RON LARSON · BRUCE H. EDWARDS

Novena edición

CÁLCULO

Mc Graw Hill

Cálculo 1

Cálculo 1
de una variable

Novena edición

Ron Larson
The Pennsylvania State University
The Behrend College

Bruce H. Edwards
University of Florida

Revisión técnica

Marlene Aguilar Abalo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México

José Job Flores Godoy
Universidad Iberoamericana

Joel Ibarra Escutia
Instituto Tecnológico de Toluca

Linda M. Medina Herrera
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México

McGraw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha Martínez
Editora de desarrollo: Ana L. Delgado Rodríguez
Supervisor de producción: Zeferino García García
Traducción: Joel Ibarra Escutia, Ángel Hernández Fernández, Gabriel Nagore Cázares, Norma Angélica Moreno Chávez

CÁLCULO 1 DE UNA VARIABLE
Novena edición

Educación

Edificio Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma Núm. 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 978-607-15-0273-5

Traducido de la novena edición en inglés de *Calculus*

ISBN-13: 978-1-4390-3033-2

1234567890 109876543210

Impreso en China *Printed in China*

Contenido

Contenido

Unas palabras de los autores

¡Bienvenido a la novena edición de *Cálculo*! Nos enorgullece ofrecerle una nueva versión revisada de nuestro libro de texto. Mucho ha cambiado desde que escribimos la primera edición hace más de 35 años. En cada edición los hemos escuchado a ustedes, esto es, nuestros usuarios, y hemos incorporado muchas de sus sugerencias para mejorar el libro.

A lo largo de los años, nuestro objetivo ha sido siempre escribir con precisión y de manera legible conceptos fundamentales del cálculo, claramente definidos y demostrados. Al escribir para estudiantes, nos hemos esforzado en ofrecer características y materiales que desarrollen las habilidades de todos los tipos de estudiantes. En cuanto a los profesores, nos enfocamos en proporcionar un instrumento de enseñanza amplio que emplea técnicas pedagógicas probadas, y les damos libertad para que usen en forma más eficiente el tiempo en el salón de clase.

También hemos agregado en esta edición una nueva característica denominada ejercicios *Para discusión*. Estos problemas conceptuales sintetizan los aspectos clave y proporcionan a los estudiantes mejor comprensión de cada uno de los conceptos de sección. Los ejercicios *Para discusión* son excelentes para esa actividad en el salón de clase o en la preparación de exámenes, y a los profesores puede resultarles valioso integrar estos problemas dentro de su repaso de la sección. Éstas y otras nuevas características se unen a nuestra pedagogía probada en el tiempo, con la meta de permitir a los estudiantes y profesores hacer el mejor uso del libro.

Esperamos que disfrute la novena edición de *Cálculo*. Como siempre, serán bienvenidos los comentarios y sugerencias para continuar mejorando la obra.

Ron Larson

Ron Larson

Bruce H. Edwards

Bruce H. Edwards

Agradecimientos

Nos gustaría dar las gracias a muchas personas que nos ayudaron en varias etapas de este proyecto a lo largo de los últimos 35 años. Su estímulo, críticas y sugerencias han sido invaluables.

Revisores de la novena edición

Ray Cannon, *Baylor University*
Sadeq Elbaneh, *Buffalo State College*
J. Fasteen, *Portland State University*
Audrey Gillant, *Binghamton University*
Sudhir Goel, *Valdosta State University*
Marcia Kemen, *Wentworth Institute of Technology*
Ibrahima Khalil Kaba, *Embry Riddle Aeronautical University*
Jean-Baptiste Meilhan, *University of California Riverside*
Catherine Moushon, *Elgin Community College*
Charles Odion, *Houston Community College*
Greg Oman, *The Ohio State University*
Dennis Pence, *Western Michigan University*
Jonathan Prewett, *University of Wyoming*
Lori Dunlop Pyle, *University of Central Florida*
Aaron Robertson, *Colgate University*
Matthew D. Sosa, *The Pennsylvania State University*
William T. Trotter, *Georgia Institute of Technology*
Dr. Draga Vidakovic, *Georgia State University*
Jay Wiestling, *Palomar College*
Jianping Zhu, *University of Texas at Arlington*

Miembros del Comité de Asesores de la novena edición

Jim Braselton, *Georgia Southern University*; Sien Deng, *Northern Illinois University*; Dimitar Grantcharov, *University of Texas, Arlington*; Dale Hughes, *Johnson County Community College*; Dr. Philippe B. Laval, *Kennesaw State University*; Kouok Law, *Georgia Perimeter College, Clarkson Campus*; Mara D. Neusel, *Texas Tech University*; Charlotte Newsom, *Tidewater Community College, Virginia Beach Campus*; Donald W. Orr, *Miami Dade College, Kendall Campus*; Jude Socrates, *Pasadena City College*; Betty Travis, *University of Texas at San Antonio*; Kuppalapalle Vajravelu, *University of Central Florida*

Revisores de ediciones anteriores

Stan Adamski, *Owens Community College*; Alexander Arhangelskii, *Ohio University*; Seth G. Armstrong, *Southern Utah University*; Jim Ball, *Indiana State University*; Marcelle Bessman, *Jacksonville University*; Linda A. Bolte, *Eastern Washington University*; James Braselton, *Georgia Southern University*; Harvey Braverman, *Middlesex County College*; Tim Chappell, *Penn Valley Community College*; Oiyin Pauline Chow, *Harrisburg Area Community College*; Julie M. Clark, *Hollins University*; P.S. Crooke, *Vanderbilt University*;

Jim Dotzler, *Nassau Community College*; Murray Eisenberg, *University of Massachusetts at Amherst*; Donna Flint, *South Dakota State University*; Michael Frantz, *University of La Verne*; Sudhir Goel, *Valdosta State University*; Arek Goetz, *San Francisco State University*; Donna J. Gorton, *Butler County Community College*; John Gosselin, *University of Georgia*; Shahryar Heydari, *Piedmont College*; Guy Hogan, *Norfolk State University*; Ashok Kumar, *Valdosta State University*; Kevin J. Leith, *Albuquerque Community College*; Douglas B. Meade, *University of South Carolina*; Teri Murphy, *University of Oklahoma*; Darren Narayan, *Rochester Institute of Technology*; Susan A. Natale, *The Ursuline School, NY*; Terence H. Perciante, *Wheaton College*; James Pommersheim, *Reed College*; Leland E. Rogers, *Pepperdine University*; Paul Seeburger, *Monroe Community College*; Edith A. Silver, *Mercer County Community College*; Howard Speier, *Chandler-Gilbert Community College*; Desmond Stephens, *Florida A&M University*; Jianzhong Su, *University of Texas at Arlington*; Patrick Ward, *Illinois Central College*; Diane Zych, *Erie Community College*

Muchas gracias a Robert Hostetler, de The Behrend College, en The Pennsylvania State University, y a David Heyd, de la misma institución, por sus importantes contribuciones a las ediciones previas de este texto.

Una nota especial de agradecimiento a los profesores que respondieron nuestra encuesta y a los más de dos millones de estudiantes que han usado las ediciones anteriores de la obra.

También quisiéramos agradecer al personal de Larson Texts, Inc., que apoyó en la preparación del manuscrito, realizó el diseño editorial, levantó la tipografía y leyó las pruebas de las páginas y suplementos en la edición en inglés.

En el ámbito personal, estamos agradecidos con nuestras esposas, Deanna Gilbert Larson y Consuelo Edwards, por su amor, paciencia y apoyo. Además, una nota especial de gratitud para R. Scott O'Neil.

Si usted tiene sugerencias para mejorar este texto, por favor siéntanse con la libertad de escribirnos. A lo largo de los años hemos recibido muchos comentarios útiles tanto de los profesores como de los estudiantes, y los valoramos sobremanera.

Ron Larson

Bruce H. Edwards

Características

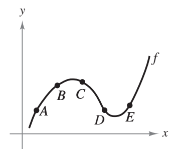
Herramientas pedagógicas

PARA DISCUSIÓN

¡NUEVO! Los ejercicios para discusión que aparecen ahora en cada sección sintetizan los conceptos principales de cada una y muestran a los estudiantes cómo se relacionan los temas. A menudo constituyen problemas de varias partes que contienen aspectos conceptuales y no computacionales, y que pueden utilizarse en discusiones de clase o en la preparación de exámenes.

Para discusión

72. Utilizar la gráfica para responder a las siguientes preguntas.



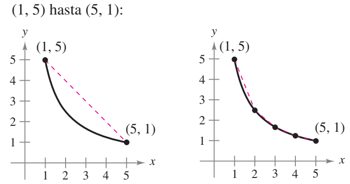
a) ¿Entre qué par de puntos consecutivos es mayor la razón de cambio promedio de la función?

b) ¿La razón de cambio promedio de f entre A y B es mayor o menor que el la razón de cambio instantáneo en B?

c) Trazar una recta tangente a la gráfica entre los puntos C y D cuya pendiente sea igual a la razón de cambio promedio de la función entre C y D.

Desarrollo de conceptos

11. Considerar la longitud de la gráfica de $f(x) = 5/x$, desde (1, 5) hasta (5, 1):



a) Estimar la longitud de la curva mediante el cálculo de la distancia entre sus extremos, como se muestra en la primera figura.

b) Estimar la longitud de la curva mediante el cálculo de las longitudes de los cuatro segmentos de recta, como se muestra en la segunda figura.

c) Describir cómo se podría continuar con este proceso a fin de obtener una aproximación más exacta de la longitud de la curva.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

Los ejercicios de desarrollo de conceptos son preguntas diseñadas para evaluar la comprensión de los estudiantes en torno a los conceptos básicos de cada sección. Estos ejercicios animan a los estudiantes a verbalizar y escribir respuestas, lo que promueve habilidades de comunicación técnica que serán invaluables en sus futuras carreras.

AYUDAS DE ESTUDIO

Las ayudas de estudio distinguen errores comunes, indican casos especiales que pueden provocar confusión, y amplían a conceptos importantes. Estas ayudas proporcionan a los estudiantes información puntual, similar a los comentarios del profesor en clase.

AYUDA DE ESTUDIO Cuando se use la definición para encontrar la derivada de una función, la clave consiste en volver a expresar el cociente incremental (o cociente de diferencias), de manera que Δx no aparezca c... denominador.

AYUDA DE ESTUDIO El ejemplo 3 también se puede resolver sin hacer uso de la regla de la cadena, si se observa que

$$+ 3x^4 + 3x^2 + 1$$

AYUDA DE ESTUDIO Tener en cuenta que se puede comprobar la respuesta de un problema de integración al derivar la

EJEMPLO 1 Levantamiento de un objeto

Determinar el trabajo realizado al levantar un objeto de 50 libras a 4 pies.

Solución La magnitud de la fuerza requerida F es el peso del objeto, como se muestra en la figura 7.48. Así, el trabajo realizado al levantar el objeto 4 pies es

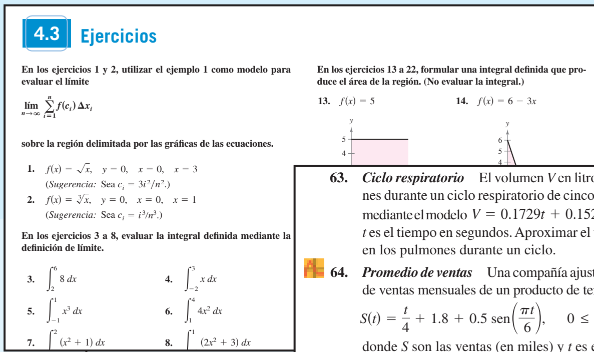
$$\begin{aligned} W &= FD && \text{Trabajo} = (\text{fuerza})(\text{distancia}). \\ &= 50(4) && \text{Fuerza} = 50 \text{ libras, distancia} = 4 \text{ pies.} \\ &= 200 \text{ libras-pies.} \end{aligned}$$

EJEMPLOS

A lo largo del texto, se trabajan ejemplos paso a paso, que muestran los procedimientos y técnicas para resolver problemas, y dan a los estudiantes una comprensión amplia de los conceptos del cálculo.

EJERCICIOS

La práctica hace al maestro. Los ejercicios son con frecuencia el primer lugar que consultan los estudiantes en un libro de texto. Los autores han dedicado mucho tiempo analizándolos y revisándolos; el resultado es un completo y sólido conjunto de ejercicios de diferentes tipos y niveles de dificultad al final de cada sección para considerar todos los estilos de aprendizaje de los estudiantes.



4.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, utilizar el ejemplo 1 como modelo para evaluar el límite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

sobre la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones.

1. $f(x) = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3$
(*Sugerencia:* Sea $c_i = 3i^2/n^2$.)
2. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$
(*Sugerencia:* Sea $c_i = i^3/n^3$.)

En los ejercicios 3 a 8, evaluar la integral definida mediante la definición de límite.

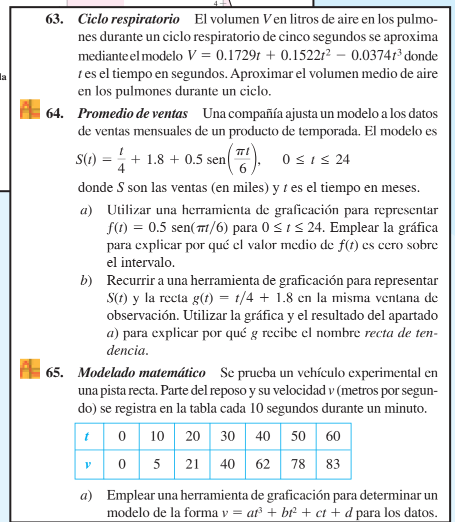
3. $\int_2^6 8\,dx$ 4. $\int_{-2}^{3} x\,dx$
5. $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$ 6. $\int_1^4 4x^2\,dx$
7. $\int_1^2 (x^2+1)\,dx$ 8. $\int_1^{...} (2x^2+3)\,dx$

En los ejercicios 13 a 22, formular una integral definida que produce el área de la región. (No evaluar la integral.)

13. $f(x) = 5$ 14. $f(x) = 6 - 3x$

APLICACIONES

"¿Cuándo usaré esto?", los autores tratan de responder esta pregunta de los estudiantes con ejercicios y ejemplos que se seleccionaron con todo cuidado. Las aplicaciones se toman de diversas fuentes: eventos actuales, datos de trabajo, tendencias industriales, y se relacionan con una amplia gama de intereses. Entender dónde se usa (o puede usarse) el cálculo fomenta una comprensión más completa del material.



63. ***Ciclo respiratorio*** El volumen V en litros de aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de cinco segundos se aproxima mediante el modelo $V = 0.1729t + 0.1522t^2 - 0.0374t^3$ donde t es el tiempo en segundos. Aproximar el volumen medio de aire en los pulmones durante un ciclo.

64. ***Promedio de ventas*** Una compañía ajusta un modelo a los datos de ventas mensuales de un producto de temporada. El modelo es

$$S(t) = \frac{t}{4} + 1.8 + 0.5\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right), \qquad 0 \le t \le 24$$

donde S son las ventas (en miles) y t es el tiempo en meses.

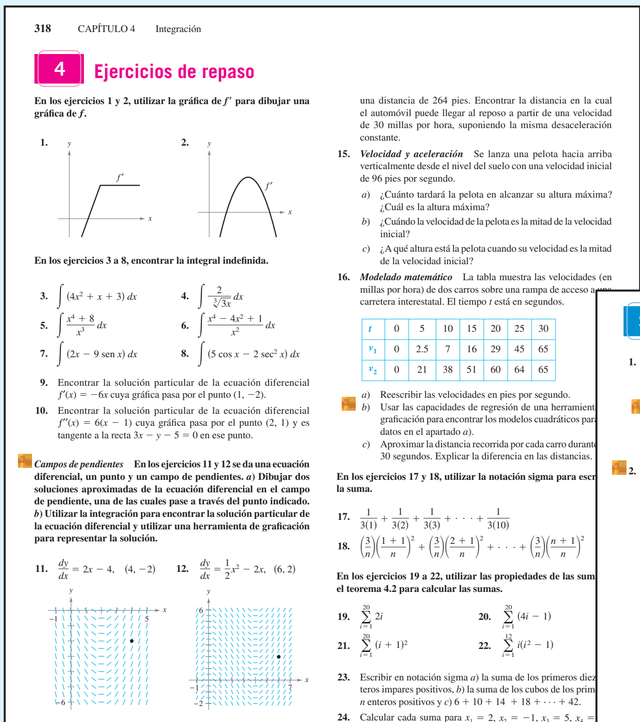
a) Utilizar una herramienta de graficación para representar $f(t) = 0.5\,\mathrm{sen}(\pi t/6)$ para $0 \le t \le 24$. Emplear la gráfica para explicar por qué el valor medio de $f(t)$ es cero sobre el intervalo.

b) Recurrir a una herramienta de graficación para representar $S(t)$ y la recta $g(t) = t/4 + 1.8$ en la misma ventana de observación. Utilizar la gráfica y el resultado del apartado *a)* para explicar por qué g recibe el nombre *recta de tendencia*.

65. ***Modelado matemático*** Se prueba un vehículo experimental en una pista recta. Parte del reposo y su velocidad v (metros por segundo) se registra en la tabla cada 10 segundos durante un minuto.

t	0	10	20	30	40	50	60
v	0	5	21	40	62	78	83

a) Emplear una herramienta de graficación para determinar un modelo de la forma $v = at^3 + bt^2 + ct + d$ para los datos.



318 CAPÍTULO 4 Integración

4 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica de f' para dibujar una gráfica de f.

1. 2.

En los ejercicios 3 a 8, encontrar la integral indefinida.

3. $\int (4x^2 + x + 3)\,dx$ 4. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{3x}}\,dx$
5. $\int \frac{x^4+8}{x^3}\,dx$ 6. $\int \frac{x^4 - 4x^2 + 1}{x^2}\,dx$
7. $\int (2x - 9\,\mathrm{sen}\,x)\,dx$ 8. $\int (5\cos x - 2\sec^2 x)\,dx$

9. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial $f'(x) = -6x$ cuya gráfica pasa por el punto $(1, -2)$.
10. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial $f''(x) = 6(x-1)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2, 1)$ y es tangente a la recta $3x - y - 5 = 0$ en ese punto.

Campos de pendientes **En los ejercicios 11 y 12 se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes.** ***a)*** **Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendiente, una de las cuales pase a través del punto indicado.** ***b)*** **Utilizar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y utilizar una herramienta de graficación para representar la solución.**

11. $\frac{dy}{dx} = 2x - 4, \quad (4, -2)$ 12. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 - 2x, \quad (6, 2)$

una distancia de 264 pies. Encontrar la distancia en la cual el automóvil puede llegar al reposo a partir de una velocidad de 30 millas por hora, suponiendo la misma desaceleración constante.

15. ***Velocidad y aceleración*** Se lanza una pelota hacia arriba verticalmente desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 96 pies por segundo.
a) ¿Cuánto tardará la pelota en alcanzar su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?
b) ¿Cuándo la velocidad de la pelota es la mitad de la velocidad inicial?
c) ¿A qué altura está la pelota cuando su velocidad es la mitad de la velocidad inicial?

16. ***Modelado matemático*** La tabla muestra las velocidades (en millas por hora) de dos carros sobre una rampa de acceso a una carretera interestatal. El tiempo t está en segundos.

t	0	5	10	15	20	25	30
v_1	0	2.5	7	16	29	45	65
v_2	0	21	38	51	60	64	65

a) Reescribir las velocidades en pies por segundo.
b) Usar las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para encontrar los modelos cuadráticos para los datos en el apartado *a)*.
c) Aproximar la distancia recorrida por cada carro durante los 30 segundos. Explicar la diferencia en las distancias.

En los ejercicios 17 y 18, utilizar la notación sigma para escribir la suma.

17. $\frac{1}{3(1)} + \frac{1}{3(2)} + \frac{1}{3(3)} + \cdots + \frac{1}{3(10)}$
18. $\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{1+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{2+1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$

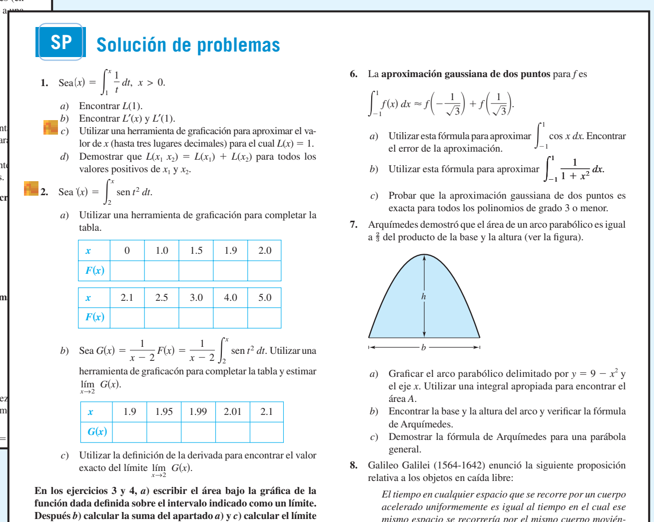
En los ejercicios 19 a 22, utilizar las propiedades de las sumas y el teorema 4.2 para calcular las sumas.

19. $\sum_{i=1}^{20} 2i$ 20. $\sum_{i=1}^{20} (4i - 1)$
21. $\sum_{i=1}^{20} (i+1)^2$ 22. $\sum_{i=1}^{12} i(i^2 - 1)$

23. Escribir en notación sigma *a)* la suma de los primeros diez enteros impares positivos, *b)* la suma de los cubos de los primeros n enteros positivos y *c)* $6 + 10 + 14 + 18 + \cdots + 42$.
24. Calcular cada suma para $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 5, x_4 = ...$

EJERCICIOS DE REPASO

Los ejercicios de repaso ubicados al final de cada capítulo proporcionan a los estudiantes más oportunidades para practicar. Estos conjuntos de ejercicios constituyen una revisión completa de los conceptos del capítulo y son un medio excelente para que los estudiantes preparen un examen.



SP Solución de problemas

1. Sea $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \; x > 0.$
a) Encontrar $L(1)$.
b) Encontrar $L'(x)$ y $L'(1)$.
c) Utilizar una herramienta de graficación para aproximar el valor de x (hasta tres lugares decimales) para el cual $L(x) = 1$.
d) Demostrar que $L(x_1 x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ para todos los valores positivos de x_1 y x_2.

2. Sea $F(x) = \int_2^x \mathrm{sen}\,t^2\,dt.$
a) Utilizar una herramienta de graficación para completar la tabla.

x	0	1.0	1.5	1.9	2.0
$F(x)$					

x	2.1	2.5	3.0	4.0	5.0
$F(x)$					

b) Sea $G(x) = \frac{1}{x-2}F(x) = \frac{1}{x-2}\int_2^x \mathrm{sen}\,t^2\,dt$. Utilizar una herramienta de graficacón para completar la tabla y estimar $\lim_{x\to 2} G(x)$.

x	1.9	1.95	1.99	2.01	2.1
$G(x)$					

c) Utilizar la definición de la derivada para encontrar el valor exacto del límite $\lim_{x\to 2} G(x)$.

En los ejercicios 3 y 4, ***a)*** **escribir el área bajo la gráfica de la función dada definida sobre el intervalo indicado como un límite. Después** ***b)*** **calcular la suma del apartado** ***a)*** **y** ***c)*** **calcular el límite**

6. La **aproximación gaussiana de dos puntos** para f es

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

a) Utilizar esta fórmula para aproximar $\int_{-1}^{1} \cos x\,dx$. Encontrar el error de la aproximación.
b) Utilizar esta fórmula para aproximar $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.
c) Probar que la aproximación gaussiana de dos puntos es exacta para todos los polinomios de grado 3 o menor.

7. Arquímedes demostró que el área de un arco parabólico es igual a $\frac{2}{3}$ del producto de la base y la altura (ver la figura).

a) Graficar el arco parabólico delimitado por $y = 9 - x^2$ y el eje x. Utilizar una integral apropiada para encontrar el área A.
b) Encontrar la base y la altura del arco y verificar la fórmula de Arquímedes.
c) Demostrar la fórmula de Arquímedes para una parábola general.

8. Galileo Galilei (1564-1642) enunció la siguiente proposición relativa a los objetos en caída libre:

El tiempo en cualquier espacio que se recorre por un cuerpo acelerado uniformemente es igual al tiempo en el cual ese mismo espacio se recorrería por el mismo cuerpo movién-

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Estos conjuntos de ejercicios al final de cada capítulo prueban las habilidades de los estudiantes con preguntas desafiantes que retan su pensamiento.

Cálculos clásicos con relevancia contemporánea

TEOREMAS

Los teoremas proporcionan el marco conceptual del cálculo; se enuncian claramente y se distinguen del resto del texto por medio de recuadros para tener una rápida referencia visual. Las demostraciones más importantes muchas veces siguen al teorema, y se proporcionan otras más en un apéndice.

TEOREMA 4.9 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

DEFINICIONES

Al igual que con los teoremas, las definiciones se enuncian claramente utilizando palabras sencillas y precisas; también se separan del texto mediante recuadros para tener una rápida referencia visual.

DEFINICIÓN DE LONGITUD DE ARCO

Sea la función dada por $y = f(x)$ que represente una curva suave en el intervalo $[a, b]$. La longitud del arco de f entre a y b es

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Similarmente, para una curva suave dada por $x = g(y)$, la **longitud de arco** de g entre c y d es

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\,dy.$$

PROCEDIMIENTOS

Los procedimientos aparecen separados del texto para brindar una referencia fácil. Estas líneas proporcionan a los estudiantes instrucciones paso a paso que les ayudarán a resolver problemas de manera rápida y eficiente.

La regla de L'Hôpital también puede aplicarse a los límites unilaterales, como se demuestra en los ejemplos 6 y 7.

EJEMPLO 6 Forma indeterminada 0^0

Encontrar $\lim_{x\to 0^+} (\text{sen } x)^x$.

Solución Porque la sustitución directa produce la forma indeterminada 0^0, proceder como se muestra abajo. Para empezar, asumir que el límite existe y es igual a y.

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{x\to 0^+} (\text{sen } x)^x && \text{Forma indeterminada } 0^0.\\
\ln y &= \ln\Big[\lim_{x\to 0^+} (\text{sen } x)^x\Big] && \text{Tomar un logaritmo natural de cada lado.}\\
&= \lim_{x\to 0^+} [\ln(\text{sen } x)^x] && \text{Continuidad.}\\
&= \lim_{x\to 0^+} [x \ln(\text{sen } x)] && \text{Forma indeterminada } 0\cdot(-\infty).\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\text{sen } x)}{1/x} && \text{Forma indeterminada } -\infty/\infty.\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{-1/x^2} && \text{Regla de L'Hôpital.}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{\tan x} && \text{Forma indeterminada } 0/0.\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{\sec^2 x} = 0 && \text{Regla de L'Hôpital.}
\end{aligned}$$

Ahora, porque $\ln y = 0$, concluir que $y = e^0 = 1$, y se sigue que

$$\lim_{x\to 0^+} (\text{sen } x)^x = 1.$$

NOTAS

Las notas proporcionan detalles adicionales acerca de los teoremas, definiciones y ejemplos. Ofrecen una profundización adicional o generalizaciones importantes que los estudiantes podrían omitir involuntariamente. Al igual que las ayudas de estudio, las notas resultan invaluables para los estudiantes.

NOTA Al aplicar la fórmula para la longitud de arco a una curva, hay que asegurarse de que la curva se recorra una sola vez en el intervalo de integración. Por ejemplo, el círculo dado por $x = \cos t$ y $y = \text{sen } t$, recorre una sola vez el intervalo $0 \le t \le 2\pi$, pero recorre dos veces el intervalo $0 \le t \le 4\pi$. ■

Ampliar la experiencia del cálculo

ENTRADAS DE CAPÍTULO

Las entradas de capítulo proporcionan motivación inicial para el material que se abordará en el capítulo. Además de los objetivos, en la entrada de cada capítulo un concepto importante se relaciona con una aplicación del mundo real. Esto motiva a los estudiantes a que descubran la relevancia del cálculo en la vida.

6 Ecuaciones diferenciales

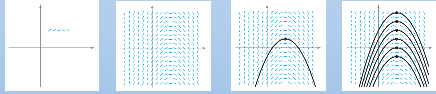
En este capítulo se estudiará una de las más importantes aplicaciones del cálculo: *las ecuaciones diferenciales*. El lector aprenderá nuevos métodos para resolver diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, como las homogéneas, lineales de primer orden y de Bernoulli. Posteriormente aplicará esas reglas para resolver ecuaciones diferenciales en problemas de aplicación.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo generar un campo de pendientes de una ecuación diferencial y encontrar una solución particular. (6.1)
- Cómo usar una función exponencial para modelos de crecimiento y decrecimiento. (6.2)
- Como usar el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales. (6.3)
- Cómo resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y la ecuación diferencial de Bernoulli. (6.4)

Dr. Dennis Kunkel/Getty Images

Según el tipo de bacteria, el tiempo que le toma duplicar su peso al cultivo puede variar mucho, desde varios minutos hasta varios días. ¿Cómo usaría una ecuación diferencial para modelar la tasa de crecimiento del peso del cultivo de una bacteria? (Vea la sección 6.3, ejercicio 84.)



Una función $y = f(x)$ es una solución de una ecuación diferencial, si la ecuación se satisface cuando y y sus derivadas se remplazan por $f(x)$ y sus derivadas. Una manera de resolver una ecuación diferencial es mediante los campos de pendientes, los cuales muestran la forma de todas las soluciones de una ecuación diferencial. (Ver sección 6.1)

405

EXPLORACIÓN

Converso del teorema 4.4 ¿Es verdadero el converso del teorema 4.4 ? Esto es, si una función es integrable, ¿tiene que ser continua? Explicar el razonamiento y proporcionar ejemplos.

Describir las relaciones entre continuidad, derivabilidad e integrabilidad. ¿Cuál es la condición más fuerte? ¿Cuál es la más débil? ¿Qué condiciones implican otras condiciones?

EXPLORACIÓN

Suponer que se pide encontrar una de las siguientes integrales. ¿Cuál elegiría? Explicar la respuesta.

a) $\int \sqrt{x^3+1}\,dx$ o

$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

b) $\int \tan(3x)\sec^2(3x)\,dx$ o

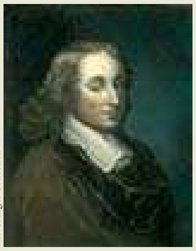
$\int \tan(3x)\,dx$

EXPLORACIONES

Las exploraciones proporcionan a los estudiantes retos únicos para estudiar conceptos que no se han cubierto formalmente. Les permiten aprender mediante el descubrimiento e introducen temas relacionados con los que están estudiando en el momento. Al explorar temas de esta manera, se estimula a que los estudiantes piensen de manera más amplia.

NOTAS HISTÓRICAS Y BIOGRAFÍAS

Las notas históricas proporcionan a los estudiantes información sobre los fundamentos del cálculo; las biografías les ayudan a sensibilizar y a enseñarles acerca de las personas que contribuyeron a la creación formal del cálculo.



The Granger Collection

BLAISE PASCAL (1623-1662)

Pascal es bien conocido por sus contribuciones a diversas áreas de las matemáticas y de la física, así como por su influencia con Leibniz. Aunque buena parte de su obra en cálculo fue intuitiva y carente del rigor exigible en las matemáticas modernas, Pascal anticipó muchos resultados relevantes.

SUMA DE LOS PRIMEROS CIEN ENTEROS

stro de Carl Friedrich Gauss (1777- pidió a sus alumnos que sumaran os enteros desde 1 hasta 100. Cuando regresó con la respuesta correcta muy empo después, el maestro no pudo mirarle atónito. Lo siguiente fue lo o Gauss:

$$\begin{array}{rcrcrcccr} & & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 100 \\ & & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 1 \\ \hline & & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 \end{array}$$

$$\frac{101}{} = 5\,050$$

generaliza por medio del teorema nde

$$\sum_{i=1} i = \frac{100(101)}{2} = 5\,050.$$

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

Preparación del examen Putnam

133. ¿Cuál es mayor

$$\left(\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n+1}} \quad \text{o} \quad \left(\sqrt{n+1}\right)^{\sqrt{n}}$$

donde $n > 8$?

134. Demostrar que si x es positivo, entonces

$$\log_e\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}.$$

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

Las preguntas del examen Putnam aparecen en algunas secciones y se toman de los exámenes Putnam reales. Estos ejercicios extenderán los límites del entendimiento de los estudiantes en relación con el cálculo y brindarán desafíos adicionales para aquellos más interesados.

PROYECTOS DE SECCIÓN

Los proyectos aparecen en algunas secciones y exploran a mayor profundidad las aplicaciones relacionadas con los temas que se están estudiando. Proporcionan una forma interesante y entretenida para que los estudiantes trabajen e investiguen ideas de manera conjunta.

PROYECTO DE TRABAJO

Demostración del teorema fundamental

Utilizar una herramienta de graficación para representar la función $y_1 = \text{sen}^2 t$ en el intervalo $0 \le t \le \pi$. Sea $F(x)$ la siguiente función de x.

$$F(x) = \int_0^x \text{sen}^2 t\,dt$$

a) Completar la tabla. Explicar por qué los valores de f están creciendo.

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
$F(x)$							

b) Utilizar las funciones de integración de una herramienta de graficación para representar F.

c) Emplear las funciones de derivación de una herramienta de graficación para hacer la gráfica de $F'(x)$. ¿Cómo se relaciona esta gráfica con la gráfica de la parte *b*)?

d) Verificar que la derivada de $y = (1/2)t - (\text{sen } 2t)/4$ es $\text{sen}^2 t$. Graficar y y escribir un pequeño párrafo acerca de cómo esta gráfica se relaciona con las de los apartados *b*) y *c*).

Tecnología integrada para el mundo actual

EJEMPLO 5 Cambio de variables

Encontrar $\int x\sqrt{2x-1}\,dx$.

Solución Como en el ejemplo previo, considerar que $u = 2x - 1$ para obtener $dx = du/2$. Como el integrando contiene un factor de x, se tiene que despejar x en términos de u, como se muestra.

$u = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad x = (u+1)/2$ Resolver para x en términos de u.

Después de esto, utilizando la sustitución, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\int x\sqrt{2x-1}\,dx &= \int \left(\frac{u+1}{2}\right) u^{1/2} \left(\frac{du}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\int (u^{3/2} + u^{1/2})\,du \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C \\
&= \frac{1}{10}(2x-1)^{5/2} + \frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} + C.
\end{aligned}
$$

INVESTIGACIONES CON SISTEMAS ALGEBRAICOS POR COMPUTADORA

Los ejemplos a lo largo del libro se acompañan de investigaciones que emplean un sistema algebraico por computadora (por ejemplo, Maple®) para explorar de manera adicional un ejemplo relacionado en el libro. Permiten a los estudiantes explorar el cálculo manipulando funciones, gráficas, etc., y observar los resultados.

EJERCICIOS CON HERRAMIENTAS DE GRAFICACIÓN

La comprensión con frecuencia mejora utilizando una gráfica o visualización. Los ejercicios de tecnología de graficación piden a los estudiantes recurrir a una herramienta de graficación para ayudar a encontrar una solución.

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 55 a 58, *a*) usar una herramienta de graficación para representar gráficamente la función, *b*) representar su función inversa utilizando la herramienta de graficación y *c*) determinar si la gráfica de la relación inversa es una función inversa. Explicar la respuesta.**

55. $f(x) = x^3 + x + 4$ **56.** $h(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

TECNOLOGÍA

A lo largo del libro, los recuadros de tecnología dan a los estudiantes una visión de cómo la tecnología puede usarse para ayudar a resolver problemas y explorar los conceptos del cálculo. No sólo proporcionan discusiones acerca de dónde la tecnología tiene éxito, sino también sobre dónde puede fracasar.

CAS ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 67 a 72, usar un sistema algebraico por computadora para *a*) trazar la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y *b*) trazar la gráfica de la solución que satisface la condición inicial especificada.**

67. $\dfrac{dy}{dx} = 0.25y, \quad y(0) = 4$

68. $\dfrac{dy}{dx} = 4 - y, \quad y(0) = 6$

69. $\dfrac{dy}{dx} = 0.02y(10 - y), \quad y(0) = 2$

70. $\dfrac{dy}{dx} = 0.2x(2 - y), \quad y(0) = 9$

71. $\dfrac{dy}{dx} = 0.4y(3 - x), \quad y(0) = 1$

72. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}e^{-x/8}\,\text{sen}\,\dfrac{\pi y}{4}, \quad y(0) =$

CAS **En los ejercicios 79 a 82, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la integral. Usar el sistema algebraico por computadora para hacer la gráfica de dos antiderivadas. Describir la relación entre las gráficas de las dos antiderivadas.**

79. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 4x + 13}\,dx$ **80.** $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2 + 4x + 13}\,dx$

81. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \text{sen}\,\theta}\,d\theta$ **82.** $\displaystyle\int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 dx$

CAS **En los ejercicios 33 a 40, usar un sistema algebraico por computadora para determinar la primitiva que atraviesa el punto dado. Usar el sistema para hacer la gráfica de la antiderivada resultante.**

33. $\displaystyle\int \frac{5x}{x^2 - 10x + 25}\,dx, \ (6, 0)$ **34.** $\displaystyle\int \frac{6x^2 + 1}{x^2(x-1)^3}\,dx, \quad (2, 1)$

35. $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 2}{(x^2 + 2)^2}\,dx, \quad (0, 1)$ **36.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2 - 4)^2}\,dx, \quad (3, 4)$

TECNOLOGÍA La regla de Simpson puede usarse para dar una buena aproximación del valor de la integral en el ejemplo 2 (para $n = 10$, la aproximación es 1.839). Al usar la integración numérica, sin embargo, se debe estar consciente de que la regla de Simpson no siempre da buenas aproximaciones cuando algunos de los límites de integración están cercanos a una asíntota vertical. Por ejemplo, usando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene

$$\int_0^{1.99} \frac{x+3}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx \approx 6.213.$$

Aplicando la regla de Simpson (con $n = 10$) para esta integral se produce una aproximación de 6.889.

EJERCICIOS CON SISTEMAS ALGEBRAICOS POR COMPUTADORA

¡NUEVO! De igual manera que los ejercicios con herramientas de graficación, algunos ejercicios pueden resolverse mejor utilizando un sistema algebraico por computadora. Estos ejercicios son nuevos en esta edición.

P Preparación para el cálculo

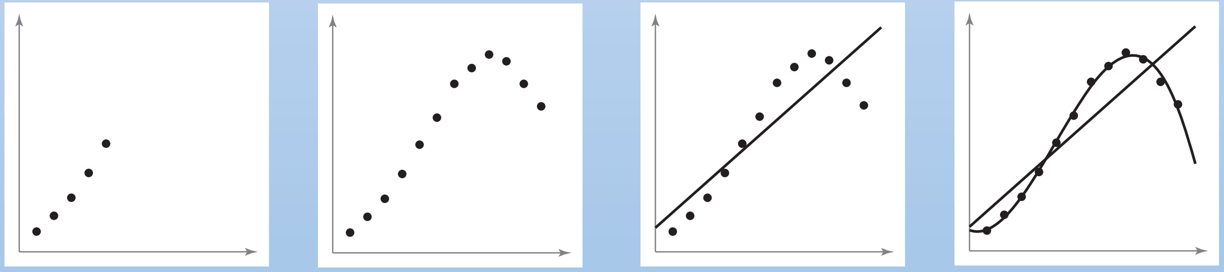
En este capítulo se revisan varios conceptos que lo ayudarán a prepararse para el estudio del cálculo. Estos conceptos incluyen el dibujo de gráficas y funciones así como el ajuste de modelos matemáticos a conjuntos de datos. Es importante repasar estos conceptos antes de adentrarse en el cálculo.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo identificar las características de las ecuaciones y dibujar sus gráficas. (P.1)
- Cómo encontrar y graficar ecuaciones de rectas, incluidas rectas paralelas y perpendiculares, utilizando el concepto de pendiente. (P.2)
- Cómo evaluar y graficar funciones y sus diferentes transformaciones. (P.3)
- Cómo ajustar modelos matemáticos a conjuntos de datos encontrados en la vida real. (P.4)

Jeremy Walker/Getty Images

En 2006, China rebasó a Estados Unidos como el mayor emisor de dióxido de carbono del mundo, el principal gas del efecto invernadero. Dadas las concentraciones de dióxido de carbono en la atmósfera durante varios años, ¿pueden los viejos modelos matemáticos predecir con exactitud las futuras concentraciones atmosféricas en comparación con modelos más recientes? (Ver la sección P.1, ejemplo 6.)



Los modelos matemáticos se usan generalmente para describir conjuntos de datos y pueden representarse por diferentes tipos de funciones tales como las lineales, cuadráticas, cúbicas, racionales y trigonométricas. (Ver la sección P.4.)

P.1 Gráficas y modelos

- **Trazar la gráfica de una ecuación.**
- **Encontrar las intersecciones de una gráfica con los ejes.**
- **Analizar las posibles simetrías de una gráfica con respecto a un eje y el origen.**
- **Encontrar los puntos de intersección de dos gráficas.**
- **Interpretar modelos matemáticos con datos de la vida real.**

Archive Photos

RENÉ DESCARTES (1596-1650)
Descartes hizo numerosas contribuciones a la filosofía, la ciencia y las matemáticas. En su libro *La Géométrie*, publicado en 1637, describió la idea de representar los puntos del plano por medio de pares de números reales y las curvas en el plano mediante ecuaciones.

La gráfica de una ecuación

En 1637, el matemático francés René Descartes revolucionó las matemáticas al unir sus dos ramas principales: álgebra y geometría. Con ayuda del plano coordenado de Descartes, los conceptos geométricos se pudieron formular de manera analítica y los algebraicos visualizarse de forma gráfica. La potencia de este método es tal que durante un siglo se consiguió desarrollar la mayor parte del cálculo.

Las posibilidades de éxito en el cálculo aumentarán siguiendo el mismo método. Es decir, realizar el cálculo desde múltiples perspectivas —*gráfica*, *analítica* y *numérica*— incrementará la comprensión de los conceptos fundamentales.

Considerar la ecuación $3x + y = 7$. El punto $(2, 1)$ es un **punto solución** de la ecuación puesto que esta última se satisface (es verdadera) cuando se sustituye x por 2 y y por 1. Esta ecuación tiene muchas otras soluciones, como $(1, 4)$ y $(0, 7)$. Para encontrarlas de manera sistemática, despejar y de la ecuación inicial.

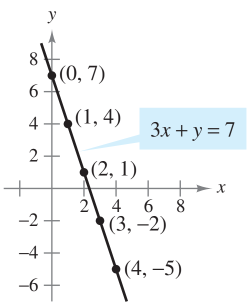
$$y = 7 - 3x$$ Método analítico.

Ahora, elaboramos una **tabla de valores** dando valores de x.

x	0	1	2	3	4
y	7	4	1	-2	-5

Método numérico.

A partir de la tabla, puede verse que $(0, 7)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(3, -2)$ y $(4, -5)$ son soluciones de la ecuación inicial $3x + y = 7$. Al igual que muchas ecuaciones, ésta tiene una cantidad infinita de soluciones. El conjunto de todos los puntos solución constituye la **gráfica** de la ecuación, como ilustra la figura P.1.



Procedimiento gráfico: $3x + y = 7$
Figura P.1

NOTA Aunque se mencione el dibujo de la figura P.1 como la gráfica de $3x + y = 7$, en realidad sólo representa una *porción* de la misma. La gráfica completa se extendería fuera de la página.

En este curso se estudiarán varias técnicas para la representación gráfica. La más simple consiste en dibujar puntos hasta que la forma esencial de la gráfica se haga evidente.

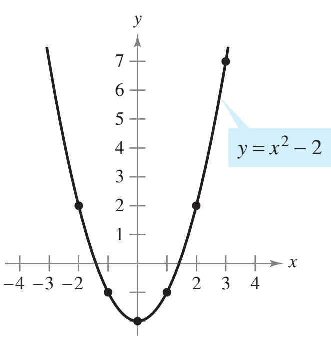
EJEMPLO 1 Dibujo de una gráfica mediante el trazado de puntos

Dibujar la gráfica de $y = x^2 - 2$.

Solución Primero construimos una tabla de valores. A continuación, marcamos los puntos dados en la tabla.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	2	-1	-2	-1	2	7

Por último, unir los puntos con una *curva suave*, como se muestra en la figura P.2. Esta gráfica es una **parábola**. Se trata de una de las cónicas que se estudiarán en el capítulo 10.



La parábola $y = x^2 - 2$
Figura P.2

Uno de los inconvenientes de la representación mediante el trazado de puntos radica en que la obtención de una idea confiable de la forma de una gráfica puede exigir que se marque un gran número de puntos. Utilizando sólo unos pocos, se corre el riesgo de obtener una visión deformada de la gráfica. Por ejemplo, suponiendo que para dibujar la gráfica de

$$y = \frac{1}{30}x(39 - 10x^2 + x^4)$$

se han marcado sólo cinco puntos: $(-3, -3)$, $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(3, 3)$, como se muestra en la figura P.3*a*. A partir de estos cinco puntos, se podría concluir que la gráfica es una recta. Sin embargo, esto no es correcto. Trazando varios puntos más puede verse que la gráfica es más complicada, como se observa en la figura P.3*b*.

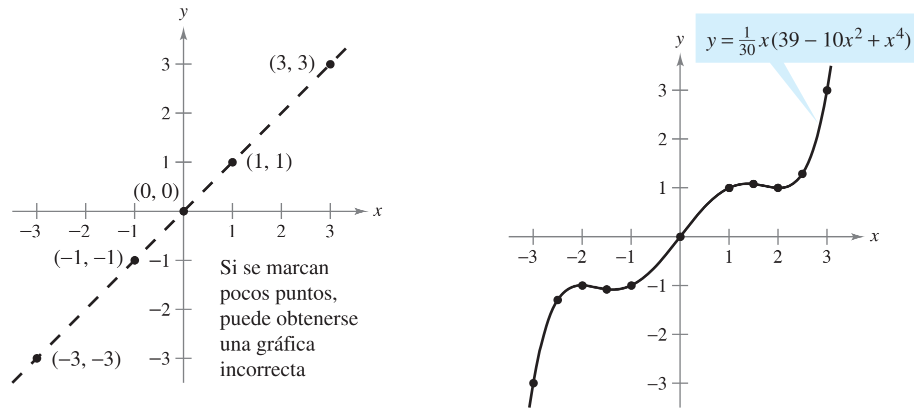


Figura P.3

EXPLORACIÓN

Comparación de los métodos gráfico y analítico Utilizar una herramienta de graficación para representar cada una de las siguientes ecuaciones. En cada caso, encontrar una ventana de representación que muestre las principales características de la gráfica.

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$
b) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 25$
c) $y = -x^3 - 3x^2 + 20x + 5$
d) $y = 3x^3 - 40x^2 + 50x - 45$
e) $y = -(x + 12)^3$
f) $y = (x - 2)(x - 4)(x - 6)$

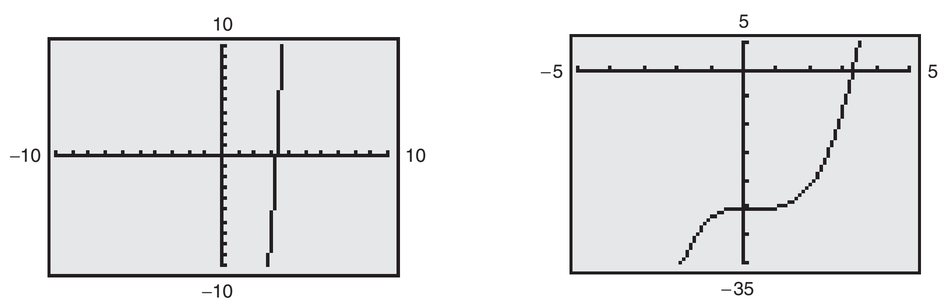
Resolver este problema usando sólo métodos gráficos conllevaría una estrategia simple de "intuición, comprobación y revisión". ¿Qué tipo de aspectos podría involucrar un planteamiento analítico? Por ejemplo, ¿tiene simetrías la gráfica?, ¿tiene inflexiones? Si es así, ¿dónde están?

A medida que se avance por los capítulos 1, 2 y 3 de este texto, se estudiarán muchas herramientas analíticas nuevas que serán de ayuda para analizar gráficas de ecuaciones como éstas.

TECNOLOGÍA La tecnología moderna ha simplificado el dibujo de gráficas. No obstante, incluso recurriendo a ella, es posible desfigurar una gráfica. Por ejemplo, las pantallas de una herramienta de graficación de la figura P.4 muestran una porción de la gráfica de

$$y = x^3 - x^2 - 25.$$

La pantalla de la izquierda puede inducir a pensar que la gráfica es una recta. Sin embargo, la de la derecha muestra que no es así. Entonces, cuando se dibuja una gráfica ya sea a mano o mediante una herramienta de graficación, debe tenerse en cuenta que las diferentes ventanas de representación pueden dar lugar a imágenes muy distintas de la gráfica. Al elegir una ventana, la clave está en mostrar una imagen de la gráfica que se adecue al contexto del problema.



Visualizaciones en la pantalla de una herramienta de graficación de $y = x^3 - x^2 - 25$
Figura P.4

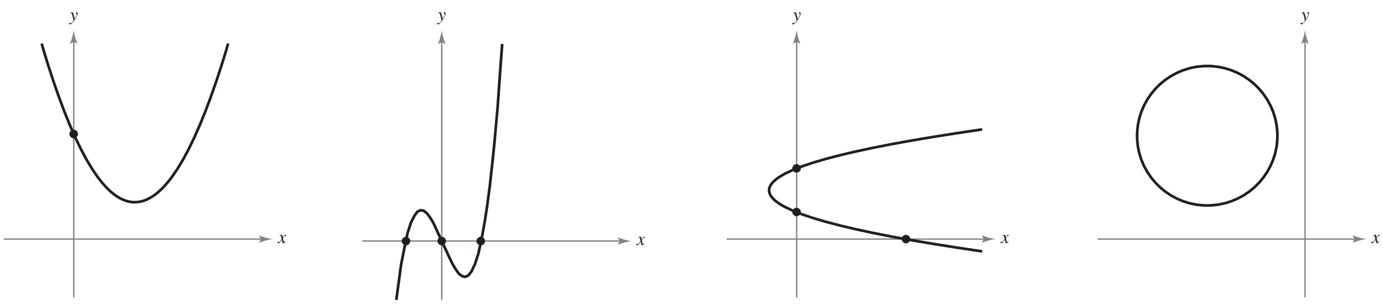
NOTA En este libro, el término *herramienta de graficación* se refiere a una calculadora graficadora o a un programa graficador como *Maple*, *Mathematica* o a la calculadora TI-89.

Intersecciones de una gráfica con los ejes

Dos tipos de puntos solución útiles al representar gráficamente una ecuación son aquellos en los que la coordenada x o y es cero. Tales puntos se denominan **intersecciones con los ejes** porque son los puntos en que la gráfica corta (hace intersección con) el eje x o el eje y. Un punto del tipo $(a, 0)$ es una **intersección en x** de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de ésta. Para determinar las intersecciones en x de una gráfica, igualar y a cero y despejar x de la ecuación resultante. De manera análoga, un punto del tipo $(0, b)$ es una **intersección en y** de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de la misma. Para encontrar las intersecciones en y de una gráfica, igualar x a cero y despejar y de la ecuación resultante.

NOTA En algunos textos se denomina x intersección a la coordenada x del punto $(a, 0)$ en lugar del propio punto. Salvo que sea necesario distinguirlos, se usará el término *intersección* para denotar tanto al punto de intersección con el eje x como a su abscisa.

Es posible que una gráfica carezca de intersecciones con los ejes, o que presente varias de ellas. Por ejemplo, considerar las cuatro gráficas de la figura P.5.



No hay intersecciones con el eje x
Una intersección con el eje y

Tres intersecciones con el eje x
Una intersección con el eje y

Una intersección con el eje x
Dos intersecciones con el eje y

No hay intersecciones

Figura P.5

EJEMPLO 2 Determinación de las intersecciones con los ejes x y y

Encontrar las intersecciones con los ejes en la gráfica de $y = x^3 - 4x$.

Solución Para determinar las intersecciones en x, hacer y igual a cero y despejar x.

$$x^3 - 4x = 0 \qquad \text{y se iguala a cero.}$$

$$x(x - 2)(x + 2) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x = 0, 2 \text{ o } -2 \qquad \text{Despejar } x.$$

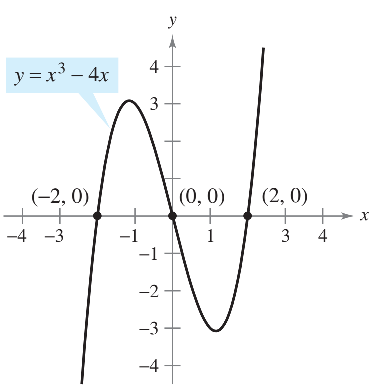
Puesto que esta ecuación admite tres soluciones, se puede concluir que la gráfica tiene tres intersecciones en x:

$$(0, 0), (2, 0) \text{ y } (-2, 0) \qquad \text{Intersecciones en } x.$$

Para encontrar las intersecciones en y, igualar x a cero. Resulta entonces $y = 0$. Por tanto, la intersección en y es

$$(0, 0) \qquad \text{Intersección en } y.$$

(Ver la figura P.6.)



Intersecciones de una gráfica
Figura P.6

TECNOLOGÍA En el ejemplo 2 se utiliza un método analítico para determinar las intersecciones con los ejes. Cuando no es posible tal enfoque analítico, se puede recurrir a métodos gráficos, buscando los puntos donde la gráfica toca los ejes. Utilizar una herramienta de graficación para aproximar las intersecciones.

Simetrías de una gráfica

Es útil conocer la simetría de una gráfica *antes* de intentar trazarla, puesto que sólo se necesitarán la mitad de los puntos para hacerlo. Los tres tipos siguientes de simetrías pueden servir de ayuda para dibujar la gráfica de una ecuación (ver la figura P.7).

1. Una gráfica es **simétrica respecto al eje *y*** si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto $(-x, y)$ también pertenece a la gráfica. Esto significa que la porción de la gráfica situada a la izquierda del eje y es la imagen especular de la situada a la derecha de dicho eje.

2. Una gráfica es **simétrica respecto al eje *x*** si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto $(x, -y)$ también pertenece a la gráfica. Esto quiere decir que la porción de la gráfica situada sobre el eje x es la imagen especular de la situada bajo el mismo eje.

3. Una gráfica es **simétrica respecto al origen** si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto $(-x, -y)$ también pertenece a la gráfica. Esto significa que la gráfica permanece inalterada si se efectúa una rotación de 180° respecto al origen.

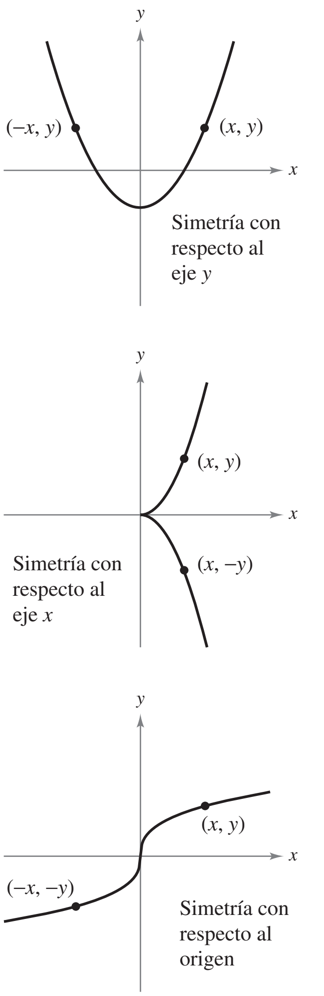


Figura P.7

CRITERIOS DE SIMETRÍA

1. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al eje y si al sustituir x por $-x$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.

2. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al eje x si al sustituir y por $-y$ en la ecuación resulta una ecuación equivalente.

3. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al origen si al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.

La gráfica de un polinomio es simétrica respecto al eje y si cada uno de los términos tiene exponente par (o es una constante). Por ejemplo, la gráfica de $y = 2x^4 - x^2 + 2$ es simétrica respecto al eje y. La gráfica de un polinomio es simétrica respecto al origen si cada uno de los términos tiene exponente impar, como se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Comprobación de la simetría

Verificar si la gráfica de $y = 2x^3 - x$ es simétrica respecto al eje y y respecto al origen.

Solución

Simetría respecto al eje y:

$y = 2x^3 - x$ Escribir ecuación original.

$y = 2(-x)^3 - (-x)$ Sustituir x por $-x$.

$y = -2x^3 + x$ Simplificar. No es una ecuación equivalente.

Simetría respecto al origen:

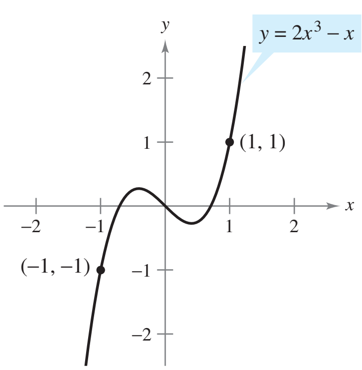
$y = 2x^3 - x$ Escribir ecuación original.

$-y = 2(-x)^3 - (-x)$ Sustituir x por $-x$ y y por $-y$.

$-y = -2x^3 + x$ Simplificar.

$y = 2x^3 - x$ Ecuación equivalente.

Puesto que la sustitución x por $-x$ y y por $-y$ produce una ecuación equivalente, se concluye que la gráfica de $y = 2x^3 - x$ es simétrica con respecto al origen, como se muestra en la figura P.8.



Simetría con respecto al origen
Figura P.8

EJEMPLO 4 Uso de las intersecciones y de las simetrías para representar una gráfica

Dibujar la gráfica de $x - y^2 = 1$.

Solución La gráfica es simétrica respecto al eje x porque al sustituir y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.

$$x - y^2 = 1 \qquad \text{Escribir ecuación original.}$$
$$x - (-y)^2 = 1 \qquad \text{Sustituir } y \text{ por } -y.$$
$$x - y^2 = 1 \qquad \text{Ecuación equivalente.}$$

Esto significa que la porción de la gráfica situada bajo el eje x es una imagen especular de la porción situada sobre el eje. Para dibujar la gráfica, graficar primero la intersección con el eje x y la porción sobre el eje x. Después, reflejar el dibujo en el eje x y obtener la gráfica completa, como se muestra en la figura P.9.

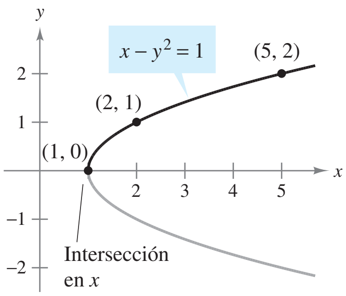


Figura P.9

TECNOLOGÍA Las herramientas de graficación están diseñadas para dibujar con mayor facilidad ecuaciones en las que y está en función de x (ver la definición de **función** en la sección P.3). Para representar otro tipo de ecuaciones, es necesario dividir la gráfica en dos o más partes, *o bien*, utilizar un modo gráfico diferente. Por ejemplo, la gráfica de la ecuación del ejemplo 4, puede dividirse en dos partes:

$$y_1 = \sqrt{x-1} \qquad \text{Porción superior de la gráfica.}$$
$$y_2 = -\sqrt{x-1} \qquad \text{Porción inferior de la gráfica.}$$

Puntos de intersección

Se llama **punto de intersección** de las gráficas de dos ecuaciones a todo punto que satisfaga ambas ecuaciones. Los puntos de intersección de dos gráficas se determinan al resolver sus ecuaciones de manera simultánea.

EJEMPLO 5 Determinación de los puntos de intersección

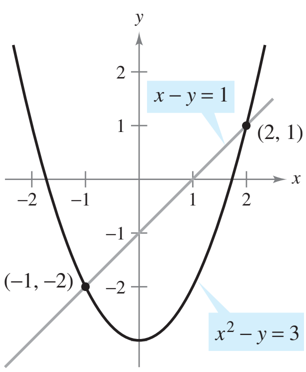
Calcular los puntos de intersección de las gráficas de $x^2 - y = 3$ y $x - y = 1$.

Solución Comenzar por representar las gráficas de ambas ecuaciones en el *mismo* sistema de coordenadas rectangulares, como se muestra en la figura P.10. Hecho esto, resulta evidente que las gráficas tienen dos puntos de intersección. Para determinarlos, se puede proceder como sigue.

$$y = x^2 - 3 \qquad \text{Despejar } y \text{ de la primera ecuación.}$$
$$y = x - 1 \qquad \text{Despejar } y \text{ de la segunda ecuación.}$$
$$x^2 - 3 = x - 1 \qquad \text{Igualar los valores obtenidos de } y.$$
$$x^2 - x - 2 = 0 \qquad \text{Escribir la ecuación en la forma general.}$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$
$$x = 2 \text{ o } -1 \qquad \text{Despejar } x.$$

Los valores correspondientes de y se obtienen sustituyendo $x = 2$ y $x = -1$ en cualquiera de las ecuaciones originales. Resultan así los dos puntos de intersección:

$$(2, 1) \text{ y } (-1, -2) \qquad \text{Puntos de intersección.}$$



Dos puntos de intersección
Figura P.10

AYUDA DE ESTUDIO Verificar los puntos de intersección del ejemplo 5 sustituyéndolos en la ecuación original o usando la función de *intersección* de su herramienta de graficación o computadora.

Modelos matemáticos

Al aplicar las matemáticas en la vida real con frecuencia se usan ecuaciones como **modelos matemáticos**. Si se desarrolla un modelo matemático con el fin de representar datos reales, debe esforzarse por alcanzar dos objetivos a menudo contradictorios: precisión y sencillez. Es decir, el modelo deberá ser lo bastante sencillo como para poder manejarlo, pero también preciso como para producir resultados significativos. En la sección P.4 se tratan estos objetivos con más detalle.

EJEMPLO 6 El aumento de dióxido de carbono atmosférico

© JG Photography/Alamy

El observatorio de Mauna Loa en Hawai ha medido el incremento en la concentración de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre desde 1958. El dióxido de carbono es el principal gas causante del efecto invernadero responsable directo del calentamiento global.

El observatorio de Mauna Loa, Hawai, registra la concentración de dióxido de carbono (en partes por millón) en la atmósfera terrestre. En la figura P.11 se muestran los registros correspondientes al mes de enero de varios años. En el número de julio de 1990 de *Scientific American*, se utilizaron esos datos para pronosticar el nivel de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre en el año 2035, utilizando el modelo cuadrático:

$$y = 316.2 + 0.70t + 0.018t^2$$ Modelo cuadrático para los datos de 1960 a 1990.

donde $t = 0$ representa a 1960, como se muestra en la figura P.11*a*.

Los datos que se muestran en la figura P.11*b* representan los años 1980 a 2007, y pueden modelarse mediante

$$y = 304.1 + 1.64t$$ Modelo lineal para los datos de 1980 a 2007.

donde $t = 0$ representa a 1960. ¿Cuál fue el pronóstico dado en el artículo de *Scientific American* de 1990? Dados los datos más recientes de los años 1990 a 2007, ¿parece exacta esa predicción para el año 2035?

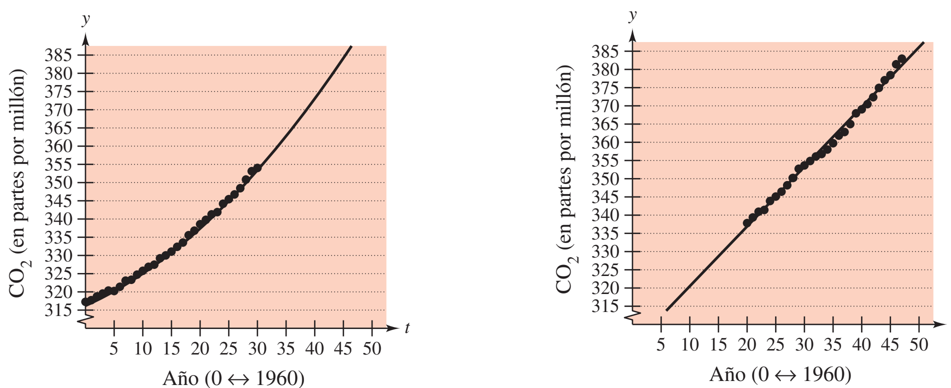


Figura P.11

Solución Para responder a la primera pregunta, se sustituye $t = 75$ (para el año 2035) en el modelo cuadrático.

$$y = 316.2 + 0.70(75) + 0.018(75)^2 = 469.95$$ Modelo cuadrático.

De tal manera, el pronóstico establecido en el artículo de *Scientific American* decía que la concentración de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre alcanzaría alrededor de 470 partes por millón en el año 2035. Utilizando el modelo lineal con los datos de los años 1980 a 2007, el pronóstico para el año 2035 es

$$y = 304.1 + 1.64(75) = 427.1$$ Modelo lineal.

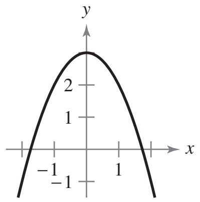
Por tanto, de acuerdo con el modelo lineal para los años 1980 a 2007, parece que el pronóstico de 1990 fue demasiado elevado.

NOTA Los modelos del ejemplo 6 se han elaborado usando un método denominado *ajuste por mínimos cuadrados* (ver la sección 13.9). El modelo lineal tiene una correlación dada por $r^2 = 0.997$ y el modelo cuadrático por $r^2 = 0.994$. Cuanto más próximo es r^2 a 1, "mejor" es el modelo.

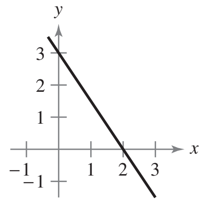
P.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, relacionar cada ecuación con su gráfica.

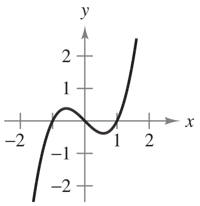
a)



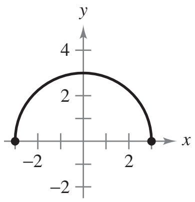
b)



c)



d)



1. $y = -\frac{3}{2}x + 3$

2. $y = \sqrt{9 - x^2}$

3. $y = 3 - x^2$

4. $y = x^3 - x$

En los ejercicios 5 a 14, elaborar la gráfica de la ecuación mediante el trazado de puntos.

5. $y = \frac{1}{2}x + 2$

6. $y = 5 - 2x$

7. $y = 4 - x^2$

8. $y = (x - 3)^2$

9. $y = |x + 2|$

10. $y = |x| - 1$

11. $y = \sqrt{x} - 6$

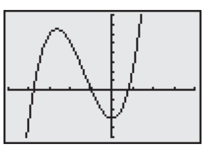
12. $y = \sqrt{x + 2}$

13. $y = \dfrac{3}{x}$

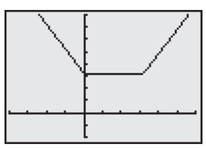
14. $y = \dfrac{1}{x + 2}$

En los ejercicios 15 y 16, describir las ventanas de la figura.

15. $y = x^3 + 4x^2 - 3$



16. $y = |x| + |x - 16|$



En los ejercicios 17 y 18, utilizar una herramienta de graficación para representar la ecuación. Desplazar el cursor a lo largo de la curva para determinar de manera aproximada la coordenada desconocida de cada punto solución, con una exactitud de dos decimales.

17. $y = \sqrt{5 - x}$ *a*) $(2, y)$ *b*) $(x, 3)$

18. $y = x^5 - 5x$ *a*) $(-0.5, y)$ *b*) $(x, -4)$

En los ejercicios 19 a 28, encontrar todas las intersecciones con los ejes.

19. $y = 2x - 5$

20. $y = 4x^2 + 3$

21. $y = x^2 + x - 2$

22. $y^2 = x^3 - 4x$

23. $y = x\sqrt{16 - x^2}$

24. $y = (x - 1)\sqrt{x^2 + 1}$

25. $y = \dfrac{2 - \sqrt{x}}{5x}$

26. $y = \dfrac{x^2 + 3x}{(3x + 1)^2}$

27. $x^2y - x^2 + 4y = 0$

28. $y = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

En los ejercicios 29 a 40, buscar si existe simetría respecto a cada uno de los ejes y respecto al origen.

29. $y = x^2 - 6$

30. $y = x^2 - x$

31. $y^2 = x^3 - 8x$

32. $y = x^3 + x$

33. $xy = 4$

34. $xy^2 = -10$

35. $y = 4 - \sqrt{x + 3}$

36. $xy - \sqrt{4 - x^2} = 0$

37. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

38. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

39. $y = |x^3 + x|$

40. $|y| - x = 3$

En los ejercicios 41 a 58, trazar la gráfica de la ecuación. Identificar todas las intersecciones con los ejes y determinar si existe simetría.

41. $y = 2 - 3x$

42. $y = -\frac{3}{2}x + 6$

43. $y = \frac{1}{2}x - 4$

44. $y = \frac{2}{3}x + 1$

45. $y = 9 - x^2$

46. $y = x^2 + 3$

47. $y = (x + 3)^2$

48. $y = 2x^2 + x$

49. $y = x^3 + 2$

50. $y = x^3 - 4x$

51. $y = x\sqrt{x + 5}$

52. $y = \sqrt{25 - x^2}$

53. $x = y^3$

54. $x = y^2 - 4$

55. $y = \dfrac{8}{x}$

56. $y = \dfrac{10}{x^2 + 1}$

57. $y = 6 - |x|$

58. $y = |6 - x|$

En los ejercicios 59 a 62, utilizar una herramienta de graficación para dibujar la gráfica de la ecuación. Identificar toda intersección con los ejes y determinar si existe simetría.

59. $y^2 - x = 9$

60. $x^2 + 4y^2 = 4$

61. $x + 3y^2 = 6$

62. $3x - 4y^2 = 8$

En los ejercicios 63 a 70, encontrar los puntos de intersección de las gráficas del par de ecuaciones.

63. $\begin{aligned} x + y &= 8 \\ 4x - y &= 7 \end{aligned}$

64. $\begin{aligned} 3x - 2y &= -4 \\ 4x + 2y &= -10 \end{aligned}$

65. $\begin{aligned} x^2 + y &= 6 \\ x + y &= 4 \end{aligned}$

66. $\begin{aligned} x &= 3 - y^2 \\ y &= x - 1 \end{aligned}$

67. $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$

68. $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ -3x + y &= 15 \end{aligned}$

El símbolo señala los ejercicios donde se pide utilizar tecnología gráfica o un sistema de álgebra computacional. La resolución de los demás ejercicios también puede simplificarse mediante el uso de la tecnología adecuada.

69. $y = x^3$
$y = x$

70. $y = x^3 - 4x$
$y = -(x + 2)$

En los ejercicios 71 a 74, utilizar una herramienta de graficación para encontrar los puntos de intersección de las gráficas. Verificar los resultados de manera analítica.

71. $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$
$y = -x^2 + 3x - 1$

72. $y = x^4 - 2x^2 + 1$
$y = 1 - x^2$

73. $y = \sqrt{x + 6}$
$y = \sqrt{-x^2 - 4x}$

74. $y = -|2x - 3| + 6$
$y = 6 - x$

75. ***Modelado matemático*** En la tabla se muestra el Índice de Precios al Consumidor (IPC) para una selección de varios años. (*Fuente: Bureau of Labor Statistics*.)

Año	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
IPC	53.8	82.4	107.6	130.7	152.4	172.2	195.3

a) Utilizar una herramienta de graficación para el cálculo de regresión con el fin de encontrar un modelo matemático de la forma $y = at^2 + bt + c$ para los datos. En este modelo, y representa el IPC y t representa el año, donde $t = 5$ corresponde a 1975.

b) Representar el modelo en la calculadora y comparar los datos.

c) Utilizar el modelo para predecir el IPC del año 2010.

76. ***Modelo matemático*** La siguiente tabla muestra el número de usuarios de teléfonos móviles (en millones) en Estados Unidos en los años mostrados. (*Fuente: Cellular Telecommunications and Internet Association.*)

Año	1990	1993	1996	1999	2002	2005
Número	5	16	44	86	141	208

a) Utilizar la función de regresión de una herramienta de graficación y encontrar así un modelo matemático de la forma $y = at^2 + bt + c$ de los datos. En este modelo, y representa el número de usuarios y t representa el año, donde $t = 0$ corresponde a 1990.

b) Utilizar una herramienta de graficación para colocar los datos y graficar el modelo. Comparar los datos con el modelo.

c) Utilizar el modelo para predecir el número de usuarios de teléfonos móviles en Estados Unidos en el año 2015.

77. ***Punto de equilibrio*** Calcular las ventas necesarias para alcanzar el punto de equilibrio ($R = C$), si el costo* C de producir x unidades es:

$C = 5.5\sqrt{x} + 10\,000$ Ecuación de costo.

y los ingresos R por vender x unidades son:

$R = 3.29x.$ Ecuación de ingresos.

