Enseñar a resolver ecuaciones desde el concepto de función haciendo uso del lenguaje Python implementado a través de cuadernos Jupyter y las representaciones tabular y gráfica, dejando de privilegiar al razonamiento algebraico

Marco Julio Cañas Campillo[[1]](#footnote-2)

*Universidad de Antioquia*

Colombia

Desde este punto de vista, las ecuaciones, son comparaciones de funciones; y resolver ecuaciones significa encontrar puntos del dominio donde estas funciones se hacen de igual valor. Esta perspectiva posibilita que el estudiante resuelva ecuaciones a partir de representaciones tabulares y gráficas que le permiten resolver por inspección o lectura, lo que resuelve el problema de acceso y manipulación del lenguaje algebraico que aqueja a la gran mayoría de los estudiantes de secundaria y de educación superior.

Indudablemente, las expresiones algebraicas definen funciones, es decir, para cada valor de x, la expresión algebraica asume un único valor. Por ejemplo, en el caso de la expresión algebraica 2x, esta expresión derine una relación entre puntos posibles para x y los resultados al sustituir estos puntos en la expresión. Así, podríamos escribir esta relación como $y = f(x) = 2x$.

Esta es una propuesta de presentación de los conceptos de función y ecuación para educación superior, en el programa de Licenciatura en Matemáticas. De ninguna manera pretende ser una secuencia adecuada de enseñanza de estos conceptos en educación secundaria.

Toda esta historia empieza en un modelo de enseñanza que busca el Aprendizaje Basado en Problemas o ABP que decidí implementar en mi labor de enseñanza en los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Antioquia en el Campus Caucasia.

Este modelo exige enseñar enfocado a la solución de problemas reales y cercanos al contexto de mis estudiantes. Lo que implica enseñar a las funciones como modelos matemáticos descriptores, explicativos o predictivos de la realidad.

Uno de los modelos escolares más presente en la naturaleza es el de *proporcionalidad directa* que se puede modelar con la expresión funcional y = f(x) = kx, donde k es la constante de proporcionalidad. Un ejemplo sencillo de modelación de una situación real es en la que se pretende mostrar la relación entre el número de huevos n y el precio p que debo pagar por todos ellos. Al estudiante le es fácil ver que si un huevo vale 600 pesos colombianos, entonces p = 600\*n es decir, que el precio es proporcional al número de huevos que compre, donde el modelo es una igualdad que expresa que el precio a pagar es un múltiplo del número de huevos. Las representaciones tabulares y gráficas de esta función, le permiten al estudiante caracterizar esta relación.

|  |  |
| --- | --- |
| n | p |
| 1 | 600 |
| 2 | 1200 |
| 3 | 1800 |
| 4 | 2400 |
| 5 | 3000 |
|  |  |
|  |  |

Y el lenguaje de programación python, implementado a través de cuadernos Jupyter, permite al estudiante realizar estas caracterizaciones de manera comprensiva y sencilla al facilitarle la elaboración de la tabla y del gráfico y permitirle consignar en un entorno integrado las interpretaciones de estas representaciones. Este lenguaje y el capacitarse en la interpretación y lectura de tablas y gráficos lo capacita para la investigación, la empresa privada y la ciencia de datos.

Si después de elaborar las representaciones tabular y gráfica a los estudiantes, se les pide que entregue al menos 5 interpretaciones para cada representación, veremos los profesores que es fácil llegar a conclusiones como que:

las funciones de proporcionalidad directa son de velocidad de cambio constante y que las funciones de velocidad de cambio constante son lineales.

Ya con una ejemplo de variación de temperatura en Caucasia de las

|  |  |
| --- | --- |
| hora | Temperatura en Caucasia |
| 8:00 AM | 24 |
| 9:00 AM | 26 |
| 10:00 AM | 28 |
| 11:00 AM | 30 |
| 12:00 AM | 32 |
|  |  |
|  |  |

El estudiante puede llegar a que el modelo funcional es T = 24 + 2\*h, es decir, un modelo de proporcionalidad directa aumentado en una constante.

