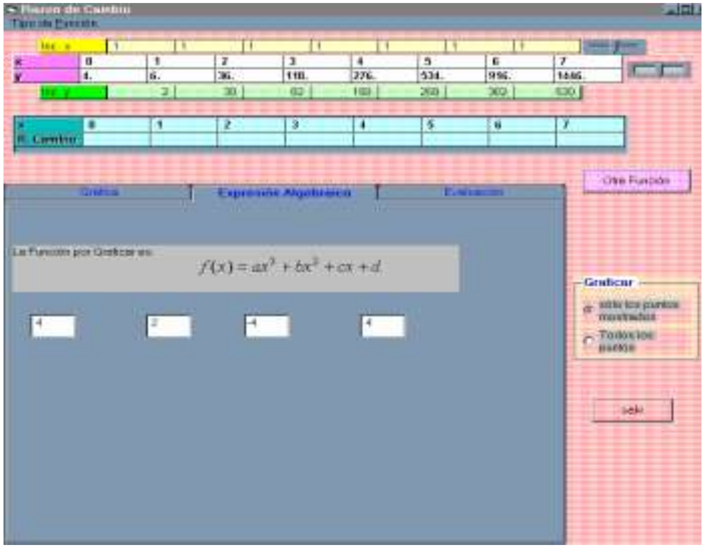


Figura 5. Razón de Cambio. Expresión algebraica

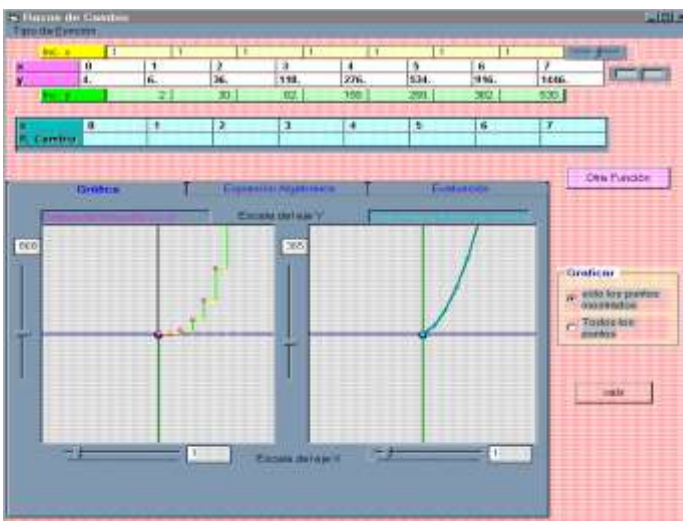


Figura 6. Razón de Cambio. Gráficas de las funciones.

El objetivo de esta actividad es que el estudiante llene la tabla que representa la función razón de cambio (Figura 7).

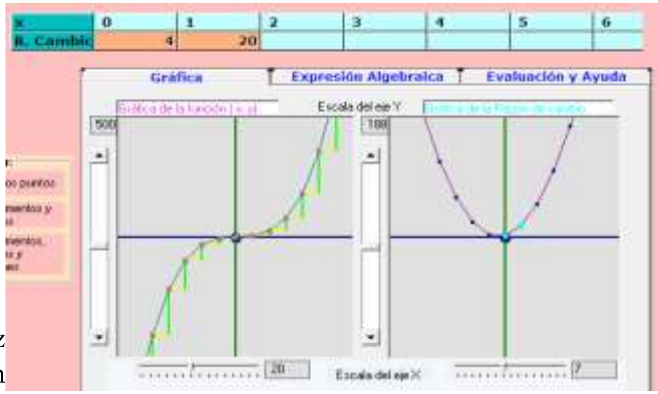


Figura 7. Razón de Cambio. Tabla y gráficas.

Cada vez que introduce un dato correcto en la tabla de la función Razón de Cambio se ilumina un punto en la parte de la ventana gráfica y con esto puede ir visualizando cómo se va construyendo la gráfica de la función Razón de Cambio. Por otro lado en esta misma actividad el estudiante puede visualizar como se construyen las gráficas de las funciones de acuerdo con la información que se tiene: si solo se tienen los puntos (Figura 8); si se tienen los puntos y los incrementos (Figura 9) y si se tienen los puntos, los incrementos y la Razón de Cambio (Figura 10).

Figura 8. Graficación de puntos

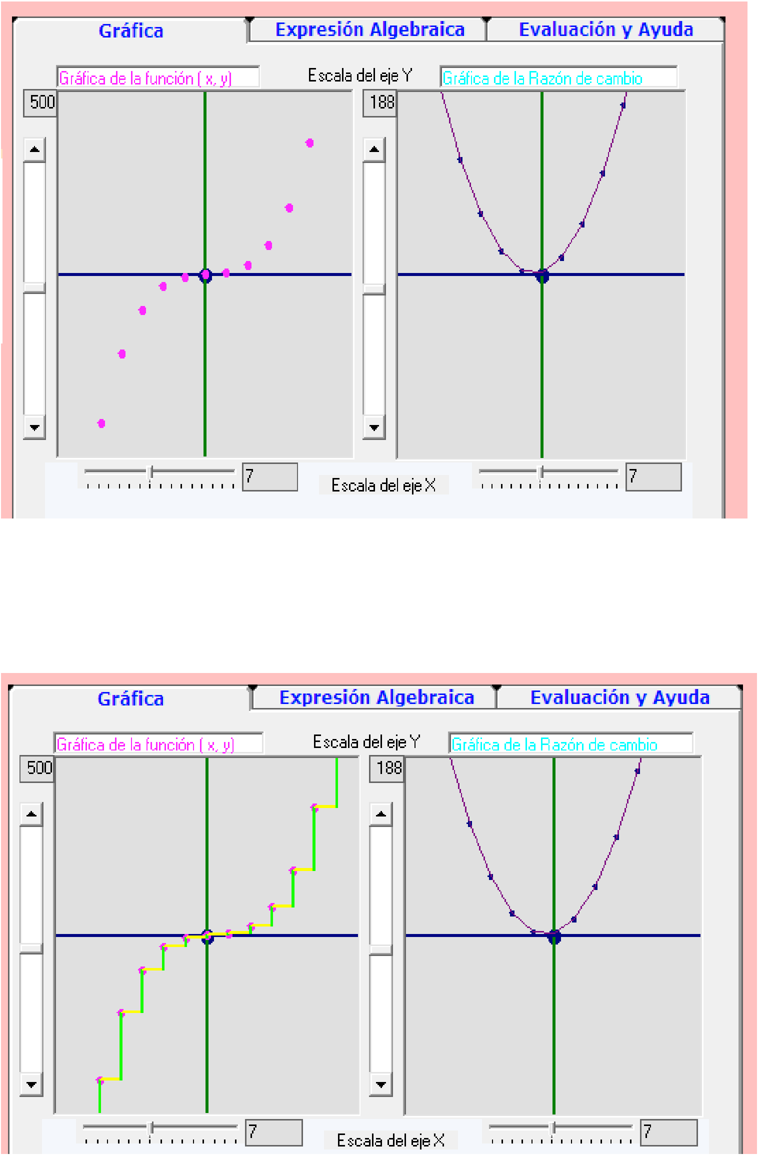


Figura 9. Graficación de puntos e incrementos.

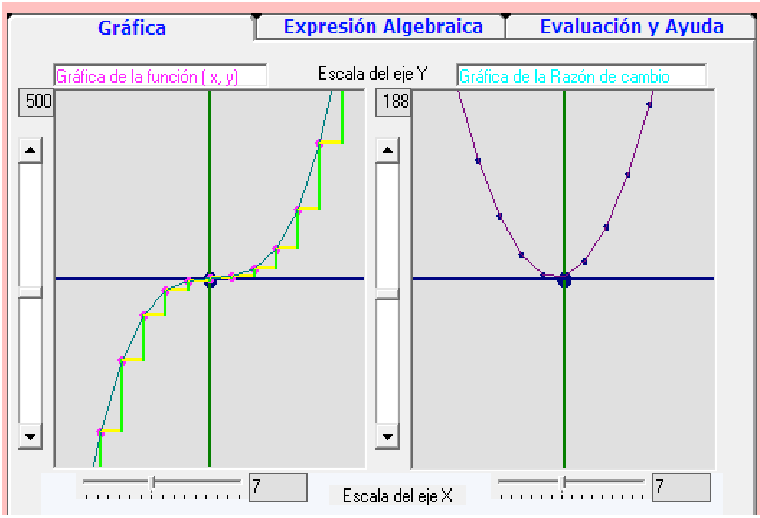


Figura 10. Graficación de puntos, incrementos y rectas.

Por otro lado, ampliando aún más la gráfica anterior y tomando el origen cómo centro (Figura 11) podemos observar que hay un triángulo en el cual existe un descenso en el incremento de *y*, es decir a través de este tipo de relación podemos explicar el signo de la pendiente de una recta (elevación del incremento de *y* equivale a pendiente positiva, descenso del incremento de *y* equivale a pendiente negativa; considerando que el incremento de *x* siempre es de izquierda a derecha).

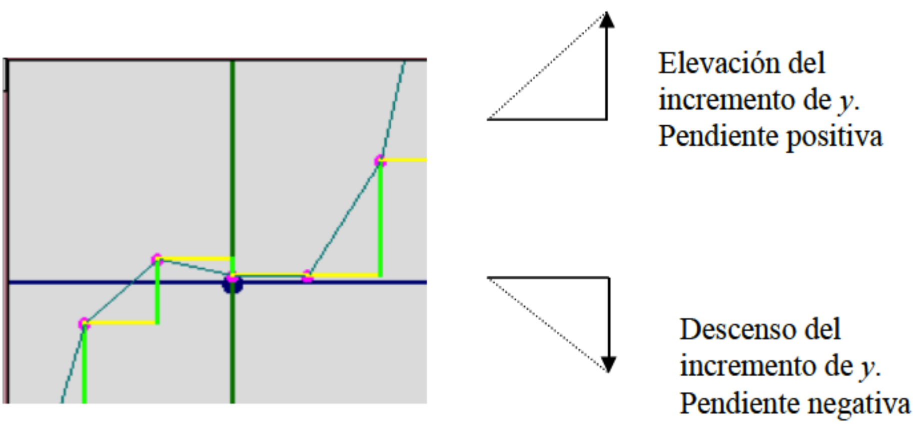


Figura 11. Graficación de incrementos.

Ahora bien, si obtenemos el valor numérico de la pendiente en cada uno de los triángulos formados, relacionando cada dato con un valor correspondiente de x, estaremos construyendo una nueva función (Figura 12) en la que cada punto está dado por *P*(*x*, *valor de la pendiente*) y esta nueva función será parecida a la función Derivada.

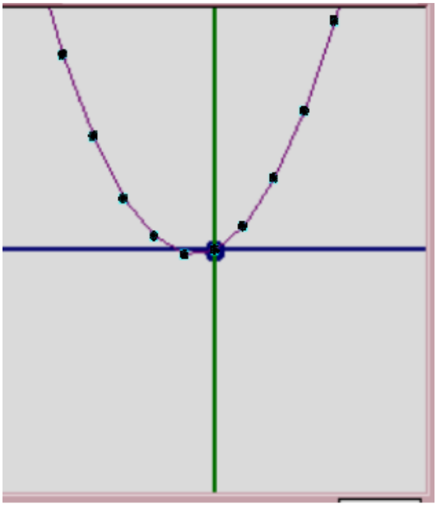


Figura 12. Puntos que representan la Razón de Cambio.

Tratamiento Gráfico: Pendiente de las secantes, Pendiente de las tangentes, construcción de la función Razón de Cambio, construcción de la función Derivada y relación entre la función Razón de Cambio y la función Derivada

El tratamiento geométrico que proponemos en torno al concepto de Derivada siempre parte de una Línea Secante que se convierte en Línea Tangente. En relación con lo anterior Wenzelburguer (1993) menciona:

> Normalmente se usa el problema de la tangente geométrica como motivación para introducir la derivada. Este método tiene muchas desventajas porque no es fácil de entender que el límite de la pendiente de una familia de secantes es la pendiente de la tangente a la cual se llama derivada. Además, no se ve una conexión inmediata entre una tangente geométrica que es un fenómeno estático y el

> dinamismo de una derivada que describe el cambio relativo de una magnitud con respecto a otra. (p.3)

La propuesta que aquí se realiza va en este sentido y consideramos que un tratamiento gráfico de la línea secante, de la línea tangente de la función razón de cambio y de la función derivada servirá para franquear esta barrera. A continuación exponemos estas ideas.

Primeramente introducimos gráficas de funciones de la forma general, por ejemplo una función polinomial de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (Figura 13), en la cual tenemos parámetros manipulables a, b, c, y d (Figura 14) para modificar la función polinomial.

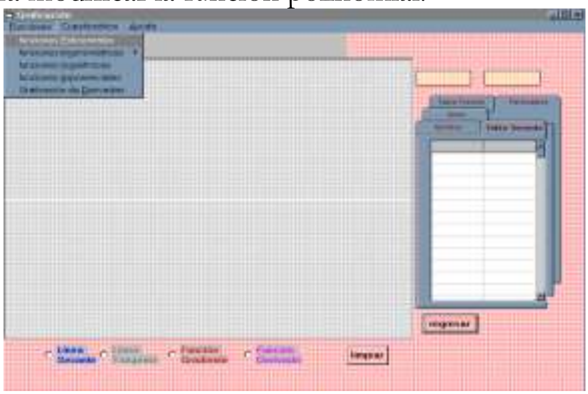


Figura *13*. Selección de Funciones

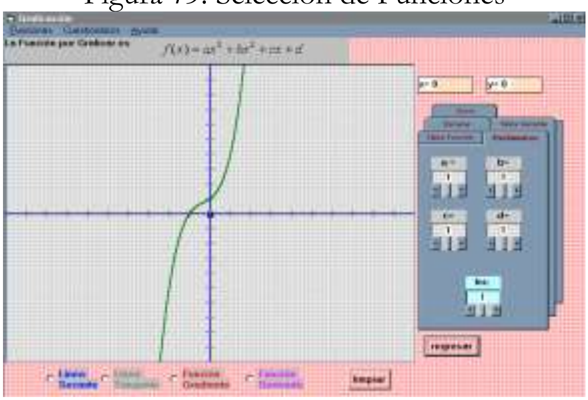


Figura *14*. Grafica de una función

Podemos seleccionar el trazar una Línea Secante (Figura 15) o una Línea Tangente (Figura 16) o la Gráfica de la Función Razón de Cambio (Figura

17) o la Gráfica de la derivada (Figura 18) obteniendo, de acuerdo a la selección, la tabla correspondiente (Figura 19) y la relación entre la función Razón de Cambio y la Función Derivada (Figura 20).

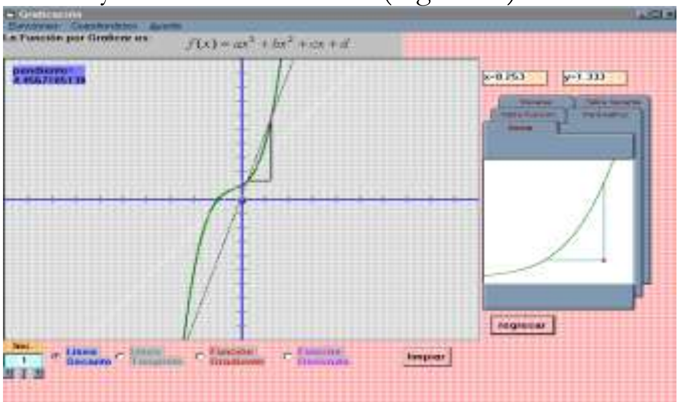


Figura 15. Grafica de la línea secante.

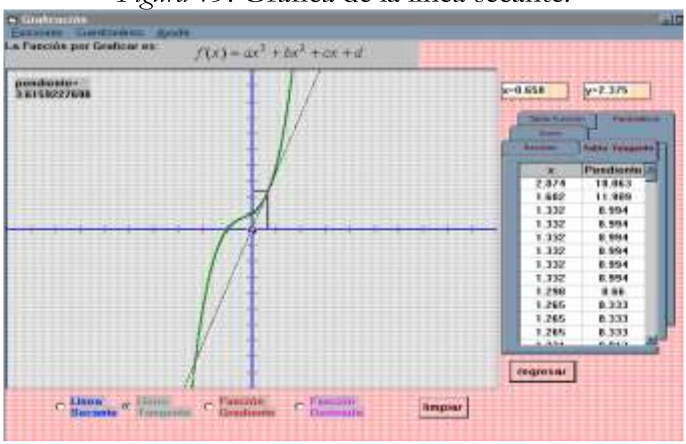


Figura 16. Tabla de la línea tangente.

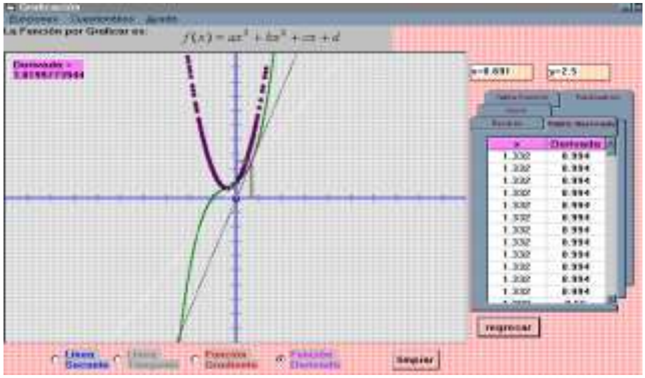


Figura 17. Función Razón de Cambio.

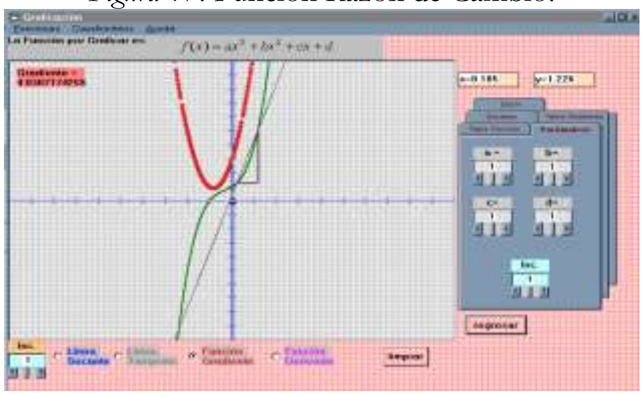


Figura 18. Función Derivada.

x	Pendiente
2.074	18.063
1.602	11.909
1.332	8.994
1.332	8.994
1.332	8.994
1.332	8.994
1.332	8.994
1.332	8.994
1.298	8.66
1.265	8.333
1.265	8.333
1.265	8.333

Figura 19. Tabla de las pendientes.

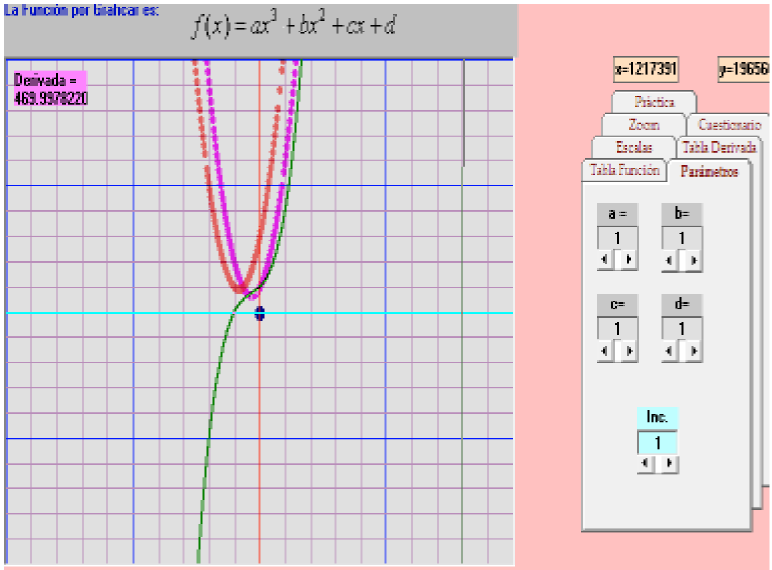


Figura 20. Comparando Función Razón de Cambio y Función Derivada.

A través del uso de estas actividades se pretende que el estudiante comprenda la noción de incremento, de razón de cambio, de cómo la línea secante se encuentra relacionada con la razón de cambio, de cómo la tangente se relaciona con la razón de cambio cuando el incremento de x se hace pequeño, de cómo al graficar las pendientes de la línea secante se obtiene algo parecido a la gráfica de la derivada, que a su vez es la gráfica obtenida de las pendientes de la línea tangente.

Tratamiento gráfico y numérico. Diferencias vs Derivadas

Esta actividad está desarrollada para que el estudiante visualice numérica y gráficamente como es la relación entre las diferencias numéricas de una función (primera, segunda y tercera diferencia) y las Derivadas de una función (primera, segunda y tercera Derivada), así mismo qué influencia tiene el incremento de la x para aproximar las funciones salidas de las diferencias a la función Derivada correspondiente.

Convirtiendo las Diferencias en funciones

El propósito de esta actividad es que el estudiante visualice como cada una de las diferencias representa una nueva función. En el caso de las polinomiales cada diferencia va reduciendo el grado del polinomio. Por ejemplo, en la Figura 21 se representa numéricamente la función $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ que es una función cúbica; en la primera diferencia de *y* se representa la función $h(x) = -3x^2 - 9x - 7$ que es una función cuadrática; en la segunda diferencia de *y* $g(x) = -6x - 12$ es lineal y la tercera diferencia de *y* es la función constante $m(x) = -6$.

Inc. x	1	1	1	1	1	1	1	
x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	-1.	-8.	-27.	-64.	-125.	-216.	-343.	-512.
1°Inc. y	-7.	-19.	-37.	-61.	-91.	-127.	-169.	
2°Inc. y	-12.	-18.	-24.	-30.	-36.	-42.		
3°Inc. y	-6.	-6.	-6.	-6.	-6.			

Otra Función

Figura 21. Tabla de la Función y de sus diferencias.

Estas funciones se construyen si consideramos las relaciónes tabulares que se observan en la Figura 21, es decir :

$h(x) = -3x^2 - 9x - 7$ se obtiene de:

x	0	1	2	3	4	5	6
1°Inc. y	-7.	-19.	-37.	-61.	-91.	-127.	-169.

$g(x) = -6x - 12$ se obtiene de:

x	0	1	2	3	4	5
2°Inc. y	-12.	-18.	-24.	-30.	-36.	-42.

$m(x) = -6$s e obtiene de:

x	0	1	2	3	4
3°Inc. y	-6.	-6.	-6.	-6.	-6.

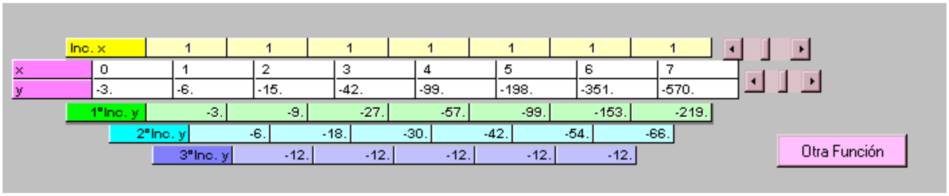
Es decir damos cualesquier valor a la *x* y lo emparejamos con la *y*.

Relación entre funciones de la diferencias y las funciones derivadas

Para ejemplificar la relación, tomamos la función $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 4x - 3$ y se presenta el análisis necesario para obtener la expresión algebraica asociada a los datos numéricos, para ello variaremos el incremento de *x* (Δ_x) dando los siguientes valores $\Delta_x = 1$, $\Delta_x = 0.5$ y $\Delta_x = 0.1$ (sólo para el $\Delta_x = 1$ se realizará el analísis; para los siguientes ya se darán las expresiones algebraicas correspondientes).

Apartado I. Incremento de x igual a 1 ($\Delta_x = 1$)

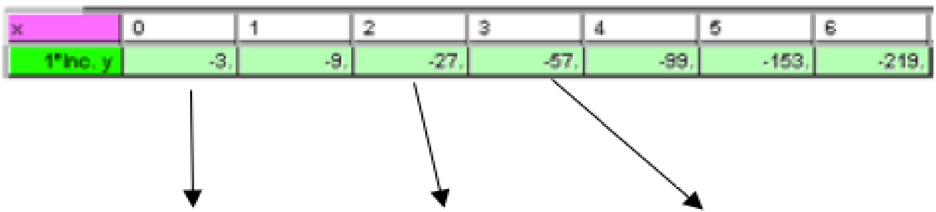
Dada la función $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 4x - 3$, que es una función cúbica realizamos el $\Delta_x = 1$ y encontraremos lo siguiente:



Inc. x		1	1	1	1	1	1	1
x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	-3.	-6.	-15.	-42.	-99.	-198.	-351.	-570.
1°Inc. y		-3.	-9.	-27.	-57.	-99.	-153.	-219.
2°Inc. y			-6.	-18.	-30.	-42.	-54.	-66.
3°Inc. y				-12.	-12.	-12.	-12.	-12.

Figura 22. Tabla de la función y de sus diferencias.

a) Sea la primera diferencia una función $h(x) = ax^2 + bx + c$, en la Figura 22 se observa:



x	0	1	2	3	4	5	6
1°Inc. y	-3.	-9.	-27.	-57.	-99.	-153.	-219.

$P_1(0,-3)$: $-3 = c$, $c = -3$

$P_2(1,-9)$: $-9 = a + b + c$, $a + b = -6$

$P_3(2,-27)$: $-27 = 4a + 2b + c$, $2a + b = -12$

Resolviendo el sistema simultáneo por reducción tenemos

$$2a + b = -12$$

$$-a - b = 6$$

$$a = -6$$

por lo que $a = -6$; $b = 0$ y $c = -3$

Por lo tanto la función es $h(x) = -6x^2 - 3$

b) Sea la segunda diferencia una función $g(x) = ax + b$, en la Figura 22 se observa:

x	0	1	2	3	4	5
2ºInc. y	-6.	-18.	-30.	-42.	-54.	-66.

$P_1(0,-6)$:

$$-6 = b$$
$$b = -6$$

$P_2(1,-18)$:

$$-18 = a + b$$
$$a = -18 + 6$$

Resolviendo el sistema simultáneo por reducción tenemos que

$$a = -12 \text{ y } b = -6$$

Por lo tanto la función es $g(x) = -12x - 6$

c) Sea la tercera diferencia $m(x) = c$, en la Figura 22 se observa:

x	0	1	2	3	4
3ºInc. y	-12.	-12.	-12.	-12.	-12.