78. ***Alambre de cobre*** La resistencia y en ohms** de 1 000 pies de alambre de cobre a 77° F admite el modelo matemático

$$y = \frac{10\,770}{x^2} - 0.37, \qquad 5 \le x \le 100$$

donde x es el diámetro en milésimas de pulgada. Representar el modelo en la herramienta de graficación. Si se duplica el diámetro del hilo, ¿en qué factor aproximado varía la resistencia?

* En España se le denomina coste.
** En España las siguientes unidades de medición se denominan: volts = voltios; amperes = amperios; ohms = ohmios; henrys = henrios; decibeles = decibelios; watts = watios.

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 79 y 80, escribir una ecuación cuya gráfica tenga la propiedad que se indica (puede existir más de una respuesta correcta).

79. La gráfica tiene intersecciones en $x = -4$, $x = 3$ y $x = 8$.

80. La gráfica tiene intersecciones en $x = -\frac{3}{2}$, $x = 4$ y $x = \frac{5}{2}$.

81. *a*) Comprobar que si una gráfica es simétrica con respecto al eje x y al eje y, entonces es simétrica con respecto al origen. Dar un ejemplo que muestre que lo contrario no es cierto.

b) Comprobar que si una gráfica es simétrica con respecto a cualquiera de los ejes y al origen, entonces es simétrica con respecto al otro eje.

Para discusión

82. Relacionar la ecuación o ecuaciones con las características dadas.

i) $y = 3x^3 - 3x$ *ii*) $y = (x + 3)^2$ *iii*) $y = 3x - 3$
iv) $y = \sqrt[3]{x}$ *v*) $y = 3x^2 + 3$ *vi*) $y = \sqrt{x + 3}$

a) Simétrica con respecto al eje y
b) Tres intersecciones con el eje x
c) Simétrica con respecto al eje x
d) $(-2, 1)$ es un punto de la gráfica
e) Simétrica con respecto al origen
f) La gráfica pasa por el origen

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 83 a 86, determinar cuándo la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

83. Si $(-4, -5)$ es el punto de una gráfica simétrica con respecto al eje x, entonces $(4, -5)$ también es un punto de dicha gráfica.

84. Si $(-4, -5)$ es el punto de una gráfica simétrica con respecto al eje y, entonces $(4, -5)$ también es un punto de dicha gráfica.

85. Si $b^2 - 4ac > 0$ y $a \neq 0$, entonces la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ tiene dos intersecciones con x.

86. Si $b^2 - 4ac = 0$ y $a \neq 0$, entonces la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ sólo tiene una intersección con x.

En los ejercicios 87 y 88, encontrar una ecuación de la gráfica que se compone de todos los puntos (x, y) que tienen la distancia dada respecto al origen (repasar la fórmula de la distancia en el apéndice C).

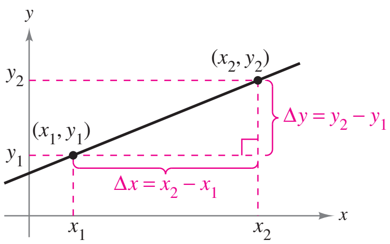
87. La distancia respecto al origen es el doble de la distancia que hay desde $(0, 3)$.

88. La distancia respecto al origen se obtiene al multiplicar la distancia que hay desde el punto $(2, 0)$ por K $(K \neq 1)$.

P.2 Modelos lineales y ritmos o velocidades de cambio

- **Encontrar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos.**
- **Escribir la ecuación de una recta dados un punto y su pendiente.**
- **Interpretar la pendiente como razón o ritmo en aplicaciones cotidianas.**
- **Trazar la gráfica de una ecuación lineal en la forma pendiente-intersección.**
- **Escribir las ecuaciones de rectas que son paralelas o perpendiculares a una recta dada.**

La pendiente de una recta



$\Delta y = y_2 - y_1 =$ cambio en y
$\Delta x = x_2 - x_1 =$ cambio en x
Figura P.12

La **pendiente** de una recta no vertical es una medida del número de unidades que la recta asciende (o desciende) verticalmente por cada unidad de variación horizontal de izquierda a derecha. Considerar los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la recta de la figura P.12. Al desplazarse de izquierda a derecha por la recta, se produce una variación vertical de

$$\Delta y = y_2 - y_1 \qquad \text{Cambio en } y.$$

unidades por cada variación horizontal de

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \text{Cambio en } x.$$

unidades. (Δ es la letra griega *delta* mayúscula y los símbolos Δy y Δx se leen "delta de y" y "delta de x".)

DEFINICIÓN DE LA PENDIENTE DE UNA RECTA

La **pendiente** m de una recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_1 \neq x_2.$$

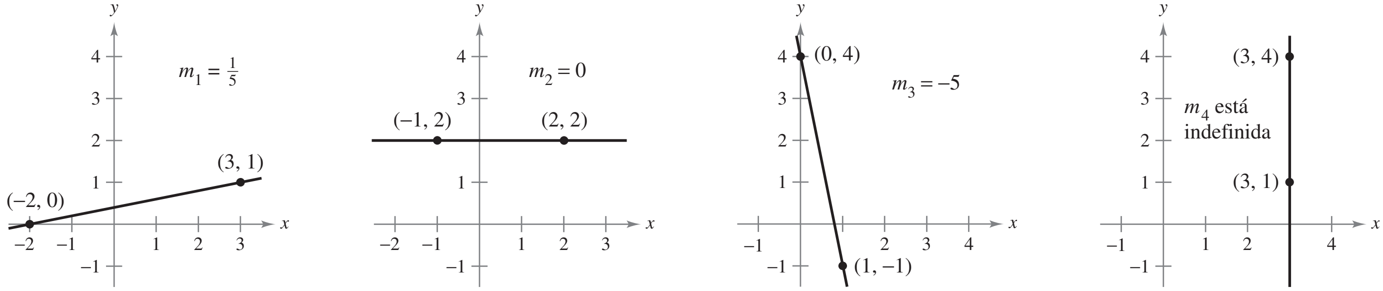
La pendiente no está definida por rectas verticales.

NOTA Al aplicar la fórmula de la pendiente, observar que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Por tanto, no importa el orden en que se reste, *siempre* que sea coherente y las dos "coordenadas restadas" provengan del mismo punto. ■

En la figura P.13 se muestran cuatro rectas con pendiente: una positiva, otra cero, otra negativa y otra "indefinida". En general, cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente de una recta, mayor es su inclinación. Por ejemplo, en la figura P.13, la recta con pendiente -5 está más inclinada que la de pendiente $\frac{1}{5}$.



Si m es positiva, la recta sube de izquierda a derecha

Si m es cero, la recta es horizontal

Si m es negativa, la recta baja de izquierda a derecha

Si m es indefinida, la recta es vertical

Figura P.13

EXPLORACIÓN

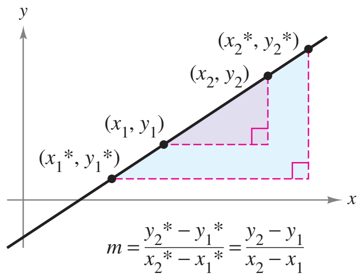
Estudio de ecuaciones de rectas Utilizar una herramienta de graficación para dibujar cada una de las siguientes ecuaciones lineales. ¿Qué punto es común a las siete rectas? ¿Qué número determina la pendiente de la recta en cada ecuación?

a) $y - 4 = -2(x + 1)$
b) $y - 4 = -1(x + 1)$
c) $y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 1)$
d) $y - 4 = 0(x + 1)$
e) $y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1)$
f) $y - 4 = 1(x + 1)$
g) $y - 4 = 2(x + 1)$

Utilizar los resultados para construir la ecuación de una recta que pase por $(-1, 4)$ con una pendiente de m.

Ecuaciones de las rectas

Para calcular la pendiente de una recta pueden utilizarse dos de sus puntos *cualesquiera*. Esto puede verificarse con ayuda de los triángulos semejantes de la figura P.14. (Recordar que los cocientes de los lados correspondientes de dos triángulos semejantes son todos iguales.)



Cualquier par de puntos de una recta determina su pendiente
Figura P.14

Se puede escribir la ecuación de una recta si se conocen su pendiente y las coordenadas de uno de sus puntos. Dada la pendiente m y un punto (x_1, y_1). Si (x, y) denota cualquier otro punto de la recta, entonces

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación, que involucra las dos variables x y y, se puede escribir de la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$, la cual es conocida como **ecuación punto-pendiente de una recta**.

> **ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE DE UNA RECTA**
>
> La ecuación de la recta con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) está dada por
>
> $$y - y_1 = m(x - x_1).$$

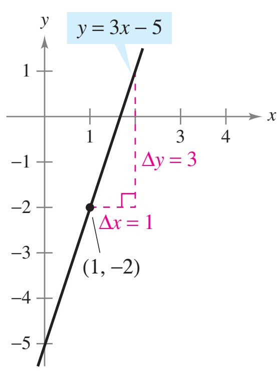
EJEMPLO 1 Determinación de la ecuación de una recta

Encontrar la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto (1, –2).

Solución

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{Forma punto-pendiente.} \\ y - (-2) &= 3(x - 1) && \text{Sustituir } y_1 \text{ por } -2,\ x_1 \text{ por 1 y } m \text{ por 3.} \\ y + 2 &= 3x - 3 && \text{Simplificar.} \\ y &= 3x - 5 && \text{Despejar } y. \end{aligned}$$

(Ver la figura P.15.)

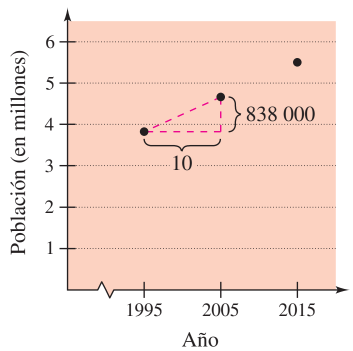


La recta de pendiente 3 que pasa por el punto $(1, -2)$
Figura P.15

NOTA Recordar que la pendiente puede usarse sólo para describir una recta no vertical. De tal manera, las rectas verticales no pueden expresarse mediante ecuaciones punto-pendiente. Por ejemplo, la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto $(1, -2)$ es $x = 1$.

Razones y ritmos o velocidades de cambio

La pendiente de una recta puede interpretarse ya sea como una *razón* o como una *proporción*, o bien como una *tasa*, *ritmo* o *velocidad* de cambio. Si los ejes x y y tienen la misma unidad de medida, la pendiente no tiene unidades y es una **razón** o **proporción**. Si los ejes x y y tienen distintas unidades de medida, la pendiente es una **tasa**, **ritmo** o **velocidad de cambio**. Al estudiar cálculo, se encontrarán aplicaciones relativas a ambas interpretaciones de la pendiente.



Población de Colorado en el censo
Figura P.16

EJEMPLO 2 Crecimiento de poblaciones y diseño técnico

a) La población de Colorado era de 3 827 000 habitantes en 1995 y de 4 665 000 en 2005. Durante este periodo de 10 años, el ritmo o velocidad de cambio promedio de la población fue:

$$\text{Ritmo o velocidad de cambio} = \frac{\text{cambio en población}}{\text{cambio en años}}$$

$$= \frac{4\,665\,000 - 3\,827\,000}{2005 - 1995}$$

$$= 83\,800 \text{ personas por año.}$$

Si la población de Colorado continúa creciendo a este ritmo durante los próximos 10 años, en 2015 alcanzará 5 503 000 habitantes (ver la figura P.16). (*Fuente: U.S. Census Bureau.*)

b) En un torneo de saltos de esquí acuático, la rampa se eleva hasta una altura de 6 pies sobre una balsa de 21 pies de largo, como se ilustra en la figura P.17. La pendiente de la rampa de esquí es el cociente entre su altura (ascenso) y la longitud de su base (avance).

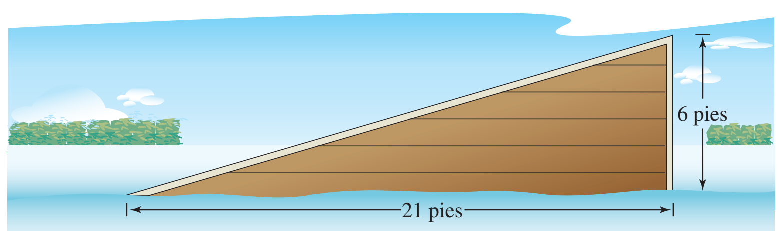
$$\text{Pendiente de la rampa} = \frac{\text{ascenso}}{\text{avance}}$$

Ascenso es el cambio vertical, avance es el cambio horizontal.

$$= \frac{6 \text{ pies}}{21 \text{ pies}}$$

$$= \frac{2}{7}$$

Observar que, en este caso, la pendiente es una proporción y se expresa sin unidades.



Dimensiones de una rampa de esquí acuático
Figura P.17

El ritmo o velocidad de cambio calculado en el ejemplo 2a es un **ritmo** o **velocidad de cambio medio**. Un ritmo o velocidad de cambio medio siempre se calcula con respecto a un intervalo que en este caso es [1995, 2005]. En el capítulo 2 se estudiará otro tipo de ritmo o velocidad de cambio, denominado *ritmo* o *velocidad de cambio instantánea*.

Representación gráfica de modelos lineales

Muchos de los problemas de geometría analítica pueden clasificarse en dos categorías básicas: 1) dada una gráfica, ¿cuál es su ecuación?, y 2) dada una ecuación, ¿cuál es su gráfica? La ecuación punto-pendiente de una recta puede emplearse para resolver ciertos problemas de la primera categoría. No obstante, esta forma no resulta útil para resolver problemas de la segunda categoría. La forma que mejor se adapta al trazado de la gráfica de una recta es la forma **pendiente-intersección** de la ecuación de una recta.

ECUACIÓN PENDIENTE-INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

La gráfica de la ecuación lineal

$$y = mx + b$$

es una recta que tiene *pendiente m* y una *intersección* con el eje y en $(0, b)$.

EJEMPLO 3 Trazado de rectas en el plano

Dibujar la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $y = 2x + 1$ ***b***) $y = 2$ ***c***) $3y + x - 6 = 0$

Solución

a) Puesto que $b = 1$, la intersección en y es $(0, 1)$. Como la pendiente es $m = 2$, se sabe que la recta asciende dos unidades por cada unidad que se mueve hacia la derecha, como se muestra en la figura P.18*a*.

b) Dado que $b = 2$, la intersección en y es $(0, 2)$. Como la pendiente es $m = 0$, se sabe que es horizontal, como se ilustra en la figura P.18*b*.

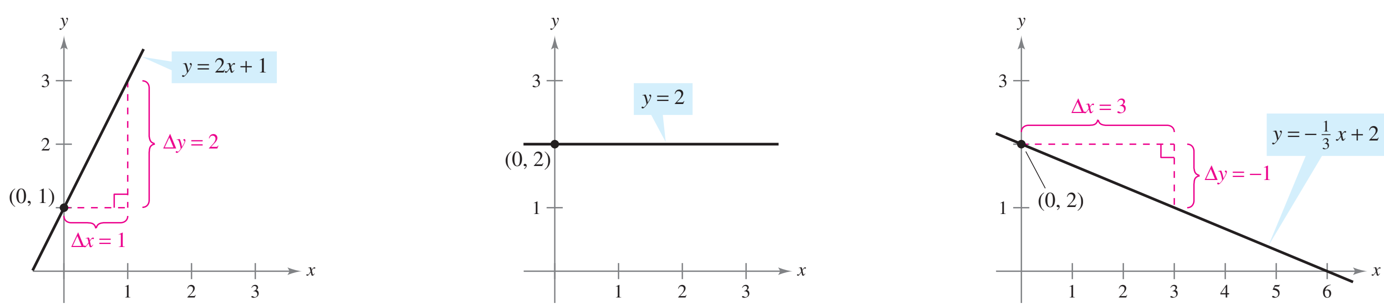
c) Comenzar por escribir la ecuación en forma pendiente-intersección.

$$3y + x - 6 = 0 \quad \text{Ecuación original.}$$

$$3y = -x + 6 \quad \text{Despejar el término en } y.$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 2 \quad \text{Forma pendiente-intersección.}$$

De esta forma, puede verse que la intersección en y es $(0, 2)$ y la pendiente $m = -\frac{1}{3}$. Esto quiere decir que la recta desciende una unidad por cada tres unidades que se mueve hacia la derecha, como se muestra en la figura P.18*c*.



a) $m = 2$; la recta sube ***b***) $m = 0$; la recta es horizontal ***c***) $m = -\frac{1}{3}$; la recta baja

Figura P.18

Dado que la pendiente de una recta vertical no está definida, su ecuación no puede escribirse con la forma pendiente-intersección. Sin embargo, la ecuación de cualquier recta puede escribirse en la **forma general**:

$$Ax + By + C = 0$$ Forma general de la ecuación de una recta.

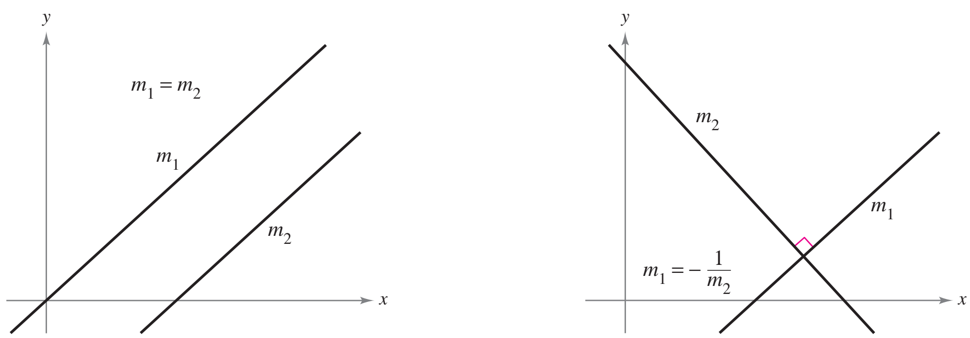
donde A y B no son *ambos* cero. Por ejemplo, la recta vertical dada por $x = a$ puede representarse por la ecuación general $x - a = 0$.

Resumen de ecuaciones de las rectas

1. Forma general: $Ax + By + C = 0, \quad (A, B \neq 0)$
2. Recta vertical: $x = a$
3. Recta horizontal: $y = b$
4. Forma punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$
5. Forma pendiente-intersección: $y = mx + b$

Rectas paralelas y perpendiculares

La pendiente de una recta es útil para determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares, como se muestra en la figura P.19. En específico, dos rectas no verticales con la misma pendiente son paralelas, y dos rectas no verticales cuyas pendientes son recíprocas negativas son perpendiculares.



Rectas paralelas Rectas perpendiculares
Figura P.19

AYUDA DE ESTUDIO En matemáticas, la expresión "si y sólo si" es una manera de establecer dos implicaciones en una misma afirmación. Por ejemplo, la primera afirmación de la derecha equivale a las dos implicaciones siguientes:

a) Si dos rectas no verticales distintas son paralelas, entonces sus pendientes son iguales.
b) Si dos rectas no verticales distintas tienen pendientes iguales, entonces son paralelas.

RECTAS PARALELAS Y RECTAS PERPENDICULARES

1. Dos rectas no verticales distintas son **paralelas** si y sólo si sus pendientes son iguales, es decir, si y sólo si $m_1 = m_2$.
2. Dos rectas no verticales son **perpendiculares** si y sólo si sus pendientes son recíprocas negativas, es decir, si y sólo si

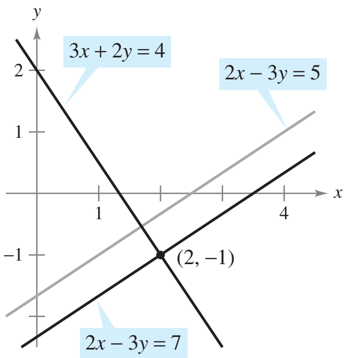
$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

EJEMPLO 4 Rectas paralelas y rectas perpendiculares

Hallar la forma general de las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2, -1)$ y son

a) paralela a la recta $2x - 3y = 5$ ***b)*** perpendicular a la recta $2x - 3y = 5$.

(Ver la figura P.20.)



Rectas paralela y perpendicular a $2x - 3y = 5$
Figura P.20

Solución Al escribir la ecuación lineal $2x - 3y = 5$ en forma punto-pendiente, $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$, se ve que la recta dada tiene pendiente $m = \frac{2}{3}$.

a) La recta que pasa por $(2, -1)$ y es paralela a la recta dada tiene también pendiente de $\frac{2}{3}$.

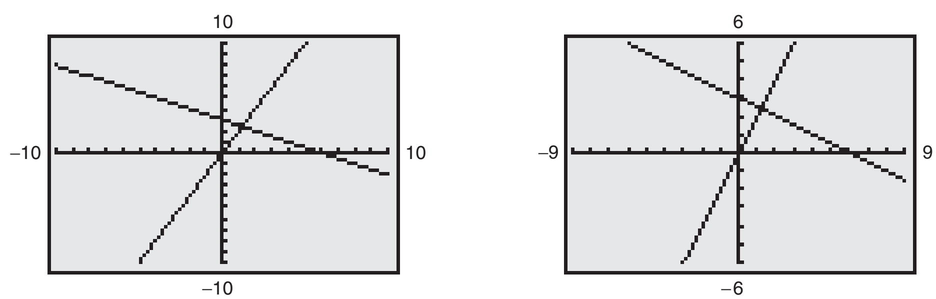
$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{Forma punto-pendiente.}$$
$$y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 2) \quad \text{Sustituir.}$$
$$3(y + 1) = 2(x - 2) \quad \text{Simplificar.}$$
$$2x - 3y - 7 = 0 \quad \text{Forma general.}$$

Observar la similitud con la ecuación original.

b) Calculando el recíproco negativo de la pendiente de la recta dada, se determina que la pendiente de toda recta perpendicular a la inicial es $-\frac{3}{2}$. Por tanto, la recta que pasa por el punto $(2, -1)$ y es perpendicular a la recta dada tiene la siguiente ecuación.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{Forma punto-pendiente.}$$
$$y - (-1) = -\frac{3}{2}(x - 2) \quad \text{Sustituir.}$$
$$2(y + 1) = -3(x - 2) \quad \text{Simplificar.}$$
$$3x + 2y - 4 = 0 \quad \text{Forma general.}$$

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA La pendiente de una recta aparece distorsionada si se utilizan diferentes escalas en los ejes x y y. Por ejemplo, las dos pantallas de calculadora gráfica de las figuras P.21*a* y P.21*b* muestran las rectas dadas por $y = 2x$ y $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Puesto que las pendientes de estas rectas son una el negativo del inverso de la otra, las rectas son perpendiculares. Sin embargo, en la figura P.21*a* no lo parecen, debido a que la escala del eje x no es la misma que la escala del eje y. En la figura P.21*b* aparecen perpendiculares debido a que la escala utilizada del eje x es igual a la empleada para el eje y. Este tipo de ventanas se denominan *ventanas cuadradas*.

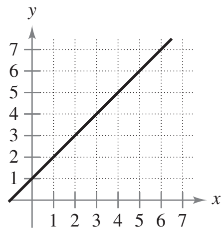


a) La escala del eje x no es la misma que la del eje y
b) La escala del eje x es la misma que la del eje y
Figura P.21

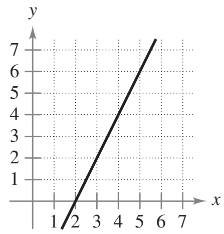
P.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, calcular la pendiente de la recta a partir de su gráfica.

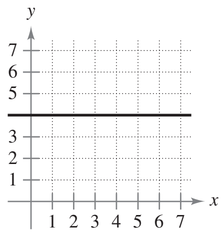
1.



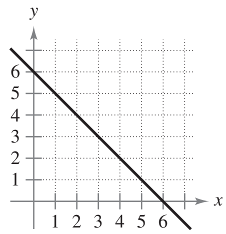
2.



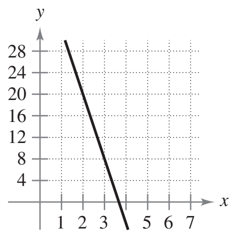
3.



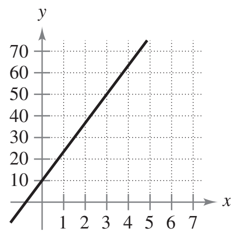
4.



5.



6.



En los ejercicios 7 y 8, trazar las rectas que pasan por el punto dado con la pendiente indicada. Dibujar en un mismo sistema de coordenadas.

	Punto	*Pendientes*			
7.	(3, 4)	*a*) 1	*b*) -2	*c*) $-\frac{3}{2}$	*d*) indefinida
8.	$(-2, 5)$	*a*) 3	*b*) -3	*c*) $\frac{1}{3}$	*d*) 0

En los ejercicios 9 a 14, dibujar el par de puntos y calcular la pendiente de la recta que pasa por ellos.

9. $(3, -4), (5, 2)$

10. $(1, 1), (-2, 7)$

11. $(4, 6), (4, 1)$

12. $(3, -5), (5, -5)$

13. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{6}\right)$

14. $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

En los ejercicios 15 a 18, utilizar el punto de la recta y su pendiente para determinar otros tres puntos por los que pase la recta (hay más de una respuesta correcta).

	Punto	*Pendiente*		*Punto*	*Pendiente*
15.	(6, 2)	$m = 0$	**16.**	$(-4, 3)$	m indefinida
17.	(1, 7)	$m = -3$	**18.**	$(-2, -2)$	$m = 2$

19. ***Diseño de una cinta*** Se está construyendo una cinta transportadora de manera que se eleve 1 metro por cada 3 metros de avance horizontal.

a) Calcular la pendiente de la cinta.

b) Suponer que la cinta corre entre dos pisos de una fábrica. Calcular la longitud de la cinta si la distancia vertical entre ambos pisos es de 10 pies.

20. ***Ritmo de cambio*** Cada uno de los siguientes datos es la pendiente de una recta que representa los ingresos diarios *y* en términos del tiempo *x* en días. Utilizar la pendiente para interpretar la variación en los ingresos correspondiente a un incremento de un día.

a) $m = 800$ *b*) $m = 250$ *c*) $m = 0$

21. ***Modelo matemático*** La siguiente tabla muestra las poblaciones *y* (en millones) de Estados Unidos durante 2000-2005. La variable *t* representa el tiempo en años, $t = 0$ corresponde a 2000. (*Fuente*: *U.S. Bureau of the Census*.)

t	0	1	2	3	4	5
y	282.4	285.3	288.2	291.1	293.9	296.6

a) Dibujar los datos a mano y unir los puntos adyacentes con un segmento de línea.

b) Utilizar la pendiente de cada segmento de línea con objeto de determinar en qué año se incrementó la población con menor rapidez.

22. ***Modelo matemático*** La siguiente tabla muestra el ritmo o velocidad *r* (en millas por hora) al que se está moviendo un vehículo transcurridos *t* segundos.

t	5	10	15	20	25	30
r	57	74	85	84	61	43

a) Dibujar la gráfica a mano y unir los puntos adyacentes con un segmento de línea.

b) Utilizar la pendiente de cada segmento de línea con objeto de determinar en qué intervalo cambió más rápidamente el ritmo o velocidad del vehículo. ¿Cómo cambió el ritmo o velocidad?

En los ejercicios 23 a 28, calcular la pendiente y la intersección en *y* (si es posible) de la recta.

23. $y = 4x - 3$

24. $-x + y = 1$

25. $x + 5y = 20$

26. $6x - 5y = 15$

27. $x = 4$

28. $y = -1$

En los ejercicios 29 a 34, encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto y tiene la pendiente indicada. Trazar la recta.

	Punto	*Pendiente*		*Punto*	*Pendiente*
29.	(0, 3)	$m = \frac{3}{4}$	**30.**	$(-5, -2)$	m indefinida
31.	(0, 0)	$m = \frac{2}{3}$	**32.**	(0, 4)	$m = 0$
33.	$(3, -2)$	$m = 3$	**34.**	$(-2, 4)$	$m = -\frac{3}{5}$

En los ejercicios 35 a 44, encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos y trazar la recta.

35. $(0, 0), (4, 8)$
36. $(0, 0), (-1, 5)$
37. $(2, 1), (0, -3)$
38. $(-2, -2), (1, 7)$
39. $(2, 8), (5, 0)$
40. $(-3, 6), (1, 2)$
41. $(6, 3), (6, 8)$
42. $(1, -2), (3, -2)$
43. $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right), \left(0, \frac{3}{4}\right)$
44. $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

45. Determinar la ecuación de la recta vertical con intersección en x en 3.

46. Demostrar que la recta con intersecciones con los ejes en $(a, 0)$ y $(0, b)$ tiene la siguiente ecuación.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a \neq 0, b \neq 0$$

En los ejercicios 47 a 50, utilizar el resultado del ejercicio 46 para escribir la ecuación de la recta.

47. intersección en x: $(2, 0)$
intersección en y: $(0, 3)$

48. intersección en x: $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$
intersección en y: $(0, -2)$

49. Punto de la recta: $(1, 2)$
intersección en x: $(a, 0)$
intersección en y: $(0, a)$
$(a \neq 0)$

50. Punto de la recta: $(-3, 4)$
intersección en x: $(a, 0)$
intersección en y: $(0, a)$
$(a \neq 0)$

En los ejercicios 51 a 58, trazar la gráfica de la ecuación.

51. $y = -3$
52. $x = 4$
53. $y = -2x + 1$
54. $y = \frac{1}{3}x - 1$
55. $y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$
56. $y - 1 = 3(x + 4)$
57. $2x - y - 3 = 0$
58. $x + 2y + 6 = 0$

59. ***Configuración cuadrada*** **Utilizar una herramienta de graficación para dibujar ambas rectas en cada ventana de visor. Comparar las gráficas. ¿Las rectas aparecen perpendiculares? ¿Lo son? Explicar la respuesta.**

a)
Xmín = −5
Xmáx = 5
Xscl = 1
Ymín = −5
Ymáx = 5
Yscl = 1

b)
Xmín = −6
Xmáx = 6
Xscl = 1
Ymín = −4
Ymáx = 4
Yscl = 1

Para discusión

60. Una recta está representada por la ecuación $ax + by = 4$.

a) ¿Cuándo la recta es paralela al eje x?
b) ¿Cuándo la recta es paralela al eje y?
c) Dar valores para a y b de manera que la recta tenga una pendiente de $\frac{5}{8}$.
d) Dar valores para a y b de manera que la recta sea perpendicular a la recta $y = \frac{2}{5}x + 3$.
e) Dar valores para a y b de manera que la recta coincida con la gráfica de $5x + 6y = 8$.

En los ejercicios 61 a 66, escribir la ecuación de la recta que pase por el punto y que sea: *a*) paralela a la recta dada, y *b*) perpendicular a la recta dada.

	Punto	*Recta*		*Punto*	*Recta*
61.	$(-7, -2)$	$x = 1$	**62.**	$(-1, 0)$	$y = -3$
63.	$(2, 1)$	$4x - 2y = 3$	**64.**	$(-3, 2)$	$x + y = 7$
65.	$\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$	$5x - 3y = 0$	**66.**	$(4, -5)$	$3x + 4y = 7$

Ritmo o velocidad de cambio **En los ejercicios 67 a 70, se da el valor de un producto, en dólares, durante 2004 y el ritmo o velocidad al que se espera que varíe su valor durante los próximos 5 años. Utilizar esta información para escribir una ecuación lineal que proporcione el valor en dólares V del producto en términos del año t. (Sea $t = 0$ representativo del año 2000.)**

	Valor en 2008	*Ritmo o velocidad*
67.	\$1 850	\$250 aumento anual
68.	\$156	\$4.50 aumento anual
69.	\$17 200	\$1 600 reducción anual
70.	\$245 000	\$5 600 reducción anual

En los ejercicios 71 y 72, utilizar una herramienta de graficación para representar las parábolas y encontrar sus puntos de intersección. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección y dibujar su gráfica en la misma ventana de representación.

71. $y = x^2$
$y = 4x - x^2$

72. $y = x^2 - 4x + 3$
$y = -x^2 + 2x + 3$

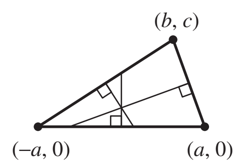
En los ejercicios 73 y 74, determinar si los puntos son colineales. (Se dice que tres puntos son *colineales* si pertenecen a una misma recta.)

73. $(-2, 1), (-1, 0), (2, -2)$
74. $(0, 4), (7, -6), (-5, 11)$

Desarrollo de conceptos

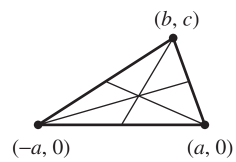
En los ejercicios 75 a 77, encontrar las coordenadas del punto de intersección de los segmentos dados. Explicar el razonamiento.

75.



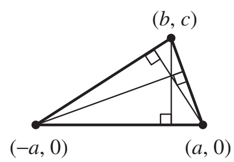
Bisectrices perpendiculares

76.



Medianas

77.



Alturas

78. Demostrar que los puntos de intersección en los ejercicios 75, 76 y 77 son colineales.

79. ***Conversión de temperaturas*** Encontrar la ecuación lineal que exprese la relación que existe entre la temperatura en grados

Celsius C y la temperatura en grados Fahrenheit F. Utilizar el hecho de que el agua se congela a 0° C (32° F) y hierve a 100° C (212° F) para convertir 72° F a grados Celsius.

80. ***Reembolso de gastos*** Una compañía reembolsa a sus representantes de ventas $175 diarios por alojamiento y comidas más 48¢ por milla recorrida. Escribir una ecuación lineal que exprese el costo diario C para la compañía en términos de x, el número de millas recorridas. ¿Cuánto le costará a la empresa que uno de sus representantes de ventas recorra 137 millas?

81. ***Elección profesional*** Un empleado tiene dos opciones a puestos en una gran corporación. En un puesto le pagan $14.50 por hora *más* un bono de $0.75 por unidad producida. En el otro, $11.20 por hora *más* un bono de $1.30.

a) Representar gráficamente las ecuaciones lineales correspondientes a los salarios por hora W en términos de x, el número de unidades producidas por hora, para cada una de las opciones.

b) Representar con una heramienta de graficación las ecuaciones lineales y encontrar el punto de intersección.

c) Interpretar el significado del punto de intersección de las gráficas del apartado *b*). ¿Cómo usaría esta información para seleccionar la opción correcta si su objetivo fuera obtener el mayor sueldo por hora?

82. ***Depreciación lineal*** Un pequeño negocio adquiere un equipo de $875. Transcurridos 5 años el equipo será obsoleto, carente de valor.

a) Escribir una ecuación lineal que proporcione el valor y del equipo en términos del tiempo x, $0 \leq x \leq 5$.

b) Encontrar el valor del equipo cuando $x = 2$.

c) Calcular el momento en que el valor del equipo es $200 (con una precisión de dos cifras decimales).

83. ***Alquiler de apartamentos*** Una agencia inmobiliaria maneja un complejo de 50 apartamentos. Cuando el alquiler es de $780 mensuales, los 50 apartamentos están ocupados. Sin embargo, cuando el alquiler es de $825, el número promedio de apartamentos ocupados desciende a 47. Suponer que la relación entre el alquiler mensual p y la demanda x es lineal. (*Nota*: Aquí se usa el término *demanda* para referirse al número de apartamentos ocupados.)

a) Escribir una ecuación lineal que proporcione la demanda x en términos del alquiler p.

b) *Extrapolación lineal* Utilizar una herramienta de graficación para representar la ecuación de la demanda y emplear la función *trace* para pronosticar el número de apartamentos ocupados si el alquiler aumenta a $855.

c) *Interpolación lineal* Pronosticar el número de apartamentos ocupados si el alquiler baja a $795. Verificar el resultado gráficamente.

84. ***Modelo matemático*** Un profesor pone cuestionarios de 20 puntos y exámenes de 100 puntos a lo largo de un curso de matemáticas. Las calificaciones promedio de seis estudiantes, dadas como pares ordenados (x, y), donde x es la calificación media en los cuestionarios y y la calificación media en los exámenes, son (18, 87), (10, 55), (19, 96), (16, 79), (13, 76) y (15, 82).

a) Empleando una herramienta de graficación con programa para el cálculo de regresiones, encontrar la recta de regresión, por mínimos cuadrados, para los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los puntos y graficar la recta de regresión en una misma ventana.

c) Utilizar la recta de regresión para pronosticar la calificación promedio en los exámenes de un estudiante cuya calificación promedio en los cuestionarios es 17.

d) Interpretar el significado de la pendiente de la recta de regresión.

e) Si el profesor añade 4 puntos a la calificación promedio en los exámenes de cada alumno, describir el cambio de posición de los puntos trazados y la modificación de la ecuación de la recta.

85. ***Recta tangente*** Encontrar la ecuación de la recta tangente al círculo $x^2 + y^2 = 169$ en el punto (5, 12).

86. ***Recta tangente*** Encontrar la ecuación de la recta tangente al círculo $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ en el punto $(4, -3)$.

Distancia **En los ejercicios 87 a 92, calcular la distancia que existe entre el punto y la recta o entre las rectas, utilizando la fórmula para la distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $Ax + By + C = 0$.**

$$\textbf{Distancia} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

87. Punto: (0, 0)
Recta: $4x + 3y = 10$

88. Punto: (2, 3)
Recta: $4x + 3y = 10$

89. Punto: $(-2, 1)$
Recta: $x - y - 2 = 0$

90. Punto: (6, 2)
Recta: $x = -1$

91. Recta: $x + y = 1$
Recta: $x + y = 5$

92. Recta: $3x - 4y = 1$
Recta: $3x - 4y = 10$

93. Demostrar que la distancia que existe entre el punto (x_1, y_1) y la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$\text{Distancia} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

94. Escribir la distancia d entre el punto (3, 1) y la recta $y = mx + 4$ en términos de m. Emplear una herramienta de graficación para representar la ecuación. ¿Cuándo es 0 la distancia? Explicar el resultado de manera geométrica.

95. Demostrar que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente. (Un rombo es un cuadrilátero con lados de igual longitud.)

96. Demostrar que la figura que se obtiene uniendo los puntos medios de los lados consecutivos de cualquier cuadrilátero es un paralelogramo.

97. Demostrar que si los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la misma recta que (x_1^*, y_1^*) y (x_2^*, y_2^*), entonces:

$$\frac{y_2^* - y_1^*}{x_2^* - x_1^*} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Suponer que $x_1 \neq x_2$ y $x_1^* \neq x_2^*$.

98. Demostrar que si las pendientes de dos rectas son recíprocas negativas de la otra, entonces las rectas son perpendiculares.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 99 y 100, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si no lo es, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que muestre su falsedad.**

99. Las rectas de ecuaciones $ax + by = c_1$ y $bx - ay = c_2$ son perpendiculares. Suponer que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

100. Dos rectas con pendientes positivas pueden ser perpendiculares entre sí.

P.3 Funciones y sus gráficas

- **Usar la notación de función para representar y evaluar funciones.**
- **Encontrar el dominio y recorrido o rango de una función.**
- **Trazar la gráfica de una función.**
- **Identificar los diferentes tipos de transformaciones de las funciones.**
- **Clasificar funciones y reconocer combinaciones de ellas.**

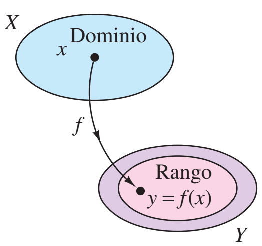
Funciones y notación de funciones

Una **relación** entre dos conjuntos X y Y es un conjunto de pares ordenados, cada uno de la forma (x, y), donde x es un elemento de X y y un elemento de Y. Una **función** de X a Y es una relación entre X y Y con la propiedad de que si dos pares ordenados tienen el mismo valor de x, entonces también tienen el mismo valor de y. La variable x se denomina **variable independiente**, mientras que la variable y se denomina **variable dependiente**.

Muchas situaciones de la vida real pueden describirse mediante funciones. Por ejemplo, el área A de un círculo es una función de su radio r.

$$A = \pi r^2$$ *A es una función de r.*

En este caso, r es la variable independiente y A, la variable dependiente.



Una función real f de una variable real
Figura P.22

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE REAL

Sean X y Y conjuntos de números reales. Una **función real f de una variable real x** de X a Y es una regla de correspondencia que asigna a cada número x de X exactamente un número y de Y.

El **dominio** de f es el conjunto X. El número y es la **imagen** de x por f y se denota mediante $f(x)$, a lo cual se le llama el **valor de f en x**. El **recorrido o rango** de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números de X (ver la figura P.22).

Las funciones pueden especificarse de muchas formas. No obstante, este texto se concentra fundamentalmente en funciones dadas por ecuaciones que contienen variables dependientes e independientes. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 2y = 1$$ *Ecuación en forma implícita.*

define y, la variable dependiente, como función de x, la variable independiente. Para **evaluar** esta función (esto es, para encontrar el valor de y correspondiente a un valor de x dado) resulta conveniente despejar y en el lado izquierdo de la ecuación.

$$y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$$ *Ecuación en forma explícita.*

Utilizando f como nombre de la función, esta ecuación puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2).$$ *Notación de funciones.*

La ecuación original $x^2 + 2y = 1$ define **implícitamente** a y como función de x. Cuando se despeja y, se obtiene la ecuación en forma **explícita**.

La notación de funciones tiene la ventaja de que permite identificar claramente la variable dependiente como $f(x)$, informando al mismo tiempo que la variable independiente es x y que la función se denota por "f". El símbolo $f(x)$ se lee "f de x". La notación de funciones permite ahorrar palabras. En lugar de preguntar "¿cuál es el valor de y que corresponde a $x = 3$?" se puede preguntar "¿cuánto vale $f(3)$?"

NOTACIÓN DE FUNCIONES

Gottfried Wilhelm Leibniz fue el primero que utilizó la palabra *función*, en 1694, para denotar cualquier cantidad relacionada con una curva, como las coordenadas de uno de sus puntos o su pendiente. Cuarenta años más tarde, Leonhard Euler empleó la palabra "función" para describir cualquier expresión construida con una variable y varias constantes. Fue él quien introdujo la notación $y = f(x)$.

En una ecuación que define a una función, el papel de la variable x es simplemente el de un hueco a llenar. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

puede describirse como

$$f(\quad) = 2(\quad)^2 - 4(\quad) + 1$$

donde se usan paréntesis en lugar de x. Para evaluar $f(-2)$, basta con colocar -2 dentro de cada paréntesis.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^2 - 4(-2) + 1 && \text{Sustituir } x \text{ por } -2. \\ &= 2(4) + 8 + 1 && \text{Simplificar.} \\ &= 17 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

NOTA Aunque es frecuente usar f como un símbolo adecuado para denotar una función y x para la variable independiente, se pueden utilizar otros símbolos. Por ejemplo, todas las ecuaciones siguientes definen la misma función.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 7 && \text{El nombre de la función es } f\text{, el de la variable independiente es } x. \\ f(t) &= t^2 - 4t + 7 && \text{El nombre de la función es } f\text{, el de la variable independiente es } t. \\ g(s) &= s^2 - 4s + 7 && \text{El nombre de la función es } g\text{, el de la variable independiente es } s. \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Evaluación de una función

Para la función f definida por $f(x) = x^2 + 7$, calcular:

a) $f(3a)$ ***b)*** $f(b - 1)$ ***c)*** $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0$

Solución

a)
$$\begin{aligned} f(3a) &= (3a)^2 + 7 && \text{Sustituir } x \text{ por } 3a. \\ &= 9a^2 + 7 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f(b-1) &= (b-1)^2 + 7 && \text{Sustituir } x \text{ por } b - 1. \\ &= b^2 - 2b + 1 + 7 && \text{Desarrollar el binomio.} \\ &= b^2 - 2b + 8 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{[(x+\Delta x)^2 + 7] - (x^2 + 7)}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 7 - x^2 - 7}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\ &= 2x + \Delta x, \qquad \Delta x \neq 0 \end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO En cálculo, es importante especificar con claridad el dominio de una función o expresión. Por ejemplo, en el ejemplo 1c, las expresiones

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{y} \quad 2x + \Delta x, \quad \Delta x \neq 0$$

son equivalentes, ya que $\Delta x = 0$ se excluye del dominio de la función o expresión. Si no se estableciera esa restricción del dominio, las dos expresiones no serían equivalentes.

NOTA La expresión del ejemplo 1c se llama *cociente incremental* o de *diferencias* y tiene un significado especial en el cálculo. Se verá más acerca de esto en el capítulo 2.

Dominio y recorrido o rango de una función

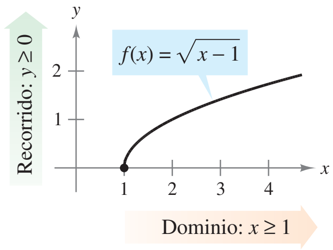
El dominio de una función puede describirse de manera explícita, o bien de manera *implícita* mediante la ecuación empleada para definir la función. El dominio implícito es el conjunto de todos los números reales para los que está definida la ecuación, mientras que un dominio definido explícitamente es el que se da junto con la función. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}, \quad 4 \le x \le 5$$

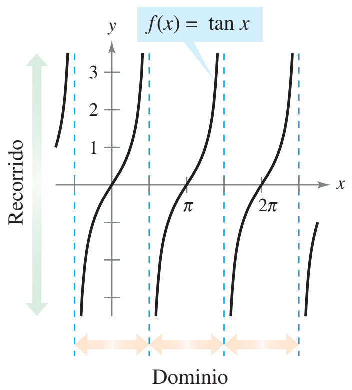
tiene un dominio definido de manera explícita dado por $\{x: 4 \le x \le 5\}$. Por otra parte, la función dada por

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

tiene un dominio implícito: es el conjunto $\{x: x \neq \pm 2\}$.



a) El dominio de f es $[1, \infty)$ y el recorrido o rango $[0, \infty)$



b) El dominio de f lo constituyen todos los valores reales de x tales que $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ y el recorrido o rango es $(-\infty, \infty)$

Figura P.23

EJEMPLO 2 Cálculo del dominio y del recorrido de una función

a) El dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

es el conjunto de los valores de x tales que $x - 1 \ge 0$; es decir, el intervalo $[1, \infty)$. Para encontrar el recorrido o rango, se observa que $f(x) = \sqrt{x-1}$ nunca es negativo. Por ende, el recorrido o rango es el intervalo $[0, \infty)$, como se señala en la figura P.23*a*.

b) Como se muestra en la figura P.23*b*, el dominio de la función tangente

$$f(x) = \tan x$$

es el conjunto de los valores de x tales que

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ con } n \text{ entero.} \qquad \text{Dominio de la función tangente.}$$

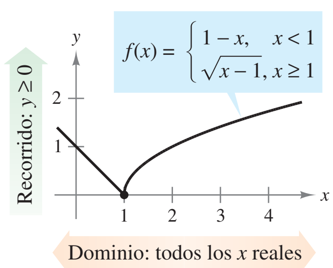
El recorrido o rango de esta función es el conjunto de todos los números reales. Para repasar las características de ésta y otras funciones trigonométricas, ver el apéndice C.

EJEMPLO 3 Una función definida por más de una ecuación

Determinar el dominio y el recorrido o rango de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Solución Puesto que f está definida para $x < 1$ y $x \ge 1$, su dominio es todo el conjunto de los números reales. En la parte del dominio donde $x \ge 1$, la función se comporta como en el ejemplo 2*a*. Para $x < 1$, todos los valores de $1 - x$ son positivos. Por consiguiente, el recorrido de la función es el intervalo $[0, \infty)$. (Ver la figura P.24.)

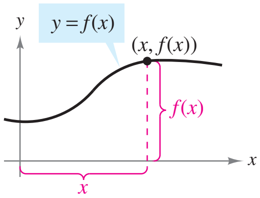


El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y el recorrido es $[0, \infty)$

Figura P.24

Una función de X a Y es **inyectiva** (o uno a uno) si a cada valor de y perteneciente al recorrido o rango le corresponde exactamente un valor x del dominio. Por ejemplo, la función dada en el ejemplo 2*a* es inyectiva, mientras que las de los ejemplos 2*b* y 3 no lo son. Se dice que una función de X a Y es **suprayectiva** (o sobreyectiva) si su recorrido es todo Y.

Gráfica de una función

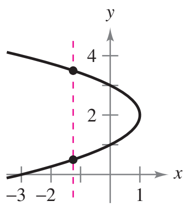


Gráfica de una función
Figura P.25

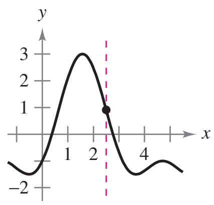
La gráfica de una función $y = f(x)$ está formada por todos los puntos $(x, f(x))$, donde x pertenece al dominio de f. En la figura P.25, puede observarse que

$$x = \text{distancia dirigida desde el eje } y$$
$$f(x) = \text{distancia dirigida desde el eje } x.$$

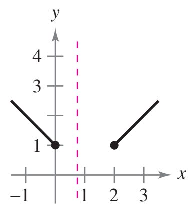
Una recta vertical puede cortar la gráfica de una función de x como máximo *una vez*. Esta observación proporciona un criterio visual adecuado, llamado **criterio de la recta vertical**, para funciones de x. Es decir, una gráfica en el plano de coordenadas es la gráfica de una función x si y sólo si ninguna recta vertical hace intersección con ella en más de un punto. Por ejemplo, en la figura P.26*a* puede verse que la gráfica no define a y como función de x, ya que hay una recta vertical que corta a la gráfica dos veces, mientras que en las figuras P.26*b* y *c* las gráficas sí definen a y como función de x.



***a*)** No es una función de x



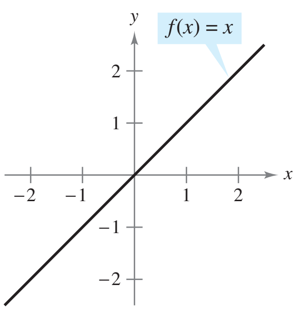
***b*)** Una función de x



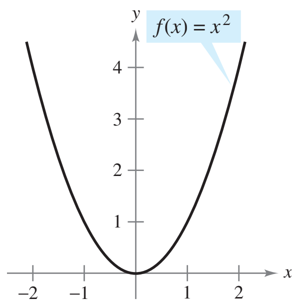
***c*)** Una función de x

Figura P.26

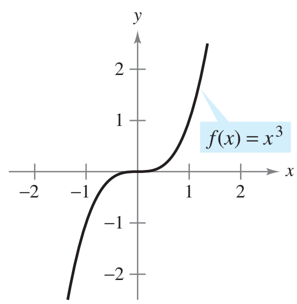
En la figura P.27 se muestran las gráficas de ocho funciones básicas, las cuales hay que conocer bien. (Las gráficas de las otras cuatro funciones trigonométricas básicas se encuentran en el apéndice C.)



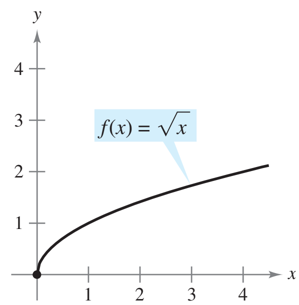
Función identidad



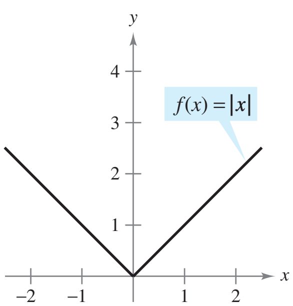
Función cuadrática



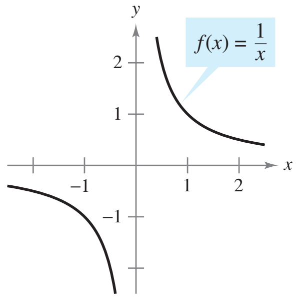
Función cúbica



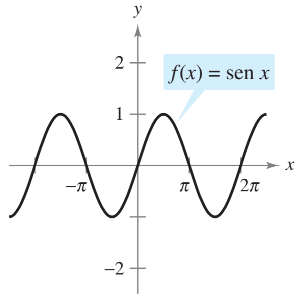
Función raíz cuadrada



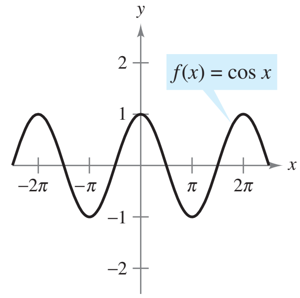
Función valor absoluto



Función racional



Función seno



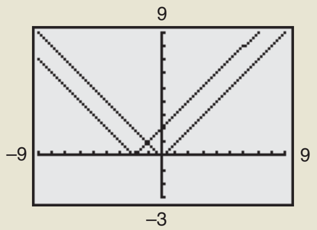
Función coseno

Gráficas de ocho funciones básicas
Figura P.27

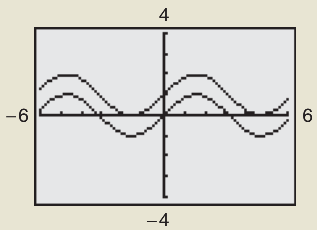
EXPLORACIÓN

Escritura de ecuaciones de funciones Cada una de las pantallas de la herramienta de graficación mostradas abajo exhibe la gráfica de una de las ocho funciones básicas de la página anterior. Cada pantalla muestra también una transformación de la gráfica. Describir esta transformación y usar su descripción para escribir la ecuación de la transformación.

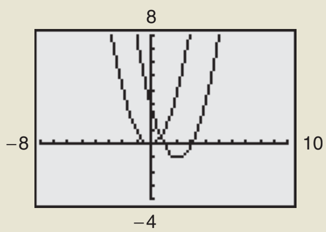
a)



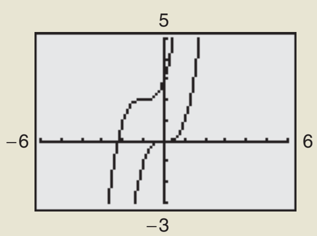
b)



c)

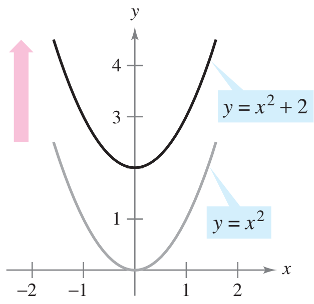


d)

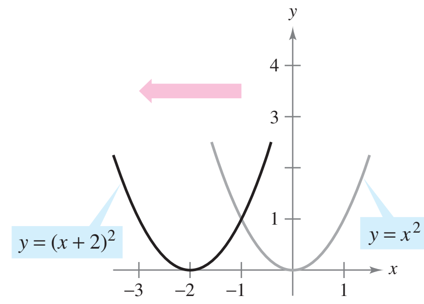


Transformaciones de funciones

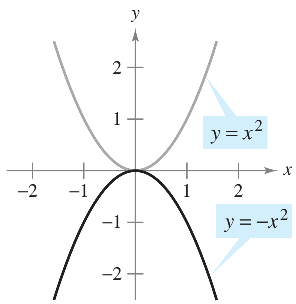
Algunas familias de gráficas tienen la misma forma básica. Por ejemplo, vamos a comparar la gráfica de $y = x^2$ con las gráficas de las otras cuatro funciones cuadráticas de la figura P.28.



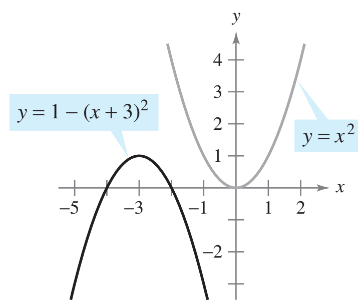
a) Traslación vertical (hacia arriba)



b) Traslación horizontal (a la izquierda)



c) Reflexión



d) Traslación a la izquierda, reflexión y traslación hacia arriba

Figura P.28

Cada una de las gráficas de la figura P.28 es una **transformación** de la gráfica de $y = x^2$. Los tres tipos básicos de transformaciones ilustrados por estas gráficas son las traslaciones verticales, las traslaciones horizontales y las reflexiones. La notación de funciones es adecuada para describir transformaciones de gráficas en el plano. Por ejemplo, si se considera que $f(x) = x^2$ es la función original en la figura P.28, las transformaciones mostradas pueden representarse por medio de las siguientes ecuaciones.

$y = f(x) + 2$	Traslación vertical de 2 unidades hacia arriba.
$y = f(x + 2)$	Traslación horizontal de 2 unidades a la izquierda.
$y = -f(x)$	Reflexión respecto al eje x.
$y = -f(x + 3) + 1$	Traslación de 3 unidades a la izquierda, reflexión respecto al eje x y traslación de 1 unidad hacia arriba.

TIPOS BÁSICOS DE TRANSFORMACIONES ($c > 0$)

Gráfica original:	$y = f(x)$
Traslación horizontal de c unidades a la **derecha**:	$y = f(x - c)$
Traslación horizontal de c unidades a la **izquierda**:	$y = f(x + c)$
Traslación vertical de c unidades **hacia abajo**:	$y = f(x) - c$
Traslación vertical de c unidades **hacia arriba**:	$y = f(x) + c$
Reflexión (respecto al eje x):	$y = -f(x)$
Reflexión (respecto al eje y):	$y = f(-x)$
Reflexión (respecto al origen):	$y = -f(-x)$

Bettmann/Corbis

LEONHARD EULER (1707-1783)
Además de sus contribuciones esenciales a casi todas las ramas de las matemáticas, Euler fue uno de los primeros en aplicar el cálculo a problemas reales de la física. Sus numerosas publicaciones incluyen temas como construcción de barcos, acústica, óptica, astronomía, mecánica y magnetismo.

Clasificaciones y combinaciones de funciones

La noción moderna de función es fruto de los esfuerzos de muchos matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Mención especial merece Leonhard Euler, a quien debemos la notación $y = f(x)$. Hacia finales del siglo XVIII, los matemáticos y científicos habían llegado a la conclusión de que un gran número de fenómenos de la vida real podían representarse mediante modelos matemáticos, construidos a partir de una colección de funciones denominadas **funciones elementales**. Estas funciones se dividen en tres categorías.

1. Funciones algebraicas (polinómicas, radicales, racionales).
2. Funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc.).
3. Funciones exponenciales y logarítmicas.

En el apéndice C se encuentra un repaso de las funciones trigonométricas. El resto de las funciones no algebraicas, como las funciones trigonométricas inversas y las funciones exponenciales y logarítmicas, se presentan en el capítulo 5.

El tipo más común de función algebraica es una **función polinomial**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo. Las constantes a_i son **coeficientes** siendo a_n el **coeficiente dominante** y a_0 el **término constante** de la función polinomial. Si $a_n \neq 0$, entonces n es el **grado** de la función polinomial. La función polinomial cero $f(x) = 0$ no se considera grado. Aunque se suelen utilizar subíndices para los coeficientes de funciones polinomiales en general, para las de grados más bajos se utilizan con frecuencia las siguientes formas más sencillas. (Notar que $a \neq 0$.)

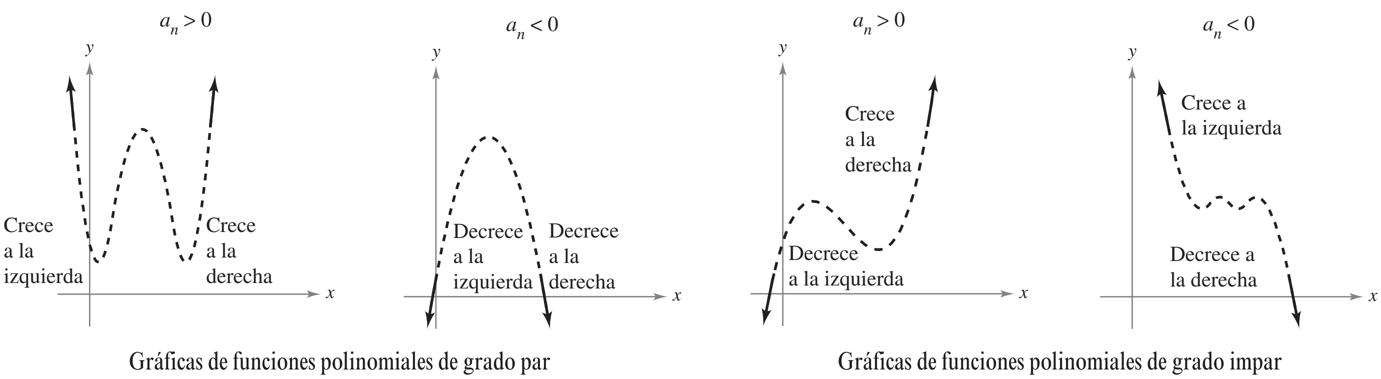
Grado cero:	$f(x) = a$	Función constante.
Grado uno:	$f(x) = ax + b$	Función lineal.
Grado dos:	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Función cuadrática.
Grado tres:	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Función cúbica.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Puede encontrarse más información sobre la historia del concepto de función en el artículo "Evolution of the Function Concept: A Brief Survey", de Israel Kleiner, en *The College Mathematics Journal*.

Aunque la gráfica de una función polinomial no constante puede presentar varias inflexiones, en algún momento ascenderá o descenderá sin límite al moverse x hacia la izquierda o hacia la derecha. Se puede determinar qué ocurre en la gráfica de

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

eventualmente crece o decrece a partir del grado de la función (par o impar) y del coeficiente dominante a_n, como se indica en la figura P.29. Observar que las regiones punteadas muestran que la **prueba o el criterio del coeficiente dominante** *sólo* determina el comportamiento a la derecha y a la izquierda de la gráfica.



Prueba del coeficiente dominante para funciones polinomiales
Figura P.29

Del mismo modo que un número racional puede escribirse como el cociente de dos enteros, una **función racional** puede expresarse como el cociente de dos polinomios. De manera específica, una función f es racional si tiene la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$$

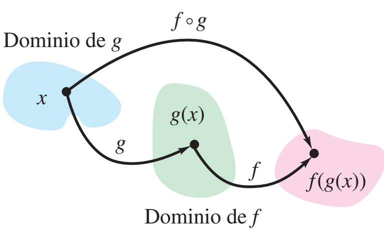
donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomiales.

Las funciones polinomiales y las racionales son ejemplos de **funciones algebraicas**. Se llama función algebraica de x a aquella que puede expresarse mediante un número finito de sumas, diferencias, productos, cocientes y raíces que contengan x^n. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x+1}$ es algebraica. Las funciones no algebraicas se denominan **trascendentes**. Por ejemplo, las funciones trigonométricas son trascendentes.

Es posible combinar dos funciones de varias formas para crear nuevas funciones. Por ejemplo, dadas $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2 + 1$, se pueden construir las siguientes funciones.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (2x - 3) + (x^2 + 1) \qquad \text{Suma.}$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (2x - 3) - (x^2 + 1) \qquad \text{Diferencia.}$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (2x - 3)(x^2 + 1) \qquad \text{Producto.}$$
$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x - 3}{x^2 + 1} \qquad \text{Cociente.}$$

Aún hay otra manera de combinar dos funciones, llamada **composición**. La función resultante recibe el nombre de **función compuesta**.



El dominio de la función compuesta $f \circ g$
Figura P.30

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN COMPUESTA

Sean f y g dos funciones. La función dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ se llama función **compuesta** de f con g. El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x del dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f (ver la figura P.30).

La función compuesta de f con g puede no ser igual a la función compuesta de g con f.

EJEMPLO 4 Composición de funciones

Dadas $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \cos x$, encontrar cada una de las funciones compuestas:

a) $f \circ g$ ***b)*** $g \circ f$

Solución

a)
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g.\\ &= f(\cos x) && \text{Sustituir } g(x) = \cos x.\\ &= 2(\cos x) - 3 && \text{Definición de } f(x).\\ &= 2\cos x - 3 && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f.\\ &= g(2x - 3) && \text{Sustituir } f(x) = 2x - 3.\\ &= \cos(2x - 3) && \text{Definición de } g(x).\end{aligned}$$

Observar que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

EXPLORACIÓN

Utilice una herramienta de graficación para representar cada función. Determinar si la función es *par*, *impar*, o *ninguna* de las dos.

$f(x) = x^2 - x^4$

$g(x) = 2x^3 + 1$

$h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

$j(x) = 2 - x^6 - x^8$

$k(x) = x^5 - 2x^4 + x - 2$

$p(x) = x^9 + 3x^5 - x^3 + x$

Describir una manera de identificar una función como par o impar mediante un análisis visual de la ecuación.

En la sección P.1 se definió la intersección en x de una gráfica como todo punto $(a, 0)$ en el que la gráfica corta al eje x. Si la gráfica representa una función f, el número a es un **cero** de f. En otras palabras, los *ceros de una función f son las soluciones de la ecuación* $f(x) = 0$. Por ejemplo, la función $f(x) = x - 4$ tiene un cero en $x = 4$ porque $f(4) = 0$.

En la sección P.1 también se estudiaron diferentes tipos de simetrías. En la terminología de funciones, se dice que una función es **par** si su gráfica es simétrica respecto al eje y, y se dice que es **impar** si su gráfica es simétrica con respecto al origen. Los criterios de simetría de la sección P.l conducen a la siguiente prueba para las funciones pares e impares.

PRUEBA PARA LAS FUNCIONES PARES E IMPARES

La función $y = f(x)$ es **par** si $f(-x) = f(x)$.
La función $y = f(x)$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

NOTA Con excepción de la función constante, por ejemplo $f(x) = 0$, la gráfica de una función de x no puede ser simétrica con respecto al eje x, puesto que entonces violaría la prueba de la recta vertical para la gráfica de una función.

EJEMPLO 5 Funciones pares o impares y ceros de funciones

Determinar si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna de ambas. Después, calcular los ceros de la función.

a) $f(x) = x^3 - x$ ***b)*** $g(x) = 1 + \cos x$

Solución

a) La función es impar, porque

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

Los ceros de f se calculan como sigue.

$$x^3 - x = 0 \qquad \text{Hacer } f(x) = 0.$$
$$x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$
$$x = 0, 1, -1 \qquad \text{Ceros de } f.$$

Ver la figura P.3l*a*.

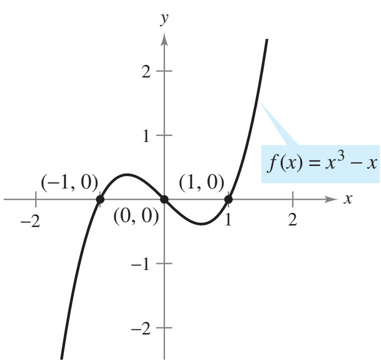
b) La función es par, porque

$$g(-x) = 1 + \cos(-x) = 1 + \cos x = g(x). \qquad \cos(-x) = \cos(x).$$

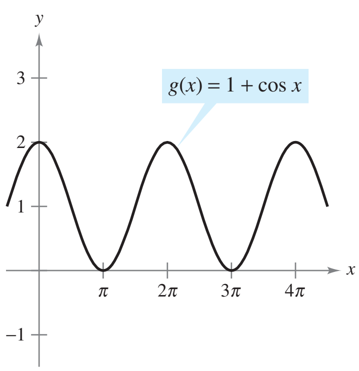
Los ceros de g se calculan como sigue.

$$1 + \cos x = 0 \qquad \text{Hacer } g(x) = 0.$$
$$\cos x = -1 \qquad \text{Restar 1 en ambos miembros.}$$
$$x = (2n + 1)\pi, \text{ con } n \text{ entero} \qquad \text{Ceros de } g.$$

Ver la figura P.31*b*.



a) Función impar



b) Función par
Figura P.31

NOTA Cada una de las funciones del ejemplo 5 es par o impar. Sin embargo, muchas funciones, como $f(x) = x^2 + x + 1$ no son pares ni impares.

P.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, utilizar las gráficas de *f* y *g* para resolver lo siguiente:

a) **Identificar los dominios y los recorridos o rangos de *f* y *g*.**

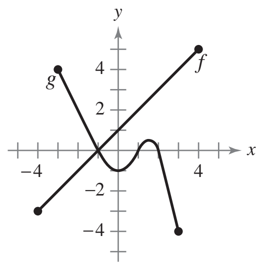
b) **Identificar $f(-2)$ y $g(3)$.**

c) **¿Para qué valor(es) de *x* es $f(x) = g(x)$?**

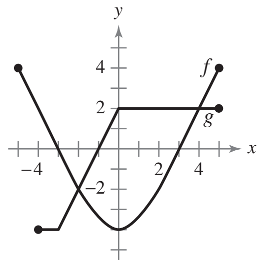
d) **Calcular la(s) solución(es) de $f(x) = 2$.**

e) **Calcular las soluciones de $g(x) = 0$.**

1.



2.



En los ejercicios 3 a 12, evaluar (si es posible) la función en los valores dados de la variable independiente. Simplificar los resultados.

3. $f(x) = 7x - 4$

a) $f(0)$

b) $f(-3)$

c) $f(b)$

d) $f(x - 1)$

4. $f(x) = \sqrt{x + 5}$

a) $f(-4)$

b) $f(11)$

c) $f(-8)$

d) $f(x + \Delta x)$

5. $g(x) = 5 - x^2$

a) $g(0)$

b) $g(\sqrt{5})$

c) $g(-2)$

d) $g(t - 1)$

6. $g(x) = x^2(x - 4)$

a) $g(4)$

b) $g(\frac{3}{2})$

c) $g(c)$

d) $g(t + 4)$

7. $f(x) = \cos 2x$

a) $f(0)$

b) $f(-\pi/4)$

c) $f(\pi/3)$

8. $f(x) = \operatorname{sen} x$

a) $f(\pi)$

b) $f(5\pi/4)$

c) $f(2\pi/3)$

9. $f(x) = x^3$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

10. $f(x) = 3x - 1$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

11. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

12. $f(x) = x^3 - x$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

En los ejercicios 13 a 20, encontrar el dominio y el recorrido o rango de la función.

13. $f(x) = 4x^2$

14. $g(x) = x^2 - 5$

15. $g(x) = \sqrt{6x}$

16. $h(x) = -\sqrt{x + 3}$

17. $f(t) = \sec \dfrac{\pi t}{4}$

18. $h(t) = \cot t$

19. $f(x) = \dfrac{3}{x}$

20. $g(x) = \dfrac{2}{x - 1}$

En los ejercicios 21 a 26, encontrar el dominio de la función.

21. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$

22. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

23. $g(x) = \dfrac{2}{1 - \cos x}$

24. $h(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}}$

25. $f(x) = \dfrac{1}{|x + 3|}$

26. $g(x) = \dfrac{1}{|x^2 - 4|}$

En los ejercicios 27 a 30, evaluar la función como se indica. Determinar su dominio y su recorrido o rango.

27. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

a) $f(-1)$ *b*) $f(0)$ *c*) $f(2)$ *d*) $f(t^2 + 1)$

28. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 2, & x > 1 \end{cases}$

a) $f(-2)$ *b*) $f(0)$ *c*) $f(1)$ *d*) $f(s^2 + 2)$

29. $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 1 \\ -x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

a) $f(-3)$ *b*) $f(1)$ *c*) $f(3)$ *d*) $f(b^2 + 1)$

30. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 4}, & x \leq 5 \\ (x - 5)^2, & x > 5 \end{cases}$

a) $f(-3)$ *b*) $f(0)$ *c*) $f(5)$ *d*) $f(10)$

En los ejercicios 31 a 38, trazar la gráfica de la función y encontrar su dominio y su recorrido o rango. Utilizar una herramienta graficadora para comprobar las gráficas.

31. $f(x) = 4 - x$

32. $g(x) = \dfrac{4}{x}$

33. $h(x) = \sqrt{x - 6}$

34. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 3$

35. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

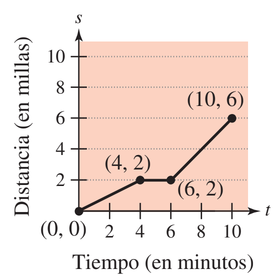
36. $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$

37. $g(t) = 3 \operatorname{sen} \pi t$

38. $h(\theta) = -5 \cos \dfrac{\theta}{2}$

Desarrollo de conceptos

39. En la figura se muestra la gráfica de la distancia que recorre un estudiante en su camino de 10 minutos a la escuela. Dar una descripción verbal de las características del recorrido del estudiante hacia la escuela.

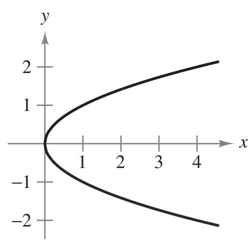


Desarrollo de conceptos (*continuación*)

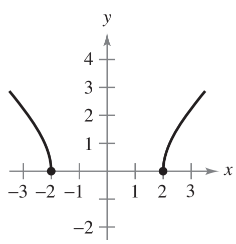
40. Tras unos minutos de recorrido, un estudiante que conduce 27 millas para ir a la universidad recuerda que olvidó en casa el trabajo que tiene que entregar ese día. Conduciendo a mayor velocidad de la que acostumbra, regresa a casa, recoge su trabajo y reemprende su camino a la universidad. Trazar la posible gráfica de la distancia de la casa del estudiante como función del tiempo.

En los ejercicios 41 a 44, aplicar la prueba de la recta vertical para determinar si *y* es una función de *x*.