Para llegar a la forma general de y = b + mx que es el modelo general de funciones lineales que conocemos y al presentar las dos representaciones tabular y gráfica, el estudiante puede llegar a inferencias, de que estas también corresponden a funciones de velocidad de variación contante de gráfico lineal. Es decir, hemos logrado que el estudiante vincule una parte de su realidad al concepto de función lineal.

Para terminar de consolidar la capacidad de los estudiantes de relacionar las representaciones algebraica $y = f(x) = b + mx$ con la velocidad de variación constante dada por la tabla y la linealidad dada por el gráfico podemos pedir a la inteligencia artificial ChaptGPT 4o que nos construya 20 ejercicios de fijación similares al siguiente: “dame 10 ejercicios similares al siguiente: encuentre la expresión algebraica que modele la tabla y luego grafique la tabla y saque por lo menos 5 conclusiones, interpretaciones o inferencias”. Esto con el objetivo de que el estudiante reconozca como equivalentes a las representaciones $y = f(x) = b + mx$, a su representación tabular donde evidencia la velocidad de cambio constante y la característica de que el gráfico es lineal.

Luego, presentamos el significado de la ecuación b+ mx = 0 como el problema de determinar qué valores de x tiene imagen cero bajo esta función lineal lo que el estudiante puede resolver por completación de la tabla o buscando el punto de intersección de la función lineal y = b + mx con la función cero que es el eje horizontal o eje x. Así, hemos enseñado a los estudiantes a resolver ecuaciones lineales desde una representación tabular y desde una representación gráfica. Ya luego, podemos enseñar a resolver estas ecuaciones con los métodos basados en operaciones algebraicas, los cuales requieren mayor complejidad. Lo que quiere decir, que es posible enseñar a los estudiantes a resolver ecuaciones lineales desde una representación tabular de la función lineal asociada o de la representación gráfica de la misma.

Lo interesante de esta propuesta, es su aplicabilidad a la solución de los demás tipos de ecuaciones como cuadráticas, con radicales y con fracciones presentadas en el precálculo de Stewart. Por lo tanto, mi hipótesis como investigador en didáctica de la matemática es que *es viable y apropiado para el aprendizaje significativo de los estudiantes, el presentar las ecuaciones desde el concepto de función para poder solucionarlas haciendo uso de las representaciones tabulares y gráficas de estas, lo que permite que un lenguaje como python, permita que los estudiantes utilicen tecnología en la difícil tarea de aprender a resolver ecuaciones de estos tipos.*

**Desventajas de Geogebra para la enseñanza de las funciones y las ecuaciones desde esta perspectiva**

Geogebra es escolar, por tanto, dificulta la graficación e interpretacion de los gráficos por que no se autoescala. Y las variables de un contexto real son de valores muy grandes o muy pequeños y de rangos muy diferentes.

Aquí tienes una estructura sugerida para un artículo reflexivo de 20 páginas sobre la enseñanza de ecuaciones como comparaciones de funciones, utilizando Python y diversas bibliotecas:

Estructura Sugerida para un Artículo Reflexivo de 20 Páginas

Título: Enseñar a resolver ecuaciones desde el concepto de función haciendo uso del lenguaje python implementado a través de cuadernos Jupyter y las representaciones tabular y gráfica, dejando de privilegiar al razonamiento algebraico.

**Título opcional:**  \*\*Resolución de Ecuaciones a Través de la Comparación de Funciones: Un Enfoque Integrado Usando Python y Jupyter Notebooks\*\*

---

### 1. Introducción (2 páginas)

- \*\*Contextualización del problema\*\*:

- La dificultad de los estudiantes con el razonamiento algebraico.

\* No se conoce o no se utiliza el criterio de la balanza, entendido como el criterio que establece la equivalencia de ecuaciones cuando se suma la misma cantidad a ambos lados o se multiplica por la misma cantidad no nula a ambos lados.

\* Dificultades con la identificación y operación con términos semejantes.

\* Dificultades con identificar y operar con fracciones algebraicas.

\* Variabilidad de las respuestas en un grupo, cuando el procedimiento es de 1 o 2 páginas.