Por lo tanto la función es $m(x) = -12$

Apartado II: Incrementos de x de 0.5 (Δx= 0.5)

Dada la función $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 4x - 3$, que es una función cúbica realizamos el Δ_x= 0.5 y tenemos lo siguiente:

Inc. x	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	
x	-.5	0	.5	1	1.5	2	2.5	3
y	0.	-3.	-4.5	-6.	-9.	-15.	-25.5	-42.
1ºInc. y	-3.	-1.5	-1.5	-3.	-6.	-10.5	-16.5	
2ºInc. y	1.5	0.	-1.5	-3.	-4.5	-6.		
3ºInc. y	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5			

Figura 23. Tabla de la función y de sus diferencias.

a) Sea la primera diferencia una función $h(x) = ax^2 + bx + c$, entonces, de la Figura 23 tenemos que:

x	-.5	0	.5	1	1.5	2	2.5
1ºInc. y	-3.	-1.5	-1.5	-3.	-6.	-10.5	-16.5

Tomando las coordenadas de tres puntos de la función encontramos el sistema de ecuaciones simultáneas y lo resolvemos, entonces obtenemos $h(x) = -3x^2 + 1.5x - 1.5$.

b) Sea la segunda diferencia una función $g(x) = ax + b$, entonces:

x	-.5	0	.5	1	1.5	2
2°Inc. y	1.5	0.	-1.5	-3.	-4.5	-6.

Tomando las coordenadas de tres puntos de la función encontramos el sistema de ecuaciones simultáneas y lo resolvemos, entonces $g(x) = -3x$.

c) Sea la tercera diferencia $m(x) = c$, entonces:

x	-.5	0	.5	1	1.5
3°Inc. y	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5

Por lo tanto, la función es $m(x) = -1.5$.

Apartado III: Incrementos de x de 0.1 (Δx= 0.1)

Dada la función $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 4x - 3$, que es una función cúbica realizamos el Δ_x= 0.1 y tenemos lo siguiente:

Inc. x		.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1
x	-.9	-.8	-.7	-.6	-.5	-.4	-.3	-.2
y	4.488	3.144	1.956	0.912	0.	-0.792	-1.476	-2.064
1°Inc. y		-1.344	-1.188	-1.044	-0.912	-0.792	-0.684	-0.588
2°Inc. y			0.156	0.144	0.132	0.12	0.108	0.096
3°Inc. y				-0.012	-0.012	-0.012	-0.012	-0.012

Figura 24. Tabla de la función y de sus diferencias.

a) Sea la primera diferencia una función $h(x) = ax^2 + bx + c$.

x	-.9	-.8	-.7	-.6	-.5	-.4	-.3
1°Inc. y	-1.344	-1.188	-1.044	-0.912	-0.792	-0.684	-0.588

Tomando las coordenadas de tres puntos de la función encontramos el sistema de ecuaciones simultáneas y lo resolvemos, entonces obtenemos $h(x) = -0.6x^2 + 0.54x - 0.372$.

b) Sea la segunda diferencia una función $g(x) = ax + b$.

x	-.9	-.8	-.7	-.6	-.5	-.4
2°Inc. y	0.156	0.144	0.132	0.12	0.108	0.096

Tomando las coordenadas de tres puntos de la función encontramos el sistema de ecuaciones simultáneas y lo resolvemos, entonces obtenemos $g(x) = -0.12x + 0.048$.

c) Sea la tercera diferencia $m(x) = c$.

x	-.9	-.8	-.7	-.6	-.5
3°Inc. y	-0.012	-0.012	-0.012	-0.012	-0.012

Por lo tanto, la función es $m(x) = -0.012$.

Comparación de las funciones obtendidas con las funciones derivadas

Tenemos entonces la siguiente relación dada la función

$f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 4x - 3$

Figura 25. Comparación de funciones.

Si dividimos la función de las diferencias entre el incremento

Función de las Diferencias			Función derivada
$\Delta_x = 1$	$\Delta_x = 0.5$	$\Delta_x = 0.1$	
$h(x) = -6x^2 - 3$	$h(x) = -3x^2 + 1.5x - 1.5$	$h(x) = -06.x^2 + 0.54x - 0.372$	$h(x) = -6x^2 + 6x - 4$
$g(x) = -12x - 6$	$g(x) = -3x$	$g(x) = -0.12x + 0.048$	$g(x) = -12x + 6$
$m(x) = -12$	$m(x) = -1.5$	$m(x) = -0.012$	$m(x) = -12$

Función de las Diferencias			Función derivada
$\Delta_x = 1$	$\Delta_x = 0.5$	$\Delta_x = 0.1$	
$h(x) = -6x^2 - 3$	$h(x) = -12x^2 + 3x - 3$	$h(x) = -6x^2 + 5.4x - 3.72$	$h(x) = -6x^2 + 6x - 4$
$g(x) = -12x - 6$	$g(x) = -12x$	$g(x) = -12x + 4.8$	$g(x) = -12x + 6$
$m(x) = -12$	$m(x) = -12$	$m(x) = -12$	$m(x) = -12$

correspondiente, es decir $\frac{h(x)}{\Delta_x}$, $\frac{g(x)}{\Delta^2{}_x}$ y $\frac{m(x)}{\Delta^3{}_x}$ tendremos entonces la siguiente relación:

Figura 26. Comparación de funciones.

Podemos observar que entre más pequeño sea el incremento de *x* más nos aproximamos a la función Derivada.

Resultados de una experimentación de las actividades de progresiones aritméticas

La experimentación se practicó con cinco estudiantes de bachillerato durante 12 horas, repartidas en cuatro sesiones. Se trabajó en una sala equipada con tres computadoras, un pizarrón y dos cámaras de video. Se formaron tres equipos de trabajo (dos con dos estudiantes y uno de uno) y cada uno de ellos trabajó en una computadora con el software desarrollado. En la primera sesión se dio una instrucción sobre la navegación en el paquete, para que en las sesiones siguientes el estudiante explora libremente los contenidos permitidos en el software. El instructor se desempeñó básicamente como un observador pero podía intervenir para contestar algunas preguntas cuando le eran requeridas o para hacerlas con la finalidad de propiciar que los estudiantes encuentren por sí mismos la estrategia correcta. Los estudiantes podían comunicarse libremente las ideas o las estrategias de solución, las cuales fueron grabadas en video.

Se experimentó con la parte del software correspondiente al tratamiento numérico (progresiones, incrementos y razón de cambio) comenzando con el apartado de progresiones aritméticas.

Observaciones generales

Los integrantes de los equipos no tuvieron ningún problema en la navegación con el software y entendieron rápidamente la tarea por desarrollar. Tuvieron algunos conflictos para encontrar la estrategia adecuada, pero al final lo lograron.

Análisis de la experimentación en relación con los contenidos presentados

El análisis de esta experimentación se centrará en explicar, con base en las video-grabaciones, si las ideas de incremento de una variable y de Razón de Cambio fueron entendidas por los estudiantes. Asimismo, este análisis será un primer contacto para vislumbrar la posibilidad de que un acercamiento por medio de la función Razón de Cambio permita a los estudiantes transitar al concepto de Derivada.

Opción de progresiones

En esta primera tarea (u opción) del software, se presenta a los estudiantes una introducción a lo que es una progresión aritmética y cuatro niveles de ejercicios. Todos los estudiantes entendieron bien la introducción y la tarea por desarrollar. El nivel I y nivel II no presentaron ningún problema para encontrar la solución requerida en cada caso. Pero en el nivel III y nivel IV, fue muy difícil para los estudiantes dar una respuesta adecuada al tipo de ejercicio propuesto. Solo un equipo de trabajo encontró una estrategia para resolver lo requerido en el nivel III. A continuación se describe cómo fue el desempeño del equipo con respecto a la tarea solicitada.

Elizabeth y Leticia están intentando resolver el siguiente ejercicio:

Posición	1	6	25	42	52	53	81
Valor	4	14	52				

Elizabeth: veamos cuánto es.... [comienza a escribir en su libreta, haciendo cuentas] son 17 por 2 que son 34 y le sumamos 52.

Investigador: ¿Me explicas cómo lo obtuviste?

Elizabeth: Del 1 al 6 hay 5 espacios. Sé que si 1 es igual a 4 y hay 2 espacios entre uno y otro, y se va incrementando de 2 en 2 entonces son 42 menos 25 para sacar los espacios; multiplicado por 2, y le sumo el valor de 52.

Leticia: Sacamos el espacio que hay de un lado a otro y, como ya sabemos que va de 2 en 2, de 52 a 53 hay un espacio y lo multiplicamos por 2.

Investigador: Ese número que obtuvieron es muy importante (el 2). ¿Cómo lo sacaron?

Elizabeth: Muestra una tabla y me da una explicación sobre ella.

Posición	1	2	3	4	5	6
Valor	4	6	8	10	12	14

Llenaron la tabla con los valores que faltaban del 1 al 6, y determinaron que se va incrementando de 2 en 2 cada posición. Se les sugirió que revisaran la opción de incrementos y la definición de razón de cambio. Después de revisar la opción y la explicación de lo que es una razón de cambio, concluyeron:

Elizabeth: ¡Ya! Lo que pasa es que con el incremento que le damos, lo podemos sacar al dividir el incremento de *x* entre el incremento de *y*.

Leticia: Es al revés.

Elizabeth: Y ya nos ahorramos lo que estábamos haciendo.

Como podrá observarse para la solución de ejercicios de este tipo es necesario utilizar la razón de cambio, lo cual fue logrado por este equipo. En tareas posteriores ya tenían esta idea y la aplicaron.

Conclusiónes

Las actividades diseñadas a través de una aplicación tecnológica presentan ciertos beneficios comparadas con actividades diseñadas solo en papel. Por otro lado las actividades aquí presentadas se han experimentado varias veces y por los resultados obtenidos cumplen con el objetivo didáctico con el que fueron realizadas, es decir presentar una aproximación conceptual a las ideas del cálculo diferencial desde un punto de vista numérico y gráfico, la parte algebraica no se presenta porque la mayaría de los profesores de cálculo del bachillerato la realizan comúnmente. Se comprobó que por medio del uso de tablas de valores de funciones los estudiantes entienden y usan la razón de cambio. Con esto, pueden empezar a construir una nueva función y a partir de ella, los educadores pueden introducir la función Derivada.

Referencias

Cortés C. (2002). *Desarrollo de* software *para la enseñanza del cálculo diferencial*. (Tesis doctoral, no publicada). Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México.

Cortés, C., Nuñez, E. & Garcia R. (2005). Software para la enseñanza de la derivada. *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. México Editorial Morevallado.

Confrey, J. (1993). A constructivist research programme towards the reform of mathematics educations. (Introduction to symposium for the Annual Meeting of American Education Research Association), Abril, 1993.

Duval R. (1988). Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. Anales de Didactique et de Sciences Cognitives 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En

Antología en Educación Matemática (Ed. Sánchez, E.). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa* II (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Peter Lang, Suisse.

Hitt F. (2002). *Funciones en contexto*. México. Editorial Pearson Educación..

Hugues, D. (1990). Visualization and Calculus Reform. *Visualization in Teaching and Learning* Mathematics*: A Project (MAA notes #19).* Walter Zimmerman and Steven Cunningham, (Eds.). Washington DC: Mathematical Association of America, 1-8.

Mejía, H.(1997). Geometría Analítica, Gráficas y Tablas. *VIII Memorias del Seminario Nacional de Calculadoras y Computadoras en Educación Matemática*. (315-322). México: Universidad de Sonora.

Pluvinage F. (2005). Reflexiones sobre la recta numérica al servicio del cálculo. En *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. México. Editorial Morevallado.

Scher, D.(1993). Student's Conceptions of the Derivative across Multiple Representations. *Mathematics in College*, 3-17.

Wenzelburguer, E. (1993). *Cálculo diferencial*. México: Editorial Iberoamérica.

SISTEMA DE PRÁCTICAS DE MODELACIÓN CON EL TRACKER Y GEOGEBRA DE CUERPOS EN MOVIMIENTO PARA EL APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO DERIVADA

Rafael Pantoja Rangel
Otoniel Leal Medina
Universidad de Guadalajara

Resumen
Se presenta una secuencia didáctica (Tobón, Pimienta y Fraile, 2010) orientada a propiciar la comprensión del concepto de Derivada a partir de la razón de cambio y de la pendiente de una recta que pasa por dos puntos, sustentada en la teoría del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y de la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, 2002), específicamente, con los objetos primarios: el lenguaje, la acción, la argumentación, el concepto y las propiedades. La modelación matemática se emplea como metodología, para ello se filma un video de un objeto en movimiento, en este caso, el de un corredor que parte del reposo e incrementa su velocidad hasta cruzar la meta. Posteriormente, en trabajo individual y colaborativo, los alumnos analizan dicho video con el programa Tracker y GeoGebra para obtener gráficas, datos y el polinomio ajustado. El diseño de la secuencia es interactivo, pues conforme se desarrolla la actividad, se manipulan con el software los datos obtenidos del video y se responden los cuestionamientos relativos al concepto de la Derivada. Al final de la secuencia didáctica, cada grupo colaborativo elabora una presentación para discutirla en sesión grupal, un informe y responde una encuesta de opinión.

Palabras clave: Razón de cambio, Modelación, Tracker, GeoGebra.

Introducción

La Derivada es uno de los conceptos fundamentales en el estudio del Cálculo, pero frecuentemente el tratamiento que se le da en las instituciones educativas de nivel superior, se enfoca al manejo y aplicación de fórmulas y recursos algebraicos, lo que provoca que los estudiantes enfrenten dificultades para su comprensión. Al tratar a la Derivada de manera algorítmica, el trabajo en el aula se torna rutinario, debido a que se centra en procedimientos algebraicos, con poco sentido para los estudiantes y alejados de su vida cotidiana, lo cual a su vez es poco motivador y afecta su desempeño en el curso de Cálculo, ya que pierde el interés al no hallar una aplicación en su contexto, en la que pueda tratar y relacionar los contenidos matemáticos presentados, en particular la Derivada.

En Pollak (2007, p 111), se mencionan una serie de cuestionamientos que los estudiantes suelen hacer en una clase sobre el aprendizaje de las matemáticas: "¿por qué tengo que aprender esto? ¿cómo conecta eso?". A lo que el profesor responde: "Bueno, ya lo verás, lo vas a necesitar, o bien, porque va a estar en el examen", "bueno, necesitas esto para otro tema, lo requieres para un trabajo que puedas tener o lo necesitarás para ser un ciudadano inteligente o para salir adelante. Pero ahora mismo, lo necesitas debido al examen, que te permitirá entrar en una buena universidad, y esa universidad te permitirá obtener un buen trabajo y convertirse en un ciudadano inteligente y seguir adelante". Pollak, concluye: *"así que la gratificación siempre se retrasa y pienso que no se puede incentivar la motivación por la belleza de la matemática por si sola sin ver la utilidad"*.

En esta propuesta se pretende, desde un punto de vista particular de la modelación matemática, incentivar la comprensión de la Derivada desde tres ejes fundamentales: una situación problema de la vida cotidiana (el movimiento de un alumno corriendo), el uso de tecnología (el video, programas de cómputo Tracker y GeoGebra) y las interacciones alumno-alumno, alumno-profesor y alumno-computadora. Lo anterior a partir de considerar el siguiente referente teórico.

El Enfoque Ontosemiótico (EOS)

La teoría en la que se sustentó el diseño de las actividades propuestas es el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, 2002), en el cual se concibe a un objeto matemático (Derivada) como todo aquello que es indicado, señalado o referenciado, cuando se hace, se comunica o se aprende matemáticas. La propuesta se orienta a relacionar lo que Godino señala como objetos primarios (lenguaje, acción, argumentación, concepto, propiedades y situación problema) con la situación problema; que se pretende sean adquiridos con la secuencia didáctica con actividades organizadas en un taller.

Tales objetos primarios intervienen en los sistemas de prácticas de los cuales, se pretende emerja el concepto de Derivada. La identificación de tales objetos forma parte del proceso propuesto en el EOS para el análisis de la instrucción matemática, con el objetivo de identificar qué es lo que sucede durante la puesta en escena de la propuesta didáctica. La finalidad de este análisis es evaluar la pertinencia de la propuesta didáctica y el efecto que propicia sobre el aprendizaje del objeto Derivada, de tal forma que se cumpla con el objetivo de que se logre modelar situaciones problema de la vida cotidiana, de objetos en movimiento, con trabajo colaborativo y apoyados con video digital y los software Tracker y GeoGebra para el aprendizaje de la Derivada a partir de la razón de cambio.

Con la finalidad de facilitar la evaluación de la secuencia se propone: supervisar el proceso de identificación de los diferentes objetos matemáticos involucrados en la situación problema durante el proceso de modelación (por ejemplo razón de cambio y pendiente de una recta), identificar los significados personales de los estudiantes sobre los datos obtenidos con el Tracker para su contraste con los significados institucionales, evaluar el aprendizaje adquirido por el estudiante sobre la Derivada después de haber trabajado con la propuesta y observar el desempeño de los alumnos durante el trabajo con la propuesta.

Figura 1. Objetos primarios del objeto Derivada.

Metodología

Con el desarrollo de la propuesta, se busca que el alumno construya argumentos, significados, herramientas y nociones relacionados con las matemáticas, en este caso la Derivada, en la intervención con situaciones problema en el contexto del estudiante (Arrieta, 2003; Hitt y González, 2014).

De acuerdo con Jofrey (2010) el video como herramienta tecnológica se reutiliza en la labor docente, en la que el alumno se transforma en el director de la película, porque elabora el guion, elige los actores y diseña el set de grabación, lo que incide de manera directa en la identificación de las variables, de las constantes y las relaciones matemáticas implícitas o explícitas en la situación problema, en suma, desarrolla la modelación matemática *in situ*. Se recomienda que el alumno sea quien seleccione la situación problema, para posteriormente diseñar el set de grabación. Sin embargo, en la secuencia propuesta en este capítulo, se propone y utiliza un video grabado previamente.

Para el análisis de videos de cuerpos en movimiento se emplea el software Tracker, el cual posee una interfaz amigable y rutinas con las que se obtienen diferentes representaciones del fenómeno a estudiar: gráficas, tablas de datos numéricos y expresiones de funciones. Para la manipulación de la información numérica obtenida del video analizado en Tracker, se utiliza el programa GeoGebra. Ambos programas son gratuitos y funcionan en diferentes sistemas operativos (Pantoja. Guerrero, Ulloa y Nesterova, 2016; Pantoja, Ulloa, Nesterova, 2013).

La modelación matemática de una situación problema, es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, a la situación en cuestión. En este caso, se espera que el alumno relacione los elementos que proporciona Tracker (visual, numérico, gráfico, analítico, verbal y escrito) con la situación problema, con la finalidad de propiciar aprendizaje del concepto matemático. En el proceso de modelación, es importante la creatividad del alumno, además de ciertos conocimientos del cálculo referentes al acercamiento de la derivada como razón de cambio.

Son diversas las acciones que realiza el alumno: manipular los programas Tracker y GeoGebra, seleccionar la parte del video del corredor que se analizará, identificar las variables intervinientes, fortalecer los conocimientos previos de pendiente de una recta y la razón de cambio, entre otros.

Para esto, las actividades se integran de tres partes:

- la primera orientada al aprendizaje del manejo de los programas Tracker y GeoGebra para el análisis de videos de cuerpos en movimiento;
- en la segunda parte, se trabaja en equipos para la videograbación de un corredor en distintas trayectorias (que se puede omitir si ya existe el video) y el trabajo con la hoja de trabajo;
- por último, cada equipo elabora y presenta a todo el grupo un reporte de los resultados y conclusiones obtenidos en la práctica y sus conclusiones.

Secuencia didáctica

Se desarrolló una secuencia didáctica, como una acción para sistematizar la enseñanza y aprendizaje del concepto de la Derivada; para ello, se adoptó el formato sugerido por Tobón, Pimienta y García (2010), con ligeras variantes, en el que se incluyen actividades apoyadas en la modelación matemática, el trabajo individual y colaborativo, video de la situación problema y el uso de los programas Tracker y GeoGebra. A continuación se describe cada uno de los apartados de la secuencia.

Título de la secuencia: El corredor

1. *Identificación de la secuencia*

<table>
<tr>
<td>Asignatura: Cálculo Diferencial
• Unidad Didáctica: Concepto de la derivada
• Bloque: Razones de cambio
• Duración: 4
• Modalidad: Escolarizada
• Horas presenciales: 5
• Horas de aprendizaje autónomo: 8</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Figura 2. Datos generales de la secuencia.

2. *Problema significativo del contexto*

Un sujeto inicia una carrera a partir del reposo y llega a la meta que se encuentra a una cierta distancia. Analiza que sucede con la gráfica de la distancia contra tiempo en los casos siguientes:

2.1. No se detiene y cruza la meta con un incremento en la velocidad a cada instante.

2.2. Disminuye su velocidad instantes antes de cruzar la meta.

2.3. Llega a la meta y se regresa para retornar al punto inicial.

2.4. Después de un tiempo disminuye su velocidad y se detiene, para posteriormente continuar su carrera y cruza la meta sin detenerse.

2.5. Después de un tiempo disminuye su velocidad y se detiene, para posteriormente continuar su carrera y poco antes de la meta disminuye su velocidad y la cruza.

2.6. Otro caso que se te ocurra.

Con tu grupo colaborativo analiza el video de los distintos desplazamientos del corredor y realiza lo siguiente:

2.7. Traza las gráficas de los movimientos que observaste del corridor.

2.8. Determina las variables que intervienen en la situación problema.

2.9. ¿Qué tipo de gráfica se genera para cada una de las situaciones?

2.10 ¿Cómo se manifiesta en la gráfica los cambios de velocidad?

2.11 ¿Qué velocidad alcanza el corredor en los tiempos: 3, 3.01, 3.00001 segundos?

2.12. ¿Qué representa la gráficas de la velocidad contra el tiempo?

3. Competencias de específicas

3.1. *Saber hacer*

3.1.1. Discute con su Grupo Colaborativo (GC) las palabras intervalo, distancia recorrida, tiempo, velocidad, plano cartesiano y variables, para identificarlos en el video y comprender el significado que tienen en la vida cotidiana y su relación con las matemáticas.

3.1.2. Compara la recta secante y recta tangente a la curva para comprender como se aproxima la recta secante a la recta tangente.

3.1.3. Relaciona la fórmula de la pendiente de una recta que pasa por dos puntos con la razón de cambio del objeto en movimiento, para dar idea de lo que significa la velocidad promedio y la velocidad instantánea.

3.1.4. Interpreta el proceso infinito de la razón de cambio cuando el corredor avanza de un tiempo t a un tiempo $t + h$, cuando h disminuye hasta acercarse a cero, para comprender la relación del concepto de derivada con la velocidad instantánea.

3.1.5. Comprende la derivada para interpretarla en sus distintos acercamientos.

3.2. *Criterios*

3.2.1. Identificar las variables que intervienen en la secuencia didáctica.

3.2.2. Diferenciar recta secante y tangente a una curva.

3.2.3. Precisar la razón de cambio y la pendiente de la recta secante.

3.2.4. Comprender que significa que una variable tienda a cero.

3.2.5. Propiciar la comprensión de la derivada a partir de la razón de cambio.

3.2.6. Calcular la razón de cambio e interpretar datos para entender su relación con la derivada.

3.3. *Evidencias*

3.1. Actividades de la secuencia didáctica.

3.2. Bitácora de observación en clase.

3.3. Video grabado de las actividades en el aula.

4. Competencias genéricas

4.1. *Saber conocer*

4.1.1. Calcular la pendiente de una recta que pasa por dos puntos, para su aplicación en el cálculo de los datos obtenidos del movimiento del objeto.

4.1.2. Describir los conceptos de la Física relacionados con el movimiento del corredor como tiempo, distancia, velocidad y aceleración para la correcta interpretación en la actividad.

4.1.3. Comprender la razón de cambio para lograr un acercamiento numérico a la derivada.

4.1.4. Emplear GeoGebra para promover el uso de gráficas de funciones.

4.1.5. Construir tablas numéricas de valores de una función para su aplicación en problemas de la razón de cambio.

4.1.6. Calcular derivadas de diversas funciones para fortalecer los conocimientos previos.

4.2. ***Saber ser***

4.2.1. Trabajar en equipo colaborativo para lograr aprendizaje.

4.2.2. Respetar la opinión de sus compañeros para promover la confianza en el grupo colaborativo.

4.2.3. Expresar sus ideas y puntos de vista con claridad para propiciar un debate científico en torno al tema en cuestión.

4.2.4. Defender su punto de vista con respeto para no provocar malestar en sus compañeros de GC.

4.2.5. Exponer los resultados obtenidos en la solución de un problema ante el grupo, para discutir colaborativamente y elaborar la mejor propuesta.

4.3. ***Evidencias***

4.3.1. Actividades de la secuencia didáctica.

4.3.2. Encuesta.

4.3.3. Entrevista.

4.3.4. Informe.

4.4. ***Recursos***

4.4.1. Cámara de video digital, Computadora, GeoGebra y Tracker.

5. Actividades

5.1. ***Con el Docente***

5.1.1. Formar y organizar los grupos colaborativos.

5.1.2. Introducir al tema y los propósitos a lograr.

5.1.3. Discutir el cuaderno de trabajo.

5.1.4. Diseñar el set de grabación (en conjunto con los estudiantes) para las situaciones problema y grabación de los videos.

5.1.5. Asesorar en el manejo de Tracker y GeoGebra.

5.2. ***De aprendizaje autónomo***

5.2.1. Inicial-receptivo:

- Identificar los parámetros que definen una recta.
- Calcular las ecuaciones de la recta en sus diferentes formas.
- Analizar el video del corredor.
- Operar el software Tracker.
- Operar el software GeoGebra.

5.2.2. Básico:

- Desarrollar las actividades planteadas en la secuencia didáctica.

- Preparar el video del movimiento del corredor para su análisis con el Tracker: selecciona el video, elige el punto sobre el cuerpo del corredor que tomará como referencia, escoge el número de cuadros para marcar la trayectoria, ubica los ejes coordenados y puntea el recorrido número de cuadros en el video con el programa Tracker, con el que marca la trayectoria para discutirlo con su GC.
- Obtener la tabla de datos y las gráficas.