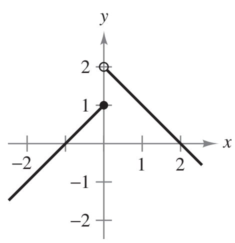
41. $x - y^2 = 0$



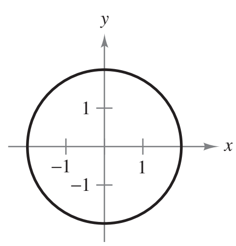
42. $\sqrt{x^2 - 4} - y = 0$



43. $y = \begin{cases} x + 1, & x \le 0 \\ -x + 2, & x > 0 \end{cases}$



44. $x^2 + y^2 = 4$



En los ejercicios 45 a 48, determinar si *y* es una función de *x*.

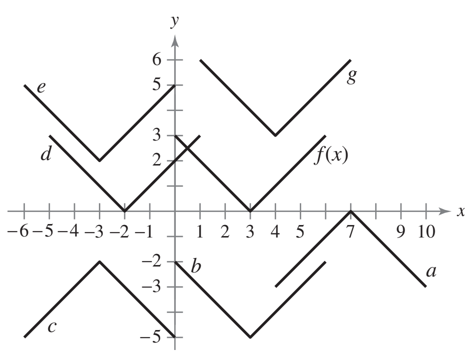
45. $x^2 + y^2 = 16$

46. $x^2 + y = 16$

47. $y^2 = x^2 - 1$

48. $x^2y - x^2 + 4y = 0$

En los ejercicios 49 a 54, utilizar la gráfica de $y = f(x)$ para relacionar la función con su gráfica.



49. $y = f(x + 5)$

50. $y = f(x) - 5$

51. $y = -f(-x) - 2$

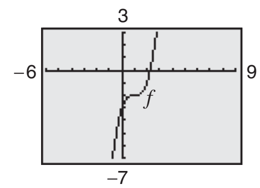
52. $y = -f(x - 4)$

53. $y = f(x + 6) + 2$

54. $y = f(x - 1) + 3$

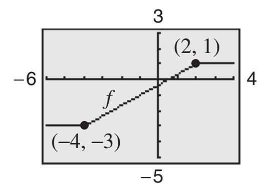
55. Utilizar la gráfica de f que se muestra en la figura para dibujar la gráfica de cada función.

a) $f(x + 3)$ *b)* $f(x - 1)$
c) $f(x) + 2$ *d)* $f(x) - 4$
e) $3f(x)$ *f)* $\frac{1}{4}f(x)$



56. Utilizar la gráfica de f que se muestra en la figura para dibujar la gráfica de cada función.

a) $f(x - 4)$ *b)* $f(x + 2)$
c) $f(x) + 4$ *d)* $f(x) - 1$
e) $2f(x)$ *f)* $\frac{1}{2}f(x)$



57. Utilizar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para dibujar la gráfica de cada función. En todos los casos, describa la transformación.

a) $y = \sqrt{x} + 2$ *d)* $y = -\sqrt{x}$ *c)* $y = \sqrt{x - 2}$

58. Especificar una secuencia de transformaciones que tenga como resultado cada gráfica de h a partir de la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

a) $h(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ *b)* $h(x) = -\operatorname{sen}(x - 1)$

59. Dadas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$, evaluar cada expresión.

a) $f(g(1))$ *b)* $g(f(1))$ *c)* $g(f(0))$
d) $f(g(-4))$ *e)* $f(g(x))$ *f)* $g(f(x))$

60. Dadas $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \pi x$, evaluar cada expresión.

a) $f(g(2))$ *b)* $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ *c)* $g(f(0))$

d) $g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ *e)* $f(g(x))$ *f)* $g(f(x))$

En los ejercicios 61 a 64, encontrar las funciones compuestas ($f \circ g$) y ($g \circ f$). ¿Cuál es el dominio de cada función compuesta? ¿Son iguales ambas funciones compuestas?

61. $f(x) = x^2$
$g(x) = \sqrt{x}$

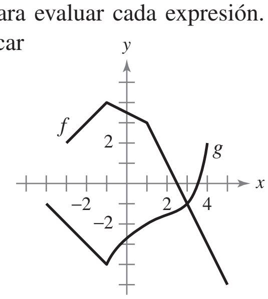
62. $f(x) = x^2 - 1$
$g(x) = \cos x$

63. $f(x) = \dfrac{3}{x}$
$g(x) = x^2 - 1$

64. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
$g(x) = \sqrt{x + 2}$

65. Utilizar las gráficas de f y de g para evaluar cada expresión. Si el resultado es indefinido, explicar por qué.

a) $(f \circ g)(3)$ *b)* $g(f(2))$
c) $g(f(5))$ *d)* $(f \circ g)(-3)$
e) $(g \circ f)(-1)$ *f)* $f(g(-1))$



66. ***Ondas*** Se deja caer una roca en un estanque tranquilo, provocando ondas en forma de círculos concéntricos. El radio (en pies) de la onda exterior está dado por $r(t) = 0.6t$, donde t es el tiempo, en segundos, transcurrido desde que la roca golpea el agua. El área del círculo está dada por la función $A(r) = \pi r^2$. Calcular e interpretar $(A \circ r)(t)$.

Para pensar **En los ejercicios 67 y 68, $F(x) = f \circ g \circ h$. Identificar las funciones para f, g y h. (Existen muchas respuestas correctas.)**

67. $F(x) = \sqrt{2x - 2}$ **68.** $F(x) = -4 \operatorname{sen}(1 - x)$

En los ejercicios 69 a 72, determinar si la función es par, impar o ninguna de las dos. Utilizar una herramienta de graficación para verificar su resultado.

69. $f(x) = x^2(4 - x^2)$ **70.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$

71. $f(x) = x \cos x$ **72.** $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

Para pensar **En los ejercicios 73 y 74, encontrar las coordenadas de un segundo punto de la gráfica de una función f, si el punto dado forma parte de la gráfica y la función es: *a*) par y *b*) impar.**

73. $\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$ **74.** $(4, 9)$

75. En la figura se muestran las gráficas de f, g y h. Determinar si cada función es par, impar o ninguna de las dos.

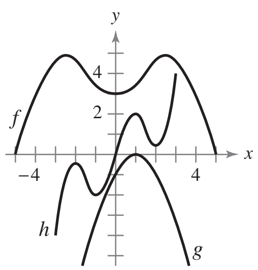


Figura para 75

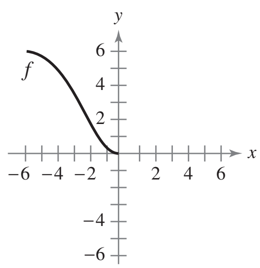


Figura para 76

76. El dominio de la función f que se muestra en la figura es $-6 \leq x \leq 6$.

a) Completar la gráfica de f dado que f es par.
b) Completar la gráfica de f dado que f es impar.

Escritura de funciones **En los ejercicios 77 a 80, escribir la ecuación para una función que tiene la gráfica dada.**

77. Segmento de recta que une $(-2, 4)$ y $(0, -6)$

78. Segmento de recta que une $(3, 1)$ y $(5, 8)$

79. La mitad inferior de la parábola $x + y^2 = 0$

80. La mitad inferior del círculo $x^2 + y^2 = 36$

En los ejercicios 81 a 84 trazar una posible gráfica de la situación.

81. La velocidad de un aeroplano en una función del tiempo durante un vuelo de 5 horas.

82. La altura de una pelota de beisbol en función de la distancia horizontal durante un cuadrangular.

83. La cantidad de cierta marca de un zapato vendida por una tienda de deportes en una función del precio del artículo.

84. El valor de un auto nuevo en función del tiempo en un periodo de 8 años.

85. Determinar el valor de c de manera que el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{c - x^2}$$

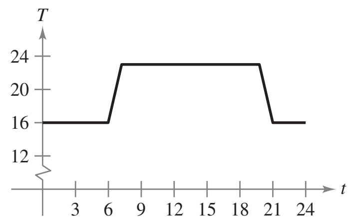
sea $[-5, 5]$.

86. Determinar todos los valores de c de manera que el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 3cx + 6}$$

sea el conjunto de todos los números reales.

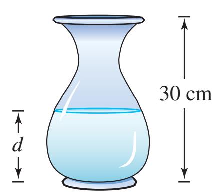
87. ***Razonamiento gráfico*** Un termostato controlado de manera electrónica está programado para reducir la temperatura automáticamente durante la noche (ver la figura). La temperatura T, en grados Celsius, está dada en términos de t, el tiempo en horas de un reloj de 24 horas.



a) Calcular $T(4)$ y $T(15)$.
b) Si el termostato se reprograma para producir una temperatura $H(t) = T(t - 1)$, ¿qué cambios habrá en la temperatura? Explicar.
c) Si el termostato se reprograma para producir una temperatura $H(t) = T(t) - 1$, ¿qué cambios habrá en la temperatura? Explicar.

Para discusión

88. El agua fluye a una vasija de 30 centímetros de altura a velocidad constante, llenándola en 5 segundos. Utilizar esta información y la forma de la vasija que se muestra en la figura para responder a las siguientes preguntas, si d es la profundidad del agua en centímetros y t es el tiempo en segundos (ver la figura).



a) Explicar por qué d es una función de t.
b) Determinar el dominio y el recorrido o rango de dicha función.
c) Trazar una posible gráfica de la función.
d) Usar la gráfica del inciso *c*) para calcular $d(4)$ ¿Qué representa esto?

89. ***Modelado matemático*** En la tabla se muestra el número promedio de acres por granja en Estados Unidos para ciertos años. (*Fuente: U.S. Department of Agriculture*.)

Año	1955	1965	1975	1985	1995	2005
Superficie en acres	258	340	420	441	438	444

a) Representar gráficamente los datos, donde A es la superficie en acres y t es el tiempo en años, donde $t = 5$ corresponde a 1955. Trazar a mano una curva que aproxime los datos.

b) Utilizar la curva del inciso *a*) para calcular $A(20)$.

90. ***Aerodinámica automotriz*** La potencia H, en caballos de fuerza, que requiere cierto automóvil para vencer la resistencia del viento está dada aproximadamente por

$$H(x) = 0.002x^2 + 0.005x - 0.029, \quad 10 \le x \le 100$$

donde x es la velocidad del automóvil en millas por hora.

a) Representar H con una herramienta de graficación.

b) Reescribir la función de potencia de tal modo que x represente la velocidad en kilómetros por hora. [Encontrar $H(x/1.6)$.]

91. ***Para pensar*** Escribir la función

$$f(x) = |x| + |x - 2|$$

sin utilizar los signos de valor absoluto (para repasar el valor absoluto en el apéndice C).

92. ***Desarrollo*** Utilizar una herramienta de graficación para representar las funciones polinomiales $p_1(x) = x^3 - x + 1$ y $p_2(x) = x^3 - x$. ¿Cuántos ceros tiene cada una de estas funciones? ¿Existe algún polinomio cúbico que no tenga ceros? Explicar la respuesta.

93. Demostrar que la siguiente función es impar.

$$f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \cdot \cdot \cdot + a_3x^3 + a_1x$$

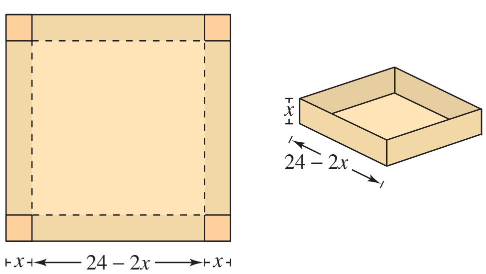
94. Demostrar que la siguiente función es par.

$$f(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \cdot \cdot \cdot + a_2x^2 + a_0$$

95. Demostrar que el producto de dos funciones pares (o impares) es una función par.

96. Demostrar que el producto de una función impar y una par es una función impar.

97. ***Volumen*** Se va a construir una caja abierta (sin tapa) de volumen máximo con una pieza cuadrada de material de 24 centímetros de lado, recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando los lados hacia arriba (ver la figura).



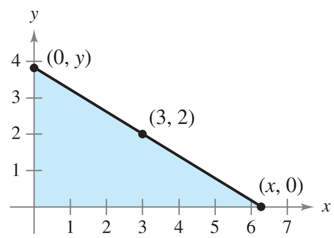
a) Expresar el volumen V como función de x, que es la longitud de las esquinas cuadradas. ¿Cuál es el dominio de la función?

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función volumen y aproximar las dimensiones de la caja que producen el volumen máximo.

c) Utilizar la función *tabla* de la herramienta de graficación para verificar su respuesta del apartado *b*). (Se muestran los dos primeros renglones de la tabla.)

Altura, x	**Longitud y altura**	**Volumen, V**
1	$24 - 2(1)$	$1[24 - 2(1)]^2 = 484$
2	$24 - 2(2)$	$2[24 - 2(2)]^2 = 800$

98. ***Longitud*** Una recta que pasa por el punto (3, 2) forma con los ejes x y y un triángulo rectángulo en el primer cuadrante (ver la figura). Expresar la longitud L de la hipotenusa como función de x.



¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 99 a 102, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

99. Si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$.

100. Una recta vertical puede cortar la gráfica de una función una vez como máximo.

101. Si $f(x) = f(-x)$ para todo x perteneciente al dominio de f, entonces la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y.

102. Si f es una función, entonces $f(ax) = af(x)$.

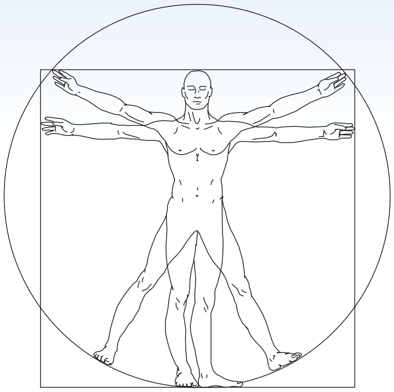
Preparación del examen Putnam*

103. Sea R la región constituida por los puntos (x, y) del plano cartesiano que satisfacen tanto $|x| - |y| \le 1$ como $|y| \le 1$. Trazar la región R y calcular su área.

104. Considerar un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales que tienen la propiedad $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo polinomio $g(x)$ con coeficientes reales. Determinar y demostrar la naturaleza de $f(x)$.

* El William Lowell Putnam Mathematical Competition (Concurso de Matemáticas William Lowell Putnam) es un concurso anual para estudiantes universitarios de Estados Unidos y Canadá, establecido en 1938.

P.4 Ajuste de modelos a colecciones de datos



Dibujo realizado por computadora, basado en la ilustración a tinta del famoso estudio de Leonardo da Vinci sobre las proporciones humanas, titulado *El hombre de Vitruvio*.

- **Ajustar un modelo lineal a una colección de datos de la vida cotidiana.**
- **Ajustar un modelo cuadrático a una colección de datos de la vida cotidiana.**
- **Ajustar un modelo trigonométrico a una colección de datos de la vida cotidiana.**

Ajuste de un modelo lineal a los datos

Una de las premisas básicas de la ciencia es que gran parte de la realidad física puede describirse matemáticamente y que muchos de los fenómenos físicos son predecibles. Esta perspectiva científica constituyó parte de la revolución científica que tuvo lugar en Europa a finales del siglo XVI. Dos de las primeras publicaciones ligadas a esta revolución fueron *On the Revolutions of the Heavenly Spheres*, del astrónomo polaco Nicolaus Copernicus, y *On the Structure of the Human Body*, del anatomista belga Andreas Vesalius. Publicados ambos en 1543, rompían con la tradición al sugerir el uso de un método científico en lugar de la confianza ciega en la autoridad.

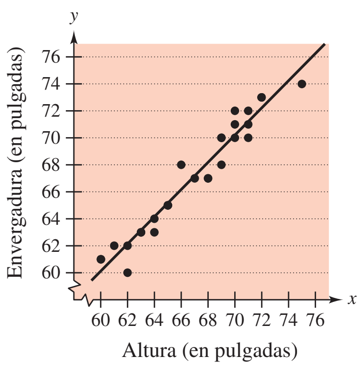
Una técnica fundamental de la ciencia moderna consiste en recopilar datos y luego describirlos por medio de un modelo matemático. Por ejemplo, los datos del ejemplo 1 están inspirados en el famoso dibujo de Leonardo da Vinci que indica que la altura de una persona y su envergadura son iguales.

EJEMPLO 1 Ajuste de un modelo lineal a los datos

Un grupo de 28 alumnos recopiló los siguientes datos, que representan sus estaturas x y sus envergaduras y (redondear a la pulgada más cercana):

(60, 61), (65, 65), (68, 67), (72, 73), (61, 62), (63, 63), (70, 71),
(75, 74), (71, 72), (62, 60), (65, 65), (66, 68), (62, 62), (72, 73),
(70, 70), (69, 68), (69, 70), (60, 61), (63, 63), (64, 64), (71, 71),
(68, 67), (69, 70), (70, 72), (65, 65), (64, 63), (71, 70), (67, 67).

Encontrar un modelo lineal que represente estos datos.



Datos y su modelo lineal
Figura P.32

Solución Existen varias maneras de representar estos datos mediante una ecuación. La más sencilla sería observar que x y y son casi iguales y tomar como modelo $y = x$. Un análisis más cuidadoso consistiría en recurrir a un procedimiento de la estadística denominado regresión lineal. (Procedimiento que se estudiará en la sección 13.9.) La recta de regresión de mínimos cuadrados para estos datos es

$$y = 1.006x - 0.23. \qquad \text{Recta de regresión de mínimos cuadrados.}$$

En la figura P.32 se muestra la gráfica del modelo y los datos. A partir de este modelo, se puede observar que la envergadura de una persona tiende a ser aproximadamente igual a su estatura.

TECNOLOGÍA Muchas herramientas de graficación tienen incorporados programas de regresión de mínimos cuadrados. Por lo general, se introducen los datos y después se ejecuta el programa. El programa suele mostrar como resultado la pendiente y la intersección en y de la recta que mejor se ajusta a los datos y el *coeficiente de correlación r*. El coeficiente de correlación mide cuán bien se ajusta el modelo a los datos. Cuanto más próximo a 1 es $|r|$, mejor es el ajuste. Por ejemplo, el coeficiente de correlación para el modelo del ejemplo 1 es $r \approx 0.97$, lo que indica que el modelo se ajusta bien a los datos. Si el valor de r es positivo, las variables tienen una correlación positiva, como ocurre en el ejemplo 1. Si el valor de r es negativo, las variables tienen una correlación negativa.

Ajuste de un modelo cuadrático a los datos

Una función que define la altura s de un objeto que cae en términos del tiempo t se llama función de posición. Si no se considera la resistencia del aire, la posición de un objeto que cae admite el modelo

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

donde g denota la aceleración de la gravedad, v_0 la velocidad inicial y s_0 la altura inicial. El valor de g depende de dónde se deja caer el objeto. En la Tierra, g vale -32 pies/s^2, o -9.8 m/s^2.

Para descubrir el valor de g experimental, se pueden registrar en varios instantes las alturas de un objeto cayendo, como se muestra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Ajuste de un modelo cuadrático a los datos

Se deja caer un balón de basquetbol desde una altura de $5\frac{1}{4}$ pies. Se mide la altura del balón 23 veces, a intervalos de aproximadamente 0.02 s.* Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Tiempo	0.0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.099996
Altura	5.23594	5.20353	5.16031	5.0991	5.02707	4.95146

Tiempo	0.119996	0.139992	0.159988	0.179988	0.199984	0.219984
Altura	4.85062	4.74979	4.63096	4.50132	4.35728	4.19523

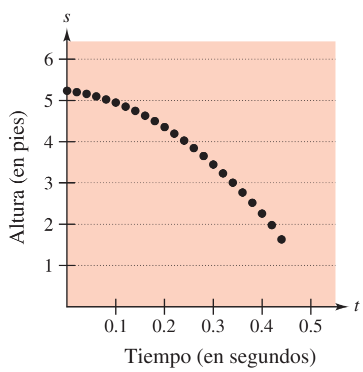
Tiempo	0.23998	0.25993	0.27998	0.299976	0.319972	0.339961
Altura	4.02958	3.84593	3.65507	3.44981	3.23375	3.01048

Tiempo	0.359961	0.379951	0.399941	0.419941	0.439941
Altura	2.76921	2.52074	2.25786	1.98058	1.63488

Encontrar un modelo que se ajuste a estos datos y utilizarlo para pronosticar el instante en el que el balón golpeará el suelo.

Solución Comenzar dibujando la nube de puntos o diagrama de dispersión que representa los datos, como se muestra en la figura P.33. En la nube de puntos o diagrama de dispersión se observa que los datos no parecen seguir un modelo lineal. Sin embargo, parece que obedecen a un modelo cuadrático. Para comprobarlo, introducir los datos en una herramienta de graficación con un programa para regresiones cuadráticas. Se debe obtener el modelo

$$s = -15.45t^2 - 1.302t + 5.2340.$$ Parábola de regresión de mínimos cuadrados.



Representación gráfica de los datos
Figura P.33

Al usar este modelo, se puede pronosticar en qué instante el balón golpea el suelo, sustituyendo s por 0 y despejando t de la ecuación resultante.

$$0 = -15.45t^2 - 1.302t + 5.2340$$ Hacer $s = 0$.

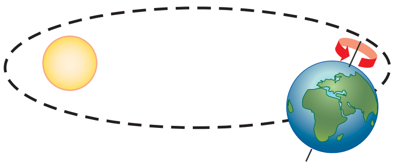
$$t = \frac{1.302 \pm \sqrt{(-1.302)^2 - 4(-15.45)(5.2340)}}{2(-15.45)}$$ Fórmula cuadrática.

$$t \approx 0.54$$ Escoger la solución positiva.

La solución aproximada es 0.54 s. En otras palabras, el balón continuará cayendo durante 0.1 s más antes de tocar el suelo.

---

* *Datos recabados con un Texas Instruments CBL (Calculator-Based Laboratory) System.*



El plano de la órbita terrestre alrededor del Sol y el eje de rotación de la Tierra no son perpendiculares. Por el contrario, este último está inclinado con respecto a su órbita. En consecuencia, la cantidad de luz diurna que reciben los distintos lugares de la Tierra varía de acuerdo con la época del año; en otras palabras, varía con la posición de la Tierra en su órbita.

Ajuste de un modelo trigonométrico a los datos

¿Qué es el modelado matemático? Ésta es una de las preguntas que se plantean en la obra *Guide to Mathematical Modelling*. A continuación se transcribe parte de la respuesta.*

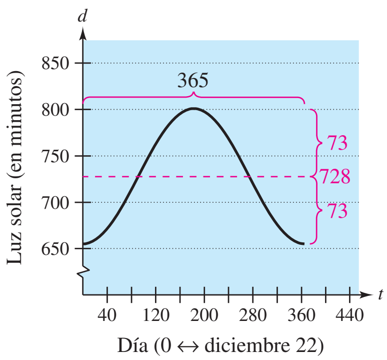
1. El modelado matemático consiste en aplicar las habilidades matemáticas para obtener respuestas útiles a problemas reales.
2. Aprender a aplicar las habilidades matemáticas es muy distinto del aprendizaje de las propias matemáticas.
3. Se utilizan modelos en una gran variedad de aplicaciones, algunas de las cuales parecen, en principio, carecer de naturaleza matemática.
4. Con frecuencia, los modelos permiten una evaluación rápida y económica de las alternativas, lo que conduce hacia soluciones óptimas que de otra manera no resultarían obvias.
5. En la elaboración de modelos matemáticos, no existen reglas precisas ni respuestas "correctas".
6. El modelado matemático sólo se puede aprender *haciéndolo*.

EJEMPLO 3 Ajuste de un modelo trigonométrico a los datos

En la Tierra, el número de horas de luz solar en un día cualquiera depende de la latitud y la época del año. Éste es el número de minutos de luz solar diarios en una latitud de 20 grados norte durante los días más largos y más cortos del año fueron: 801 minutos el 21 de junio y 655 minutos el 22 de diciembre. Utilizar estos datos para elaborar un modelo correspondiente a la cantidad de luz solar d (en minutos) para cada día del año en un lugar ubicado a 20 grados de latitud norte. ¿Cómo podría verificarse la exactitud del modelo?

Solución Ésta es una manera de elegir cómo elaborar un modelo. Se puede establecer la hipótesis de que el modelo es una función seno con un periodo de 365 días. Utilizando los datos, se puede concluir que la amplitud de la gráfica es $(801 - 655)/2$, o sea, 73. De tal modo, un posible modelo es

$$d = 728 - 73 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{365} + \frac{\pi}{2}\right).$$



Gráfica del modelo
Figura P.34

En este modelo, t representa el número del día del año, donde $t = 0$ corresponde al 22 de diciembre. En la figura P.34 se muestra una gráfica de este modelo. Para verificar la exactitud del modelo, se consulta en un almanaque el número de minutos de luz diurna en diferentes días del año en una latitud de 20 grados norte.

Fecha	*Valor de t*	*Horas de luz reales*	*Horas de luz que pronostica el modelo*
Dic 22	0	655 min.	655 min.
Ene 1	10	657 min.	656 min.
Feb 1	41	676 min.	672 min.
Mar 1	69	705 min.	701 min.
Abr 1	100	740 min.	739 min.
May 1	130	772 min.	773 min.
Jun 1	161	796 min.	796 min.
Jun 21	181	801 min.	801 min.
Jul 1	191	799 min.	800 min.
Ago 1	222	782 min.	785 min.
Sep 1	253	752 min.	754 min.
Oct 1	283	718 min.	716 min.
Nov 1	314	685 min.	681 min.
Dic 1	344	661 min.	660 min.

Como se puede observar, el modelo es bastante preciso.

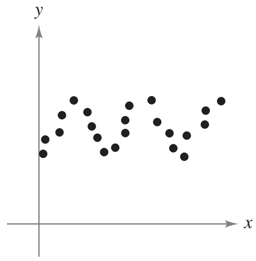
NOTA Puede encontrar un repaso de las funciones trigonométricas en el apéndice C.

* *Texto tomado de* Guide to Mathematical Modelling, *de Dilwyn Edwards y Mike Hamson (Boca Raton: CRC Press, 1990). Utilizado con autorización de los autores.*

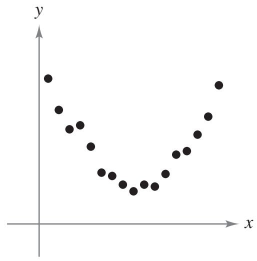
P.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4 se proporciona una gráfica de puntos. Determinar si los datos pueden modelarse por medio de una función lineal, cuadrática o trigonométrica, o si no parece existir relación entre *x* y *y*.

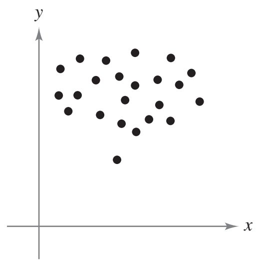
1.



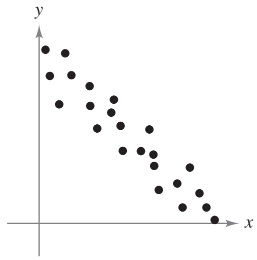
2.



3.



4.



5. ***Cancerígenos*** Los siguientes pares ordenados representan el índice de exposición a una sustancia cancerígena x y la mortalidad por cáncer y por cada 100 000 personas de una población.

(3.50, 150.1), (3.58, 133.1), (4.42, 132.9),
(2.26, 116.7), (2.63, 140.7), (4.85, 165.5),
(12.65, 210.7), (7.42, 181.0), (9.35, 213.4)

a) Representar gráficamente los datos. De la observación de esta gráfica, ¿parece que los datos siguen un modelo aproximadamente lineal?

b) Descubrir de manera visual un modelo lineal para los datos y representarlo gráficamente.

c) Utilizar el modelo para calcular el valor aproximado de y si $x = 3$.

6. ***Calificaciones en cuestionarios*** Los siguientes pares ordenados son las calificaciones de dos cuestionarios consecutivos de 15 puntos aplicados a una clase de 18 alumnos.

(7, 13), (9, 7), (14, 14), (15, 15), (10, 15), (9, 7),
(14, 11), (14, 15), (8, 10), (15, 9), (10, 11), (9, 10),
(11, 14), (7, 14), (11, 10), (14, 11), (10, 15), (9, 6)

a) Representar gráficamente los datos. A la vista de esta gráfica, ¿parece que la relación entre calificaciones consecutivas sea aproximadamente lineal?

b) Si los datos parecen aproximadamente lineales, construir un modelo lineal para ellos. Si no, encontrar alguna posible explicación.

7. ***Ley de Hooke*** La ley de Hooke establece que la fuerza F necesaria para comprimir o estirar un resorte (dentro de sus límites elásticos) es proporcional a la variación de longitud d que experimenta. Esto es, $F = kd$, donde k es una medida de la resistencia del resorte a la deformación y se denomina *constante elástica*. La siguiente tabla muestra el alargamiento d, en centímetros, de un resorte cuando se le aplica una fuerza de F newtons.

F	20	40	60	80	100
d	1.4	2.5	4.0	5.3	6.6

a) Encontrar la función de regresión en la herramienta de graficación, usando un modelo lineal para los datos.

b) Utilizar la herramienta de graficación para representar los datos y el modelo. ¿Qué tanto se ajusta el modelo a los datos? Explicar el razonamiento.

c) Utilizar el modelo para estimar el alargamiento del resorte cuando se le aplica una fuerza de 55 newtons.

8. ***Objeto en caída*** En un experimento, unos estudiantes midieron la velocidad s (en metros por segundo) de un objeto en caída, t segundos después de dejarlo caer. Los resultados se presentan en la siguiente tabla.

t	0	1	2	3	4
s	0	11.0	19.4	29.2	39.4

a) Usando la función de regresión en la herramienta de graficación, encontrar un modelo lineal para los datos.

b) Utilizar la herramienta de graficación para representar los datos y el modelo. ¿De qué manera se ajusta el modelo a los datos? Explicar el razonamiento.

c) Utilice el modelo para estimar la velocidad del objeto transcurridos 2.5 segundos.

9. ***Consumo de energía y producto interno bruto**** Los siguientes datos muestran el consumo de electricidad *per capita* (en millones de Btu) y el producto interno bruto *per capita* (en miles de dólares) en 2001, en varios países. (*Fuente: U.S. Census Bureau.*)

Argentina	(71, 12.53)	**Bangladesh**	(5, 1.97)
Chile	(75, 10.61)	**Ecuador**	(29, 3.77)
Grecia	(136, 22.23)	**Hong Kong**	(159, 31.56)
Hungría	(106, 15.8)	**India**	(15, 3.12)
México	(63, 9.64)	**Polonia**	(95, 12.73)
Portugal	(106, 19.24)	**Corea del Sur**	(186, 20.53)
España	(159, 24.75)	**Turquía**	(51, 7.72)
Reino Unido	(167, 31.43)	**Venezuela**	(115, 5.83)

a) Utilizar la función de regresión en la herramienta de graficación, encontrar un modelo lineal para los datos. ¿Cuál es el coeficiente de correlación?

b) Utilizar la herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.

c) Interpretar la gráfica del apartado *b*). Utilizar la gráfica para identificar los cuatro países que más difieren del modelo lineal.

d) Borrar los datos correspondientes a los cuatro países identificados en el apartado *c*). Ajustar un modelo lineal para el resto de los datos y encontrar su coeficiente de correlación.

---

* En España se le denomina producto interior bruto.

10. ***Dureza de Brinell*** Los datos de la tabla muestran la dureza de Brinell H del acero al carbón del 0.35 cuando se endurece y templa a temperatura t (en grados Fahrenheit). (*Fuente*: *Standard Handbook for Mechanical Engineers.*)

t	200	400	600	800	1 000	1 200
H	534	495	415	352	269	217

a) Utilizar las funciones de regresión lineal de su herramienta de graficación para encontrar un modelo lineal para los datos.

b) Utilizar la herramienta de graficación para representar los datos y el modelo. ¿Qué tanto se ajusta el modelo a los datos? Explicar el razonamiento.

c) Utilizar el modelo para estimar la dureza cuando $t = 500°$ F.

11. ***Costos de automóviles*** Los datos de la tabla muestran los gastos variables de operación de un automóvil en Estados Unidos durante varios años. Las funciones y_1, y_2 y y_3 representan los gastos, en centavos por milla, de gasolina y aceite, mantenimiento y neumáticos, respectivamente. (*Fuente: Bureau of Transportation Statistics.*)

Año	y_1	y_2	y_3
0	5.60	3.30	1.70
1	6.90	3.60	1.70
2	7.90	3.90	1.80
3	5.90	4.10	1.80
4	7.20	4.10	1.80
5	6.50	5.40	0.70
6	9.50	4.90	0.70
7	8.90	4.90	0.70

a) Utilizar las funciones de regresión de la herramienta de graficación para encontrar un modelo cuadrático para y_1 y y_3 y un modelo lineal para y_2.

b) Utilizar la herramienta de graficación para hacer la gráfica y_1, y_2, y_3 y $y_1 + y_2 + y_3$ en la misma ventana. Utilizar el modelo para estimar el costo total variable por milla durante el año 12.

12. ***Resistencia de una viga*** Los estudiantes de un laboratorio midieron la fuerza de ruptura S (en libras) de una pieza de madera de 2 pulgadas de espesor, con x de altura y 12 de longitud. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

x	4	6	8	10	12
S	2 370	5 460	10 310	16 250	23 860

a) Utilizar una herramienta de graficación para ajustar un modelo cuadrático a los datos.

b) Utilizar la herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.

c) Utilizar el modelo para estimar la fuerza de ruptura cuando $x = 2$.

13. ***Desempeño automotriz*** La siguiente tabla muestra el tiempo t (en segundos) que necesita un automóvil Honda Accord Hybrid para alcanzar una velocidad de s millas por hora partiendo del reposo. (*Fuente*: *Car & Driver.*)

s	30	40	50	60	70	80	90
t	2.5	3.5	5.0	6.7	8.7	11.5	14.4

a) Utilizar las funciones de regresión de la herramienta de graficación para encontrar un modelo cuadrático para los datos.

b) Utilizar la herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.

c) Utilizar la gráfica del apartado *b*) para establecer por qué el modelo no es apropiado para determinar el tiempo necesario para alcanzar velocidades inferiores a 20 millas por hora.

d) Puesto que en las pruebas se partía del reposo, agregar el punto (0, 0) a los datos. Ajustar y representar gráficamente un modelo cuadrático a los nuevos datos.

e) El modelo cuadrático, ¿modela con mayor precisión el comportamiento del automóvil a bajas velocidades? Explicar la respuesta.

Para discusión

14. ***Organizaciones de asistencia sanitaria*** La siguiente gráfica de barras muestra el número de personas N (en millones) que recibieron atención en organizaciones de asistencia sanitaria de 1990 a 2004. (*Fuente: HealthLeaders-InterStudy.*)

Internamiento en organizaciones de asistencia sanitaria

a) Sea t el tiempo en años, $t = 0$ corresponde a 1990. Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para encontrar los modelos lineal y cúbico para los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar los datos y los modelos lineal y cúbico.

c) Utilizar la gráfica anterior para determinar qué modelo es mejor.

d) Utilizar una herramienta de graficación para encontrar la gráfica del modelo cuadrático de los datos.

e) Utilizar los modelos lineal y cúbico para estimar el número de personas que recibieron atención en las organizaciones de asistencia sanitaria durante 2007.

f) Utilizar una herramienta de graficación para encontrar otros modelos para los datos. ¿Qué modelos se considera que representan mejor los datos? Explicar la respuesta.

15. ***Desempeño de un automóvil*** Se acopla un dinamómetro a un motor de automóvil V8 y se mide su potencia en caballos y a diferentes velocidades x (en miles de revoluciones por minuto). En la siguiente tabla se muestran los resultados.

x	1	2	3	4	5	6
y	40	85	140	200	225	245

a) Utilizar las funciones de cálculo de regresión de una herramienta de graficación para encontrar el modelo cúbico para los datos.
b) Utilizar la herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.
c) Utilizar el modelo para estimar la potencia cuando el motor gira a 4 500 revoluciones por minuto.

16. ***Temperatura de ebullición*** La siguiente tabla muestra la temperatura de ebullición del agua T (°F) a diferentes presiones p (en libras/pulg^2). (*Fuente: Standard Handbook for Mechanical Engineers*.)

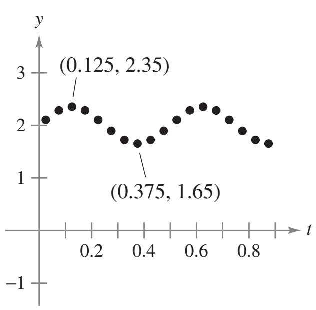
p	5	10	14.696 (1 atmósfera)	20
T	162.24°	193.21°	212.00°	227.96°

p	30	40	60	80	100
T	250.33°	267.25°	292.71°	312.03°	327.81°

a) Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo cúbico para los datos.
b) Utilizar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.
c) Utilizar la gráfica para calcular la presión necesaria para que el punto de ebullición del agua exceda los 300° F.
d) Explicar por qué el modelo no sería adecuado para presiones superiores a 100 libras por pulgada al cuadrado.

17. ***Movimiento armónico*** Un detector de movimiento mide el desplazamiento oscilatorio de un peso suspendido de un resorte. En la figura se muestran los datos recabados y los desplazamientos máximos (positivo y negativo) aproximados a partir del punto de equilibrio. El desplazamiento y se mide en centímetros y el tiempo t en segundos.

a) ¿Es y función de t? Explicar la respuesta.
b) Calcular la amplitud y el periodo de las oscilaciones.
c) Encontrar un modelo para los datos.
d) Representar el modelo del apartado *c*) en una herramienta de graficación y comparar el resultado con los datos de la figura.



18. ***Temperatura*** La siguiente tabla muestra las temperaturas máximas diarias en Miami M y Syracuse S (en grados Fahrenheit), donde $t = 1$ corresponde a enero. (*Fuente: NOAA*.)

t	1	2	3	4	5	6
M	76.5	77.7	80.7	83.8	87.2	89.5
S	31.4	33.5	43.1	55.7	68.5	77.0

t	7	8	9	10	11	12
M	90.9	90.6	89.0	85.4	81.2	77.5
S	81.7	79.6	71.4	59.8	47.4	36.3

a) Si un modelo para Miami es

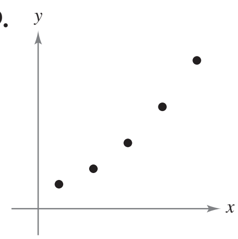
$$M(t) = 83.70 + 7.46 \operatorname{sen}(0.4912t - 1.95).$$

Encontrar un modelo para Syracuse.
b) Utilizar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo correspondientes a las temperaturas en Miami. ¿Es bueno el ajuste?
c) Utilizar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo correspondientes a las temperaturas en Syracuse. ¿Es bueno el ajuste?
d) Utilizar los modelos para estimar la temperatura promedio anual en cada ciudad. ¿Qué término del modelo se utilizó? Explicar la respuesta.
e) ¿Cuál es el periodo en cada modelo? ¿Es el que se esperaba? Explicar las respuestas.
f) ¿Qué ciudad presenta una mayor variación de temperaturas a lo largo del año? ¿Qué factor de los modelos lo determina? Explicar las respuestas.

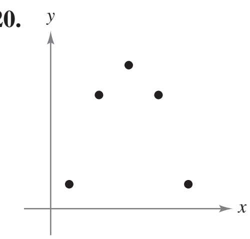
Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 19 y 20 describir una situación real factible para cada conjunto de datos. Luego, explicar cómo puede utilizar un modelo en un entorno real.

19.



20.



Preparación del examen Putnam

21. Para $i = 1, 2$, sea T_i un triángulo con lados de longitud a_i, b_i, c_i y área A_i. Suponga que $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, $c_1 \leq c_2$ y que T_2 es un triángulo agudo. ¿Se cumple que $A_1 \leq A_2$?

P Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 a 4, encontrar las intersecciones con los ejes (si existe alguna).

1. $y = 5x - 8$ **2.** $y = (x - 2)(x - 6)$

3. $y = \dfrac{x-3}{x-4}$ **4.** $xy = 4$

En los ejercicios 5 y 6, verificar si existe simetría con respecto a cada eje y al origen.

5. $x^2y - x^2 + 4y = 0$ **6.** $y = x^4 - x^2 + 3$

En los ejercicios 7 a 14, dibujar la gráfica de la ecuación.

7. $y = \frac{1}{2}(-x + 3)$ **8.** $6x - 3y = 12$

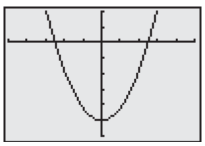
9. $-\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y = 1$ **10.** $0.02x + 0.15y = 0.25$

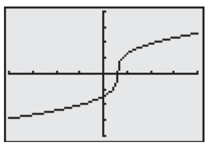
11. $y = 9 - 8x - x^2$ **12.** $y = 6x - x^2$

13. $y = 2\sqrt{4-x}$ **14.** $y = |x - 4| - 4$

En los ejercicios 15 y 16, describir la ventana de calculadora que produce la figura.

15. $y = 4x^2 - 25$ **16.** $y = 8\sqrt[3]{x-6}$





En los ejercicios 17 y 18, utilizar una herramienta de graficación para encontrar el o los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones.

17. $5x + 3y = -1$
$x - y = -5$

18. $x - y + 1 = 0$
$y - x^2 = 7$

19. ***Para pensar*** Escribir una ecuación cuya gráfica corte en $x = -4$ y $x = 4$ y sea simétrica con respecto al origen.

20. ***Para pensar*** ¿Para qué valor de k la gráfica de $y = kx^3$ pasa por el punto indicado?

a) $(1, 4)$ *b)* $(-2, 1)$ *c)* $(0, 0)$ *d)* $(-1, -1)$

En los ejercicios 21 y 22, dibujar los puntos y calcular la pendiente de la recta que pasa por ellos.

21. $(\frac{3}{2}, 1), (5, \frac{5}{2})$ **22.** $(-7, 8), (-1, 8)$

En los ejercicios 23 y 24, utilizar el concepto de pendiente para determinar el valor de t para el que los tres puntos son colineales.

23. $(-8, 5), (0, t), (2, -1)$ **24.** $(-3, 3), (t, -1), (8, 6)$

En los ejercicios 25 a 28, encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto y tiene la pendiente señalada. Trazar la recta.

25. $(3, -5), m = \frac{7}{4}$ **26.** $(-8, 1)$, m es indefinida.

27. $(-3, 0), m = -\frac{2}{3}$ **28.** $(5, 4), m = 0$

29. Encontrar las ecuaciones de las rectas que pasan por $(-3, 5)$ y tienen las siguientes características.

a) Pendiente $\frac{7}{16}$
b) Es paralela a la recta $5x - 3y = 3$
c) Pasa por el origen
d) Es paralela al eje y

30. Encontrar las ecuaciones de las rectas que pasan por $(2, 4)$ y poseen las siguientes características.

a) Pendiente $-\frac{2}{3}$
b) Es perpendicular a la recta $x + y = 0$
c) Pasa por el punto $(6, 1)$
d) Es paralela al eje x

31. ***Ritmo o velocidad de cambio*** El precio de adquisición de una máquina nueva es \$12 500, y su valor decrecerá \$850 por año. Utilizar esta información para escribir una ecuación lineal que determine el valor V de la máquina t años después de su adquisición. Calcular su valor transcurridos 3 años.

32. ***Punto de equilibrio*** Un contratista adquiere un equipo en \$36 500 cuyo costo de combustible y mantenimiento es de \$9.25 por hora. Al operario que lo maneja se le pagan \$13.50 por hora y a los clientes se les cargan \$30 por hora.

a) Escribir una ecuación para el costo C que supone hacer funcionar el equipo durante t horas.
b) Escribir una ecuación para los ingresos R derivados de t horas de uso del equipo.
c) Determinar el punto de equilibrio, calculando el instante en el que $R = C$.

En los ejercicios 33 a 36, trazar la gráfica de la ecuación y utilizar el criterio de la recta vertical para determinar si la ecuación expresa a y como una función de x.

33. $x - y^2 = 6$ **34.** $x^2 - y = 0$

35. $y = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ **36.** $x = 9 - y^2$

37. Evaluar (si es posible) la función $f(x) = 1/x$ en los valores especificados de la variable independiente y simplificar los resultados.

a) $f(0)$ *b)* $\dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$

38. Evaluar (si es posible) la función para cada valor de la variable independiente.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ |x - 2|, & x \geq 0 \end{cases}$$

a) $f(-4)$ *b)* $f(0)$ *c)* $f(1)$

39. Determinar el dominio y el recorrido o rango de cada función.

a) $y = \sqrt{36 - x^2}$ *b)* $y = \dfrac{7}{2x - 10}$ *c)* $y = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2 - x, & x \geq 0 \end{cases}$

40. Dadas $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = 2x + 1$, evaluar las expresiones.

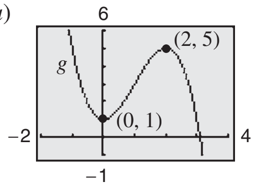
a) $f(x) - g(x)$ *b)* $f(x)g(x)$ *c)* $g(f(x))$

41. Trazar (en un mismo sistema de coordenadas) las gráficas de f para $c = -2$, 0 y 2.

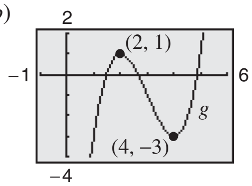
a) $f(x) = x^3 + c$ *b)* $f(x) = (x - c)^3$
c) $f(x) = (x - 2)^3 + c$ *d)* $f(x) = cx^3$

42. Utilizar una herramienta de graficación para representar $f(x) = x^3 - 3x^2$. Empleando la gráfica, escribir una fórmula para la función g de la figura.

a)



b)



43. ***Conjetura***

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar las funciones f, g y h en una misma ventana. Hacer una descripción por escrito de las similitudes y diferencias observadas entre las gráficas.

Potencias impares: $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^5$

Potencias pares: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$, $h(x) = x^6$

b) Utilizar el resultado del apartado *a)* para hacer una conjetura con respecto a las gráficas de las funciones $y = x^7$ y $y = x^8$. Comprobar la conjetura con ayuda de una herramienta de graficación.

44. ***Para pensar*** Utilizando el resultado del ejercicio 43, tratar de vaticinar las formas de las gráficas de f, g y h. Después, representar las funciones con una herramienta de graficación y comparar el resultado con su estimación.

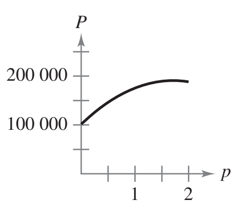
a) $f(x) = x^2(x - 6)^2$ *b)* $g(x) = x^3(x - 6)^2$
c) $h(x) = x^3(x - 6)^3$

45. ***Área*** Se va a cortar un alambre de 24 pulgadas de longitud en cuatro trozos para formar un rectángulo cuyo lado más corto mida x.

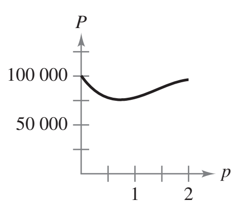
a) Expresar el área A del rectángulo en función de x.
b) Determinar el dominio de la función y representar la función de ese dominio en una herramienta de graficación.
c) Utilizar la gráfica de la función para estimar el área máxima del rectángulo. Hacer una suposición con respecto a las dimensiones que producen el área máxima.

46. ***Redacción*** Las siguientes gráficas exhiben los beneficios P de dos pequeñas empresas durante un periodo p de dos años. Inventar una historia que explique el comportamiento de cada función de beneficios para un hipotético producto elaborado por la empresa.

a)

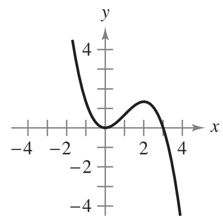


b)

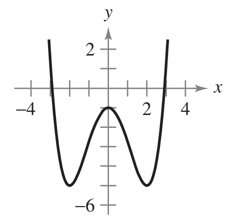


47. ***Para pensar*** ¿Cuál es el menor grado posible de la función polinomial cuya gráfica se aproxima a la que se muestra en cada apartado? ¿Qué signo debe tener el coeficiente dominante?

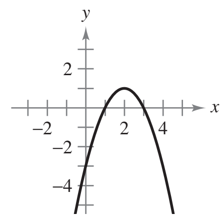
a)



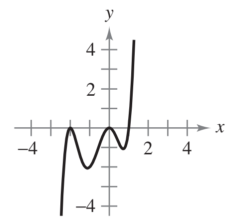
b)



c)



d)



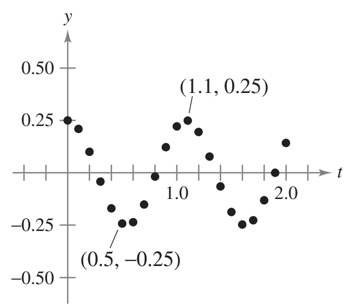
48. ***Prueba de esfuerzo*** Se somete a prueba una pieza de maquinaria doblándola x centímetros, 10 veces por minuto, hasta el instante y (en horas) en el que falla. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

x	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
y	61	56	53	55	48	35	36	33	44	23

a) Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo lineal para los datos.
b) Utilizar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.
c) Utilizar la gráfica para determinar si se cometió un error al realizar una de las pruebas o al registrar los resultados. Si es así, suprimir el punto erróneo y encontrar el modelo lineal para los datos revisados.

49. ***Movimiento armónico*** Un detector de movimiento mide el desplazamiento oscilatorio de un peso suspendido de un resorte. En la figura se muestran los datos recabados y los desplazamientos máximos (positivo y negativo) aproximados a partir del punto de equilibrio. El desplazamiento y se mide en centímetros y el tiempo t en segundos.

a) ¿Es y función de t? Explicar.
b) Calcular la amplitud y el periodo de las oscilaciones.
c) Encontrar un modelo para los datos.
d) Representar el modelo del apartado *c)* en una herramienta de graficación y comparar el resultado con los datos de la figura.



SP Solución de problemas

1. Considerando el círculo $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ que se muestra en la figura.

a) Encontrar el centro y el radio del círculo.
b) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto (0, 0).
c) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto (6, 0).
d) ¿En qué punto se cortan dichas tangentes?

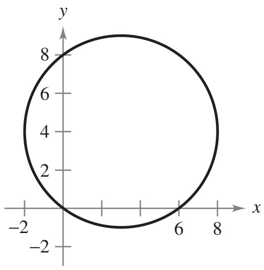


Figura para 1

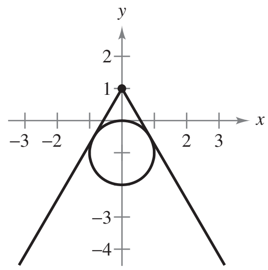


Figura para 2

2. Sean dos rectas tangentes que van del punto (0, 1) al círculo $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ (ver la figura). Encontrar las ecuaciones de ambas rectas, valiéndose del hecho de que cada tangente hace intersección con el círculo *exactamente* en un solo punto.

3. La función de Heaviside $H(x)$ se utiliza ampliamente en aplicaciones ingenieriles.

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Trazar a mano la gráfica de la función de Heaviside y las gráficas de las siguientes funciones.

a) $H(x) - 2$ *b*) $H(x - 2)$ *c*) $-H(x)$
d) $H(-x)$ *e*) $\frac{1}{2}H(x)$ *f*) $-H(x - 2) + 2$

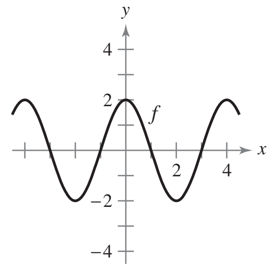
Institute of Electrical Engineers, London

Oliver Heaviside (1850-1925)

Heaviside fue un físico-matemático británico que contribuyó al campo de las matemáticas aplicadas, sobre todo en la ingeniería eléctrica. La *función de Heaviside* es un tipo clásico de función "encendido-apagado" con aplicaciones en la electricidad y la computación.

4. Tomando en cuenta la gráfica de la función que se muestra a continuación, construir las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f(x + 1)$ *b*) $f(x) + 1$
c) $2f(x)$ *d*) $f(-x)$
e) $-f(x)$ *f*) $|f(x)|$
g) $f(|x|)$



5. El propietario de un rancho planea cercar un potrero rectangular adyacente a un río. Ya tiene 100 metros de cerca y no es necesario cercar el lado que se encuentra a lo largo del río (ver la figura).

a) Escribir el área A del potrero en función de x, que es la longitud del lado paralelo al río. ¿Cuál es el dominio de A?
b) Representar gráficamente la función área $A(x)$ y estimar las dimensiones que producen la mayor cantidad de área para el potrero.
c) Encontrar las dimensiones que producen la mayor cantidad de área del potrero completando el cuadrilátero.

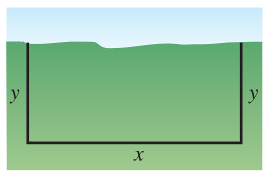


Figura para 5

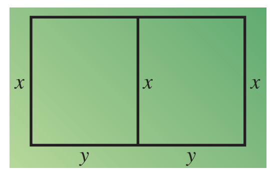
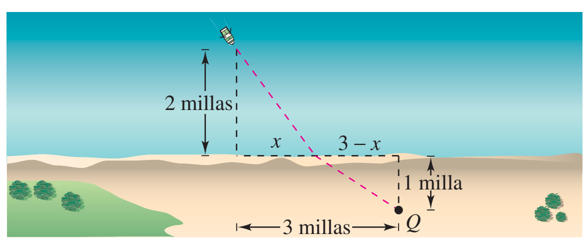


Figura para 6

6. El propietario de un rancho cuenta con 300 metros de cerca para enrejar dos potreros contiguos.

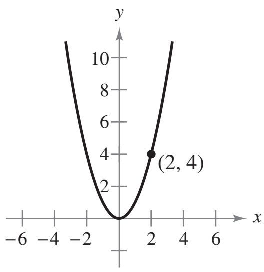
a) Escribir el área total A de ambos potreros como una función de x (ver la figura). ¿Cuál es el dominio de A?
b) Representar gráficamente la función área y estimar las dimensiones que producen la mayor área de los potreros.
c) Encontrar las dimensiones que producen la mayor cantidad de área del potrero completando el cuadrado.

7. Una persona se encuentra en una lancha a 2 millas del punto más cercano a la costa y se dirige a un punto Q, ubicado sobre la costa a 3 millas de dicho punto y 1 milla tierra adentro (ver la figura). Puede navegar a 2 millas por hora y caminar a 4 millas por hora. Escribir el tiempo total T del recorrido en función de x.



8. Conduzca por la playa a 120 kilómetros por hora. En el recorrido de regreso, conduzca a 60 kilómetros por hora. ¿Cuál es la velocidad promedio en todo el viaje? Explicar el razonamiento.

9. Uno de los temas fundamentales del cálculo consiste en encontrar la pendiente de una recta tangente en un punto a una curva. Para ver cómo puede hacerse esto, considerar el punto (2, 4) de la gráfica de $f(x) = x^2$ (ver la figura).



a) Calcular la pendiente de la recta que une (2, 4) y (3, 9). La pendiente de la recta tangente en (2, 4) ¿es mayor o menor que este número?

b) Calcular la pendiente de la recta que une (2, 4) y (1, 1). La pendiente de la recta tangente en (2, 4) ¿es mayor o menor que este número?

c) Calcular la pendiente de la recta que une (2, 4) y (2.1, 4.41). La pendiente de la recta tangente en (2, 4) ¿es mayor o menor que este número?

d) Calcular la pendiente de la recta que une (2, 4) y $(2 + h, f(2 + h))$, para $h \neq 0$. Verificar que $h = 1, -1$ y 0.1 generen las soluciones de los apartados *a*) a *c*).

e) ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en (2, 4)? Explicar de qué manera obtuvo la respuesta.

10. Trazar gráficamente la función $f(x) = \sqrt{x}$ y anotar el punto (4, 2) sobre ella.

a) Calcular la pendiente de la recta que une (4, 2) y (9, 3). La pendiente de la recta tangente en (4, 2) ¿es mayor o menor que este número?

b) Calcular la pendiente de la recta que une (4, 2) y (1, 1). La pendiente de la recta tangente en (4, 2) ¿es mayor o menor que este número?

c) Calcular la pendiente de la recta que une (4, 2) y (4.41, 2.1). La pendiente de la recta tangente en (4, 2) ¿es mayor o menor que este número?

d) Calcular la pendiente de la recta que une (4, 2) y $(4 + h, f(4 + h))$, para $h \neq 0$.

e) ¿Cuál es la pendiente de la línea tangente en (4, 2)? Explicar de qué manera obtuvo la respuesta.

11. Explicar cómo se grafica la ecuación $y + |y| = x + |x|$. Trace la gráfica.

12. En una enorme habitación se encuentran dos bocinas, con 3 metros de separación entre sí. La intensidad del sonido *I* de una bocina es del doble de la otra, como se muestra en la figura. Suponer que el escucha se encuentra en libertad de moverse por la habitación hasta encontrar la posición en la que recibe igual cantidad de sonido de ambas bocinas. Dicho lugar satisface dos condiciones: 1) la intensidad del sonido en la posición del escucha es directamente proporcional al nivel de sonido de la fuente, y 2) la intensidad del sonido es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la fuente.

a) Encontrar los puntos sobre el eje *x* que reciben la misma cantidad de sonido de ambas bocinas.

b) Encontrar y representar gráficamente la ecuación de todas las posiciones (x, y) donde se reciben cantidades de sonido iguales de ambas bocinas.

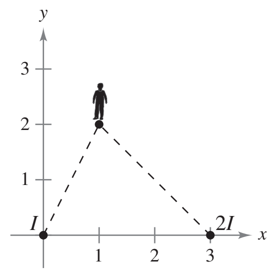


Figura para 12

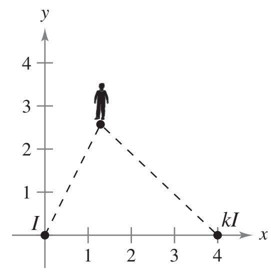


Figura para 13

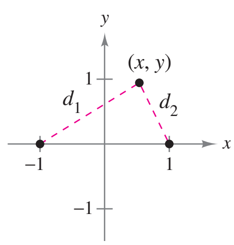
13. Suponer que las bocinas del ejercicio 12 se encuentran separadas por 4 metros y la intensidad del sonido de una de ellas es de *k* veces la de la otra, como se muestra en la figura.

a) Encontrar la ecuación para todas las posiciones (x, y) donde se reciben cantidades de sonido iguales de ambas bocinas.

b) Representar gráficamente la ecuación para el caso donde $k = 3$.

c) Describir el conjunto de posiciones con igual cantidad de sonido a medida que *k* se vuelve muy grande.

14. Sean d_1 y d_2 las distancias entre el punto (x, y) y los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, respectivamente, como se muestra en la figura. Demostrar que la ecuación de la gráfica de todos los puntos (x, y) que satisfacen $d_1d_2 = 1$ es $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$. Esta curva se conoce como **lemniscata**. Trazar la lemniscata e identificar tres puntos sobre la gráfica.



15. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$.

a) ¿Cuáles son el dominio y el recorrido o rango de *f* ?

b) Encontrar la composición de $f(f(x))$; ¿cuál es el domino de esta función?

c) Encontrar $f(f(f(x)))$; ¿cuál es el dominio de esta función?

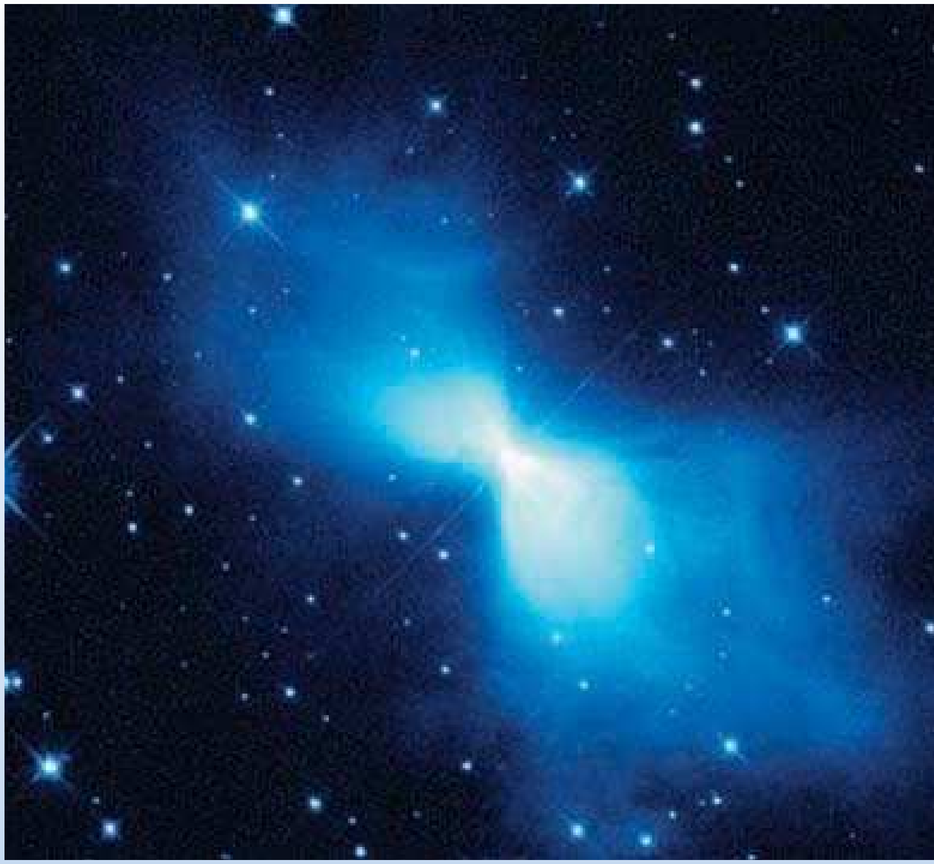
d) Representar gráficamente $f(f(f(x)))$. La gráfica ¿es una recta? Explicar por qué.

1 Límites y sus propiedades

El límite de una función es el concepto principal que distingue al cálculo del álgebra y de la geometría analítica. La noción de un límite es fundamental para el estudio del cálculo. De esta manera, es importante adquirir un buen concepto de límite antes de incursionar en otros tópicos de cálculo.

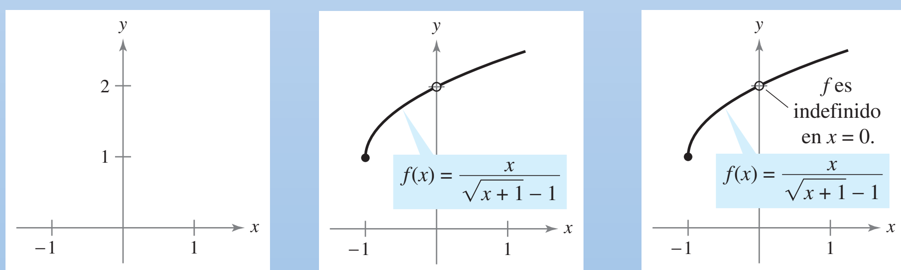
En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo comparar el cálculo con el precálculo. (1.1)
- Cómo encontrar límites gráfica y numéricamente. (1.2)
- Cómo evaluar de forma analítica un límite. (1.3)
- Cómo determinar la continuidad en un punto y sobre un intervalo abierto, y cómo determinar límites laterales. (1.4)
- Cómo determinar límites infinitos y cómo encontrar las asíntotas verticales. (1.5)



European Space Agency/NASA

De acuerdo con la NASA, el lugar más frío del universo está en la nébula de Boomerang. La nébula se localiza a cinco mil años luz de la Tierra y tiene una temperatura de −272°C. Esta temperatura es únicamente 1° más caliente que el cero absoluto, la temperatura más fría posible. ¿Cómo determinaron los científicos que el cero absoluto es el "límite inferior" de la temperatura de la materia? (Ver la sección 1.4, ejemplo 5.)



El proceso de un límite es un concepto fundamental del cálculo. Una técnica que se puede utilizar para estimar un límite consiste en trazar la función y luego determinar el comportamiento de la gráfica a medida que la variable independiente se aproxima a un valor específico. (Ver la sección 1.2.)

1.1 Una mirada previa al cálculo

- **Comprender qué es el cálculo y cómo se compara con el precálculo.**
- **Comprender que el problema de la recta tangente es básico para el cálculo.**
- **Comprender que el problema del área también es básico para el cálculo.**

¿Qué es el cálculo?

El cálculo es la matemática de los cambios (velocidades y aceleraciones). También son objeto del cálculo rectas tangentes, pendientes, áreas, volúmenes, longitudes de arco, centroides, curvaturas y una gran variedad de conceptos que han permitido a científicos, ingenieros y economistas elaborar modelos para situaciones de la vida real.

Aunque las matemáticas previas al cálculo también tratan con velocidades, aceleraciones, rectas tangentes, pendientes y demás, existe una diferencia fundamental entre ellas y el cálculo. Mientras que las primeras son más estáticas, el cálculo es más dinámico. He aquí algunos ejemplos.

- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar un objeto que se mueve con velocidad constante. Sin embargo, para analizar la velocidad de un objeto sometido a aceleración es necesario recurrir al cálculo.
- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar la pendiente de una recta, pero para analizar la pendiente de una curva es necesario el cálculo.
- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar la curvatura constante de un círculo, pero para analizar la curvatura variable de una curva general es necesario el cálculo.
- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar el área de un rectángulo, pero para analizar el área bajo una curva general es necesario el cálculo.

Cada una de estas situaciones implica la misma estrategia general: la reformulación de las matemáticas previas al cálculo a través de un proceso de límite. De tal modo, una manera de responder a la pregunta "¿qué es el cálculo?" consiste en decir que el cálculo es una "máquina de límites" que funciona en tres etapas. La primera la constituyen las matemáticas previas al cálculo, con nociones como la pendiente de una recta o el área de un rectángulo. La segunda es el proceso de límite, y la tercera es la nueva formulación propia del cálculo, en términos de derivadas e integrales.

Matemáticas previas al cálculo ⇨ Proceso de límite ⇨ Cálculo

Por desgracia, algunos estudiantes tratan de aprender cálculo como si se tratara de una simple recopilación de fórmulas nuevas. Si se reduce el estudio del cálculo a la memorización de las fórmulas de derivación y de integración, su comprensión será deficiente, el estudiante perderá confianza en sí mismo y no obtendrá satisfacción.

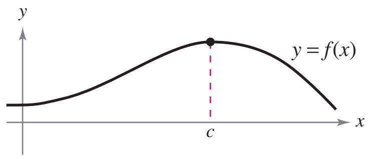
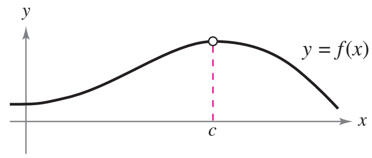
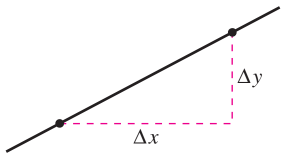
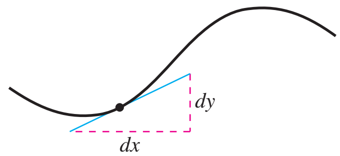
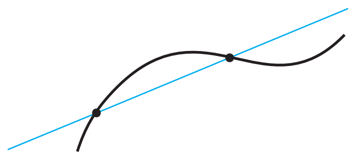
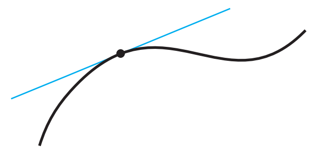
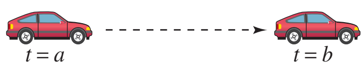
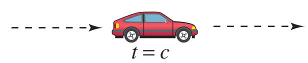
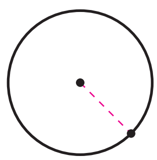
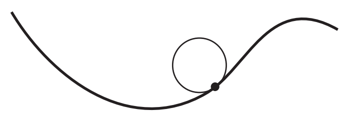
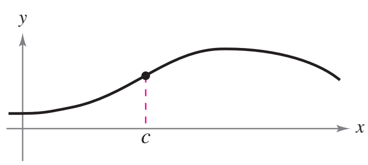
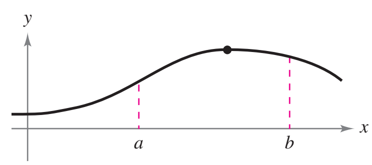
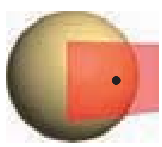
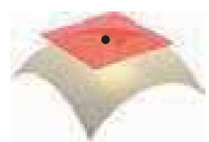
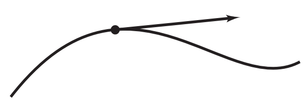
En las dos páginas siguientes se presentan algunos conceptos familiares del precálculo, listados junto con sus contrapartes del cálculo. A lo largo del texto se debe recordar que el objetivo es aprender a utilizar las fórmulas y técnicas del precálculo como fundamento para producir las fórmulas y técnicas más generales del cálculo. Quizás algunas de las "viejas fórmulas" de las páginas siguientes no resulten familiares para algunos estudiantes; repasaremos todas ellas.

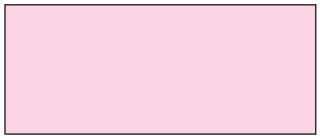
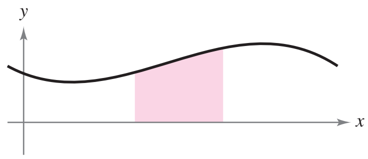
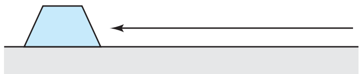
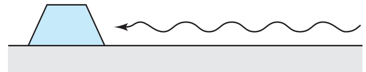
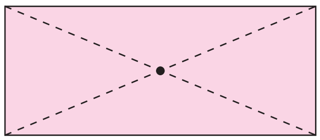
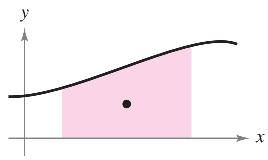
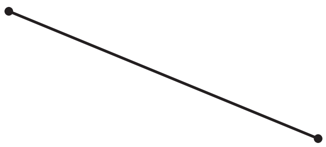
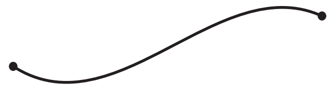
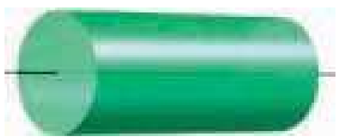
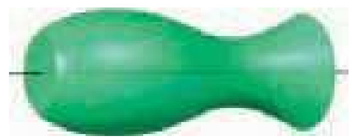
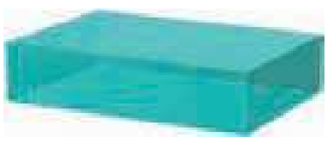
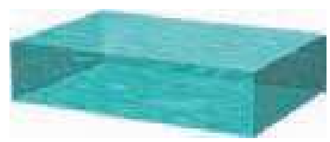
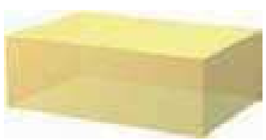
A medida que se avance en el texto, se sugiere volver a leer estos comentarios repetidas veces. Es importante saber en cuál de las tres etapas del estudio del cálculo se encuentra el estudiante. Por ejemplo, los tres primeros capítulos se desglosan como sigue.

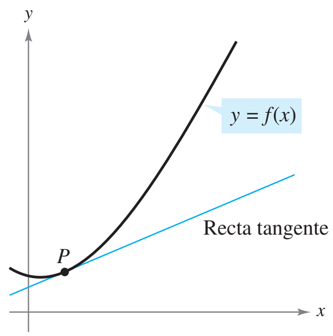
Capítulo P: Preparación para el cálculo	Matemáticas previas al cálculo o precálculo
Capítulo 1: Límites y sus propiedades	Proceso de límite
Capítulo 2: Derivación	Cálculo

AYUDA DE ESTUDIO A medida que vayamos progresando en este curso, conviene recordar que el aprendizaje del cálculo es sólo uno de sus fines. Su objetivo más importante es aprender a utilizar el cálculo para modelar y resolver problemas reales. En seguida se presentan algunas estrategias de resolución de problemas que pueden ayudar.

- Cerciorarse de entender la pregunta. ¿Cuáles son los datos? ¿Qué se le pide encontrar?
- Concebir un plan. Existen muchos métodos que se pueden utilizar: hacer un esquema, resolver un problema sencillo, trabajar hacia atrás, dibujar un diagrama, usar recursos tecnológicos y muchos otros.
- Ejecutar el plan. Asegurarse de que responde la pregunta. Enunciar la respuesta en palabras. Por ejemplo, en vez de escribir la respuesta como $x = 4.6$, sería mejor escribir "El área de la zona es 4.6 metros cuadrados".
- Revisar el trabajo. ¿Tiene sentido la respuesta? ¿Existe alguna forma de contrastarla?