### Contextualización del Problema

En el Seminario en Didáctica de la Aritmética del semestre 2024-1, impartido a los estudiantes de licenciatura en matemáticas de la Universidad de Antioquia, Campus Caucasia, se han observado una serie de problemas recurrentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de ecuaciones. Estas dificultades se manifiestan especialmente en el razonamiento algebraico, una habilidad fundamental en el estudio de las matemáticas.

### Problemas Observados

1. \*\*Dificultad con el Razonamiento Algebraico:\*\*

Muchos estudiantes presentan serias dificultades para comprender y aplicar el razonamiento algebraico. Esto se evidencia en su incapacidad para manipular y simplificar expresiones algebraicas, resolver ecuaciones y entender las propiedades fundamentales de las operaciones algebraicas.

2. \*\*Desconocimiento del Criterio de la Balanza:\*\*

El criterio de la balanza, que establece la equivalencia de ecuaciones cuando se suma la misma cantidad a ambos lados o se multiplica por la misma cantidad no nula a ambos lados, es desconocido o no utilizado por los estudiantes. Este criterio es esencial para entender la naturaleza de las ecuaciones y su resolución.

3. \*\*Dificultades con Términos Semejantes:\*\*

Identificar y operar con términos semejantes es un desafío para los estudiantes. Esta habilidad es crucial para simplificar ecuaciones y trabajar eficientemente con expresiones algebraicas, y su falta de dominio impide el progreso en la resolución de problemas más complejos.

4. \*\*Problemas con Fracciones Algebraicas:\*\*

Los estudiantes muestran dificultades significativas al trabajar con fracciones algebraicas. Identificar, simplificar y operar con fracciones algebraicas y amplificar un grupo de fracciones para convertirlas en homogéneas son competencias necesarias para abordar una amplia gama de problemas matemáticos, y su ausencia limita la capacidad de los estudiantes para avanzar en su comprensión de las matemáticas.

5. \*\*Variabilidad de Respuestas y Falta de Motivación:\*\*

Existe una notable variabilidad en las respuestas dentro del grupo, especialmente cuando el procedimiento de resolución de problemas se extiende a 1 o 2 páginas. Además, la falta de motivación para leer el texto guía de manera disciplinada y completar las tareas de entrenamiento se traduce en una preparación inadecuada y un rendimiento inconsistente.

### Propuesta de Innovación Didáctica

Para abordar estos problemas, proponemos un enfoque innovador que se centra en enseñar la resolución de ecuaciones desde el concepto de función, utilizando el lenguaje Python implementado a través de cuadernos Jupyter y las representaciones tabular y gráfica. Este enfoque tiene como objetivo:

1. \*\*Reforzar la Comprensión Conceptual:\*\*

Introducir el concepto de función como base para la resolución de ecuaciones permite a los estudiantes visualizar de manera tabular y gráfica y así entender mejor las ecuaciones igualdad de funciones o pregunta por los puntos donde, las funciones que forman los lados de la ecuación, son iguales. El uso de representaciones tabulares y gráficas facilita la comprensión de conceptos abstractos y su aplicación práctica.

2. \*\*Utilizar Python y Jupyter Notebooks:\*\*

La implementación de Python a través de Jupyter Notebooks proporciona un entorno interactivo y dinámico para la exploración matemática. Los estudiantes pueden experimentar con ecuaciones, funciones y datos en tiempo real, lo que promueve una comprensión más profunda y una mayor retención del conocimiento.

3. \*\*Integración de la Tecnología en el Aprendizaje:\*\*

El uso de tecnología moderna no solo hace que el aprendizaje sea más atractivo, sino que también prepara a los estudiantes para utilizar herramientas computacionales en su futura carrera profesional. La programación en Python y el análisis de datos son habilidades valiosas en el campo de las matemáticas y más allá.

4. \*\*Promover la Disciplina y la Motivación:\*\*

Al involucrar a los estudiantes en actividades prácticas y proyectos interactivos, se fomenta la disciplina y la motivación. La realización de tareas de programación y el análisis de resultados en tiempo real pueden hacer que el aprendizaje sea más relevante y estimulante.