5.2.3. Autónomo:

- Desarrollar las actividades planteadas en las actividades de la secuencia didáctica
- Analizar la tabla de datos, las gráficas y obtener el polinomio que mejor se ajuste al movimiento del corredor.
- Explicar a sus compañeros de GC cómo se aproxima la recta secante a la tangente.
- Argumentar ante sus compañeros de GC cómo se interpreta la transición de la velocidad promedio a la velocidad instantánea.
- Elaborar un reporte final sobre las actividades realizadas.

5.2.4. Estratégico

- Argumenta con sus compañeros de GC el concepto de derivada como razón de cambio.
- Investigar los distintos acercamientos que se han tratado para la enseñanza y aprendizaje de la derivada.
- Discutir con sus compañeros de GC ejemplos de aplicación de la derivada para relacionarlos con la vida cotidiana.
- Plantear a sus compañeros la relación entre el proceso infinito y el concepto de límite en la derivada.

6. Actividades a desarrollar

6.1 *Manipulación del software Tracker*

Tracker es un programa gratuito de análisis de video y construcción de modelos, desarrollado con Java y está diseñado para ser usado en la enseñanza de la Física, pero en esta propuesta, se presenta como una alternativa para propiciar la modelación matemática de situaciones problema de la vida cotidiana, como el movimiento del corredor, pues permite al usuario, a partir del video, construir gráficas, datos y un acercamiento analítico.

Es posible instalar Tracker en diferentes sistemas operativos como Windows, Mac OS X y Linux, y se puede descargar del sitio http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/, en el que se muestran diferentes opciones de acuerdo al que se desea instalar.

A continuación, se describen los pasos a seguir para llevar a cabo en el software Tracker, el análisis de video de cuerpos en movimiento. En este caso el de un carrito de fricción o de algún otro video de un objeto en movimiento, como el lanzamiento de un balón. Al abrir Tracker, aparece la ventana principal del programa (Figura 3) en la cual se muestran las siguientes secciones: vista principal de video (1), vista de gráficas (2), vista de datos (3), barra de menús (4), barra de herramientas (5), deslizador de tiempo (6).

Figura 3. Ventana principal de Tracker.

En la barra de menús, seleccionar ***Archivo*** y elije la opción ***Abrir***. Aparecerá una ventana en la cual se muestran archivos. Buscar la ubicación del video que se desea analizar y una vez encontrado, seleccionarlo y dar clic en el botón ***Open*** o bien, dar doble clic sobre el archivo (Figura 4).

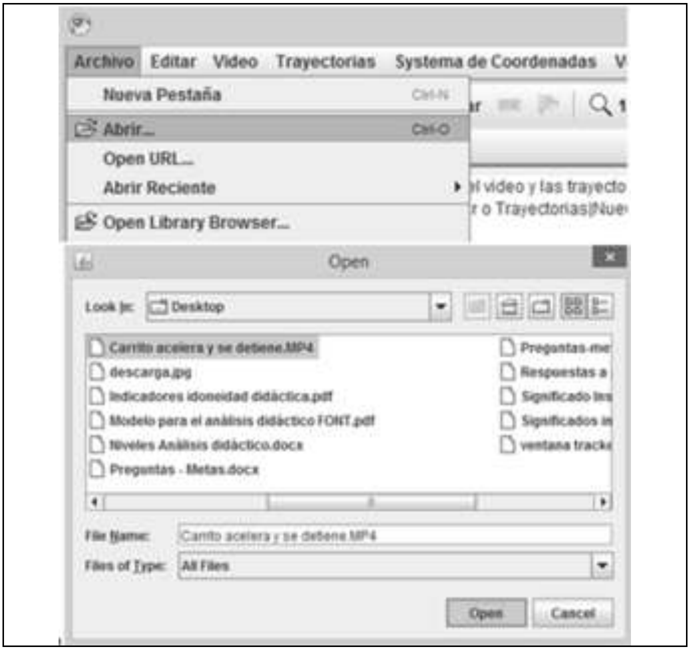


Figura 4. Selección del video a analizar.

Al abrir el video seleccionado, ***vista principal de video***, se procede a definir el intervalo del video que será analizado. En el ***deslizador de tiempo*** se encuentran dos marcas (punta de flecha negra), una al inicio del deslizador y otra al final. Ajustar tales marcas de modo que con ellas se delimite la parte del video que será analizada (Figura 5).

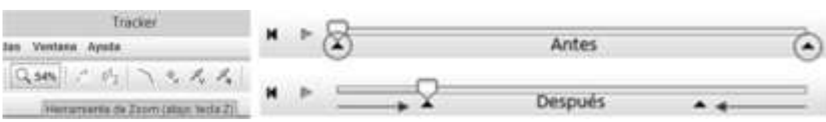


Figura 5. Herramienta del video y controles del video.

Definir el ***tamaño de paso*** significa determinar el número de cuadros del video que se consideran para la señalización de la trayectoria. De las "***opciones de calibración***", se elige ***Nuevo*** y la ***Vara de Calibración***, que se ajusta a la longitud de la marca en el video. Con un clic sobre la vara de calibración se sustituye el valor de la marca interface entre la vida real y el Tracker (Figura 6).

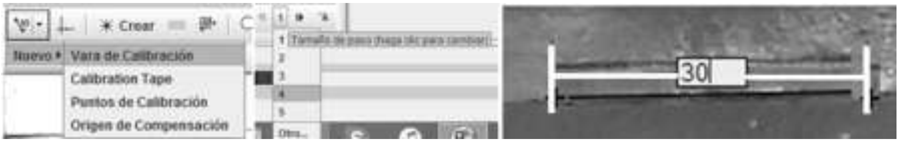


Figura 6. Tamaño de paso y ajuste de la vara de calibración

Con un clic sobre los ***ejes de coordenadas*** aparece sobre la pantalla el sistema coordenado, que el usuario ubica donde mejor le convenga (Figura 7).

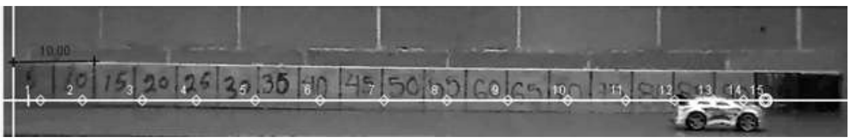


Figura 7. Ejes de coordenadas y ajuste del origen la posición inicial del cuerpo a analizar.

El movimiento del corredor se interpreta como un solo cuerpo en movimiento, que se identifica en Tracker como una ***Masa Puntual***, e interpreta como el objeto en el video a analizar (Figura 8).

Figura 8. Herramienta de Masa Puntual.

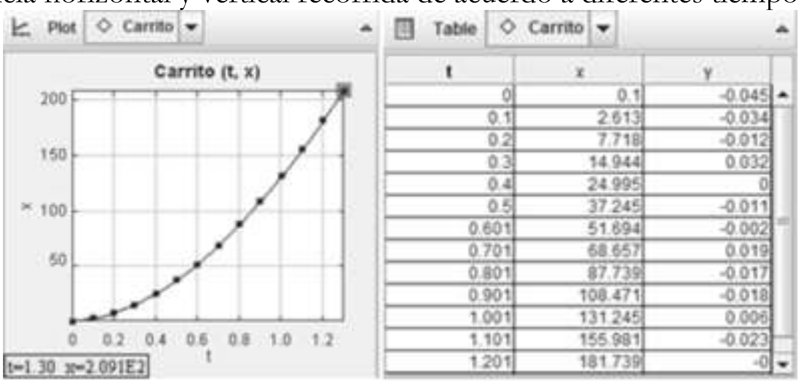
Para señalar la trayectoria de la ***Masa Puntual*** se presiona ***Shift + clic***, que se manifiesta como un cambio en el puntero del cursor. La marca de la trayectoria es la correcta si aparece un punto sobre la gráfica y las coordenadas correspondientes en la tabla de datos (Figura 9).

Figura 9. Marca de las primeras posiciones del cuerpo en movimiento.

Se repite ***Shift + clic*** para señalar toda la trayectoria del corredor, de forma paralela se marcarán en el plano cartesiano y los datos se registran en la tabla (Figura 10).

Figura 10. Trayectoria de la Masa Puntual u objeto en movimiento.

En la Figura 11 se presentan la gráfica del cuerpo en movimiento de la distancia contra tiempo y la tabla con los datos correspondientes a la distancia horizontal y vertical recorrida de acuerdo a diferentes tiempos.



t	x	y
0	0.1	-0.045
0.1	2.613	-0.034
0.2	7.718	-0.012
0.3	14.944	0.032
0.4	24.995	0
0.5	37.245	-0.011
0.601	51.694	-0.002
0.701	68.657	0.019
0.801	87.739	-0.017
0.901	108.471	-0.018
1.001	131.245	0.006
1.101	155.981	-0.023
1.201	181.739	-0

Figura 11. Vista gráfica y tabla de datos del desplazamiento del cuerpo respecto al tiempo.

6.2. *Actividad del corredor*

Integrantes: ____

Fecha: ___________

<u>Actividad con Tracker</u>

Instrucciones: Como actividad inicial se graba el video de un corredor o en su defecto el profesor proporciona el video "*corredor.mp4*". Los alumnos en coordinación con el profesor, realizan lo que se pide a continuación.

6.2.1. Realicen el análisis del video del recorrido del corredor con el programa Tracker, con el fin de obtener la tabla de datos numéricos y gráficas representativas de la situación.

Inserta aquí la gráfica del corredor que muestra Tracker.

6.2.2. De la gráfica mostrada contesten lo siguiente:

a) El eje horizontal representa: ______________________.
b) El eje vertical indica: ____________________.

6.2.3. Selecciona la opción correcta para el siguiente enunciado: Respecto al movimiento del corredor, la gráfica mostrada en Tracker indica que:

a) El tiempo aumenta conforme avanza el corredor.
b) La distancia que recorre aumenta conforme avanza el tiempo.
c) La velocidad del corredor es constante respecto al tiempo.
d) La distancia recorrida cambia de manera constante.

6.2.4. Una vez que señalaste la trayectoria del corredor, calcula la distancia y el tiempo de recorrido total. Auxíliate con la tabla de datos que muestra Tracker.

Tabla 1

Ejemplo de datos del corredor (en centímetros)

t	x	y
0.0000000	0.0000000	1.0627376
0.1666667	11.6901137	1.0627376
0.3333333	36.1330786	0.0000000
0.5000000	89.2699590	-5.3136880
0.8333333	214.6729966	-1.0627376
1.0000000	298.6292676	0.0000000
1.1666667	384.7110138	-2.1254752
1.3333333	486.7338241	0.0000000
1.5000000	591.9448472	-1.0627376
1.6666667	697.1558703	-1.0627376
2.0000000	934.1463566	-1.0627376

2.3333333	1154.1330410	-1.0627376
2.5000000	1271.0341780	-1.0627376

Figura 12. Representación de la situación problema.

Teoría: Cuando un cuerpo cambia de posición en un tiempo determinado se le denomina velocidad. Si (s) es la distancia recorrida y (t) el tiempo, entonces la velocidad promedio (v) del cuerpo se puede calcular con la fórmula:

$$\boldsymbol{v = \frac{s}{t}}$$

la cuál es una razón de cambio promedio de la distancia respecto del tiempo.

6.2.5. Con los datos de la tabla (para cada corredor es diferente), calcular la velocidad promedio del corredor durante su trayecto (escriban el procedimiento que siguieron):

6.2.6. Describe cómo es la velocidad del corredor: se detiene, se incrementa o se mantiene constante. Explica.

Teoría: Dado que el movimiento del corredor es en línea recta (eso se pretende), se puede calcular la velocidad promedio en una distancia en un intervalo de tiempo más corto, para ello se considera una posición inicial (s_1) y otra final (s_2) en un tiempo inicial del intervalo (t_1) y otro final (t_2) (Figura 13). Entonces la velocidad promedio (v) del intervalo estará dada por la fórmula:

$$\boldsymbol{v = \frac{d}{t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}}$$

6.2.7. Con los datos de la tabla calcula en Tracker la velocidad promedio en cada intervalo (I) y registra los datos en la Tabla 2:

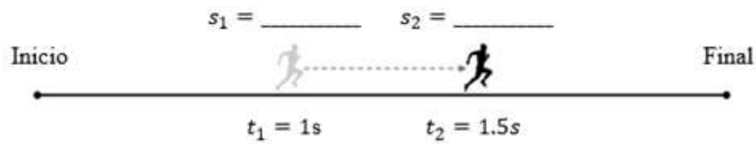


Figura 13. Representación de la situación problema en un intervalo más corto.

Tabla 2
Velocidad promedio para distintos intervalos

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9
Distancia									
Tiempo									
Velocidad Promedio									

6.2.8. Explicar el efecto sobre el movimiento del corredor en función de las magnitudes de las velocidades calculadas.

6.2.9. Para ajustar el polinomio asociado a la trayectoria con Tracker se hace doble clic sobre la gráfica $x-t$ y aparece en la pantalla la gráfica (Figura 14) y la opción ***analyze*** ➔ ***Selección del ajuste***.

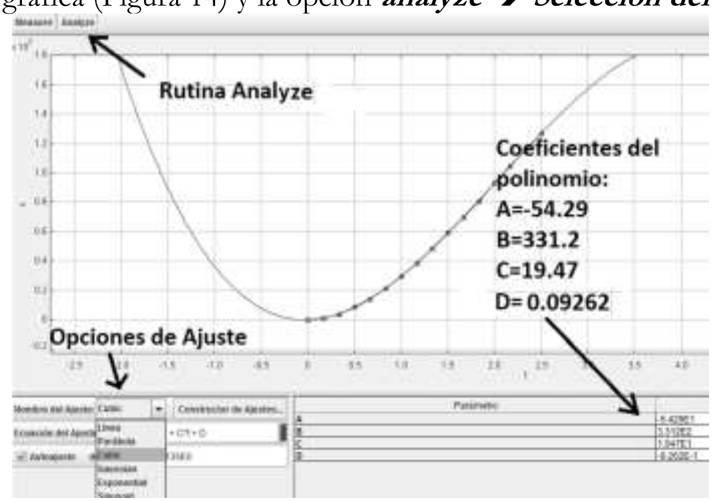


Figura 14. Rutina de ajuste de funciones del Tracker.

Para los datos de la tabla 1, los polinomios de ajuste de segundo y tercer grado son:

$$f(t) = 1.27.6t^2 + 216.6t - 35.23$$
$$f(t) = -54.29t^3 + 331.2t^2 + 19.47t - 0.9262$$

<u>Actividad con GeoGebra</u>

Instrucciones: La rutina de ajuste del Tracker es limitada, por eso en caso de que no sea adecuada la aproximación polinomial, se sugiere emplear el GeoGebra, cuya opción es más completa y realizar lo siguiente:

6.2.10. Copiar la tabla de datos del Tracker correspondientes a la distancia (x) y el tiempo (t) y exportarlos a la Hoja de Cálculo de GeoGebra, luego seleccionar ***Análisis de regresión de dos variables*** y obtener el mejor polinomio (Figura 15), en este caso, de grado 4:

$$f(t) = 1.4760t^4 - 61.670t^3 + 342.8997t^2 + 13.4615t - .3931$$

Se aclara que en el GeoGebra, la variable x corresponde al eje horizontal del plano, mientras que al eje vertical se le asocia el valor calculado para la función $g(x)$, porque en el caso del Tracker, las variables pueden ser asignadas de manera diferente, por lo tanto corresponde al usuario considerar tal situación en el análisis del movimiento del corredor.

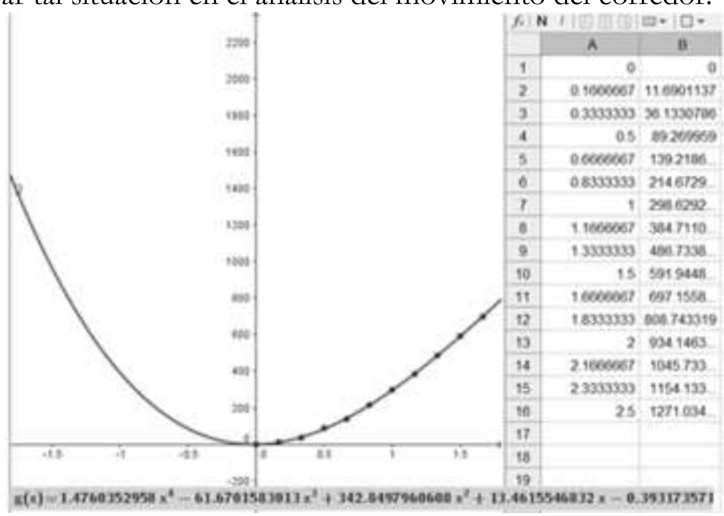


Figura 15. Rutina de ajuste de funciones del GeoGebra..

Teoría: Dada la gráfica de una función $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, a la recta que pasa por los puntos $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$ se le conoce como recta secante a $f(x)$. Figura 16.

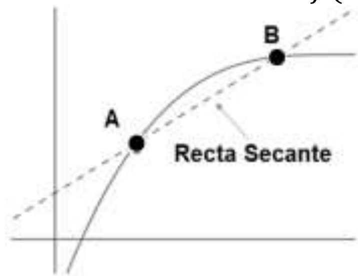


Figura 16. Ejemplo de recta secante.

Para dibujar un punto fijo en el plano cartesiano, escribir en la linea de ***Entrada*** de GeoGebra: $\boldsymbol{A = (1, g(1))}$. Seleccionar la opción ***punto A sobre objeto*** y hacer clic sobre la gráfica de la función para que se registre. Hacer lo mismo para ubicar el punto B.

Una vez que ya se ubicaron los puntos A y B sobre la curva, se procede a trazar la recta secante que pase por estos puntos, para ello hacer clic en la parte inferior derecha del tercer botón y seleccionar la opción *Recta* y luego clic sobre el punto A y otro clic sobre el punto B y de manera automática se traza la recta secante (Figura 17).

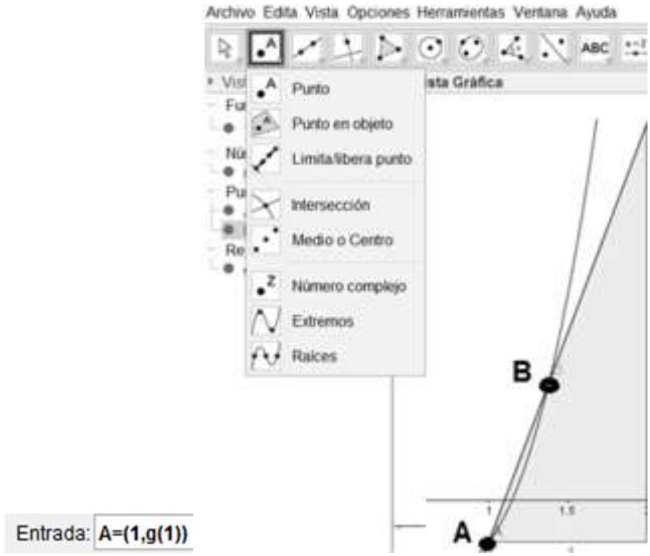


Figura 17. Punto fijo sobre la curva y trazo de una secante sobre la gráfica de la función.

6.2.11. Selecciona una opción en cada enunciado:

i. El punto **A** en la gráfica de $g(x)$ representa:
  a) La velocidad del corredor en 1 segundo.
  b) El tiempo en que el corredor arranca.
  c) La distancia recorrida por el corredor en 1 segundo.
  d) La aceleración del corredor en el primer segundo.

ii. El punto **B** en la gráfica indica:
  a) El tiempo en que el corredor comienza a detenerse.
  b) La velocidad del corredor en 1.5 segundos.
  c) La aceleración del corredor en 1.5 segundos.
  d) La distancia recorrida por el corredor en 1.5 segundos.

<u>Teoría:</u> La fórmula para calcular la pendiente de una recta dados los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ es muy semejante a la que calcula la velocidad promedio:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para calcular la pendiente de la recta secante con GeoGebra (Figura 18), se selecciona la opción ángulo de la barra de herramientas y luego se selecciona ***Pendiente*** y al hacer clic sobre la recta secante, aparecerá un triángulo relacionado con la pendiente $m = -0.69$ de la recta sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo.

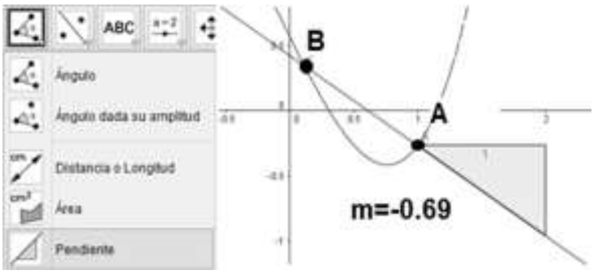


Figura 18. Cálculo de la pendiente de una secante de la función.

Con el ratón sostenido mueve el punto B sobre la curva de la función $g(x)$ y observa cómo se modifica la pendiente de la recta secante.

6.2.12. Escribe el valor de la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos A y B, m = ____________ y calcula la velocidad promedio entre los puntos $A(1,\ g(1))$, $B(1.5,\ g(1.5))$. ¿Cómo son la velocidad promedio y la pendiente de la recta secante que pasa por los mismos puntos? ______________.

<u>Teoría:</u> Considerar de nuevo la recta secante de la Figura 16 que pasa por los puntos A y B de la curva. Si la posición de B es cada vez más cercana a A, la recta secante se aproxima a la recta tangente (Figura 19) en el punto A.

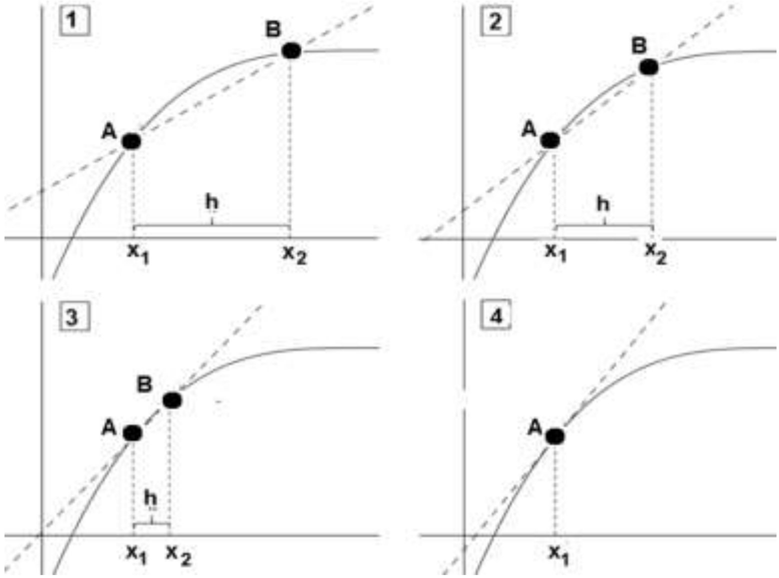


Figura 19. Aproximación del punto B al punto A.

Observe que la distancia entre x_1 y x_2 es cada vez menor conforme el punto B se encuentra más cercano a A. Tal distancia corresponde al denominador de la fórmula para calcular la pendiente m de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \frac{\leftarrow \text{distancia entre } y_1 \text{ y } y_2}{\leftarrow \text{distancia entre } x_1 \text{ y } x_2}$$

6.2.13. Seleccionen la opción correcta:

a. Si a la diferencia entre x_1 y x_2 le llamamos h, entonces mientras más cercano se encuentre el punto B al punto A, el valor de h tiende a:

$h \to 0$ $\quad$ $h \to 1$ $\quad$ $h \to 2$ $\quad$ $h \to \infty$

b. ¿Qué representa h en términos de la situación del corredor?

La diferencia entre la posición inicial y la posición final del corredor en el intervalo.	La diferencia entre el tiempo inicial y el tiempo final del corredor en el intervalo.	La diferencia entre la velocidad inicial y la velocidad final del corredor en el intervalo.

Teoría: A la posición límite de la recta secante que pasa por los puntos A y B, cuando B se encuentra cada vez más cercano a A de ***manera indefinida,*** se le llama recta Tangente (Figura 20), es decir, sea c una curva y A un punto de ella, entonces la recta tangente a c en A es la recta que pasa por A y que tiene la misma dirección que c alrededor de A. Compruebe esto desplazando el punto B sobre la curva.

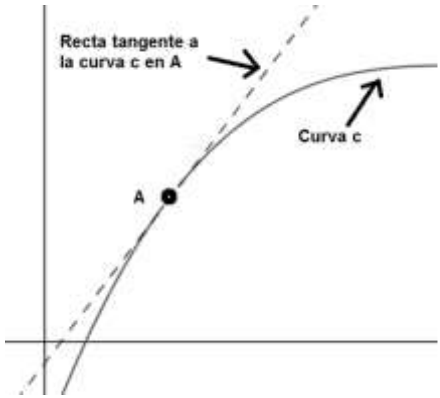


Figura 20. Ejemplo de recta tangente a una curva en un punto.

6.2.14. Escriban el valor de la pendiente de la recta cuando el punto B se encuentra lo más aproximado posible a la posición del punto A: ______________________. El valor de esta pendiente corresponde aproximadamente a la **velocidad instantánea** del corredor justo en $t = 1$ seg. del recorrido. Para encontrar la pendiente correspondiente a una recta tangente a la gráfica en el punto A, se elige el 4to. Botón (Perpendicular) de la barra de herramientas y dar clic en la esquina inferior derecha y elegir la opción *"Tangentes"*. (Figura 21). Ahora se da un clic sobre el punto A y después otro clic sobre la gráfica de la function, para que se trace la recta tangente a la curva en ese punto, en la pantalla. Escriban el valor que aparece de la pendiente: ________.

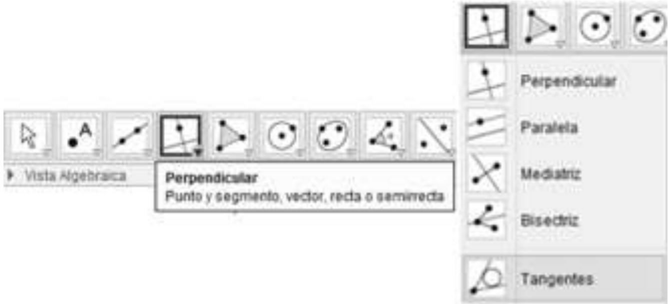


Figura 21. Herramienta para trazar una recta tangente sobre la función.

