**Parcial de Matemáticas I: Números Naturales y sus Operaciones**

Instrucciones:

Lee cuidadosamente cada una de las preguntas.

Responde con claridad, justificación y rigor matemático.

Puedes usar diagramas o tablas si lo consideras necesario.

En cada respuesta, procura destacar las propiedades algebraicas implicadas.

Pregunta 1: Propiedades de la Suma y la Multiplicación en los Números Naturales (15 puntos)

a) Considera los números naturales a, b, c ∈ ℕ. Muestra, con ejemplos, que las siguientes propiedades se cumplen para la suma y la multiplicación:

- Conmutativa: a + b = b + a y a \* b = b \* a

- Asociativa: (a + b) + c = a + (b + c) y (a \* b) \* c = a \* (b \* c)

- Existencia del elemento neutro: a + 0 = a y a \* 1 = a

b) Explica, con ejemplos, por qué la suma y la multiplicación no tienen inversos en el conjunto de los números naturales.

Pregunta 2: Propiedades de la Resta en los Números Naturales (15 puntos)

a) La resta de dos números naturales a - b no cumple algunas propiedades que sí tienen la suma y la multiplicación. Muestra con ejemplos que:

- La resta no es conmutativa: a - b ≠ b - a

- La resta no es asociativa: (a - b) - c ≠ a - (b - c)

b) ¿Existe un número neutro para la resta en los números naturales? Justifica tu respuesta.

c) ¿Por qué no siempre es posible restar dos números naturales a - b cuando a < b? ¿Qué propiedad se rompe en este caso?

Pregunta 3: La División en los Números Naturales (20 puntos)

a) Considera dos números naturales a y b. Muestra que la división a ÷ b no siempre está definida en los números naturales. Explica cuándo a ÷ b es un número natural y cuándo no lo es.

b) Analiza si la división en los números naturales cumple las siguientes propiedades:

- Conmutativa: ¿Es cierto que a ÷ b = b ÷ a?

- Asociativa: ¿Es cierto que (a ÷ b) ÷ c = a ÷ (b ÷ c)?

- Existencia del elemento neutro: ¿Existe un número e tal que a ÷ e = a para todo a?

c) Explica, con ejemplos, por qué la división en los números naturales no siempre tiene una solución exacta. ¿Qué sucede cuando hay residuo en una división?

Pregunta 4: Demostración por Inducción Matemática (30 puntos)

Demuestra la siguiente proposición utilizando el método de inducción matemática:

Proposición: Para todo n ∈ ℕ, la suma de los primeros n números naturales es:

1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1) / 2

a) Base de la inducción: Demuestra que la proposición es verdadera para n = 1.

b) Hipótesis de inducción: Supón que la proposición es verdadera para algún n = k, es decir, que se cumple que:

1 + 2 + 3 + ... + k = k(k + 1) / 2

c) Paso inductivo: Usa la hipótesis de inducción para demostrar que la proposición es verdadera para n = k + 1.

Demuestra que: 1 + 2 + 3 + ... + (k + 1) = (k + 1)((k + 1) + 1) / 2

Pregunta 5: Interpretación y Verificación de una Proposición (20 puntos)

Lee la siguiente proposición y responde las preguntas.

Proposición: "Si a es un número natural impar, entonces a² también es impar."

a) Verifica esta proposición para a = 3, a = 5, y a = 7.

b) Escribe una demostración formal para esta proposición utilizando razonamiento matemático.

c) ¿Qué sucede con a² si a es un número natural par? Justifica tu respuesta.