Sin cálculo		**Con cálculo diferencial**	
Valor de $f(x)$ cuando $x = c$		Límite de $f(x)$ cuando x tiende a c	
Pendiente de una recta		Pendiente de una curva	
Recta secante a una curva		Recta tangente a una curva	
Ritmo o velocidad de cambio promedio entre $t = a$ y $t = b$		Ritmo o velocidad de cambio instantáneo en $t = c$	
Curvatura del círculo		Curvatura de una curva	
Altura de una curva en $x = c$		Altura máxima de una curva dentro de un intervalo	
Plano tangente a una esfera		Plano tangente a una superficie	
Dirección del movimiento a lo largo de una recta		Dirección del movimiento a lo largo de una curva	

Sin cálculo		Con cálculo integral	
Área de un rectángulo		Área bajo una curva	
Trabajo realizado por una fuerza constante		Trabajo realizado por una fuerza variable	
Centro de un rectángulo		Centroide de una región	
Longitud de un segmento de recta		Longitud de un arco	
Área superficial de un cilindro		Área superficial de un sólido de revolución	
Masa de un sólido con densidad constante		Masa de un sólido con densidad variable	
Volumen de un sólido rectangular		Volumen de la región bajo una superficie	
Suma de un número finito de términos	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S$	Suma de un número infinito de términos	$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S$



Recta tangente de la gráfica de f en P
Figura 1.1

El problema de la recta tangente

La noción de límite es fundamental en el estudio del cálculo. A continuación se dan breves descripciones de dos problemas clásicos del cálculo —*el problema de la recta tangente* y *el problema del área*— que muestran la forma en que intervienen los límites en el cálculo.

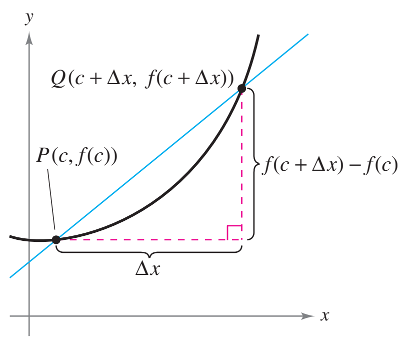
En el problema de la recta tangente, se tiene una función f y un punto P de su gráfica y se trata de encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto P, como se muestra en la figura 1.1.

Exceptuando los casos en que la recta tangente es vertical, el problema de encontrar la **recta tangente** en el punto P equivale al de determinar la *pendiente* de la recta tangente en P. Se puede calcular aproximadamente esta pendiente trazando una recta por el punto de tangencia y por otro punto sobre la curva, como se muestra en la figura 1.2*a*. Tal recta se llama **recta secante**. Si $P(c, f(c))$ es el punto de tangencia y

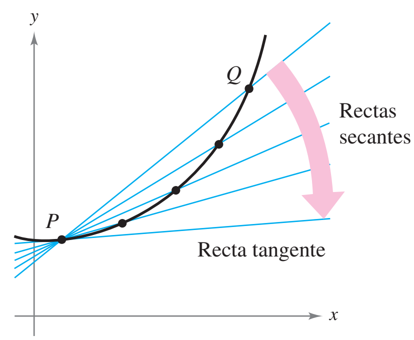
$$Q(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$$

es un segundo punto de la gráfica de f, la pendiente de la recta secante que pasa por estos dos puntos puede encontrarse al utilizar precálculo y está dada por

$$m_{sec} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{c + \Delta x - c} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$



a) La recta secante que pasa por $(c, f(c))$ y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$



b) Cuando Q tiende a P, las rectas secantes se aproximan a la recta tangente

Figura 1.2

A medida que el punto Q se aproxima al punto P, la pendiente de la recta secante se aproxima a la de la recta tangente, como se muestra en la figura 1.2*b*. Cuando existe tal "posición límite", se dice que la pendiente de la recta tangente es el **límite** de la pendiente de la recta secante (este importante problema se estudiará con más detalle en el capítulo 2).

EXPLORACIÓN

Los siguientes puntos se encuentran en la gráfica de $f(x) = x^2$.

$$Q_1(1.5, f(1.5)), \quad Q_2(1.1, f(1.1)), \quad Q_3(1.01, f(1.01)),$$
$$Q_4(1.001, f(1.001)), \quad Q_5(1.0001, f(1.0001))$$

Cada punto sucesivo se acerca más al punto $P(1, 1)$. Calcular la pendiente de la recta secante que pasa por Q_1 y P, Q_2 y P, y así sucesivamente. Utilizar una herramienta de graficación para representar estas rectas secantes. Luego utilizar los resultados para estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P.

The Mistress Fellows, Girton College, Cambridge

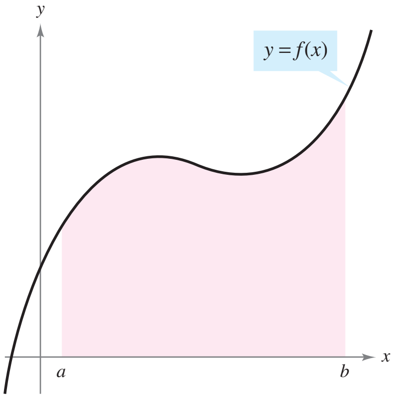
GRACE CHISHOLM YOUNG (1868-1944)

Grace Chisholm Young obtuvo su título en matemáticas en el Girton College de Cambridge, Inglaterra. Sus primeros trabajos se publicaron bajo el nombre de William Young, su marido. Entre 1914 y 1916, Grace Young publicó trabajos relativos a los fundamentos del cálculo que la hicieron merecedora del premio Gamble del Girton College.

El problema del área

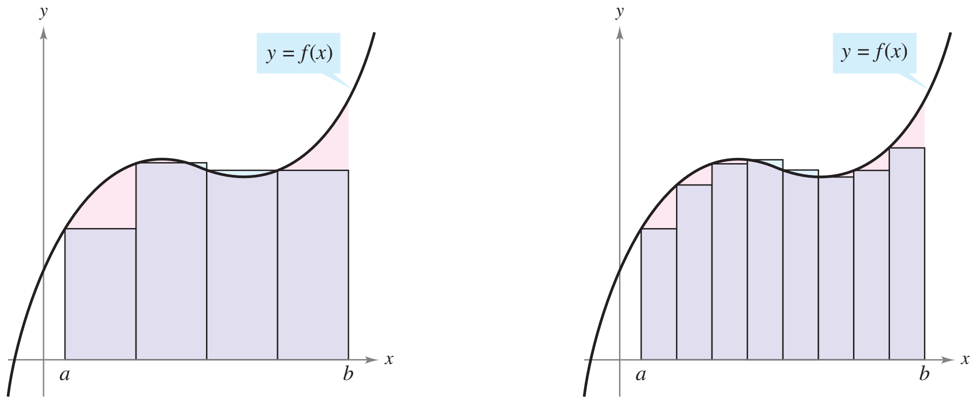
En el problema de la recta tangente se vio cómo el proceso de límite puede ser aplicado a la pendiente de una recta para determinar la pendiente de una curva general. Un segundo problema clásico del cálculo consiste en determinar el área de una región plana delimitada por gráficas de funciones. Este problema también se puede resolver mediante un proceso del límite. En este caso, el proceso del límite se aplica al área de un rectángulo con el fin de encontrar el área de una región en general.

A modo de ejemplo sencillo, considerar la zona acotada por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la figura 1.3. Se puede estimar su área usando varios rectángulos, como se muestra en la figura 1.4. Al aumentar el número de rectángulos, la aproximación mejora cada vez más, ya que se reduce el área que se pierde mediante los rectángulos. El objetivo radica en determinar el límite de la suma de las áreas de los rectángulos cuando su número crece sin fin.



Área bajo una curva
Figura 1.3

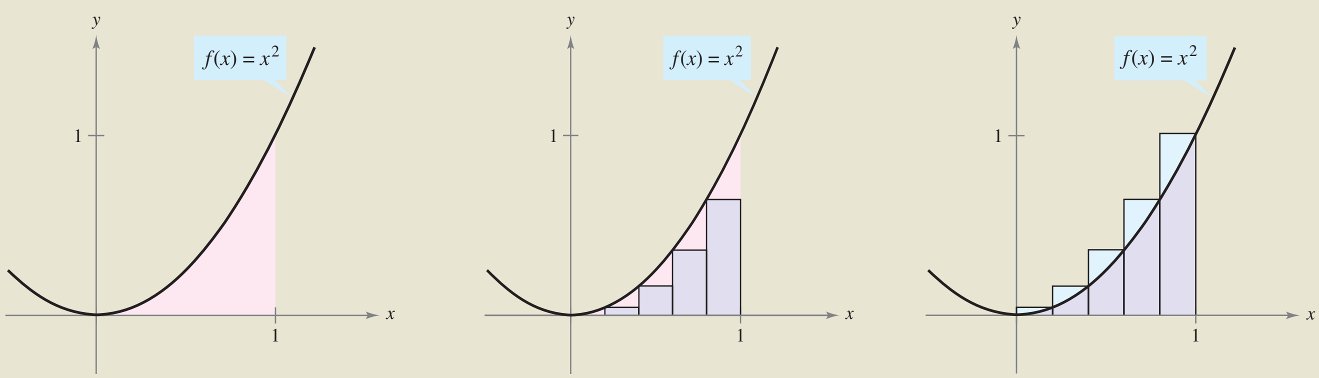
NOTA HISTÓRICA
En uno de los eventos más asombrosos ocurrido en las matemáticas, se descubrió que el problema de recta tangente y el problema del área están estrechamente relacionados. Este descubrimiento condujo al nacimiento del cálculo. Se abordará la relación que existe entre estos dos problemas cuando se estudie el teorema fundamental del cálculo en el capítulo 4.



Aproximación usando cuatro rectángulos
Aproximación usando ocho rectángulos
Figura 1.4

EXPLORACIÓN

Considerar la región acotada por las gráficas de $f(x) = x^2$, $y = 0$ y $x = 1$, que se muestra en el apartado *a*) de la figura. Se puede estimar el área de esta región empleando dos conjuntos de rectángulos, unos inscritos en ella y otros circunscritos, como se muestra en los apartados *b*) y *c*). Calcular la suma de las áreas de cada conjunto de rectángulos. Luego, utilizar los resultados para calcular aproximadamente el área de la región.



***a*)** Región acotada ***b*)** Rectángulos inscritos ***c*)** Rectángulos circunscritos

1.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 5, decidir si el problema puede resolverse mediante el uso de las matemáticas previas al cálculo o si requiere del cálculo. Resolver el problema si se puede utilizar precálculo. En caso contrario explicar el razonamiento y aproximar la solución por procedimientos gráficos o numéricos.

1. Calcular la distancia que recorre en 15 segundos un objeto que viaja a una velocidad constante de 20 pies por segundo.

2. Calcular la distancia que recorre en 15 segundos un objeto que se mueve a una velocidad $v(t) = 20 + 7 \cos t$ pies por segundo.

3. Un ciclista recorre una trayectoria que admite como modelo la ecuación $f(x) = 0.04(8x - x^2)$ donde x y $f(x)$ se miden en millas. Calcular el ritmo o velocidad de cambio en la elevación cuando $x = 2$.

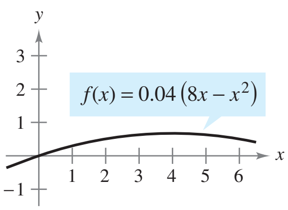


Figura para 3

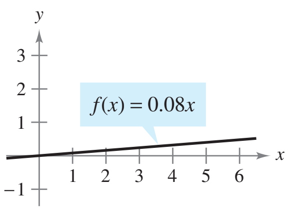
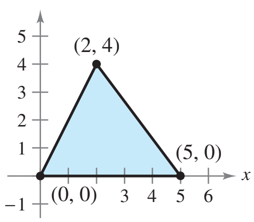


Figura para 4

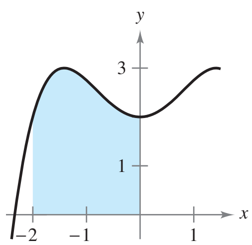
4. Un ciclista recorre una trayectoria que admite como modelo la ecuación $f(x) = 0.08x$, donde x y $f(x)$ se miden en millas. Encontrar el ritmo o velocidad de cambio de la elevación cuando $x = 2$.

5. Encontrar el área de la región sombreada.

a)



b)



6. ***Rectas secantes*** Considerar la función $f(x) = \sqrt{x}$ y el punto $P(4, 2)$ en la gráfica de f:

a) Dibujar la gráfica de f y las rectas secantes que pasan por $P(4, 2)$ y $Q(x, f(x))$ para los siguientes valores de x: 1, 3 y 5.

b) Encontrar la pendiente de cada recta secante.

c) Utilizar los resultados del apartado *b)* para estimar la pendiente de la recta tangente a f en $P(4, 2)$. Describir cómo puede mejorarse la aproximación de la pendiente.

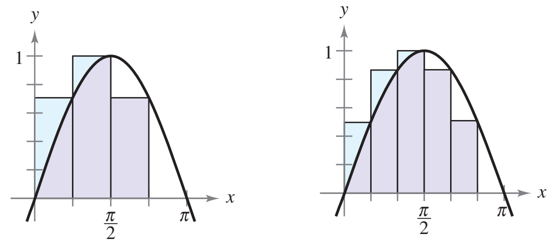
7. ***Rectas secantes*** Considerar la función $f(x) = 6x - x^2$ y el punto $P(2, 8)$ sobre la gráfica de f:

a) Dibujar la gráfica de f y las rectas secantes que pasan por $P(2, 8)$ y $Q(x, f(x))$ para los valores de x: 3, 2.5 y 1.5.

b) Encontrar la pendiente de cada recta secante.

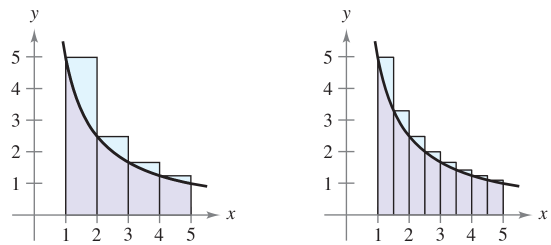
c) Utilizar los resultados de la parte *b)* para estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(2, 8)$. Describir cómo puede mejorarse la aproximación de la pendiente.

8. *a)* Utilizar los rectángulos de cada una de las gráficas para aproximar el área de la región acotada por $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$.



b) Describir cómo se podría continuar con este proceso a fin de obtener una aproximación más exacta del área.

9. *a)* Utilizar los rectángulos de cada una de las gráficas para aproximar el área de la región acotada por $y = 5/x$, $y = 0$, $x = 1$, y $x = 5$.



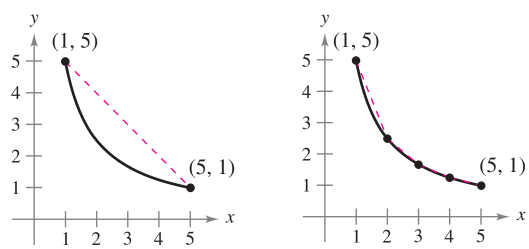
b) Describir cómo se podría continuar con este proceso a fin de obtener una aproximación más exacta del área.

Para discusión

10. ¿Cómo se describe la razón cambio instantáneo de la posición de un automóvil sobre la autopista?

Desarrollo de conceptos

11. Considerar la longitud de la gráfica de $f(x) = 5/x$, desde (1, 5) hasta (5, 1):



a) Estimar la longitud de la curva mediante el cálculo de la distancia entre sus extremos, como se muestra en la primera figura.

b) Estimar la longitud de la curva mediante el cálculo de las longitudes de los cuatro segmentos de recta, como se muestra en la segunda figura.

c) Describir cómo se podría continuar con este proceso a fin de obtener una aproximación más exacta de la longitud de la curva.

1.2 Cálculo de límites de manera gráfica y numérica

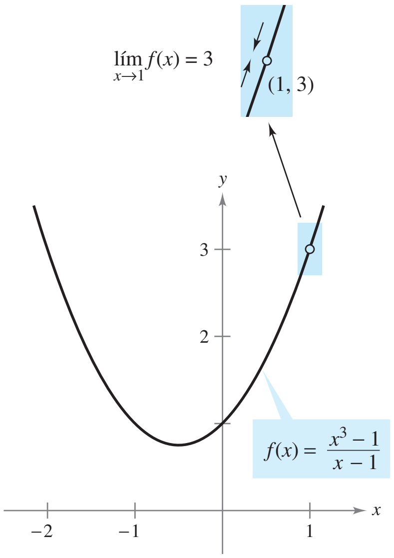
- **Estimar un límite utilizando los métodos numérico y gráfico.**
- **Aprender diferentes formas en las que un límite puede no existir.**
- **Estudiar y utilizar la definición formal de límite.**

Introducción a los límites

Suponer que se pide dibujar la gráfica de la función f dada por

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

Para todos los valores distintos de $x = 1$, es posible emplear las técnicas usuales de representación de curvas. Sin embargo, en $x = 1$, no está claro qué esperar. Para obtener una idea del comportamiento de la gráfica de f cerca de $x = 1$, se pueden usar dos conjuntos de valores de x, uno que se aproxime a 1 por la izquierda y otro que lo haga por la derecha, como se ilustra en la tabla.



El límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es 3
Figura 1.5

x se aproxima a 1 por la izquierda. → ← x se aproxima a 1 por la derecha.

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

$f(x)$ se aproxima a 3. → ← $f(x)$ se aproxima a 3.

Como se muestra en la figura 1.5, la gráfica de f es una parábola con un hueco en el punto (1, 3). A pesar de que x no puede ser igual a 1, se puede acercar arbitrariamente a 1 y, en consecuencia, $f(x)$ se acerca a 3 de la misma manera. Utilizando la notación que se emplea con los límites, se podría escribir

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$$

Esto se lee "el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 es 3".

Este análisis conduce a una descripción informal de límite. Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un número L cuando x se aproxima a c por cualquiera de los dos lados, entonces el **límite** de $f(x)$, cuando x se aproxima a c, es L. Esto se escribe

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

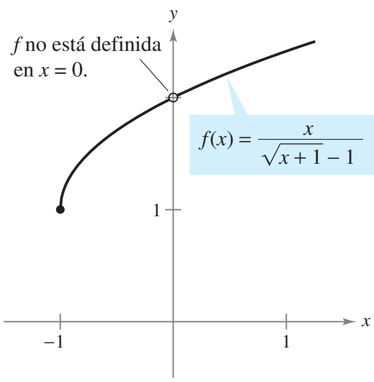
EXPLORACIÓN

El análisis anterior proporciona un ejemplo de cómo estimar un límite de *manera numérica* mediante la construcción de una tabla, o de *manera gráfica*, al dibujar un esquema. Calcular el siguiente límite de forma numérica al completar la tabla.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

x	1.75	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.25
$f(x)$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Luego utilizar una herramienta de graficación para estimar el límite.



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 0 es 2
Figura 1.6

EJEMPLO 1 Estimación numérica de un límite

Evaluar la función $f(x) = x/(\sqrt{x+1} - 1)$ en varios puntos cercanos a $x = 0$ y usar el resultado para estimar el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

Solución En la siguiente tabla se registran los valores de $f(x)$ para diversos valores de x cercanos a 0.

x se aproxima a 0 por la izquierda. → ← *x* se aproxima a 0 por la derecha.

x	−0.01	−0.001	−0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	?	2.00005	2.00050	2.00499

$f(x)$ se aproxima a 2. → ← $f(x)$ se aproxima a 2.

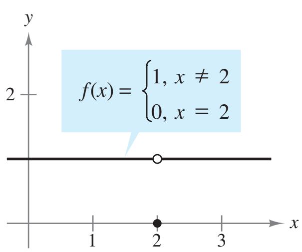
De los datos mostrados en la tabla, se puede estimar que el límite es 2. Dicho resultado se confirma por la gráfica de f (ver la figura 1.6).

Observar que en el ejemplo 1, la función no está definida en $x = 0$ y aún así $f(x)$ parece aproximarse a un límite a medida que x se aproxima a 0. Esto ocurre con frecuencia, y es importante percatarse de que la *existencia o inexistencia de f(x) en x = c no guarda relación con la existencia del límite de f(x) cuando x se aproxima a c*.

EJEMPLO 2 Cálculo de un límite

Encontrar el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2, donde f se define como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2 es 1
Figura 1.7

Solución Puesto que $f(x) = 1$ para todos los x distintos de $x = 2$, se puede concluir que el límite es 1, como se muestra en la figura 1.7. Por tanto, se puede escribir

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1.$$

El hecho de que $f(2) = 0$ no influye en la existencia ni en el valor del límite cuando x se aproxima a 2. Por ejemplo, si se hubiera definido la función como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

el límite sería el mismo.

Hasta este punto de la sección, se han calculado los límites de manera numérica y gráfica. Cada uno de estos métodos genera una estimación del límite. En la sección 1.3 se estudiarán técnicas analíticas para evaluarlos. A lo largo de este curso, se trata de desarrollar el hábito de utilizar este método de árbol para resolver problemas.

1. **Método numérico** Construir una tabla de valores.
2. **Método gráfico** Elaborar una gráfica a mano o con algún dispositivo tecnológico.
3. **Método analítico** Utilizar álgebra o cálculo.

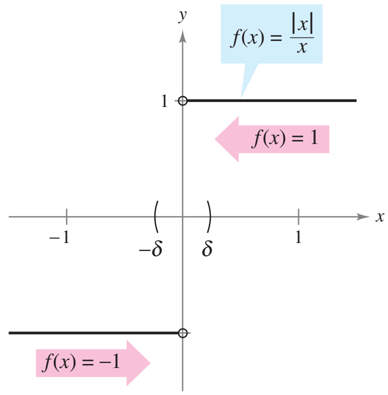
Límites que no existen

En los tres ejemplos siguientes se examinarán algunos límites que no existen.

EJEMPLO 3 Comportamiento diferente por la derecha y por la izquierda

Demostrar que el siguiente límite no existe.

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$



El $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe

Figura 1.8

Solución Considerar la gráfica de la función $f(x) = |x|/x$. De la figura 1.8 y de la definición de valor absoluto.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{Definición de valor absoluto}$$

se observa que

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Esto significa que, independientemente de cuánto se aproxime x a 0, existirán tanto valores positivos como negativos de x que darán $f(x) = 1$ y $f(x) = -1$. De manera específica, si δ (letra griega *delta* minúscula) es un número positivo, entonces los valores de x que satisfacen la desigualdad $0 < |x| < \delta$ se pueden clasificar los valores de $|x|/x$ de la siguiente manera:

$(-\delta, 0)$ — Los valores negativos de x dan como resultado $|x|/x = -1$.

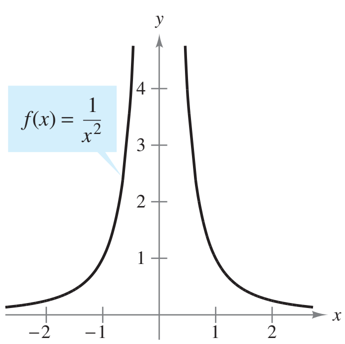
$(0, \delta)$ — Los valores positivos de x dan como resultado $|x|/x = 1$.

Debido a que $|x|/x$ tiende a un número diferente por la derecha del 0, por la izquierda que entonces el límite $\lim_{x\to 0} (|x|/x)$ no existe.

EJEMPLO 4 Comportamiento no acotado

Analizar la existencia del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}.$$



El $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe

Figura 1.9

Solución Sea $f(x) = 1/x^2$. En la figura 1.9 se puede observar que a medida que x se aproxima a 0 tanto por la derecha como por la izquierda, $f(x)$ crece sin límite. Esto quiere decir que, eligiendo un valor de x cercano a 0, se puede lograr que $f(x)$ sea tan grande como se quiera. Por ejemplo, $f(x)$ será mayor que 100 si elegimos valores de x que estén entre $\frac{1}{10}$ y 0. Es decir:

$$0 < |x| < \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^2} > 100.$$

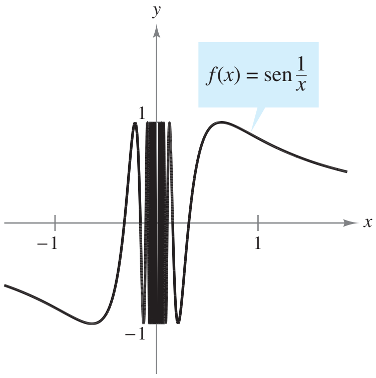
Del mismo modo, se puede obligar a que $f(x)$ sea mayor que 1 000 000 de la siguiente manera:

$$0 < |x| < \frac{1}{1\,000} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^2} > 1\,000\,000$$

Puesto que $f(x)$ no se aproxima a ningún número real L cuando x se aproxima a 0, se puede concluir que el límite no existe.

EJEMPLO 5 Comportamiento oscilante

Analizar la existencia del límite $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.



El $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe
Figura 1.10

Solución Sea $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. En la figura 1.10 se puede observar que, cuando x se aproxima a 0, $f(x)$ oscila entre -1 y 1. Por consiguiente, el límite no existe puesto que, por pequeño que se elija δ, siempre es posible encontrar x_1 y x_2 que disten menos de δ unidades de 0 tales que $\operatorname{sen}(1/x_1) = 1$ y $\operatorname{sen}(1/x_2) = -1$, como se muestra en la tabla.

x	$2/\pi$	$2/3\pi$	$2/5\pi$	$2/7\pi$	$2/9\pi$	$2/11\pi$	$x \to 0$
sen (1/x)	1	-1	1	-1	1	-1	El límite no existe.

COMPORTAMIENTOS ASOCIADOS A LA NO EXISTENCIA DE UN LÍMITE

1. $f(x)$ se aproxima a números diferentes por la derecha de c que por la izquierda.
2. $f(x)$ aumenta o disminuye sin límite a medida que x se aproxima a c.
3. $f(x)$ oscila entre dos valores fijos a medida que x se aproxima a c.

Existen muchas otras funciones interesantes que presentan comportamientos inusuales. Una de las que se cita con mayor frecuencia es la *función de Dirichlet*:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional.} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

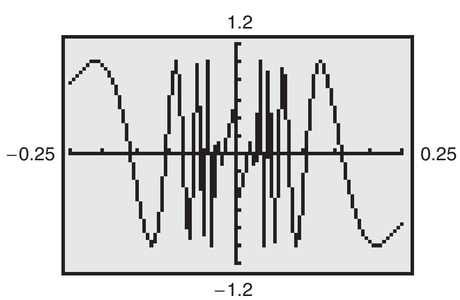
Puesto que esta función *carece de límite* en cualquier número real c, *no es continua* en cualquier número real c. La continuidad se estudiará con más detalle en la sección 1.4.

The Granger Collection

PETER GUSTAV DIRICHLET (1805-1859)

En el desarrollo temprano del cálculo, la definición de una función era mucho más restrictiva que en la actualidad, y "funciones" como la de Dirichlet no se hubieran tomado en consideración. La definición moderna de función se debe al matemático alemán Peter Gustav Dirichlet.

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Cuando se utilice una herramienta de graficación para investigar el comportamiento de una función cerca del valor de x en el que se intenta evaluar su límite, recordar que no siempre se puede confiar en las imágenes dibujadas. Al utilizar una herramienta de graficación para dibujar la gráfica de la función del ejemplo 5 en un intervalo que contenga al 0, es muy probable que obtenga una gráfica incorrecta, como la que se muestra en la figura 1.11. El motivo por el cual una herramienta de graficación no puede mostrar la gráfica correcta radica en que la gráfica cuenta con oscilaciones infinitas en cualquier intervalo que contenga al 0.



Gráfica incorrecta de $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$
Figura 1.11

Definición formal de límite

Examinar nuevamente la descripción informal de límite. Si $f(x)$ se acerca de manera arbitraria a un número L a medida que x se aproxima a c por cualquiera de sus lados, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L, y se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

A primera vista, esta descripción parece muy técnica. No obstante, es informal porque aún hay que conferir un significado preciso a las frases:

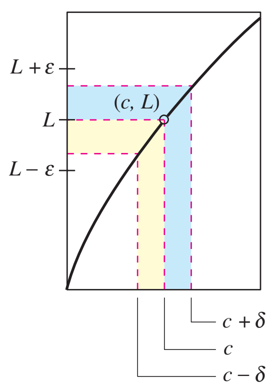
"$f(x)$ se acerca arbitrariamente a L"

y

"x se aproxima a c".

La primera persona en asignar un significado matemático riguroso a estas dos frases fue Augustin-Louis Cauchy. Su **definición ε-δ de límite** es la que se suele utilizar en la actualidad.

En la figura 1.12, sea ε (minúscula de la letra griega *épsilon*) la representación de un número positivo (pequeño). Entonces, la frase "$f(x)$ se acerca arbitrariamente a L" significa que $f(x)$ pertenece al intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Al usar la noción de valor absoluto, esto se puede escribir como



Definición ε-δ del límite de $f(x)$ cuando x tiende a c
Figura 1.12

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Del mismo modo, la frase "x se aproxima a c" significa que existe un número positivo δ tal que x pertenece al intervalo $(c - \delta, c)$, o bien al intervalo $(c, c + \delta)$. Esto puede expresarse de manera concisa mediante la doble desigualdad

$$0 < |x - c| < \delta.$$

La primera desigualdad

$$0 < |x - c| \qquad \text{La distancia entre } x \text{ y } c \text{ es mayor que 0.}$$

expresa que $x \neq c$. La segunda desigualdad

$$|x - c| < \delta \qquad x \text{ está a menos de } \delta \text{ unidades de } c.$$

indica que x está a una distancia de δ menor que c.

DEFINICIÓN DE LÍMITE

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (salvo posiblemente en c) y L un número real. La afirmación

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe uno $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

NOTA A lo largo de todo el texto, la expresión

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

lleva implícitas dos afirmaciones: el límite existe *y* es igual a L. ■

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para conocer más sobre la introducción del rigor al cálculo, consulte "Who Gave You The Epsilon? Cauchy an the Origins of Rigorous Calculus" de Judith V. Grabiner, en *The American Mathematical Monthly*.

Algunas funciones carecen de límite cuando $x \to c$, pero aquellas que lo poseen no pueden tener dos límites diferentes cuando $x \to c$. Es decir, *si el límite de una función existe, entonces es único* (ver el ejercicio 79).

Los tres ejemplos siguientes ayudan a entender mejor la definición ε-δ de límite.

EJEMPLO 6 Determinar δ para un ε dado

Dado el límite

$$\lim_{x \to 3}(2x - 5) = 1$$

encontrar δ tal que $|(2x - 5) - 1| < 0.01$, siempre que $0 < |x - 3| < \delta$.

Solución En este problema se trabaja con un valor dado de $\varepsilon : \varepsilon = 0.01$. Para encontrar un δ apropiado, se observa que

$$|(2x - 5) - 1| = |2x - 6| = 2|x - 3|.$$

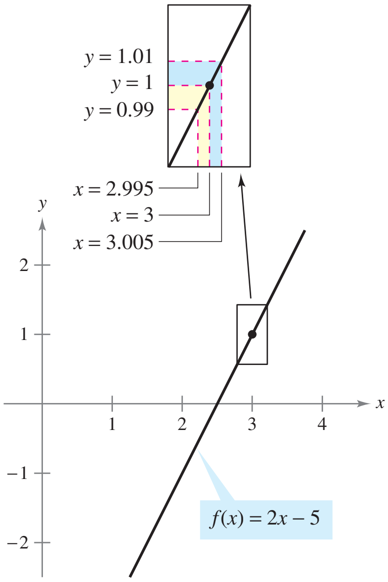
Como la desigualdad $|(2x - 5) - 1| < 0.01$ es equivalente a $2|x - 3| < 0.01$, se puede escoger $\delta = \frac{1}{2}(0.01) = 0.005$. Esta opción funciona porque

$$0 < |x - 3| < 0.005$$

lo que implica que

$$|(2x - 5) - 1| = 2|x - 3| < 2(0.005) = 0.01$$

tal como se muestra en la figura 1.13.



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 3 es 1
Figura 1.13

NOTA En el ejemplo 6, obsérvese que 0.005 es el *mayor* valor de δ que garantiza que $|(2x - 5) - 1| < 0.01$, siempre que $0 < |x - 3| < \delta$. Todo valor positivo de δ *menor* también debe satisfacer esta condición.

En el ejemplo 6 se encontró un valor de δ para un ε *dado*, lo que no necesariamente demuestra la existencia del límite. Para hacerlo, se debe probar que es posible encontrar un δ para *todo* ε, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 Aplicación de la definición ε-δ de límite

Utilizar la definición ε-δ de límite para demostrar que

$$\lim_{x \to 2}(3x - 2) = 4.$$

Solución Probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|(3x - 2) - 4| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - 2| < \delta$. Puesto que la elección de δ depende de ε, es necesario establecer una relación entre los valores absolutos $|(3x - 2) - 4|$ y $|x - 2|$.

$$|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = 3|x - 2|$$

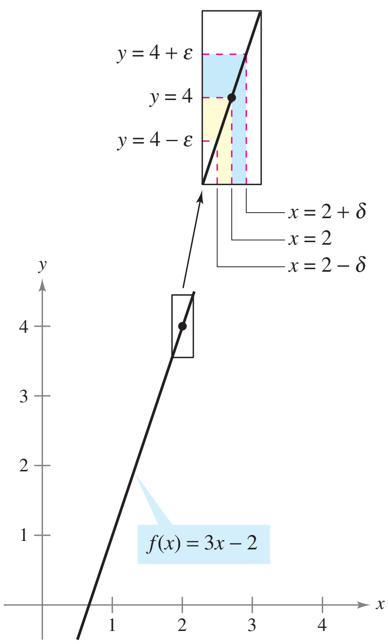
De tal manera, para cada $\varepsilon > 0$ dado, se puede tomar $\delta = \varepsilon/3$. Esta opción funciona porque

$$0 < |x - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

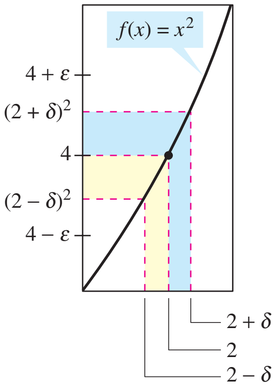
implica que

$$|(3x - 2) - 4| = 3|x - 2| < 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

como muestra la figura 1.14.



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2 es 4
Figura 1.14



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2 es 4

Figura 1.15

EJEMPLO 8 Aplicación de la definición ε-δ de límite

Usar la definición ε-δ de límite para demostrar que

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

Solución Probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta.$$

Para encontrar un δ adecuado, comenzamos por escribir $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$. Para todo x del intervalo $(1, 3)$, $x + 2 < 5$ se sabe que $|x + 2| < 5$. De tal manera, se toma δ igual al mínimo entre $\varepsilon/5$ y 1, resulta que, siempre que $0 < |x - 2| < \delta$, se tiene que

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < \left(\frac{\varepsilon}{5}\right)(5) = \varepsilon$$

como se muestra en la figura 1.15.

A lo largo de este capítulo, se utilizará la definición ε-δ de límite principalmente para demostrar teoremas relativos a los límites y para establecer la existencia o inexistencia de tipos de límites específicos. Para *calcular* límites, se describirán técnicas más fáciles de usar que la definición ε-δ de límite.

1.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, completar la tabla y utilizar el resultado para estimar el límite. Representar la función utilizando una herramienta de graficación, con el fin de confirmar su resultado.

1. $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - 3x - 4}$

x	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1
$f(x)$						

2. $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$						

3. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 6} - \sqrt{6}}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

4. $\displaystyle \lim_{x \to -5} \frac{\sqrt{4 - x} - 3}{x + 5}$

x	-5.1	-5.01	-5.001	-4.999	-4.99	-4.9
$f(x)$						

5. $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{[1/(x + 1)] - (1/4)}{x - 3}$

x	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1
$f(x)$						

6. $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{[x/(x + 1)] - (4/5)}{x - 4}$

x	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1
$f(x)$						

7. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

8. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

En los ejercicios 9 a 14, elaborar una tabla de valores para la función y utilizar el resultado para estimar el valor del límite. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y confirmar el resultado.

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x^2+x-6}$

10. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2+7x+12}$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^6-1}$

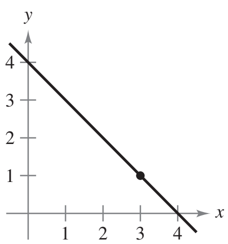
12. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

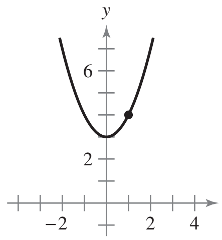
14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\tan 2x}$

En los ejercicios 15 a 24, utilizar la gráfica para encontrar el límite (si es que existe). Si el límite no existe, explicar por qué.

15. $\lim\limits_{x\to 3} (4-x)$

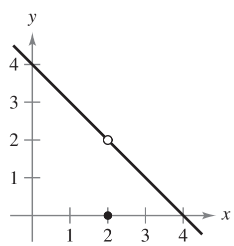


16. $\lim\limits_{x\to 1} (x^2+3)$



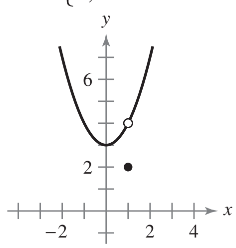
17. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}4-x, & x\neq 2\\ 0, & x=2\end{cases}$$

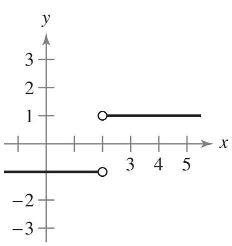


18. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

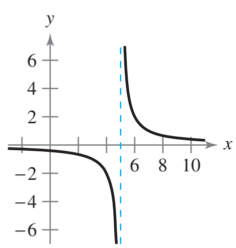
$$f(x)=\begin{cases}x^2+3, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$$



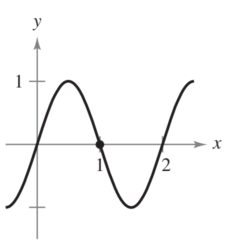
19. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$



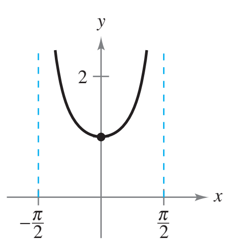
20. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2}{x-5}$



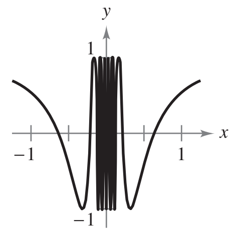
21. $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{sen} \pi x$



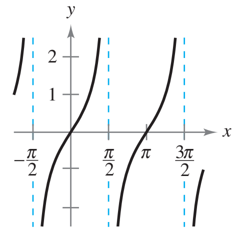
22. $\lim\limits_{x\to 0} \sec x$



23. $\lim\limits_{x\to 0} \cos \dfrac{1}{x}$

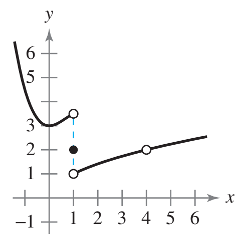


24. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \tan x$

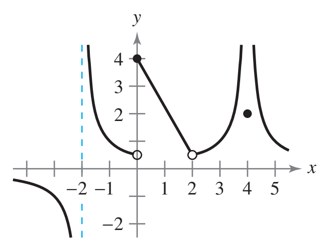


En los ejercicios 25 y 26, utilizar la gráfica de la función *f* para determinar si existe el valor de la cantidad dada. De ser así, ubicarla; si no existe, explicar por qué.

25. *a)* $f(1)$
b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
c) $f(4)$
d) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

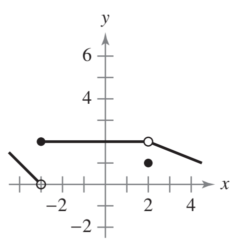


26. *a)* $f(-2)$
b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$
c) $f(0)$
d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
e) $f(2)$
f) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
g) $f(4)$
h) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

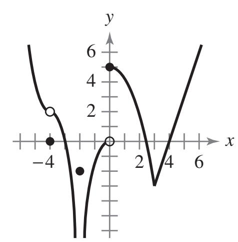


En los ejercicios 27 y 28, utilizar la gráfica de *f* con el fin de identificar los valores de *c* para los que existe el límite $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.

27.



28.



En los ejercicios 29 y 30, dibujar la gráfica de *f*. Después identificar los valores de *c* para los que existe el límite $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.

29. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq 2\\ 8-2x, & 2<x<4\\ 4, & x\geq 4\end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x, & x<0\\ 1-\cos x, & 0\leq x\leq \pi\\ \cos x, & x>\pi\end{cases}$

En los ejercicios 31 y 32, construir una gráfica de una función *f* que satisfaga los valores indicados (existen muchas respuestas correctas).

31. $f(0)$ no está definido.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$

$f(2) = 6$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

32. $f(-2) = 0$

$f(2) = 0$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe.

33. ***Modelo matemático*** Por una llamada telefónica de larga distancia, un hotel hace un cargo de \$9.99 para el primer minuto y de \$0.79 por cada minuto o fracción adicional. Una fórmula para el costo está dada por

$$C(t) = 9.99 - 0.79[\![-(t-1)]\!]$$

donde t es el tiempo en minutos.

(*Nota*: $[\![x]\!]$ = mayor entero n tal que $n \le x$. Por ejemplo, $[\![3.2]\!] = 3$ y $[\![-1.6]\!] = -2$.)

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar la gráfica de la función de costo para $0 < t \le 6$.

b) Utilizar la gráfica para completar la siguiente tabla y observar el comportamiento de la función a medida que t tiende a 3.5. Utilizar la gráfica y la tabla para encontrar

$$\lim_{t\to 3.5} C(t).$$

t	3	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	4
C				?			

c) Utilizar la gráfica para completar la siguiente tabla y observar el comportamiento de la función a medida que t se aproxima a 3.

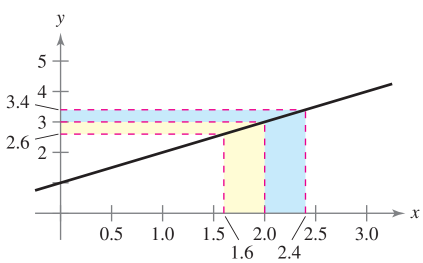
t	2	2.5	2.9	3	3.1	3.5	4
C				?			

¿Existe el límite de $C(t)$ cuando t se aproxima a 3? Explicar la respuesta.

34. Realizar de nuevo el ejercicio anterior, considerando ahora

$$C(t) = 5.79 - 0.99[\![-(t-1)]\!].$$

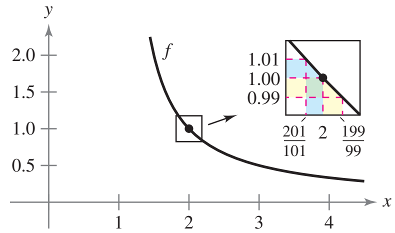
35. En la figura se muestra la gráfica de $f(x) = x + 1$. Encontrar un δ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 3| < 0.4$.



36. La gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

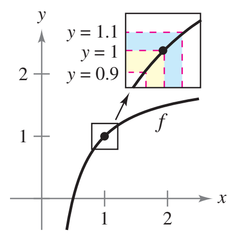
se muestra en la figura. Encontrar un δ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 1| < 0.01$.



37. La gráfica de

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

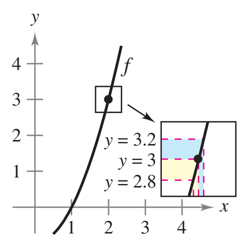
se muestra en la figura. Encontrar un δ tal que si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces $|f(x) - 1| < 0.1$.



38. La gráfica de

$$f(x) = x^2 - 1$$

se muestra en la figura. Encontrar un δ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 3| < 0.2$.



En los ejercicios 39 a 42, encontrar el límite *L*. Luego la $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < 0.01$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$.

39. $\lim\limits_{x\to 2} (3x + 2)$

40. $\lim\limits_{x\to 4} \left(4 - \dfrac{x}{2}\right)$

41. $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 3)$

42. $\lim\limits_{x\to 5} (x^2 + 4)$

El símbolo ![icono] *señala un ejercicio en el que se pide utilizar una herramienta de graficación o un sistema simbólico de álgebra computarizado. La solución de los demás ejercicios también puede simplificarse mediante el uso de la tecnología apropiada.*

En los ejercicios 43 a 54, encontrar el límite *L*. Luego utilizar la definición ε-δ de límite para demostrar que el límite es *L*.

43. $\lim_{x\to 4} (x + 2)$

44. $\lim_{x\to -3} (2x + 5)$

45. $\lim_{x\to -4} \left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

46. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{5}x + 7\right)$

47. $\lim_{x\to 6} 3$

48. $\lim_{x\to 2} (-1)$

49. $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}$

50. $\lim_{x\to 4} \sqrt{x}$

51. $\lim_{x\to -5} |x - 5|$

52. $\lim_{x\to 6} |x - 6|$

53. $\lim_{x\to 1} (x^2 + 1)$

54. $\lim_{x\to -3} (x^2 + 3x)$

55. ¿Cuál es el límite de $f(x) = 4$ cuando x tiende a π?

56. ¿Cuál es el límite de $g(x) = x$ cuando x tiende a π?

Redacción **En los ejercicios 57 a 60, representar la función con una herramienta de graficación y estimar el límite (si existe). ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Puede detectar un posible error en la determinación del dominio mediante un mero análisis de la gráfica que genera la herramienta de graficación? Escribir unas líneas acerca de la importancia de examinar una función de manera analítica además de hacerlo gráficamente.**

57. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 5} - 3}{x - 4}$

$\lim_{x\to 4} f(x)$

58. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 4x + 3}$

$\lim_{x\to 3} f(x)$

59. $f(x) = \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

$\lim_{x\to 9} f(x)$

60. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

$\lim_{x\to 3} f(x)$

Desarrollo de conceptos

61. Escribir una breve descripción de lo que significa la notación

$\lim_{x\to 8} f(x) = 25.$

62. La definición de límite de la página 52 requiere que f sea una función definida sobre un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en c. ¿Por qué es necesaria esta condición?

63. Identificar tres tipos de comportamiento relacionados con la inexistencia de un límite. Ejemplificar cada tipo con una gráfica de una función.

Para discusión

64. *a*) Si $f(2) = 4$, ¿se puede concluir algo acerca del límite de f cuando x tiende a 2? Explicar.

b) Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 4, ¿se puede concluir algo acerca de $f(2)$? Explicar.

65. ***Joyería*** Un joyero ajusta un anillo de tal manera que su circunferencia interna es de 6 cm.

a) ¿Cuál es el radio del anillo?

b) Si la circunferencia interna del anillo puede variar entre 5.5 y 6.5 centímetros, ¿cuánto puede variar su radio?

c) Utilizar la definición ε-δ de límite para describir esta situación. Identificar ε y δ.

66. ***Deportes*** Un fabricante de artículos deportivos diseña una pelota de golf que tiene un volumen de 2.48 pulgadas cúbicas.

a) ¿Cuál es el radio de la pelota de golf?

b) Si el volumen de la pelota puede variar entre 2.45 y 2.51 pulgadas cúbicas, ¿cuánto puede variar su radio?

c) Utilizar la definición ε-δ de límite para describir esta situación. Identificar ε y δ.

67. Considerar la función $f(x) = (1 + x)^{1/x}$. Calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$$

mediante la evaluación de f con valores de x cercanos a 0. Construya la gráfica de f.

68. Considerar la función

$$f(x) = \frac{|x + 1| - |x - 1|}{x}.$$

Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x + 1| - |x - 1|}{x}$$

mediante la evaluación de f con valores de x cercanos a 0. Construir la gráfica de f.

69. ***Análisis gráfico*** La afirmación

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

significa que a cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| < \varepsilon.$$

Si $\varepsilon = 0.001$, entonces

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| < 0.001.$$

Utilizar una herramienta de graficación para representar ambos lados de esta desigualdad. Usando la función *zoom*, encontrar un intervalo $(2 - \delta, 2 + \delta)$ tal que la gráfica del lado izquierdo quede por debajo de la del miembro de la derecha.

70. ***Análisis gráfico*** La afirmación

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = 3$$

significa que a cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{x^2 - 3x}{x - 3} - 3\right| < \varepsilon.$$

Si $\varepsilon = 0.001$, entonces

$$\left|\frac{x^2 - 3x}{x - 3} - 3\right| < 0.001.$$

Utilizar una herramienta de graficación para representar ambos lados de esta desigualdad. Usando la función *zoom*, encontrar un intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$ tal que la gráfica del lado izquierdo quede por debajo de la del miembro de la derecha.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 71 a 74, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

71. Si f no está definida en $x = c$, no existe el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c.

72. Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es 0, debe existir un número k tal que $f(k) < 0.001$.

73. Si $f(c) = L$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

74. Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

En los ejercicios 75 y 76, considerar la función $f(x) = \sqrt{x}$.

75. ¿Es $\lim_{x\to 0.25} \sqrt{x} = 0.5$ una afirmación verdadera? Explicar la respuesta.

76. ¿Es $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ una afirmación verdadera? Explicar la respuesta.

77. Utilizar una herramienta de graficación para evaluar el límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} nx}{x}$, para diferentes valores de n. ¿Qué se observa?

78. Utilizar una herramienta de graficación para evaluar el límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan nx}{x}$, para diferentes valores de n. ¿Qué se observa?

79. Demostrar que si existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$, ese límite debe ser único. [*Sugerencia*: Sea

$$\lim_{x\to c} f(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} f(x) = L_2$$

y demostrar que $L_1 = L_2$.]

80. Considerar la recta $f(x) = mx + b$, donde $m \neq 0$. Aplicando la definición ε-δ de límite, demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = mc + b$.

81. Demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ es equivalente a $\lim_{x\to c} [f(x) - L] = 0$.

82. *a*) Dado que

$$\lim_{x\to 0} (3x+1)(3x-1)x^2 + 0.01 = 0.01$$

demostrar que existe un intervalo abierto (a, b) que contiene al 0, tal que $(3x + 1)(3x - 1)x^2 + 0.01 > 0$ para todas las $x \neq 0$ en (a, b).

b) Dado que $\lim_{x\to c} g(x) = L$, donde $L > 0$, demostrar que existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c, tal que $g(x) > 0$ para todos los $x \neq c$ en (a, b).

83. ***Programación*** En una herramienta de graficación programable, escribir un programa que estime $\lim_{x\to c} f(x)$.

Suponer que el programa sólo se aplicará a funciones cuyo límite existe cuando x se aproxima a c. Sea $y_1 = f(x)$, generar dos listas cuyas entradas formen los pares ordenados

$$(c \pm [0.1]^n, f(c \pm [0.1]^n))$$

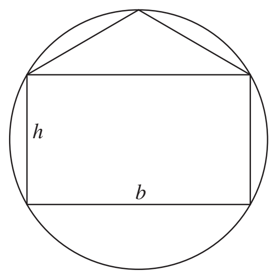
para $n = 0, 1, 2, 3$ y 4.

84. ***Programación*** Utilizar el programa elaborado en el ejercicio 83 para estimar el límite

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}.$$

Preparación del examen Putnam

85. Inscribir en un círculo con radio 1 un rectángulo con base b y altura h, y un triángulo isósceles con base b, como se muestra en la figura. ¿Para qué valor de h tienen la misma área el rectángulo y el triángulo?



86. Un cono recto tiene una base con radio 1 y una altura de 3. Se inscribe un cubo dentro de él, de tal manera que una de las caras del cubo queda contenida en la base del cono. ¿Cuál es la longitud lateral del cubo?

1.3 Cálculo analítico de límites

- **Evaluar un límite mediante el uso de las propiedades de los límites.**
- **Desarrollar y usar una estrategia para el cálculo de límites.**
- **Evaluar un límite mediante el uso de técnicas de cancelación y de racionalización.**
- **Evaluar un límite mediante el uso del teorema del encaje.**

Propiedades de los límites

En la sección 1.2 se vio que el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c no depende del valor de f en $x = c$. Sin embargo, puede darse el caso de que este límite sea $f(c)$. En esta situación, se puede evaluar el límite por **sustitución directa**. Esto es:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c). \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } c.$$

Las funciones con este *buen comportamiento* son **continuas en c**. En la sección 1.4 se examinará con más detalle este concepto.

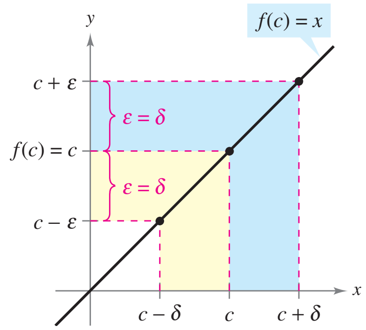


Figura 1.16

NOTA Cuando se tengan nuevas notaciones o símbolos en matemáticas, hay que cerciorarse de conocer cómo se leen. Por ejemplo, el límite del ejemplo 1c se lee "el límite de x^2 cuando x se aproxima a 2 es 4".

TEOREMA 1.1 ALGUNOS LÍMITES BÁSICOS

Si b y c son números reales y n un entero positivo:

1. $\lim_{x\to c} b = b$ **2.** $\lim_{x\to c} x = c$ **3.** $\lim_{x\to c} x^n = c^n$

DEMOSTRACIÓN Para comprobar la propiedad 2 del teorema 1.1, es necesario demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|x - c| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$. Para lograrlo, elegir $\delta = \varepsilon$. Entonces, la segunda desigualdad lleva implícita a la primera, como se muestra en la figura 1.16. Con esto se realiza la comprobación. (Las comprobaciones de las demás propiedades de los límites de esta sección se encuentran en el apéndice A o se analizan en los ejercicios.)

EJEMPLO 1 Evaluación de límites básicos

a) $\lim_{x\to 2} 3 = 3$ ***b)*** $\lim_{x\to -4} x = -4$ ***c)*** $\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$

TEOREMA 1.2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Si b y c son números reales y n un entero positivo, f y g son funciones con los límites siguientes:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x) = K$$

1. Múltiplo escalar: $\lim_{x\to c} [b f(x)] = bL$

2. Suma o diferencia: $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$

3. Producto: $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)] = LK$

4. Cociente: $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$, siempre que $K \neq 0$

5. Potencias: $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = L^n$

EJEMPLO 2 Límite de un polinomio

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(4x^2+3) &= \lim_{x\to 2} 4x^2 + \lim_{x\to 2} 3 && \text{Propiedad 2.}\\ &= 4\left(\lim_{x\to 2} x^2\right) + \lim_{x\to 2} 3 && \text{Propiedad 1.}\\ &= 4(2^2)+3 && \text{Ejemplo 1.}\\ &= 19 && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$

En el ejemplo 2, se observa que el límite (cuando $x \to 2$) de la *función polinomial* $p(x) = 4x^2 + 3$ es simplemente el valor de p en $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2} p(x) = p(2) = 4(2^2) + 3 = 19.$$

Esta propiedad de *sustitución directa* es válida para todas las funciones polinomiales y racionales cuyos denominadores no se anulen en el punto considerado.

TEOREMA 1.3 LÍMITES DE LAS FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

Si p es una función polinomial y c un número real, entonces:

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c).$$

Si r es una función racional dada por $r(x) = p(x)/q(x)$ y c un número real tal que $q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}.$$

EJEMPLO 3 Límite de una función racional

Encontrar el límite: $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+2}{x+1}$.

Solución Puesto que el denominador no es 0 cuando $x = 1$, se puede aplicar el teorema 1.3 para obtener

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{1^2+1+2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Las funciones polinomiales y racionales son dos de los tres tipos básicos de funciones algebraicas. El siguiente teorema se refiere al límite del tercer tipo de función algebraica: el que contiene un radical. Ver la demostración de este teorema en el apéndice A.

EL SÍMBOLO DE RAÍZ CUADRADA

El primer uso de un símbolo para denotar a la raíz cuadrada data del siglo XVI. Al principio, los matemáticos emplearon el símbolo $\surd$, que tiene sólo dos trazos. Éste se eligió por su parecido con una *r* minúscula, para representar la palabra latina *radix*, que significa raíz.

TEOREMA 1.4 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN RADICAL

Si n es un entero positivo. El siguiente límite es válido para toda c si n es impar, y para toda $c > 0$ si n es par:

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

El siguiente teorema aumentará notablemente su capacidad para calcular límites, ya que muestra cómo tratar el límite de una función compuesta. Ver la demostración de este teorema en el apéndice A.

TEOREMA 1.5 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si f y g son funciones tales que $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to L} f(x) = f(L)$, entonces:

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(L).$$

EJEMPLO 4 Límite de una función compuesta

***a*)** Puesto que

$$\lim_{x\to 0} (x^2 + 4) = 0^2 + 4 = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$$

se sigue que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4} = 2.$$

***b*)** Puesto que

$$\lim_{x\to 3} (2x^2 - 10) = 2(3^2) - 10 = 8 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

se sigue que

$$\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{2x^2 - 10} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Se ha visto que los límites de muchas funciones algebraicas se pueden calcular por medio de la sustitución directa. Las seis funciones trigonométricas básicas también cuentan con esta deseable propiedad, como se muestra en el siguiente teorema (presentado sin demostración).

TEOREMA 1.6 LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea c un número real en el dominio de una función trigonométrica dada.

1. $\lim\limits_{x\to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c$ **2.** $\lim\limits_{x\to c} \cos x = \cos c$

3. $\lim\limits_{x\to c} \tan x = \tan c$ **4.** $\lim\limits_{x\to c} \cot x = \cot c$

5. $\lim\limits_{x\to c} \sec x = \sec c$ **6.** $\lim\limits_{x\to c} \csc x = \csc c$

EJEMPLO 5 Límites de funciones trigonométricas

***a*)** $\lim\limits_{x\to 0} \tan x = \tan(0) = 0$

***b*)** $\lim\limits_{x\to \pi} (x \cos x) = \left(\lim\limits_{x\to \pi} x\right)\left(\lim\limits_{x\to \pi} \cos x\right) = \pi \cos(\pi) = -\pi$

***c*)** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}^2 x = \lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)^2 = 0^2 = 0$

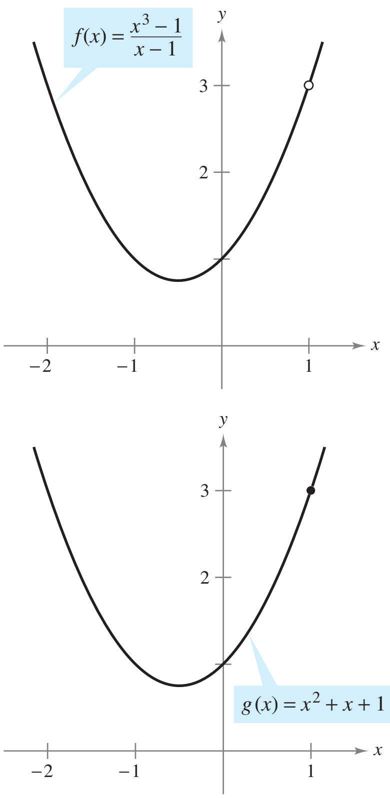
Una estrategia para el cálculo de límites

En las tres páginas previas se han estudiado diversos tipos de funciones cuyos límites pueden calcularse mediante sustitución directa. Lo anterior, aunado al teorema siguiente, permite desarrollar una estrategia para calcular límites. Ver la demostración de este teorema en el apéndice A.

TEOREMA 1.7 FUNCIONES QUE COINCIDEN EN TODO SALVO EN UN PUNTO

Sea c un número real y $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene a c. Si existe el límite de $g(x)$ cuando x se aproxima a c, entonces también existe el límite de $f(x)$ y

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x).$$



f y g coinciden salvo en un punto
Figura 1.17

EJEMPLO 6 Cálculo del límite de una función

Encontrar el límite: $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Solución Sea $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$. Al factorizar y cancelar factores, f se puede escribir como

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x-1)}} = x^2 + x + 1 = g(x), \qquad x \neq 1.$$

De tal modo, para todos los valores de x distintos de $x = 1$, las funciones f y g coinciden, como se muestra en la figura 1.17. Puesto que el $\lim_{x\to 1} g(x)$ existe, se puede aplicar el teorema 1.7 y concluir que f y g tienen el mismo límite en $x = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} && \text{Factorizar.}\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{x-1}} && \text{Cancelar factores idénticos o factores comunes.}\\
&= \lim_{x\to 1} (x^2 + x + 1) && \text{Aplicar el teorema 1.7.}\\
&= 1^2 + 1 + 1 && \text{Usar sustitución directa.}\\
&= 3 && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

UNA ESTRATEGIA PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES

1. Aprender a reconocer cuáles límites pueden evaluarse por medio de la sustitución directa (estos límites se enumeran en los teoremas 1.1 a 1.6).
2. Si el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c *no se puede evaluar* por sustitución directa, tratar de encontrar una función g que coincida con f para todo x distinto de $x = c$. [Seleccionar una g tal que el límite de $g(x)$ *se pueda evaluar* por medio de la sustitución directa.]
3. Aplicar el teorema 1.7 para concluir *de manera analítica* que
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = g(c).$$
4. Utilizar una *gráfica* o una *tabla* para respaldar la conclusión.

AYUDA DE ESTUDIO Cuando se aplique esta estrategia al cálculo de límites, recordar que algunas funciones no tienen límite (cuando x se aproxima a c). Por ejemplo, el siguiente límite no existe

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 1}{x - 1}.$$

Técnicas de cancelación y de racionalización

En los ejemplos 7 y 8 se muestran dos técnicas para calcular límites de manera analítica. La primera utiliza la cancelación de factores comunes y la segunda, la racionalización del numerador de una fracción.

EJEMPLO 7 Técnica de cancelación

Encontrar el límite: $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$.

Solución Aunque se trata del límite de una función racional, *no se puede* aplicar el teorema 1.3 debido a que el límite del denominador es 0.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3} (x^2 + x - 6) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -3} (x + 3) = 0 \end{cases}$$

La sustitución directa falla.

Puesto que el límite del numerador también es 0, numerador y denominador tienen un *factor común*: $(x + 3)$. Por tanto, para toda $x \neq -3$, se cancela este factor para obtener

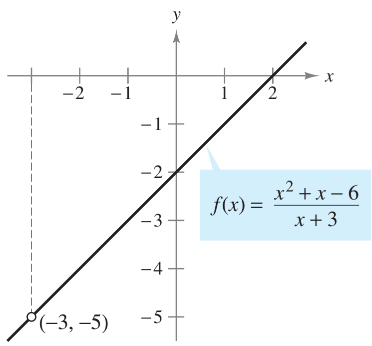
$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \frac{\cancel{(x + 3)}(x - 2)}{\cancel{x + 3}} = x - 2 = g(x), \qquad x \neq -3.$$

Empleando el teorema 1.7, se sigue que

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \lim_{x\to -3} (x - 2) \qquad \text{Aplicar el teorema 1.7.}$$

$$= -5. \qquad \text{Usar sustitución directa.}$$

Este resultado se muestra de forma gráfica en la figura 1.18. Observar que la gráfica de la función f coincide con la de la función $g(x) = x - 2$, sólo que la gráfica de f tiene un hueco en el punto $(-3, -5)$.



f no está definida para $x = -3$
Figura 1.18

En el ejemplo 7, la sustitución directa produce la forma fraccionaria $0/0$, que carece de significado. A una expresión como $0/0$ se le denomina **forma indeterminada** porque no es posible (a partir sólo de esa forma) determinar el límite. Si al intentar evaluar un límite se llega a esta forma, debe reescribirse la fracción de modo que el nuevo denominador no tenga 0 como límite. Una manera de lograrlo consiste en *cancelar los factores idénticos o comunes*, como se muestra en el ejemplo 7. Otra manera consiste en *racionalizar el numerador*, como se hace en el ejemplo 8.

NOTA En la solución del ejemplo 7, cerciorarse de distinguir la utilidad del teorema de factorización del álgebra. Este teorema establece que si c es un cero de una función polinomial, entonces $(x - c)$ es un factor del polinomio. Por tanto, si se aplica sustitución directa a una función racional y se obtiene

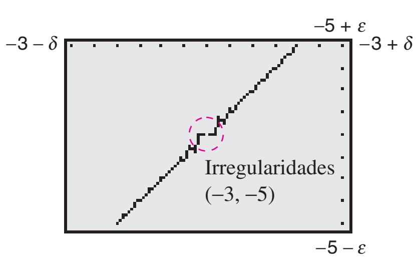
$$r(c) = \frac{p(c)}{q(c)} = \frac{0}{0}$$

puede concluirse que $(x - c)$ es un factor común de $p(x)$ y de $q(x)$.

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Puesto que las gráficas de

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x - 2$$

difieren sólo en el punto $(-3, -5)$, la configuración normal de una herramienta de graficación podría no distinguir entre ellas. No obstante, debido a la configuración de puntos ("pixeles") y a los errores de redondeo, quizá sea posible encontrar configuraciones de pantalla que distingan las gráficas. De manera específica, aplicando el *zoom* repetidas veces cerca del punto $(-3, -5)$ en la gráfica de f, la herramienta de graficación podría mostrar fallas o irregularidades que no existen en la gráfica real (ver la figura 1.19). Si se modifica la configuración de pantalla, podría obtenerse la gráfica correcta de f.



Gráfica incorrecta de f
Figura 1.19

EJEMPLO 8 Técnica de racionalización

Encontrar el límite: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

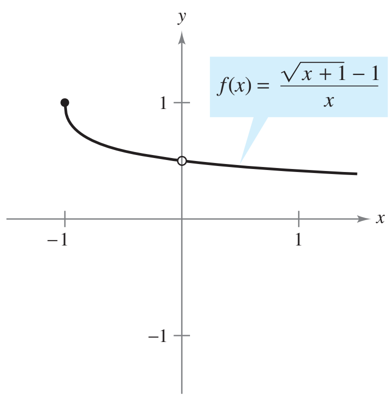
Solución Al utilizar la sustitución directa, se obtiene la forma indeterminada 0/0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad \begin{cases} \lim_{x \to 0} \left(\sqrt{x+1} - 1\right) = 0 \\ \lim_{x \to 0} x = 0 \end{cases}$$

La sustitución directa falla.

En este caso, se puede reescribir la fracción racionalizando el denominador:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right) \\
&= \frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \\
&= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}, \qquad x \neq 0
\end{aligned}$$



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 0 es $\frac{1}{2}$
Figura 1.20

Ahora, cuando se emplea el teorema 1.7, se puede evaluar el límite como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \frac{1}{1+1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Una tabla o una gráfica puede servir para fortalecer la conclusión de que el límite es $\frac{1}{2}$ (ver la figura 1.20).

x se aproxima a cero por la izquierda. → ← *x* se aproxima a cero por la derecha.

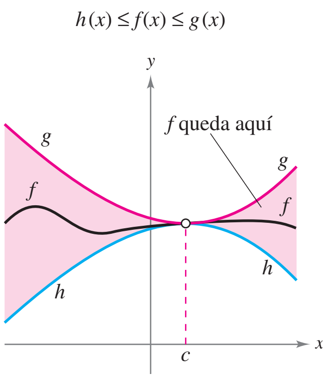
x	−0.25	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.25
$f(x)$	0.5359	0.5132	0.5013	0.5001	?	0.4999	0.4988	0.4881	0.4721

$f(x)$ se aproxima a 0.5. → ← $f(x)$ se aproxima a 0.5.

NOTA La técnica de racionalización en el cálculo de límites se basa en multiplicar por una forma conveniente de 1. En el ejemplo 8, la forma apropiada es

$$1 = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}.$$

Teorema del encaje



Teorema del encaje
Figura 1.21

El siguiente teorema se refiere al límite de una función que está “encajada” entre otras dos, cada una de las cuales tiene el mismo límite en un valor dado de x, como se muestra en la figura 1.21 (ver la demostración de este teorema en el apéndice A).

TEOREMA 1.8 TEOREMA DEL ENCAJE

Si $h(x) \le f(x) \le g(x)$ para todos los x en un intervalo abierto que contiene a c, por la posible excepción de la propia c, y si

$$\lim_{x\to c} h(x) = L = \lim_{x\to c} g(x)$$

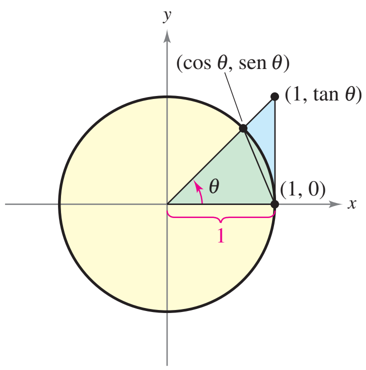
entonces el $\lim_{x\to c} f(x)$ existe y es igual a L.

En la demostración del teorema 1.9 se aprecia la utilidad del teorema del encaje (también se le llama teorema del emparedado o del pellizco).

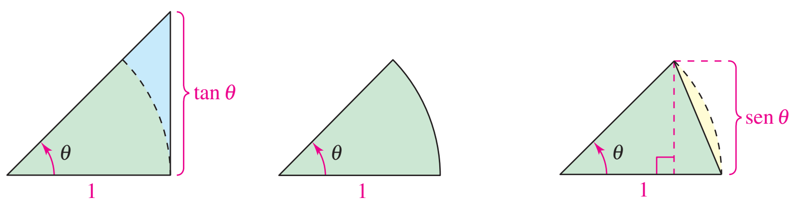
TEOREMA 1.9 DOS LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS ESPECIALES

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

DEMOSTRACIÓN Con el fin de evitar la confusión entre dos usos distintos de x, se presenta la demostración utilizando la variable θ, donde θ denota un ángulo agudo positivo *medido en radianes*. En la figura 1.22 se muestra un sector circular encajado o emparedado entre dos triángulos.



Sector circular utilizado para demostrar el teorema 1.9
Figura 1.22



Área del triángulo $\ge$ Área del sector $\ge$ Área del triángulo

$$\frac{\tan\theta}{2} \ge \frac{\theta}{2} \ge \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}$$

Al multiplicar cada expresión por $2/\operatorname{sen}\theta$ resulta

$$\frac{1}{\cos\theta} \ge \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \ge 1$$

tomando sus recíprocos e invirtiendo las desigualdades se obtiene:

$$\cos\theta \le \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \le 1.$$

Puesto que $\cos\theta = \cos(-\theta)$ y $(\operatorname{sen}\theta)/\theta = [\operatorname{sen}(-\theta)]/(-\theta)$, se concluye que esta desigualdad es válida para *todo* θ distinto de cero dentro del intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$. Por último, dado que $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$ y $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$, se puede aplicar el teorema del encaje para concluir que $\lim_{\theta\to 0} (\operatorname{sen}\theta)/\theta = 1$. La demostración del segundo límite se deja como ejercicio para el lector (ver el ejercicio 123).

EJEMPLO 9 Un límite en el que interviene una función trigonométrica

Encontrar el límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

Solución La sustitución directa tiene como resultado la forma indeterminada 0/0. Para resolver este problema, se puede escribir $\tan x$ como $(\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ y obtener

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right).$$

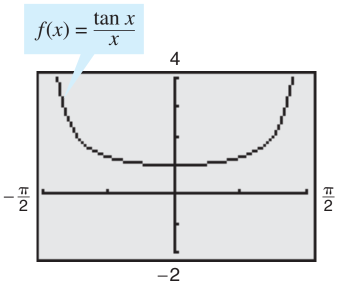
Ahora, puesto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

se puede obtener

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} &= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right)\\ &= (1)(1)\\ &= 1.\end{aligned}$$

(Ver la figura 1.23.)



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 0 es 1
Figura 1.23

EJEMPLO 10 Un límite en el que interviene una función trigonométrica

Encontrar el límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x}$.

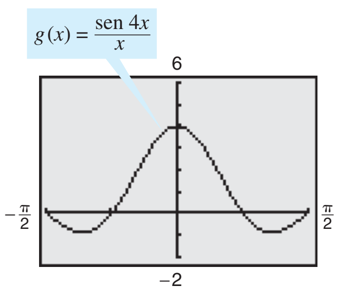
Solución La sustitución directa tiene como resultado la forma indeterminada 0/0. Para resolver este problema, se puede escribir el límite como

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x} = 4\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}\right). \qquad \text{Multiplicar y dividir entre 4.}$$

Al ser ahora $y = 4x$ y observar que $x \to 0$ si y sólo si $y \to 0$, se puede escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x} &= 4\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}\right)\\ &= 4\left(\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)\\ &= 4(1) \qquad \text{Aplicar el teorema 1.9(1).}\\ &= 4.\end{aligned}$$

(Ver la figura 1.24.)



El límite de $g(x)$ cuando x se aproxima a 0 es 4
Figura 1.24

TECNOLOGÍA Utilizar una herramienta de graficación para confirmar los límites de los ejemplos y del conjunto de ejercicios. Por ejemplo, las figuras 1.23 y 1.24 muestran las gráficas de:

$$f(x) = \frac{\tan x}{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{\operatorname{sen} 4x}{x}.$$

Observar que la primera gráfica parece contener el punto (0, 1) y la segunda al punto (0, 4), lo cual respalda las conclusiones obtenidas en los ejemplos 9 y 10.

1.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, utilizar una herramienta de graficación para representar la función y estimar los límites de manera visual.