6.2.15. ¿Qué representa la pendiente de la recta tangente en el punto A de acuerdo a la situación del corredor?

6.2.16. Escriban si la pendiente de cada gráfica representa una *velocidad instantánea* o una *velocidad promedio*:

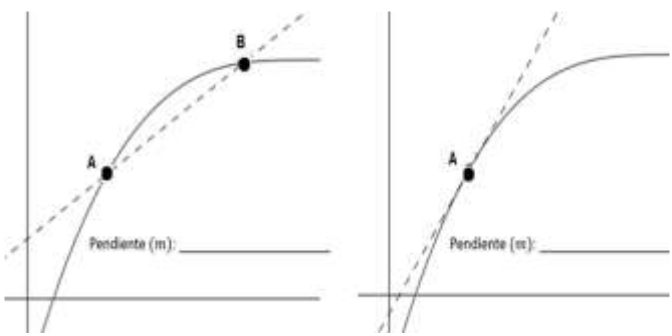


Figura 22. Recta secante y tangente sobre la función.

6.2.17. Completar el siguiente texto: si la pendiente de una recta ____________________ que pasa por dos puntos corresponde a la velocidad promedio en el intervalo dado por tales puntos, entonces la velocidad en un instante determinado estará dada por la pendiente de la recta ___________________________ a un punto.

Teoría: En la Figura 23, la distancia entre x_1 y x_2 es representada por la letra h, la cual es cada vez más pequeña conforme el punto B se encuentra más cercano al punto A. Si tomamos en cuenta esto, podemos referirnos a x_1 simplemente como x y a x_2 como $x + h$.

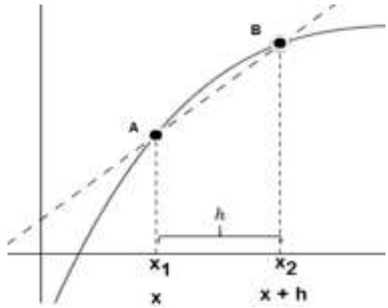


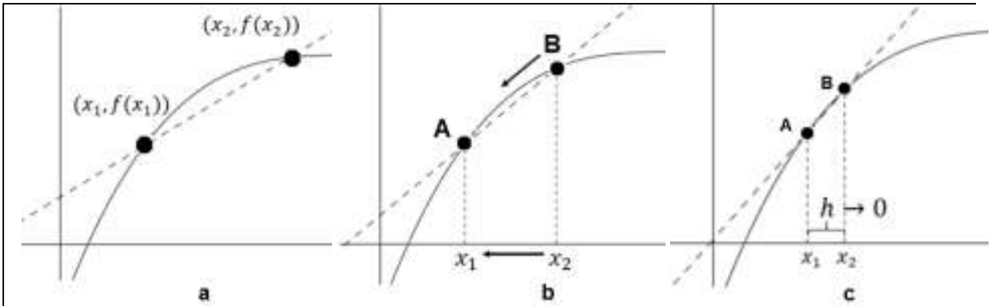
Figura 23. Distancia entre x_1 y x_2.

Las coordenadas de los puntos A y B se escriben de la siguiente manera: $A(x, f(x))$ y $B(x+h, f(x+h))$. Al sustituir las coordenadas de los puntos A y B en la fórmula para calcular la pendiente m de la recta que pasa por tales puntos, se obtiene la expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nótese que el valor de h tiende a cero cuando la posición del punto B es cada vez más próxima al punto A, así que la recta secante que pasa por ambos puntos tiende a ser una recta tangente de la función en el punto A. Observen la siguiente secuencia (Figura 24):

1. Se tiene una recta secante que pasa por dos puntos A y B, cuya pendiente está dada por: $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$	**2.** Se sabe que para aproximarse a una recta tangente en A, la posición del punto B esta cada vez más cerca al punto A, por lo que x_2 se acerca a x_1.	***3.*** Sea h la distancia entre x_1 y x_2, la cual tiende a cero. $h = x_2 - x_1$, también, si $x_1 = x$ entonces $x_2 = x + h$



4. Entonces, la <u>pendiente</u> de la recta tangente en el punto A estará dada por:

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

5. Recta Tangente

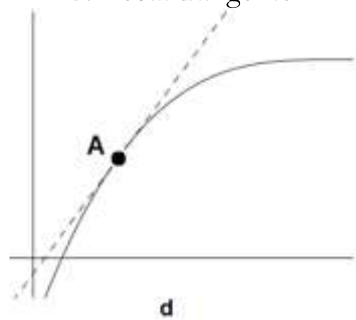


Figura 24. Secuencia de recta secante a recta tangente.

Para encontrar la velocidad instantánea del corredor en el segundo 1, será necesario entonces calcular el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$$

En el menú principal de GeoGebra, selecciona el menú ***Vista*** y da clic en la opción **Cálculo Simbólico (CAS)** (Figura 25) y aparece una sección nueva en la parte izquierda de la ventana.

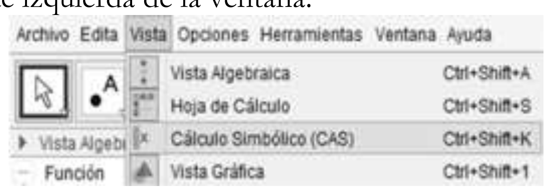


Figura 25. Opción CAS de GeoGebra.

En el recuadro blanco del CAS, escribe la siguiente expresión correspondiente al límite (Figura 26) que se busca calcular y luego presiona el botón "*Aproximación numérica*" (**<u>no presionar *Enter*</u>**):

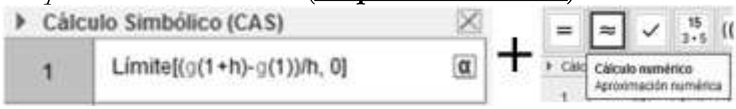


Figura 26. Opción CAS para aproximación numérica.

Escribe el valor que aparece como resultado: ______________________

6.2.18. ¿Qué representa ese valor respecto a la <u>gráfica</u> de la función?

a) La pendiente de la recta secante a los puntos A y B.
b) La recta tangente al punto A.
c) La pendiente de la recta tangente al punto A.
d) La recta secante a los puntos A y B cuando B se aproxima a A.

6.2.19. ¿Qué representa ese valor en cuanto a la <u>situación del corredor</u>?

a) La velocidad promedio desde el punto de partida hasta el segundo 1.
b) La velocidad instantánea del corredor en el segundo 1.
c) La velocidad instantánea del corredor en el segundo 1.5.
d) La velocidad promedio del corredor del segundo 1 hasta el final del recorrido.

6.2.20. Para encontrar una función que represente la velocidad del corredor en cualquier instante del recorrido, calcular el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Para encontrarlo, escribe en la ventana del CAS, en la fila 2, la expresión correspondiente al límite y después presiona el botón "*Aproximación numérica*": Figura 27.

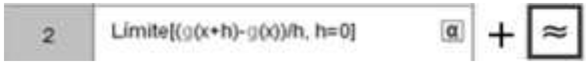


Figura 27. Opción CAS para aproximación numérica

6.2.21. Escribe la expresión que aparece como resultado: __________________________

Teoría: La derivada de una función g en un punto $(x, g(x))$, denotada como $g'(x)$ está dada por:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Expresión que se ha trabajado a lo largo de esta actividad.

6.2.22. En GeoGebra la instrucción para calcular la derivada (Figura 28) de una función es la siguiente:

Figura 28. Opción CAS para Derivada.

En la vista algebraica (Figura 29), en la parte izquierda de la ventana, debajo de la función $g(x)$ aparecerá otra llamada $g'(x)$:

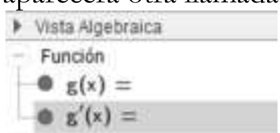


Figura 29. Opción Derivada de una función.

Escriban la expresión que aparece: $g'(x) =$ __________________

6.2.23. Evalúa la función $g'(x)$ en $x = 1, x = 3, x = -3.1, x = -.341$ y escribe el resultado:

$g'(1) =$_____	$g'(3) =$______	$g'(-3.1) =$_____	$g'(-.341) =$______

6.2.24. Completar la Tabla 3 con los valores para el tiempo ***(t)*** de la Tabla 1, es decir, evaluar $g'(x)$ según corresponda.

Tabla 3

Cálculo de la velocidad instantánea

Tiempo (s)	**Velocidad instantánea (m/s)**
0.0000000	
0.1666667	
0.3333333	
0.5000000	
0.6666667	
0.8333333	
1.0000000	
1.1666667	

1.3333333	
1.5000000	
1.6666667	
1.8333333	

Recordatorio: El contenido con el que se trabajó a lo largo de esta actividad:

Pendiente de una recta que pasa por dos puntos: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Velocidad promedio $m = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$:
Pendiente de la recta secante a la función f(x): $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$	Velocidad instantánea: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Desde tu experiencia, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo se define a la derivada en cuanto a la situación del corredor?
b) ¿Cómo interpreta a la derivada respecto a la gráfica de una función?
c) ¿Cómo se expresa la derivada de una función $f(x)$ en términos de un límite?

Conclusiones

Esta propuesta está conformada por diferentes componentes teóricos, metodológicos y de recursos, con los cuales se espera lograr el objetivo de aprendizaje esperado. Con base en la teoría del EOS se distinguieron los diferentes objetos primarios que componen al objeto derivada, lo cual sirvió de base para el diseño de las actividades planteadas en este trabajo.

Concebir la parte conceptual del objeto derivada y considerar las diferentes propiedades y procedimientos involucrados, los argumentos necesarios para justificar estos elementos, los diversos tipos de lenguaje empleados, una situación de la vida cotidiana y la relación que hay entre todos estos, es relevante para guiar el aprendizaje del alumno sobre este objeto matemático. También, con el análisis de idoneidad didáctica se verificó la pertinencia del diseño instruccional de la propuesta desde una perspectiva epistemológica, cognitiva, mediacional, emocional e interaccional.

De la implementación de esta secuencia didáctica, la modelación de la situación del corredor fue de ayuda para que el trabajo del alumno partiera de un evento conocido, con el cual se influyó en su motivación e interés por el aprendizaje del objeto derivada, ya que relacionaron las matemáticas con su contexto y ver su aplicación en situaciones reales, a diferencia de sólo observar aspectos abstractos que no llaman su atención y con los que generalmente no logra ver su utilidad.

Además, al relacionar los diferentes objetos matemáticos intervinientes en la práctica con una situación de la vida cotidiana, los alumnos lograron distinguir características de tales objetos, como en el caso del evento del corredor, al observar la dependencia de la distancia recorrida respecto al tiempo reconoccieron la relación entre los ejes de la gráfica y entre los elementos que componen la función representativa.

Por otro lado, el empleo de la tecnología en esta propuesta, fue un factor importante tanto para la motivación en el aprendizaje de los estudiantes como para la apropiciación de los diferentes objetos matemáticos que componen al objeto derivada.

En la encuesta aplicada a los alumnos sobre su experiencia en el taller en el cual se llevó a cabo la práctica, ellos indicaron sentirse motivados por el uso de la tecnología, además de parecerles interesante el trabajo con el software Tracker y GeoGebra.

También, el hecho de utilizar tecnología para trabajar con las representaciones gráficas, numéricas y analíticas de la situación del corredor, influyó en el aprendizaje del objeto derivada desde sus distintas perspectivas y les ayudó a argumentar sobre los diferentes procedimientos que se realizaron. Además, se propició el intercambio de ideas entre los alumnos durante la manipulación e interpretación de la información matemática presentada en los programas.

Con el desarrollo del trabajo propuesto se observó que, tanto el uso de la tecnología como la inclusión de situaciones de la vida cotidiana resultan ser elementos de apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, al influir de manera significativa en los estudiantes al proveerles de herramientas que facilitan su estudio en esta área de conocimiento y motivarlos durante esta actividad.

Referencias

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* (Tesis de Doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, D. F.

Godino, J. (2002). Un Enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol. 22. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino /funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf.

Hitt, F. & González-Martín, A.S. (2014). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*, 88, 201-219.

Jofrey, J. A. (2010). Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases. *Physics Education*. DOI 10.1088/0031-9120/1/005.

Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. & Nesterova, E. (2016). Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development*, 5(1), 62-76. DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1.

Pantoja, R., Ulloa, R., & Nesterova, E. (2013). La modelación matemática en situaciones cotidianas con los softwares AVIMECA y MATHCAD. *Góndola*, 8(1), 8-22.

Pollak, H. (2007). Mathematical Modelling- A conversation with Henry Pollak. En W. Blum, G. Galbraith, H. Henn, M. Niss (Eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education*. *The 14th ICMI Study* (pp. 109-120). New York, USA: Springer.

Tobón, S,, Pimienta, J. H. & García, J.A. (2010). *Secuencias Didácticas: Aprendizaje y Evaluación de competencias.* México: Pearson Educación.

ACTIVIDADES DIDÁCTICAS USANDO CAS DE LOS ASPECTOS BÁSICOS NECESARIOS PARA APRENDER EL CONCEPTO DE DERIVADA

José Carlos Cortés Zavala
Eréndira Núñez Palenius,
Universidad Michoacana

Resumen
En este trabajo se expone cómo se diseñaron y en qué consisten siete actividades didácticas necesarias para el entendimiento del concepto de Derivada. Se exponen también las ideas teóricas con las que fueron diseñadas tales actividades, cómo se propone el uso del CAS de la calculadora Ti-Nspire de tal manera que apoye la construcción del concepto de Derivada. Se presentan también algunos de los resultados obtenidos en la experimentación.

Palabras clave: Derivada, CAS, calculadora, actividades didácticas

Introducción
Este trabajo tiene el propósito de presentar actividades diseñadas sobre los diferentes aspectos relacionados con el concepto de Derivada. Dentro de las actividades el alumno se apoyará de la calculadora simbólica (Ti-Nspire CX CAS), la cual cuenta con un sistema de algebra computacional (CAS, por sus siglas en inglés) para llevar a cabo las actividades.

La integración de sistemas de algebra computacional, reconocidas por su combinación poderosa de computación simbólica y visualización gráfica, en la enseñanza de matemáticas ha sido investigado e implementado en muchos países. Desde su desarrollo en la década de los setentas y su introducción a la enseñanza en los ochentas, el CAS se vio como una herramienta altamente valiosa para hacer matemáticas y como potencialmente viable para su enseñanza y aprendizaje.

Estudios implementados en clases de matemáticas en los niveles medio superior y superior (Atkins, Creegan & Soan, 1995; Heid, 1988; Lagrange 2000; Pierce, 1999) han apoyado el argumento de que la manipulación simbólica dentro del CAS puede evitar errores de manipulación de los alumnos y por lo tanto permitirles generar resultados exactos y aproximados de manera rápida. De acuerdo con Kutzler (1994) la habilidad de "construir" bases conceptuales en CAS permite que los alumnos puedan manejar problemas más complicados, desde el punto de vista de la manipulación algebraica, que la mayoría de alumnos que trabajan de maneras tradicionales (lápiz y papel). Además, teniendo las facilidades de manipulación simbólica, capacidades numéricas y representaciones graficas puede promover el hábito de utilizar las tres representaciones para aumentar su conocimiento (Pierce, 1999).

La calculadora simbólica dentro de las actividades propuestas en este documento sólo es una herramienta, su uso no garantiza el aprendizaje. Como cualquier herramienta se debe saber cómo utilizarla y en qué situaciones. Las actividades se generaron de tal manera que se promueve la conceptualización de aspectos fundamentales dentro del cálculo diferencial empleando la estrategia de "abajo hacia arriba", en donde primeramente se separan las piezas claves (por ejemplo, la razón de diferencias) del concepto Derivada para construir un aprendizaje de cada pieza y posteriormente se juntan.

A partir del análisis de la definición de Derivada que es $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pero que también se puede escribir como $f'(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ se puede observar que intervienen diferentes aspectos como son: Diferencias, Pendientes, Limite, etc. En la Figura 1 se da un bosquejo de los aspectos que están presentes en la definición de Derivada.

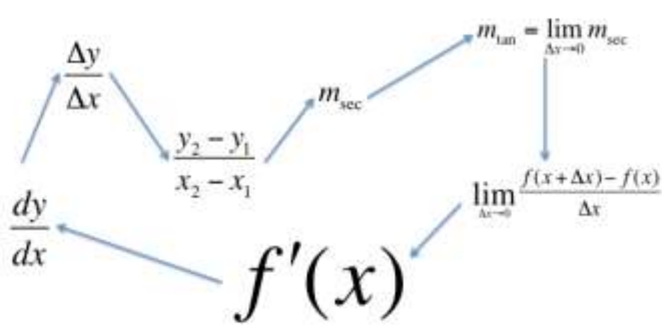


Figura 1. Diferentes aspectos que intervienen en el concepto de la Derivada.

Es en este sentido que las actividades que se diseñaron tiene como objetivo el estudio de:

1. Diferencias
2. Pendientes
3. Pendiente como función
4. Límites
5. Líneas secantes y tangentes
6. Función derivada
7. Aplicaciones

El último tema no aparece dentro de la Figura 1, pero es considerado importante en la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial. Para cada uno de los temas mencionados, se les diseñó una actividad.

Marco Teórico

Aspectos Teóricos de Ambientes de Aprendizaje

La educación involucra la interacción entre estudiantes, maestros y medios (libros, tecnología etc.) creando lo que llamaremos un *ambiente de aprendizaje*, si el medio que utilizamos y la metodología de enseñanza es la adecuada entonces se tendrá un *ambiente tecnológico interactivo de aprendizaje* (Núñez & Cortés, 2011). Hoy en día el estudiante puede decidir qué y cómo va aprender, debe tomar la iniciativa y hacerse responsable por su aprendizaje con el fin de ser un aprendiz eficaz (Kuhn, 2007). Una visión del aprendizaje es el constructivismo, en donde el alumno es el agente activo en el proceso de la adquisición de conocimientos (Phillips, 1998), pero que también se ve influenciado por los continuos acercamientos sociales al resolver la tarea. En este sentido la construcción del conocimiento es de manera individual y social.

Cuándo el medio que se utiliza es tecnológico éste empieza siendo un *artefacto* que deberá convertirse en *instrumento* lo cual es explicado a través de la *Génesis Instrumental*. Las actividades que se expondrán más adelante se diseñaron partiendo de dos ideas teóricas, por un lado el constructivismo y por otro lado la Génesis Instrumental.

Constructivismo, Socio-constructivismo y aprendizaje Colaborativo

El Constructivismo es un término general que abarca varias perspectivas del aprendizaje (Gijbels, Van de Watering, Dochy & Van den Bossche, 2006).

La manera en que las personas entienden las situaciones y cómo crean significados es el interés principal de las teorías del constructivismo.

Ideas Principales del Constructivismo

El constructivismo Piaget(1980) ha introducido nuevos conceptos de aprendizaje y enseñanza (Paintz, 1997; Phillips, 1998). Aunque tome muchas formas, Phillips (1998) mencionó unas de las premisas fundamentales. Dentro de la familia enorme de teorías del constructivismo, hay algunas ideas generales predominantes. De acuerdo al análisis de Taber (2006), algunos de sus conceptos fundamentales son:

1. Los conocimientos son construidos de forma activa por el aprendiz, no son recibidos pasivamente del entorno. El aprendizaje es algo hecho por el alumno, no algo que es impuesto sobre él.
2. Los alumnos llegan al aprendizaje con ideas existentes sobre muchos fenómenos. Algunas de las cuales son "*ad hoc*" e inestables, mientras que otras son bien fundamentadas y bien desarrolladas.
3. Los aprendices tienen sus propias ideas sobre el mundo, pero hay muchas similitudes y patrones comunes, ya que éstas son aceptadas y compartidas socialmente, y culturalmente.
4. Unas ideas van en contra de conceptos científicos aceptados (por ejemplo, pensar que es el sol el que se va moviendo durante el día), y algunas de ellas pueden ser persistentes y difíciles de cambiar.
5. El conocimiento es representado en el cerebro como estructuras conceptuales, que es posible modelar y describirlas en detalle.
6. La enseñanza debe contemplar las ideas existentes del aprendiz.
7. Aunque en un sentido el conocimiento es personal e individual, el aprendiz construye su conocimiento a través de su interacción con el mundo físico, colaborativamente en ambientes sociales, y en un ambiente cultural y lingüístico.

Socio-Constructivismo

Diferentes perspectivas del constructivismo enfatizan procesos cognitivos individuales, como el constructivismo cognitivo que se enfoca en la construcción del conocimiento del individuo. También las co-construcciones sociales de conocimientos como el constructivismo social, que destaca procesos de colaboración en la construcción de conocimientos (Windschitl, 2002). El constructivismo sociocultural deriva su fundamento teórico de Vygotsky (1978).

El paradigma sociocultural afirma que hay una relación entre procesos sociales y la construcción de conocimientos. Hay tres premisas en los conceptos mentales y de aprendizaje de Vygotsk (Werstech, 1990): los procesos mentales, el entorno social y las herramientas y señales. Los procesos mentales superiores son desarrollados plenamente en la vida social del individuo, nuestro entorno contribuye al crecimiento mental. Las herramientas y señales (por ejemplo, el habla) utilizadas en las experiencias cotidianas, sirven como mediadores en el desarrollo de procesos mentales superiores. Finalmente, la manera más eficaz para analizar las influencias sociales y dichos mediadores es por análisis genético o de desarrollo.

En el método analítico, el aprendizaje y el desarrollo son evaluados por la observación cuidadosa de las fuerzas sociales, culturales y la mediación que existe en el ambiente que rodea al aprendiz. Se hace hincapié en los cambios históricos que ocurren en el "contexto y oportunidades para el aprendizaje" (John-Steiner & Mahn, 1996, p. 194) y los "procesos", toman precedencia sobre los "productos" (Vygotsky, 1978) en la compresión del desarrollo mental superior. Una forma de realizar el socio-constructivismo es a través del aprendizaje colaborativo.

Aprendizaje Colaborativo

El aprendizaje colaborativo generalmente se considera menos estructurado y los alumnos tienen más libertad en el alcance y los resultados del proceso de aprendizaje. Ellos definen sus propias necesidades de aprendizaje y en cambio se hacen responsables para identificar lo que creen que deben aprender y cómo lo van a aprender, al contrario del aprendizaje cooperativo en donde el maestro tiene la responsabilidad de determinar lo que se aprenderá (Caplow & Kardash, 1995).

El aprendizaje colaborativo está basado en los siguientes principios (Orr, 1998):

1. Trabajar juntos resulta en un mejor entendimiento a comparación del trabajo independiente.
2. Las interacciones habladas y escritas contribuyen a una mejor comprensión.
3. Existe la oportunidad de ser consciente a través de experiencias del aula, de las relaciones entre interacciones sociales y de una mejor comprensión.

4. Algunos elementos de dicha comprensión son idiosincrásicos e impredecibles.
5. La participación es voluntaria.

Génesis Instrumental

En los primeros años del uso del CAS en la educación matemática, la secuencia de caja-blanca/caja-negra dominaba la discusión sobre el álgebra computacional. En un proceso de caja negra no se sabe el mecanismo de resolución y en un proceso de caja blanca se tiene la información sobre él. Buchberger (1989) sugirió que los alumnos solo deben utilizar álgebra computacional (CAS) para tareas que pueden hacer a mano. Dicha estrategia dice que hasta que el alumno domine un tema nuevo podrá utilizar algebra computacional. Bajo esta condición al utilizar el álgebra computacional (caja-negra), el alumno es capaz de saber que "hay dentro" del proceso. Mientras que en la secuencia caja-negra/caja-blanca se invierte el orden, primero se utiliza el álgebra computacional. Proponentes de este enfoque, utilizan CAS como un generador de ejemplos y como una herramienta de exploración para provocar curiosidad, y poder llevar a cabo descubrimientos interesantes (Drijvers, 1995).

Heid (1988) demostró que el uso del CAS puede facilitar el desarrollo de conceptos matemáticos. La experimentación se llevó a cabo con alumnos de primer año de la Universidad inscritos en un curso de cálculo. El experimento consistió en el uso de CAS para la formulación del concepto de derivada utilizando gráficas y la combinación de representaciones. Las técnicas de diferenciación fueron enseñadas hasta el final del curso. Los resultados del experimento de "concepto primero", indican que el desarrollo de conceptos puede preceder el aprendizaje de técnicas. Heid sugirió que el uso de CAS puede provocar una re-secuencia de conceptos y habilidades en los cursos de matemáticas.

Cuando se introdujeron las calculadoras gráficas en educación, fue evidente que los alumnos tenían dificultades en la interpretación de las representaciones gráficas que aparecían en la pantalla de la calculadora (Goldenberg, 1987; Hillel, Lee, Laborde. & Linchevski, 1992). Guin y Trouche (1999), observaron que la confusión de los alumnos se debe al no poder distinguir entre el objeto matemático y su representación en la calculadora, esto mismo puede suceder cuando los alumnos hacen uso inicial del CAS.

Dentro del campo de la ergonomía cognitiva interesan procesos mentales (percepción, memoria, razonamiento y respuesta ideo-motor) y en cómo afectan las interacciones entre humanos y otros elementos de un sistema, el cual se apoyan en la idea de instrumentación (Vérillon & Rabardel, 1995). Los investigadores de la ergonomía cognitiva se enfocan en estudiar procesos de aprendizaje profesionales, que se llevan a cabo en ambientes tecnológicamente complejos. Por ejemplo para el entrenamiento de pilotos de avión o cirujanos y se han desarrollado herramientas conceptuales adaptadas para el estudio de este tipo de procesos de aprendizaje.

Para entender el uso de dichas herramientas conceptuales, debemos enfocarnos en el concepto de "instrumento" (Artigue, 2002). El instrumento es diferente al objeto (material), el cual se conoce como "artefacto". Por lo tanto el instrumento es una entidad mixta, parte artefacto y parte esquemas cognitivos que lo hacen un instrumento. Inicialmente, para un individuo el artefacto no tiene valor instrumental. La transformación de artefacto a instrumento se lleva a cabo por un proceso conocido como *Génesis instrumental*, el cual involucra la apropiación de esquemas sociales pre-existentes.