Esta propuesta busca transformar la manera en que se enseña la resolución de ecuaciones, superando las dificultades tradicionales del razonamiento algebraico mediante un enfoque centrado en la función y apoyado en herramientas tecnológicas modernas.

**Sea hace necesario incluir un aparte de este artículo donde se presente una comparación de las ventajas y desventajas de resolver ecuaciones a través de razonamientos algebraicos frente a la solución de ecuaciones a través de la lectura de las representaciones tabulares y gráficas de las funciones que forman los lados de la ecuación a resolver**

- \*\*Objetivo del artículo\*\*: Presentar una perspectiva alternativa sobre la enseñanza de ecuaciones mediante funciones para así poder resolver ecuaciones por inspección, observación o interpretación de las representaciones tabulares y gráficas de las funciones obtenidas en cuadernos Jupyter utilizando el lenguaje python.

- \*\*Importancia de la tecnología en la educación matemática\*\*.

### 2. Marco Teórico (3 páginas)

- \*\*Definición de ecuaciones y funciones\*\*:

- Relación entre expresiones algebraicas y funciones.

- Concepto de igualdad de funciones como un enfoque para resolver ecuaciones.

- \*\*Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)\*\*:

- Justificación del uso del ABP en la enseñanza de matemáticas.

### 3. Metodología (3 páginas)

- \*\*Descripción de la implementación en el aula\*\*:

- Uso de Jupyter Notebooks y librerías de Python (NumPy, Pandas, Matplotlib, Plotly, Ipywidgets).

- Ejemplos de actividades y ejercicios realizados en clase.

- \*\*Recopilación de datos\*\*:

- Métodos de evaluación del aprendizaje de los estudiantes.

### 4. Representaciones de Funciones (4 páginas)

- \*\*Tablas y Gráficas\*\*:

- Cómo construir representaciones tabulares y gráficas de funciones.

- Ejemplos concretos (proporcionalidad directa, funciones cuadráticas).

- \*\*Interpretación de Representaciones\*\*:

- Proceso de leer e interpretar tablas y gráficos.

- Comparaciones entre diferentes tipos de funciones.

### 5. Resolución de Ecuaciones (4 páginas)

- \*\*Metodología para resolver ecuaciones\*\*:

- Enfoque en la identificación de puntos donde las funciones son iguales.

- Ejemplos prácticos utilizando Python para resolver ecuaciones lineales y no lineales.

- \*\*Interacción con el software\*\*:

- Ejemplos de cómo las herramientas de Python ayudan en la visualización y solución de problemas.

### 6. Reflexiones y Resultados (2 páginas)

- \*\*Análisis de la experiencia en el aula\*\*:

- Resultados observados en el aprendizaje de los estudiantes.

- Beneficios de utilizar representaciones gráficas y tabulares.

- \*\*Desafíos enfrentados\*\*:

- Dificultades en la implementación y respuesta de los estudiantes.

### 7. Conclusiones (1 página)

- \*\*Síntesis de hallazgos\*\*:

- Importancia de la perspectiva de funciones en la enseñanza de ecuaciones.

- \*\*Recomendaciones para futuros docentes\*\*:

- Estrategias para integrar tecnología y funciones en el aula.

### 8. Referencias (1 página)

- \*\*Citas de literatura\*\*: Artículos, libros y recursos digitales relevantes al tema.

### 9. Apéndices (si es necesario, 1-2 páginas)

- \*\*Ejemplos de código en Python\*\*:

- Fragmentos de código que ilustran los ejemplos discutidos en el artículo.

- \*\*Tablas de datos y gráficos\*\*:

- Ejemplos de tablas y gráficos producidos en clase.

---

Esta estructura proporciona un marco completo y detallado para desarrollar tu artículo reflexivo, garantizando que aborde todos los aspectos importantes de la enseñanza de ecuaciones desde la perspectiva de funciones.

1. Licenciado En Matemáticas y Física. Contacto: *marco.canas@udea.edu.co* [↑](#footnote-ref-2)