1. $h(x) = -x^2 + 4x$

a) $\lim\limits_{x \to 4} h(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$

2. $g(x) = \dfrac{12(\sqrt{x} - 3)}{x - 9}$

a) $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

3. $f(x) = x \cos x$

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to \pi/3} f(x)$

4. $f(t) = t|t - 4|$

a) $\lim\limits_{t \to 4} f(t)$

b) $\lim\limits_{t \to -1} f(t)$

En los ejercicios 5 a 22, calcular el límite.

5. $\lim\limits_{x \to 2} x^3$

6. $\lim\limits_{x \to -2} x^4$

7. $\lim\limits_{x \to 0} (2x - 1)$

8. $\lim\limits_{x \to -3} (3x + 2)$

9. $\lim\limits_{x \to -3} (x^2 + 3x)$

10. $\lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + 1)$

11. $\lim\limits_{x \to -3} (2x^2 + 4x + 1)$

12. $\lim\limits_{x \to 1} (3x^3 - 2x^2 + 4)$

13. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x + 1}$

14. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{x + 4}$

15. $\lim\limits_{x \to -4} (x + 3)^2$

16. $\lim\limits_{x \to 0} (2x - 1)^3$

17. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x}$

18. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2}{x + 2}$

19. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x^2 + 4}$

20. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - 3}{x + 5}$

21. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{3x}{\sqrt{x + 2}}$

22. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2}}{x - 4}$

En los ejercicios 23 a 26, encontrar los límites.

23. $f(x) = 5 - x,\ g(x) = x^3$

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ *b)* $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$ *c)* $\lim\limits_{x \to 1} g(f(x))$

24. $f(x) = x + 7,\ g(x) = x^2$

a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ *b)* $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$ *c)* $\lim\limits_{x \to -3} g(f(x))$

25. $f(x) = 4 - x^2,\ g(x) = \sqrt{x + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ *b)* $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$ *c)* $\lim\limits_{x \to 1} g(f(x))$

26. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1,\ g(x) = \sqrt[3]{x + 6}$

a) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ *b)* $\lim\limits_{x \to 21} g(x)$ *c)* $\lim\limits_{x \to 4} g(f(x))$

En los ejercicios 27 a 36, encontrar el límite de la función trigonométrica.

27. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \operatorname{sen} x$

28. $\lim\limits_{x \to \pi} \tan x$

29. $\lim\limits_{x \to 1} \cos \dfrac{\pi x}{3}$

30. $\lim\limits_{x \to 2} \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}$

31. $\lim\limits_{x \to 0} \sec 2x$

32. $\lim\limits_{x \to \pi} \cos 3x$

33. $\lim\limits_{x \to 5\pi/6} \operatorname{sen} x$

34. $\lim\limits_{x \to 5\pi/3} \cos x$

35. $\lim\limits_{x \to 3} \tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$

36. $\lim\limits_{x \to 7} \sec\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$

En los ejercicios 37 a 40, utilizar la información que se expone para evaluar los límites.

37. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to c} g(x) = 2$

a) $\lim\limits_{x \to c} [5g(x)]$

b) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)g(x)]$

d) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

38. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \frac{3}{2}$

$\lim\limits_{x \to c} g(x) = \frac{1}{2}$

a) $\lim\limits_{x \to c} [4f(x)]$

b) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)g(x)]$

d) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

39. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 4$

a) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^3$

b) $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{f(x)}$

c) $\lim\limits_{x \to c} [3f(x)]$

d) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^{3/2}$

40. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 27$

a) $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[3]{f(x)}$

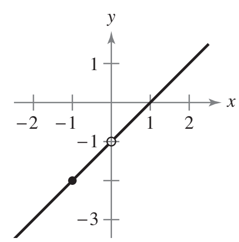
b) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{18}$

c) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^2$

d) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^{2/3}$

En los ejercicios 41 a 44, utilizar la gráfica para determinar el límite (si existe) de manera visual. Escribir una función más simple que coincida con la dada, salvo en un punto.

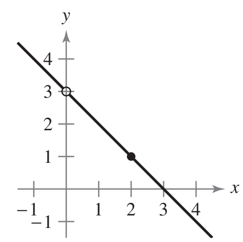
41. $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$



a) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$

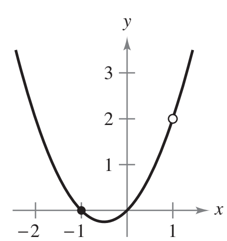
42. $h(x) = \dfrac{-x^2 + 3x}{x}$



a) $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$

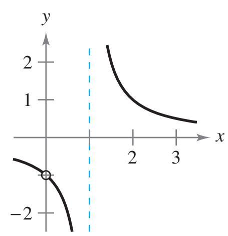
43. $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{x - 1}$



a) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$

44. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$



a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

En los ejercicios 45 a 48, encontrar el límite de la función (si existe). Escribir una función más simple que coincida con la dada salvo en un punto. Utilizar una herramienta de graficación para confirmar el resultado.

45. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

46. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$

47. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

48. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$

En los ejercicios 49 a 64, encontrar el límite (si existe).

49. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2 - x}$

50. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{x^2 + 2x}$

51. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{x^2 - 16}$

52. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3 - x}{x^2 - 9}$

53. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}$

54. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x - 8}$

55. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x + 5} - 3}{x - 4}$

56. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$

57. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{5}}{x}$

58. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$

59. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[1/(3 + x)] - (1/3)}{x}$

60. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[1/(x + 4)] - (1/4)}{x}$

61. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x}$

62. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$

63. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 1 - (x^2 - 2x + 1)}{\Delta x}$

64. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$

En los ejercicios 65 a 76, determinar el límite (si existe) de la función trigonométrica.

65. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{5x}$

66. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3(1 - \cos x)}{x}$

67. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{x^2}$

68. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\cos \theta \tan \theta}{\theta}$

69. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

70. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^2 x}{x}$

71. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1 - \cos h)^2}{h}$

72. $\lim\limits_{\phi \to \pi} \phi \sec \phi$

73. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\cot x}$

74. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{1 - \tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

75. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{2t}$

76. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$ $\left[\textit{Sugerencia}\text{: Encontrar } \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2 \operatorname{sen} 2x}{2x}\right)\left(\dfrac{3x}{3 \operatorname{sen} 3x}\right).\right]$

Análisis gráfico, numérico y analítico **En los ejercicios 77 a 84, utilizar una herramienta de graficación para representar la función y estimar el límite. Emplear una tabla para respaldar la conclusión. Posteriormente, calcular el límite empleando métodos analíticos.**

77. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

78. $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{x - 16}$

79. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[1/(2 + x)] - (1/2)}{x}$

80. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^5 - 32}{x - 2}$

81. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{t}$

82. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{2x^2}$

83. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x}$

84. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x}}$

En los ejercicios 85 a 88, encontrar $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

85. $f(x) = 3x - 2$

86. $f(x) = \sqrt{x}$

87. $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

88. $f(x) = x^2 - 4x$

En los ejercicios 89 y 90, utilizar el teorema del encaje para calcular $\lim\limits_{x \to c} f(x)$.

89. $c = 0$

$4 - x^2 \le f(x) \le 4 + x^2$

90. $c = a$

$b - |x - a| \le f(x) \le b + |x - a|$

En los ejercicios 91 a 96, utilizar una herramienta de graficación para representar la función dada y las ecuaciones $y = |x|$ **y** $y = -|x|$ **en una misma ventana. Usando las gráficas para visualizar el teorema del encaje, calcular** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

91. $f(x) = x \cos x$

92. $f(x) = |x \operatorname{sen} x|$

93. $f(x) = |x| \operatorname{sen} x$

94. $f(x) = |x| \cos x$

95. $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

96. $h(x) = x \cos \dfrac{1}{x}$

Desarrollo de conceptos

97. En el contexto del cálculo de límites, analizar qué se quiere decir mediante las funciones que coinciden en todo salvo en un punto.

98. Elaborar un ejemplo de funciones que coinciden en todo salvo en un punto.

99. ¿Qué se quiere decir con indeterminación o forma indeterminada?

100. Explicar el teorema del encaje.

101. ***Redacción*** Utilizar una herramienta de graficación para hacer la representación de

$$f(x) = x, \quad g(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

en la misma ventana. Comparar las magnitudes de $f(x)$ y $g(x)$ cuando x se acerca a 0. Utilizar la comparación para escribir un breve párrafo en el que se explique por qué

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 1.$$

102. ***Redacción*** Utilizar una herramienta de graficación para representar

$$f(x) = x, \; g(x) = \operatorname{sen}^2 x \; \text{y} \; h(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$$

en la misma ventana. Comparar las magnitudes de $f(x)$ y $g(x)$ cuando x se acerca a 0. Utilizar la comparación para escribir un breve párrafo en el que se explique por qué $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

Objeto en caída libre **En los ejercicios 103 y 104, utilizar la función de posición $s(t) = -16t^2 + 500$, que da la altura (en pies) de un objeto que lleva cayendo t segundos desde una altura de 500 pies. La velocidad en el instante $t = a$ segundos está dada por**

$$\lim_{t\to a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}.$$

103. Si a un albañil se le cae una herramienta desde una altura de 500 pies, ¿a qué velocidad estará cayendo luego de 5 segundos?

104. Si a un albañil se le cae una herramienta desde una altura de 500 pies, ¿cuánto tiempo tardará ésta en llegar al suelo? ¿A qué velocidad se producirá el impacto?

Objeto en caída libre **En los ejercicios 105 y 106, utilizar la función de posición $s(t) = -4.9t^2 + 200$, que da la altura (en metros) de un objeto que cae desde una altura de 200 m. La velocidad en el instante $t = a$ segundos está dada por**

$$\lim_{t\to a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}.$$

105. Determinar la velocidad del objeto cuando $t = 3$.

106. ¿A qué velocidad golpeará el suelo?

107. Encontrar dos funciones f y g tales que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existan, pero sí $\lim\limits_{x\to 0} [f(x) + g(x)]$, si existe.

108. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to c} [f(x) + g(x)]$ no existe, entonces $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ tampoco existe.

109. Demostrar la propiedad 1 del teorema 1.1.

110. Demostrar la propiedad 3 del teorema 1.1. (Se puede utilizar la propiedad 3 del teorema 1.2).

111. Demostrar la propiedad 1 del teorema 1.2.

112. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = 0$.

113. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ y $|g(x)| \le M$ para un número fijo M y todas las $x \ne c$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.

114. *a)* Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$.

(*Nota*: Este ejercicio es inverso al del problema 112.)

b) Demostrar que si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ entonces $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |L|$.

[*Sugerencia*: Utilizar la desigualdad $||f(x)| - |L|| \le |f(x) - L|$.]

115. ***Para pensar*** Encontrar una función f que muestre que el recíproco del ejercicio 114*b* no es verdadero. [*Sugerencia*: Buscar una función f tal que $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |L|$, pero donde $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ no exista.]

Para discusión

116. Sea $f(x) = \begin{cases} 3, & x \ne 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$. Encontrar $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 117 a 122, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

117. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x} = 1$

118. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

119. Si $f(x) = g(x)$ para todos los números reales distintos a $x = 0$, y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = L$.

120. Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

121. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$, donde $f(x) = \begin{cases} 3, & x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$

122. Si $f(x) < g(x)$ para todas las $x \ne a$, entonces

$\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

123. Demostrar la segunda parte del teorema 1.9 probando que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

124. Sean $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

y

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ x, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Calcular (si es posible) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

125. ***Razonamiento gráfico*** Considerar $f(x) = \dfrac{\sec x - 1}{x^2}$.

a) Determinar el dominio de f.

b) Utilizar una herramienta de graficación para hacer la representación de f. ¿Resulta evidente el dominio de f a partir de la gráfica? Si no es así, explicar por qué.

c) Utilizar la gráfica f para calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

d) Confirmar la respuesta del apartado *c)* utilizando el método analítico.

126. ***Aproximación***

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

b) Utilizar el resultado del apartado anterior para obtener la aproximación $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ para x cercanas a 0.

c) Aplicar el resultado del apartado *b)* para estimar cos (0.1).

d) Utilizar una herramienta de graficación para estimar cos (0.1) con cuatro decimales. Comparar el resultado con el del apartado *c)*.

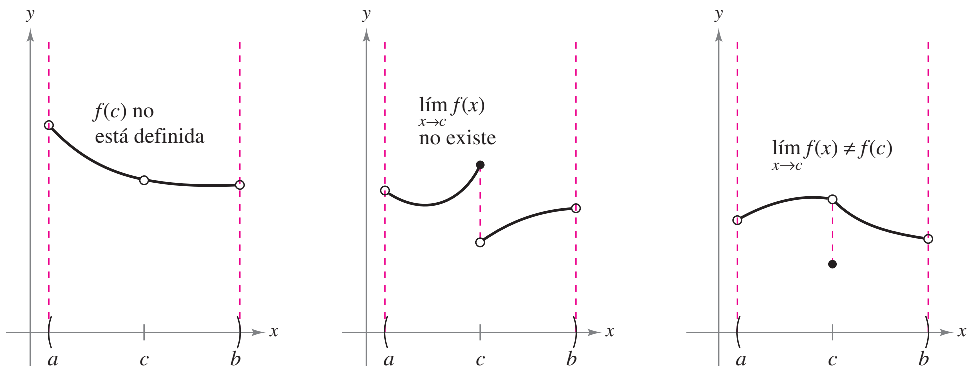
127. ***Para pensar*** Al utilizar una herramienta de graficación para generar una tabla con el fin de estimar $\lim\limits_{x\to 0} [(\operatorname{sen} x)/x]$, un estudiante concluye que el límite, y no 1, era 0.01745. Determinar la probable causa del error.

1.4 Continuidad y límites laterales o unilaterales

- **Determinar la continuidad en un punto y en un intervalo abierto.**
- **Determinar límites laterales o unilaterales y continuidad en un intervalo cerrado.**
- **Usar propiedades de continuidad.**
- **Comprender y aplicar el teorema del valor intermedio.**

Continuidad en un punto y en un intervalo abierto

En matemáticas, el término *continuo* tiene el mismo significado que en su uso cotidiano. Decir, de manera informal, que una función f es continua en $x = c$ significa que no hay interrupción de la gráfica de f en c. Es decir, la gráfica no tiene saltos o huecos en c. En la figura 1.25 se identifican tres valores de x en los que la gráfica de f *no es continua*. En los demás puntos del intervalo (a, b), la gráfica de f no sufre interrupciones y es **continua**.



Existen tres condiciones para las que la gráfica de f no es continua en $x = c$
Figura 1.25

EXPLORACIÓN

De modo informal, se podría decir que una función es *continua* en un intervalo abierto si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Utilizar una herramienta de graficación para representar las siguientes funciones en el intervalo indicado. De las gráficas, ¿qué funciones se dice que son continuas en dicho intervalo? ¿Se puede confiar en los resultados obtenidos gráficamente? Explicar el razonamiento.

Función	*Intervalo*
a) $y = x^2 + 1$	$(-3, 3)$
b) $y = \dfrac{1}{x-2}$	$(-3, 3)$
c) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$	$(-\pi, \pi)$
d) $y = \dfrac{x^2-4}{x+2}$	$(-3, 3)$
e) $y = \begin{cases} 2x-4, & x \le 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$	$(-3, 3)$

En la figura 1.25, parece que la continuidad en $x = c$ puede destruirse mediante cualquiera de las siguientes condiciones.

1. La función no está definida en $x = c$.
2. No existe el límite de $f(x)$ en $x = c$.
3. El límite de $f(x)$ en $x = c$ existe, pero no es igual a $f(c)$.

Si no se da *ninguna* de las tres condiciones anteriores, se dice que la función f es **continua en c**, como lo señala la importante definición que sigue.

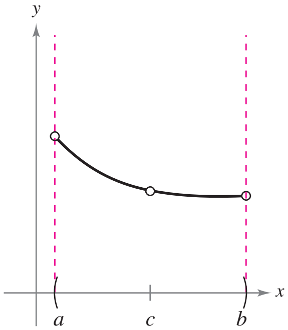
DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Continuidad en un punto: Una función f es **continua en c** si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

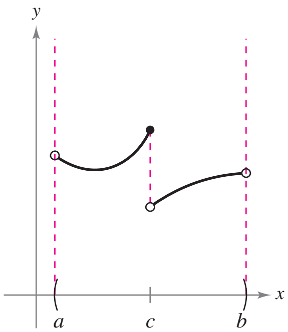
1. $f(c)$ está definida.
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Continuidad en un intervalo abierto: Una función es **continua en un intervalo abierto (a, b)** si es continua en cada punto del intervalo. Una función continua en la recta completa de los números reales $(-\infty, \infty)$ es **continua en todas partes**.

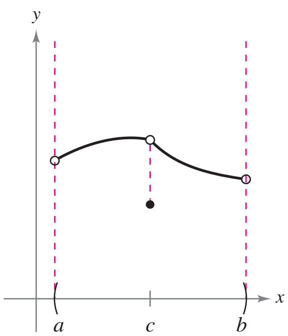
PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para obtener más información sobre el concepto de continuidad, ver el artículo "Leibniz and the Spell of the Continuous" de Hardy Grant en *The College Mathematics Journal*.



a) Discontinuidad evitable o removible



b) Discontinuidad inevitable o no removible



c) Discontinuidad evitable o removible
Figura 1.26

Considerar un intervalo abierto I que contiene un número real c. Si una función f está definida en I (excepto, posiblemente, en c) y no es continua en c, se dice que f tiene una **discontinuidad** en c. Las discontinuidades se clasifican en dos categorías: **evitables o removibles** e **inevitables o no removibles**. Se dice que una discontinuidad en c es evitable o removible si f se puede hacer continua definiendo (o redefiniendo) apropiadamente $f(c)$. Por ejemplo, las funciones en las figuras 1.26a y c presentan discontinuidades evitables o removibles en c, mientras que la de la figura 1.26b presenta una discontinuidad inevitable o no removible en c.

EJEMPLO 1 Continuidad de una función

Analizar la continuidad de cada función.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ***b***) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ***c***) $h(x) = \begin{cases} x + 1, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$ ***d***) $y = \operatorname{sen} x$

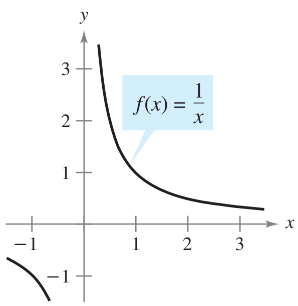
Solución

a) El dominio de f lo constituyen todos los números reales distintos de cero. A partir del teorema 1.3, se puede concluir que f es continua en todos los valores de x de su dominio. En $x = 0$, f tiene una discontinuidad inevitable, como se muestra en la figura 1.27a. En otras palabras, no hay modo de definir $f(0)$ para hacer que la nueva función sea continua en $x = 0$.

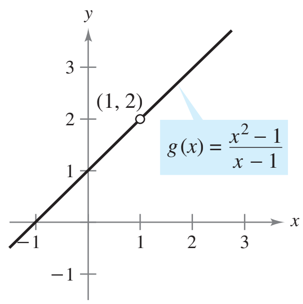
b) El dominio de g lo constituyen todos los números reales excepto $x = 1$. Aplicando el teorema 1.3, se puede concluir que g es continua en todos los valores de x de su dominio. En $x = 1$, la función presenta una discontinuidad evitable, como se muestra en la figura 1.27b. Si $g(1)$ se define como 2, la "nueva" función es continua para todos los números reales.

c) El dominio de h está formado por todos los números reales. La función h es continua en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$, y puesto que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$, h es continua en toda la recta real, como ilustra la figura 1.27c.

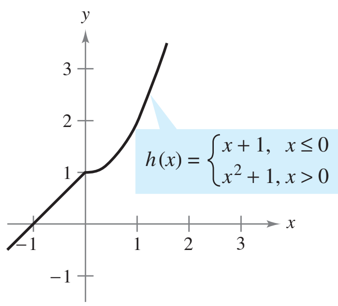
d) El dominio de y está conformado por todos los números reales. Del teorema 1.6, se puede concluir que la función es continua en todo su dominio $(-\infty, \infty)$, como se muestra en la figura 1.27d.



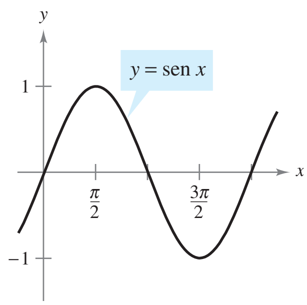
a) Discontinuidad inevitable o no removible en $x = 0$



b) Discontinuidad evitable o removible en $x = 1$

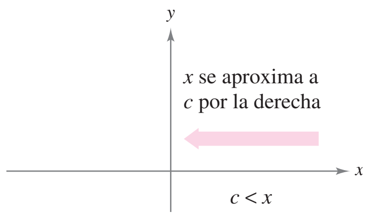


c) Continua en toda la recta real
Figura 1.27

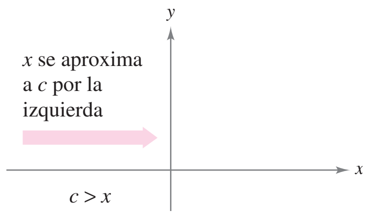


d) Continua en toda la recta real

AYUDA DE ESTUDIO Algunas veces se llama a la función del ejemplo 1a "discontinua". Pero se ha encontrado que esta terminología es confusa. Es preferible decir que la función tiene una discontinuidad en $x = 0$, es decir, que f es discontinua.



a) Límite por la derecha



b) Límite por la izquierda
Figura 1.28

Límites laterales y continuidad en un intervalo cerrado

Para comprender la noción de continuidad en un intervalo cerrado, es necesario estudiar antes un tipo diferente de límite, llamado **límite lateral**. Por ejemplo, el **límite por la derecha** significa que x se aproxima a c por valores superiores a c (ver la figura 1.28*a*). Este límite se denota como

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L.$$

Límite por la derecha.

Del mismo modo, el **límite por la izquierda** significa que x se aproxima a c por valores inferiores a c (ver la figura 1.28*b*). Este límite se denota como

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L.$$

Límite por la izquierda.

Los límites laterales son útiles al calcular límites de funciones que contienen radicales. Por ejemplo, si n es un entero dado

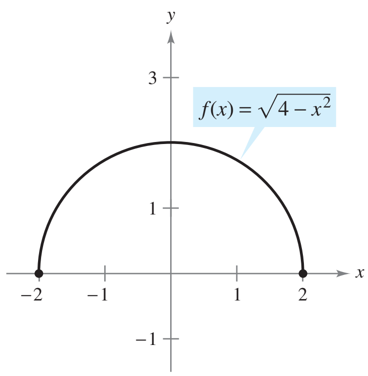
$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0.$$

EJEMPLO 2 Un límite lateral

Encontrar el límite de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ cuando x se aproxima a -2 por la derecha.

Solución Como se muestra en la figura 1.29, el límite cuando x se aproxima a -2 por la derecha es

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0.$$



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a -2 por la derecha es 0
Figura 1.29

Los límites laterales pueden usarse para investigar el comportamiento de las **funciones escalón**. Un tipo común de función escalón es la **función parte entera o mayor entero** $[\![x]\!]$, que se define como

$$[\![x]\!] = \text{mayor entero } n \text{ tal que } n \leq x$$

Función mayor entero.

Por ejemplo, $[\![2.5]\!] = 2$ y $[\![-2.5]\!] = -3$.

EJEMPLO 3 La función parte entera o mayor entero

Calcular el límite de la función parte entera o mayor entero $f(x) = [\![x]\!]$ cuando x tiende a 0 por la izquierda y por la derecha.

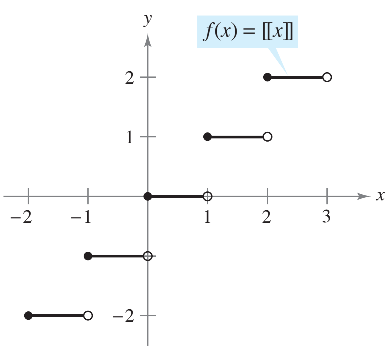
Solución Como se muestra en la figura 1.30, el límite cuando x se aproxima a 0 *por la izquierda* está dado por

$$\lim_{x \to 0^-} [\![x]\!] = -1$$

mientras que el límite cuando x se aproxima a 0 *por la derecha* está dado por

$$\lim_{x \to 0^+} [\![x]\!] = 0.$$

La función parte entera o mayor entero no es continua en 0 debido a que los límites por la izquierda y por la derecha en ese punto son diferentes. Mediante un razonamiento similar, se puede concluir que la función parte entera o mayor entero tiene una discontinuidad en cualquier entero n.



Función parte entera o mayor entero
Figura 1.30

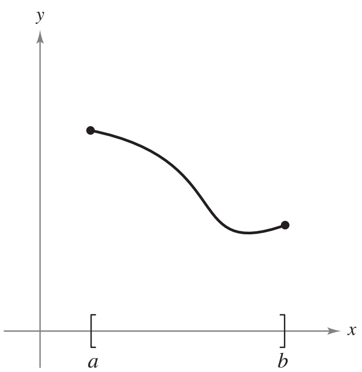
Cuando el límite por la izquierda no es igual al límite por la derecha, el límite (bilateral) *no existe*. El siguiente teorema lo explica mejor. Su demostración se obtiene directamente de la definición de límite lateral.

TEOREMA 1.10 EXISTENCIA DE UN LÍMITE

Si f es una función y c y L son números reales, el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L si y sólo si

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

El concepto de límite lateral permite extender la definición de continuidad a los intervalos cerrados. Básicamente, se dice que una función es continua en un intervalo cerrado si es continua en el interior del intervalo y posee continuidad lateral en los extremos. Esto se enuncia de manera formal como sigue.



Función continua en un intervalo cerrado
Figura 1.31

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD EN UN INTERVALO CERRADO

Una función f es **continua en un intervalo cerrado [*a*, *b*]** si es continua en el intervalo abierto (a, b) y

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

La función f es **continua por la derecha** en a y **continua por la izquierda** en b (ver la figura 1.31).

Se pueden establecer definiciones análogas para incluir la continuidad en intervalos con la forma $(a, b]$ y $[a, b)$, que no son abiertos ni cerrados o infinitos. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{x}$$

es continua en el intervalo infinito $[0, \infty)$, y la función

$$g(x) = \sqrt{2 - x}$$

es continua en el intervalo infinito $(-\infty, 2]$.

EJEMPLO 4 Continuidad en un intervalo cerrado

Analizar la continuidad de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

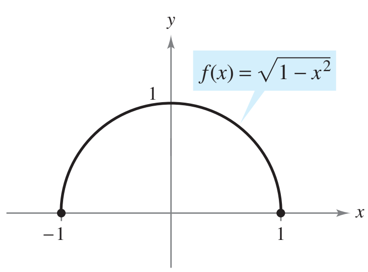
Solución El dominio de f es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. En todos los puntos del intervalo abierto $(-1, 1)$, la continuidad de f obedece a los teoremas 1.4 y 1.5. Además, dado que

$$\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1) \qquad \text{Continua por la derecha.}$$

y

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(1) \qquad \text{Continua por la izquierda.}$$

se puede concluir que f es continua en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, como se ilustra en la figura 1.32.

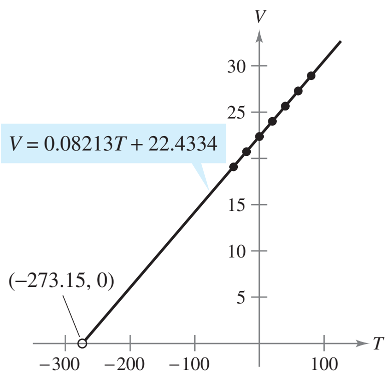


Función continua en $[-1, 1]$
Figura 1.32

El siguiente ejemplo muestra cómo se puede aplicar un límite lateral con el fin de determinar el cero absoluto en la escala Kelvin.

EJEMPLO 5 Ley de Charles y cero absoluto

En la escala Kelvin, el *cero absoluto* es la temperatura 0 K. A pesar de que se han obtenido temperaturas muy cercanas a 0 K en laboratorio, nunca se ha alcanzado el cero absoluto. De hecho, existen evidencias que sugieren la imposibilidad de alcanzar el cero absoluto. ¿Cómo determinaron los científicos que 0 K es el "límite inferior" de la temperatura de la materia? ¿Cuál es el cero absoluto en la escala Celsius?



El volumen del hidrógeno gaseoso depende de su temperatura
Figura 1.33

Solución La determinación del cero absoluto proviene del trabajo del físico francés Jacques Charles (1746-1823), quien descubrió que el volumen de un gas a presión constante crece de manera lineal con respecto a la temperatura. En la tabla siguiente se ilustra la relación entre volumen y temperatura. Para crear los valores que aparecen en la tabla, una mol de hidrógeno se mantiene a una presión constante de una atmósfera. El volumen V es aproximado y se mide en litros y la temperatura T se mide en grados Celsius.

T	-40	-20	0	20	40	60	80
V	19.1482	20.7908	22.4334	24.0760	25.7186	27.3612	29.0038

En la figura 1.33 se muestran los puntos representados en la tabla. Empleando dichos puntos, se puede determinar que T y V se relacionan a través de la ecuación lineal

$$V = 0.08213T + 22.4334 \qquad \text{o} \qquad T = \frac{V - 22.4334}{0.08213}.$$

Mediante el razonamiento de que el volumen del gas puede tender a 0 (pero nunca ser igual o menor que cero) se puede concluir que la "temperatura mínima posible" se obtiene por medio de

$$\begin{aligned} \lim_{V \to 0^+} T &= \lim_{V \to 0^+} \frac{V - 22.4334}{0.08213} \\ &= \frac{0 - 22.4334}{0.08213} \qquad \text{Usar sustitución directa.} \\ &\approx -273.15. \end{aligned}$$

De tal manera, el cero absoluto en la escala Kelvin (0 K) es de aproximadamente $-273.15°$ en la escala Celsius.

La tabla que se encuentra a continuación muestra las temperaturas del ejemplo 5, en la escala Fahrenheit. Repetir la solución del ejemplo 5 utilizando estas temperaturas y volúmenes. Utilizar el resultado para determinar el valor del cero absoluto en la escala Fahrenheit.

T	-40	-4	32	68	104	140	176
V	19.1482	20.7908	22.4334	24.0760	25.7186	27.3612	29.0038

Fotografía cortesía de W. Ketterle, MIT

En 2003, investigadores del Massachusetts Institute of Technology utilizaron láser y evaporación para producir un gas superfrío en el que los átomos se superponen. Este gas se denomina condensado de Bose-Einstein. Midieron una temperatura de alrededor de 450 pK (picokelvin) o –273.14999999955°C aproximadamente. (*Fuente*: *Science Magazine*, 12 de septiembre de 2003.)

NOTA La Ley de Charles para los gases (suponiendo una presión constante) puede enunciarse como

$$V = RT \qquad \text{Ley de Charles.}$$

donde V es el volumen, R es una constante y T es la temperatura. En este enunciado de la ley, ¿qué propiedad debe tener la escala de temperaturas?

Bettmann/Corbis

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

El concepto de función continua fue presentado por vez primera por Augustin-Louis Cauchy en 1821. La definición expuesta en su texto *Cours d'Analyse* establecía que las pequeñas modificaciones indefinidas en y eran resultado de las pequeñas modificaciones indefinidas en x. "… $f(x)$ será una función *continua* si… los valores numéricos de la diferencia $f(x+\alpha) - f(x) = 0$ disminuyen de forma indefinida con los de α…"

Propiedades de la continuidad

En la sección 1.3 se estudiaron las propiedades de los límites. Cada una de esas propiedades genera una propiedad correspondiente relativa a la continuidad de una función. Por ejemplo, el teorema 1.11 es consecuencia directa del teorema 1.2. (Se muestra una prueba del teorema 1.11 en el apéndice A.)

TEOREMA 1.11 PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD

Si b es un número real y f y g son continuas en $x = c$, entonces las siguientes funciones también son continuas en c.

1. Múltiplo escalar: bf
2. Suma y diferencia: $f \pm g$
3. Producto: fg
4. Cociente: $\dfrac{f}{g}$, si $g(c) \neq 0$

Las funciones de los siguientes tipos son continuas en sus dominios.

1. Funciones polinomiales: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
2. Funciones racionales: $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$
3. Funciones radicales: $f(x) = \sqrt[n]{x}$
4. Funciones trigonométricas: $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$

Combinando el teorema 1.11 con esta síntesis, se puede concluir que una gran variedad de funciones elementales son continuas en sus dominios.

EJEMPLO 6 Aplicación de las propiedades de la continuidad

Por el teorema 1.11, cada una de las siguientes funciones es continua en todos los puntos de su dominio.

$$f(x) = x + \operatorname{sen} x, \qquad f(x) = 3 \tan x, \qquad f(x) = \frac{x^2+1}{\cos x}$$

El siguiente teorema, consecuencia del teorema 1.5, permite determinar la continuidad de funciones *compuestas*, como

$$f(x) = \operatorname{sen} 3x, \qquad f(x) = \sqrt{x^2+1}, \qquad f(x) = \tan \frac{1}{x}.$$

TEOREMA 1.12 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$, entonces la función compuesta dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en c.

NOTA Una consecuencia del teorema 1.12 es que si f y g satisfacen las condiciones señaladas, es posible determinar que el límite de $f(g(x))$ cuando x se aproxima a c es

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(g(c)).$$

DEMOSTRACIÓN Por definición de continuidad, $\displaystyle\lim_{x\to c} g(x) = g(c)$ y $\displaystyle\lim_{x \to g(c)} f(x) = f(g(c))$. Al aplicar el teorema 1.5 con $L = g(c)$ se obtiene $\displaystyle\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(g(c))$. De esta manera, $(f \circ g) = f(g(x))$ es continua en c.

EJEMPLO 7 Prueba de la continuidad

Describir el intervalo o intervalos donde cada función es continua.

a) $f(x) = \tan x$ ***b)*** $g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ***c)*** $h(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Solución

a) La función tangente $f(x) = \tan x$ no está definida en

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad \text{donde } n \text{ es un entero.}$$

En todos los demás puntos es continua. De tal modo, $f(x) = \tan x$ es continua en todos los intervalos abiertos

$$\ldots, \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \ldots$$

como muestra la figura 1.34*a*.

b) Puesto que $y = 1/x$ es continua excepto en $x = 0$ y la función seno es continua para todos los valores reales de x, resulta que $y = \operatorname{sen}(1/x)$ es continua en todos los valores reales salvo en $x = 0$. En $x = 0$, no existe el límite de $g(x)$ (ver el ejemplo 5 de la sección 1.2). Por tanto, g es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, como se muestra en la figura 1.34*b*.

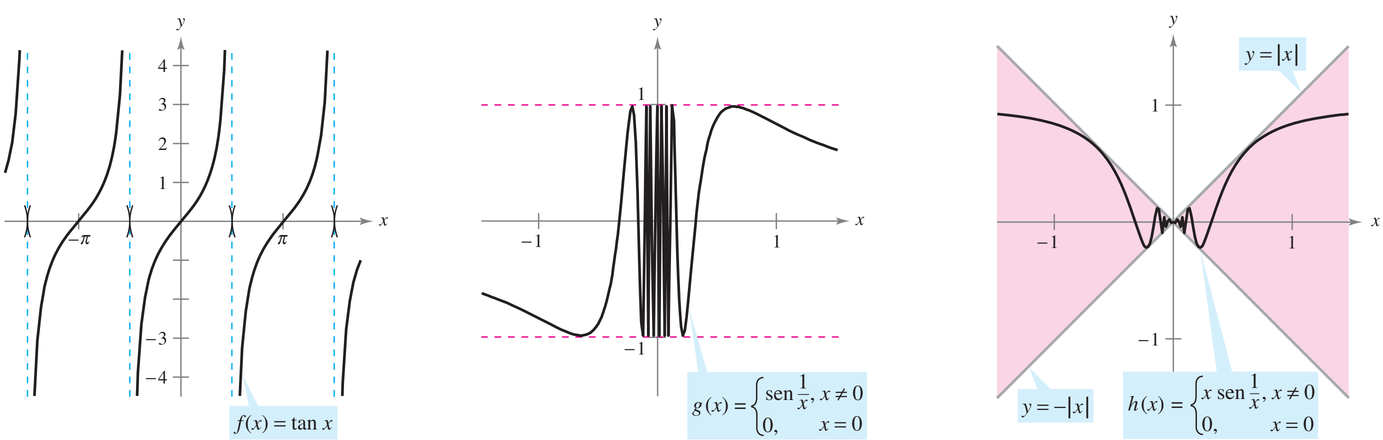
c) Esta función es parecida a la del apartado *b*), con excepción de que las oscilaciones están amortiguadas por el factor x. Aplicando el teorema del encaje, se obtiene

$$-|x| \leq x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq |x|, \qquad x \neq 0$$

y se puede concluir que

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0.$$

De tal manera, h es continua en toda la recta real, como se muestra en la figura 1.34*c*.



a) *f* es continua en cada intervalo abierto de su dominio

b) *g* es continua en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$

c) *h* es continua en toda la recta real

Figura 1.34

Teorema del valor intermedio

El teorema 1.13 es un importante teorema relativo al comportamiento de las funciones continuas en un intervalo cerrado.

TEOREMA 1.13 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

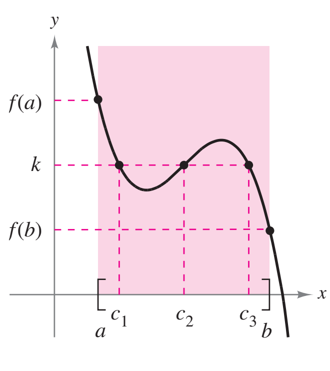
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ y k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = k.$$

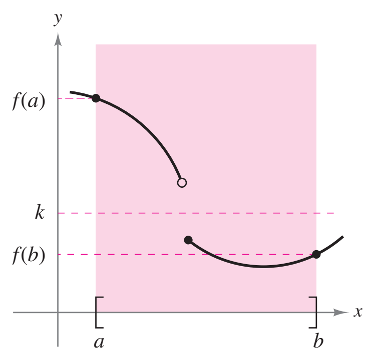
NOTA El teorema del valor intermedio asegura que existe al menos un número c, pero no proporciona un método para encontrarlo. Tales teoremas se denominan **teoremas de existencia**. Al consultar un libro de cálculo avanzado, se observará que la demostración de este teorema se basa en una propiedad de los números reales denominada *completitud*. El teorema del valor intermedio establece que para una función continua f, si x recorre todos los valores desde a hasta b, entonces $f(x)$ debe asumir todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Como ejemplo sencillo de este hecho, tomar en cuenta la estatura de las personas. Supongamos que una niña medía 1.52 m al cumplir 13 años y 1.70 m al cumplir 14 años, entonces, para cualquier altura h entre 1.52 y 1.70 m, debe existir algún momento t en el que su estatura fue exactamente de h. Esto parece razonable debido a que el crecimiento humano es continuo y la estatura de una persona no cambia de un valor a otro en forma abrupta.

El teorema del valor intermedio garantiza la existencia de *al menos* un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$. Puede, claro está, haber más de uno, tal que $f(c) = k$, como se muestra en la figura 1.35. Una función discontinua no necesariamente manifiesta la propiedad del valor intermedio. Por ejemplo, la gráfica de la función discontinua de la figura 1.36 salta sobre la recta horizontal dada por $y = k$, sin que exista valor alguno para c en $[a, b]$, tal que $f(c) = k$.

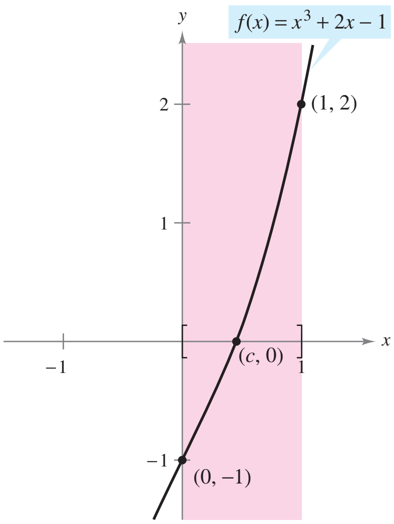


f es continua en $[a, b]$
[Existen 3 números c tales que $f(c) = k$]
Figura 1.35



f no es continua en $[a, b]$
[No existen números c tales que $f(c) = k$]
Figura 1.36

El teorema del valor intermedio suele emplearse para localizar los ceros de una función continua en un intervalo cerrado. De manera más específica, si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signo distinto, entonces el teorema nos garantiza la existencia de por lo menos un cero de f en el intervalo cerrado $[a, b]$.



f es continua en [0,1] con *f*(0) < 0 y *f*(l) > 0
Figura 1.37

EJEMPLO 8 Una aplicación del teorema del valor intermedio

Utilizar el teorema del valor intermedio para demostrar que la función polinomial $f(x) = x^3 + 2x - 1$ tiene un cero en el intervalo [0, 1].

Solución Observar que *f* es continua en el intervalo cerrado [0, 1]. Dado que

$$f(0) = 0^3 + 2(0) - 1 = -1 \quad \text{y} \quad f(1) = 1^3 + 2(1) - 1 = 2$$

resulta que $f(0) < 0$ y $f(l) > 0$. Por tanto, se puede aplicar el teorema del valor intermedio y concluir que debe existir algún c en [0, 1] tal que

$$f(c) = 0 \qquad f \text{ tiene un cero en el intervalo cerrado } [0, 1].$$

como se muestra en la figura 1.37.

El **método de bisección** para estimar los ceros reales de una función continua es parecido al método empleado en el ejemplo 8. Si se sabe que existe un cero en el intervalo cerrado $[a, b]$, dicho cero debe pertenecer al intervalo $[a, (a + b)/2]$ o $[(a + b)/2, b]$. A partir del signo de $f([a + b]/2)$, se puede determinar cuál intervalo contiene al cero. Mediante bisecciones sucesivas del intervalo, se puede "atrapar" al cero de la función.

TECNOLOGÍA También se puede usar el *zoom* de una herramienta de graficación para estimar los ceros reales de una función continua. Al hacer acercamientos de forma repetida a la zona donde la gráfica corta al eje *x* y ajustar la escala de dicho eje, se puede estimar el cero de la función con la precisión deseada. El cero de $x^3 + 2x - 1$ es alrededor de 0.453, como se muestra en la figura 1.38.

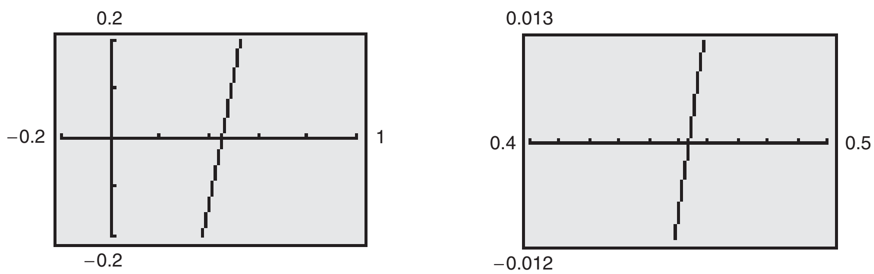
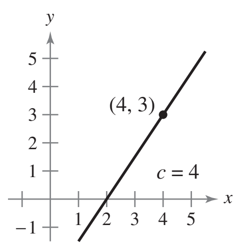


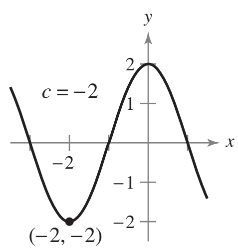
Figura 1.38 Aplicación del *zoom* al cero de $f(x) = x^3 + 2x - 1$

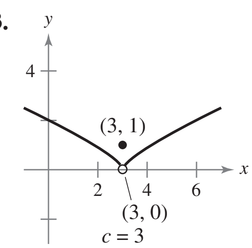
1.4 Ejercicios

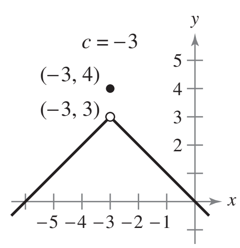
En los ejercicios 1 a 6, utilizar una herramienta de graficación para determinar el límite y analizar la continuidad de la función.

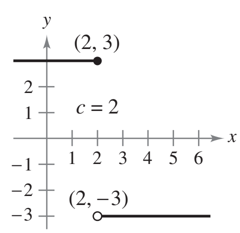
a) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ *c)* $\lim\limits_{x\to c} f(x)$

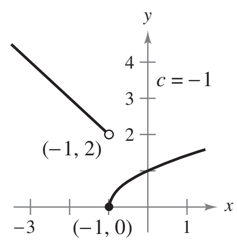
1.


2.


3.


4.


5.


6.


En los ejercicios 7 a 26, calcular el límite (si existe). Si no existe, explicar por qué.

7. $\lim\limits_{x\to 8^+} \dfrac{1}{x+8}$

8. $\lim\limits_{x\to 5^-} -\dfrac{3}{x+5}$

9. $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x-5}{x^2-25}$

10. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2-x}{x^2-4}$

11. $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

12. $\lim\limits_{x\to 9^-} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

13. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 10^+} \dfrac{|x-10|}{x-10}$

15. $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \dfrac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}$

16. $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \dfrac{(x+\Delta x)^2+x+\Delta x-(x^2+x)}{\Delta x}$

17. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}, & x\le 3\\[2mm] \dfrac{12-2x}{3}, & x>3\end{cases}$

18. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+6, & x<2\\ -x^2+4x-2, & x\ge 2\end{cases}$

19. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x<1\\ x+1, & x\ge 1\end{cases}$

20. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ 1-x, & x>1\end{cases}$

21. $\lim\limits_{x\to \pi} \cot x$

22. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \sec x$

23. $\lim\limits_{x\to 4^-} (5[\![x]\!]-7)$

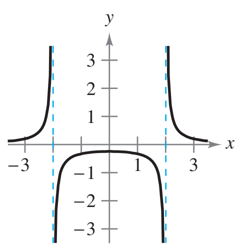
24. $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x-[\![x]\!])$

25. $\lim\limits_{x\to 3} (2-[\![-x]\!])$

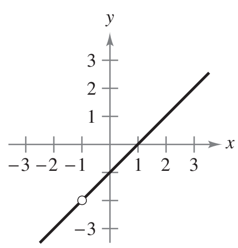
26. $\lim\limits_{x\to 1} \left(1-\left[\!\!\left[-\dfrac{x}{2}\right]\!\!\right]\right)$

En los ejercicios 27 a 30, analizar la continuidad de cada función.

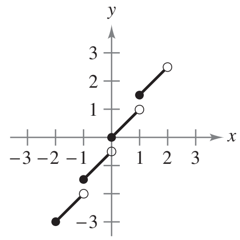
27. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$



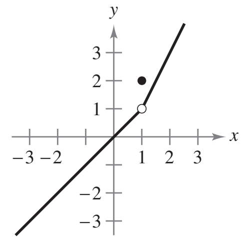
28. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$



29. $f(x)=\frac{1}{2}[\![x]\!]+x$



30. $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ 2, & x=1\\ 2x-1, & x>1\end{cases}$



En los ejercicios 31 a 34, analizar la continuidad de la función en el intervalo cerrado.

	Función	*Intervalo*
31.	$g(x)=\sqrt{49-x^2}$	$[-7, 7]$
32.	$f(t)=3-\sqrt{9-t^2}$	$[-3, 3]$
33.	$f(x)=\begin{cases}3-x, & x\le 0\\ 3+\frac{1}{2}x, & x>0\end{cases}$	$[-1, 4]$
34.	$g(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$	$[-1, 2]$

En los ejercicios 35 a 60, encontrar los valores de *x* (si existe alguno) en los que *f* no es continua. ¿Cuáles discontinuidades son evitables o removibles?

35. $f(x)=\dfrac{6}{x}$

36. $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$

37. $f(x)=x^2-9$

38. $f(x)=x^2-2x+1$

39. $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$

40. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

41. $f(x)=3x-\cos x$

42. $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2}$

43. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x}$

44. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

45. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

46. $f(x)=\dfrac{x-6}{x^2-36}$

47. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x-10}$

48. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

49. $f(x)=\dfrac{|x+7|}{x+7}$

50. $f(x)=\dfrac{|x-8|}{x-8}$

51. $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$

52. $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & x<1\\ x^2, & x\ge 1\end{cases}$

53. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \leq 2 \\ 3 - x, & x > 2 \end{cases}$

54. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 1, & x > 2 \end{cases}$

55. $f(x) = \begin{cases} \tan \dfrac{\pi x}{4}, & |x| < 1 \\ x, & |x| \geq 1 \end{cases}$

56. $f(x) = \begin{cases} \csc \dfrac{\pi x}{6}, & |x - 3| \leq 2 \\ 2, & |x - 3| > 2 \end{cases}$

57. $f(x) = \csc 2x$

58. $f(x) = \tan \dfrac{\pi x}{2}$

59. $f(x) = [\![x - 8]\!]$

60. $f(x) = 5 - [\![x]\!]$

En los ejercicios 61 y 62, utilizar una herramienta de graficación para representar la función. A partir de la gráfica, estimar

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

¿Es continua la función en toda la recta real? Explicar la respuesta.

61. $f(x) = \dfrac{|x^2 - 4|x}{x + 2}$

62. $f(x) = \dfrac{|x^2 + 4x|(x + 2)}{x + 4}$

En los ejercicios 63 a 68, encontrar la constante *a*, o las constantes *a* y *b*, tales que la función sea continua en toda la recta real.

63. $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 1 \\ ax - 4, & x < 1 \end{cases}$

64. $f(x) = \begin{cases} 3x^3, & x \leq 1 \\ ax + 5, & x > 1 \end{cases}$

65. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 2 \\ ax^2, & x > 2 \end{cases}$

66. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{x}, & x < 0 \\ a - 2x, & x \geq 0 \end{cases}$

67. $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq -1 \\ ax + b, & -1 < x < 3 \\ -2, & x \geq 3 \end{cases}$

68. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}, & x \neq a \\ 8, & x = a \end{cases}$

En los ejercicios 69 a 72, analizar la continuidad de la función compuesta $h(x) = f(g(x))$.

69. $f(x) = x^2$
$g(x) = x - 1$

70. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$g(x) = x - 1$

71. $f(x) = \dfrac{1}{x - 6}$
$g(x) = x^2 + 5$

72. $f(x) = \operatorname{sen} x$
$g(x) = x^2$

En los ejercicios 73 a 76, utilizar una herramienta de graficación para representar la función. Usar la gráfica para determinar todo valor de *x* en donde la función no sea continua.

73. $f(x) = [\![x]\!] - x$

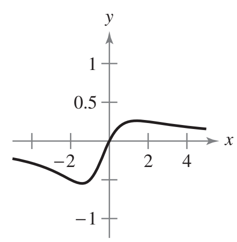
74. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$

75. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x > 4 \\ 2x - 5, & x \leq 4 \end{cases}$

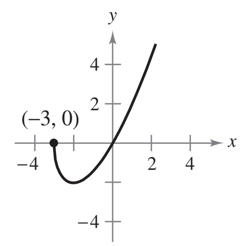
76. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x}, & x < 0 \\ 5x, & x \geq 0 \end{cases}$

En los ejercicios 77 a 80, describir el o los intervalos en los que la función es continua.

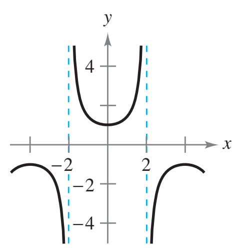
77. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 2}$



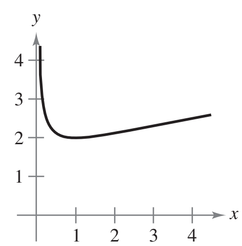
78. $f(x) = x\sqrt{x + 3}$



79. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{4}$



80. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$



Redacción **En los ejercicios 81 y 82, utilizar una herramienta de graficación para representar la función en el intervalo $[-4, 4]$. ¿Parece continua en este intervalo la gráfica de la función? ¿Es continua la función en $[-4, 4]$? Escribir unas líneas sobre la importancia de examinar una función analíticamente, además de hacerlo de manera gráfica.**

81. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

82. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

Redacción **En los ejercicios 83 a 86, explicar por qué la función tiene un cero en el intervalo dado.**

	Función	*Intervalo*
83.	$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^3 + 4$	$[1, 2]$
84.	$f(x) = x^3 + 5x - 3$	$[0, 1]$
85.	$f(x) = x^2 - 2 - \cos x$	$[0, \pi]$
86.	$f(x) = -\dfrac{5}{x} + \tan\left(\dfrac{\pi x}{10}\right)$	$[1, 4]$

En los ejercicios 87 a 90, utilizar el teorema del valor intermedio y una herramienta de graficación para estimar el cero de la función en el intervalo [0, 1]. Realizar acercamientos de forma repetida en la gráfica de la función con el fin de determinar el cero con una precisión de dos cifras decimales. Emplear la función *cero* o *raíz* de su herramienta de graficación para estimar el cero con una precisión de cuatro cifras decimales.

87. $f(x) = x^3 + x - 1$

88. $f(x) = x^3 + 5x - 3$

89. $g(t) = 2\cos t - 3t$

90. $h(\theta) = 1 + \theta - 3\tan\theta$

En los ejercicios 91 a 94, verificar que el teorema del valor intermedio es aplicable al intervalo indicado y encontrar el valor de *c* garantizado por el teorema.

91. $f(x) = x^2 + x - 1, \quad [0, 5], \quad f(c) = 11$

92. $f(x) = x^2 - 6x + 8, \quad [0, 3], \quad f(c) = 0$

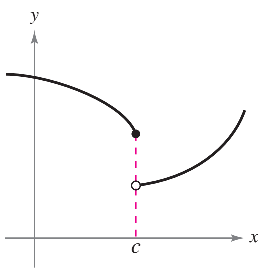
93. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2, \quad [0, 3], \quad f(c) = 4$

94. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}, \quad \left[\dfrac{5}{2}, 4\right], \quad f(c) = 6$

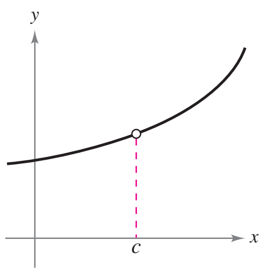
Desarrollo de conceptos

95. En cada una de las gráficas siguientes especificar cómo se destruye la continuidad en $x = c$:

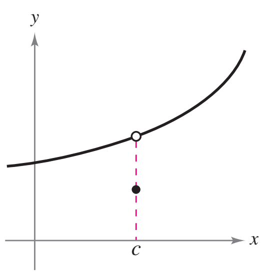
a)



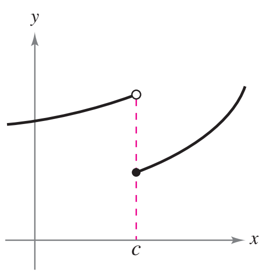
b)



c)



d)



96. Esbozar la gráfica de cualquier función f tal que:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 0.$$

¿Esta función es continua en $x = 3$? Explicar la respuesta.

97. Si las funciones f y g son continuas para todos los x reales, ¿$f + g$ es siempre continua para todos los x reales? ¿f/g es siempre continua para todos los x reales? Si alguna no es continua, elaborar un ejemplo para verificar la conclusión.

Para discusión

98. Describir la diferencia que existe entre una discontinuidad removible y una no removible. En la explicación, incluir ejemplos de las siguientes descripciones:

a) Una función con una discontinuidad no evitable en $x = 4$.

b) Una función con una discontinuidad evitable en $x = -4$.

c) Una función que cuenta con las dos características descritas en los incisos *a*) y *b*).

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 99 a 102, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

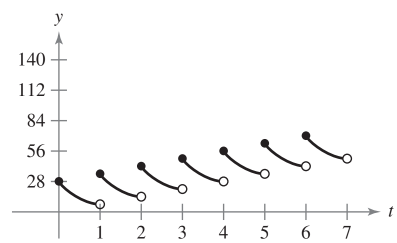
99. Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $f(c) = L$, entonces f es continua en c.

100. Si $f(x) = g(x)$ para $x \neq c$ y $f(c) \neq g(c)$, entonces ya sea f o g no es continua en c.

101. En una función racional puede haber infinitos valores de x en los que no es continua.

102. La función $f(x) = |x - 1|/(x - 1)$ es continua en $(-\infty, \infty)$.

103. ***Piscina*** Todos los días se disuelven 28 onzas de cloro en el agua de una piscina. En la gráfica se muestra la cantidad de cloro $f(t)$ en esa agua luego de t días.



Estimar e interpretar $\lim_{t\to 4^-} f(t)$ y $\lim_{t\to 4^+} f(t)$.

104. ***Para pensar*** Describir en qué difieren las funciones

$$f(x) = 3 + [\![x]\!]$$

y

$$g(x) = 3 - [\![-x]\!].$$

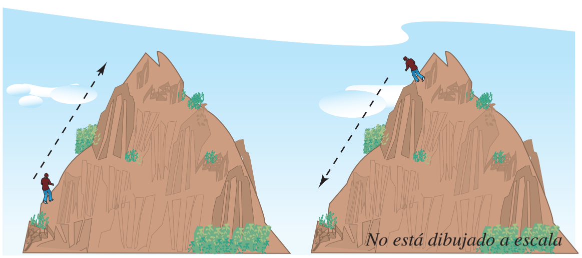
105. ***Tarifas telefónicas*** Una llamada de larga distancia entre dos ciudades cuesta \$0.40 los primeros 10 minutos y \$0.05 por cada minuto o fracción adicional. Utilizar la función parte entera o mayor entero para expresar el costo C de una llamada en términos del tiempo t (en minutos). Dibujar la gráfica de esta función y analizar su continuidad.

106. ***Gestión de inventarios*** El número de unidades en inventario en una pequeña empresa está dado por

$$N(t) = 25\left(2\left[\!\left[\frac{t+2}{2}\right]\!\right] - t\right)$$

donde t representa el tiempo en meses. Dibujar la gráfica de esta función y analizar su continuidad. ¿Con qué frecuencia la empresa debe reponer existencias?

107. ***Déjà vu*** Un sábado a las 8:00 de la mañana, un hombre comienza a subir corriendo la ladera de una montaña hacia su campamento de fin de semana. El domingo a las 8:00 de la mañana baja corriendo la montaña. Tarda 20 minutos en subir y sólo 10 en bajar. En cierto punto del camino de bajada, el hombre se da cuenta de que pasó por el mismo lugar a la misma hora el sábado. Demostrar que el hombre está en lo cierto. [*Sugerencia*: Considerar que $s(t)$ y $r(t)$ son las funciones de posición de subida y bajada y aplicar el teorema del valor intermedio a la función $f(t) = s(t) - r(t)$.]



Sábado 8:00 de la mañana Domingo 8:00 de la mañana

108. ***Volumen*** Utilizar el teorema del valor intermedio para demostrar que entre todas las esferas cuyos radios pertenecen al intervalo [5, 8] hay una con un volumen de 1 500 centímetros cúbicos.

109. Demostrar que si f es continua y carece de ceros en $[a, b]$, entonces

$f(x) > 0$ para todo x en $[a, b]$ o $f(x) < 0$ para todo x en $[a, b]$.

110. Demostrar que la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no es continua para ningún número real.

111. Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ kx, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es continua sólo en $x = 0$ (suponer que k es cualquier número real distinto de cero).

112. La **función signo** se define como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Construir la gráfica de $\operatorname{sgn}(x)$ y calcular los siguientes límites (si es posible).

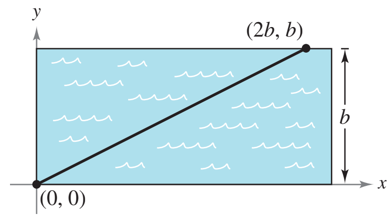
a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x)$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$

113. ***Modelo matemático*** La tabla recoge valores de la velocidad S (en pies/s) de un objeto tras caer t segundos.

t	0	5	10	15	20	25	30
S	0	48.2	53.5	55.2	55.9	56.2	56.3

a) Construir la curva con los datos.
b) ¿Parece existir una velocidad límite para el objeto? En caso afirmativo, identificar una posible causa.

114. ***Elaboración de modelos*** Un nadador cruza una piscina de una anchura b nadando en línea recta desde (0, 0) hasta $(2b, b)$ (ver la figura).



a) Sea f una función definida como la coordenada y del punto sobre el lado más largo de la piscina que se encuentra más cerca del nadador en cualquier momento dado durante su trayecto a través de la piscina. Encontrar la función f y construir su gráfica. ¿Se trata de una función continua? Explicar la respuesta.
b) Sea g la distancia mínima entre el nadador y el lado más largo de la piscina. Encontrar la función g y construir la gráfica. ¿Se trata de una función continua? Explicar la respuesta.

115. Encontrar todos los valores de c tales que f sea continua en $(-\infty, \infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \le c \\ x, & x > c \end{cases}$$

116. Demostrar que para todo número real y existe un x en $(-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\tan x = y$.

117. Sea $f(x) = \left(\sqrt{x + c^2} - c\right)/x,\ c > 0$. ¿Cuál es el dominio de f? ¿Cómo se puede definir f en $x = 0$ con el fin de que sea continua en ese punto?

118. Demostrar que si $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c + \Delta x) = f(c)$, entonces f es continua en c.

119. Analizar la continuidad de la función $h(x) = x[\![x]\!]$.

120. *a)* Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Si $f_1(a) < f_2(a)$ y $f_1(b) > f_2(b)$, demostrar que entre a y b existe c tal que $f_1(c) = f_2(c)$.
b) Demostrar que existe c en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\cos x = x$. Utilizar una herramienta de graficación para estimar c con tres decimales.

Preparación del examen Putnam

121. Afirmar o desmentir: si x y y son números reales con $y \ge 0$ y $y(y + 1) \le (x + 1)^2$, entonces $y(y - 1) \le x^2$.

122. Encontrar todas las polinomiales $P(x)$ tales que

$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1$ y $P(0) = 0$.

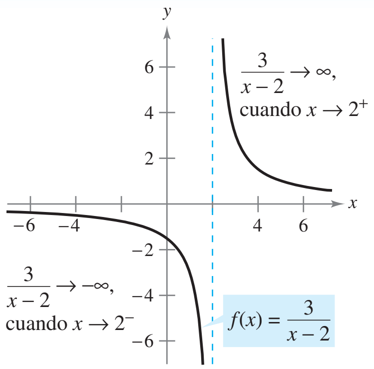
1.5 Límites infinitos

- **Determinar límites infinitos por la izquierda y por la derecha.**
- **Encontrar y dibujar las asíntotas verticales de la gráfica de una función.**

Límites infinitos

Sea f la función dada por

$$f(x) = \frac{3}{x-2}.$$



$f(x)$ crece y decrece sin cota o sin límite cuando x tiende a 2

Figura 1.39

A partir de la figura 1.39 y de la siguiente tabla, se puede observar que $f(x)$ *decrece sin cota* o sin límite cuando x se aproxima a 2 por la izquierda y que $f(x)$ *crece sin cota* o sin límite cuando x se aproxima a 2 por la derecha. Este comportamiento se denota

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty \quad f(x) \text{ decrece sin cota o sin límite cuando } x \text{ se aproxima a 2 por la izquierda.}$$

y

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = \infty \quad f(x) \text{ crece sin cota o sin límite cuando } x \text{ se aproxima a 2 por la derecha.}$$

x se aproxima a 2 por la izquierda. → ← x se aproxima a 2 por la derecha.

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	−6	−30	−300	−3 000	?	3 000	300	30	6

$f(x)$ decrece sin cota o sin límite. → ← $f(x)$ crece sin cota o sin límite.

Un límite en el que $f(x)$ crece o decrece sin cota o sin límite cuando x tiende a c se llama **límite infinito**.

DEFINICIÓN DE LÍMITES INFINITOS

Sea f una función definida en todo número real de un intervalo abierto que contiene a c (salvo, posiblemente, en el propio c). La expresión

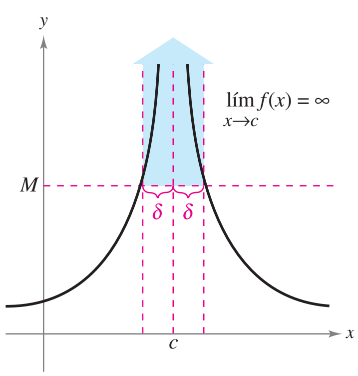
$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

significa que para toda $M > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$ (ver la figura 1.40). Del mismo modo, la expresión

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

significa que para todo $N < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$.

Para definir el **límite infinito por la izquierda**, sustituir $0 < |x - c| < \delta$ por $c - \delta < x < c$. Y para definir el **límite infinito por la derecha**, reemplazar $0 < |x - c| < \delta$ por $c < x < c + \delta$.



Límites infinitos

Figura 1.40

Observar que el signo de igualdad en la expresión $\lim f(x) = \infty$ no significa que el límite exista. Por el contrario, indica la razón de su *no existencia* al denotar el comportamiento no acotado o no limitado de $f(x)$ cuando x se aproxima a c.

EXPLORACIÓN

Representar las siguientes funciones con una herramienta de graficación. En cada una de ellas, determinar analíticamente el único número real c que no pertenece al dominio. A continuación, encontrar de manera gráfica el límite si existe de $f(x)$ cuando x tiende a c por la izquierda y por la derecha.

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$

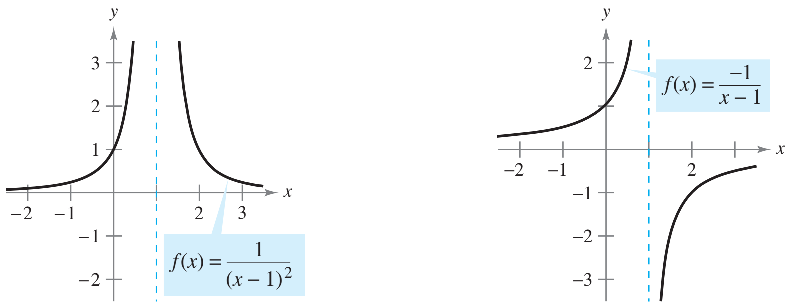
c) $f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{-3}{(x+2)^2}$

NOTA Si la gráfica de una función f tiene una asíntota vertical en $x = c$, entonces f *no es continua* en c.

EJEMPLO 1 Determinación de límites infinitos a partir de una gráfica

Determinar el límite de cada función que se muestra en la figura 1.41 cuando x tiende a 1 por la izquierda y por la derecha.



a) *b*)

Figura 1.41 Las dos gráficas tienen una asíntota vertical en $x = 1$

Solución

a) Cuando x se aproxima a 1 por la izquierda o por la derecha, $(x-1)^2$ es un número positivo pequeño. Así, el cociente $1/(x-1)^2$ es un número positivo grande y $f(x)$ tiende a infinito por ambos lados de $x = 1$. De modo que se puede concluir

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$ El límite por cada lado es infinito.

La figura 1.41*a* confirma este análisis.

b) Cuando x se aproxima a 1 por la izquierda, $x - 1$ es un número negativo pequeño. Así, el cociente $-1/(x-1)$ es un número positivo grande y $f(x)$ tiende a infinito por la izquierda de $x = 1$. De modo que se puede concluir

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x-1} = \infty$$ El límite por la izquierda es infinito.

Cuando x se aproxima a 1 por la derecha, $x - 1$ es un número positivo pequeño. Así, el cociente $-1/(x-1)$ es un número negativo grande y $f(x)$ tiende a menos infinito por la derecha de $x = 1$. De modo que se puede concluir

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$$ El límite por la derecha es infinito.

La figura 1.41*b* confirma este análisis.

Asíntotas verticales

Si fuera posible extender las gráficas de la figura 1.41 hacia el infinito, positivo o negativo, se vería que ambas se acercan arbitrariamente a la recta vertical $x = 1$. Esta recta es una **asíntota vertical** de la gráfica de f. (En las secciones 3.5 y 3.6 se estudiarán otros tipos de asíntotas.)

DEFINICIÓN DE ASÍNTOTA VERTICAL

Si $f(x)$ tiende a infinito (o menos infinito) cuando x tiende a c por la derecha o por la izquierda, se dice que la recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f.

En el ejemplo 1, se observa que todas las funciones son *cocientes* y la asíntota vertical aparece en el número en el cual el denominador es 0 (y el numerador no es 0). El siguiente teorema generaliza esta observación. (En el apéndice A se encuentra la demostración de este teorema.)

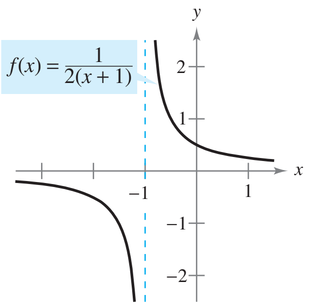
TEOREMA 1.14 ASÍNTOTAS VERTICALES

Sean f y g funciones continuas en un intervalo abierto que contiene a c. Si $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$, y existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ en el intervalo, entonces la gráfica de la función está dada por

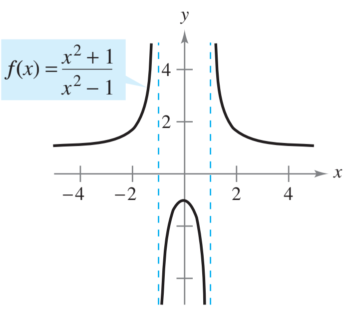
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene una asíntota vertical en $x = c$.

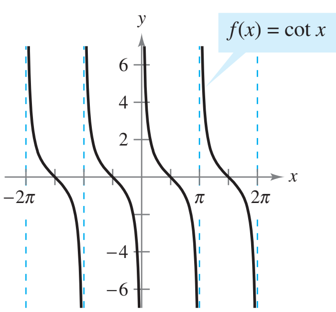
EJEMPLO 2 Cálculo de las asíntotas verticales



a)



b)



c)

Funciones con asíntotas verticales
Figura 1.42

Determinar todas las asíntotas verticales de la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2(x + 1)}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ ***c)*** $f(x) = \cot x$

Solución

a) Cuando $x = -1$, el denominador de

$$f(x) = \frac{1}{2(x + 1)}$$

es igual a 0 y el numerador no lo es. Por tanto, mediante el teorema 1.14, se puede concluir que $x = -1$ es una asíntota vertical, como se observa en la figura 1.42*a*.

b) Al factorizar el denominador como

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 1)}$$

puede verse que el denominador se anula en $x = -1$ y en $x = 1$. Además, dado que el numerador no es 0 en ninguno de estos puntos, se puede aplicar el teorema 1.14 y concluir que la gráfica de f tiene dos asíntotas verticales, como ilustra la figura 1.42*b*.

c) Escribiendo la función cotangente de la forma

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

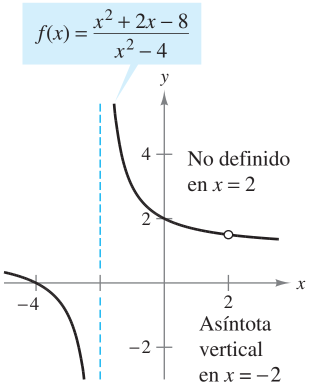
se puede aplicar el teorema 1.14 para concluir que las asíntotas verticales tienen lugar en todos los valores de x tales que $\operatorname{sen} x = 0$ y $\cos x \neq 0$, como muestra la figura 1.42*c*. Por consiguiente, la gráfica de esta función tiene infinitas asíntotas verticales. Estas asíntotas aparecen cuando $x = n\pi$, donde n es un número entero.

El teorema 1.14 exige que el valor del numerador en $x = c$ no sea 0. Si tanto el numerador como el denominador son 0 en $x = c$, se obtiene la *forma indeterminada* $0/0$, y no es posible establecer el comportamiento límite en $x = c$ sin realizar una investigación complementaria, como se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Una función racional con factores comunes

Determinar todas las asíntotas verticales de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}.$$



$f(x)$ crece y decrece sin cota o sin límite cuando x tiende a -2
Figura 1.43

Solución Comenzar por simplificar la expresión como sigue

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} \\ &= \frac{(x + 4)\cancel{(x - 2)}}{(x + 2)\cancel{(x - 2)}} \\ &= \frac{x + 4}{x + 2}, \quad x \neq 2 \end{aligned}$$

En todos los valores de x distintos de $x = 2$, la gráfica de f coincide con la de $g(x) = (x + 4)/(x + 2)$. De manera que se puede aplicar a g el teorema 1.14 y concluir que existe una asíntota vertical en $x = -2$, como se muestra en la figura 1.43. A partir de la gráfica, se ve que

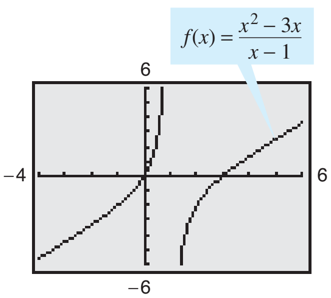
$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \infty.$$

Observar que $x = 2$ *no es* una asíntota vertical.