La Génesis instrumental puede funcionar de dos formas. La primera forma es dirigida hacia el instrumento. En donde progresivamente se carga con potencialidades y eventualmente tiene un uso específico, conocido como la *Instrumentalización* del artefacto. La segunda está dirigida hacia el sujeto, lo cual resulta en la apropiación de esquemas de acción instrumentada que se convierten en técnicas y permiten una respuesta eficaz a tareas dadas. Lo anterior se conoce como *Instrumentación.* Para entender y promover la Génesis en los aprendices es necesario identificar las restricciones inducidas por el instrumento: las restricciones internas y de interface (Balacheff, 1994). Además, es necesario identificar el potencial ofrecido por el trabajo con instrumentos.

La Génesis instrumental es el proceso de construcción de esquemas que consiste en técnicas y concepciones, que le dan significado a las mismas. La teoría de Instrumentación está en línea con las opiniones sobre el rol de símbolos en la educación matemática (Gravemeijer, Cobb, Bowers &

Whitenack, 2000). El valor de la teoría de la Instrumentación es que proporciona una forma específica para ver la interacción entre los alumnos y la herramienta tecnológica, en particular demuestra cómo los obstáculos técnicos pueden ser relacionados a dificultades conceptuales.

Tarea - Técnica - Teoría

El enfoque instrumental ha sido reconocido para el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en un ambiente CAS (Artigue, 2002; Lagrange, 2003). De acuerdo con Monaghan (2007), este enfoque abarca elementos de la ergonomía cognitiva (Vérillon y Rabardel, 1995) y de la teoría antropológica didáctica (Chevallard, 1999). En la teoría antropológica didáctica, Chevallard (1999) observa que los objetos matemáticos emergen en un sistema de prácticas que son caracterizadas por cuatro componentes: *tarea,* en donde el objeto se encuentra; *técnica,* utilizada para resolver la tarea; *tecnología,* el medio que explica y justifica la técnica; y *teoría*, el discurso que proporciona la base estructural para la tecnología.

Artigue (2002) redujo los cuatro componentes de Chevallard a tres: *tarea, técnica y teoría.* El componente de *teoría* de Artigue combina los componentes de *tecnología* y *teoría* de Chevallard. Dentro de este marco teórico (Tarea – Técnica – Teoría), una técnica es el conjunto complejo de razonamiento y trabajo de rutina, y tiene valores pragmáticos y epistémicos (Artigue, 2002). Su rol pragmático se debe a que se realiza una tarea (Lagrange, 2003). Con respecto a su valor epistémico, Lagrange (2003) argumenta que:

> La técnica tiene un rol epistémico al contribuir al entendimiento del objeto que trata, particularmente durante su elaboración. También sirve como un objeto para la reflexión conceptual al ser comparado con otras técnicas y cuando se discute con respecto a su consistencia. (p. 271)

De acuerdo con Lagrange (2005) la consistencia y efectividad de la técnica son discutidos en el nivel teórico. El valor epistémico de las técnicas es importante en el estudio de las reflexiones conceptuales de los alumnos dentro del ambiente CAS.

Guzmán, Kieran y Martínez (2011) mostraron el rol epistémico de la técnica CAS, en el sentido de que el uso de CAS provoca una reflexión espontánea teórica en los alumnos, que les permite pensar en nuevas técnicas para la simplificación de expresiones racionales. Dicho rol también fue evidente en el uso del lenguaje de los alumnos; por ejemplo, el progreso de “cancelar y dividir” a términos que involucran la división de polinomios.

Diseño de las Actividades

Se pueden diseñar actividades bajo el esquema de tarea – técnica – tecnología (T-T-T), dentro de un ambiente CAS para resolver una tarea. Es importante observar, que la tarea se refiere a una pregunta dentro de una actividad. De acuerdo a Kieran y Saldanha (2008), la actividad es un conjunto de preguntas relacionadas con una tarea central. Las actividades son diseñadas de tal manera que las preguntas teóricas y técnicas son centrales, tal que, el alumno tiene la oportunidad de reflexionar sobre los aspectos técnicos y teóricos en un ambiente tradicional (lápiz y papel) y en un ambiente CAS.

Lagrange (2003), describió el caso en donde maestros franceses utilizaron el comando Derive (derivar) en las clases de álgebra con la intención de que el software de manipulación simbólica disminuyera la carga técnica y pudieran hacer hincapié a la actividad conceptual. Sin embargo, el resultado fue que no hubo desarrollo técnico ni conceptual. Lagrange (2003), observó que aunque el software proporciono un cálculo más fácil, no mejoró el entendimiento o reflexión del alumno.

En el diseño de actividades educativas, la clave es preguntar sobre cuáles problemas significativos fomentan el desarrollo cognitivo de acuerdo con la trayectoria hipotética de aprendizaje. Tres principios de diseño guían el proceso: reinvención guiada, fenomenología didáctica y modelos de mediación (Drijvers, 2003). Drijvers también sugirió que se debe poner más atención al rol de la parte tradicional (lápiz y papel) y las discusiones de clase.

Como se mencionó con anterioridad se diseñaron siete actividades para los temas de: Diferencias, Pendientes, Pendiente como función, Límites, Líneas secantes y tangentes, Función derivada y Aplicaciones.

El contenido de las actividades en términos generales está fundamentado en la aplicación de las técnicas de la educación matemática realística (RME), estas técnicas son:

1. Introducción de un concepto dentro de la vida cotidiana o una situación “real”.
2. Libertad de construir o llegar al concepto a través de observaciones (expresión creada).

3. Reinvención del concepto o la expresión creada a través de discusiones con integrantes del equipo, la clase y el profesor

La estrategia anterior encapsula lo fundamental de la RME. Además de la mediación por el profesor en el paso tres, se lleva a cabo la mediación por la calculadora simbólica Ti Nspire CX CAS como apoyo para la construcción de conocimientos. Aprovechando la versatilidad de la calculadora simbólica, se presenta la oportunidad de manipular las diferentes representaciones y además, observar el mismo fenómeno en diferentes perspectivas, con el fin de lograr la matematización.

Las actividades se diseñaron pensando en que se realice trabajo individual y trabajo en colaboración, que se use el CAS de la calculadora Ti-Nspire CX CAS como un medio de apoyo y de visualización.

Los objetivos de cada actividad son los siguientes:

1. Diferencias
    - Entender el concepto de una diferencia matemática.
    - Formular y aplicar los incrementos "Δx" y "Δy".
2. Pendientes
    - Formular el concepto de pendiente.
    - Obtener la ecuación de una línea recta.
    - Formular y aplicar $\Delta x/\Delta y$.
3. Pendiente como Función
    - Desarrollar la expresión correspondiente.
    - Formular la variable h.
4. Límites
    - Comparar un cambio promedio con un cambio instantáneo.
    - Entender el concepto de límite matemático.
    - Comprobar límites gráfica y analíticamente.
5. Líneas Secantes y Tangentes
    - Definir los conceptos de línea tangente y secante.
    - Entender la relación que existe entre las líneas tangentes y secantes
    - Definir la diferencia entre un cambio promedio y un cambio instantáneo
6. Función Derivada

- Introducir el concepto fundamental de la derivada.
- Formular la función derivada.

7. Aplicación de la Derivada
    - Entender el concepto de máximo, mínimo y punto de inflexión.
    - Formular matemáticamente el máximo, mínimo y punto de inflexión.
    - Entender cómo las derivadas están relacionadas con la forma de la gráfica de una función.

La primera versión de las actividades fue diseñadas de la forma en que se creyó conveniente para el cumplimiento de los objetivos. Las actividades tuvieron una experimentación informal para observar el cumplimento tanto conceptual como didáctico. El rediseño se llevó a cabo en dos etapas, similar a las etapas de experimentación.

En la primera etapa de rediseño se consideró las actividades realizadas por 5 estudiantes. Las actividades realizadas por tres de ellos se consideran parte de la experimentación informal, ya que no hicieron las siete que constituyen el trabajo completo. Mientras que las actividades realizadas por dos constituyen la experimentación formal. Ambas experimentaciones fueron consideradas para el rediseño. Es importante notar que la experimentación informal se llevó a cabo antes de la formal.

Para la segunda etapa de rediseño se consideró el análisis de la experimentación didáctica, la cual fue realizada por dos estudiantes. Se llevaron a cabo discusiones sobre el contenido y la estructura de las actividades. Cada inciso se analizó con base en su claridad y cómo contribuía a la actividad. Lo anterior es algo distinto a la primera etapa, en donde sólo se analizó la claridad, el fin del inciso y no necesariamente que papel jugaba en la actividad. Se puede considerar que esta etapa de rediseño aseguró que hubiera una fluidez dentro de las actividades.

Como resultado de estas experimentaciones piloto se obtuvieron las siete actividades finales que se aplicaron en una experimentación formal, así mismo se diseño una guía para el profesor.

Ejemplo de una de las actividades

Actividad 1

Diferencias

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

A. Diferencia Matemática

Parte I (con lápiz y papel): Concepto General

La diferencia matemática es el resultado de restar, en donde se resta un sustraendo de un minuendo. Por ejemplo, la diferencia entre 3 (sustraendo) y 8 (minuendo) es 5.

Texto	Sintaxis	Diferencia
Una cuenta de ahorros tiene \$2383.87 al inicio del mes y \$2873.92 al final. ¿Cuál fue la diferencia a lo largo del mes?		
Se saca un pedazo de carne a descongelar, al sacarse del congelador se encuentra a -3^{0}C y después de 5 horas se encuentra a 24^{0}C. ¿Cuál es la diferencia de temperatura después de las 5 horas?		
Un automóvil contiene un tanque de 90 litros. Se llena al comienzo de la semana, al final de ella se observa que el tanque contiene 32.3 litros. ¿Cuál es la diferencia de litros en el tanque a lo largo de la semana?		

En la vida cotidiana cuando se expresa una diferencia, típicamente se refiere a la diferencia entre un valor inicial (sustraendo) y un valor final (minuendo). *Es decir, la diferencia es igual al valor final menos el valor inicial.*

a) Completa la siguiente tabla. Pase el texto de la columna 1 a una sintaxis matemática en la columna 2 y escriba el resultado de la diferencia en la columna 3.

b) Observe las diferencias de los tres (3) casos del inciso anterior, ¿existe una diferencia con signo negativo? En caso afirmativo, ¿qué representa con respecto a la cantidad (aumenta o disminuye)?

c) ¿Qué concluyes a partir del inciso anterior con respecto al signo de la diferencia? Considere signos positivos, negativos y valores de cero.

d) En la siguiente tabla en la primera columna se encuentra una secuencia de cinco números, observe la tendencia uniforme (si existe alguna) y anótela en la segunda columna.

Secuencia	Observaciones
2, 4, 6, 8, 10	
45, 38, 31, 24, 17	

-8.75, -3.5, 1.75, 7, 12.25	
1, 9, 17, 27, 41	

Considere el conjunto de datos, en donde i corresponde a una variable independiente mientras tanto u corresponde a la variable dependiente. Por lo tanto u_i corresponde a u evaluada en cualquier valor de i. Por ejemplo, u_3 indica el valor de u cuando i es 3 lo cual es 14.

i	1	2	3	4	5	6
u_i	8	11	14	17	20	23

e) Utilizando el conjunto de datos mencionado, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Representación Algebraica	Resultado
$u_5 - u_4$		
$u_2 - u_1$		
$u_3 - u_2$		
$u_5 - u_3$		
$u_3 - u_6$		
$u_4 - u_1$		

En matemáticas el operador delta (Δ) representa un cambio. Siendo un operador matemático, puede aplicarse a cualquier variable. Por ejemplo, Δx representa un cambio en x mientras que ΔT representa un cambio en T (muchas veces dicha variable representa una temperatura).

f) Considerando el concepto anterior y utilizando el conjunto de datos, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	*u*	*i*
$u_5 - u_4$		
$u_2 - u_1$		
$u_3 - u_1$		
$u_5 - u_3$		
$u_3 - u_6$		
$u_4 - u_1$		

g) Analice la tabla del inciso f, ¿hay una relación con respecto a y? ¿qué puede concluir?

h) Exprese su observación del inciso g en forma matemática (fórmula). ¿Se cumple en cada caso de la tabla?

*Parte **II** (con CAS): Introducción a CAS*

Si una variable *y* depende de una variable *x,* de tal manera que cada valor de *x* determina exactamente un valor de *y*, entonces se dice que ***y* es una función de *x***. Cuatro métodos comunes para la representación de funciones son: numéricamente por tablas, geométricamente por gráficas, algebraicamente por fórmulas y/o verbalmente. Una **función** *f* es una regla que asocia una salida única con cada entrada. Si la entrada es denotada por *x*, entonces la salida es denotada por *f(x)* (se lee como *"f* de *x"*). Para una entrada dada *x*, la salida de la función *f* se denomina el valor de *f* en *x*. Algunas veces se denomina la salida por una sola letra, por ejemplo *y*, y se escribe como *y= f(x)*. Esta ecuación expresa *y* como una función de *x*; la variable *x* se llama la ***variable independiente*** de *f*, y la variable *y* se llama la ***variable dependiente*** de *f*.

Las coordenadas cartesianas son un sistema de coordenadas de dos dimensiones, denominado como el plano cartesiano, utilizado para la representación gráfica de una función. En el eje horizontal, conocido como el eje "x", se encuentran las variables independientes mientras que en el eje vertical, conocido como el eje "y", se encuentran las variables dependientes. Siendo un plano, cada punto se puede expresar por sus coordenadas (x, y).

a) Introduzca la expresión a la calculadora y presione **enter**, ¿qué observa? Presione el botón en el *touch pad* y presione **enter**, ¿qué sucede? ¿Para qué puede ser útil la observación anterior?

Una herramienta útil dentro del sistema CAS, es el comando "tal que", **|**. Dicho comando se elije presionando el botón azul "CTRL" y el botón "=", el cual se encuentra debajo de "CTRL" y después se selecciona "**|".** La sintaxis para utilizar el comando es el siguiente, ***"función| variable = valor".***

b) Considere la función $2x^2 + 5x - 2$. Llene la siguiente tabla con los valores de x respectivos.

Valor de x	Operación con lápiz	Resultado de CAS
-3		
-2		
-1.25		
-0.5		
0		
0.25		

0.89		

Guía del Profesor

La siguiente sección proporciona información adicional sobre la aplicación de las actividades propuestas. Antes de iniciar, es importante tomar las siguientes medidas:

1. Organizar a los participantes en equipos de tres.
2. A cada equipo se le asigna una calculadora Ti Nspire CX CAS, las actividades, hojas en blanco, pluma, lápiz, regla y escuadra.
3. Se deben explicar los roles de cada integrante con el trabajo de las actividades, en donde:
    a. El líder: Tiene la responsabilidad de mantener el orden y dinámica, fomentar las discusiones y asegurar que los otros integrantes estén cumpliendo con su trabajo.
    b. El que maneja la calculadora: Hace el trabajo relacionado con la calculadora, lo cual puede incluir la introducción de datos, comandos y/o cálculos y la interpretación de los resultados.
    c. El que maneja la actividad en papel: Lee la información y hace preguntas sobre las actividades, además de escribir las respuestas de los cuestionamientos planteados.

El cambio de roles entre los estudiantes se lleva a cabo al cambiar de actividad, con el siguiente orden:

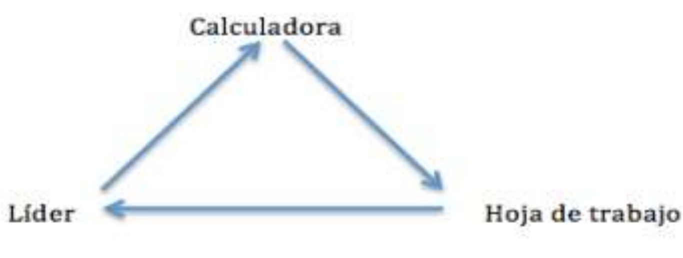


Figura 2. Orden para el cambio de roles en la actividad.

Es muy importante que los integrantes de los equipos, lean con cuidado las instrucciones y preguntas plasmadas en la actividad, y que las respuestas que den, deben ser un consenso del equipo.

Introducción a la calculadora

En ésta actividad, se presenta una introducción básica sobre el uso y manejo de la calculadora TiNspire CX CAS. Debido a su naturaleza, la manipulación de la calculadora es muy complicada y compleja; esta introducción no es exhaustiva pero contiene los elementos básicos requeridos para llevar a cabo las actividades. Cabe mencionar que a lo largo de la misma, se llegan a utilizar técnicas más avanzadas, las cuales son presentadas en su momento dentro de las actividades. Se recomienda que la explicación sea breve y concisa y que incluya los siguientes temas:

- La diferencia entre "Scratchpad" y las aplicaciones dentro de la pantalla "Home". Dichas aplicaciones representadas por un icono, tienen la ventaja de estar en una pestaña dentro del documento de trabajo.
- El manejo de las aplicaciones: cómo crear nuevas, cómo abrir las anteriores, cómo borrar y la vista general de todas; se encuentra al presionar /+ ↑
- Explicar cómo realizar cálculos debido a que realiza la operaciones y no el símbolo =, además explicar el significado de = dentro del sistema CAS.
- Hablar sobre los números racionales e irracionales.
- El uso del botón / , por ejemplo para apagar la calculadora se utiliza /c.

Actividad 1

Dentro de esta actividad se proponen dos discusiones:

1. Después de la parte I inciso c, se debe asegurar de que el inciso I.c esté resuelto correctamente, si no se deben revisar las respuestas del inciso I.a.
2. Antes del inciso h de la parte I, se debe establecer el significado de una forma matemática o fórmula. Se pueden presentar los siguientes casos:

   "Por cada tres manzanas que compran, le regalan una naranja."

   a) ¿Cómo se expresa, cuántas naranjas hay sabiendo la cantidad de manzanas? ($N = \frac{1}{3}M$)

b) ¿Cómo se expresa, cuántas manzanas hay sabiendo la cantidad de naranjas? $(M = 3 \cdot N)$
c) ¿Qué representa el "1/3" y "3" en las expresiones anteriores?

Sabiendo expresar relaciones con la discusión anterior, se debe llegar a la respuesta del inciso I.h.

Conclusiones

Las actividades propuestas se sometieron a experimentaciones formales e informales, y de acuerdo a las observaciones realizadas por el grupo de investigadores se modificaron hasta llegar a las actividades finales que conceptualizaron el cálculo diferencial. El esquema empleado, es que a través de preguntas tales como: ¿qué pasa bajo esas condiciones?, ¿a qué se debe?, ¿cómo formularías lo antes dicho?, etc., se van construyendo los conocimientos, los cuales representan la conceptualización del objeto matemático.

De la experimentación piloto se observó, que la mayoría de los problemas encontrados se atribuyen a los integrantes de los equipos y no al diseño de las actividades. Por ejemplo, algunos errores se deben a que no leen con cuidado los procedimientos y las preguntas o bien no discuten adecuadamente sobre los cuestionamientos. Con respecto al diseño de las actividades, la única modificación resultante después de la experimentación piloto fue la inserción de discusiones. Las cuales tienen el objetivo de resumir lo más importante de los temas tratados y de reforzar la construcción de los conceptos involucrados. Debido a que las actividades son acumulativas, es importante asegurar que los alumnos entiendan cada uno de los conceptos involucrados en las mismas.

Antes de las experimentaciones se realizó un examen diagnóstico, sobre los conceptos fundamentales del cálculo diferencial. De acuerdo con los resultados obtenidos, los alumnos tienen una idea superficial sobre los fundamentos teóricos involucrados. Considerando lo anterior y los resultados obtenidos al resolver las actividades, se puede decir que hubo aprendizaje de los conceptos, ya que existen evidencias de las respuestas que dieron los alumnos que demuestran un dominio del cálculo diferencial diferente a los resultados del examen diagnóstico.

Como complemento al diseño de las actividades propuestas también se generó una guía para el profesor que se encargue de aplicarlas, en donde se detallan las discusiones que se deben llevaran a cabo y cuáles son los principales errores que se cometen dentro de cada actividad. El objetivo de la guía propuesta, es que cualquier profesor con acceso a las calculadoras simbólicas con deseos de aplicar actividades de este tipo, tenga un referente de apoyo para su implementación. Las actividades no requieren de conocimiento previo del cálculo diferencial, ya que parten de conceptos numéricos y algebraicos. Las actividades se pueden utilizar para que el estudiante construya los conceptos fundamentales antes de ver la teoría en clase o después para hacer un reforzamiento.

Es importante subrayar, que las actividades diseñadas contemplan lo fundamental del cálculo diferencial. Existe la posibilidad de que los programas de Matemáticas para esta asignatura incluyan temas que no estén contemplados en las actividades, pero el alcance del presente trabajo es mostrar una vía para conceptualizar los fundamentos del cálculo diferencial. Los temas adicionales, pueden explicarse bajo el mismo esquema de las actividades diseñadas.

Como un trabajo futuro, se pueden diseñar actividades con las mismas técnicas empleadas en esta propuesta para la conceptualización del cálculo integral y cálculo multivariable. Lo difícil de diseñar actividades de aprendizaje que involucren tópicos matemáticos, es su naturaleza acumulativa; pero con esfuerzo y trabajo, dicha dificultad anterior puede ser una oportunidad. Aprovechándose del esquema progresivo que se aplicó en el diseño, se pueden implementar actividades para materias tales como física, química y programación.

Además de apoyarse en la tecnología, las actividades emplean técnicas de enseñanza activa. Bonwell y Eison (1991), sugieren que dichas estrategias tienen en común el acto de "involucrar al alumnos en hacer y pensar sobre lo que están haciendo". Este estudio como muchos otros, muestra la importancia del aprendizaje activo con objetos matemáticos. En las clases "tradicionales" no se utilizan dichos elementos, por lo tanto se sugiere que se incorporen este tipo de actividades dentro de la enseñanza de todas las materias, ya que no son exclusivas para las matemáticas.

Referencias

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS enviroment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*, 245-274.

Atkins, N., Creegan, A. & Soan, P. (1995). You can lead students to DERIVE, but can you make them think? *International Derive Journal*, *2*(1), 63-82.

Balacheff, N. (1994). La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. En M. Artigue et al. (Eds.), Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France (pp. 364-370). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bonwell, C. & Eison, J. (1991). Active learning: creating excitment in the classroom (ASHE-ERIC Higher Education Report No. 1). Washington, DC: George Washington University.

Buchberger, B. (1989). Should students learn integration rules? Rise-Linz Series no. 89-07.0. Linz: University of Linz.

Caplow, J. A. H. & Kardash, C. A. M. (1995). Collaborative learning activities in gradate courses. *Innovative Higher Education*, *19*(8), 207-220.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactiqu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*, 221-266.

Drijvers, P. (1995). White-box/black-box revisited. *The International Derive Journal*, 14(4), 3-14.

Drijvers, P. H. M. (2003). Learning algebra in a computer alegbra enviroment (Tesis doctoral, no publicada). Freudenthal Institute. Utrecht, The Netherlands

Gijbels, D., van de Watering, G., Dochy, F., y van den Bossche, P. (2006). New learning enviroments and constructivism: The students' perspective. *Instructional Science*, *34*, 213-226.

Goldenberg, E. (1987). Believing is seeing: How preconceptions influence the preceptions of graphs. *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* (pp. 197-204), Vol 1. Montreal, Canadá.

Gravemeijer, K. P. E., Cobb, P., Bowers, J., y Whitenack, J. (2000). Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. En P. Cobb, E. Yackel, K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-273). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Guin, D., y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Guzmán, J., Kieran, C., y Martínez, C. (2011).Simplification of rational algebraic expressions in a CAS environment: A technical-theoretical approach.En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 484-488) Ankara, Turkey: PME Program Committee

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(1), 3-25.

Hillel, J., Lee, L., Laborde, C. & Linchevski, L. (1992). Base functions through the lens of computer alegbra systems. *Journal of Mathematical Behaviour*, 11, 119-158.

John-Steiner, V. & Mahn, H. (1996). Sociocultural approaches to learning and development: A Vygotskian framework. *Educational Psychology*, *31*(3), 191-206.

Kieran, C., & Saldanha, L. (2008). Designing tasks for the codevelopment of conceptual and technical knowledge in CAS activity: An example from factoring. En G. W. Blume y M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2 cases, and perspectives* (pp. 393-414). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kuhn, D. (2007). Is direct instruction an answer to the right questions? *Educational Psychologist*, *42*, 109-113.

Kutzler, B. (1994). DERIVE – the future of teaching mathematics. *International Derive Journal*, *1*(1), 37-48.

Lagrange, J. B. (2000). L'Intégration d'Instruments Informatiques dans l'Enseignement: une Approche par les Techniques. *Educational Studies in Mathematics*, *43*(1), 1-30.

Lagrange, J. B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J. T. Fey (ed.*), Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (pp. 269-283). Reston, VA: Nationa Council of Teachers of Mathematics.

Lagrange, J. B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 113-135). New York: Springer.

Monaghan, J. (2007). Computer algebra, instrumentation and the anthropological approach. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, *14*(2), 63-72.

Núñez, E. & Cortés, C. (2011) Desarrollo de Ambientes Tecnológicos Interactivos para el Aprendizaje de las Matemáticas: Una Experiencia con la Línea Recta. En L. Guerrero (Ed.) *Investigaciones y propuestas 2011*. México: Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática AC.

Orr, M. T., (1998). *Opportunities and chances: lessons learned from a community youth services effort*. New York: Peter Lang.

Phillips, D.C. (1998). How, why, what, when, and where: Prespectives on constructivism in psychology and education. *Issues in Educaction*, *3*, 151-194.

Piaget, J. (1980). *Cahier de la foundation archives*. Genéve: CIEG.

Pierce, R. (1999). Using CAS as a scaffolding for calculus: Some observations. En W. Spunde, P. Cretchley y R. Hubbard (Eds.), *The Challenge of Diversity: Proceedings of the Delta-99 Symposium on Undergraduate Mathematics* (pp. 172-176). Brisbane: Delta 99 Committee.

Taber, K. S. (2006). Beyond Constructivism: the Progressive Research Programme into Learning Science. *Studies in Science Education*, *42*, 125-184.

Vérillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10*(1), 77-101.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wertsch, J.V. (1990). The voice of rationality in a sociocultural approach to mind. En L.C. Moll (Ed.), *Vygotsky and education: Instructional implications and applications of socio-historical psychology*. (pp. 111-126). New York, NY: Cambridge University Press.

Windschitl, M. (2002). Framing constructivism in practice as the negotiation of dilemas: An analysis of the conceptual, pedagogical, cultural, and political challenges facing teachers. *Review of Educational Research*, *72*, 131-175.

ACTIVIDAD QUE PROMUEVE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL IMPROPIA

Liliana Aurora Tabares Sánchez,
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados -IPN

Resumen
En este capítulo se presenta el diseño y la justificación de una actividad que se usó para la investigación en la que analizaron los procesos de comprensión de estudiantes de nivel superior, con el fin de proporcionar, con base en los resultados obtenidos, una opción que se puede replicar de forma didáctica para la mejor comprensión de conceptos matemáticos. Dicha investigación se basó en el uso de la herramienta tecnológica (Computer Algebra Systems, CAS, incorporado en la calculadora Voyage 200) como artefacto mediador para la comprensión del concepto de integral impropia. La actividad está sustentada en el enfoque conceptual de Tarea-Técnica- Teoría de Artigue (2002) para distinguir el rol epistémico o pragmático de la técnica utilizada por los estudiantes y en el concepto de comprensión propuesto por Sierpinska (1990. En este trabajo se muestra cómo la herramienta tecnológica (calculadora Voyage 200) al ser usada por los estudiantes como parte de la técnica les ayudó a obtener una mejor comprensión del concepto de integral impropia.

Palabras clave: Actos de comprensión, rol epistémico y pragmático de la técnica, generalización y síntesis.

Introducción
En educación matemática, las investigaciones reportadas sobre el estudio de los procesos de abstracción de conceptos de cálculo de derivadas e integrales, en general, han sido motivados por la identificación de cómo las dificultades de aprendizaje están relacionadas con la mecanización de algoritmos que provocan la falta de comprensión.

El concepto de integral impropia incluye relaciones de conceptos abstractos, como los de integral definida y el de límite de funciones. Si bien el concepto de integral definida se relaciona con la idea de cálculo de áreas o volúmenes dentro de un intervalo cerrado determinado, resulta confusa la idea de calcular áreas o volúmenes finitos en un intervalo abierto (a,b) con la posibilidad de que uno de los extremos sea infinito. Por su parte, los conceptos de continuidad, convergencia y divergencia –conceptos abstractos– están relacionados con el de integral impropia y que, al no ser comprendidos y enfocados de manera correcta, pueden provocar dificultades en el aprendizaje del concepto de integral impropia. Al respecto, González-Martín (2005) menciona: “los estudiantes aprenden este concepto [integral impropia] sin darle significado y restringiéndose a cálculos algebraicos y a la aplicación de criterios de convergencia” (p 82).

En relación con lo anterior se diseñó una actividad que promueve la comprensión del concepto de integral impropia, las cuales pueden ser redefinidas para el estudio de algún otro concepto. El diseño de tal actividad está justificado sobre la base teórica conocida como Tarea-Técnica-Teoría (T-T-T) (Artigue 2002) y los actos de comprensión propuestos por Sierpinska (1990). Si bien, en este capítulo se pondrá énfasis en la comprensión del concepto de integral impropia no se niega la importancia de que los estudiantes conozcan y apliquen métodos de integración, reconozcan los algoritmos y utilicen criterios de convergencia para el cálculo de tales integrales.

Antecedentes

Concepto de integral impropia

Por las características de las integrales impropias éstas pueden ser categorizadas con el fin de simplificar su estudio. Johnson (1978), por ejemplo, divide las integrales impropias según los límites de integración en tres tipos, de primera, segunda y tercera especie. A continuación, se especifican las características de cada una:

- Las de primera especie se definen con alguno de sus límites de integración no acotado, por ejemplo, $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$. El límite superior no es un número real y por convención se dice que “está definida en el infinito”. Esta convención se puede interpretar como $lím_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$.

- Las integrales de segunda especie se definen en un intervalo cerrado en el que se encuentra una o varias indeterminaciones de la función a integrar, por ejemplo, $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$. En esta integral, la función a integrar no está definida en $x=1$, y se tiene que evaluar el límite por la derecha y por la izquierda de 1.
- La integral impropia de tercera especie es aquella en la cual ambos límites de integración no son acotados y se dice que están definidos en el infinito, por ejemplo, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Este tipo de integrales impropias se puede definir como la suma de dos integrales impropias de primer tipo: $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ y analizar la convergencia o divergencia de cada límite: $lím_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + lím_{c\to\infty} \int_{0}^{c} \frac{dx}{1+x^2}$.

Es importante considerar que la convergencia o divergencia de las integrales impropias depende de la existencia de los limites relacionados con éstas. Una dificultad que se puede presentar en la comprensión de la integral impropia es el cálculo de la función primitiva, ya que como es conocido no a cualquier función se le puede calcular su primitiva, sin embargo, este cálculo no determina la convergencia de la integral.

Las dificultades asociadas con la comprensión de la integral impropia, por parte de los estudiantes, vuelven complejo y confuso su estudio. Es reconocido que, en general, en el ámbito de la enseñanza de las integrales impropias se llega a la memorización de casos sin poner mayor atención al análisis profundo o a la interpretación de resultados (González-Martín, 2005). Estas dificultades conllevan a la necesidad de comprensión del concepto específico para cada característica o posible resultado, lo que motiva en indagar los procesos de comprensión generados por los alumnos al estudiar las integrales impropias en dos ambientes: lápiz-y-papel y tecnológico digital (González Martín, 2005).

Perspectiva teórica

La perspectiva teórica del presente trabajo se fundamenta en dos teorías: *Tarea-Técnica-Teoría* (T-T-T) de Artigue (2002) y *Actos de comprensión* de Sierpinska (1990). Estas perspectivas se complementan para justificar el diseño de la actividad, el cual se hizo tomando como guía los conceptos propuestos en el enfoque teórico T-T-T con el cual se puede identificar el rol de las técnicas usadas con el instrumento de mediación digital propuesto (CAS). El diseño de las actiidades tuvo como propósito identificar los actos de comprensión que los estudiantes exponen, acerca del concepto de integral impropia, al resolver las Tareas y distinguir los roles pragmáticos y epistémicos de las Técnicas utilizadas por los estudiantes al contrastar los resultados obtenidos con el CAS y con papel-y-lápiz.

Tarea-Técnica-Teoría (T-T-T)

El enfoque T-T-T es la adaptación de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (TAD) (1999) que hizo Artigue (2002) para utilizarla en el análisis de datos en investigaciones en las cuales se utiliza el CAS como instrumento que induce a la reflexión conceptual. De las cuatro componentes de la TAD de Chevallard; Tarea, Técnica, Tecnología y Teoría, Artigue las redujo a tres, para proponer el enfoque teórico: Tarea-Técnica-Teoría. Al unir los componentes Tecnología y Teoría, en sólo Teoría, Artigue dio a éste una interpretación más amplia que la utilizada en la TAD y dejó el término de tecnología para referirse a los dispositivos digitales (Kieran, 2008).

En el enfoque T-T-T, el término Tarea conserva el significado utilizado en la teoría. La tarea es el problema o actividad que se debe realizar expresado mediante un verbo, en el que existen objetos matemáticos, los cuales emergen de un sistema de prácticas (Chevallard 1999, citado en Martínez-Hernández, 2013). Lagrange (2005) argumentó que las Tareas no deben ser sólo problemas individuales, sino que también estructuras de problemas más generales.

La Técnica es un método o manera de abordar la Tarea. Artigue (2002) la define como el conjunto de trabajo rutinario y de razonamiento mediante el cual se resuelve cierta Tarea. Pueden existir diferentes Técnicas para resolver una misma. Juega un papel pragmático cuando ayuda a distinguir y reorganizar las Tareas y un rol epistémico, pues contribuye en la comprensión de los objetos matemáticos, particularmente, durante su elaboración y sirve como objeto de reflexión conceptual cuando se comparacon otras y cuando se discute su consistencia (Lagrange, 2003).

De acuerdo con Chevallard (1999), la Teoría es el discurso que justifica la Técnica y con Hitt y Kieran (2009) es la estructura cognitiva, construida por el estudiante, que surge cuando se lleva a cabo la Tarea mediante una Técnica. La Técnica y la Teoría emergen en mutua interacción, por un lado, las técnicas dan lugar a un pensamiento teórico y, por el otro, las reflexiones teóricas permiten el desarrollo y uso de las técnicas (Kieran & Drivers, 2006). Mientras que las componentes Tarea y Técnica están relacionadas con la acción, la Teoría está relacionada con la afirmación. En la Teoría son discutidas la consistencia y efectividad de la Técnica y, de esta manera, surgen propiedades y conceptos, incluso un lenguaje específico (Lagrange, 2005, p. 116).

Actos de comprensión

Para medir el desarrollo de comprensión de los estudiantes de nivel superior acerca el concepto de integral impropia se tomó como base los *actos de comprensión* propuestos por Sierpinska (1990). Se diseñó la actividad con la intensión que los estudiantes manifiesten dichos actos. La comprensión según, Sierpinska, es el acto de adquirir significados y está sujeta a los actos de generalización y síntesis de elementos particulares del concepto que se espera comprender. Los significados de los elementos particulares del concepto son adquiridos mediante distintos actos de comprensión con los cuales se va construyendo el significado (Sierpinska, 1990).

Los actos de comprensión son operaciones mentales con las que el sujeto, quien trata de comprender, relaciona el "objeto de comprensión" con las "bases de comprensión", son ideas acerca del objeto contenidas en sus estructuras mentales. Sierpinska (1990) identifica algunos actos de comprensión como procesos de superación de obstáculos y otros que se convierten en actos de adquisición de nuevos obstáculos. Para ella, la descripción de actos de comprensión de conceptos matemáticos debería completarse con una lista de obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto, y de esta manera se podría aportar más información sobre su significado.

Sierpinska (1990) establece que la comprensión lleva consigo un nuevo modo de conocimiento, y clasifica los actos de comprensión de acuerdo con el tipo de conocimiento que producen. Esta autora considera cuatro actos de comprensión: identificación, discriminación, generalización y síntesis.

- *Identificación*. La percepción de un objeto que hasta el momento ha sido "fondo" como imagen principal y se hace merecedor de interés y estudio. Cuando se hace la identificación de un término se vuelve poseedor de un estatus científico. Si ya tiene un nombre, lo hace digno de la posición de término científico, o si no tiene un nombre la identificación lo hace digno de tenerlo.
- *Discriminación*. Diferenciación entre dos objetos; se notan sus diferencias y propiedades relevantes, por lo que el sujeto se vuelve consciente de la existencia de dos objetos distintos.
- *Generalización*. Darse cuenta de que algunas condiciones no son esenciales, y el sujeto se vuelve consciente de la posibilidad de extender el rango de aplicación. Se descubren nuevas posibilidades de interpretación y se consideran irrelevantes algunos supuestos.
- *Síntesis*. Reconocimiento de relaciones entre hechos aislados; provoca que hechos, propiedades o relaciones de los objetos sean agrupadas en totalidades consistentes.

Planteamiento y diseño de la actividad, su alcance y limitaciones

El objetivo de la actividad es justificar la necesidad de identificar la integral impropia como un límite, por lo que se pretende que los estudiantes, al desarrollar la actividad, reconozcan las características específicas de la integral impropia (definida como $\int_a^b f(x)dx$ con al menos uno de sus intervalos de integración no acotado o con una discontinuidad infinita en algún punto c cuando $c \in [a, b]$). Esta actividad está dividida en cuatro partes, incluyendo las preguntas de reflexión. Debido a que lo que se pretende es profundizar en el concepto de integral impropia se sugiere que los ejercicios, que se propongan, no requieran trabajo de simplificación o técnicas sofisticadas de integración para que los estudiantes se enfoquen en el significado del concepto y no en los procesos algorítmicos, de manera que expongan actos de comprensión de generalización y síntesis. La actividad se conforma de las siguientes partes.

La Parte I incluye tareas con las cuales se busca identificar actos de comprensión sobre las características de las funciones, determinadas en intervalos específicos, involucradas en las integrales impropias. Por ejemplo, con los puntos en los cuales la función no está definida, o bien, cuando la variable x (o cualquier otra) crece indefinidamente. Con esta tarea se espera que los estudiantes identifiquen las características de las funciones (al integrar en un cierto intervalo) y las relacionen con la integral impropia.

En esta Parte I, se les pide a los estudiantes que analicen la función $y=\frac{1}{x^2}$ no definida en $x=0$ y la integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$, apoyándose en los bosquejos de las gráficas (que ellos realicen) y los cálculos ejecutados con papel-y-lápiz y después resolver los mismos ejercicios con la calculadora. Se pensó en esta función para enfocar el análisis de las características de las integrales impropias de segunda especie: en un intervalo cerrado en el que se encuentra una indeterminación de la función a integrar. Además, se les pidió analizar la función $y=\frac{1}{x^{1/2}}$ y calcular la integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/2}}$. Se propone esta función para enfocar el análisis de los estudiantes en la característica de la integral impropia de primera especie: alguno de sus límites de integración no acotado, es decir, alguno de los intervalos de integración es no finito.

Para cada ejercicio se les pidió a los alumnos comparar los resultados obtenidos con papel-y-lápiz y con la calculadora, y argumentar sus respuestas. Se considera pertinente que los estudiantes resuelvan la Tarea en los dos ambientes con el propósito de que al integrar la herramienta digital a su Técnica de resolución ellos hagan la comparación de las Técnicas y se observe su rol epistémico. En esta parte de la Actividad los actos de comprensión que se esperan de los estudiantes son los de identificación, al percibir la función como un objeto matemático, y tal vez de discriminación si notan las diferencias y propiedades relevantes de las funciones y las integrales definidas en los intervalos específicos.

La Parte II de la actividad está conformada por una lista de integrales definidas en intervalos acotados y finitos de manera que pueden considerarse y operarse según la definición de Riemann o mediante la regla de Barrow. Se les pide a los estudiantes calcular las integrales, bosquejar las gráficas de las funciones con papel-y-lápiz, comparar sus resultados con el área bajo la curva de la función y reflexionar si para ellos tienen sentido los resultados obtenidos. Se da por hecho que los actos de identificación serán manifestados por los estudiantes al resolver esta Tarea y se espera que además muestren actos de discriminación, al preguntarles si tiene sentido las respuestas que obtenien, ya que los estudiantes buscarán justificar para sí mismos sus respuestas y estar conformes con las respuestas dadas y sus bosquejos de gráficas. La Figura 1 muestra ejemplos de integrales con intervalos definidos de manera que pueden ser resueltas como integrales definidas.

Calcula las integrales y compara el resultado obtenido de la integral con el área bajo la curva de la gráfica de la función.		
Integral	Cálculo de la integral	Bosqueja la gráfica de la función y compara el resultado obtenido de la integral con el área bajo la curva. ¿El resultado tiene sentido? Explica
$\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$		
$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$		
$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$		
$\int_0^5 e^{-x}\, dx$		
$\int_{-1}^1 xe^{-x}\, dx$		
$\int_0^{10} x^3 dx$		

Figura1. Ejemplo de integrales definidas propuestas para la Actividad.

Posteriormente, se les pide a los estudiantes calcular las integrales y graficar las funciones en la calculadora para comparar los resultados obtenidos en los dos ambientes. Si los resultados de la calculadora y los obtenidos con papel-y-lápiz son diferentes, se les solicta decidir cuál es el correcto y justificarlo, o bien que realicen las operaciones sintácticas pertinentes de modo que los resultados obtenidos concuerden. Se considera que las Técnicas usadas en los distintos ambientes son diferentes y comparar los resultados obtenidos puede llevar al uso de la Técnica en su papel epistémico.

La Parte III se compone de la lista de integrales de las mismas funciones que se trabajaron en la Parte II, pero con los límites de integración definidos en intervalos cuya función integrando tiene una discontinuidad infinita(integrales impropias de segunda especie), integrales impropias de primera especie, con intervalos no acotados del tipo $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$, o bien, impropias de tercera especie, con intervalos de integración definidos en el infinito $(-\infty,\infty)$, de manera que las integrales cumplan con las características para ser consideradas como impropias. A los límites de integración propuestos en esta parte de la actividad se les llama *intervalos irregulares* con el fin de que los estudiantes puedan distinguir propiedades de las las integrales para clasificarlas como impropias, sin mencionar explícitamente la relación que mantienen la función a integrar y los límites de integración en los que se define. Por ejemplo, la integral $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ está definida en el intervalo $[-1,1]$, el cual es irregular, pues la función integrando tiene una discontinuidad (esencial) en el punto $x=0$, contenido en dicho intervalo.

De igual manera que en la parte precedente, se pide a los estudiantes calcular las integrales, bosquejar las gráficas de las funciones con papel-y-lápiz, comparar sus resultados con el área bajo la curva de la función y establecer si para ellos tienen sentido los resultados obtenidos. También se les solicita realizar el cálculo de las integrales y la gráfica de las funciones con la herramienta digital así como comparar los resultados obtenidos en ambos ambientes.

Con el análisis de las integrales impropias propuestas en la Parte III, se espera que los estudiantes discutan acerca de la interpretación geométrica de la integral impropia (si se considera como área similar a la integral definida) y el significado que para ellos tiene, si la integral impropia es convergente o divergente. Asimismo, el propósito de la comparación de los resultados obtenidos con papel-y-lápiz y con los de la calculadora es que reflexionen si la Técnica que utilizan para resolver este tipo de integrales es el correcto.

A continuación, se describen las seis integrales que sirven de ejemplo en la Parte III y cómo debe ser tomada en cuenta para realizar la Tarea y obtener la solución. Con estas seis integrales propuestas se consideraron todas las posibles formas de las integrales impropias.

La $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ es impropia por estar definida en el intervalo donde la función tiene una discontinuidad esencial. La función $y=\frac{1}{x^2}$ es discontinua en $x=0$, por lo que se espera que se calcule su convergencia o divergencia mediante la suma de los límites: $lím_{b\to 0^-}\int_{-1}^{b}\frac{dx}{x^2}+lím_{b\to 0^+}\int_{b}^{1}\frac{dx}{x^2}$. Se concluye que la integral impropia es divergente cuando al calcular cualquiera de los límites de la suma es divergente. De acuerdo con los libros de texto que se revisaron (Johnson, 1978; Edwards, 1986, y Thomas, 1984), se espera que los estudiantes calculen los límites de la integral impropia con la función primitiva evaluada en los límites de integración $lím_{b\to 0^-}-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{b}+lím_{b\to 0^+}\ -\frac{1}{x}\Big|_{b}^{1}$.

Las integrales $\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ y $\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{3-x}}$ son impropias, ya que en alguno de los límites de integración la función tiene una discontinuidad esencial, por lo que éstas se deben considerar como límites y determinar si convergen o no. En la $\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$, la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ no está definida en $x=1$, es decir, en el límite de integración inferior. Para calcular o no la convergencia, de esta integral, se utiliza el límite lateral cuando *b* tiende a 1 por la derecha:

$lím_{b\to 1^+}\int_b^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$. Se espera que los estudiantes determinen que converge y su límite es $2\sqrt{2}$, calculando $lím_{b\to 1^+} 2\sqrt{x-1}\Big|_b^1$. De igual manera, para la $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$ la función integrando tiene una discontinuidad en $x=3$ (por la izquierda), es decir, en el límite de integración superior. El cálculo de la integral se logra mediante la determinación del límite lateral, cuando *b* tiende a 3 por la izquierda: $lím_{b\to 3^-}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$. Se espera que los estudiantes determinen que esta integral converge a $2\sqrt{2}$ mediante el cálculo del $lím_{b\to 3^-} -2\sqrt{3-x}\Big|_1^b$.

Las integrales $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$ y $\int_{-\infty}^{1} xe^{-x}dx$ son impropias por tener en alguno de sus límites de integración ∞ o $-\infty$. Están definidas en intervalos no acotados, del tipo $[a,\infty)$ y $(-\infty, b]$, por lo que se deben considerar como límites cuando *b* crece o decrece indefinidamente. La $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$ se determina si existe el límite cuando b crece, indefinidamente. Como resultado, el límite es convergente e igual a 1, al calcular $lím_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^b$. Para $\int_{-\infty}^{1} xe^{-x}dx$ se espera que los estudiantes concluyan que es divergente, después de calcular la función primitiva y evaluarla en los límites de integración propuestos $lím_{b\to-\infty} \; -e^{-x}(x-1)\Big|_b^1$.

En el caso de $\int_{-\infty}^{\infty} x^3dx$ ambos límites de integración no son finitos, pues la función integrando está definida en el intervalo de tipo $(-\infty,\infty)$, por lo que se considera que tal integral es impropia, y se calcula con la suma de dos límites $lím_{b\to-\infty}\int_b^0 x^3dx + lím_{b\to\infty}\int_0^b x^3dx$; si alguno de los dos límites no existe, se puede concluir que la integral diverge. Se espera que los estudiantes concluyan la divergencia de la integral al calcular cualquiera de los dos límites.

Para concluir la Parte III, se les pide a los estudiantes que escriban la definición de integral definida. Con esta Tarea, se espera que ellos reflexionen en torno a las características de este tipo de integral y puedan diferenciarlas de aquellas relacionadas con las de la integral impropia. Los actos de comprensión que se espera muestren los estudiantes son los relacionados con la identificación, discriminación y generalización. Debido a que para poder realizar los actos de comprensión de generalización se necesita primero llevar acabo los de identificación del objeto matemático y notar propiedades relevantes del mismo y diferencias con respecto a otros (el acto de discriminación) es que se asumime que estos dos actos se manifiestan. El de generalización se espera, al realizar esta Tarea, ya que se pretende que los estudiantes den cuenta de que algunas condiciones no son esenciales, y se vuelvan conscientes de la posibilidad de extender el rango de aplicación, descubran nuevas posibilidades de interpretación de las integrales definidas en *intervalos irregulares*.

En la Parte IV, se retoma la lista de integrales de las Partes II y III para que los estudiantes describan y comparen las características de las integrales definidas con las de las impropias. Se organizaron en dos columnas (en la izquierda las integrales definidas y en la derecha las integrales impropias) de manera que las funciones a integrar sean iguales para las dos en el mismo renglón (Figura 2). Esta colocación se hace con la intención de que las diferencias entre las integrales sean más claras para los estudiantes.

Calcula las integrales y escribe las características que observes en cada una de ellas. Analiza si los resultados obtenidos tienen sentido o no.			
$\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^2}$		$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$	
Características		Características	
$\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$		$\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$	
Características		Características	
$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$		$\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$	
Características		Características	
$\int_{0}^{5} e^{-x} dx$		$\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx$	
Características		Características	
$\int_{-1}^{1} xe^{x} dx$		$\int_{-\infty}^{1} xe^{x} dx$	
Características		Características	
$\int_{0}^{10} x^3 dx$		$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx$	
Características		Características	

Figura 2. Ejemplo de tabla para la comparación de integrales.

Se pide a los estudiantes que escriban las características de cada integral y, posteriormente, se busca que condensen las detectadas en las impropias al contestar la pregunta: ¿cuáles son las características de las integrales definidas en *intervalos irregulares*[4]?

Con esta Tarea se espera, en primer lugar, que los estudiantes muestren actos de comprensión de discriminación al notar las diferencias con base en su intervalo de integración entre las integrales propuestas y se vuelvan consciente de la existencia de dos objetos distintos, ya que éste es el fundamento para extender el concepto de integrales definidas a impropias. En segundo lugar, se espera que los estudiantes logren realizar actos de generalización a partir de las características identificadas, darse cuenta de que algunas condiciones están relacionadas al intervalo en el que se encuentra definida la integral y que se vuelvan conscientes de las condiciones que determinan la integral como impropia.

Para concluir la Parte IV se pide a los alumnos que contesten la pregunta: ¿cómo se deben considerar las integrales definidas en *intervalos irregulares* para calcularlas? Con base en las características analizadas, anteriormente, se cree que pueden ser suficientes para justificar el hecho de que este tipo de integrales se deben considerar impropias y pueden ser calculadas si se determina el límite de la integral cuando la variable tiende a la discontinuidad de la función a integrar, lo que sería la respuesta esperada a la pregunta anterior y seria la manifestación del acto de comprensión de síntesis.

Tipos de resultados obtenidos con la implementación de la actividad

A través de la solución de la actividad, la cual se hizo en parejas, los estudiantes manifestaron los distintos actos de comprensión descritos por Sierpinska (1990), durante las discusiones que mantuvieron, y dieron cuenta de la relación de los distintos conceptos involucrados en el concepto de integral impropia, como los límites de integración infinitos o las indeterminaciones de la función dentro del intervalo de integración, así como la necesidad de definir la integral como límite que tiende a infinito o a un punto indefinido.

---

[4] Se entiende por intervalo *irregular* los intervalos donde la función integrando tiene, al menos, una discontinuidad infinita o bien intervalos no acotados del tipo $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$, o bien, del tipo $(-\infty,\infty)$.

El acto de comprensión de identificación fue visible desde que se resolvió la Tarea de la Parte I de la actividad hasta la Parte IV, se identificaron funciones, dominios, áreas bajo la curva, etc. como objetos matemáticos. Como ejemplo de este acto de comprensión es cuando el estudiante explicita mediante marcas o dibujos algunas características en el plano cartesiano, por ejemplo referirse al punto $(0,0)$; al mismo tiempo que lo expresa de manera verbal (e.g., "aquí es", con esta acción se evidencia la identificación del objeto). El punto que señala en la gráfica se hace merecedor de interés, y como menciona Sierpinska el objeto se hace merecedor de estudio.

El acto de discriminación los estudiantes lo manifiestan al buscar el sentido a sus respuestas, pues lo usaron como parte del argumento que las justifican, principalmente en las Parte II y III. Durante las discusiones de los estudiantes se hicieron notar los actos de discriminación cuando para aclarar cómo es la gráfica de la función, ellos resaltan las propiedades relevantes de la función que evalúan. Por ejemplo, cuando los estudiantes bosquejaron la gráfica de la función para compararla con el resultado de la integral $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$ de la Parte II de la Actividad, un estudiante identificó en la función el punto en el cual fijaron su atención, cuando expresó "en tres hay un hoyo". Reconocieron que, en $x=3$, la función debía ser estudiada para dibujar la gráfica correcta. Después de identificar el punto de la gráfica en el cual pusieron su atención, los estudiantes continuaron su análisis discriminando de manera que notaron las propiedades de la gráfica de la función.