EJEMPLO 4 Cálculo de límites infinitos

Determinar los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$$



f tiene una asíntota vertical en $x = 1$
Figura 1.44

Solución Puesto que el denominador es 0 cuando $x = 1$ (y el numerador no se anula), se sabe que la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$$

tiene una asíntota vertical en $x = 1$. Esto significa que cada uno de los límites dados es ∞ o $-\infty$. Se puede determinar el resultado al analizar f en los valores de x cercanos a 1, o al utilizar una herramienta de graficación. En la gráfica de f que se muestra en la figura 1.44, se observa que la gráfica tiende a ∞ por la izquierda de $x = 1$ y a $-\infty$ por la derecha de $x = 1$. De tal modo, se puede concluir que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = \infty \qquad \text{El límite por la izquierda es infinito.}$$

y

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = -\infty. \qquad \text{El límite por la derecha es menos infinito.}$$

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Cuando se utiliza una herramienta de graficación, hay que tener cuidado para interpretar correctamente la gráfica de una función con una asíntota vertical, ya que las herramientas de graficación suelen tener dificultades para representar este tipo de gráficas.

TEOREMA 1.15 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES INFINITOS

Sean c y L números reales, y f y g funciones tales que

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = L.$$

1. Suma o diferencia: $\lim\limits_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \infty$
2. Producto: $\lim\limits_{x\to c} [f(x)g(x)] = \infty, \quad L > 0$

   $\lim\limits_{x\to c} [f(x)g(x)] = -\infty, \quad L < 0$
3. Cociente: $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

Propiedades análogas son válidas para límites laterales y para funciones cuyo límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es $-\infty$.

DEMOSTRACIÓN Para probar que el límite de $f(x) + g(x)$ es infinito, elegir un $M > 0$. Se necesita entonces encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$[f(x) + g(x)] > M$$

siempre que $0 < |x - c| < \delta$. Para simplificar, suponer que L es positiva sea $M_1 = M + 1$. Puesto que el límite de $f(x)$ es infinito, existe un δ_1 tal que $f(x) > M_1$ siempre que $0 < |x - c| < \delta_1$. Como además el límite de $g(x)$ es L, existe un δ_2 tal que $|g(x) - L| < 1$ siempre que $0 < |x - c| < \delta_2$. Haciendo que δ sea el menor de δ_1 y δ_2, concluir que $0 < |x - c| < \delta$ implica que $f(x) > M + 1$ y $|g(x) - L| < 1$. La segunda de estas desigualdades implica que $g(x) > L - 1$ y, sumando esto a la primera desigualdad, se obtiene

$$f(x) + g(x) > (M + 1) + (L - 1) = M + L > M.$$

Por tanto, también se concluye que

$$\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \infty.$$

Las demostraciones de las demás propiedades se dejan como ejercicios (ver el ejercicio 78).

EJEMPLO 5 Cálculo de límites

a) Puesto que $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, se puede escribir

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \infty.$$ Propiedad 1, teorema 1.15.

b) Puesto que $\lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 + 1) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} (\cot \pi x) = -\infty$, se deduce que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + 1}{\cot \pi x} = 0.$$ Propiedad 3, teorema 1.15.

c) Al ser $\lim\limits_{x\to 0^+} 3 = 3$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = \infty$, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} 3 \cot x = \infty.$$ Propiedad 2, teorema 1.15.

1.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, determinar si $f(x)$ tiende a ∞ o a $-\infty$ cuando x tiende a 4 por la izquierda y por la derecha.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$

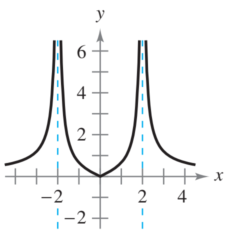
2. $f(x) = \dfrac{-1}{x-4}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2}$

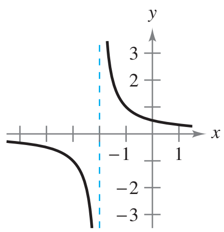
4. $f(x) = \dfrac{-1}{(x-4)^2}$

En los ejercicios 5 a 8, determinar si $f(x)$ tiende a ∞ o a $-\infty$ cuando x tiende a -2 por la izquierda y por la derecha.

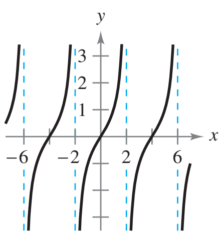
5. $f(x) = 2\left|\dfrac{x}{x^2-4}\right|$



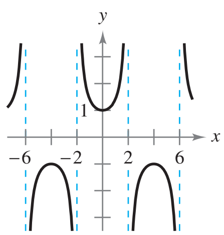
6. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$



7. $f(x) = \tan\dfrac{\pi x}{4}$



8. $f(x) = \sec\dfrac{\pi x}{4}$



Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 9 a 12, completar la tabla para determinar si $f(x)$ tiende a ∞ o a $-\infty$ cuando x tiende a -3 por la izquierda y por la derecha, respectivamente. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y corroborar la respuesta.**

x	-3.5	-3.1	-3.01	-3.001
$f(x)$				

x	-2.999	-2.99	-2.9	-2.5
$f(x)$				

9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

10. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$

11. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$

12. $f(x) = \sec\dfrac{\pi x}{6}$

En los ejercicios 13 a 32, encontrar las asíntotas verticales (si las hay) de la gráfica de la función.

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

14. $f(x) = \dfrac{4}{(x-2)^3}$

15. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

16. $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2+4}$

17. $g(t) = \dfrac{t-1}{t^2+1}$

18. $h(s) = \dfrac{2s-3}{s^2-25}$

19. $h(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2-x-2}$

20. $g(x) = \dfrac{2+x}{x^2(1-x)}$

21. $T(t) = 1 - \dfrac{4}{t^2}$

22. $g(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^3 - x^2 - 4x}{3x^2 - 6x - 24}$

23. $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2}$

24. $f(x) = \dfrac{4x^2+4x-24}{x^4-2x^3-9x^2+18x}$

25. $g(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$

26. $h(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+2x^2+x+2}$

27. $f(x) = \dfrac{x^2-2x-15}{x^3-5x^2+x-5}$

28. $h(t) = \dfrac{t^2-2t}{t^4-16}$

29. $f(x) = \tan \pi x$

30. $f(x) = \sec \pi x$

31. $s(t) = \dfrac{t}{\operatorname{sen} t}$

32. $g(\theta) = \dfrac{\tan\theta}{\theta}$

En los ejercicios 33 a 36, determinar si la función tiene una asíntota vertical o una discontinuidad evitable (o removible) en $x = -1$. Representar la función en una herramienta de graficación para confirmar la respuesta.

33. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

34. $f(x) = \dfrac{x^2-6x-7}{x+1}$

35. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$

36. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+1)}{x+1}$

En los ejercicios 37 a 54, calcular el límite.

37. $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1}$

38. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{(x-1)^2}$

39. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2}$

40. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{2+x}{1-x}$

41. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{(x-1)^2}$

42. $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2}{x^2+16}$

43. $\displaystyle\lim_{x\to -3^-} \frac{x+3}{x^2+x-6}$

44. $\displaystyle\lim_{x\to (-1/2)^+} \frac{6x^2+x-1}{4x^2-4x-3}$

45. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)}$

46. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x^2}$

47. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

48. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$

49. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\operatorname{sen} x}$

50. $\displaystyle\lim_{x\to (\pi/2)^+} \frac{-2}{\cos x}$

51. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sqrt{x}}{\csc x}$

52. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{\cot x}$

53. $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} x \sec \pi x$

54. $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} x^2 \tan \pi x$

En los ejercicios 55 a 58, utilizar una herramienta de graficación para representar la función y determinar el límite lateral.

55. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

56. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

57. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 25}$

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$

58. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{8}$

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

Desarrollo de conceptos

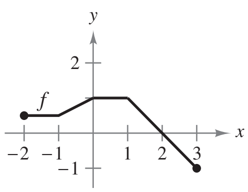
59. Con sus propias palabras, describir el significado de un límite infinito. ¿Es ∞ un número real?

60. Con sus propias palabras, describir el significado de la asíntota vertical de una gráfica.

61. Escribir una función racional con asíntotas verticales en $x = 6$ y en $x = -2$ y un cero en $x = 3$.

62. ¿Tiene toda función racional una asíntota vertical? Explicar la respuesta.

63. Utilizar la gráfica de la función f (ver la figura) para construir la gráfica de $g(x) = 1/f(x)$ en el intervalo $[-2, 3]$.



Para discusión

64. Dado un polinomio $p(x)$, ¿será verdad que la gráfica de una función dada por $f(x) = \dfrac{p(x)}{x - 1}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$? ¿Por qué sí o por qué no?

65. ***Relatividad*** De acuerdo con la teoría de la relatividad, la masa m de una partícula depende de su velocidad v; es decir:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

donde m_0 es la masa cuando la partícula está en reposo y c es la velocidad de la luz. Calcular el límite de la masa cuando v tiende a c^-.

66. ***Ley de Boyle*** En un gas a temperatura constante, la presión P es inversamente proporcional al volumen V. Calcular el límite de P cuando $V \to 0^+$.

67. ***Ritmo o velocidad de cambio*** Una patrulla está estacionada a 50 pies de un gran almacén (ver la figura). La luz giratoria de la parte superior del automóvil gira a un ritmo o velocidad de $\frac{1}{2}$ revolución por segundo. El ritmo o velocidad al que se desplaza el haz de luz a lo largo de la pared es $r = 50\pi \sec^2 \theta$ pies/s.

a) Calcular el ritmo o velocidad r cuando θ es $\pi/6$.
b) Determinar el ritmo o velocidad r cuando θ es $\pi/3$.
c) Encontrar el límite de r cuando $\theta \to (\pi/2)^-$.

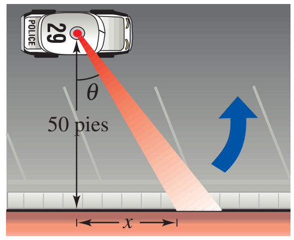


Figura para problema 67

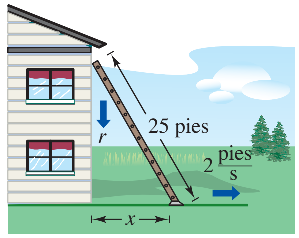


Figura para problema 68

68. ***Ritmo o velocidad de cambio*** Una escalera de 25 pies de largo está apoyada en una casa (ver la figura). Si por alguna razón la base de la escalera se aleja del muro a un ritmo de 2 pies por segundo, la parte superior descenderá con un ritmo dado por

$$r = \frac{2x}{\sqrt{625 - x^2}} \text{ pies/s}$$

donde x es la distancia que hay entre la base de la escalera y el muro.

a) Calcular el ritmo o velocidad r cuando x es 7 pies.
b) Calcular el ritmo o velocidad r cuando x es 15 pies.
c) Encontrar el límite de r cuando $x \to 25^-$.

69. ***Velocidad media*** En un viaje de d millas hacia otra ciudad, la velocidad media de un camión fue de x millas por hora. En el viaje de regreso, su velocidad media fue de y millas por hora. La velocidad media del viaje de ida y vuelta fue de 50 millas por hora.

a) Verificar que $y = \dfrac{25x}{x - 25}$. ¿Cuál es el dominio?

b) Completar la tabla.

x	30	40	50	60
y				

¿Difieren los valores de y de los esperados? Explicar la respuesta.

c) Calcular el límite de y cuando $x \to 25^+$ e interpretar el resultado.

70. ***Análisis numérico y gráfico*** Utilizar una herramienta de graficación a fin de completar la tabla para cada función y representar gráficamente cada una de ellas con objeto de calcular el límite. ¿Cuál es el valor del límite cuando la potencia de x en el denominador es mayor que 3?

x	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x)$							

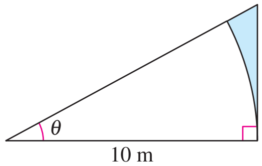
a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^4}$

71. ***Análisis numérico y gráfico*** Considerar la región sombreada que queda fuera del sector del círculo con radio de 10 m y dentro del triángulo rectángulo de la figura.



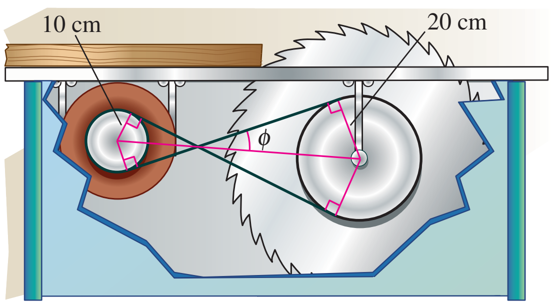
a) Expresar el área $A = f(\theta)$ de la región en función de θ. Determinar el dominio de esta función.

b) Utilizar una herramienta de graficación para completar la tabla y representar la función sobre el dominio apropiado.

θ	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
$f(\theta)$					

c) Calcular el límite de A cuando $\theta \to (\pi/2)^-$.

72. ***Análisis numérico y gráfico*** Una banda en cruz conecta la polea de 20 cm (10 cm de radio) de un motor eléctrico con otra polea de 40 cm (20 cm de radio) de una sierra circular. El motor eléctrico gira a 1 700 revoluciones por minuto.



a) Determinar el número de revoluciones por minuto de la sierra.

b) ¿Cómo afecta el cruce de la banda a la sierra en relación con el motor?

c) Sea L la longitud total de la correa. Exprese L en función de ϕ, donde ϕ se mide en radianes. ¿Cuál es el dominio de la función? [*Sugerencia*: Sumar las longitudes de los tramos rectos de la banda y las longitudes de la banda alrededor de cada polea.]

d) Utilizar una herramienta de graficación para completar la tabla.

ϕ	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
L					

e) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función en un dominio apropiado.

f) Calcular el $\lim\limits_{\phi \to (\pi/2)^-} L$. Utilizar algún argumento geométrico como base de otro procedimiento para encontrar este límite.

g) Calcular $\lim\limits_{\phi \to 0^+} L$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 73 a 76, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que lo es.**

73. La gráfica de una función racional tiene al menos una asíntota vertical.

74. Las funciones polinomiales carecen de asíntotas verticales.

75. Las gráficas de funciones trigonométricas carecen de aísntotas verticales.

76. Si f tiene una asíntota vertical en $x = 0$, entonces no está definida en $x = 0$.

77. Encontrar a continuación las funciones f y g tales que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$, pero $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] \neq 0$.

78. Demostrar las propiedades restantes del teorema 1.15.

79. Demostrar que si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

80. Demostrar que si $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, entonces el $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ no existe.

Límites infinitos **En los ejercicios 81 y 82, usar la definición ε-δ de límite para demostrar lo afirmado**

81. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x - 3} = \infty$

82. $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{1}{x - 5} = -\infty$

PROYECTO DE TRABAJO

Gráficas y límites de las funciones trigonométricas

Recordando, del teorema 1.9, que el límite de $f(x) = (\text{sen } x)/x$ cuando x tiende a 0 es 1:

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función f en el intervalo $-\pi \leq 0 \leq \pi$ y explicar cómo ayuda esta gráfica a confirmar dicho teorema.

b) Explicar cómo podría usar una tabla de valores para confirmar numéricamente el valor de este límite.

c) Dibujar a mano la gráfica de la función $g(x) = \text{sen } x$. Trazar una recta tangente en el punto (0, 0) y estimar visualmente su pendiente.

d) Sea $(x, \text{sen } x)$ un punto en la gráfica de g cercano a (0, 0). Escribir una fórmula para la pendiente de la recta secante que une a $(x, \text{sen } x)$ con (0, 0). Evaluar esta fórmula para $x = 0.1$ y $x = 0.01$. Después encontrar la pendiente exacta de la recta tangente a g en el punto (0, 0).

e) Dibujar la gráfica de la función coseno, $h(x) = \cos x$. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en el punto (0, 1)? Utilizar límites para calcular analíticamente dicha pendiente.

f) Calcular la pendiente de la recta tangente a $k(x) = \tan x$ en el punto (0, 0).

1 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, determinar si el problema se puede resolver usando conocimientos previos al cálculo, o si se requiere el cálculo. Resolver el problema si se puede utilizar precálculo. En caso de que sea necesario el cálculo, explicar por qué. Encontrar la solución usando un método gráfico o numérico.

1. Calcular la distancia entre los puntos (1, 1) y (3, 9) a lo largo de la curva $y = x^2$.
2. Calcular la distancia entre los puntos (1, 1) y (3, 9) a lo largo de la recta $y = 4x - 3$.

En los ejercicios 3 y 4, completar la tabla y usar el resultado para estimar el límite. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y corroborar el resultado.

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

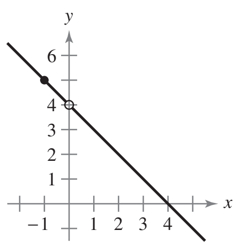
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[4/(x+2)] - 2}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}\right)}{x}$

En los ejercicios 5 a 8, encontrar el límite *L*. Después utilizar la definición *ε*-*δ* para demostrar que el límite es *L*.

5. $\lim\limits_{x\to 1} (x+4)$
6. $\lim\limits_{x\to 9} \sqrt{x}$
7. $\lim\limits_{x\to 2} (1 - x^2)$
8. $\lim\limits_{x\to 5} 9$

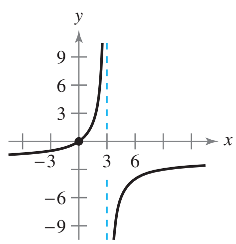
En los ejercicios 9 y 10, utilizar la gráfica para determinar cada límite.

9. $h(x) = \dfrac{4x - x^2}{x}$



a) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$

10. $g(x) = \dfrac{-2x}{x-3}$



a) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

En los ejercicios 11 a 26, encontrar el límite (si existe).

11. $\lim\limits_{x\to 6} (x-2)^2$
12. $\lim\limits_{x\to 7} (10 - x)^4$
13. $\lim\limits_{t\to 4} \sqrt{t+2}$
14. $\lim\limits_{y\to 4} 3|y - 1|$
15. $\lim\limits_{t\to -2} \dfrac{t+2}{t^2 - 4}$
16. $\lim\limits_{t\to 3} \dfrac{t^2 - 9}{t - 3}$
17. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x-3} - 1}{x - 4}$
18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$
19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[1/(x+1)] - 1}{x}$
20. $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{\left(1/\sqrt{1+s}\right) - 1}{s}$
21. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^3 + 125}{x + 5}$
22. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$
23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$
24. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{4x}{\tan x}$
25. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}[(\pi/6) + \Delta x] - (1/2)}{\Delta x}$

    [*Sugerencia:* $\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi$]
26. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\cos(\pi + \Delta x) + 1}{\Delta x}$

    [*Sugerencia:* $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$]

En los ejercicios 27 a 30, calcular el límite, dado que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\frac{3}{4}$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \frac{2}{3}$.

27. $\lim\limits_{x\to c} [f(x)g(x)]$
28. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
26. $\lim\limits_{x\to c} [f(x) + 2g(x)]$
29. $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^2$

Análisis numérico, gráfico y analítico **En los ejercicios 31 y 32, considerar**

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

a) **Completar la tabla para estimar el límite.**

b) **Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y usar la gráfica para estimar el límite.**

c) **Racionalizar el numerador y calcular de manera analítica el valor exacto del límite.**

x	1.1	1.01	1.001	1.0001
$f(x)$				

31. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{x - 1}$
32. $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{x - 1}$

    [*Sugerencia:* $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$]

Objeto en caída libre **En los ejercicios 33 y 34, utilizar la función posición $s(t) = -4.9t^2 + 250$, que da la altura en metros de un objeto que cae libremente desde una altura de 250 metros. Su velocidad en el instante $t = a$ segundos está dada por**

$$\lim_{t\to a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}.$$

33. Calcular la velocidad cuando $t = 4$.
34. ¿A qué velocidad golpeará el suelo?

En los ejercicios 35 a 40, encontrar el límite (si lo hay). Si no existe límite, explicar por qué.

35. $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to 4} [\![x-1]\!]$

37. $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & x \le 2 \\ 2-x, & x > 2 \end{cases}$

38. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} g(x)$, donde $g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \le 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$

39. $\displaystyle\lim_{t\to 1} h(t)$, donde $h(t) = \begin{cases} t^3+1, & t < 1 \\ \frac{1}{2}(t+1), & t \ge 1 \end{cases}$

40. $\displaystyle\lim_{s\to -2} f(s)$, donde $f(s) = \begin{cases} -s^2-4s-2, & s \le -2 \\ s^2+4s+6, & s > -2 \end{cases}$

En los ejercicios 41 a 52, determinar los intervalos en los que la función es continua.

41. $f(x) = -3x^2 + 7$

42. $f(x) = x^2 - \dfrac{2}{x}$

43. $f(x) = [\![x+3]\!]$

44. $f(x) = \dfrac{3x^2-x-2}{x-1}$

45. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-x-2}{x-1}, & x \ne 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} 5-x, & x \le 2 \\ 2x-3, & x > 2 \end{cases}$

47. $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

48. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

49. $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$

50. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+2}$

51. $f(x) = \csc \dfrac{\pi x}{2}$

52. $f(x) = \tan 2x$

53. Determinar el valor de c para el que la función es continua en toda la recta de los números reales.

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \le 2 \\ cx+6, & x > 2 \end{cases}$$

54. Determinar los valores de b y c que hacen a la función continua sobre toda la recta de los números reales:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 1 < x < 3 \\ x^2+bx+c, & |x-2| \ge 1 \end{cases}$$

55. Utilizar el teorema de valor intermedio para demostrar que $f(x) = 2x^3 - 3$ tiene un cero en el intervalo $[1, 2]$.

56. ***Costo de mensajería*** El envío de un paquete por mensajería de Nueva York a Atlanta cuesta \$12.80 por la primera libra y \$2.50 por cada libra o fracción adicional. Utilizar la función parte entera para elaborar un modelo que describa el costo C de envío por mensajería para un paquete de x libras. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y analizar su continuidad.

57. Sea $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$. Encontrar los siguientes límites (si es posible).

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$

58. Sea $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$

a) Encontrar el dominio de f.

b) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

c) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

En los ejercicios 59 a 62, encontrar las asíntotas verticales (si las hay) de la gráfica de la función.

59. $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$

60. $h(x) = \dfrac{4x}{4-x^2}$

61. $f(x) = \dfrac{8}{(x-10)^2}$

62. $f(x) = \csc \pi x$

En los ejercicios 63 a 74, encontrar el límite lateral (si existe).

63. $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} \frac{2x^2+x+1}{x+2}$

64. $\displaystyle\lim_{x\to (1/2)^+} \frac{x}{2x-1}$

65. $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{x^3+1}$

66. $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{x+1}{x^4-1}$

67. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+2x+1}{x-1}$

68. $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-2x+1}{x+1}$

69. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(x - \frac{1}{x^3}\right)$

70. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}}$

71. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} 4x}{5x}$

72. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sec x}{x}$

73. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\csc 2x}{x}$

74. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos^2 x}{x}$

75. ***Medio ambiente*** Una central térmica quema carbón para generar energía eléctrica. El costo C, en dólares, de eliminar p% de las sustancias contaminantes del aire en sus emisiones de humo es

$$C = \frac{80\,000p}{100-p}, \qquad 0 \le p < 100.$$

Calcular cuánto cuesta eliminar *a*) 15%, *b*) 50% y *c*) 90% de los contaminantes. *d*) Encontrar el límite de C cuando $p \to 100^-$.

76. La función f está definida como

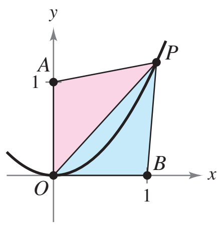
$$f(x) = \frac{\tan 2x}{x}, \qquad x \ne 0$$

a) Encontrar $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x}$ (si existe).

b) ¿Puede definirse la función f en $x = 0$ de manera que sea continua en ese punto?

SP Solución de problemas

1. Sea $P(x, y)$ un punto de la parábola $y = x^2$ en el primer cuadrante. Considerar el triángulo ΔPAO formado por P, $A(0, 1)$ y el origen $O(0, 0)$, y el triángulo ΔPBO formado por P, $B(1, 0)$ y el origen.



a) Dar el perímetro de cada triángulo en términos de x.

b) Sea $r(x)$ la relación entre los perímetros de ambos triángulos,

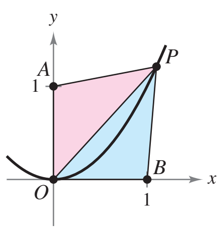
$$r(x) = \frac{\text{Perímetro } \triangle PAO}{\text{Perímetro } \triangle PBO}.$$

Completar la tabla.

x	4	2	1	0.1	0.01
Perímetro $\triangle PAO$					
Perímetro $\triangle PBO$					
$r(x)$					

c) Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} r(x)$.

2. Sea $P(x, y)$ un punto de la parábola $y = x^2$ en el primer cuadrante. Considerar el triángulo ΔPAO formado por P, $A(0, 1)$ y el origen $O(0, 0)$, y el triángulo ΔPBO formado por P, $B(1, 0)$ y el origen:



a) Determinar el área de cada triángulo en términos de x.

b) Sea $a(x)$ la relación entre las áreas de ambos triángulos,

$$a(x) = \frac{\text{Área } \triangle PBO}{\text{Área } \triangle PAO}.$$

Completar la tabla.

x	4	2	1	0.1	0.01
Área $\triangle PAO$					
Área $\triangle PBO$					
$a(x)$					

c) Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} a(x)$.

3. *a*) Calcular el área de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio 1. ¿Cuánto se acerca su área a la del círculo?

b) Encontrar el área A_n de un polígono regular con n lados inscrito en un círculo de radio 1. Elaborar su respuesta como una función de n.

c) Completar la tabla.

n	6	12	24	48	96
A_n					

d) ¿Qué número es cada vez mayor cuando A_n tiende a n?

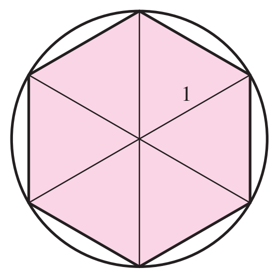


Figura para 3

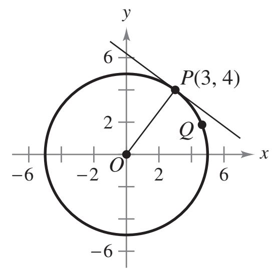


Figura para 4

4. Sea $P(3, 4)$ un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

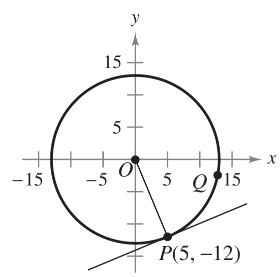
a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que une a P con $O(0, 0)$?

b) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en P.

c) Sea $Q(x, y)$ otro punto que se encuentra en el primer cuadrante y forma parte de la misma circunferencia. Calcular la pendiente m_x de la recta que une a P con Q en términos de x.

d) Calcular $\lim\limits_{x\to 3} m_x$. ¿Cómo se relaciona este número con la respuesta al apartado *b*)?

5. Sea $P(5, -12)$ un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 169$.



a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que une a P con $O(0, 0)$?

b) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en P.

c) Sea $Q(x, y)$ otro punto que se encuentra en el cuarto cuadrante y forma parte de la misma circunferencia. Calcular la pendiente m_x de la recta que une a P con Q en términos de x.

d) Calcular $\lim\limits_{x\to 5} m_x$. ¿Cómo se relaciona este número con la respuesta al apartado *b*)?

6. Encontrar valores de las constantes a y b tales que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}.$$

7. Considerar la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+x^{1/3}}-2}{x-1}$.

a) Encontrar el dominio de f.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función.

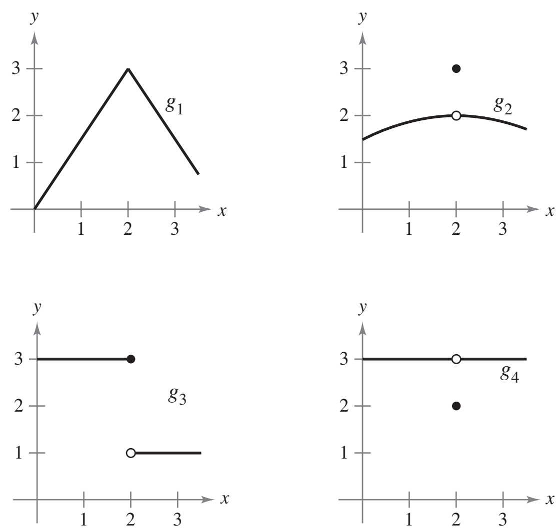
c) Calcular $\lim\limits_{x\to -27^+} f(x)$.

d) Calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

8. Determinar todos los valores de la constante a tales que la siguiente función sea continua en todos los números reales.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{\tan x}, & x \geq 0 \\ a^2 - 2, & x < 0 \end{cases}$$

9. Considerar las gráficas de las funciones g_1, g_2, g_3 y g_4:



Para cada una de las condiciones dadas de la función f, ¿cuál gráfica podría ser una gráfica de f?

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

b) f es continua en 2.

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$

10. Construir la gráfica de la función $f(x) = \left[\!\left[\dfrac{1}{x}\right]\!\right]$.

a) Evaluar $f(\frac{1}{4})$, $f(3)$ y $f(1)$.

b) Evaluar los límites $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

c) Analizar la continuidad de la función.

11. Construir la gráfica de la función $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.

a) Evaluar $f(1)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ y $f(-2.7)$.

b) Evaluar los límites $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$.

c) Analizar la continuidad de la función.

12. Para que un cohete escape del campo gravitacional de la Tierra, se debe lanzar con una velocidad inicial denominada **velocidad de escape**. Un cohete lanzado desde la superficie de la Tierra tiene una velocidad v (en millas por segundo) dada por:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r} + v_0^2 - \frac{2GM}{R}} \approx \sqrt{\frac{192\,000}{r} + v_0^2 - 48}$$

donde v_0 es la velocidad inicial, r es la distancia entre el cohete y el centro de la Tierra, G es la constante gravitacional, M es la masa de la Tierra y R es el radio de la Tierra (4 000 millas, aproximadamente).

a) Encontrar el valor de v_0 para el que se obtiene un límite infinito para r cuando v tiende a cero. Este valor de v_0 es la velocidad de escape para la Tierra.

b) Un cohete lanzado desde la superficie de la Luna se traslada con una velocidad v (en millas por segundo) dada por

$$v = \sqrt{\frac{1\,920}{r} + v_0^2 - 2.17}.$$

Encontrar la velocidad de escape para la Luna.

c) Un cohete lanzado desde la superficie de un planeta se traslada con una velocidad v (en millas por segundo) dada por

$$v = \sqrt{\frac{10\,600}{r} + v_0^2 - 6.99}.$$

Encontrar la velocidad de escape de este planeta. ¿Es la masa de este planeta mayor o menor que la de la Tierra? (Suponer que la densidad media de este planeta es igual a la de la Tierra.)

13. Para números positivos $a < b$, la **función pulso** se define como:

$$P_{a,b}(x) = H(x-a) - H(x-b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & a \leq x < b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$

donde $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ es la función de Heaviside.

a) Trazar la gráfica de la función pulso.

b) Encontrar los siguientes límites:

i) $\lim\limits_{x\to a^+} P_{a,b}(x)$ *ii*) $\lim\limits_{x\to a^-} P_{a,b}(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to b^+} P_{a,b}(x)$ *iv*) $\lim\limits_{x\to b^-} P_{a,b}(x)$

c) Analizar la continuidad de la función pulso.

d) ¿Por qué

$$U(x) = \frac{1}{b-a} P_{a,b}(x)$$

se llama función pulso **unitario**?

14. Sea a una constante diferente de cero. Comprobar que si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(ax) = L$. Demostrar por medio de un ejemplo que a debe ser distinta de cero.

2 Derivación

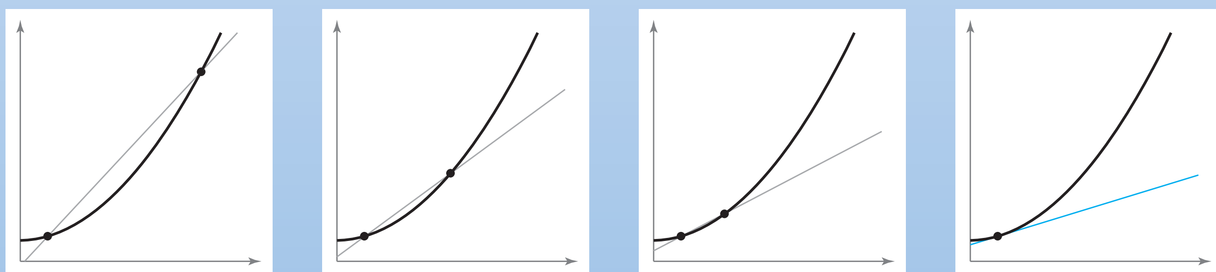
En este capítulo se estudiará uno de los procesos más importantes del cálculo: la *derivación*. En cada sección se aprenderán nuevos métodos y reglas para encontrar derivadas de funciones. Posteriormente se aplicarán estas reglas para entender conceptos como la velocidad, la aceleración y las razones de cambio de dos o más variables relacionadas.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo encontrar la derivada de una función utilizando la definición de límite y se entenderá la relación entre derivabilidad y continuidad. (2.1)
- Cómo encontrar la derivada de una función con las reglas básicas de derivación. (2.2)
- Cómo encontrar la derivada de una función con la regla del producto y la regla del cociente. (2.3)
- Cómo encontrar la derivada de una función con la regla de la cadena y la regla general de la potencia. (2.4)
- Cómo encontrar la derivada de una función con derivación implícita. (2.5)
- Cómo determinar una razón de cambio relacionada. (2.6)

Al Bello/Getty Images

Cuando salta de una plataforma, la velocidad de un clavadista es ligeramente positiva a causa del movimiento hacia arriba, pero se convierte en negativa en la caída. ¿Cómo puede utilizarse el cálculo para determinar la velocidad de un clavadista cuando se impacta sobre el agua? (Ver la sección 2.2, ejemplo 10.)



Para aproximar la pendiente de la recta tangente a una gráfica en un punto dado, se determina la pendiente de la secante que va de un punto de la gráfica a otro punto. A medida que este segundo punto se acerca al punto dado, la aproximación tiende a tornarse más exacta (ver la sección 2.1).

2.1 La derivada y el problema de la recta tangente

- Hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.
- Usar la definición de límite para calcular la derivada de una función.
- Comprobar la relación entre derivabilidad y continuidad.

Mary Evans Picture Library

ISAAC NEWTON (1642-1727)

Además de sus trabajos relativos al Cálculo, Newton aportó contribuciones a la Física tan revolucionarias como la Ley de la Gravitación Universal y sus tres leyes del movimiento.

El problema de la recta tangente

El cálculo se desarrolló a la sombra de cuatro problemas en los que estaban trabajando los matemáticos europeos en el siglo XVII.

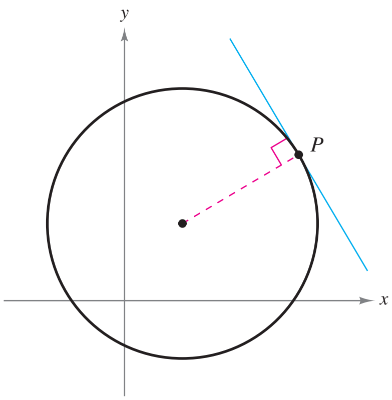
1. El problema de la recta tangente (sección 1.1 y esta sección)
2. El problema de la velocidad y la aceleración (secciones 2.2 y 2.3)
3. El problema de los máximos y mínimos (sección 3.1)
4. El problema del área (secciones 1.1 y 4.2)

Cada uno de ellos involucra la noción de límite y podría servir como introducción al cálculo.

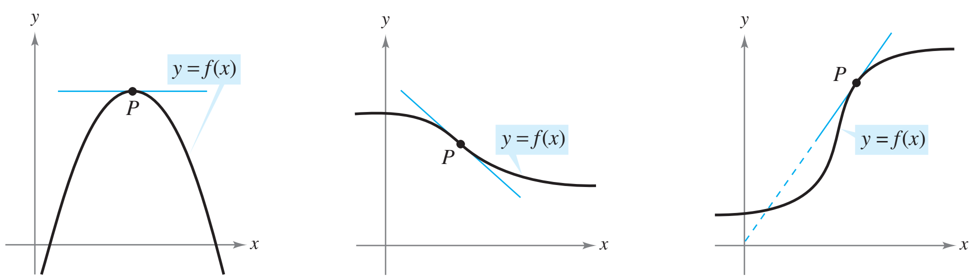
En la sección 1.1 se hizo una breve introducción al problema de la recta tangente. Aunque Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650), Christian Huygens (1629-1695) e Isaac Barrow (1630-1677) habían propuesto soluciones parciales, la primera solución general se suele atribuir a Isaac Newton (1642-1727) y a Gottfried Leibniz (1646-1716). El trabajo de Newton respecto a este problema procedía de su interés por la refracción de la luz y la óptica.

¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? En una circunferencia, la recta tangente en un punto P es la recta perpendicular al radio que pasa por P, como se muestra en la figura 2.1.

Sin embargo, en una curva general el problema se complica. Por ejemplo, ¿cómo se podrían definir las rectas tangentes que se observan en la figura 2.2? Afirmando que una recta es tangente a una curva en un punto P si toca a la curva en P sin atravesarla. Tal definición sería correcta para la primera curva de la figura 2.2, pero no para la segunda. También se podría decir que una recta es tangente a una curva si la toca o hace intersección en ella exactamente en el punto P, definición que serviría para una circunferencia pero no para curvas más generales, como sugiere la tercera curva de la figura 2.2.



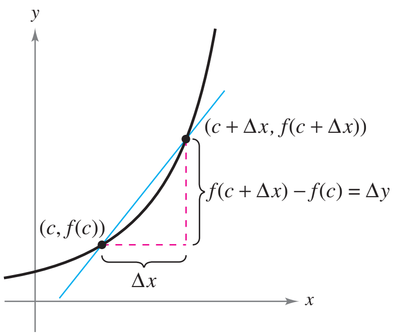
Recta tangente a una circunferencia
Figura 2.1



Recta tangente a una curva en un punto
Figura 2.2

EXPLORACIÓN

Identificación de una recta tangente Utilizar una herramienta de graficación para representar la función $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$. En la misma pantalla, dibujar la gráfica $y = x - 5$, $y = 2x - 5$ y $y = 3x - 5$. ¿Cuál de estas rectas, si es que hay alguna, parece tangente a la gráfica de f en el punto $(0, -5)$? Explicar el razonamiento.



Recta secante que pasa por $(c, f(c))$ y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$
Figura 2.3

En esencia, el problema de encontrar la recta tangente en un punto P se reduce al de calcular su *pendiente* en ese punto. Se puede aproximar la pendiente de la recta tangente usando la **recta secante*** que pasa por P y por otro punto cercano de la curva, como se muestra en la figura 2.3. Si $(c, f(c))$ es el punto de tangencia y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ es el otro punto de la gráfica de f, la pendiente de la recta secante que pasa por ambos puntos se encuentra sustituyendo en la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{\sec} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{(c + \Delta x) - c} \qquad \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}.$$

$$\boxed{m_{\sec} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.} \qquad \text{Pendiente de la recta secante.}$$

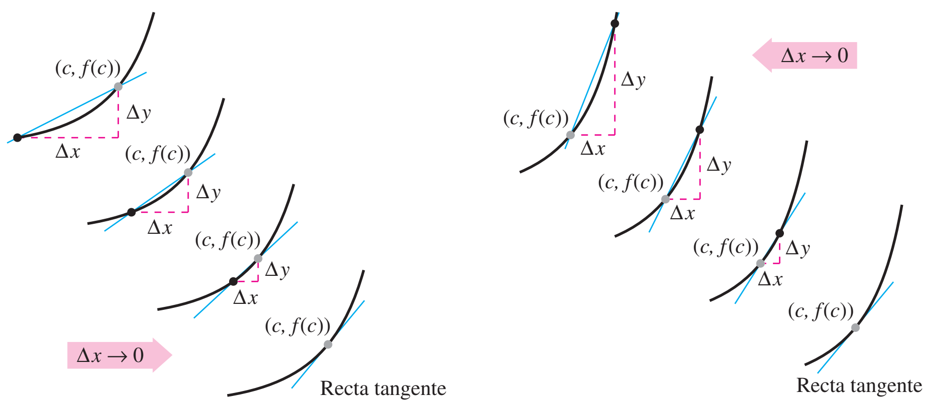
El miembro de la derecha en esta ecuación es un **cociente de incremento o de diferencias**. El denominador Δx es el **cambio** (o incremento) **en x** y el numerador $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$ es el **cambio** (o incremento) **en y**.

La belleza de este procedimiento radica en que se pueden obtener más aproximaciones y más precisas de la pendiente de la recta tangente tomando puntos de la gráfica cada vez más próximos al punto P de tangencia, como se muestra en la figura 2.4.

EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE

En 1637 el matemático René Descartes afirmó lo siguiente respecto al problema de la recta tangente:

"Y no tengo inconveniente en afirmar que éste no es sólo el problema de Geometría más útil y general que conozco, sino incluso el que siempre desearía conocer."



Aproximaciones a la recta tangente
Figura 2.4

DEFINICIÓN DE LA RECTA TANGENTE CON PENDIENTE *m*

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

entonces la recta que pasa por $(c, f(c))$ y cuenta con una pendiente m es la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ se llama también **pendiente de la gráfica de f en $x = c$**.

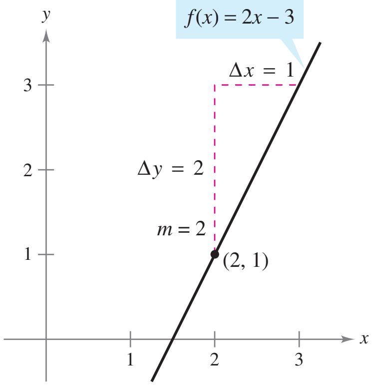
* *El uso de la palabra* secante *procede del latín* secare, *que significa cortar, y no es una referencia a la función trigonométrica del mismo nombre.*

EJEMPLO 1 La pendiente de la gráfica de una función lineal

Encontrar la pendiente de la gráfica de

$$f(x) = 2x - 3$$

en el punto (2, 1).



La pendiente de f en (2, 1) es $m = 2$
Figura 2.5

Solución Para encontrar la pendiente de la gráfica de f cuando $c = 2$, aplicar la definición de la pendiente de una recta tangente como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(2 + \Delta x) - 3] - [2(2) - 3]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 2\Delta x - 3 - 4 + 3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

La pendiente de f en $(c, f(c)) = (2, 1)$ es $m = 2$, como se observa en la figura 2.5.

NOTA En el ejemplo 1, la definición de la pendiente de f por medio de límites concuerda con la definición analizada en la sección P.2.

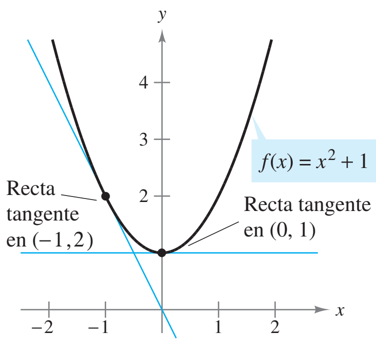
La gráfica de una función lineal tiene la misma pendiente en todos sus puntos. Esto no sucede en las funciones no lineales, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Rectas tangentes a la gráfica de una función no lineal

Calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de

$$f(x) = x^2 + 1$$

en los puntos (0, 1) y $(-1, 2)$, que se ilustran en la figura 2.6.



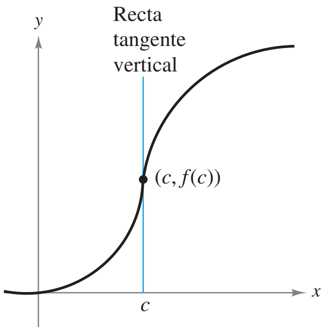
La pendiente de f en un punto cualquiera $(c, f(c))$ es $m = 2c$
Figura 2.6

Solución Sea $(c, f(c))$ un punto cualquiera de la gráfica de f. La pendiente de la recta tangente en él se encuentra mediante:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(c + \Delta x)^2 + 1] - (c^2 + 1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c^2 + 2c(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 1 - c^2 - 1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2c(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2c + \Delta x) \\
&= 2c.
\end{aligned}$$

De tal manera, la pendiente en *cualquier* punto $(c, f(c))$ de la gráfica de f es $m = 2c$. En el punto (0, 1) la pendiente es $m = 2(0) = 0$ y en $(-1, 2)$ la pendiente es $m = 2(-1) = -2$.

NOTA Observar que en el ejemplo 2, c se mantiene constante en el proceso de límite (cuando $\Delta x \to 0$).



La gráfica de f tiene recta tangente vertical en $(c, f(c))$
Figura 2.7

La definición de la recta tangente a una curva no incluye la posibilidad de una recta tangente vertical. Para éstas, se usa la siguiente definición. Si f es continua en c y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = -\infty$$

la recta vertical, $x = c$, que pasa por $(c, f(c))$ es una **recta tangente vertical** a la gráfica de f, por ejemplo, la función que se muestra en la figura 2.7 tiene tangente vertical en $(c, f(c))$. Si el dominio de f es el intervalo cerrado $[a, b]$, se puede ampliar la definición de recta tangente vertical de manera que incluya los extremos, considerando la continuidad y los límites por la derecha (para $x = a$) y por la izquierda (para $x = b$).

Derivada de una función

Se ha llegado a un punto crucial en el estudio del cálculo. El límite utilizado para definir la pendiente de una recta tangente también se utiliza para definir una de las dos operaciones fundamentales del cálculo: la **derivación**.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

La **derivada** de f en x está dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que exista ese límite. Para todos los x para los que exista este límite, f' es una función de x.

Observar que la derivada de una función de x también es una función de x. Esta "nueva" función proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$, siempre que la gráfica tenga una recta tangente en dicho punto.

El proceso de calcular la derivada de una función se llama **derivación**. Una función es **derivable** en x si su derivada en x existe, y **derivable en un intervalo abierto (a, b)** si es derivable en todos y cada uno de los puntos de ese intervalo.

Además de $f'(x)$, que se lee "f prima de x", se usan otras notaciones para la derivada de $y = f(x)$. Las más comunes son:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad D_x[y].$$

Notaciones para la derivada.

La notación dy/dx se lee "derivada de y *con respecto a* x" o simplemente "dy, dx". Usando notaciones de límites, se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Cálculo de la derivada mediante el proceso de límite

Calcular la derivada de $f(x) = x^3 + 2x$.

Solución

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x) - (x^3+2x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - x^3 - 2x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2]}{\cancel{\Delta x}}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2]\\
&= 3x^2 + 2
\end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO Cuando se use la definición para encontrar la derivada de una función, la clave consiste en volver a expresar el cociente incremental (o cociente de diferencias), de manera que Δx no aparezca como factor del denominador.

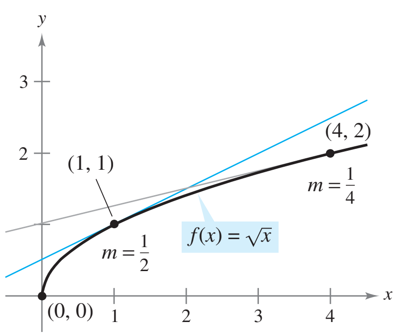
Cabe recordar que la derivada de una función f es en sí una función, misma que puede emplearse para encontrar la pendiente de la recta tangente en el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f.

EJEMPLO 4 Uso de la derivada para calcular la pendiente en un punto

Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$. Calcular luego la pendiente de la gráfica de f en los puntos $(1, 1)$ y $(4, 2)$. Analizar el comportamiento de f en $(0, 0)$.

Solución Se racionaliza el numerador, como se explicó en la sección 1.3.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}\right)\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0
\end{aligned}$$



La pendiente de f en $(x, f(x))$, $x > 0$, es $m = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$

Figura 2.8

En el punto $(1, 1)$ la pendiente es $f'(1) = \frac{1}{2}$. En el punto $(4, 2)$ la pendiente es $f'(4) = \frac{1}{4}$. Ver la figura 2.8. En el punto $(0, 0)$ la pendiente no está definida. Además, la gráfica de f tiene tangente vertical en $(0, 0)$.

En muchas aplicaciones, resulta conveniente usar una variable independiente distinta de x, como se manifiesta en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Cálculo de la derivada de una función

Encontrar la derivada de la función $y = 2/t$ respecto a t.

Solución Considerando $y = f(t)$, se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$ Definición de derivada.

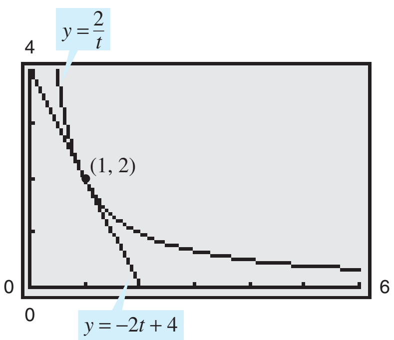
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{2}{t + \Delta t} - \dfrac{2}{t}}{\Delta t}$$ $f(t + \Delta t) = 2/(t + \Delta t)$ y $f(t) = 2/t$.

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{2t - 2(t + \Delta t)}{t(t + \Delta t)}}{\Delta t}$$ Combinar las fracciones del numerador.

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-2\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}(t)(t + \Delta t)}$$ Cancelar el factor común Δt.

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-2}{t(t + \Delta t)}$$ Simplificar.

$$= -\frac{2}{t^2}.$$ Evaluar el límite cuando $\Delta t \to 0$.



En el punto (1, 2) la recta $y = -2t + 4$ es tangente a la gráfica de $y = 2/t$
Figura 2.9

TECNOLOGÍA Se puede utilizar una herramienta de graficación para corroborar el resultado del ejemplo 5. Es decir, usando la fórmula $dy/dt = -2/t^2$, se sabe que la pendiente de la gráfica de $y = 2/t$ en el punto (1, 2) es $m = -2$. Esto implica que, usando la forma punto-pendiente, una ecuación de la recta tangente a la gráfica en (1, 2) es

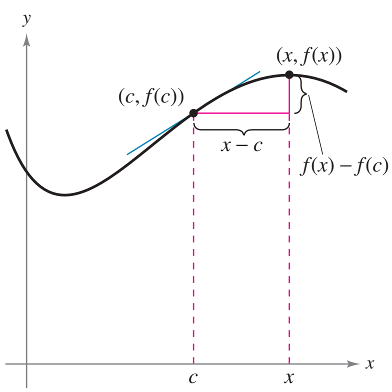
$$y - 2 = -2(t - 1) \quad \text{o} \quad y = -2t + 4$$

como se muestra en la figura 2.9.

Derivabilidad y continuidad

La siguiente forma alternativa como límite de la derivada es útil al investigar la relación que existe entre derivabilidad y continuidad. La derivada de f en c es

$$\boxed{f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}}$$ Fórmula alternativa de la derivada.

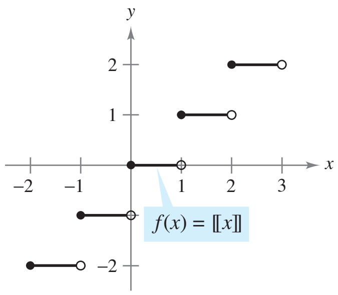


Cuando x tiende a c, la recta secante se aproxima a la recta tangente
Figura 2.10

siempre que dicho límite exista (ver la figura 2.10). (En el apéndice A se demuestra la equivalencia de ambas fórmulas.) Observe que la existencia del límite en esta forma alternativa requiere que los límites unilaterales

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existan y sean iguales. Estos límites laterales se denominan **derivada por la izquierda y por la derecha**, respectivamente. Se dice que f es **derivable en un intervalo cerrado [a, b]** si es derivable en (a, b) y existen además la derivada por la derecha en a y la derivada por la izquierda en b.



La función parte entera no es derivable en $x = 0$, ya que no es continua en ese punto
Figura 2.11

Si una función no es continua en $x = c$, no puede ser derivable en $x = c$. Por ejemplo, la función parte entera o mayor entero

$$f(x) = [\![x]\!]$$

no es continua en $x = 0$, y en consecuencia no es derivable en $x = 0$ (ver la figura 2.11). Esto se comprueba con sólo observar que

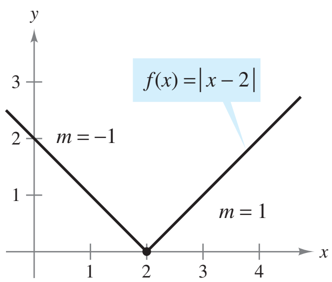
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{[\![x]\!] - 0}{x} = \infty \qquad \text{Derivada por la izquierda.}$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[\![x]\!] - 0}{x} = 0. \qquad \text{Derivada por la derecha.}$$

Aunque es cierto que derivable implica continua (como se muestra en el teorema 2.1), el recíproco no es cierto. En otras palabras, puede ocurrir que una función sea continua en $x = c$ y *no* sea derivable en $x = c$. Los ejemplos 6 y 7 ilustran tal posibilidad.

EJEMPLO 6 Una gráfica con un punto angular



f no es derivable en $x = 2$, porque las derivadas laterales no son iguales
Figura 2.12

La función

$$f(x) = |x - 2|$$

que se muestra en la figura 2.12 es continua en $x = 2$. Sin embargo, los límites unilaterales

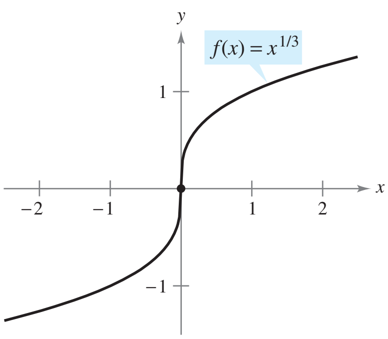
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = -1 \qquad \text{Derivada por la izquierda.}$$

y

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = 1 \qquad \text{Derivada por la derecha.}$$

no son iguales. Por consiguiente, f no es derivable en $x = 2$ y la gráfica de f no tiene una recta tangente en el punto $(2, 0)$.

EJEMPLO 7 Una gráfica con una recta tangente vertical



f no es derivable en $x = 0$, porque tiene tangente vertical en ese punto
Figura 2.13

La función

$$f(x) = x^{1/3}$$

es continua en $x = 0$, como se observa en la figura 2.13. Sin embargo, como el límite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} \\ &= \infty\end{aligned}$$

es infinito, se puede concluir que la recta tangente en $x = 0$ es vertical. Por tanto, f no es derivable en $x = 0$.

En los ejemplos 6 y 7 se puede observar que una función no es derivable en un punto donde su gráfica cuenta con un punto angular *o* una tangente vertical.

TECNOLOGÍA Algunas herramientas de graficación utilizan los programas de cálculo *Maple*, *Mathematica* y *TI89*, para realizar una derivación simbólica. Otros la hacen *numérica*, calculando valores de la derivada mediante la fórmula

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

donde Δx es un número pequeño como 0.001. ¿Observa algún problema con esta definición? Por ejemplo, usándola ¿cuál sería la derivada de $f(x) = |x|$ en $x = 0$?

TEOREMA 2.1 DERIVABLE IMPLICA CONTINUA

Si f es derivable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.

DEMOSTRACIÓN Para comprobar que f es continua en $x = c$ bastará con mostrar que $f(x)$ tiende a $f(c)$ cuando $x \to c$. Para tal fin, usar la derivabilidad de f en $x = c$ considerando el siguiente límite.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}[f(x) - f(c)] &= \lim_{x\to c}\left[(x-c)\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)\right] \\
&= \left[\lim_{x\to c}(x-c)\right]\left[\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right] \\
&= (0)[f'(c)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Puesto que la diferencia $f(x) - f(c)$ tiende a cero cuando $x \to c$, se puede concluir que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. De tal manera, f es continua en $x = c$.

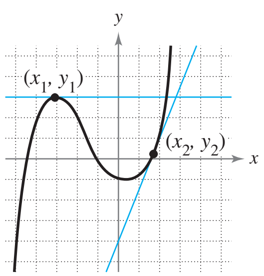
Los siguientes enunciados expresan en forma resumida la relación que existe entre continuidad y derivabilidad:

1. Si una función es derivable en $x = c$, entonces es continua en $x = c$. Por tanto, derivable implica continua.
2. Es posible que una función sea continua en $x = c$ sin ser derivable. En otras palabras, continua no implica derivable (ver el ejemplo 6).

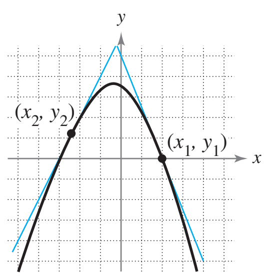
2.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, estimar la pendiente de la curva en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

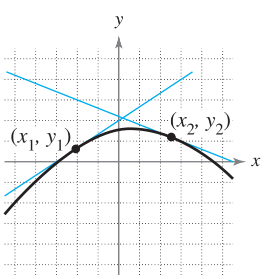
1. *a)*



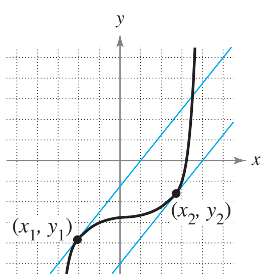
b)



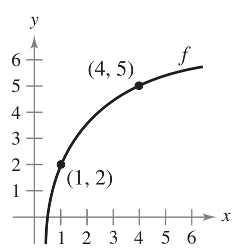
2. *a)*



b)



Con el fin de resolver los ejercicios 3 y 4, utilizar la gráfica que se muestra a continuación.



3. Identificar o trazar en la figura cada una de las cantidades siguientes.

a) $f(1)$ y $f(4)$ *b)* $f(4) - f(1)$

c) $y = \dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}(x - 1) + f(1)$

4. Escribir un símbolo de desigualdad (< o >) entre las cantidades dadas.

a) $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$ ▭ $\dfrac{f(4) - f(3)}{4 - 3}$

b) $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$ ▭ $f'(1)$

En los ejercicios 5 a 10, encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

5. $f(x) = 3 - 5x, \quad (-1, 8)$
6. $g(x) = \frac{3}{2}x + 1, \quad (-2, -2)$
7. $g(x) = x^2 - 9, \quad (2, -5)$
8. $g(x) = 6 - x^2, \quad (1, 5)$
9. $f(t) = 3t - t^2, \quad (0, 0)$
10. $h(t) = t^2 + 3, \quad (-2, 7)$

En los ejercicios 11 a 24, encontrar la derivada mediante el proceso de límite.

11. $f(x) = 7$
12. $g(x) = -3$
13. $f(x) = -10x$
14. $f(x) = 3x + 2$
15. $h(s) = 3 + \frac{2}{3}s$
16. $f(x) = 8 - \frac{1}{5}x$
17. $f(x) = x^2 + x - 3$
18. $f(x) = 2 - x^2$
19. $f(x) = x^3 - 12x$
20. $f(x) = x^3 + x^2$
21. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$
22. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
23. $f(x) = \sqrt{x + 4}$
24. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

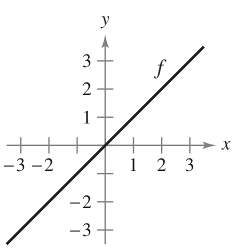
En los ejercicios 25 a 32, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado, *b*) utilizar una herramienta de graficación para dibujar la gráfica, la función y su recta tangente en dicho punto y *c*) aplicar la función *derivada* de una herramienta de graficación con el fin de verificar sus resultados.

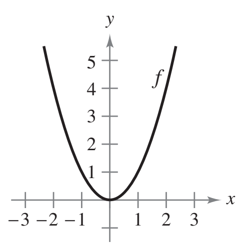
25. $f(x) = x^2 + 3, \quad (1, 4)$
26. $f(x) = x^2 + 3x + 4, \quad (-2, 2)$
27. $f(x) = x^3, \quad (2, 8)$
28. $f(x) = x^3 + 1, \quad (1, 2)$
29. $f(x) = \sqrt{x}, \quad (1, 1)$
30. $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad (5, 2)$
31. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}, \quad (4, 5)$
32. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}, \quad (0, 1)$

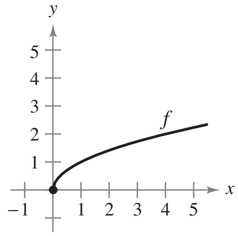
En los ejercicios 33 a 38, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* y paralela a la recta dada.

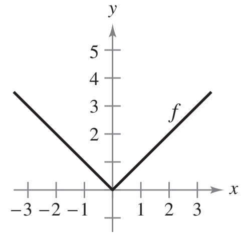
	Función	*Recta*
33.	$f(x) = x^2$	$2x - y + 1 = 0$
34.	$f(x) = 2x^2$	$4x + y + 3 = 0$
35.	$f(x) = x^3$	$3x - y + 1 = 0$
36.	$f(x) = x^3 + 2$	$3x - y - 4 = 0$
37.	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x + 2y - 6 = 0$
38.	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$	$x + 2y + 7 = 0$

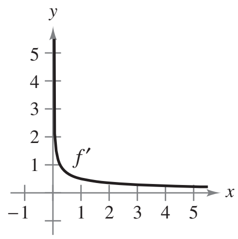
En los ejercicios 39 a 42, se muestra la gráfica de *f*. Seleccionar la gráfica de *f′*.

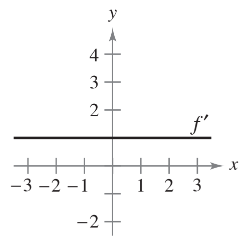
39.


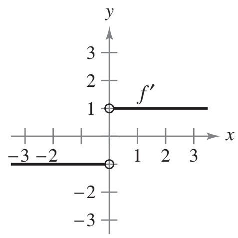
40.


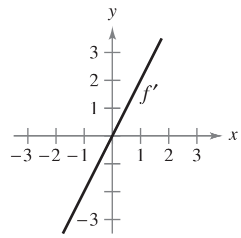
41.


42.


a)


b)


c)


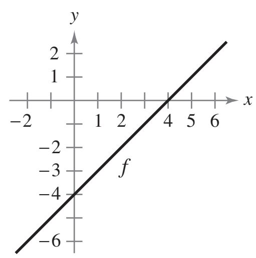
d)


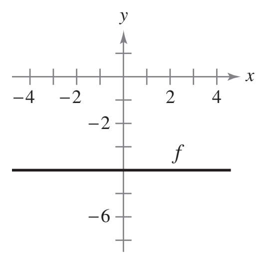
43. La recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en el punto $(4, 5)$ pasa por el punto $(7, 0)$. Encontrar $g(4)$ y $g'(4)$.

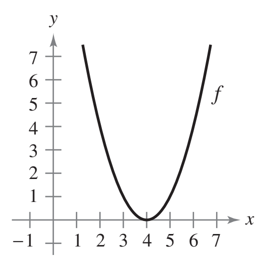
44. La recta tangente a la gráfica de $y = h(x)$ en el punto $(-1, 4)$ pasa por el punto $(3, 6)$. Encontrar $h(-1)$ y $h'(-1)$.

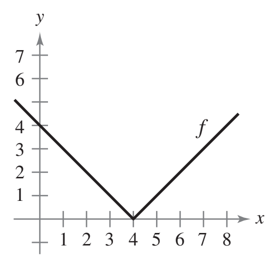
Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 45 a 50, construir la gráfica de *f′* y explicar cómo se obtuvo la respuesta.

45.


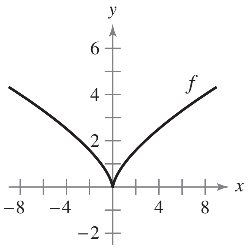
46.


47.


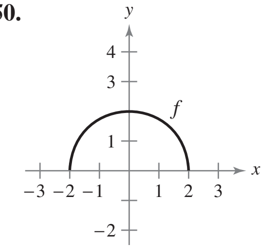
48.


Desarrollo de conceptos (*continuación*)

49.



50.



51. Construir la gráfica de una función cuya derivada siempre sea negativa. Explicar.

52. Construir la gráfica de una función cuya derivada siempre sea positiva. Explicar el razonamiento.

En los ejercicios 53 a 56, el límite representa a $f'(c)$ para una función f y un número c. Encontrar f y c.

53. $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[5 - 3(1 + \Delta x)] - 2}{\Delta x}$

54. $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-2 + \Delta x)^3 + 8}{\Delta x}$

55. $\displaystyle\lim_{x \to 6} \frac{-x^2 + 36}{x - 6}$

56. $\displaystyle\lim_{x \to 9} \frac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9}$

En los ejercicios 57 a 59, identificar una función f que tenga las características señaladas. Representarla gráficamente.

57. $f(0) = 2;$
$f'(x) = -3, -\infty < x < \infty$

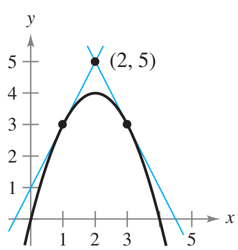
58. $f(0) = 4; f'(0) = 0;$
$f'(x) < 0$ para $x < 0;$
$f'(x) > 0$ para $x > 0$

59. $f(0) = 0; f'(0) = 0; f'(x) > 0$ si $x \neq 0$

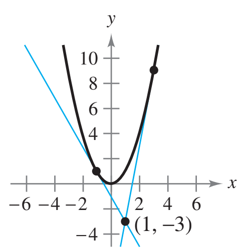
60. Suponer que $f'(c) = 3$. Encontrar $f'(-c)$ si: *a)* f es una función impar y *b)* f es una función par.

En los ejercicios 61 y 62, encontrar las ecuaciones de dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasen por el punto señalado.

61. $f(x) = 4x - x^2$



62. $f(x) = x^2$



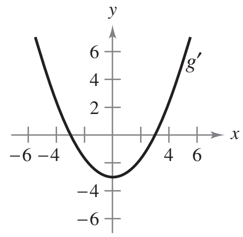
63. ***Razonamiento gráfico*** Utilizar una herramienta de graficación para representar cada una de las funciones y sus rectas tangentes en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$. Con base en los resultados, determinar si las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de una función en distintos valores de x siempre son distintas.

a) $f(x) = x^2$ *b)* $g(x) = x^3$

Para discusión

64. ***Razonamiento gráfico*** En la figura se muestra la gráfica de g'.

Para discusión (*continuación*)



a) $g'(0) =$ *b)* $g'(3) =$

c) ¿Qué se puede concluir de la gráfica de g, sabiendo que $g'(1) = -\frac{8}{3}$?

d) ¿Qué se puede concluir de la gráfica de g, sabiendo que $g'(-4) = \frac{7}{3}$?

e) $g(6) - g(4)$ ¿es positiva o negativa? Explicar la respuesta.

f) ¿Es posible encontrar $g(2)$ a partir de la gráfica? Explicar la respuesta.

65. ***Análisis gráfico*** Considerar la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y estimar los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$ y $f'(2)$.

b) Utilizar los resultados de la parte *a)* para determinar los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$ y $f'(-2)$.

c) Trazar una posible gráfica de f'.

d) Utilizar la definición de derivada para determinar $f'(x)$.

66. ***Análisis gráfico*** Considerar la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3$.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y estimar los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$.

b) Utilizar los resultados de la parte *a)* para determinar los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$, $f'(-2)$ y $f'(-3)$.

c) Trazar una posible gráfica de f'.

d) Utilizar la definición de derivada para determinar $f'(x)$.

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 67 y 68, representar en una misma ventana de la herramienta de graficación las gráficas de f y g y describir la relación entre ellas.**

$$g(x) = \frac{f(x + 0.01) - f(x)}{0.01}.$$

Clasificar las gráficas y describir la relación entre ellas.

67. $f(x) = 2x - x^2$

68. $f(x) = 3\sqrt{x}$

En los ejercicios 69 y 70, evaluar $f(2)$ y $f(2.1)$, y utilizar los resultados para estimar $f'(2)$.

69. $f(x) = x(4 - x)$

70. $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 71 y 72, utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su derivada en la misma ventana. Clasificar las gráficas y describir la relación que existe entre ellas.**

71. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

72. $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - 3x$

En los ejercicios 73 a 82, utilizar la forma alterna para calcular la derivada en $x = c$ (si existe).

73. $f(x) = x^2 - 5, \quad c = 3$

74. $g(x) = x(x - 1), \quad c = 1$

75. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1, \quad c = -2$

76. $f(x) = x^3 + 6x, \quad c = 2$

77. $g(x) = \sqrt{|x|}, \quad c = 0$

78. $f(x) = 2/x, \quad c = 5$

79. $f(x) = (x - 6)^{2/3}, \quad c = 6$

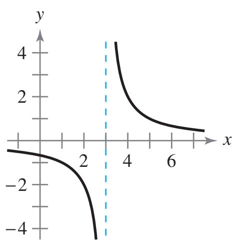
80. $g(x) = (x + 3)^{1/3}, \quad c = -3$

81. $h(x) = |x + 7|, \quad c = -7$

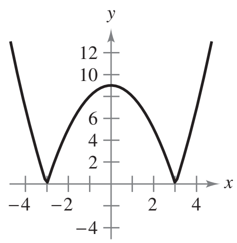
82. $f(x) = |x - 6|, \quad c = 6$

En los ejercicios 83 a 88, describir los valores x para los que f es derivable.

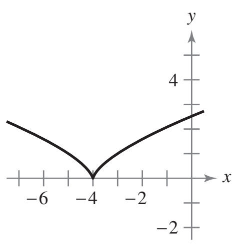
83. $f(x) = \dfrac{2}{x - 3}$



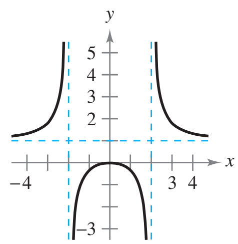
84. $f(x) = |x^2 - 9|$



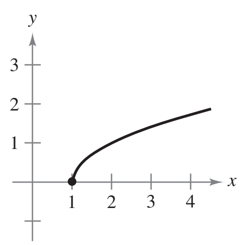
85. $f(x) = (x + 4)^{2/3}$



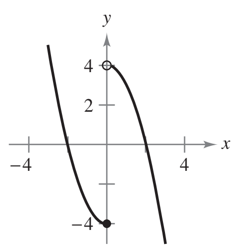
86. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$



87. $f(x) = \sqrt{x - 1}$



88. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \le 0 \\ 4 - x^2, & x > 0 \end{cases}$



Análisis gráfico **En los ejercicios 89 a 92, utilizar una herramienta de graficación para encontrar los valores de x en los que f es derivable.**

89. $f(x) = |x - 5|$

90. $f(x) = \dfrac{4x}{x - 3}$

91. $f(x) = x^{2/5}$

92. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x, & x \le 1 \\ x^2 - 2x, & x > 1 \end{cases}$

En los ejercicios 93 a 96, calcular las derivadas laterales en $x = 1$ (si existen). ¿Es derivable la función en $x = 1$?

93. $f(x) = |x - 1|$

94. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

95. $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^3, & x \le 1 \\ (x - 1)^2, & x > 1 \end{cases}$

96. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

En los ejercicios 97 y 98, determinar si la función es derivable en $x = 2$.

97. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 2 \\ 4x - 3, & x > 2 \end{cases}$

98. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x < 2 \\ \sqrt{2x}, & x \ge 2 \end{cases}$

99. ***Razonamiento gráfico*** Una recta de pendiente m pasa por el punto $(0, 4)$ y tiene ecuación $y = mx + 4$.

a) Escribir la distancia d que hay entre la recta y el punto $(3, 1)$ como función de m.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función d del apartado *a*). Basándonos en la gráfica, ¿es esa función derivable para todo valor de m? Si no es así, especificar en dónde no lo es.

100. ***Conjetura*** Tomando en cuenta las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$:

a) Dibujar la gráfica f y f' sobre el mismo conjunto de ejes.

b) Dibujar la gráfica g y g' sobre el mismo conjunto de ejes.

c) Identificar un patrón entre f y g y sus respectivas derivadas. Utilizarlo para hacer conjeturas respecto a $h'(x)$ si $h(x) = x^n$, donde n es un número entero mayor o igual y $n \ge 2$.

d) Encontrar $f'(x)$ si $f(x) = x^4$. Comparar el resultado con la conjetura del apartado *c*). ¿Esto comprueba la conjetura? Explicar la respuesta.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 101 a 104, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Para las que sean falsas, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

101. La pendiente de la recta tangente a una función derivable f en el punto $(2, f(2))$ es $\dfrac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$.

102. Si una función es continua en un punto, entonces es derivable en él.

103. Si una función tiene derivadas laterales por la derecha y por la izquierda en un punto, entonces es derivable en él.

104. Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en él.

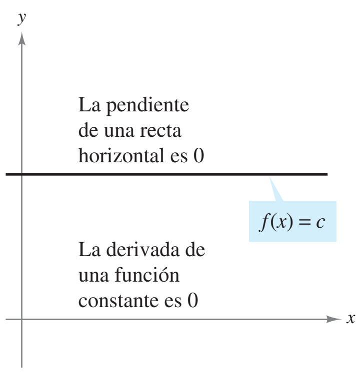
105. Sean $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Demostrar que f es continua, pero no derivable, en $x = 0$. Demostrar que g es derivable en 0 y calcular $g'(0)$.

106. ***Redacción*** Utilizar una herramienta de graficación para representar las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = |x| + 1$ en la misma ventana. Utilizar las funciones *zoom* y *trace* para analizarlas cerca del punto $(0, 1)$. ¿Qué se observa? ¿Cuál función es derivable en ese punto? Escribir un pequeño párrafo describiendo el significado geométrico de la derivabilidad en un punto.

2.2 Reglas básicas de derivación y razón de cambio

- **Encontrar la derivada de una función por la regla de la constante.**
- **Encontrar la derivada de una función por la regla de la potencia.**
- **Encontrar la derivada de una función por la regla del múltiplo constante.**
- **Encontrar la derivada de una función por las reglas de suma y diferencia.**
- **Encontrar la derivada de las funciones seno y coseno.**
- **Usar derivadas para calcular razón de cambio.**



Se observa que la regla de la constante equivale a decir que la pendiente de una recta horizontal es 0. Esto demuestra la relación que existe entre derivada y pendiente
Figura 2.14

La regla de la constante

En la sección 2.1 se usó la definición por medio de límites para calcular las derivadas. Ésta y las dos próximas secciones presentan varias "reglas de derivación" que permiten calcular las derivadas sin el uso *directo* de la definición por límites.

TEOREMA 2.2 LA REGLA DE LA CONSTANTE

La derivada de una función constante es 0. Es decir, si c es un número real, entonces

$$\frac{d}{dx}[c] = 0.$$

(Ver la figura 2.14)

DEMOSTRACIÓN Sea $f(x) = c$. Entonces, por la definición de derivada mediante el proceso de límite, se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[c] &= f'(x)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{c-c}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla de la constante

	Función	*Derivada*
a)	$y = 7$	$\frac{dy}{dx} = 0$
b)	$f(x) = 0$	$f'(x) = 0$
c)	$s(t) = -3$	$s'(t) = 0$
d)	$y = k\pi^2$, k es constante	$y' = 0$

EXPLORACIÓN

Conjetura Utilizar la definición de derivada de la sección 2.1 para encontrar la derivada de las siguientes funciones. ¿Qué patrones se observan? Utilizar los resultados para elaborar una conjetura acerca de la derivada de $f(x) = x^n$.

a) $f(x) = x^1$ ***b)*** $f(x) = x^2$ ***c)*** $f(x) = x^3$
d) $f(x) = x^4$ ***e)*** $f(x) = x^{1/2}$ ***f)*** $f(x) = x^{-1}$

La regla de la potencia

Antes de demostrar la próxima regla, revisar el proceso de desarrollo de un binomio.

$$(x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

El desarrollo general del binomio para un entero positivo n cualquiera es

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \underbrace{\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdot \cdot \cdot + (\Delta x)^n}_{(\Delta x)^2 \text{ es un factor común en estos términos.}}.$$

Este desarrollo del binomio se va a utilizar para demostrar un caso especial de la regla de la potencia.

NOTA Del ejemplo 7 de la sección 2.1, se encontró que la función $f(x) = x^{1/3}$ está definida en $x = 0$ pero no es derivable en $x = 0$. Esto se debe a que $x^{-2/3}$ no está definida sobre un intervalo que contiene al cero.

TEOREMA 2.3 LA REGLA DE LA POTENCIA

Si n es un número racional, entonces la función $f(x) = x^n$ es derivable y

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Para que f sea derivable en $x = 0$, n debe ser un número tal que x^{n-1} se encuentre definido en un intervalo que contenga al 0.

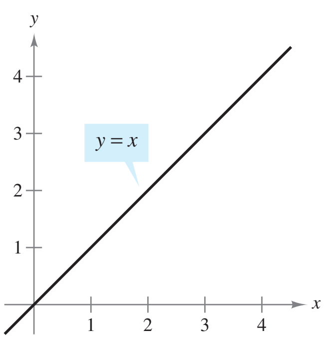
DEMOSTRACIÓN Si n es un entero positivo mayor que 1, entonces del desarrollo del binomio resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^n] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdot \cdot \cdot + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x) + \cdot \cdot \cdot + (\Delta x)^{n-1} \right] \\
&= nx^{n-1} + 0 + \cdot \cdot \cdot + 0 \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Esto demuestra el caso en que n es un entero positivo mayor que 1. Se deja al lector la demostración del caso $n = 1$. En el ejemplo 7 de la sección 2.3 se demuestra el caso para el que n es un entero negativo. En el ejercicio 76 de la sección 2.5 se demuestra el caso en el cual n es racional (en la sección 5.5 la regla de la potencia se extenderá hasta abarcar los valores irracionales de n).

Al utilizar la regla de la potencia, resulta conveniente separar el caso para el que $n = 1$ como otra regla distinta de derivación, a saber

$$\frac{d}{dx}[x] = 1. \qquad \text{Regla de las potencias para } n = 1.$$



La pendiente de la recta $y = x$ es 1
Figura 2.15

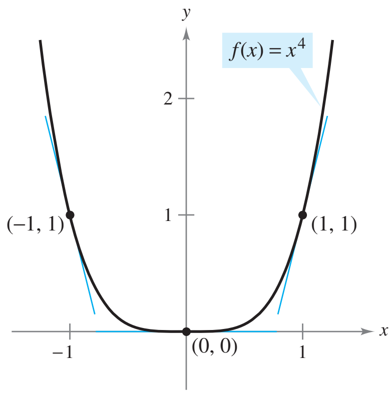
Esta regla es congruente con el hecho de que la pendiente de la recta $y = x$ es 1, como se muestra en la figura 2.15.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de la potencia

	Función	*Derivada*
a)	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
b)	$g(x) = \sqrt[3]{x}$	$g'(x) = \dfrac{d}{dx}[x^{1/3}] = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$
c)	$y = \dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[x^{-2}] = (-2)x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

Observar que en el ejemplo 2*c*, *antes* de derivar se ha reescrito $1/x^2$ como x^{-2}. En muchos problemas de derivación, el primer paso consiste en reescribir la función.

Dada: $y = \dfrac{1}{x^2}$ ⇒ Reescribir: $y = x^{-2}$ ⇒ Derivar: $\dfrac{dy}{dx} = (-2)x^{-3}$ ⇒ Simplificar $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{x^3}$



Observar que la pendiente es negativa en el punto $(-1, 1)$, cero en el $(0, 0)$ y positiva en el $(1, 1)$
Figura 2.16

EJEMPLO 3 Pendiente de una gráfica

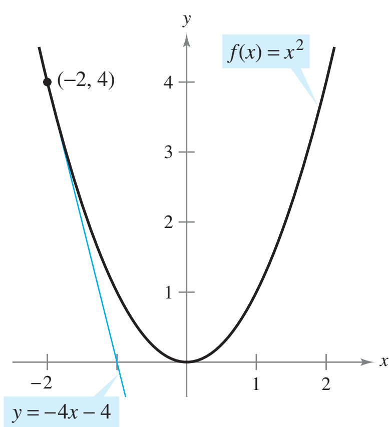
Calcular la pendiente de la gráfica de $f(x) = x^4$ cuando

a) $x = -1$ ***b)*** $x = 0$ ***c)*** $x = 1$.

Solución La pendiente de una gráfica en un punto es igual a la derivada en dicho punto. La derivada de f es $f'(x) = 4x^3$.

a) Para $x = -1$, la pendiente es $f'(-1) = 4(-1)^3 = -4$. La pendiente es negativa.
b) Para $x = 0$, la pendiente es $f'(0) = 4(0)^3 = 0$. La pendiente es 0.
c) Para $x = 1$, la pendiente es $f'(1) = 4(1)^3 = 4$. La pendiente es positiva.

Ver la figura 2.16.



La recta tangente $y = -4x - 4$ es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto $(-2, 4)$
Figura 2.17

EJEMPLO 4 Ecuación de una recta tangente

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ cuando $x = -2$.

Solución Para encontrar el *punto* sobre la gráfica de f, evaluar la función en $x = -2$.

$(-2, f(-2)) = (-2, -4)$ Punto de la gráfica.

Para calcular la *pendiente* de la gráfica en $x = -2$, evaluar la derivada, $f'(x) = 2x$, en $x = -2$.

$m = f'(-2) = -4$ Pendiente de la gráfica en $(-2, 4)$.

Ahora, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, escribir

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{Forma punto-pendiente.}$$
$$y - 4 = -4[x - (-2)] \quad \text{Sustituir } y_1, m \text{ y } x_1.$$
$$y = -4x - 4. \quad \text{Simplificar.}$$

Ver la figura 2.17.

La regla del múltiplo constante

TEOREMA 2.4 LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE

Si f es una función derivable y c un número real, entonces cf también es derivable y $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$.

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[cf(x)] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} c\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]\\
&= c\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] && \text{Aplicar teorema 1.2.}\\
&= cf'(x)
\end{aligned}$$

De manera informal, esta regla establece que las constantes se pueden extraer de la derivada, incluso cuando aparecen en un denominador.

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[\;f(x)] = cf'(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{c}\right] &= \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{c}\right)f(x)\right]\\
&= \left(\frac{1}{c}\right)\frac{d}{dx}[\;f(x)] = \left(\frac{1}{c}\right)f'(x)
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Aplicación de la regla del múltiplo constante

	Función	*Derivada*
a)	$y = \dfrac{2}{x}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[2x^{-1}] = 2\dfrac{d}{dx}[x^{-1}] = 2(-1)x^{-2} = -\dfrac{2}{x^2}$
b)	$f(t) = \dfrac{4t^2}{5}$	$f'(t) = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{4}{5}t^2\right] = \dfrac{4}{5}\dfrac{d}{dt}[t^2] = \dfrac{4}{5}(2t) = \dfrac{8}{5}t$
c)	$y = 2\sqrt{x}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[2x^{1/2}] = 2\left(\dfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) = x^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
d)	$y = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{2}x^{-2/3}\right] = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{2}{3}\right)x^{-5/3} = -\dfrac{1}{3x^{5/3}}$
e)	$y = -\dfrac{3x}{2}$	$y' = \dfrac{d}{dx}\left[-\dfrac{3}{2}x\right] = -\dfrac{3}{2}(1) = -\dfrac{3}{2}$

La regla del múltiplo constante y la de la potencia se pueden combinar en una sola. La regla resultante es

$$\frac{d}{dx}[cx^n] = cnx^{n-1}.$$

EJEMPLO 6 Uso de paréntesis al derivar

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
a)	$y = \dfrac{5}{2x^3}$	$y = \dfrac{5}{2}(x^{-3})$	$y' = \dfrac{5}{2}(-3x^{-4})$	$y' = -\dfrac{15}{2x^4}$
b)	$y = \dfrac{5}{(2x)^3}$	$y = \dfrac{5}{8}(x^{-3})$	$y' = \dfrac{5}{8}(-3x^{-4})$	$y' = -\dfrac{15}{8x^4}$
c)	$y = \dfrac{7}{3x^{-2}}$	$y = \dfrac{7}{3}(x^2)$	$y' = \dfrac{7}{3}(2x)$	$y' = \dfrac{14x}{3}$
d)	$y = \dfrac{7}{(3x)^{-2}}$	$y = 63(x^2)$	$y' = 63(2x)$	$y' = 126x$

Las reglas de suma y diferencia

TEOREMA 2.5 LAS REGLAS DE SUMA Y DIFERENCIA

La derivada de la suma (o de la diferencia) de dos funciones derivables f y g es derivable en sí. Además, la derivada de $f + g$ (o $f - g$) es igual a la suma (o diferencia) de las derivadas de f y g.

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x) \qquad \text{Regla de la suma.}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x) \qquad \text{Regla de la diferencia.}$$

DEMOSTRACIÓN Una demostración de la regla de la suma se sigue del teorema 1.2 (la de la diferencia se demuestra de manera análoga).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

Las reglas de suma y diferencia pueden ampliarse en cualquier número finito de funciones. Por ejemplo, si $F(x) = f(x) + g(x) - h(x)$, entonces $F'(x) = f'(x) + g'(x) - h'(x)$.

EJEMPLO 7 Aplicación de las reglas de suma y diferencia

	Función	*Derivada*
a)	$f(x) = x^3 - 4x + 5$	$f'(x) = 3x^2 - 4$
b)	$g(x) = -\dfrac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x$	$g'(x) = -2x^3 + 9x^2 - 2$

PARA MAYOR INFORMACIÓN El esbozo de una demostración geométrica de las derivadas de las funciones seno y coseno puede consultarse en el artículo "The Spider's Spacewalk Derivation of sin′ and cos′" de Tim Hesterberg en *The College Mathematics Journal*.

Derivadas de las funciones seno y coseno

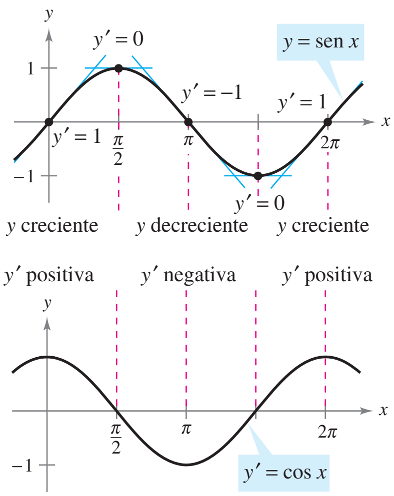
En la sección 1.3 se vieron los límites siguientes:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = 0$$

Estos dos límites pueden utilizarse para demostrar las reglas de derivación de las funciones seno y coseno (las derivadas de las demás funciones trigonométricas se analizan en la sección 2.3).

TEOREMA 2.6 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x \qquad \frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$$



La derivada de la función seno es la función coseno
Figura 2.18

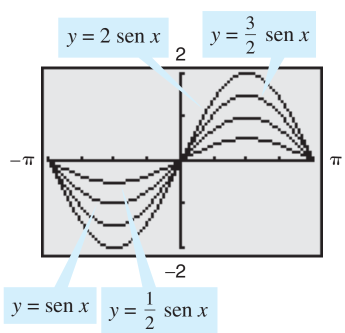
DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos \Delta x + \cos x \operatorname{sen} \Delta x - \operatorname{sen} x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} \Delta x - (\operatorname{sen} x)(1 - \cos \Delta x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(\cos x)\left(\frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}\right) - (\operatorname{sen} x)\left(\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}\right)\right]\\
&= \cos x\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}\right) - \operatorname{sen} x\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}\right)\\
&= (\cos x)(1) - (\operatorname{sen} x)(0)\\
&= \cos x
\end{aligned}$$

Esta regla de derivación se ilustra en la figura 2.18. Observar que para cada x, la *pendiente* de la curva seno es igual al valor del coseno. La demostración de la segunda regla se deja como ejercicio (ver el ejercicio 120).

EJEMPLO 8 Derivadas que contienen senos y cosenos

Función	*Derivada*
a) $y = 2 \operatorname{sen} x$	$y' = 2 \cos x$
b) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2} = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x$	$y' = \dfrac{1}{2} \cos x = \dfrac{\cos x}{2}$
c) $y = x + \cos x$	$y' = 1 - \operatorname{sen} x$



$\dfrac{d}{dx}[a \operatorname{sen} x] = a \cos x$

Figura 2.19

TECNOLOGÍA Una herramienta de graficación permite visualizar la interpretación de una derivada. Por ejemplo, en la figura 2.19 se muestran las gráficas de

$$y = a \operatorname{sen} x$$

para $a = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ y 2. Estimar la pendiente de cada gráfica en el punto (0, 0). Después verificar los cálculos de manera analítica mediante el cálculo de la derivada de cada función cuando $x = 0$.

Razón de cambio

Ya se ha visto que la derivada se utiliza para calcular pendientes. Pero también sirve para determinar la razón de cambio de una variable respecto a otra, lo que le confiere utilidad en una amplia variedad de situaciones. Algunos ejemplos son las tasas de crecimiento de poblaciones, las tasas de producción, las tasas de flujo de un líquido, la velocidad y la aceleración.

Un uso frecuente de la razón de cambio consiste en describir el movimiento de un objeto que va en línea recta. En tales problemas, la recta del movimiento se suele representar en posición horizontal o vertical, con un origen marcado en ella. Sobre tales rectas, el movimiento hacia la derecha (o hacia arriba) se considera de dirección positiva y el movimiento hacia la izquierda (o hacia abajo) de dirección negativa.

La función s que representa la posición (respecto al origen) de un objeto como función del tiempo t se denomina **función de posición**. Si durante cierto lapso de tiempo Δt el objeto cambia su posición en una cantidad $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, entonces, empleando la consabida fórmula:

$$\text{Razón} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

la **velocidad media** es

$$\frac{\text{Cambio en distancia}}{\text{Cambio en tiempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$ Velocidad media.

EJEMPLO 9 Velocidad media de un objeto en su caída

Si se deja caer una bola de billar desde una altura de 100 pies, su altura s en el instante t se representa mediante la función posición

$$s = -16t^2 + 100$$ Función posición.

donde s se mide en pies y t en segundos. Encontrar su velocidad media para cada uno de estos intervalos.

a) [1, 2] ***b***) [1, 1.5] ***c***) [1, 1.1]

Solución

a) En el intervalo [1, 2], el objeto cae desde una altura de $s(1) = -16(1)^2 + 100 = 84$ pies hasta una altura de $s(2) = -16(2)^2 + 100 = 36$ pies. La velocidad media es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{36 - 84}{2 - 1} = \frac{-48}{1} = -48 \text{ pies por segundo.}$$

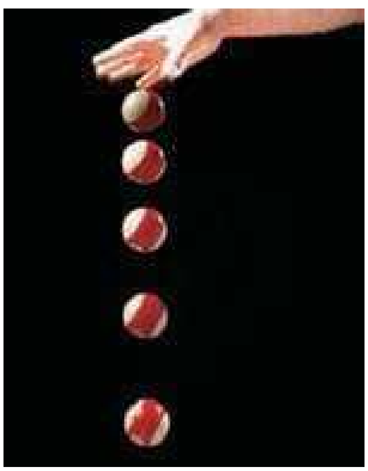
b) En el intervalo [1, 1.5] el objeto cae desde una altura de 84 pies hasta una altura de 64 pies. La velocidad media es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{64 - 84}{1.5 - 1} = \frac{-20}{0.5} = -40 \text{ pies por segundo.}$$

c) En el intervalo [1, 1.1] el objeto cae desde una altura de 84 pies hasta una altura de 80.64 pies. La velocidad media es

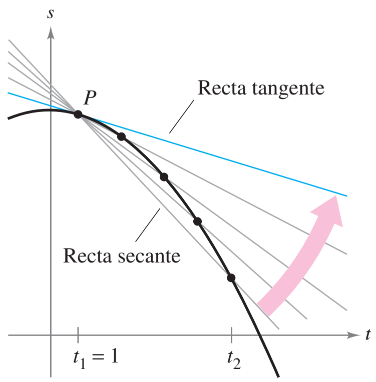
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80.64 - 84}{1.1 - 1} = \frac{-3.36}{0.1} = -33.6 \text{ pies por segundo.}$$

Observar que las velocidades medias son *negativas*, lo que refleja el hecho de que el objeto se mueve hacia abajo.



Richard Megna/Fundamental Photographs

Exposición fotográfica de larga duración de una bola de billar en caída libre.



La velocidad media entre t_1 y t_2 es igual a la pendiente de la recta secante. La velocidad instantánea en t_1 es igual a la pendiente de la recta tangente
Figura 2.20

Supongamos que en el ejemplo anterior se quisiera encontrar la velocidad *instantánea* (o simplemente de la velocidad) del objeto cuando $t = 1$. Al igual que la pendiente de la recta tangente puede aproximarse utilizando las pendientes de rectas secantes, se puede aproximar la velocidad en $t = 1$ por medio de las velocidades medias durante un pequeño intervalo $[1, 1 + \Delta t]$ (ver la figura 2.20). Se obtiene dicha velocidad calculando el límite cuando Δt tiende a cero. Al intentar hacerlo se puede comprobar que la velocidad cuando $t = 1$ es de -32 pies por segundo.

En general, si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, su **velocidad** en el instante t es

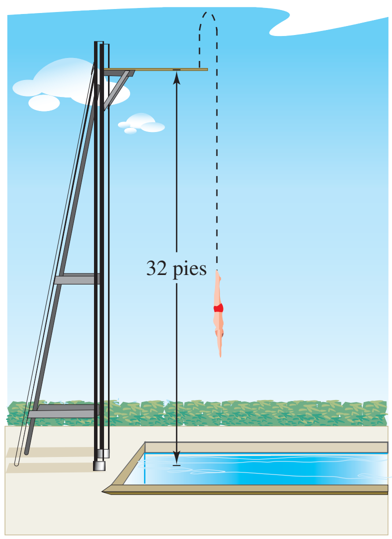
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$ Función velocidad.

En otras palabras, la función velocidad es la derivada de la función posición. La velocidad puede ser positiva, cero o negativa. La **rapidez** de un objeto se define como el valor absoluto de su velocidad, y nunca es negativa.

La posición de un objeto en caída libre (despreciando la resistencia del aire) bajo la influencia de la gravedad se obtiene mediante la ecuación

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$ Función posición.

donde s_0 es la altura inicial del objeto, v_0 la velocidad inicial y g la aceleración de la gravedad. En la Tierra, el valor de g es de aproximadamente -32 pies.



La velocidad es positiva cuando un objeto se eleva, y negativa cuando desciende. Se observa que el clavadista se mueve hacia arriba durante la primera mitad de segundo, porque la velocidad es positiva para $0 < t < \frac{1}{2}$. Cuando la velocidad es de 0, el clavadista ha alcanzado la altura máxima del salto
Figura 2.21

EJEMPLO 10 Aplicación de la derivada para calcular la velocidad

En el instante $t = 0$, un clavadista se lanza desde un trampolín que está a 32 pies sobre el nivel del agua de la piscina (ver la figura 2.21). La posición del clavadista está dada por

$$s(t) = -16t^2 + 16t + 32$$ Función posición.

donde s se mide en pies y t en segundos.

a) ¿Cuánto tarda el clavadista en llegar al agua?

b) ¿Cuál es su velocidad al momento del impacto?

Solución

a) Para determinar el momento en que toca el agua hacemos $s = 0$ y despejamos t.

$$-16t^2 + 16t + 32 = 0$$ Igualar a cero la función posición.

$$-16(t + 1)(t - 2) = 0$$ Factorizar.

$$t = -1 \text{ o } 2$$ Despejar t.

Como $t \geq 0$, hemos de seleccionar el valor positivo, así que el clavadista llega al agua en $t = 2$ segundos.

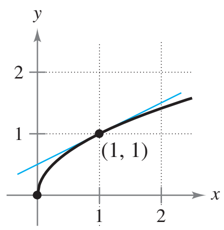
b) Su velocidad en el instante t está dada por la derivada $s'(t) = -32t + 16$. En consecuencia, su velocidad en $t = 2$ es

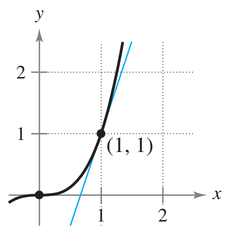
$$s'(2) = -32(2) + 16 = -48 \text{ pies por segundo.}$$

2.2 Ejercicios

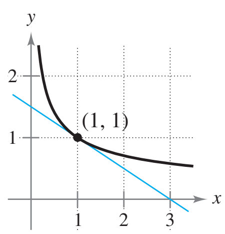
En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica para estimar la pendiente de la recta tangente a $y = x^n$ en el punto (1, 1). Verificar la respuesta de manera analítica.

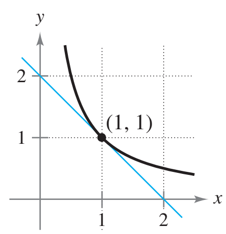
1. *a)* $y = x^{1/2}$ *b)* $y = x^3$





2. *a)* $y = x^{-1/2}$ *b)* $y = x^{-1}$





En los ejercicios 3 a 24, usar las reglas de derivabilidad para calcular la derivada de la función.

3. $y = 12$
4. $f(x) = -9$
5. $y = x^7$
6. $y = x^{16}$
7. $y = \dfrac{1}{x^5}$
8. $y = \dfrac{1}{x^8}$
9. $f(x) = \sqrt[5]{x}$
10. $g(x) = \sqrt[4]{x}$
11. $f(x) = x + 11$
12. $g(x) = 3x - 1$
13. $f(t) = -2t^2 + 3t - 6$
14. $y = t^2 + 2t - 3$
15. $g(x) = x^2 + 4x^3$
16. $y = 8 - x^3$
17. $s(t) = t^3 + 5t^2 - 3t + 8$
18. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$
19. $y = \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sen} \theta - \cos \theta$
20. $g(t) = \pi \cos t$
21. $y = x^2 - \frac{1}{2} \cos x$
22. $y = 7 + \operatorname{sen} x$
23. $y = \dfrac{1}{x} - 3 \operatorname{sen} x$
24. $y = \dfrac{5}{(2x)^3} + 2 \cos x$

En los ejercicios 25 a 30, completar la tabla.

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
25.	$y = \dfrac{5}{2x^2}$			
26.	$y = \dfrac{2}{3x^2}$			
27.	$y = \dfrac{6}{(5x)^3}$			
28.	$y = \dfrac{\pi}{(3x)^2}$			
29.	$y = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$			
30.	$y = \dfrac{4}{x^{-3}}$			

En los ejercicios 31 a 38, encontrar la pendiente de la gráfica de la función en el punto indicado. Utilizar la función *derivative* de una herramienta de graficación para verificar los resultados.

	Función	*Punto*
31.	$f(x) = \dfrac{8}{x^2}$	$(2, 2)$
32.	$f(t) = 3 - \dfrac{3}{5t}$	$\left(\frac{3}{5}, 2\right)$
33.	$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{5}x^3$	$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
34.	$y = 3x^3 - 10$	$(2, 14)$
35.	$y = (4x + 1)^2$	$(0, 1)$
36.	$f(x) = 3(5 - x)^2$	$(5, 0)$
37.	$f(\theta) = 4 \operatorname{sen} \theta - \theta$	$(0, 0)$
38.	$g(t) = -2 \cos t + 5$	$(\pi, 7)$

En los ejercicios 39 a 54, encontrar la derivada de cada función.

39. $f(x) = x^2 + 5 - 3x^{-2}$
40. $f(x) = x^2 - 3x - 3x^{-2}$
41. $g(t) = t^2 - \dfrac{4}{t^3}$
42. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$
43. $f(x) = \dfrac{4x^3 + 3x^2}{x}$
44. $f(x) = \dfrac{x^3 - 6}{x^2}$
45. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$
46. $h(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$
47. $y = x(x^2 + 1)$
48. $y = 3x(6x - 5x^2)$
49. $f(x) = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$
50. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$
51. $h(s) = s^{4/5} - s^{2/3}$
52. $f(t) = t^{2/3} - t^{1/3} + 4$
53. $f(x) = 6\sqrt{x} + 5 \cos x$
54. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3 \cos x$

En los ejercicios 55 a 58, *a)* encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado, *b)* utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su recta tangente en el punto, y *c)* verificar los resultados empleando la función *derivative* de su herramienta de graficación.

	Función	*Punto*
55.	$y = x^4 - 3x^2 + 2$	$(1, 0)$
56.	$y = x^3 + x$	$(-1, -2)$
57.	$f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$	$(1, 2)$
58.	$y = (x^2 + 2x)(x + 1)$	$(1, 6)$

En los ejercicios 59 a 64, determinar los puntos (si los hay) donde la gráfica de la función tiene una recta tangente horizontal.

59. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

60. $y = x^3 + x$

61. $y = \dfrac{1}{x^2}$

62. $y = x^2 + 9$

63. $y = x + \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x < 2\pi$

64. $y = \sqrt{3}x + 2\cos x, \quad 0 \le x < 2\pi$

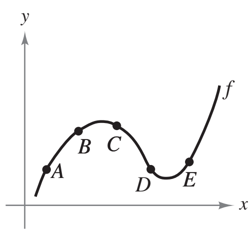
En los ejercicios 65 a 70, encontrar una k tal que la recta sea tangente a la gráfica de la función.

	Función	*Recta*
65.	$f(x) = x^2 - kx$	$y = 5x - 4$
66.	$f(x) = k - x^2$	$y = -6x + 1$
67.	$f(x) = \dfrac{k}{x}$	$y = -\dfrac{3}{4}x + 3$
68.	$f(x) = k\sqrt{x}$	$y = x + 4$
69.	$f(x) = kx^3$	$y = x + 1$
70.	$f(x) = kx^4$	$y = 4x - 1$

71. Bosquejar la gráfica de una función f tal que $f' > 0$ para todas las x y cuya razón de cambio de la función sea decreciente.

Para discusión

72. Utilizar la gráfica para responder a las siguientes preguntas.



a) ¿Entre qué par de puntos consecutivos es mayor la razón de cambio promedio de la función?

b) ¿La razón de cambio promedio de f entre A y B es mayor o menor que la razón de cambio instantáneo en B?

c) Trazar una recta tangente a la gráfica entre los puntos C y D cuya pendiente sea igual a la razón de cambio promedio de la función entre C y D.

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 73 y 74 se muestra la relación que existe entre f y g. Explicar la relación entre f' y g'.

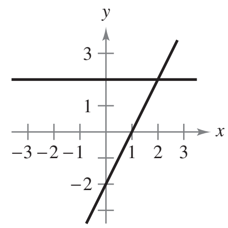
73. $g(x) = f(x) + 6$

74. $g(x) = -5\,f(x)$

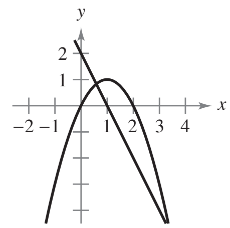
Desarrollo de conceptos (*continuación*)

En los ejercicios 75 y 76, se muestran las gráficas de la función f y de su derivada f' en el mismo plano cartesiano. Clasificar las gráficas como f o f' y explicar en un breve párrafo los criterios empleados para hacer tal selección.

75.



76.



77. Construir las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ y $y = -x^2 + 6x - 5$, así como las dos rectas que son tangentes a ambas gráficas. Encontrar las ecuaciones de dichas rectas.

78. Demostrar que las gráficas de $y = x$ y $y = 1/x$ tienen rectas tangentes perpendiculares entre sí en su punto de intersección.

79. Demostrar que la gráfica de la función

$$f(x) = 3x + \operatorname{sen} x + 2$$

no tiene ninguna recta tangente horizontal.

80. Demostrar que la gráfica de la función

$$f(x) = x^5 + 3x^3 + 5x$$

no tiene una recta tangente con pendiente de 3.

En los ejercicios 81 y 82, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f que pasa por el punto (x_0, y_0), no perteneciente a la gráfica. Para determinar el punto de tangencia (x, y) en la gráfica de f, resolver la ecuación

$$f'(x) = \frac{y_0 - y}{x_0 - x}.$$

81. $f(x) = \sqrt{x}$

$(x_0, y_0) = (-4, 0)$

82. $f(x) = \dfrac{2}{x}$

$(x_0, y_0) = (5, 0)$

83. ***Aproximación lineal*** En una ventana cuadrada de la herramienta de graficación, aplicar el *zoom* para aproximar la gráfica de

$$f(x) = 4 - \tfrac{1}{2}x^2$$

a fin de estimar $f'(1)$. Calcular $f'(1)$ por derivación.

84. ***Aproximación lineal*** En una ventana cuadrada de la herramienta de graficación, aplicar el *zoom* para aproximar la gráfica de

$$f(x) = 4\sqrt{x} + 1$$

a fin de estimar $f'(4)$. Calcular $f'(4)$ por derivación.

85. ***Aproximación lineal*** Tomando en cuenta la función $f(x) = x^{3/2}$ con el punto de solución (4, 8):

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar f. Usar el *zoom* para ampliar el entorno del punto (4, 8). Tras varias ampliaciones, la gráfica aparecerá casi lineal. Utilizar la función *trace* para determinar las coordenadas de un punto de la gráfica próximo al (4, 8). Encontrar la ecuación de la secante $S(x)$ que une esos dos puntos.

b) Encontrar la ecuación de la recta

$$T(x) = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

tangente a la gráfica de f que pasa por el punto dado. ¿Por qué las funciones lineales S y T son casi iguales?

c) Representar f y T en la misma ventana de la herramienta de graficación. Observar que T es una buena aproximación de f cuando x es cercano a 4. ¿Qué ocurre con la precisión de esta aproximación a medida que el punto de tangencia se aleja?

d) Demostrar la conclusión obtenida en el apartado *c*) completando la tabla.

Δx	-3	-2	-1	-0.5	-0.1	0
$f(4 + \Delta x)$						
$T(4 + \Delta x)$						

Δx	0.1	0.5	1	2	3
$f(4 + \Delta x)$					
$T(4 + \Delta x)$					

86. ***Aproximación lineal*** Repetir el ejercicio 85 empleando ahora la función $f(x) = x^3$, donde $T(x)$ es la recta tangente en el punto (1, 1). Explicar por qué la precisión de la aproximación lineal disminuye más rápido que en el ejercicio anterior.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 87 a 92, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que lo es.**

87. Si $f'(x) = g'(x)$, entonces $f(x) = g(x)$.

88. Si $f(x) = g(x) + c$, entonces $f'(x) = g'(x)$.

89. Si $y = \pi^2$, entonces $dy/dx = 2\pi$.

90. Si $y = x/\pi$, entonces $dy/dx = 1/\pi$.

91. Si $g(x) = 3f(x)$, entonces $g'(x) = 3f'(x)$.

92. Si $f(x) = 1/x^n$, entonces $f'(x) = 1/(nx^{n-1})$.

En los ejercicios 93 a 96, calcular la razón de cambio promedio de la función en el intervalo dado. Compararlo con las razones de cambio instantáneas en los extremos del intervalo.

93. $f(t) = 4t + 5, \quad [1, 2]$

94. $f(t) = t^2 - 7, \quad [3, 3.1]$

95. $f(x) = \dfrac{-1}{x}, \quad [1, 2]$

96. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$

Movimiento vertical **En los ejercicios 97 y 98, utilizar la función de posición $s(t) = -16t^2 + v_0 t + s_0$ para objetos en caída libre.**

97. Se deja caer una moneda desde lo alto de un edificio que tiene una altura de 1 362 pies.

a) Determinar las funciones que describen la posición y la velocidad de la moneda.

b) Calcular su velocidad promedio en el intervalo [1, 2].

c) Encontrar las velocidades instantáneas cuando $t = 1$ y $t = 2$.

d) Calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo.

e) Determinar su velocidad al caer en el suelo.

98. Desde una altura de 220 pies, se lanza hacia abajo una bola con una velocidad inicial de -22 pies/s. ¿Cuál es su velocidad tras 3 segundos? ¿Y luego de descender 108 pies?

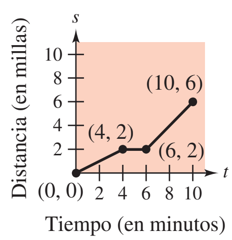
Movimiento vertical **En los ejercicios 99 y 100, utilizar la función posición $s(t) = -4.9t^2 + v_0 t + s_0$ para objetos en caída libre.**

99. Se lanza un proyectil hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad inicial de 120 m/s. ¿Cuál es su velocidad a los 5 segundos? ¿Y a los 10?

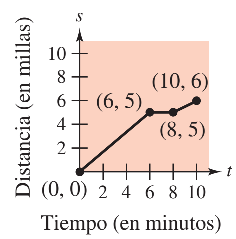
100. Con el fin de estimar la altura de un edificio, se deja caer una piedra desde su parte más alta en el agua de una piscina que se encuentra al nivel del suelo. ¿Cuál es la altura del edificio, si el chapoteo se observa 5.6 segundos después de soltar la piedra?

Para pensar **En los ejercicios 101 y 102 se muestra la gráfica de una función posición, que representa la distancia recorrida en millas por una persona que conduce durante 10 minutos para llegar a su trabajo. Elaborar un boceto de la función velocidad correspondiente.**

101.

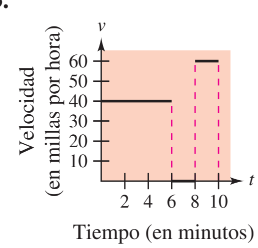


102.

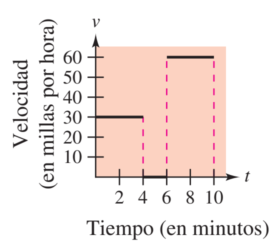


Para pensar **En los ejercicios 103 y 104 se muestra la gráfica de una función velocidad, que representa la velocidad, en millas por hora, de una persona que conduce durante 10 minutos para llegar a su trabajo. Elaborar un boceto de la función posición correspondiente.**

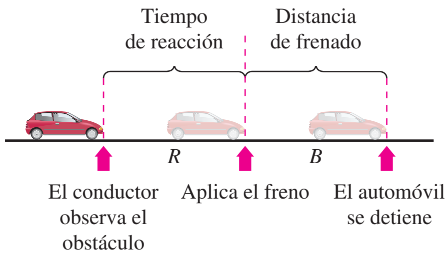
103.



104.



105. ***Modelado matemático*** La distancia de frenado de un automóvil que viaja a una velocidad v (kilómetros por hora), es la distancia R (metros) que recorre durante el tiempo de reacción del conductor más la distancia B (metros) que recorre una vez aplicados los frenos (ver la figura). La tabla muestra los resultados de un experimento al respecto.



Velocidad, v	20	40	60	80	100
Distancia durante el tiempo de reacción, R	8.3	16.7	25.0	33.3	41.7
Distancia durante el tiempo de frenado, B	2.3	9.0	20.2	35.8	55.9

a) Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para obtener un modelo lineal para el tiempo de reacción.
b) Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para obtener un modelo cuadrático para la distancia aplicando los frenos.
c) Encontrar el polinomio que expresa la distancia total T recorrida hasta que el vehículo se detiene por completo.
d) Utilizar una herramienta de graficación para representar las funciones R, B y T en una misma ventana.
e) Calcular la derivada de T y el ritmo de cambio de la distancia total de frenado para $v = 40$, $v = 80$ y $v = 100$.
f) A partir de los resultados de este ejercicio, elaborar conclusiones acerca del comportamiento de la distancia total de frenado a medida que se aumenta la velocidad.

106. ***Costo del combustible*** Un automóvil viaja 15 000 millas al año y recorre x millas por galón. Suponiendo que el costo promedio del combustible es \$2.76 por galón, calcular el costo anual C del combustible consumido como función de x y utilizar esta función para completar la tabla.

x	10	15	20	25	30	35	40
C							
dC/dx							

¿Quién se beneficiaría más con el aumento en 1 milla por galón en la eficiencia del vehículo: un conductor que obtiene 15 millas por galón o uno que obtiene 35 millas por galón? Explicar la respuesta.

107. ***Volumen*** El volumen de un cubo con lado s es $V = s^3$. Calcular el ritmo de cambio del volumen respecto a s cuando $s = 6$ centímetros.

108. ***Área*** El área de un cuadrado con lados s es $A = s^2$. Encontrar la razón de cambio del área respecto a s cuando $s = 6$ metros.

109. ***Velocidad*** Verificar que la velocidad media en el intervalo $[t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]$ es la misma que la velocidad instantánea en $t = t_0$ para la función posición

$$s(t) = -\tfrac{1}{2}at^2 + c.$$

110. ***Gestión de inventario*** El costo anual de inventario C de un fabricante es

$$C = \frac{1\,008\,000}{Q} + 6.3Q$$

donde Q es el tamaño del pedido cuando se reponen existencias. Calcular el cambio del costo anual cuando Q crece de 350 a 351 y compararlo con la razón de cambio instantáneo para $Q = 350$.

111. ***Redacción*** La ecuación $N = f(p)$ representa el número de galones N de gasolina normal sin plomo que vende una gasolinería a un precio de p dólares por galón.

a) Describir el significado de $f'(2.979)$.
b) ¿$f'(2.979)$ suele resultar positiva o negativa? Explicar la respuesta.

112. ***Ley del enfriamiento de Newton*** Esta ley establece que la razón de cambio o velocidad de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura T y la temperatura ambiente T_a. Elaborar una ecuación para esta ley.

113. Encontrar la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por el punto (0, 1) y es tangente a la recta $y = x - 1$ en el punto (1, 0).

114. Sea (a, b) un punto cualquiera de la gráfica de $y = 1/x$, $x > 0$. Demostrar que el área del triángulo formado por la recta tangente que pasa por (a, b) y los ejes coordenados es 2.

115. Encontrar la recta o rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 9x$ en el punto $(1, -9)$.

116. Encontrar la ecuación de la recta o rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ en el punto dado.

a) $(0, a)$ *b*) $(a, 0)$

¿Existe alguna restricción para la constante a?

En los ejercicios 117 y 118, encontrar a y b tales que f sea derivable en todos los puntos.

117. $f(x) = \begin{cases} ax^3, & x \leq 2 \\ x^2 + b, & x > 2 \end{cases}$

118. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$

119. ¿Dónde son derivables las funciones $f_1(x) = |\operatorname{sen} x|$ y $f_2(x) = \operatorname{sen} |x|$?

120. Demostrar que $\dfrac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$.

PARA MAYOR INFORMACIÓN En el artículo “Sines and Cosines of the Times”, de Victor J. Katz, publicado en *Math Horizons*, encontrará una interpretación geométrica de las derivadas de las funciones trigonométricas.

2.3 Reglas del producto, del cociente y derivadas de orden superior

- Encontrar la derivada de una función por la regla del producto.
- Encontrar la derivada de una función por la regla del cociente.
- Encontrar las derivadas de las funciones trigonométricas.
- Encontrar las derivadas de orden superior de una función.

La regla del producto

En la sección 2.2 se vio que la derivada de una suma de dos funciones es simplemente la suma de sus derivadas. La regla para derivar el producto de dos funciones no es tan simple.

TEOREMA 2.7 LA REGLA DEL PRODUCTO

El producto de dos funciones derivables f y g también es derivable. Además, su derivada es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la derivada de la primera por la segunda.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

NOTA Algunas personas prefieren la siguiente versión de la regla del producto

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

La ventaja de esta forma radica en que se puede generalizar con facilidad a multiplicaciones con tres o más factores.

DEMOSTRACIÓN Algunas demostraciones matemáticas, como en el caso de la regla de la suma, son directas. Otras requieren pasos inteligentes cuyo motivo puede resultar imperceptible para el lector. Esta demostración presenta uno de esos pasos, sumar y restar una misma cantidad, la cual se muestra en distinto color.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} g(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

Observar que $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$ porque se considera que f es derivable y, por tanto, continua.

La regla del producto es extensiva a multiplicaciones con más de dos factores. Por ejemplo, si f, g y h son funciones derivables de x, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

Por ejemplo, la derivada de $y = x^2$ sen x cos x es

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2x \operatorname{sen} x \cos x + x^2 \cos x \cos x + x^2 \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)\\
&= 2x \operatorname{sen} x \cos x + x^2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x).
\end{aligned}$$

NOTA La prueba de la regla del producto para productos de más de dos factores se deja al lector como ejercicio (ver el ejercicio 141).

LA REGLA DEL PRODUCTO

Cuando Leibniz elaboró originalmente una fórmula para la regla del producto, lo hizo motivado por la expresión

$$(x + dx)(y + dy) - xy$$

de la cual restó $dx\,dy$ (considerándolos despreciables) y calculando la forma diferencial $x\,dy + y\,dx$. Esta derivación tuvo como resultado la forma tradicional de la regla del producto.
(*Fuente*: *The History of Mathematics* de David M. Burton)

En términos generales, la derivada del producto de dos funciones no está dada por el producto de sus derivadas. Para observarlo basta con comparar el producto de las derivadas de $f(x) = 3x - 2x^2$ y $g(x) = 5 + 4x$ con la derivada obtenida en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla del producto

Encontrar la derivada de $h(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$.

Solución

$$\begin{aligned} h'(x) &= \overbrace{(3x - 2x^2)}^{\text{Primera}} \overbrace{\frac{d}{dx}[5 + 4x]}^{\text{Derivada de la segunda}} + \overbrace{(5 + 4x)}^{\text{Segunda}} \overbrace{\frac{d}{dx}[3x - 2x^2]}^{\text{Derivada de la primera}} && \text{Aplicar la regla del producto.} \\ &= (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x) \\ &= (12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2) \\ &= -24x^2 + 4x + 15 \end{aligned}$$

En el ejemplo 1 se cuenta con la opción de calcular la derivada con o sin la regla del producto. Sin ella se escribiría

$$\begin{aligned} D_x[(3x - 2x^2)(5 + 4x)] &= D_x[-8x^3 + 2x^2 + 15x] \\ &= -24x^2 + 4x + 15. \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo, se debe utilizar la regla del producto.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla del producto

Encontrar la derivada de $y = 3x^2 \operatorname{sen} x$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[3x^2 \operatorname{sen} x] &= 3x^2 \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}[3x^2] && \text{Aplicar la regla del producto.} \\ &= 3x^2 \cos x + (\operatorname{sen} x)(6x) \\ &= 3x^2 \cos x + 6x \operatorname{sen} x \\ &= 3x(x \cos x + 2 \operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Aplicación de la regla del producto

Encontrar la derivada de $y = 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \overbrace{(2x)\left(\frac{d}{dx}[\cos x]\right) + (\cos x)\left(\frac{d}{dx}[2x]\right)}^{\text{Regla del producto}} - \overbrace{2\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x]}^{\text{Regla del múltiplo constante}} \\ &= (2x)(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2) - 2(\cos x) \\ &= -2x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

NOTA Observar que en el ejemplo 3 se usa la regla del producto cuando ambos factores son variables, y la del múltiplo constante cuando uno de ellos es constante.

La regla del cociente

TEOREMA 2.8 LA REGLA DEL COCIENTE

El cociente f/g de dos funciones derivables f y g también es derivable para todos los valores de x para los que $g(x) \neq 0$. Además, la derivada de f/g se obtiene mediante el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad g(x) \neq 0$$

DEMOSTRACIÓN Al igual que en la demostración del teorema 2.7, la clave radica en sumar y restar una misma cantidad.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \qquad \text{Definición de derivada.}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x)g(x+\Delta x)}$$

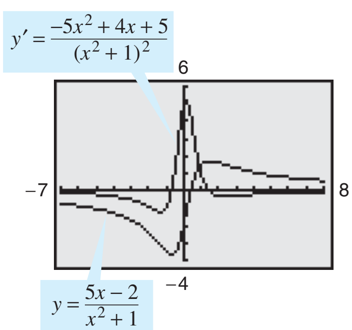
$$= \frac{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} [g(x)g(x+\Delta x)]}$$

$$= \frac{g(x)\left[\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - f(x)\left[\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} [g(x)g(x+\Delta x)]}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Observar que $\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$ porque se considera que g es derivable y por tanto es continua.

TECNOLOGÍA En una herramienta de graficación se pueden comparar las gráficas de una función y de su derivada. Por ejemplo, en la figura 2.22, la gráfica de la función del ejemplo 4 parece incluir dos puntos con rectas tangentes horizontales. ¿Cuáles son los valores de y' en dichos puntos?



Comparación gráfica de una función y su derivada
Figura 2.22

EJEMPLO 4 Aplicación de la regla del cociente

Encontrar la derivada de $y = \dfrac{5x-2}{x^2+1}$.

Solución

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{5x-2}{x^2+1}\right] = \frac{(x^2+1)\dfrac{d}{dx}[5x-2] - (5x-2)\dfrac{d}{dx}[x^2+1]}{(x^2+1)^2} \qquad \text{Aplicar la regla del cociente.}$$

$$= \frac{(x^2+1)(5) - (5x-2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(5x^2+5) - (10x^2-4x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-5x^2+4x+5}{(x^2+1)^2}$$

Observar el uso de los paréntesis en el ejemplo 4. Es recomendable utilizar paréntesis en *todos* los problemas de derivación. Por ejemplo, cuando se usa la regla del cociente, es conveniente encerrar todo factor y derivada en un paréntesis y prestar especial atención a la resta exigida en el numerador.

Al presentar las reglas de derivación en la sección precedente, se hizo hincapié en la necesidad de reescribir *antes* de derivar. El ejemplo siguiente ilustra este aspecto en relación con la regla del cociente.

EJEMPLO 5 Reescribir antes de derivar

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{3 - (1/x)}{x + 5}$ en $(-1, 1)$.

Solución Comenzar por reescribir la función.

$$f(x) = \frac{3 - (1/x)}{x + 5} \qquad \text{Función original.}$$

$$= \frac{x\left(3 - \frac{1}{x}\right)}{x(x + 5)} \qquad \text{Multiplicar por } x \text{ numerador y denominador,}$$

$$= \frac{3x - 1}{x^2 + 5x} \qquad \text{Reescribir.}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 5x)(3) - (3x - 1)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2} \qquad \text{Regla del cociente.}$$

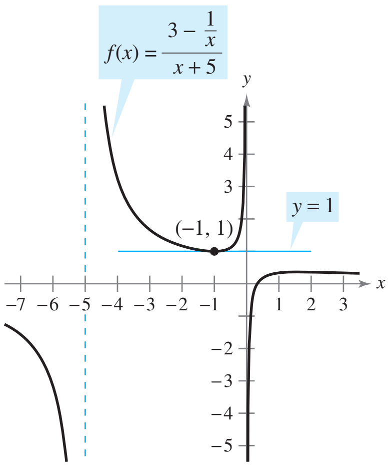
$$= \frac{(3x^2 + 15x) - (6x^2 + 13x - 5)}{(x^2 + 5x)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 2x + 5}{(x^2 + 5x)^2} \qquad \text{Simplificar.}$$

Con objeto de encontrar la pendiente en $(-1, 1)$, evaluar $f'(-1)$.

$$f'(-1) = 0 \qquad \text{Pendiente de la gráfica en } (-1, 1).$$

Luego, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, se puede determinar que la ecuación de la recta tangente en ese punto es $y = 1$. Ver la figura 2.23.



La recta $y = 1$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(-1, 1)$
Figura 2.23

No todo cociente requiere ser derivado mediante la regla del cociente. Por ejemplo, cada uno de los cocientes del ejemplo siguiente se puede considerar como el producto de una constante por una función de x, de modo que es más sencillo aplicar la regla del múltiplo constante.

EJEMPLO 6 Aplicación de la regla del múltiplo constante

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
a)	$y = \dfrac{x^2 + 3x}{6}$	$y = \dfrac{1}{6}(x^2 + 3x)$	$y' = \dfrac{1}{6}(2x + 3)$	$y' = \dfrac{2x + 3}{6}$
b)	$y = \dfrac{5x^4}{8}$	$y = \dfrac{5}{8}x^4$	$y' = \dfrac{5}{8}(4x^3)$	$y' = \dfrac{5}{2}x^3$
c)	$y = \dfrac{-3(3x - 2x^2)}{7x}$	$y = -\dfrac{3}{7}(3 - 2x)$	$y' = -\dfrac{3}{7}(-2)$	$y' = \dfrac{6}{7}$
d)	$y = \dfrac{9}{5x^2}$	$y = \dfrac{9}{5}(x^{-2})$	$y' = \dfrac{9}{5}(-2x^{-3})$	$y' = -\dfrac{18}{5x^3}$

NOTA Para distinguir la ventaja de la regla del múltiplo constante en ciertos cocientes, tratar de calcular las derivadas del ejemplo 6 mediante la regla del cociente. Se llegará al mismo resultado, pero con un esfuerzo mucho mayor.

En la sección 2.2 se demostró la regla de la potencia sólo para exponentes n enteros mayores que 1. En el ejemplo que sigue se amplía esa demostración a exponentes enteros negativos.

EJEMPLO 7 Demostración de la regla de la potencia (exponentes enteros negativos)

Si n es un entero negativo, existe un entero positivo k tal que $n = -k$. Por tanto, usando la regla del cociente se puede escribir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^n] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^k}\right]\\ &= \frac{x^k(0) - (1)(kx^{k-1})}{(x^k)^2} && \text{Regla del cociente y regla de la potencia.}\\ &= \frac{0 - kx^{k-1}}{x^{2k}}\\ &= -kx^{-k-1}\\ &= nx^{n-1}. && n = -k.\end{aligned}$$

De tal modo, la regla de la potencia

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \qquad \text{Regla de la potencia.}$$

es válida para todo entero. En el ejercicio 76 de la sección 2.5 se pide demostrar el caso en el que n es cualquier número racional.

Derivadas de las funciones trigonométricas

Conocidas las derivadas de las funciones seno y coseno, la regla del cociente permite establecer las de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

TEOREMA 2.9 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$$

DEMOSTRACIÓN Considerando $\tan x = (\text{sen } x)/(\cos x)$ y aplicando la regla del cociente, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\tan x] &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\text{sen } x)(-\text{sen } x)}{\cos^2 x} && \text{Aplicar la regla del cociente.}\\ &= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\\ &= \sec^2 x.\end{aligned}$$

La demostración de las otras tres partes del teorema se deja como ejercicio (ver el ejercicio 89).

NOTA Debido a las identidades trigonométricas, la derivada de una función trigonométrica puede adoptar diversas formas. Esto complica la comparación de las soluciones obtenidas por el lector con las propuestas al final del libro.

EJEMPLO 8 Derivación de funciones trigonométricas

	Función	*Derivada*
a)	$y = x - \tan x$	$\dfrac{dy}{dx} = 1 - \sec^2 x$
b)	$y = x \sec x$	$y' = x(\sec x \tan x) + (\sec x)(1)$ $= (\sec x)(1 + x \tan x)$

EJEMPLO 9 Diferentes formas de una derivada

Derivar ambas formas de $y = \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \csc x - \cot x.$

Solución

Primera forma: $y = \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - (1 - \cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \end{aligned}$$

Segunda forma: $y = \csc x - \cot x$

$$y' = -\csc x \cot x + \csc^2 x$$

Para demostrar que ambas derivadas son idénticas, basta escribir

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) \\ &= \csc^2 x - \csc x \cot x. \end{aligned}$$

El siguiente compendio muestra que gran parte del trabajo necesario para obtener la forma simplificada de una derivada se debe hacer *después* de derivar. Observar que dos características de una forma simplificada son la ausencia de exponentes negativos y el agrupamiento de términos semejantes.

	$f'(x)$ tras derivar	$f'(x)$ tras simplificar
Ejemplo 1	$(3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$	$-24x^2 + 4x + 15$
Ejemplo 3	$(2x)(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2) - 2(\cos x)$	$-2x \operatorname{sen} x$
Ejemplo 4	$\dfrac{(x^2 + 1)(5) - (5x - 2)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$	$\dfrac{-5x^2 + 4x + 5}{(x^2 + 1)^2}$
Ejemplo 5	$\dfrac{(x^2 + 5x)(3) - (3x - 1)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2}$	$\dfrac{-3x^2 + 2x + 5}{(x^2 + 5x)^2}$
Ejemplo 9	$\dfrac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - (1 - \cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$	$\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

Derivadas de orden superior

Así como al derivar una función posición se obtiene una función velocidad, al derivar esta última se obtiene una función **aceleración**. En otras palabras, la función aceleración es la *segunda* derivada de la función posición.

$$s(t) \qquad \text{Función posición.}$$
$$v(t) = s'(t) \qquad \text{Función velocidad.}$$
$$a(t) = v'(t) = s''(t) \qquad \text{Función aceleración.}$$

NOTA La segunda derivada de f es la derivada de la primera derivada de f. ■

La función dada por $a(t)$ es la **segunda derivada** de $s(t)$ y se denota como $s''(t)$.

La segunda derivada es un ejemplo de **derivada de orden superior**. Se puede definir derivadas de cualquier orden entero positivo. Por ejemplo, la **tercera derivada** es la derivada de la segunda derivada. Las derivadas de orden superior se denotan como se muestra a continuación.

Primera derivada:	y',	$f'(x)$,	$\dfrac{dy}{dx}$,	$\dfrac{d}{dx}[f(x)]$,	$D_x[y]$
Segunda derivada:	y'',	$f''(x)$,	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$,	$\dfrac{d^2}{dx^2}[f(x)]$,	$D_x^2[y]$
Tercera derivada:	y''',	$f'''(x)$,	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$,	$\dfrac{d^3}{dx^3}[f(x)]$,	$D_x^3[y]$
Cuarta derivada:	$y^{(4)}$,	$f^{(4)}(x)$,	$\dfrac{d^4y}{dx^4}$,	$\dfrac{d^4}{dx^4}[f(x)]$,	$D_x^4[y]$
$\vdots$					
n-ésima derivada:	$y^{(n)}$,	$f^{(n)}(x)$,	$\dfrac{d^ny}{dx^n}$,	$\dfrac{d^n}{dx^n}[f(x)]$,	$D_x^n[y]$

Seth Resnick/Getty Images

LA LUNA

La masa de la Luna es de 7.349×10^{22} kg y la de la Tierra 5.976×10^{24} kg. El radio de la Luna es 1 737 km y el de la Tierra 6 378 km. Puesto que la fuerza de gravedad de un planeta es directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de su radio, la razón entre las fuerzas de gravedad en la Luna y en la Tierra es

$$\frac{(5.976 \times 10^{24})/6\,378^2}{(7.349 \times 10^{22})/1\,737^2} \approx 6.0.$$

EJEMPLO 10 Aceleración de la gravedad

Puesto que la Luna carece de atmósfera, un objeto que cae en ella no encuentra resistencia del aire. En 1971, el astronauta David Scott verificó que una pluma de ave y un martillo caen con la misma velocidad. La función posición para cada uno de esos objetos es

$$s(t) = -0.81t^2 + 2$$

donde $s(t)$ es la altura en metros y t el tiempo en segundos. ¿Cuál es la relación entre la fuerza de gravedad de la Tierra respecto a la de la Luna?

Solución Para calcular la aceleración, derivar dos veces la función posición.

$$s(t) = -0.81t^2 + 2 \qquad \text{Función posición.}$$
$$s'(t) = -1.62t \qquad \text{Función velocidad.}$$
$$s''(t) = -1.62 \qquad \text{Función aceleración.}$$

De esta forma resulta que la aceleración de la gravedad en la Luna es de -1.62 m/s^2. Puesto que la aceleración de la gravedad en la Tierra es de -9.8 m/s^2, la fuerza de gravedad de la Tierra respecto a la de la Luna es

$$\frac{\text{Fuerza de gravedad en la Tierra}}{\text{Fuerza de gravedad en la Luna}} = \frac{-9.8}{-1.62} \approx 6.0.$$

2.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, utilizar la regla del producto para derivar la función.

1. $g(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 4x)$
2. $f(x) = (6x + 5)(x^3 - 2)$
3. $h(t) = \sqrt{t}(1 - t^2)$
4. $g(s) = \sqrt{s}(s^2 + 8)$
5. $f(x) = x^3 \cos x$
6. $g(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 7 a 12, utilizar la regla del cociente para derivar la función.

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
8. $g(t) = \dfrac{t^2 + 4}{5t - 3}$
9. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3 + 1}$
10. $h(s) = \dfrac{s}{\sqrt{s} - 1}$
11. $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$
12. $f(t) = \dfrac{\cos t}{t^3}$

En los ejercicios 13 a 18, encontrar $f'(x)$ y $f'(c)$.

	Función	*Valor de c*
13.	$f(x) = (x^3 + 4x)(3x^2 + 2x - 5)$	$c = 0$
14.	$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^3 - 1)$	$c = 1$
15.	$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 3}$	$c = 1$
16.	$f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 5}$	$c = 4$
17.	$f(x) = x \cos x$	$c = \dfrac{\pi}{4}$
18.	$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$	$c = \dfrac{\pi}{6}$

En los ejercicios 19 a 24, completar la tabla sin usar la regla del cociente.

	Función	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
19.	$y = \dfrac{x^2 + 3x}{7}$			
20.	$y = \dfrac{5x^2 - 3}{4}$			
21.	$y = \dfrac{6}{7x^2}$			
22.	$y = \dfrac{10}{3x^3}$			
23.	$y = \dfrac{4x^{3/2}}{x}$			
24.	$y = \dfrac{5x^2 - 8}{11}$			

En los ejercicios 25 a 38, encontrar la derivada de la función algebraica.

25. $f(x) = \dfrac{4 - 3x - x^2}{x^2 - 1}$
26. $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x + 3}{x^2 - 1}$
27. $f(x) = x\left(1 - \dfrac{4}{x + 3}\right)$
28. $f(x) = x^4\left(1 - \dfrac{2}{x + 1}\right)$
29. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{\sqrt{x}}$
30. $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$
31. $h(s) = (s^3 - 2)^2$
32. $h(x) = (x^2 - 1)^2$
33. $f(x) = \dfrac{2 - \dfrac{1}{x}}{x - 3}$
34. $g(x) = x^2\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x + 1}\right)$
35. $f(x) = (2x^3 + 5x)(x - 3)(x + 2)$
36. $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x - 1)$
37. $f(x) = \dfrac{x^2 + c^2}{x^2 - c^2}$, c es una constante
38. $f(x) = \dfrac{c^2 - x^2}{c^2 + x^2}$, c es una constante

En los ejercicios 39 a 54 encontrar la derivada de la función trigonométrica.

39. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} t$
40. $f(\theta) = (\theta + 1) \cos \theta$
41. $f(t) = \dfrac{\cos t}{t}$
42. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$
43. $f(x) = -x + \tan x$
44. $y = x + \cot x$
45. $g(t) = \sqrt[4]{t} + 6 \csc t$
46. $h(x) = \dfrac{1}{x} - 12 \sec x$
47. $y = \dfrac{3(1 - \operatorname{sen} x)}{2 \cos x}$
48. $y = \dfrac{\sec x}{x}$
49. $y = -\csc x - \operatorname{sen} x$
50. $y = x \operatorname{sen} x + \cos x$
51. $f(x) = x^2 \tan x$
52. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$
53. $y = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$
54. $h(\theta) = 5\theta \sec \theta + \theta \tan \theta$

CAS **En los ejercicios 55 a 58, usar un programa de cálculo para derivar las funciones.**

55. $g(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x + 2}\right)(2x - 5)$
56. $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - x - 3}{x^2 + 1}\right)(x^2 + x + 1)$
57. $g(\theta) = \dfrac{\theta}{1 - \operatorname{sen} \theta}$
58. $f(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}$

En los ejercicios 59 a 62, evaluar la derivada de la función en el punto que se indica. Utilizar una herramienta de graficación para verificar su resultado.

	Función	*Punto*
59.	$y = \dfrac{1 + \csc x}{1 - \csc x}$	$\left(\dfrac{\pi}{6}, -3\right)$
60.	$f(x) = \tan x \cot x$	$(1, 1)$
61.	$h(t) = \dfrac{\sec t}{t}$	$\left(\pi, -\dfrac{1}{\pi}\right)$
62.	$f(x) = \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x + \cos x)$	$\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

El ícono CAS indica que un ejercicio debe utilizarse con un sistema algebraico por computadora.

En los ejercicios 63 a 68, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto que se indica, *b*) utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su recta tangente en ese punto, y *c*) utilizar la función *derivative* para confirmar los resultados.

63. $f(x) = (x^3 + 4x - 1)(x - 2), \quad (1, 4)$

64. $f(x) = (x + 3)(x^2 - 2), \quad (-2, 2)$

65. $f(x) = \dfrac{x}{x + 4}, \quad (-5, 5)$

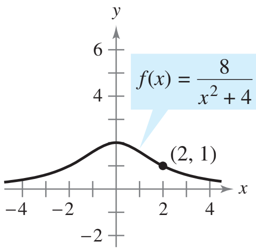
66. $f(x) = \dfrac{(x - 1)}{(x + 1)}, \quad \left(2, \dfrac{1}{3}\right)$

67. $f(x) = \tan x, \quad \left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

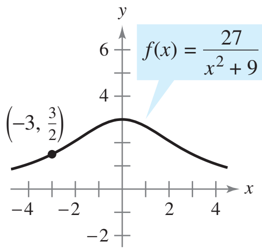
68. $f(x) = \sec x, \quad \left(\dfrac{\pi}{3}, 2\right)$

Curvas famosas **En los ejercicios 69 a 72, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado (las curvas de los ejercicios 69 y 70 se conocen como *Brujas de Agnesi*. Las curvas de los ejercicios 71 y 72 de denominan *serpentinas*).**

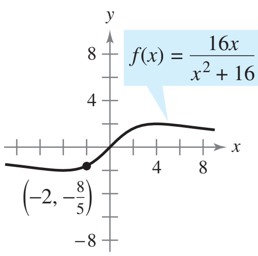
69.



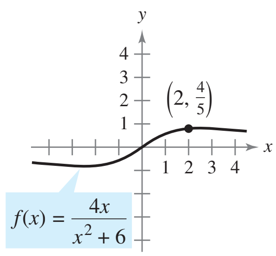
70.



71.



72.



En los ejercicios 73 a 76, determinar el punto o los puntos donde la gráfica tiene tangente horizontal.

73. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

74. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

75. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

76. $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 7}$

77. ***Rectas tangentes*** Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ paralelas a la recta $2y + x = 6$. Después dibujar la gráfica de la función y las rectas tangentes.

78. ***Rectas tangentes*** Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ que pasan por el punto $(-1, 5)$. Después dibujar la gráfica de la función y las rectas tangentes.

En los ejercicios 79 y 80, verificar que $f'(x) = g'(x)$, y explicar la relación que existe entre *f* y *g*.

79. $f(x) = \dfrac{3x}{x + 2}, \quad g(x) = \dfrac{5x + 4}{x + 2}$

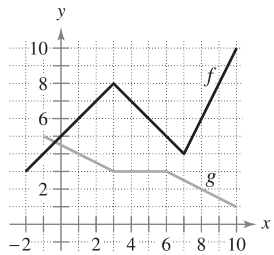
80. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x - 3x}{x}, \quad g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + 2x}{x}$

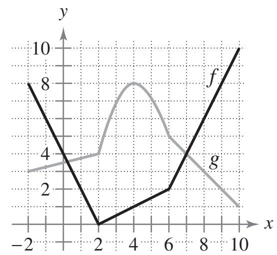
En los ejercicios 81 y 82, utilizar las gráficas de *f* y *g*, siendo

$$p(x) = f(x)g(x) \quad \text{y} \quad q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

81. *a*) Encontrar $p'(1)$.
b) Encontrar $q'(4)$

82. *a*) Encontrar $p'(4)$.
b) Encontrar $q'(7)$





83. ***Área*** La longitud de un rectángulo está dada por $6t + 5$ y su altura es $\sqrt{t}$, donde *t* es el tiempo en segundos y las dimensiones están en centímetros. Encontrar el ritmo de cambio del área respecto al tiempo.

84. ***Volumen*** El radio de un cilindro recto circular está dado por $\sqrt{t + 2}$ y su altura por $\frac{1}{2}\sqrt{t}$, donde *t* es el tiempo en segundos y las dimensiones se encuentran en pulgadas. Encontrar el ritmo de cambio del volumen respecto al tiempo.

85. ***Reposición de inventario*** El costo *C* de pedido y transporte de los elementos utilizados para la fabricación de un producto es

$$C = 100\left(\frac{200}{x^2} + \frac{x}{x + 30}\right), \quad x \geq 1$$

donde *C* se mide en miles de dólares y *x* es el tamaño del pedido, en cientos. Encontrar la razón de cambio de *C* respecto a *x* cuando *a*) $x = 10$, *b*) $x = 15$ y *c*) $x = 20$. ¿Qué implican estas razones de cambio cuando el tamaño del pedido aumenta?

86. ***Ley de Boyle*** Esta ley establece que si la temperatura de un gas permanece constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Utilizar la derivada para demostrar que el ritmo de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen.

87. ***Crecimiento demográfico*** Una población de 500 bacterias se introduce en un cultivo y aumenta de número de acuerdo con la ecuación

$$P(t) = 500\left(1 + \frac{4t}{50 + t^2}\right)$$

donde *t* se mide en horas. Calcular el ritmo de cambio al que está creciendo la población cuando $t = 2$.

88. ***Fuerza gravitacional*** La ley de la gravitación universal de Newton establece que la fuerza F que existe entre dos masas, m_1 y m_2, es

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{d^2}$$

donde G es una constante y d es la distancia entre ambas masas. Encontrar una ecuación que calcule el ritmo de cambio instantáneo de F respecto a d (suponer que m_1 y m_2 representan puntos móviles).

89. Demostrar las siguientes reglas de derivación.

a) $\dfrac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$ *b*) $\dfrac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$

c) $\dfrac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$

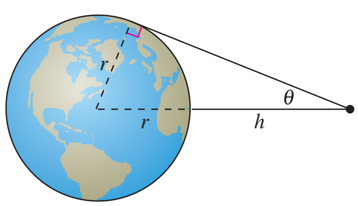
90. ***Ritmo o velocidad de cambio*** Determinar si existe algún valor de x en el intervalo $[0, 2\pi)$ tal que los ritmos de cambio de $f(x) = \sec x$ y de $g(x) = \csc x$ sean iguales.

91. ***Modelo matemático*** La siguiente tabla muestra las cantidades q (en millones) de computadoras personales embarcadas en Estados Unidos y los valores v (en miles de millones de dólares) de estos embarques durante los años 1999 a 2004. La t representa el año, y $t = 9$ corresponde a 1999. (*Fuente: U.S. Census Bureau.*)

Año, t	9	10	11	12	13	14
q	19.6	15.9	14.6	12.9	15.0	15.8
v	26.8	22.6	18.9	16.2	14.7	15.3

a) Utilizar una herramienta de graficación para encontrar los modelos cúbicos para el número de computadoras personales embarcadas $q(t)$ y su valor $v(t)$ correspondiente.
b) Representar gráficamente cada uno de los modelos desarrollados al responder el apartado *a*).
c) Encontrar $A = v(t)/q(t)$, para obtener la gráfica A. ¿Qué representa esta función?
d) Interpretar $A'(t)$ en el contexto de estos datos.

92. ***Satélites*** Cuando los satélites exploran la Tierra, sólo tienen alcance para una parte de su superficie. Algunos de ellos cuentan con sensores que pueden medir el ángulo θ que se muestra en la figura. Si h representa la distancia que hay entre el satélite y la superficie de la Tierra y r el radio de esta última:



a) Demostrar que $h = r(\csc \theta - 1)$.
b) Encontrar el ritmo al que cambia h respecto a θ cuando $\theta = 30°$. (Suponer que $r = 3\,960$ millas.)

En los ejercicios 93 a 100, encontrar la segunda derivada de la función.

93. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x$ **94.** $f(x) = 8x^6 - 10x^5 + 5x^3$

95. $f(x) = 4x^{3/2}$ **96.** $f(x) = x + 32x^{-2}$

97. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ **98.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$

99. $f(x) = x \operatorname{sen} x$ **100.** $f(x) = \sec x$

En los ejercicios 101 a 104, encontrar la derivada de orden superior que se indica.

101. $f'(x) = x^2, \quad f''(x)$ **102.** $f''(x) = 2 - \dfrac{2}{x}, \quad f'''(x)$

103. $f'''(x) = 2\sqrt{x}, \quad f^{(4)}(x)$ **104.** $f^{(4)}(x) = 2x + 1, \quad f^{(6)}(x)$

En los ejercicios 105 a 108, utilizar la información dada para encontrar $f'(2)$.

$g(2) = 3$ **y** $g'(2) = -2$

$h(2) = -1$ **y** $h'(2) = 4$

105. $f(x) = 2g(x) + h(x)$ **106.** $f(x) = 4 - h(x)$

107. $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ **108.** $f(x) = g(x)h(x)$

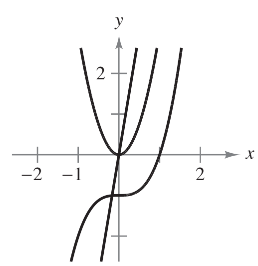
Desarrollo de conceptos

109. Construir la gráfica de una función derivable f tal que $f(2) = 0$, $f' < 0$ para $-\infty < x < 2$ y $f' > 0$ para $2 < x < \infty$. Explicar el razonamiento.

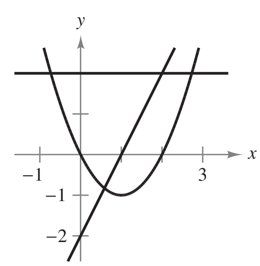
110. Construir la gráfica de una función derivable f tal que $f > 0$ y $f' < 0$ para todos los números reales x. Explicar el razonamiento.

En los ejercicios 111 y 112 se muestran las gráficas de f, f' y f'' sobre el mismo plano cartesiano. ¿Cuál es cuál? Explicar el razonamiento.

111.

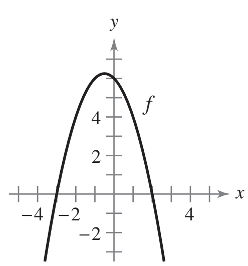


112.

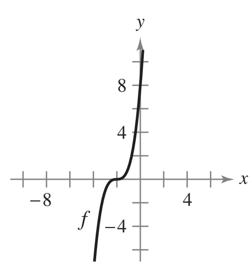


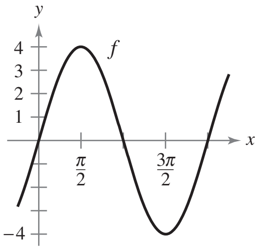
En los ejercicios 113 a 116 se muestra la gráfica de f. Construir las gráficas de f' y f''.