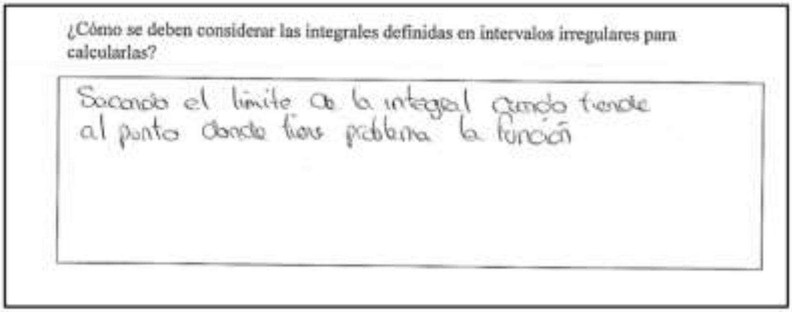
El acto de generalización fue evidente cuando los estudiantes exploraron las características específicas de las funciones en las Partes II, III y IV. En las discusiones que mantuvieron para encontrar sentido a los resultados se mostraban los actos de generalización, ejemplo de ello es cuando analizaron el sentido de $\int_0^\infty e^{-x}dx=1$.

Los actos de generalización se presentaron a menudo cuando para los estudiantes el acto de discriminación no era suficiente para encontrar sentido a sus respuestas. Por ejemplo, nn análisis de $\int_0^\infty e^{-x}dx=1$, uno de los alumnos comenzó la discusión al cuestionar si el valor de 1 (el resultado de la integral) tenía sentido al compararlo con el área bajo la curva de la gráfica de la función que estaban bosquejando. Los estudiantes, identificaron el infinito como un objeto de estudio, y mediante el acto de discriminación aseguraron que la función exponencial no era constante, sin embargo, no lograron decidir si el resultado obtenido tenía sentido solo con esa información.

Mostraron evidencia de generalización acerca del comportamiento de la gráfica de la función $y = e^{-x}$ ya que continuaron el análisis al recurrir a la búsqueda de generalizaciones acerca de la función exponencial y su comportamiento cuando tiende a infinito considerando irrelevantes algunos supuestos. Los estudiantes, dieron valores a la variable x con el fin de aclarar sus dudas sobre el área que se estaba comparando con el resultado de la integral. En ese análisis, ellos lograron darse cuenta de que algunas condiciones no son esenciales para bosquejar la gráfica de la función y descubrieron nuevas posibilidades de interpretación. En un momento uno de los estudiantes menionó: "Pues sí está bien que vaya bajando." y aseguró que la función nunca va a ser menor que cero, tomando como base el resultado de la integral; sin embargo, al continuar la discusión, los estudiantes lograron darse cuenta de que esa condición no es esencial para conocer el comportamiento de la gráfica de la función.

Se pudo notar cómo las bases de comprensión con las que contaba el estudiante sobre las funciones se convirtieron en "plataforma" para construir el significado de las integrales impropias. Los estudiantes descubrieron nuevas posibilidades de interpretación de la función exponencial que los llevaron a generalizar las particularidades de la gráfica de la función $y = e^{-x}$ y concluir que el resultado tenía sentido.

Los estudiantes realizaron los cuatro actos de compresión descritos por Sierpinska puesto que encontraron la relación entre los límites de integración infinitos y el concepto de integral impropia. Además, al responder las preguntas finales de la Parte IV les fue util para describir las características de las integrales impropias (acto de comprensión de síntesis). El reconocimiento, por parte de los estudiantes, de las relaciones que observaron entre las características de las distintas integrales impropias provocó que las identificaran atendiendo a la siguiente propiedad, por ellos descubierta: "la función en el punto *a* da algo indefinido". También, los estudiantes reconocieron la relación entre el concepto de límite y la integral definida en un intervalo; en el que la función no es continua o acotada. En sus respuestas evidencian la adquisición del significado del concepto de integral impropia (Figura 3).


¿Cómo se deben considerar las integrales definidas en intervalos irregulares para calcularlas?

Sacando el límite de la integral cuando tiende al punto donde tiene problema la función

Figura 3. Respuesta de los estudiantes a la pregunta abierta e la Parte IV.

Al buscar darle sentido a las respuestas con base en sus concepciones previas, los estudiantes utilizaron el CAS como parte de la Técnica; su rol epistémico se manifiesta, principalmente, en las Partes II y III de la actividad. Por ejemplo, en el análisis de la integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ se destacó la importancia del uso de la herramienta tecnológica como parte de la Técnica y explotar su rol epistémico pues al hacer la comparación en los dos ambientes los resultados eran diferentes, la necesidad de dar sentido a sus respuestas los llevó a buscar otras formas de abordar la Tarea.

Por lo anterior es posible decir que los estudiantes manifiestan con mayor profundidad el concepto de integral impropia, comparada con la que contaban al inicio de la actividad. Lo anterio, por medio de la interacción social y del uso de la herramienta tecnológica como parte primordial de la Técnica utilizada.

Conclusiones y reflexiones finales

La herramienta tecnológica puede ser un elemento para propiciar actos de generalización y síntesis cuando se utiliza para contrastar las ideas. En las reflexiones motivadas por el uso de las Técnicas (i.e., su carácter epistémico), se reflejan las operaciones mentales de los estudiantes, a través de sus acciones, mediante los actos de comprensión. Ellos, al tratar de dar sentido a sus respuestas, así como significado a los conceptos, mostraron actos de comprensión cuando trataban de relacionar el objeto de comprensión con las bases de comprensión que ya tenían. La resolución de las Tareas, mediada por la tecnología, motivó la reflexión sobre las Técnicas utilizadas con papel-y-lápiz. Estas acciones pueden ser identificadas como actos de generalización, pues ellas surgen (o emergen) durante la discusión y la búsqueda de sentido de sus soluciones de las Tareas propuestas en la actividad.

La indicación que se les hizo a los estudiantes en torno a decidir si la respuesta tenía sentido fue muy importante para que ellos utilizaran el CAS como parte de la Técnica, lo cual los llevó a manifestar actos de generalización y síntesis (i.e., se manifiesta el rol epistémico de la Técnica). Las preguntas en las cuales sólo se les pidió explicar sus procedimientos, no motivaron a los estudiantes ni a la reflexión ni al diálogo y, en general, sus respuestas a ese tipo de Tareas se dieron en forma "automática", por lo que en estos casos sólo se observa el carácter pragmático de la Técnica, tanto en el ambiente tecnológico como en el de papel-y-lápiz. El CAS sólo fue utilizado en la resolución de las Tareas para obtener la solución del problema propuesto.

Ya que la actividad se aplicó a parejas de estudiantes no debe dejarse de lado la importancia de la dimensión social dentro de la cognición. Debido a la interacción que realizaron los estudiantes durante la aplicación de la actividad y a través de las discusiones que llevaron a cabo cuando resolvían las Tareas es que se pudo identificar los distintos actos de comprensión que reflejan el proceso de comprensión entorno al concepto de integral impropia y observar los procesos de interpretación de los estudiantes como el desarrollo dialéctico entre afirmaciones cada vez más elaboradas y así como su validación.

Referencias

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7* (3), 245-274.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Edwards, C. H. & Penney, D. (1986). Integrales impropias (Trad. J. Pecina). *Cálculo con geometría analítica* (pp. 582-590). 1987, México: Prentice-Hall.

González-Martín, A. & Camacho M. (2005a). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las ciencias. Revista de Investigación y experiencias didácticas*, *23*(1), 81-96.

Hitt, F. & Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with task designed from a task-technique-theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14,* 121-152.

Johnson, R. Kiokemeister, F. & Wolk, E. (1978). Integrales impropias (Trad. M. Lara). En Allyn & Bacon (Eds.), *Calculo con geometría analítica* (pp. 427-432). México.

Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*, 205-263.

Kieran, C., & Saldanha, L. (2008). Designing tasks for the co-development of conceptual and technical knowledge in CAS activity: An example from factoring. En K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Syntheses, cases, and perspectives* (Vol. 2, pp. 393-414). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Lagrange, J-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J. T. Fey (Ed.), *Computer algebra systems in secondary school mathematics education* (pp. 269-283). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lagrange, J-B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Rutheven & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 113-135). New York: Springer.

Martínez-Hernández, C. (2013). El *desarrollo del conocimiento algebraico de estudiantes en un ambiente CAS con tareas diseñadas desde un enfoque técnico-teórico: Un estudio sobre la simplificación de expresiones racionales* (Tesis doctoral). Cinvestav-IPN, México D.F. México.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the learning in mathematics, 10*(3), 24-36.

Thomas, G. Finney, R. (1984). Integrales impropias (Trad. M. López). En Addison-Wesley Publishing Company (Eds.). *Calculo con geometría analítica* pp. 505-515, México: Addison-Wesley

LA INTEGRAL IMPROPIA EN UN AMBIENTE TECNOLOGICO DIGITAL Y SU VINCULACIÓN CON LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Francisco Javier Cortés González
ESIME. Unidad Zacatenco del I.P.N

Resumen
El capítulo está fundamentado en nuestro trabajo de investigación en el que consideramos la necesidad de los estudiantes universitarios de dominar la herramienta matemática Transformada de Laplace. Desde un enfoque instrumental, en un ambiente computacional algebraico (CAS, Computer Algebra System), nos centramos en el desarrollo de esquemas de acción instrumentada surgidos en la génesis instrumental. El ambiente CAS que soporta la investigación es el software Derive. Un objetivo de la investigación es el diseño y la experimentación de una secuencia de enseñanza. Las actividades diseñadas involucran conceptos relacionados con el comportamiento asintótico y exponencial de una familia de funciones, la integración impropia y el uso del parámetro. La actividad mostrada tiene como propósito bosquejar la relación funcional que se ajusta a la gráfica de los puntos $(s, \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt)$ definidos por los valores del parámetro s tales que, la integral impropia $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ es convergente.

En una experiencia con estudiantes de cursos iniciales de ingeniería, que consistió en una etapa de entrenamiento y otra donde se realizó la secuencia de enseñanza, observamos que los estudiantes desarrollaron esquemas de uso para los comandos del software Derive involucrados en las actividades; mostraron deficiencia en la identificación del parámetro s como un número real que toma una infinidad de valores y con ello aprovechar los recursos del comando *vector* de Derive; evaluaron las integrales impropias aunque tuvieron dificultad en identificar cuando éstas eran convergentes o divergentes; utilizaron el comando *vector* para identificar la función que corresponde a la Transformada de Laplace de algunas de las funciones exploradas.

Palabras clave: Teoría instrumentalista, génesis instrumental, esquema de acción instrumentada, ambiente CAS.

Introducción

La Transformada de Laplace es una herramienta matemática utilizada en ciencias e ingeniería para resolver un sin número de problemas; en particular, se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales. En la ingeniería en comunicaciones y electrónica la Transformada de Laplace se utiliza para el análisis de señales, las cuales pueden presentarse en diversas formas: la voz humana, imágenes de televisión, sonido y señales eléctricas, entre otras.

La Transformada de Laplace de una función, usualmente es presentada por los profesores con la definición siguiente:

> Dada una función $f(t)$ definida para $t \geq 0$, la Transformada de Laplace de la función $f(t)$ es la función $F(s)$ definida por la integral:
>
> $$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$
>
> Siempre y cuando la integral sea convergente.

Esta exposición regularmente obedece a la manera en que en los libros de texto utilizados por los profesores la presentan (Boyce y DiPrima, 1998; Dennis, 1986; Edwards & Penney, 2001; Spiegel, 1983; entre otros). Frecuentemente sólo se hace hincapié en el hecho de que tal transformación integral transforma una función que depende de la variable t y que está definida para $t \geq 0$, en otra función que depende de la variable s con características diferentes de acuerdo con la definición presentada. Enseguida, se calcula una tabla de transformadas de algunas funciones elementales, posteriormente se estudian sus propiedades y las condiciones de existencia. Después, se implementan algoritmos algebraicos para calcular la Transformada de Laplace inversa usando técnicas de fracciones parciales, el teorema de convolución y el método de Heaviside. Finalmente, se aplica todo lo anterior en la resolución de algunas ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales. Este acercamiento se encuentra muy bien estructurado.

Observamos que la forma uniforme que presentan la mayoría de los libros de texto utilizados por profesores y estudiantes descarga en ellos la necesidad de desarrollar técnicas y estrategias con uso de papel y lápiz o alguna otra herramienta, para comprender y entender las ideas y los conceptos involucrados en la Transformada de Laplace; tales técnicas y estrategias son desarrolladas en clase y, consideramos que pueden ser potenciadas por una herramienta tecnológica digital que cuente con un ambiente CAS.

En la Transformada de Laplace de una función están involucrados conceptos matemáticos diversos como son: función, límite, integración definida, integración impropia, parámetro, función definida en tramos, comportamiento exponencial y orden exponencial de una función, sin olvidar los usos, propiedades y las aplicaciones de la Transformada de Laplace. Los conceptos señalados con anterioridad, motivan a centrar nuestra atención en el concepto fundamental que define la Transformada de Laplace de una función, el concepto de integral impropia de una función; concepto trabajado en cursos iniciales de cálculo diferencial e integral.

La integral impropia que define la Transformada de Laplace de una función contiene el concepto de convergencia de una integral impropia, el cual a la vez está relacionado con la noción de comportamiento asintótico de una curva y área finita comprendida bajo la curva con el eje de las abscisas. Completamente relacionada con la noción de integral impropia convergente está la noción de integral impropia divergente. Las ideas anteriores deben promover en los estudiantes la observación de que el comportamiento asintótico horizontal o vertical de una función no garantiza la convergencia de la integral impropia.

El software Derive es un programa de álgebra computacional que opera fácilmente en una computadora personal, ha sido utilizado en educación matemática por la versatilidad de representaciones con objetos matemáticos (Camacho & Depool, 2003; Heugl, 1997; Pierce & Staycy, 2001). Nuestro trabajo de investigación está soportado por el software Derive por la versatilidad de representaciones algebraicas, gráficas y en el cálculo simbólico, así como por la facilidad de acceso que tienen los estudiantes a tal herramienta tecnológica digital.

El trabajo aquí reportado está centrado en uno de los comandos con los que cuenta el software Derive, el comando *vector*. El comando *vector* del software Derive ofrece la posibilidad de utilizar una expresión o función con un parámetro, la variación del parámetro permite obtener una diversidad de expresiones y sus respectivas representaciones gráficas y algebraicas. La sintaxis más sencilla del comando *vector* es: $vector(f(t,s),s,a,b,p)$ donde $f(t,s)$ es una funcion de dos variables reales y la variable s es considerada el parámetro, s es un número real que puede tomar una infinidad de valores; a y b son números reales que definen un intervalo de números reales y p el *paso* o incremento para recorrer el intervalo definido. En el comando *vector*, la variable *paso* permite valores de incremento positivos y negativos así como valores diferentes a la unidad. La Figura 1 muestra un ejemplo del uso de los recursos del comando *vector* en el software Derive.

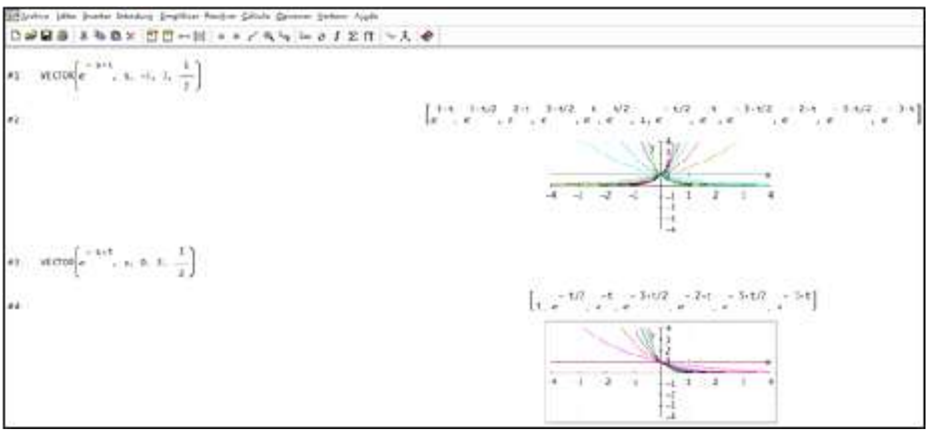


Figura 1. Comando vector.

El comando *vector* del software Derive también nos permite graficar puntos en el plano establecidos por alguna relación funcional. La Figura 2, ofrece un ejemplo de las potencialidades y los recursos del comando *vector* del software Derive para graficar puntos en el plano cartesiano.

Uno de los objetivos de la investigación fue diseñar una secuencia de enseñanza que considera integrales de la forma $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$, así como analizar y observar el nivel de comprensión de la transformación integral de una función por parte de estudiantes. La transformación integral a la que hacemos referencia es el operador Transformada de Laplace.

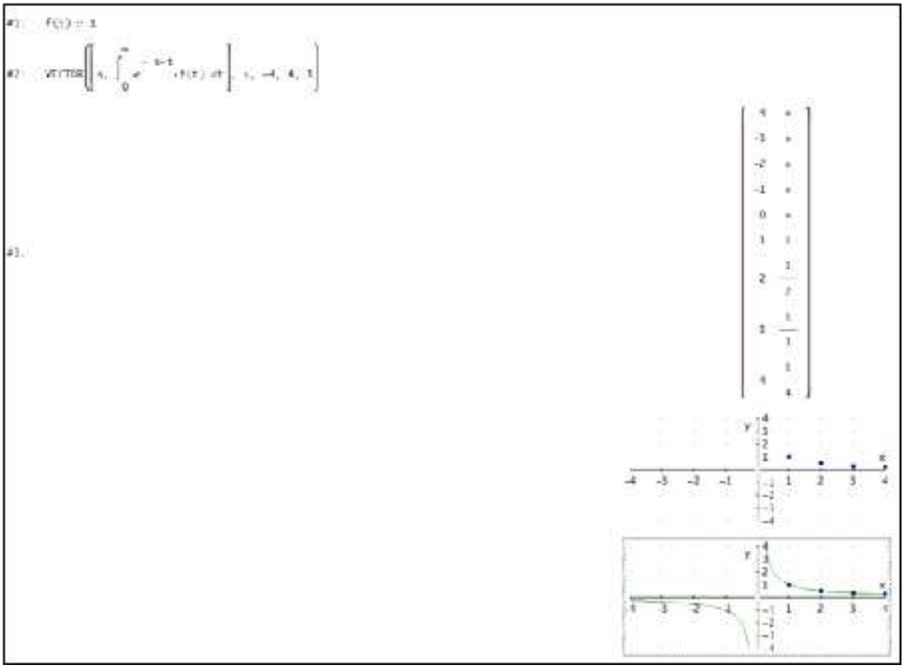


Figura 2. Puntos en el plano.

Antecedentes

La Transformada de Laplace ha sido abordada en algunas investigaciones en educación matemática. Dichas investigaciones tienen un enfoque histórico (Aguilar, 2002), un enfoque cognitivo (Miranda, 2000) y un enfoque computacional (Hernández, 2003).

Aguilar (2002) realizó un estudio sobre el desarrollo histórico y epistemológico de la Transformada de Laplace. La identificó como un caso particular del concepto general de transformada integral, haciendo notar que en el concepto moderno de Transformada de Laplace el número e y el concepto de transformada integral jugaron un papel central en el proceso de su nacimiento. Identificó cuatro formas en que se ha presentado la Transformada de Laplace a lo largo de su desarrollo histórico hasta llegar a la forma moderna definida por la expresión $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x)dx$. Forma establecida por Bateman en 1910 y surgida por necesidad de resolver de manera simple un sistema de ecuaciones diferenciales que se originan en la teoría de las transformaciones radioactivas.

Miranda (2000) realizó una descomposición genética de las construcciones mentales que un estudiante construye para comprender el significado de la Transformada de Laplace. Tales construcciones son descritas en un marco teórico epistemológico llamado Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (APOE), afirma que en la representación simbólica $L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ se encierra una gran riqueza de contenidos en los que cada una de las componentes de la integral tiene significado propio y que, de acuerdo con las situaciones didácticas diseñadas, el conjunto de construcciones mentales que un estudiante realiza para entender la Integral de Laplace está relacionado con la idea de poder transformar una serie de potencias de la forma $\sum_{k=1}^{\infty} t^k f(k)$ en una integral definida de la forma $\int_a^b t^x f(x)dx$, así como con la idea relacionada con la obtención de integrales de las formas $\int_0^{t_0} e^{kt} f(t)dt$, $\int_a^b e^{kt} f(t)dt$ y $\int_0^{\infty} e^{kt} f(t)dt$ como respuestas a problemas en donde el sentido de multiplicar una función por otra (la exponencial) está organizado por los significados de promedios o valores esperados.

Hernández (2003) presentó una propuesta sobre la enseñanza de la Transformada de Laplace a partir del uso de factores de integración para la resolución de ecuaciones diferenciales; consideró la transformada exponencial, de igual forma describió cómo puede utilizarse el ambiente CAS de la calculadora TI-92 para la implementación de su propuesta. Hernández definió la transformada exponencial de una función con la expresión $E\{f(t)\} = \int_0^{T} e^{-st} f(t)dt$, consideró que a partir de esta definición no es difícil evaluar la transformada exponencial de algunas funciones simples, además de cumplir con las condiciones de linealidad. La idea de usar la transformada exponencial es, básicamente, la de establecer un puente con la Transformada de Laplace puesto que si en la transformada exponencial se toma el límite cuando $T \to \infty$, la expresión resultante es la Transformada de Laplace. A través de algunos ejemplos se observa que es sencillo usar la transformada exponencial y que tal definición se puede implementar en un procesador simbólico con ambiente CAS.

En la revisión de los trabajos anteriores observamos que el concepto de integración impropia es el concepto más relevante e importante en la definición de la Transformada de Laplace de una función. La integración impropia es un concepto abordado por los estudiantes universitarios en cursos iniciales de cálculo diferencial e integral y, también ha sido abordado como objeto de estudio en educación matemática.

En un estudio con alumnos de cálculo de educación universitaria, después de una instrucción utilizando el material del plan de estudios y un conjunto de prácticas de laboratorio diseñadas para ambiente CAS soportado por el software Derive (Camacho y Depool, 2003), exploraron el concepto de área y el de integral definida. Los objetivos de las actividades fueron que los estudiantes asimilaran no solo los aspectos algebraicos sino también los aspectos gráficos y numéricos del concepto de integral definida. Se pretendió que los estudiantes vieran el cálculo de una integral definida no exclusivamente como la diferencia de una primitiva evaluada en los límites de integración ($\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$; donde $F(x)$ es una primitiva). El estudio reportó que la influencia de Derive en la idea de área limitada por una curva y el eje de las abscisas, logró ligeros progresos en el uso de aspectos gráficos y numéricos relacionados con el concepto de integral definida. En general, observaron que los estudiantes utilizaron la representación algebraica para resolver las tareas relacionadas con el cálculo de integrales definidas.

Las respuestas de los estudiantes de un curso introductorio de cálculo a nivel universitario utilizando el software Derive (Pierce y Staycy, 2001) muestran que el uso de un ambiente CAS fue un catalizador para los estudiantes en el uso de tres estrategias de aprendizaje, es decir: regularmente utilizan las múltiples representaciones de Derive (manipulación simbólica, numérica y gráfica), discuten los significados con sus compañeros y el profesor, e incluyen el Derive en sus procesos de explicación y justificación a tareas propuestas. Los estudiantes consideran que el uso del software Derive ayuda, pero no fortalece su aprendizaje de las matemáticas.

De acuerdo con la investigación de González-Martin y Camacho (2004), cuando a los estudiantes de cursos universitarios iniciales se les pidió explicar y justificar el comportamiento de las integrales impropias $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$ y $\int_1^\infty x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \infty$ articulando el registro gráfico con el registro algebraico, existe un rechazo al uso del registro gráfico de una función, los estudiantes prefirieron trabajar en el registro algebraico. El registro gráfico demanda al estudiante conocimientos conceptuales más sólidos (Eisenberg y Dreyfus, 1991), no puede ser usado aisladamente y puede ser parte habitual de la instrucción.

La secuencia de enseñanza que aquí se reporta estuvo compuesta de cinco actividades, tiene como propósito ofrecer alternativas de solución a las dificultades relacionadas con el cálculo de integrales impropias mostradas por los estudiantes de nivel universitario, pretende articular los registros algebraico y gráfico en el cálculo de éstas integrales impropias validando las respuestas de los estudiantes con base en sus exploraciones realizadas en el software Derive. En el presente capítulo mostramos la quinta actividad.

El trabajo estuvo dirigido a estudiantes que han concluido su curso universitario de cálculo diferencial e integral, con lo que se llevó a cabo una intervención didáctica a través de una secuencia de enseñanza diseñada para la realización de tareas específicas operadas en un ambiente CAS (software Derive). La realización de la secuencia de enseñanza supone que si el estudiante adquiere o complementa la habilidad con el uso del parámetro y el concepto de integración impropia, entonces alcanzará esquemas de acción instrumentada que le permitirán conceptualizar que una función $f(t)$ definida para $t \geq 0$ es transformada la función $F(s)$ definida por la expresión $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. Dicha transformación integral sucede como resultado de la aplicación del operador Transformada de Laplace.

La capacitación ofrecida a los estudiantes antes de aplicar la secuencia de enseñanza diseñada consistió en conocer las potencialidades del software Derive, esto se realizó desarrollando esquemas de uso para algunos comandos del software Derive. Los comandos explorados y utilizados durante la capacitación fueron: Expandir, Factorizar, Resolver expresión, Ventana de gráficas, Cálculo de límites, Derivadas e integrales y el comando *vector*.

Las actividades realizadas para lograr el conocimiento y uso de los comandos anteriores estuvieron relacionadas con temas y unidades de enseñanza del curso de cálculo diferencial e integral de la carrera de ingeniería en comunicaciones y electrónica de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional Unidad Zacatenco.

La introducción en el uso del comando *vector* del software Derive se llevó a cabo al realizar la gráfica de funciones elementales. Tal acción se efectuó al evaluar y graficar los puntos $(x, f(x))$ para algunos valores de x con la sintaxis del comando $vector([x, f(x)], x, -10,10,1)$. Algunas de las funciones analizadas fueron: cuadrática, exponencial y trigonométricas, entre otras. También se realizaron gráficas de lugares geométricos a través de la parametrización del lugar geométrico. El propósito de introducir a los estudiantes en el uso del comando *vector* fue que los estudiantes comprendieran la potencialidad del comando como un medio para evaluar una expresión definida en términos de un parámetro, definido en un rango de valores establecido.

El objetivo de la capacitación ofrecida a los estudiantes fue que desarrollaran un conocimiento sobre el manejo del software Derive, propiciando con ello esquemas de uso de los comandos más importantes y usuales que involucran conocimientos adquiridos a través de su formación escolar. Con la capacitación proporcionada a los estudiantes se pretendió, además de validar y fortalecer su dominio de los conceptos matemáticos involucrados en los comandos de Derive, que conocieran la sintaxis de los comandos del software Derive.

Perspectiva teórica

La teoría instrumentalista ha sido utilizada en educación matemática como un marco teórico de referencia que contiene los elementos que permiten analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ambientes tecnológicos digitales (Artigue, 2002; Drijvers & Trouche, 2008; Trouche, 2005). En educación matemática, se pueden distinguir dos direcciones de la teoría instrumentalista: una en línea con la Ergonomía Cognitiva (Verillon & Rabardel 1995) y la otra en línea con la teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999). En la Ergonomía Cognitiva, el énfasis está puesto en la formación de esquemas mentales surgidos en la génesis instrumental: esquemas de uso y esquemas de acción instrumentada. La génesis instrumental tiene lugar durante el proceso mediante el cual un estudiante convierte un artefacto en un instrumento para la realización de una tarea específica. En la línea de la Ergonomía Cognitiva esencialmente se distingue un artefacto de un instrumento, es el instrumento el que un estudiante construye con el artefacto. El diseño de nuestra secuencia de enseñanza aquí reportada, su experimentación y el análisis de resultados obtenidos estuvieron sustentados por la teoría instrumentalista en la línea de Ergonomía Cognitiva.

Verillon y Rabardel (1995) precisaron que un artefacto es un objeto material o abstracto utilizado para realizar un tipo de tarea (por ejemplo: calculadora, software, algoritmos, etcétera). El artefacto es dado al estudiante y el instrumento es aquello que el estudiante construye con el artefacto. Un instrumento es una construcción psicológica que incluye, por un lado parte del artefacto con sus características propias (potencialidades y restricciones), relacionadas con el diseño del artefacto y, por otro, parte de las acciones y conceptos del estudiante que utiliza el artefacto para realizar una tarea específica.

Trouche (2005) señaló que la génesis instrumental tiene dos componentes, una dirigida hacia el artefacto (instrumentalización) y otra dirigida hacia el sujeto (instrumentación). Un estudiante construye un instrumento de acuerdo con la realización de un tipo de tarea. Trouche propuso entender los diferentes niveles y las diferentes funciones de los esquemas para construir un instrumento a través de los esquemas de uso y de los esquemas de acción instrumentada. Los esquemas de uso son las acciones y actividades específicas ligadas al artefacto y, los esquemas de acción instrumentada son aquellos esquemas cuya significancia está dada por la acción global tendiente a lograr las transformaciones en los objetos matemáticos de la actividad.

Lagrange (2005) desarrolló la noción de técnica instrumentada y la aplicó para el caso de un ambiente CAS, haciendo énfasis en el hecho de que las técnicas instrumentadas cambian cuando son usadas diversas herramientas tecnológicas digitales. Lagrange (2005) argumentó que las técnicas instrumentadas son importantes en un ambiente CAS, porque éstas están relacionadas con aspectos conceptuales por medio de los esquemas de acción instrumentada y, consideró que el trabajo técnico en matemáticas no puede ser visto sólo como habilidades y procedimientos.

Drijvers y Gravemeijer (2005) utilizaron la noción de técnica instrumentada desarrollada por Lagrange (2005) como un conjunto de reglas y métodos en un ambiente tecnológico que es usado para resolver un tipo de problemas específicos. Desde esta perspectiva, una técnica instrumentada es el lado técnico de un esquema de acción instrumentada. La técnica instrumentada es visible y externa, manifiesta parte del esquema de acción instrumentada, mientras que en el esquema de acción instrumentada se hace hincapié en los aspectos cognitivos y mentales que son invisibles. Drijvers y Gravemeijer (2005) argumentaron que la visibilidad de las técnicas instrumentadas es la razón por la que ellas son el acceso al análisis de la génesis instrumental. Las técnicas instrumentadas muestran el trabajo técnico en un tópico dado y pueden ser consideradas como un conjunto de reglas y métodos.

La Aproximación Instrumental ofrece formas de hacer más explicitas las conexiones entre las técnicas instrumentadas y los aspectos cognitivos y con ello lograr un mejor entendimiento de las dificultades de los estudiantes para resolver una tarea dada. La descripción que nos ofrecen Drijvers y Gravemeijer (2005) de un esquema de acción instrumentada para las diferentes tareas a resolver con el uso de algún comando específico de una herramienta tecnológica digital con ambiente CAS, incluye aspectos técnicos y conceptuales. Los aspectos técnicos y conceptuales formarán un listado de los elementos clave del esquema de acción instrumentada.

El listado de elementos clave para cada uno de los esquemas de acción instrumentada no sugiere que tales esquemas sean de carácter rígido y universal (Drijvers y Gravemeijer, 2005). Éstos listados muestran cómo la descomposición de los elementos del esquema de acción instrumentada ayuda a observar y analizar la complejidad del trabajo de los estudiantes en ambientes tecnológicos y en particular en un ambiente CAS; de igual forma estos listados son versátiles y dinámicos.

Planteamiento del diseño de la actividad, sus alcances y limitaciones

Siguiendo la línea trazada por Drijvers y Gravemeijer (2005) para identificar esquemas de acción instrumentada como una lista de elementos clave técnicos y conceptuales para una tarea específica con el uso de algún comando específico de una herramienta tecnológica digital en un ambiente CAS, las cinco actividades diseñadas de la secuencia de enseñanza contienen su respectivo esquema de acción instrumentada establecido *a priori*. El esquema de acción instrumentada establecido a priori representa una trayectoria hipotética de la realización de la actividad y, es una herramienta fundamental en el análisis retrospectivo de las acciones operadas en Derive por los estudiantes en la ejecución de la actividad.

La secuencia de enseñanza diseñada fue aplicada a estudiantes después de recibir la capacitación en el manejo del software Derive. En la secuencia de enseñanza podemos identificar el uso de los siguientes conceptos matemáticos:

- Dada la función de dos variables reales $f(s,t)=e^{-st}$, identificar a la variable s como un número real que puede tomar una infinidad de valores, a la variable real s que asignamos valores le llamamos el parámetro. En la función de dos variables reales $f(s,t)=e^{-st}$, variar el parámetro s implica generar una familia de funciones las cuales tienen un comportamiento asintótico, exponencial o constante en el intervalo $[0,\infty)$. Actividad 1.
- Dada una función de variable real $f(t)$, definida para $t>0$ y continua en el intervalo $[0,\infty)$, identificar la integral impropia convergente $\int_0^\infty f(t)dt=\lim_{a\to\infty}\int_0^a f(t)dt$ como aquella cuyo límite que la define es una cantidad finita. Identificar la integral impropia divergente $\int_0^\infty f(t)dt=\lim_{a\to\infty}\int_0^a f(t)dt$ como aquella cuyo límite que la define no existe o es una cantidad infinita. Actividades 2, 3 y 4.
- Dada la integral impropia $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ para alguna función $f(t)$, definida para $t\geq 0$, continua en el intervalo $[0,\infty)$ y de orden exponencial, identificar el intervalo de números reales al que pertenece el parámetro s tal que, las integrales impropias $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$, son convergentes. Identificar que los puntos $(s,\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt)$, tales que la integral impropia es convergente, pueden ser graficados en un sistema de coordenadas apropiado, es decir, identificar al parámetro s como la variable independiente y al valor de la integral impropia convergente como la variable dependiente. Identificar la relación funcional entre el valor del

parámetro s y el valor de la integral impropia convergente. Actividad 5.

El enfoque instrumental basado en un ambiente CAS está soportado por las actividades que realizaron los estudiantes con el software Derive. Las exploraciones que realizaron los estudiantes a lo largo de cada actividad de la secuencia de enseñanza les permitieron contestar una serie de preguntas de carácter conceptual relacionadas con los objetos matemáticos trabajados en cada una de ellas.

Cada actividad de la secuencia de enseñanza tiene un objetivo en su realización; el cual se ve reflejado en los conceptos matemáticos trabajados y en los comandos del software Derive involucrados.

En la etapa experimental de nuestra investigación, cada estudiante recibió una hoja de trabajo impresa para cada actividad, las actividades fueron realizadas en sesiones diferentes. En la hoja de trabajo se incluye una serie de preguntas que el estudiante contestó con base en sus exploraciones realizadas con el software Derive.

Actividad de la secuencia de enseñanza

La secuencia de enseñanza estuvo compuesta de cinco actividades. A continuación sólo mostramos la quinta actividad. Consideramos que ésta requiere un uso coordinado de los conceptos y los comandos del software Derive.

La hoja de trabajo correspondiente a la quinta y última actividad de la secuencia de enseñanza contiene las siguientes indicaciones y preguntas que el estudiante contestará con base en sus exploraciones realizadas con el software Derive. Se solicita a los estudiantes que utilicen el comando vector de dicho software.

- Considera la función de dos variables reales $f(s,t) = e^{-st}f(t)$, donde $f(t) = 1$ está definida para $t \geq 0$.
- Calcula la integral impropia $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ para diferentes valores de la variable s y construye una tabla que contenga los valores de la variable y su respectivo valor de la integral impropia.
- Con base en tus observaciones y los registros de la tabla que construiste contesta las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los valores del parámetro s para los que la integral impropia $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ es convergente y cuáles para los que la integral impropia es divergente?
- Grafica los puntos $(s, \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt)$ para aquellos valores de s en los que la integral impropia es convergente.
- ¿Existe alguna función $F(s)$, definida sobre un intervalo adecuado, que se ajuste a los puntos graficados en el inciso anterior? ¿Cuál sería una expresión algebraica para $F(s)$?

La actividad consiste en la exploración del Producto de la función e^{-st} y la función $f(t)$. Utilizando el comando vector del software Derive se solicita a los estudiantes que expliquen el comportamiento de la familia de curvas generada por el producto $e^{-st}f(t)$ en el intervalo $[0,\infty)$ para valores positivos, negativos y cero del parámetro s, también se les pide calcular la integral impropia $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ para algunos de los valores del parámetro e identificar la pareja ordenada formada por los valores del parámetro s y el valor de la integral impropia convergente correspondiente; posteriormente, se les pide graficar los puntos $(s, \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt)$ y se les pregunta si existe alguna función $F(s)$ o tramo de función que se ajuste a los puntos graficados anteriormente.

El propósito de la actividad está centrado en la habilidad de observar al parámetro s como una nueva variable independiente. Así como observar que la variación del parámetro está relacionada con una transformación integral definida por una integral impropia que involucra a dicho parámetro y tiene como consecuencia que la integral impropia es convergente para algún intervalo de valores del parámetro y divergente para otro intervalo de valores éste.

En la actividad pretendemos que los estudiantes identifiquen claramente el intervalo de números reales al que pertenece el parámetro s tal que la integral impropia $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ sea convergente; además, establezcan con la identificación gráfica de los puntos $(s, \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt)$ la relación funcional existente.

Los elementos clave conceptuales y técnicos del esquema de acción instrumentada establecido *a priori* los identificamos a continuación:

Elementos clave conceptuales

- Identificar la variable s como un parámetro en la función $f(s,t) = e^{-st}f(t)$. Identificar que el parámetro pertenece a los números reales y puede tomar valores positivos, negativos o cero.
- Interpretar adecuadamente que al variar el parámetro s en la integral impropia definida por la expresión $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ ofrece integrales impropias convergentes y divergentes.
- Identificar el intervalo de números reales al que pertenece el parámetro s, tal que las integrales impropias $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ sean convergentes.
- Comprender que los pares ordenados formados por los valores $(s, \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt)$, para los valores de la variable s, tales que las integrales impropias $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ son convergentes, pueden ser interpretados como puntos en un sistema de coordenadas apropiado.
- Interpretar los puntos $(s, \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt)$ y relacionarlos con alguna función o tramo de función conocida.

Elementos clave técnicos

- Conocer la sintaxis de comando *vector* de Derive. Utilizar la sintaxis $vector(e^{-st}f(t), s, a, b, p)$ para valores apropiados de a, b y p.
- Conocer la sintaxis del comando integral de Derive. Utilizar la sintaxis $\int(e^{-st}f(t), t, 0, \infty)$ para diferentes valores de a.
- Utilizar el comando *vector* de Derive con la sintaxis $vector([s, \int(e^{-st}f(t), t, 0, \infty)], s, a, b, p)$ para valores apropiados de a, b y p. Identificar que la variable paso del comando vector de Derive ofrece diferentes aproximaciones para identificar los pares ordenados.

La actividad mostrada anteriormente pretende coordinar las nociones y conceptos matemáticos explorados en las actividades anteriores de la secuencia de enseñanza. Pretendemos que los estudiantes utilicen el comando vector de Derive en una forma hábil y entrenada. El diseño de la actividad favorece la realización de exploraciones con el software Derive, tal situación puede generar conflicto en aquellos estudiantes que no logren un dominio y comprensión de los comandos de Derive involucrados en las actividades.

Guía de la actividad para el profesor

La secuencia de enseñanza contiene una guía para el profesor, cada actividad de nuestra secuencia de enseñanza contiene su respectiva guía. Ésta es un instrumento que le permite vigilar las acciones realizadas por los estudiantes con los objetos matemáticos de la actividad en el software Derive.

La guía del profesor correspondiente a la quinta actividad de nuestra secuencia de enseñanza se muestra a continuación. Incluye las instrucciones y las preguntas correspondientes a la actividad así como las acciones que debe vigilar y en las que debe intervenir en la realización de la misma.

Para las indicaciones

- Considera la función de dos variables reales $f(s,t) = e^{-st}f(t)$, donde $f(t) = 1$ está definida para $t \geq 0$.
- Calcula la integral impropia $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ para diferentes valores a la variable s y construye una tabla que contenga los valores de la variable y su respectivo valor de la integral impropia.

El profesor debe

- o *Verificar que el cálculo de la integral impropia incluya valores de la variable s positivos, negativos y al cero, así como valores fraccionarios que exploten la potencialidad del comando vector de Derive.*
- o *Sugerir que el alumno utilice el comando vector con la sintaxis $vector(\int_0^\infty e^{-st}dt\, , s, -7{,}7, \frac{1}{10})$ así como intervalos de números positivos o negativos.*

Para las indicaciones

- Con base en tus observaciones y los registros de la tabla que construiste contesta las siguientes preguntas:
- ¿Cuáles son los valores del parámetro s para los que la integral impropia $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ es convergente y cuáles para los que la integral impropia es divergente?

El profesor debe

- *Verificar que el estudiante identifique que la integral impropia es convergente cuando la variable s es estrictamente mayor que cero y divergente en otro caso.*

Para la indicación

- Grafica los puntos $(s, \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt)$ para aquellos valores de s en los que la integral impropia es convergente.

El profesor debe

- *Sugerir que el alumno utilice el comando vector con la sintaxis* $vector([s, \int_0^\infty e^{-st} dt], s, 0{,}10, \frac{1}{10})$ *así como incrementos menores a* $\frac{1}{10}$ *en el paso de dicho comando.*

Para la pregunta

- ¿Existe alguna función $F(s)$ definida sobre un intervalo adecuado, que se ajuste a los puntos graficados en el inciso anterior? ¿Cuál sería una expresión algebraica para $F(s)$?

El profesor debe

- *Verificar que el estudiante identifique el tramo de la función* $F(s) = \frac{1}{s}$ *para valores* $s > 0$.

Adicionalmente, el profesor debe

- *Sugerir que los estudiantes lleven a cabo los pasos anteriores para las funciones:*
  - 1. $f(t) = t$ 2. $f(t) = t^2$ 3. $f(t) = t^3$
  - 4. $f(t) = e^t$ 5. $f(t) = e^{2t}$ 6. $f(t) = e^{3t}$
  - 7. $f(t) = e^{-t}$ 8. $f(t) = e^{-2t}$ 9. $f(t) = e^{-3t}$
  - 10. $f(t) = \sin(t)$ 11. $f(t) = \cos(t)$

Resultados obtenidos con la implementación de la actividad diseñada

Los resultados obtenidos en la implementación de la quinta actividad se basan en el análisis de las acciones realizadas con los comandos de Derive y las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas planteadas en la hoja de trabajo. El análisis se efectuó comparando las acciones realizadas por los estudiantes con las acciones propuestas en el esquema de acción instrumentada establecido *a priori*. El esquema de acción instrumentada establecido *a priori* es considerado una trayectoria hipotética de la correcta realización de la actividad. Las acciones realizadas por el estudiante se conservan en un archivo digital generado por el software Derive.

Las acciones que realizaron los estudiantes con el software les permitieron identificar el intervalo de números reales al que pertenece el parámetro s, tal que la integral impropia $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ es convergente. Los estudiantes identificaron los puntos $(s, \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt)$, tales que la integral impropia es convergente, y asociaron una relación funcional conocida a dichos puntos.

Cuando los estudiantes trabajaron con la función $f(t) = 1$ identificaron que los valores del parámetro s tales que las integrales impropias $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ son convergentes, son valores $s > 0$. Además, identificaron que la relación funcional, que reconocieron y pudieron asociar a los puntos $(s, \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt)$, es la función $F(s) = \frac{1}{s}$, válida para $s > 0$.

Los estudiantes utilizaron el comando *vector* de Derive con la sintaxis $vector([s, \int(e^{-st}f(t), t, 0, \infty)], s, a, b, p)$ para evaluar las integrales impropias $\int_0^\infty e^{-st}dt$ asignando un intervalo de números reales para valores del parámetro s, con tales acciones reconocieron que las integrales impropias $\int_0^\infty e^{-st}dt$ son convergentes para valores del parámetro tales que $s > 0$. Utilizaron el comando vector de Derive y los recursos gráficos del mismo para representar gráficamente los puntos $(s, \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt)$, los estudiantes asociaron los puntos graficados con la relación funcional correspondiente.

Algunos estudiantes identificaron que las integrales impropias $\int_0^\infty e^{-st}dt$ son convergentes para valores del parámetro tales que $s > 1$, por otra parte, asociaron la relación funcional de los puntos $(s, \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt)$ con la función $F(s) = \frac{1}{s}$, válida para $s > 1$. Estas acciones podemos atribuirlas a la persistencia de los estudiantes en utilizar el comando *vector* con la variable paso asignando sólo valores enteros.

La intervención del profesor estuvo orientada a que los estudiantes exploraran con el comando *vector* de Derive con modificaciones a la sintaxis. Con tales modificaciones utilizaron dicho comando asignando a la variable paso del comando valores diferentes a la unidad, valores fraccionarios. Tales acciones permitieron que algunos estudiantes identificaran que la integral impropia $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ es convergente para valores del parámetro $s > 0$. Los estudiantes identificaron que la relación funcional que se asocia a los puntos $(s, \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt)$ es la función $F(s) = \frac{1}{s}$, válida para $s > 0$.

Conclusiones y reflexiones finales

Los esquemas de acción instrumentada establecidos *a priori* para cada una de las actividades mostraron su eficacia en la realización de cada una en la secuencia de enseñanza. Con respecto a la quinta actividad, la eficacia a la que se hace referencia se observa en las respuestas ofrecidas por los estudiantes durante la implementación. La eficacia en la realización de la actividad de la secuencia de enseñanza se vio favorecida por la intervención del profesor en el análisis y reflexión de los objetos matemáticos involucrados en la actividad. Dicha intervención se acompañó de sugerencias y explicaciones en el uso de los comandos del software Derive.

La secuencia de enseñanza diseñada y probada experimentalmente, ofrece la posibilidad de ser implementada en los estudiantes que han concluido sus cursos iniciales de cálculo diferencial e integral. En el diseño de las actividades, no resulta necesario presentar a los estudiantes la expresión que define a la Transformada de Laplace de una función.

La metodología utilizada en nuestra investigación le permite al profesor la modificación continua de las actividades. El análisis retrospectivo que realiza el profesor en la realización por parte de los estudiantes de las actividades, permite modificar cada una de las actividades con base en los aciertos y las dificultades que muestran los estudiantes. De la misma manera, el profesor tiene la posibilidad de implementar nuevas actividades para que los estudiantes realicen de una forma más extensa algunas exploraciones con el software Derive, exploraciones que les permitan comprender los conceptos matemáticos involucrados en las actividades.

La guía del profesor asociada a cada una de las actividades le sirve como hoja de trabajo, en ella realiza sus observaciones que le permitirán obtener información de los aciertos y dificultades de sus estudiantes. Esta guía será una herramienta adecuada para las modificaciones que sean implementadas en la secuencia de enseñanza propuesta.

La guía del profesor hace evidente la necesidad de la intervención por parte del profesor en la realización de cada una de las actividades de la secuencia de enseñanza para que el papel de la herramienta tecnológica digital sea efectivo cuando ésta es utilizada en el aula.

Es importante considerar que no todos los estudiantes logran construir tales nociones. Una situación similar ocurre con los esquemas de uso y los esquemas de acción instrumentada relacionados con el uso de la herramienta tecnológica digital. El conocimiento y dominio de la herramienta tecnológica digital también se desarrolla gradualmente.

Referencias

Aguilar, E. (2002). *Un estudio sobre el desarrollo histórico y epistemológico de la transformada de Laplace y sus aplicaciones*. (Tesis Doctoral). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, D.F.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245-274.

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (1998). Ecuaciones *diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa Wiley

Camacho, M., & Depool, R. (2003). Using Derive to understand the concept of definite integral. *International journal for Mathematics Teaching and Learning*, *5*, 1-16.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-265.

Drijvers, P., & Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: Examples of algebraic schemes. En D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 163-196). New York: Springer.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments. En G. W. Blume M.K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics* (Vol. 2 pp. 363-391). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Edwards, C. & Penney, D. (2001). *Ecuaciones diferenciales*. México: Pearson Educación.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991, February). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmermann & S. Cunnigham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-37). Mathematical Association of America.

González-Martín, A. S., & Camacho, M. (2004). Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. In *Proceedings of the 28th Conference of the International* group for the psychology of mathematics education (Vol. 2, pp. 479-486). Bergen: PME.

Hernández, A (2003). La Transformada Exponencial: hacia una (re)construcción en la enseñanza de la transformada de Laplace. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*, (pp. 77-90). México: Fondo de Cultura Económica.

Heugl, H. (1997). Experimental and active learning with DERIVE. *ZDM*, *29*(5), 142-148.

Lagrange, J. B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. In D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 113-135). New York: Springer.

Lagrange, J. B. (1999). Complex calculators in the classroom: Theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *4*(1), 51-81.

Miranda, E. (2000). *El entendimiento de la transformada de Laplace: caso de una descomposición genética*. (Tesis Doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Pierce, R., & Stacey, K. (2001). Observations on students' responses to learning in a CAS environment. *Mathematics Education Research Journal*, *13*(1), 28-46.

Spiegel, M. R. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. México: Prentice Hall.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 137-162). New York: Springer.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education*, *10*(1), 77-101.

Dennis, Z. (1986). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. México: Grupo Ed. Iberoamérica.

SEMBLANZAS

Cesar Martínez Hernández. Doctor en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa por el Cinvestav-IPN. Profesor e Investigador de Tiempo Completo de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Colima. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI). Miembro de la Asociación Mexicana de Investigadores en el Uso de la Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas (AMIUTEM). Líneas de investigación: enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ambientes tecnológicos; formación de profesores de matemáticas. cmartinez7@ucol.mx.

Julio Cuevas Romo. Doctor en Educación por la Universidad de Guadalajara. Profesor e Investigador de Tiempo Completo de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Colima. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI). Líneas de investigación: procesos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias y las matemáticas en contextos de diversidad; formación de vocaciones científicas; educación y contextos de diversidad. jcuevas0@ucol.mx.

José Carlos Cortés Zavala. Doctor en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa por el Cinvestav-IPN. Profesor Investigador Titutlar "C" de la Facultad de Físico Matemáticas de la UMSNH. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI). Presidente de la Asociación Mexicana de Investigadores en el Uso de la Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas (AMIUTEM). Fundador y miembro del Instituto Geogebra-AMIUTEM. Líneas de Investigación: enseñanza de las matemáticas con tecnología y desarrollo de software educativo. jcortes@umich.mx.

Rafael Pantoja Rangel. Doctor en Ciencias por la Universidad de Guadalajara. Profesor e investigador Titular C, del Departamento de Matemáticas (sección de Matemática Educativa) de la Universidad de Guadalajara. Vicepresidente de la Asociación de Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática (AMIUTEM). Director de la Revista Electrónica AMIUTEM. Líneas de investigación: desarrollo y aplicación de Tecnologías de la Información y Comunicación; modelación matemática apoyada en software para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. rpantoja@prodigy.net.mx.

Otoniel Leal Medina. Maestro en Enseñanza de las Matemáticas por la Universidad de Guadalajara. Profesor adscrito a la Universidad del Valle de México campus Chihuahua. Línea de investigación: generación de estrategias didácticas con el empleo de los software Tracker y GeoGebra y el video digital, para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. olm_88@hotmail.com.

Graciela Eréndira Nuñez Palenius. Doctora en Matemática Educativa, Informática Educativa y Ciencias de la Cognición por la UAEM. Profesor Investigador Titular "B" de la Facultad de Ingeniería Química de la UMSNH. Fundadora y Miembro de la Asociación Mexicana de Investigadores en el Uso de la Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas (AMIUTEM). Líneas de Investigación: enseñanza de las matemáticas con tecnología y resolución de problemas. epalenius@hotmail.com.

Liliana Aurora Tabares Sánchez. Maestra en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav-IPN). Ha sido profesora de matemáticas en nivel medio superior. Actualmente es estudiante del doctorado en Matemática Educativa en el Cinvestav-IPN. Línea de investigación: enseñanza y aprendizaje del cálculo. lilytabares@gmail.com.

Francisco Javier Cortés González. Doctor en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa por el Cinvestav-IPN. Profesor de asignatura de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del IPN, Unidad Zacatenco, en la academia de matemáticas de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica. Línea de investigación: aprendizaje y enseñanza del cálculo con TIC's. fcortesg@ipn.mx