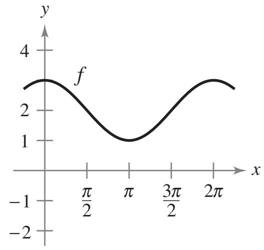
113.



114.



115. 

116. 

117. ***Aceleración*** La velocidad, en m/s, de un objeto es $v(t) = 36 - t^2$, $0 \leq t \leq 6$. Calcular su velocidad y su aceleración cuando $t = 3$. ¿Qué se puede decir acerca de la rapidez del objeto cuando velocidad y aceleración tienen signos opuestos?

118. ***Aceleración*** La velocidad de un automóvil que parte del reposo es

$$v(t) = \frac{100t}{2t + 15}$$

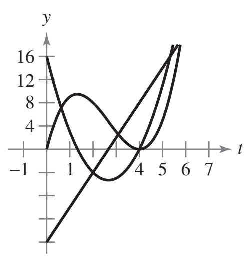
donde v se mide en pies por segundo. Calcular su aceleración en *a*) 5 segundos, *b*) 10 segundos y *c*) 20 segundos.

119. ***Distancia de frenado*** Al momento de aplicar los frenos, un vehículo viaja a 66 pies/s (45 millas por hora). La función posición del vehículo es $s(t) = -8.25t^2 + 66t$, donde s se mide en pies y t en segundos. Utilizar esta función para completar la tabla y encontrar la velocidad media durante cada intervalo.

t	0	1	2	3	4
$s(t)$					
$v(t)$					
$a(t)$					

Para discusión

120. ***Movimiento de una partícula*** En la figura se muestran las gráficas de las funciones posición, velocidad y aceleración de una partícula.



a) Copiar las gráficas de las funciones. Identificar cada una de ellas. Explicar el razonamiento.

b) En la ilustración, identificar cuándo aumenta y disminuye la velocidad de la partícula. Explicar el razonamiento.

Búsqueda de un patrón **En los ejercicios 121 y 122, desarrollar una fórmula general para $f^{(n)}(x)$, dada $f(x)$.**

121. $f(x) = x^n$ **122.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

123. ***Búsqueda de un patrón*** Considerando la función $f(x) = g(x)h(x)$.

a) Utilizar la regla del producto para elaborar una regla general para encontrar $f''(x)$, $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

b) Empleando los resultados del apartado *a*), confeccionar una regla general para $f^{(n)}(x)$.

124. ***Búsqueda de un patrón*** Desarrollar una fórmula general para $[xf(x)]^{(n)}$, donde f es una función derivable de x.

En los ejercicios 125 y 126, encontrar las derivadas de la función f para $n = 1, 2, 3$ y 4. Utilizar los resultados para elaborar una regla general para $f'(x)$ en términos de n.

125. $f(x) = x^n \operatorname{sen} x$ **126.** $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^n}$

Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 127 a 130, verificar que la función satisfaga la ecuación diferencial.**

	Función	*Ecuación diferencial*
127.	$y = \frac{1}{x}, x > 0$	$x^3 y'' + 2x^2 y' = 0$
128.	$y = 2x^3 - 6x + 10$	$-y''' - xy'' - 2y' = -24x^2$
129.	$y = 2 \operatorname{sen} x + 3$	$y'' + y = 3$
130.	$y = 3 \cos x + \operatorname{sen} x$	$y'' + y = 0$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 131 a 136, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que lo es.**

131. Si $y = f(x)g(x)$, entonces $dy/dx = f'(x)g'(x)$.

132. Si $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$, entonces $d^5y/dx^5 = 0$.

133. Si $f'(c)$ y $g'(c)$ son cero y $h(x) = f(x)g(x)$, entonces $h'(c) = 0$.

134. Si $f(x)$ es un polinomio de n-ésimo grado, entonces $f^{(n+1)}(x) = 0$.

135. La segunda derivada representa la razón de cambio de la primera derivada.

136. Si la velocidad de un objeto es constante, entonces su aceleración es cero.

137. Encontrar un polinomio de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que su gráfica tenga una recta tangente con pendiente de 10 en el punto (2, 7) y una intersección en x en (1, 0).

138. Tomando en cuenta el siguiente polinomio de tercer grado:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0.$$

determinar las condiciones de a, b, c y d, si la gráfica de f: *a*) no tiene tangentes horizontales, *b*) tiene exactamente una tangente horizontal, *c*) tiene exactamente dos tangentes horizontales. Acompañar las respuestas con un ejemplo.

139. Calcular la derivada de $f(x) = x|x|$. ¿Existe $f''(0)$?

140. ***Para pensar*** Sean f y g funciones cuyas respectivas primera y segunda derivadas existen dentro del intervalo I. ¿Cuál de las siguientes fórmulas es verdadera?

a) $fg'' - f''g = (fg' - f'g)'$

b) $fg'' + f''g = (fg)''$

141. Utilizar la regla del producto dos veces para demostrar que si f, g y h son funciones derivables de x, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

2.4 La regla de la cadena

- **Encontrar la derivada de una función compuesta por la regla de la cadena.**
- **Encontrar la derivada de una función por la regla general de la potencia.**
- **Simplificar la derivada de una función por técnicas algebraicas.**
- **Aplicar la regla de la cadena a funciones trigonométricas.**

La regla de la cadena

Ahora es tiempo de analizar una de las reglas de derivación más potentes: la **regla de la cadena**. Ésta se aplica a las funciones compuestas y añade versatilidad a las reglas analizadas en las dos secciones precedentes. Como ejemplo, comparar las funciones que se muestran a continuación; las de la izquierda se pueden derivar sin la regla de la cadena, mientras que a las de la derecha conviene aplicarles dicha regla.

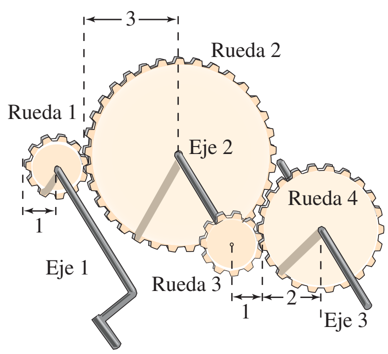
Sin la regla de la cadena	*Con la regla de la cadena*
$y = x^2 + 1$	$y = \sqrt{x^2 + 1}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y = \operatorname{sen} 6x$
$y = 3x + 2$	$y = (3x + 2)^5$
$y = x + \tan x$	$y = x + \tan x^2$

En esencia, la regla de la cadena establece que si y cambia dy/du veces más rápido que u, mientras que u cambia du/dx veces más rápido que x, entonces y cambia $(dy/du)(du/dx)$ veces más rápido que x.

EJEMPLO 1 La derivada de una función compuesta

Un juego de ruedas dentadas está construido, como muestra la figura 2.24, de forma que la segunda y la tercera giran sobre un eje común. Cuando la primera gira, impulsa a la segunda y ésta a su vez a la tercera. Sean y, u y x los números de revoluciones por minuto del primero, segundo y tercer ejes. Encontrar dy/du, du/dx y dy/dx, y verificar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$



Eje 1: y revoluciones por minuto
Eje 2: u revoluciones por minuto
Eje 3: x revoluciones por minuto
Figura 2.24

Solución Puesto que la circunferencia del segundo engranaje es tres veces mayor que la de la primera, el primer eje debe dar tres vueltas para que el segundo complete una. Del mismo modo, el segundo eje ha de dar dos vueltas para que el tercero complete una y, por tanto, se debe escribir

$$\frac{dy}{du} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = 2.$$

Combinando ambos resultados, el primer eje debe dar seis vueltas para hacer girar una vez al tercer eje. De tal manera:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \boxed{\text{Razón de cambio del primer eje con respecto al segundo}} \cdot \boxed{\text{Razón de cambio del segundo eje con respecto al tercero}} \\
&= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3 \cdot 2 = 6 \\
&= \boxed{\text{Razón de cambio del primer eje con respecto al tercero}}.
\end{aligned}$$

En otras palabras, la razón de cambio de y respecto a x es igual al producto de la razón de cambio de y con respecto a u multiplicado por el de u con respecto a x.

EXPLORACIÓN

Aplicación de la regla de la cadena Cada una de las funciones que se encuentran a continuación se pueden derivar utilizando las reglas de derivación estudiadas en las secciones 2.2 y 2.3. Calcular la derivada de cada función utilizando dichas reglas; luego encontrar la derivada utilizando la regla de la cadena. Comparar los resultados. ¿Cuál de los dos métodos es más sencillo?

a) $\dfrac{2}{3x + 1}$

b) $(x + 2)^3$

c) sen $2x$

El ejemplo 1 ilustra un caso simple de la regla de la cadena. Su enunciado general es el siguiente.

TEOREMA 2.10 LA REGLA DE LA CADENA

Si $y = f(u)$ es una función derivable de u y además $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable de x y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o su equivalente

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

DEMOSTRACIÓN Sea $h(x) = f(g(x))$. Usando la forma alternativa de la derivada, es necesario demostrar que, para $x = c$,

$$h'(c) = f'(g(c))g'(c).$$

Un aspecto importante en esta demostración es el comportamiento de g cuando x tiende a c. Se presentan dificultades cuando existen valores de x, distintos de c, tales que $g(x) = g(c)$. En el apéndice A se explica cómo utilizar la derivabilidad de f y g para superar este problema. Por ahora, supóngase que $g(x) \neq g(c)$ para valores de x distintos de c. En las demostraciones de las reglas del producto y del cociente se sumó y restó una misma cantidad. Ahora se recurrirá a un truco similar, multiplicar y dividir por una misma cantidad (distinta de cero). Observar que, como g es derivable, también es continua, por lo que $g(x) \to g(c)$ cuando $x \to c$.

$$\begin{aligned}
h'(c) &= \lim_{x \to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} \\
&= \lim_{x \to c} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right], \quad g(x) \neq g(c) \\
&= \left[\lim_{x \to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)}\right]\left[\lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right] \\
&= f'(g(c))g'(c)
\end{aligned}$$

Al aplicar la regla de la cadena, es útil considerar que la función compuesta $f \circ g$ está constituida por dos partes: una interior y otra exterior.

Función exterior

$$y = f(g(x)) = f(u)$$

Función interior

La derivada de $y = f(u)$ es la derivada de la función exterior (en la función interior u) multiplicada por la derivada de la función interior.

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

EJEMPLO 2 Descomposición de una función compuesta

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
a)	$y = \dfrac{1}{x+1}$	$u = x + 1$	$y = \dfrac{1}{u}$
b)	$y = \operatorname{sen} 2x$	$u = 2x$	$y = \operatorname{sen} u$
c)	$y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$	$u = 3x^2 - x + 1$	$y = \sqrt{u}$
d)	$y = \tan^2 x$	$u = \tan x$	$y = u^2$

EJEMPLO 3 Aplicación de la regla de la cadena

Encontrar dy/dx para $y = (x^2 + 1)^3$.

Solución Para esta función, considerar que la función interior es $u = x^2 + 1$. Por medio de la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{3(x^2 + 1)^2}_{\frac{dy}{du}}\underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} = 6x(x^2 + 1)^2.$$

AYUDA DE ESTUDIO El ejemplo 3 también se puede resolver sin hacer uso de la regla de la cadena, si se observa que

$$y = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

y, por tanto,

$$y' = 6x^5 + 12x^3 + 6x.$$

Comprobar que esta derivada es la misma que la del ejemplo 3. ¿Qué método sería preferible para encontrar

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1)^{50}?$$

La regla general de la potencia

La función del ejemplo 3 es uno de los tipos más comunes de funciones compuestas, $y = [u(x)]^n$. La regla para derivar tales funciones se llama **regla general de la potencia**, y no es sino un caso particular de la regla de la cadena.

TEOREMA 2.11 LA REGLA GENERAL DE LA POTENCIA

Si $y = [u(x)]^n$, donde u es una función derivable de x y n es un número racional, entonces

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$$

o su equivalente

$$\frac{d}{dx}[u^n] = n\,u^{n-1}\,u'.$$

DEMOSTRACIÓN Puesto que $y = u^n$, aplicar la regla de la cadena para obtener

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\\ &= \frac{d}{du}[u^n]\frac{du}{dx}.\end{aligned}$$

Por medio de la regla (simple) de la potencia estudiada en la sección 2.2, se tiene $D_u[u^n] = nu^{n-1}$ y se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

EJEMPLO 4 Aplicación de la regla general de la potencia

Encontrar la derivada de $f(x) = (3x - 2x^2)^3$.

Solución Sea $u = 3x - 2x^2$. Entonces

$$f(x) = (3x - 2x^2)^3 = u^3$$

y, mediante la regla general de la potencia, se deduce que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \overset{n}{3}\overbrace{(3x - 2x^2)^2}^{u^{n-1}} \overbrace{\frac{d}{dx}[3x - 2x^2]}^{u'} && \text{Aplicar la regla general de la potencia.} \\ &= 3(3x - 2x^2)^2(3 - 4x). && \text{Derivar } 3x - 2x^2. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Derivación de funciones con radicales

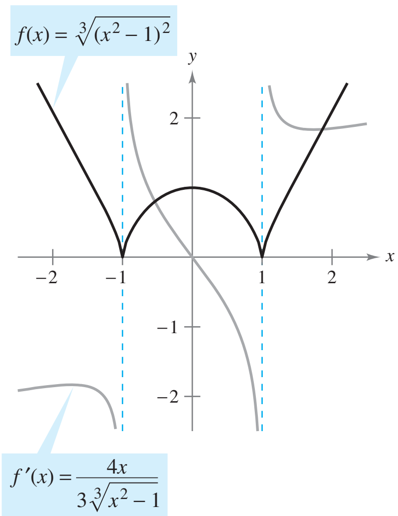
Encontrar los puntos de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ en los que $f'(x) = 0$ y aquellos en los que $f'(x)$ no existe.

Solución Reescribir de nuevo la función como

$$f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}.$$

Aplicar ahora la regla general de las potencias (con $u = x^2 - 1$); se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \overset{n}{\frac{2}{3}} \overbrace{(x^2 - 1)^{-1/3}}^{u^{n-1}} \overbrace{(2x)}^{u'} && \text{Aplicar la regla general de las potencias.} \\ &= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}. && \text{Expresar en forma radical.} \end{aligned}$$



La derivada de f es 0 en $x = 0$ y no está definida en $x = \pm 1$
Figura 2.25

De tal manera, $f'(x) = 0$ en $x = 0$ y $f'(x)$ no existe en $x = \pm 1$, como se muestra en la figura 2.25.

EJEMPLO 6 Derivación de cocientes con numeradores constantes

Derivar $g(t) = \dfrac{-7}{(2t - 3)^2}$.

Solución Para empezar, reescribir la función como

$$g(t) = -7(2t - 3)^{-2}.$$

Después, con la regla general de la potencia se tiene

$$\begin{aligned} g'(t) &= \underbrace{(-7)}_{\substack{\text{Regla del} \\ \text{múltiplo constante}}} \overbrace{(-2)}^{n}\overbrace{(2t - 3)^{-3}}^{u^{n-1}}\overbrace{(2)}^{u'} && \text{Aplicar la regla general de la potencia.} \\ &= 28(2t - 3)^{-3} && \text{Simplificar.} \\ &= \frac{28}{(2t - 3)^3}. && \text{Expresar con exponente positivo.} \end{aligned}$$

NOTA Derivar la función del ejemplo 6 usando la regla del cociente. El resultado será el mismo, pero el método es menos eficiente que la regla general de la potencia.

Simplificación de derivadas

Los siguientes tres ejemplos ponen de manifiesto algunas técnicas para simplificar las derivadas de funciones que involucran productos, cocientes y composiciones.

EJEMPLO 7 Simplificación por factorización de la potencia mínima

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2\sqrt{1-x^2} && \text{Función original.}\\
&= x^2(1-x^2)^{1/2} && \text{Reescribir.}\\
f'(x) &= x^2\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{1/2}\right] + (1-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx}\left[x^2\right] && \text{Regla del producto.}\\
&= x^2\left[\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)\right] + (1-x^2)^{1/2}(2x) && \text{Regla general de la potencia.}\\
&= -x^3(1-x^2)^{-1/2} + 2x(1-x^2)^{1/2} && \text{Simplificar.}\\
&= x(1-x^2)^{-1/2}\left[-x^2(1) + 2(1-x^2)\right] && \text{Factorizar.}\\
&= \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 8 Simplificación de la derivada de un cociente

TECNOLOGÍA Las herramientas de graficación con derivación simbólica son capaces de derivar funciones muy complicadas. No obstante, suelen presentar el resultado en forma no simplificada. Si se cuenta con una de ese tipo, usarla para calcular las derivadas de las funciones de los ejemplos 7, 8 y 9, y comparar después los resultados.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}} && \text{Función original.}\\
&= \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}} && \text{Reescribir.}\\
f'(x) &= \frac{(x^2+4)^{1/3}(1) - x(1/3)(x^2+4)^{-2/3}(2x)}{(x^2+4)^{2/3}} && \text{Regla del cociente.}\\
&= \frac{1}{3}(x^2+4)^{-2/3}\left[\frac{3(x^2+4) - (2x^2)(1)}{(x^2+4)^{2/3}}\right] && \text{Factorizar.}\\
&= \frac{x^2+12}{3(x^2+4)^{4/3}} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 9 Simplificación de la derivada de una potencia

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2 && \text{Función original.}\\
y' &= \underset{n}{2}\underbrace{\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)}_{u^{n-1}}\underbrace{\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-1}{x^2+3}\right]}_{u'} && \text{Regla general de la potencia.}\\
&= \left[\frac{2(3x-1)}{x^2+3}\right]\left[\frac{(x^2+3)(3)-(3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}\right] && \text{Regla del cociente.}\\
&= \frac{2(3x-1)(3x^2+9-6x^2+2x)}{(x^2+3)^3} && \text{Multiplicar.}\\
&= \frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}
$$

Funciones trigonométricas y la regla de la cadena

A continuación se muestran las "versiones de la regla de la cadena" correspondientes a las derivadas de las funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = (\cos u)\, u' \qquad \frac{d}{dx}[\cos u] = -(\operatorname{sen} u)\, u'$$

$$\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)\, u' \qquad \frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)\, u'$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)\, u' \qquad \frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)\, u'$$

EJEMPLO 10 Aplicación de la regla de la cadena a funciones trigonométricas

a) $y = \operatorname{sen} \overbrace{2x}^{u}$ $\qquad y' = \overbrace{\cos 2x}^{\cos u}\, \overbrace{\frac{d}{dx}[2x]}^{u'} = (\cos 2x)(2) = 2 \cos 2x$

b) $y = \cos(x - 1)$ $\qquad y' = -\operatorname{sen}(x - 1)$

c) $y = \tan 3x$ $\qquad y' = 3 \sec^2 3x$

Hay que asegurarse de entender los convenios matemáticos que afectan a paréntesis y funciones trigonométricas. Así, en el ejemplo 10*a*, se escribe sen $2x$ que significa sen $(2x)$.

EJEMPLO 11 Paréntesis y funciones trigonométricas

a) $y = \cos 3x^2 = \cos(3x^2)$ $\qquad y' = (-\operatorname{sen} 3x^2)(6x) = -6x \operatorname{sen} 3x^2$

b) $y = (\cos 3)x^2$ $\qquad y' = (\cos 3)(2x) = 2x \cos 3$

c) $y = \cos(3x)^2 = \cos(9x^2)$ $\qquad y' = (-\operatorname{sen} 9x^2)(18x) = -18x \operatorname{sen} 9x^2$

d) $y = \cos^2 x = (\cos x)^2$ $\qquad y' = 2(\cos x)(-\operatorname{sen} x) = -2 \cos x \operatorname{sen} x$

e) $y = \sqrt{\cos x} = (\cos x)^{1/2}$ $\qquad y' = \frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}(-\operatorname{sen} x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$

Para calcular la derivada de una función con la forma $k(x) = f(g(h(x)))$ es necesario aplicar la regla de la cadena dos veces, como se ilustra en el ejemplo 12.

EJEMPLO 12 Aplicación reiterada de la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
f(t) &= \operatorname{sen}^3 4t && \text{Función original.}\\
&= (\operatorname{sen} 4t)^3 && \text{Reescribir.}\\
f'(t) &= 3(\operatorname{sen} 4t)^2 \frac{d}{dt}[\operatorname{sen} 4t] && \text{Aplicar la regla de la cadena por primera vez.}\\
&= 3(\operatorname{sen} 4t)^2(\cos 4t) \frac{d}{dt}[4t] && \text{Aplicar la regla de la cadena por segunda vez.}\\
&= 3(\operatorname{sen} 4t)^2(\cos 4t)(4) &&\\
&= 12 \operatorname{sen}^2 4t \cos 4t && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

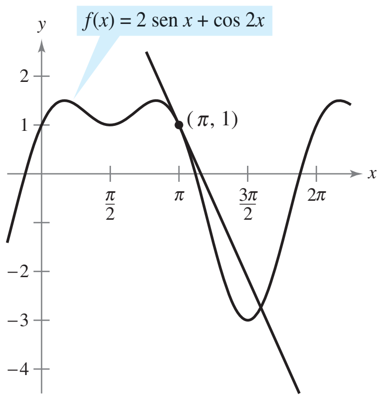


Figura 2.26

AYUDA DE ESTUDIO Para adquirir mayor práctica en la derivación, se deben aprender todas las reglas. Como ayuda para la memoria, observar que las cofunciones (coseno, cotangente y cosecante) tienen un signo negativo en sus derivadas.

EJEMPLO 13 Recta tangente a una función trigonométrica

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$$

en el punto $(\pi, 1)$, como se muestra en la figura 2.26. A continuación determinar todos los valores de x en el intervalo $(0, 2\pi)$ en los que la gráfica de f tienen una tangente horizontal.

Solución Comenzar por encontrar $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x && \text{Función original.} \\ f'(x) &= 2 \cos x + (-\operatorname{sen} 2x)(2) && \text{Aplicar la regla de la cadena a } \cos 2x. \\ &= 2 \cos x - 2 \operatorname{sen} 2x && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

Para encontrar la ecuación de la recta tangente en $(\pi, 1)$, evaluar $f'(\pi)$.

$$\begin{aligned} f'(\pi) &= 2 \cos \pi - 2 \operatorname{sen} 2\pi && \text{Sustituir.} \\ &= -2 && \text{Pendiente de la gráfica en } (\pi, 1). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, escribir

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{Forma punto-pendiente.} \\ y - 1 &= -2(x - \pi) && \text{Sustituir } y_1, m \text{ y } x_1. \\ y &= 1 - 2x + 2\pi. && \text{Ecuación de la recta tangente en } (\pi, 1). \end{aligned}$$

Se puede determinar que $f'(x) = 0$ cuando $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ y $\frac{3\pi}{2}$. De tal modo, f tiene una tangente horizontal en $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$, y $\frac{3\pi}{2}$.

Esta sección concluye con un compendio de las reglas de derivación estudiadas hasta este momento.

Compendio de reglas de derivación

Reglas generales de derivación Sean f, g y u funciones derivables de x.

Regla del múltiplo constante:

$$\frac{d}{dx}[cf] = cf'$$

Regla de la suma o de la diferencia:

$$\frac{d}{dx}[f \pm g] = f' \pm g'$$

Regla del producto:

$$\frac{d}{dx}[fg] = fg' + gf'$$

Regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Derivadas de funciones algebraicas

Regla de la constante:

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Regla simple de la potencia:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}[x] = 1$$

Derivadas de funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x \qquad \frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$$

Regla de la cadena

Regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\, u'$$

Regla general de la potencia:

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\, u'$$

2.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, completar la tabla.

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
1.	$y = (5x - 8)^4$		
2.	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$		
3.	$y = \sqrt{x^3 - 7}$		
4.	$y = 3\tan(\pi x^2)$		
5.	$y = \csc^3 x$		
6.	$y = \operatorname{sen} \dfrac{5x}{2}$		

En los ejercicios 7 a 36, encontrar la derivada de la función.

7. $y = (4x - 1)^3$

8. $y = 2(6 - x^2)^5$

9. $g(x) = 3(4 - 9x)^4$

10. $f(t) = (9t + 2)^{2/3}$

11. $f(t) = \sqrt{5 - t}$

12. $g(x) = \sqrt{9 - 4x}$

13. $y = \sqrt[3]{6x^2 + 1}$

14. $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

15. $y = 2\sqrt[4]{9 - x^2}$

16. $f(x) = -3\sqrt[4]{2 - 9x}$

17. $y = \dfrac{1}{x - 2}$

18. $s(t) = \dfrac{1}{t^2 + 3t - 1}$

19. $f(t) = \left(\dfrac{1}{t - 3}\right)^2$

20. $y = -\dfrac{5}{(t + 3)^3}$

21. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

22. $g(t) = \sqrt{\dfrac{1}{t^2 - 2}}$

23. $f(x) = x^2(x - 2)^4$

24. $f(x) = x(3x - 9)^3$

25. $y = x\sqrt{1 - x^2}$

26. $y = \frac{1}{2}x^2\sqrt{16 - x^2}$

27. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

28. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^4 + 4}}$

29. $g(x) = \left(\dfrac{x + 5}{x^2 + 2}\right)^2$

30. $h(t) = \left(\dfrac{t^2}{t^3 + 2}\right)^2$

31. $f(v) = \left(\dfrac{1 - 2v}{1 + v}\right)^3$

32. $g(x) = \left(\dfrac{3x^2 - 2}{2x + 3}\right)^3$

33. $f(x) = ((x^2 + 3)^5 + x)^2$

34. $g(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$

35. $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$

36. $g(t) = \sqrt{\sqrt{t + 1} + 1}$

CAS **En los ejercicios 37 a 42, utilizar un sistema algebraico por computadora para encontrar la derivada de la función. Utilizar el mismo mecanismo para representar gráficamente la función y su derivada en el mismo plano cartesiano. Describir el comportamiento de la función que corresponde a cualquier cero de la gráfica de la derivada.**

37. $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 1}$

38. $y = \sqrt{\dfrac{2x}{x + 1}}$

39. $y = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x}}$

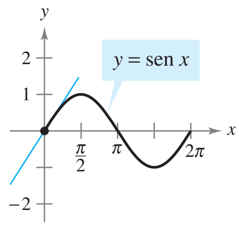
40. $g(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}$

41. $y = \dfrac{\cos \pi x + 1}{x}$

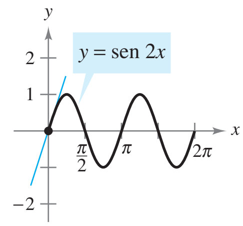
42. $y = x^2 \tan \dfrac{1}{x}$

En los ejercicios 43 y 44, calcular la pendiente de la recta tangente a la función seno en el origen. Comparar este valor con el número de ciclos completos en el intervalo $[0, 2\pi]$. ¿Cuál es la conclusión respecto a la pendiente de una función sen ax en el origen?

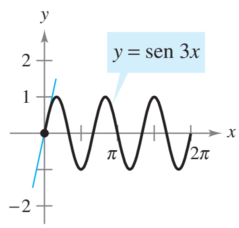
43. *a)*



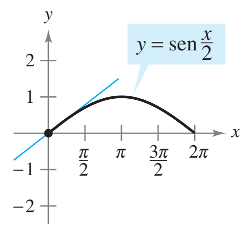
b)



44. *a)*



b)



En los ejercicios 45 a 66, encontrar la derivada de la función.

45. $y = \cos 4x$

46. $y = \operatorname{sen} \pi x$

47. $g(x) = 5\tan 3x$

48. $h(x) = \sec x^2$

49. $y = \operatorname{sen}(\pi x)^2$

50. $y = \cos(1 - 2x)^2$

51. $h(x) = \operatorname{sen} 2x \cos 2x$

52. $g(\theta) = \sec\left(\frac{1}{2}\theta\right)\tan\left(\frac{1}{2}\theta\right)$

53. $f(x) = \dfrac{\cot x}{\operatorname{sen} x}$

54. $g(v) = \dfrac{\cos v}{\csc v}$

55. $y = 4\sec^2 x$

56. $g(t) = 5\cos^2 \pi t$

57. $f(\theta) = \tan^2 5\theta$

58. $g(\theta) = \cos^2 8\theta$

59. $f(\theta) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\theta$

60. $h(t) = 2\cot^2(\pi t + 2)$

61. $f(t) = 3\sec^2(\pi t - 1)$

62. $y = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

63. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)^2$

64. $y = \operatorname{sen}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$

65. $y = \operatorname{sen}(\tan 2x)$

66. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}$

En los ejercicios 67 a 74, evaluar la derivada de la función en el punto indicado. Utilizar una herramienta de graficación para verificar los resultados.

	Función	*Punto*
67.	$s(t) = \sqrt{t^2 + 6t - 2}$	$(3, 5)$
68.	$y = \sqrt[5]{3x^3 + 4x}$	$(2, 2)$
69.	$f(x) = \dfrac{5}{x^3 - 2}$	$\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$
70.	$f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 3x)^2}$	$\left(4, \dfrac{1}{16}\right)$
71.	$f(t) = \dfrac{3t + 2}{t - 1}$	$(0, -2)$
72.	$f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 3}$	$(2, 3)$
73.	$y = 26 - \sec^3 4x$	$(0, 25)$
74.	$y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{\cos x}$	$\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2}{\pi}\right)$

En los ejercicios 75 a 82, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto que se indica, *b*) utilizar una herramienta de graficación para representar la función y la recta tangente en ese punto y *c*) verificar los resultados empleando la función *derivative* de su herramienta de graficación.

	Función	*Punto*
75.	$f(x) = \sqrt{2x^2 - 7}$	$(4, 5)$
76.	$f(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x^2 + 5}$	$(2, 2)$
77.	$y = (4x^3 + 3)^2$	$(-1, 1)$
78.	$f(x) = (9 - x^2)^{2/3}$	$(1, 4)$
79.	$f(x) = \operatorname{sen} 2x$	$(\pi, 0)$
80.	$y = \cos 3x$	$\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
81.	$f(x) = \tan^2 x$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$
82.	$y = 2\tan^3 x$	$\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$

En los ejercicios 83 a 86, *a*) utilizar una herramienta de graficación para encontrar la derivada de la función del punto dado, *b*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función del punto dado y *c*) utilizar la herramienta de graficación para representar la función y su recta tangente en la misma ventana.

83. $g(t) = \dfrac{3t^2}{\sqrt{t^2 + 2t - 1}}, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

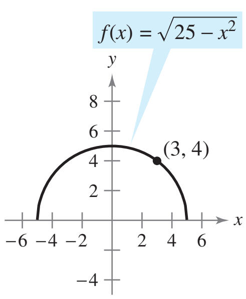
84. $f(x) = \sqrt{x}(2 - x)^2, \quad (4, 8)$

85. $s(t) = \dfrac{(4 - 2t)\sqrt{1 + t}}{3}, \quad \left(0, \frac{4}{3}\right)$

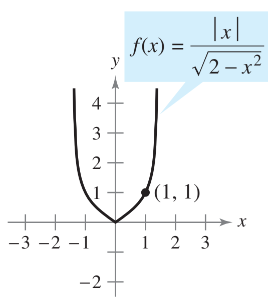
86. $y = (t^2 - 9)\sqrt{t + 2}, \quad (2, -10)$

Curvas famosas **En los ejercicios 87 y 88, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica del punto dado. Después utilizar una herramienta de graficación para dibujar la función y su recta tangente en la misma ventana.**

87. Semicírculo superior



88. Curva de bala



89. ***Recta tangente horizontal*** Determinar el o los puntos en el intervalo $(0, 2\pi)$ en los que la gráfica de $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x$ tiene una tangente horizontal.

90. ***Recta tangente horizontal*** Determinar el o los puntos en los que la gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x - 1}}$ tiene una tangente horizontal.

En los ejercicios 91 a 96, encontrar la segunda derivada de la función.

91. $f(x) = 5(2 - 7x)^4$

92. $f(x) = 4(x^2 - 2)^3$

93. $f(x) = \dfrac{1}{x - 6}$

94. $f(x) = \dfrac{4}{(x + 2)^3}$

95. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

96. $f(x) = \sec^2 \pi x$

En los ejercicios 97 a 100, evaluar la segunda derivada de la función en el punto dado. Utilizar una herramienta de graficación para verificar los resultados.

97. $h(x) = \frac{1}{9}(3x + 1)^3, \quad \left(1, \frac{64}{9}\right)$

98. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 4}}, \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)$

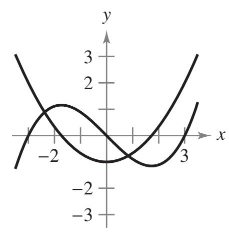
99. $f(x) = \cos(x^2), \quad (0, 1)$

100. $g(t) = \tan 2t, \quad \left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$

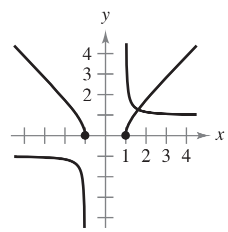
Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 101 a 104, se muestran las gráficas de una función *f* y su derivada *f′*. Clasificar las gráficas según correspondan a *f* o *f′* y escribir en un breve párrafo los criterios utilizados para hacer la selección.

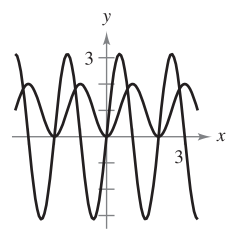
101.



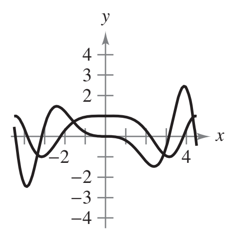
102.



103.



104.



En los ejercicios 105 y 106, se da la relación que existe entre *f* y *g*. Explicar la relación que existe entre *f′* y *g′*.

105. $g(x) = f(3x)$

106. $g(x) = f(x^2)$

107. ***Para pensar*** La tabla muestra algunos valores de la derivada de una función desconocida *f*. Completar la tabla encontrando (si es posible) la derivada de cada una de las siguientes transformaciones de *f*.

a) $g(x) = f(x) - 2$

b) $h(x) = 2f(x)$

c) $r(x) = f(-3x)$

d) $s(x) = f(x + 2)$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-2	-4
$g'(x)$						
$h'(x)$						
$r'(x)$						
$s'(x)$						

Tabla para 107

Para discusión

108. Dado que $g(5) = -3$, $g'(5) = 6$, $h(5) = 3$ y $h'(5) = -2$, encontrar $f'(5)$ (si es posible) para cada una de las siguientes funciones. Si no es posible, establecer la información adicional que se requiere.

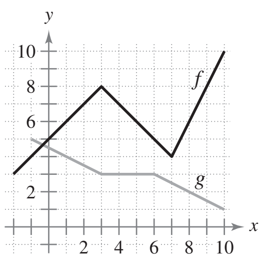
a) $f(x) = g(x)h(x)$ *b)* $f(x) = g(h(x))$

c) $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ *d)* $f(x) = [g(x)]^3$

En los ejercicios 109 y 110 se muestran las gráficas de f y g. Sea $h(x) = f(g(x))$ y $s(x) = g(f(x))$. Calcular las derivadas, si es que existen. Si las derivadas no existen, explicar por qué.

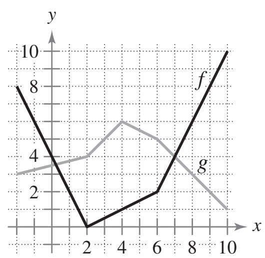
109. *a)* Encontrar $h'(1)$

b) Encontrar $s'(5)$



110. *a)* Encontrar $h'(3)$

b) Encontrar $s'(9)$

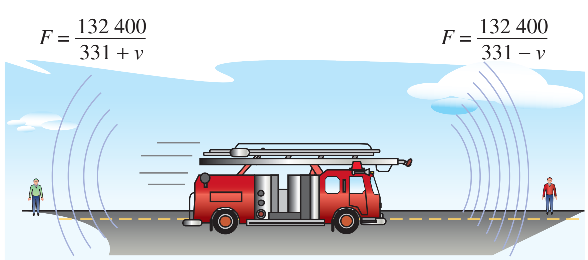


111. ***Efecto Doppler*** La frecuencia F de la sirena de un carro de bomberos oída por un observador en reposo está dada por

$$F = \frac{132\,400}{331 \pm v}$$

donde $\pm v$ representa la velocidad del carro de bomberos (observar la figura). Calcular la razón de cambio de F respecto de v cuando

a) el carro se acerca a una velocidad de 30 m/s (usar $-v$).
b) el carro se aleja a una velocidad de 30 m/s (usar $+v$).



112. ***Movimiento armónico*** El desplazamiento de su posición de equilibrio para un objeto en movimiento armónico situado al extremo de un muelle es

$$y = \tfrac{1}{3}\cos 12t - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 12t$$

donde y se mide en pies y t en segundos. Determinar la posición y la velocidad del objeto cuando $t = \pi/8$.

113. ***Péndulo*** Un péndulo de 15 cm se mueve según la ecuación $\theta = 0.2\cos 8t$, donde θ es el desplazamiento angular de la vertical en radianes y t es el tiempo en segundos. Calcular el máximo desplazamiento angular y la razón de cambio de θ cuando $t = 3$ segundos.

114. ***Movimiento ondulatorio*** Una boya oscila con movimiento armónico simple dado por $y = A\cos \omega t$, mientras las olas pasan por ella. La boya se mueve verticalmente, desde el punto más bajo hasta el más alto, un total de 3.5 pies. Cada 10 segundos regresa a su punto de máxima altura.

a) Escribir una ecuación que explique el movimiento de esa boya si está en su máxima altura cuando $t = 0$.
b) Calcular la velocidad de la boya en función de t.

115. ***Sistema circulatorio*** La velocidad S de la sangre que está a r cm del centro en una arteria está dada por

$$S = C(R^2 - r^2)$$

donde C es una constante, R es el radio de la arteria y S se mide en cm/s. Suponer que se administra un fármaco y la arteria empieza a dilatarse a un ritmo dR/dt. A una distancia constante r, encontrar el ritmo de cambio de S con respecto a t para $C = 1.76 \times 10^5$, $R = 1.2 \times 10^{-2}$ y $dR/dt = 10^{-5}$.

116. ***Modelado matemático*** En la siguiente tabla se muestra la temperatura máxima promedio (en grados Fahrenheit) correspondiente a la ciudad de Chicago, Illinois. *(Fuente: National Oceanic and Atmospheric Administration)*

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Temperatura	29.6	34.7	46.1	58.0	69.9	79.2

Mes	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Temperatura	83.5	81.2	73.9	62.1	47.1	34.4

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar los datos y encontrar un modelo para esos datos con la forma

$$T(t) = a + b\operatorname{sen}(ct - d)$$

donde T es la temperatura y t el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiente al mes de enero.
b) Representar el modelo en la herramienta de graficación. ¿Ajusta bien a los datos?
c) Encontrar T' y utilizar la herramienta de graficación para representar la derivada.
d) Con base en la gráfica de la derivada, ¿cuándo cambia la temperatura de manera más rápida? ¿Y más lenta? ¿Coinciden las respuestas con las observaciones experimentales? Explicar la respuesta.

117. ***Modelado matemático*** El costo de producción de x unidades de un artículo es $C = 60x + 1\,350$. Durante una semana, la gerencia observó el número de unidades producidas a lo largo de t horas en un turno de 8 horas. En la tabla se muestran los valores promedio de x para una semana.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x	0	16	60	130	205	271	336	384	392

a) Utilizar una herramienta de graficación para ajustar un modelo cúbico para los datos.

b) Usar la regla de la cadena para encontrar dC/dt.

c) Explicar por qué la función de costo no se incrementa con un ritmo constante durante el turno de 8 horas.

118. ***Búsqueda de un patrón*** Sea $f(x) = \operatorname{sen} \beta x$, donde β es una constante.

a) Calcular las cuatro primeras derivadas de la función.

b) Verificar que la función y su segunda derivada satisfacen la ecuación $f''(x) + \beta^2 f(x) = 0$.

c) Utilizar los resultados del apartado *a*) para desarrollar fórmulas generales para las derivadas de orden par e impar.

$f^{(2k)}(x)$ y $f^{(2k-1)}(x)$.

[*Sugerencia:* $(-1)^k$ es positivo si k es par y negativo si k es impar.]

119. ***Conjetura*** Sea f una función derivable de periodo p.

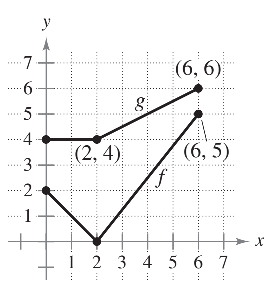
a) La función f' ¿es periódica? Verificar la respuesta.

b) Considerando la función $g(x) = f(2x)$, la función $g'(x)$ ¿es periódica? Verificar la respuesta.

120. ***Para pensar*** Sean $r(x) = f(g(x))$ y $s(x) = g(f(x))$, con f y g tales como muestra la figura adjunta. Calcular

a) $r'(1)$

b) $s'(4)$



121. *a*) Encontrar la derivada de la función $g(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ de dos maneras distintas.

b) Para $f(x) = \sec^2 x$ y $g(x) = \tan^2 x$, demostrar que $f'(x) = g'(x)$.

122. *a*) Demostrar que la derivada de una función impar es par. Esto es, si $f(-x) = -f(x)$, entonces $f'(-x) = f'(x)$.

b) Demostrar que la derivada de una función par es impar. Es decir, si $f(-x) = f(x)$, entonces $f'(-x) = -f'(x)$.

123. Sea u una función derivable de x. Considerar que $|u| = \sqrt{u^2}$ para demostrar que

$$\frac{d}{dx}[|u|] = u'\frac{u}{|u|}, \quad u \neq 0.$$

En los ejercicios 124 a 127, utilizar el resultado del ejercicio 123 para encontrar la derivada de la función.

124. $g(x) = |3x - 5|$

125. $f(x) = |x^2 - 9|$

126. $h(x) = |x| \cos x$

127. $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

Aproximaciones lineal y cuadrática **Las aproximaciones lineal y cuadrática de una función f en $x = a$ son**

$$P_1(x) = f'(a)(x - a) + f(a) \text{ y}$$
$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + f'(a)(x - a) + f(a).$$

En los ejercicios 128 y 129 *a*) calcular las aproximaciones lineal y cuadrática de f que se especifican, *b*) utilizar una herramienta de graficación para representar f y sus aproximaciones, *c*) determinar cuál de las dos, P_1 o P_2, es mejor aproximación y *d*) establecer cómo varía la precisión a medida que se aleja de $x = a$.

128. $f(x) = \tan x$

$a = \dfrac{\pi}{4}$

129. $f(x) = \sec x$

$a = \dfrac{\pi}{6}$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 130 a 132, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre que lo es.**

130. Si $y = (1 - x)^{1/2}$, entonces $y' = \frac{1}{2}(1 - x)^{-1/2}$.

131. Si $f(x) = \operatorname{sen}^2(2x)$, entonces $f'(x) = 2(\operatorname{sen} 2x)(\cos 2x)$.

132. Si y es una función derivable de u, u es una función derivable de v y v es una función derivable de x, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}.$$

Preparación del examen Putnam

133. Sea $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_n \operatorname{sen} nx$, donde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son números reales y n es un número entero positivo. Dado que $|f(x)| \leq |\operatorname{sen} x|$, para todo x real, demostrar que $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

134. Sea k un número entero positivo fijo. La n-ésima derivada de $\dfrac{1}{x^k - 1}$ tiene la forma

$$\frac{P_n(x)}{(x^k - 1)^{n+1}}$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio. Encontrar $P_n(1)$.

2.5 Derivación implícita

- **Distinguir entre funciones explícitas e implícitas.**
- **Hallar la derivada de una función por derivación implícita.**

Funciones explícitas e implícitas

Hasta este punto, la mayoría de las funciones estudiadas en el texto se enunciaron de **forma explícita**. Por ejemplo, en la ecuación

$$y = 3x^2 - 5 \qquad \text{Forma explícita.}$$

la variable y está escrita explícitamente como función de x. Sin embargo, algunas funciones sólo se enuncian de manera implícita en una ecuación. Así, la función $y = 1/x$ está definida **implícitamente** por la ecuación $xy = 1$. Supongamos que se pide calcular la derivada dy/dx para esta ecuación. Podemos escribir y como función explícita de x, y luego derivar.

Forma implícita	*Forma explícita*	*Derivada*
$xy = 1$	$y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$\dfrac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

Esta estrategia funciona siempre que se pueda despejar y como función de x en la ecuación, de lo contrario, este método no es viable. Por ejemplo, ¿cómo encontrar dy/dx para la ecuación

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2$$

donde resulta muy difícil despejar y como función explícita de x? En tales situaciones se debe usar la llamada **derivación implícita**.

Para comprender esta técnica, es preciso tener en cuenta que la derivación se efectúa *con respecto a* x. Esto quiere decir que cuando se tenga que derivar términos que sólo contienen a x, la derivación será la habitual. Sin embargo, cuando haya que derivar un término donde aparezca y, será necesario aplicar la regla de la cadena, ya que se está suponiendo que y está definida implícitamente como función derivable de x.

> **EXPLORACIÓN**
>
> ***Representación gráfica de una ecuación implícita***
> ¿Cómo se podría utilizar una herramienta de graficación para representar
>
> $$x^2 - 2y^3 + 4y = 2?$$
>
> He aquí dos procedimientos posibles:
>
> ***a)*** Despejar x en la ecuación. Intercambiar los papeles de x y y, y dibujar la gráfica de las dos ecuaciones resultantes. Las gráficas combinadas presentarán una rotación de 90° con respecto a la gráfica de la ecuación original.
>
> ***b)*** Configurar la herramienta de graficación en modo *paramétrico* y representar las ecuaciones
>
> $$x = -\sqrt{2t^3 - 4t + 2}$$
> $$y = t$$
>
> y
>
> $$x = \sqrt{2t^3 - 4t + 2}$$
> $$y = t.$$
>
> A partir de cualquiera de estos métodos, ¿se puede decidir si la gráfica tiene una recta tangente en el punto (0, 1)?
> Explicar el razonamiento.

EJEMPLO 1 Derivación respecto de x

a) $\dfrac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$ — Las variables coinciden: usar la regla simple de las potencias.

Las variables coinciden

b) $\dfrac{d}{dx}[\underbrace{y^3}_{u^n}] = \underbrace{3y^2}_{nu^{n-1}}\underbrace{\dfrac{dy}{dx}}_{u'}$ — Las variables no coinciden: usar la regla de la cadena.

Las variables no coinciden

c) $\dfrac{d}{dx}[x + 3y] = 1 + 3\dfrac{dy}{dx}$ — Regla de la cadena: $\dfrac{d}{dx}[3y] = 3y'$.

d)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[xy^2] &= x\frac{d}{dx}[y^2] + y^2\frac{d}{dx}[x] && \text{Regla del producto.}\\
&= x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(1) && \text{Regla de la cadena.}\\
&= 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

Derivación implícita

Estrategias para la derivación implícita

1. Derivar ambos lados de la ecuación *respecto de* x.
2. Agrupar todos los términos en que aparezca dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.
3. Factorizar dy/dx del lado izquierdo de la ecuación.
4. Despejar dy/dx.

Observar que en el ejemplo 2 la derivación implícita puede producir una expresión para dy/dx en la que aparezcan a la vez x y y.

EJEMPLO 2 Derivación implícita

Encontrar dy/dx dado que $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$.

Solución

1. Derivar los dos miembros de la ecuación respecto de x.

$$\frac{d}{dx}[y^3 + y^2 - 5y - x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$\frac{d}{dx}[y^3] + \frac{d}{dx}[y^2] - \frac{d}{dx}[5y] - \frac{d}{dx}[x^2] = \frac{d}{dx}[-4]$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

2. Agrupar los términos con dy/dx en la parte izquierda y pasar todos los demás al lado derecho.

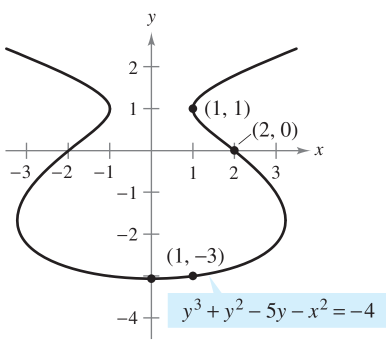
$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} = 2x$$

3. Factorizar dy/dx en la parte izquierda.

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 2y - 5) = 2x$$

4. Despejar dy/dx dividiendo entre $(3y^2 + 2y - 5)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$



Puntos en la gráfica	Pendiente de la gráfica
(2, 0)	$-\frac{4}{5}$
(1, −3)	$\frac{1}{8}$
$x = 0$	0
(1, 1)	No definida

La ecuación implícita

$$y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$$

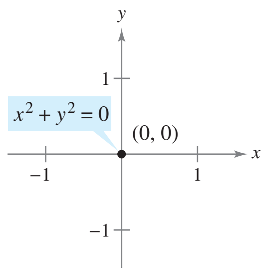
tiene la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

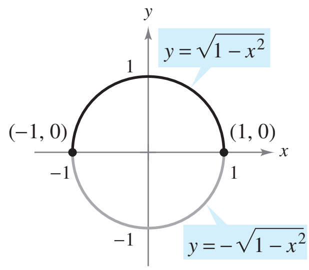
Figura 2.27

Para ver cómo usar la *derivación implícita*, considerar la gráfica de la figura 2.27. En ella se puede observar que y no es una función de x. A pesar de ello, la derivada determinada en el ejemplo 2 proporciona una fórmula para la pendiente de la recta tangente en un punto de esta gráfica. Debajo de la gráfica se muestran las pendientes en varios puntos de la gráfica.

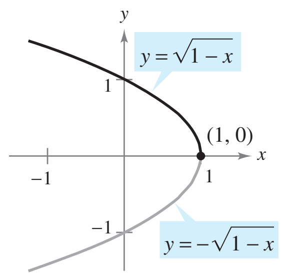
TECNOLOGÍA Con la mayoría de las herramientas de graficación es fácil representar una ecuación que expresa de manera explícita a y en función de x. Por el contrario, representar las gráficas asociadas a otras ecuaciones requiere cierto ingenio. Por ejemplo, tratar de representar la gráfica de la ecuación empleada en el ejemplo 2 configurando la herramienta de graficación en modo *paramétrico*, a fin de elaborar la gráfica de las representaciones paramétricas $x = \sqrt{t^3 + t^2 - 5t + 4}$, $y = t$ y $x = -\sqrt{t^3 + t^2 - 5t + 4}$, $y = t$, para $-5 \le t \le 5$. ¿Cómo se compara el resultado con la gráfica que se muestra en la figura 2.27?



a)



b)



c)

Algunos segmentos de curva pueden representarse por medio de funciones derivables
Figura 2.28

En una ecuación que no tiene puntos solución, por ejemplo, $x^2 + y^2 = -4$, no tiene sentido despejar dy/dx. Sin embargo, si una porción de una gráfica puede representarse mediante una función derivable, dy/dx tendrá sentido como pendiente en cada punto de esa porción. Recordar que una función no es derivable en *a*) los puntos con tangente vertical y *b*) los puntos en los que la función no es continua.

EJEMPLO 3 Representación de una gráfica mediante funciones derivables

Si es posible, representar y como función derivable de x.

a) $x^2 + y^2 = 0$ ***b)*** $x^2 + y^2 = 1$ ***c)*** $x + y^2 = 1$

Solución

a) La gráfica de esta ecuación se compone de un solo punto. Por tanto, no define y como función derivable de x. Ver la figura 2.28*a*.

b) La gráfica de esta ecuación es la circunferencia unidad, centrada en (0, 0). La semicircunferencia superior está dada por la función derivable

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1$$

y la inferior por la función derivable

$$y = -\sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

En los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, la pendiente no está definida. Ver la figura 2.28*b*.

c) La mitad superior de esta parábola está dada por la función derivable

$$y = \sqrt{1 - x}, \quad x < 1$$

y la inferior por la función derivable

$$y = -\sqrt{1 - x}, \quad x < 1.$$

En el punto (1, 0) la pendiente no está definida. Ver la figura 2.28*c*.

EJEMPLO 4 Cálculo de la pendiente de una gráfica implícita

Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

en el punto $\left(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$. Ver la figura 2.29.

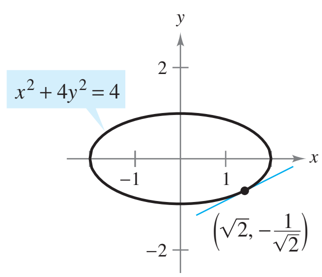


Figura 2.29

Solución

$$x^2 + 4y^2 = 4 \qquad \text{Ecuación original.}$$

$$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{Derivar respecto de } x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y} = \frac{-x}{4y} \qquad \text{Despejar términos con } \frac{dy}{dx}.$$

Por tanto, en $\left(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$, la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{2}}{-4/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \qquad \text{Evaluar } \frac{dy}{dx} \text{ cuando } x = \sqrt{2}, \text{ y } y = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

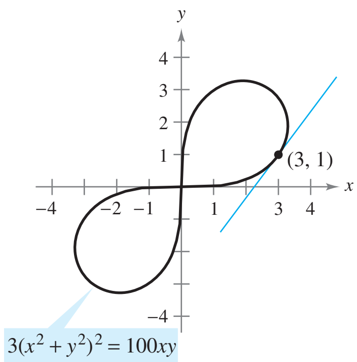
NOTA Para observar las ventajas de la derivación implícita, intentar rehacer el ejemplo 4 manejando la función explícita $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$.

EJEMPLO 5 Cálculo de la pendiente de una gráfica implícita

Calcular la pendiente de la gráfica de $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$ en el punto (3, 1).

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[3(x^2 + y^2)^2] &= \frac{d}{dx}[100xy] \\
3(2)(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) &= 100\left[x\frac{dy}{dx} + y(1)\right] \\
12y(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} - 100x\frac{dy}{dx} &= 100y - 12x(x^2 + y^2) \\
[12y(x^2 + y^2) - 100x]\frac{dy}{dx} &= 100y - 12x(x^2 + y^2) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{100y - 12x(x^2 + y^2)}{-100x + 12y(x^2 + y^2)} \\
&= \frac{25y - 3x(x^2 + y^2)}{-25x + 3y(x^2 + y^2)}
\end{aligned}$$



Lemniscata
Figura 2.30

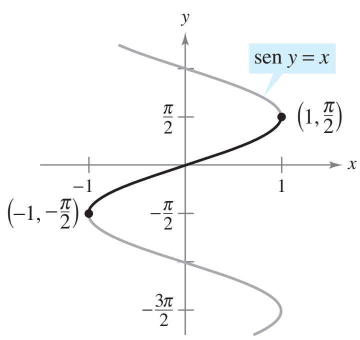
En el punto (3, 1), la pendiente de la gráfica es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25(1) - 3(3)(3^2 + 1^2)}{-25(3) + 3(1)(3^2 + 1^2)} = \frac{25 - 90}{-75 + 30} = \frac{-65}{-45} = \frac{13}{9}$$

como muestra la figura 2.30. Esta gráfica se denomina **lemniscata**.

EJEMPLO 6 Determinación de una función derivable

Encontrar dy/dx implícitamente para la ecuación sen $y = x$. A continuación, determinar el mayor intervalo de la forma $-a < y < a$ en el que y es una función derivable de x (ver la figura 2.31).



La derivada es $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
Figura 2.31

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} y] &= \frac{d}{dx}[x] \\
\cos y\frac{dy}{dx} &= 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y}
\end{aligned}$$

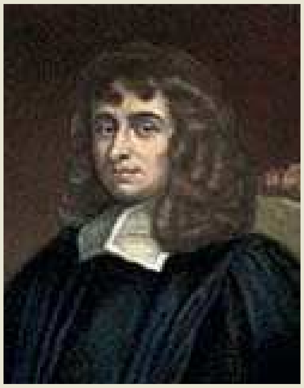
El intervalo más grande cercano al origen en el que y es derivable respecto de x es $-\pi/2 < y < \pi/2$. Para verlo, observar que cos y es positivo en ese intervalo y 0 en sus extremos. Si se restringe a ese intervalo, es posible escribir dy/dx explícitamente como función de x. Para ello, usar

$$\begin{aligned}
\cos y &= \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} \\
&= \sqrt{1 - x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

y concluir que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Este ejemplo se estudia más adelante cuando se definen las funciones trigonométricas inversas en la sección 5.6.



The Granger Collection

Isaac Barrow (1630-1677)
La gráfica de la figura 2.32 se conoce como la **curva kappa** debido a su semejanza con la letra griega kappa, κ. La solución general para la recta tangente a esta curva fue descubierta por el matemático inglés Isaac Barrow. Newton fue su alumno y con frecuencia intercambiaron correspondencia relacionada con su trabajo en el entonces incipiente desarrollo del cálculo.

Al usar la derivación implícita, con frecuencia es posible simplificar la forma de la derivada (como en el ejemplo 6) utilizando de manera apropiada la ecuación *original*. Se puede emplear una técnica semejante para encontrar y simplificar las derivadas de orden superior obtenidas de forma implícita.

EJEMPLO 7 Cálculo implícito de la segunda derivada

Dada $x^2 + y^2 = 25$, encontrar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Evaluar la primera y segunda derivadas en el punto $(-3, 4)$.

Solución Derivando ambos términos respecto de x se obtiene

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

En $(-3, 4)$: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(-3)}{4} = \dfrac{3}{4}$.

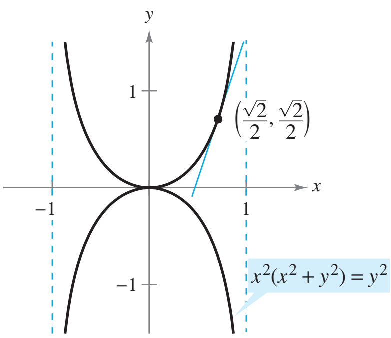
Derivando otra vez respecto de x vemos que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(y)(1) - (x)(dy/dx)}{y^2} \qquad \text{Regla del cociente.}$$
$$= -\frac{y - (x)(-x/y)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3}.$$

En $(-3, 4)$: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{25}{4^3} = -\dfrac{25}{64}$.

EJEMPLO 8 Recta tangente a una gráfica

Encontrar la recta tangente a la gráfica dada por $x^2(x^2 + y^2) = y^2$ en el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, como muestra la figura 2.32.



La curva kappa
Figura 2.32

Solución Reescribiendo y derivando implícitamente, resulta

$$x^4 + x^2y^2 - y^2 = 0$$
$$4x^3 + x^2\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + 2xy^2 - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2y(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} = -2x(2x^2 + y^2)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2x^2 + y^2)}{y(1 - x^2)}.$$

En el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{2}/2)[2(1/2) + (1/2)]}{(\sqrt{2}/2)[1 - (1/2)]} = \frac{3/2}{1/2} = 3$$

y la ecuación de la recta tangente en ese punto es

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$y = 3x - \sqrt{2}.$$

2.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 16, encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita.

1. $x^2 + y^2 = 9$
2. $x^2 - y^2 = 25$
3. $x^{1/2} + y^{1/2} = 16$
4. $x^3 + y^3 = 64$
5. $x^3 - xy + y^2 = 7$
6. $x^2y + y^2x = -2$
7. $x^3y^3 - y = x$
8. $\sqrt{xy} = x^2y + 1$
9. $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 = 12$
10. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$
11. $\operatorname{sen} x + 2 \cos 2y = 1$
12. $(\operatorname{sen} \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$
13. $\operatorname{sen} x = x(1 + \tan y)$
14. $\cot y = x - y$
15. $y = \operatorname{sen} xy$
16. $x = \sec \dfrac{1}{y}$

En los ejercicios 17 a 20, *a*) encontrar dos funciones explícitas despejando *y* en términos de *x*, *b*) construir la gráfica de la ecuación y clasificar las partes dadas por las respectivas funciones explícitas, *c*) derivar las funciones explícitas y *d*) encontrar dy/dx y demostrar que el resultado es equivalente al del apartado *c*).

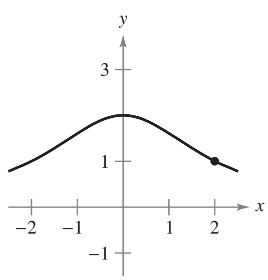
17. $x^2 + y^2 = 64$
18. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
19. $16x^2 + 25y^2 = 400$
20. $16y^2 - x^2 = 16$

En los ejercicios 21 a 28, encontrar dy/dx por medio de la derivación implícita y calcular la derivada en el punto indicado.

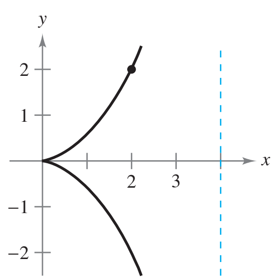
21. $xy = 6, \quad (-6, -1)$
22. $x^2 - y^3 = 0, \quad (1, 1)$
23. $y^2 = \dfrac{x^2 - 49}{x^2 + 49}, \quad (7, 0)$
24. $(x + y)^3 = x^3 + y^3, \quad (-1, 1)$
25. $x^{2/3} + y^{2/3} = 5, \quad (8, 1)$
26. $x^3 + y^3 = 6xy + 1, \quad (2, 3)$
27. $\tan(x + y) = x, \quad (0, 0)$
28. $x \cos y = 1, \quad \left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$

Curvas famosas **En los ejercicios 29 a 32, calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto propuesto.**

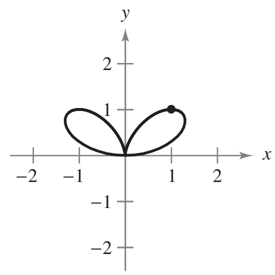
29. Bruja de Agnesi:
$(x^2 + 4)y = 8$
Punto: $(2, 1)$



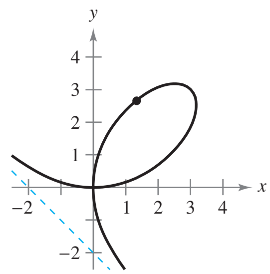
30. Cisoide:
$(4 - x)y^2 = x^3$
Punto: $(2, 2)$



31. Bifolio:
$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$
Punto: $(1, 1)$

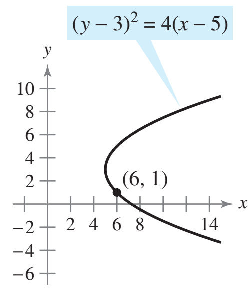


32. Folio de Descartes:
$x^3 + y^3 - 6xy = 0$
Punto: $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

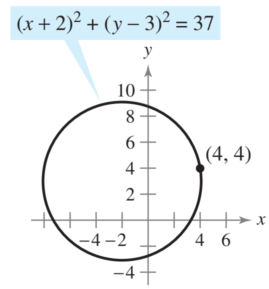


Curvas famosas **En los ejercicios 33 a 40, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado.**

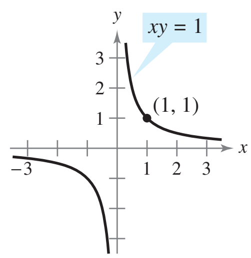
33. Parábola



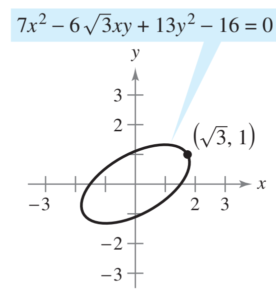
34. Circunferencia



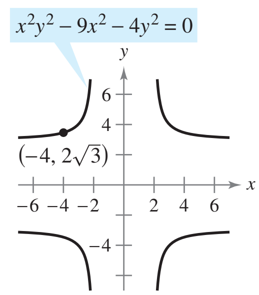
35. Hipérbola rotada



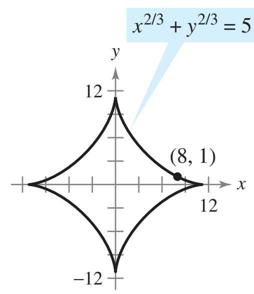
36. Elipse rotada



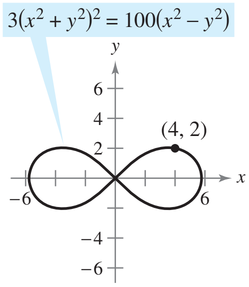
37. Cruciforme



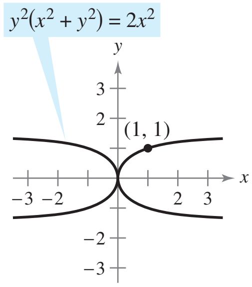
38. Astroide



39. Lemniscata



40. Curva kappa



41. *a*) Utilizar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ en $(1, 2)$.

b) Demostrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$.

42. *a*) Utilizar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{8} = 1$ en $(3, -2)$.

b) Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$.

En los ejercicios 43 y 44, calcular dy/dx de manera implícita y encontrar el mayor intervalo con la forma $-a < y < a$ o $0 < y < a$ tal que y sea una función derivable de x. Expresar dy/dx en función de x.

43. $\tan y = x$ **44.** $\cos y = x$

En los ejercicios 45 a 50, encontrar d^2y/dx^2 en términos de x y y.

45. $x^2 + y^2 = 4$ **46.** $x^2y^2 - 2x = 3$

47. $x^2 - y^2 = 36$ **48.** $1 - xy = x - y$

49. $y^2 = x^3$ **50.** $y^2 = 10x$

En los ejercicios 51 y 52 usar una herramienta de graficación para representar la ecuación. Encontrar la ecuación de la recta tangente en la gráfica obtenida en el punto y la gráfica en la recta tangente.

51. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \quad (9, 4)$ **52.** $y^2 = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}, \quad \left(2, \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

En los ejercicios 53 y 54, encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la circunferencia en el punto indicado (la *recta normal* en un punto es perpendicular a la tangente en ese punto). Utilizar una herramienta de graficación para representar la ecuación, la recta tangente y la normal.

53. $x^2 + y^2 = 25$
$(4, 3), (-3, 4)$

54. $x^2 + y^2 = 36$
$(6, 0), (5, \sqrt{11})$

55. Demostrar que la recta normal a cualquier punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ pasa por el origen.

56. Dos circunferencias de radio 4 son tangentes a la gráfica de $y^2 = 4x$ en el punto $(1, 2)$. Encontrar las ecuaciones de esas dos circunferencias.

En los ejercicios 57 y 58, localizar los puntos en los que la gráfica de la ecuación tiene recta tangente horizontal o vertical.

57. $25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$

58. $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

Trayectorias ortogonales **En los ejercicios 59 a 62, utilizar herramienta de graficación para representar las ecuaciones y probar que en sus intersecciones son ortogonales. (Dos gráficas son *ortogonales* en un punto de intersección si sus rectas tangentes en ese punto son perpendiculares entre sí.)**

59. $2x^2 + y^2 = 6$
$y^2 = 4x$

60. $y^2 = x^3$
$2x^2 + 3y^2 = 5$

61. $x + y = 0$
$x = \operatorname{sen} y$

62. $x^3 = 3(y - 1)$
$x(3y - 29) = 3$

Trayectorias ortogonales **En los ejercicios 63 y 64, verificar que las dos familias de curvas son ortogonales, siendo C y K números reales. Utilizar una herramienta de graficación para representar ambas familias con dos valores de C y dos valores de K.**

63. $xy = C, x^2 - y^2 = K$ **64.** $x^2 + y^2 = C^2, y = Kx$

En los ejercicios 65 a 68, derivar: *a*) respecto a x (y es una función de x) y *b*) respecto a t (x y y son funciones de t).

65. $2x^2 - 3x^4 = 0$ **66.** $x^2 - 3xy^2 + y^3 = 10$

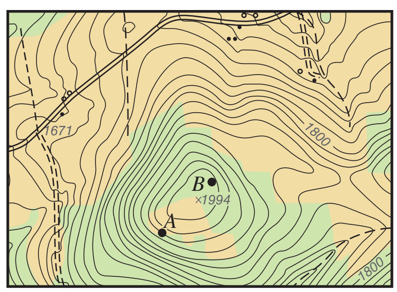
67. $\cos \pi y - 3 \operatorname{sen} \pi x = 1$ **68.** $4 \operatorname{sen} x \cos y = 1$

Desarrollo de conceptos

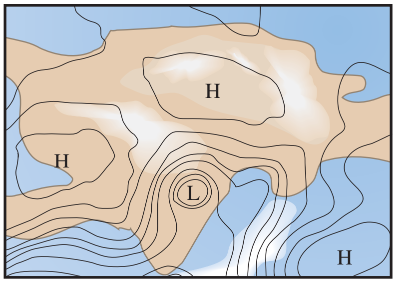
69. Describir la diferencia que existe entre la forma explícita de una ecuación y una ecuación implícita. Elaborar un ejemplo de cada una.

70. Con sus propias palabras, establezca las estrategias a seguir en la derivación implícita.

71. ***Trayectorias ortogonales*** En la siguiente figura se muestra un mapa topográfico realizado por un grupo de excursionistas. Ellos se encuentran en el área boscosa que está en la parte superior de la colina que se muestra en el mapa y deciden seguir la ruta de descenso menos empinada (trayectorias ortogonales a los contornos del mapa). Dibujar la ruta que deben seguir si parten desde el punto A y si lo hacen desde el punto B. Si su objetivo es llegar a la carretera que pasa por la parte superior del mapa, ¿cuál de esos puntos de partida deben utilizar?



72. ***Mapa climático*** El siguiente mapa climático muestra varias curvas *isobáricas* (curvas que representan áreas con presión constante de aire); tres de alta presión H y una de baja presión L. Puesto que la velocidad del viento es mayor a lo largo de las trayectorias ortogonales de las curvas isobáricas, utilizar el mapa para determinar las áreas con mayor velocidad del viento.



73. Considerando la ecuación $x^4 = 4(4x^2 - y^2)$:

a) Utilizar una herramienta de graficación para representarla.

b) Encontrar y representar gráficamente las cuatro rectas tangentes a la curva en $y = 3$.

c) Calcular las coordenadas exactas del punto de intersección de las dos rectas tangentes en el primer cuadrante.

Para discusión

74. Determinar si el enunciado es verdadero. Si es falso, explicar por qué y corregir. Para cada caso, suponer que y es una función de x.

a) $\dfrac{d}{dx}\cos(x^2) = -2x\operatorname{sen}(x^2)$ *b*) $\dfrac{d}{dy}\cos(y^2) = 2y\operatorname{sen}(y^2)$

c) $\dfrac{d}{dx}\cos(y^2) = -2y\operatorname{sen}(y^2)$

75. Sea L una recta tangente a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$. Demostrar que la suma de las intersecciones de L en los ejes x y y es c.

76. Demostrar (teorema 2.3) que:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

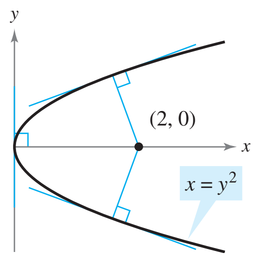
para el caso donde n es un número racional. (*Sugerencia*: Escribir $y = x^{p/q}$ en la forma $y^q = x^p$ y derivar de forma implícita. Suponer que p y q son enteros, con $q > 0$.)

77. ***Pendiente*** Encontrar todos los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 100$ donde la pendiente es igual a $\frac{3}{4}$.

78. ***Tangente horizontal*** Determinar el (los) punto(s) en el (los) que la gráfica de $y^4 = y^2 - x^2$ tiene una tangente horizontal.

79. ***Rectas tangentes*** Encontrar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ que pasa por el punto $(4, 0)$.

80. ***Normales a una parábola*** En la gráfica se mostraron las rectas normales desde el punto $(2, 0)$ a la gráfica de la parábola $x = y^2$. Encontrar cuántas rectas normales existen desde el punto $(x_0, 0)$ a la gráfica de la parábola si *a*) $x_0 = \frac{1}{4}$, *b*) $x_0 = \frac{1}{2}$ y *c*) $x_0 = 1$. ¿Para qué valor de x_0 existen dos rectas normales perpendiculares entre sí?



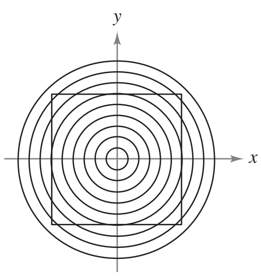
81. ***Rectas normales*** *a*) Encontrar la ecuación de la recta normal a la elipse $\dfrac{x^2}{32} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ en el punto $(4, 2)$. *b*) Utilizar una herramienta de graficación para representar la elipse y la recta normal. *c*) ¿En qué otros puntos interseca esta recta normal a la elipse?

PROYECTO DE TRABAJO

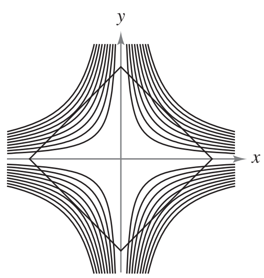
Ilusiones ópticas

En cada una de las siguientes gráficas se genera una ilusión óptica por intersecciones de rectas con una familia de curvas. En todos los casos, las rectas parecen ser curvas. Encontrar el valor de dy/dx para los valores de x y y.

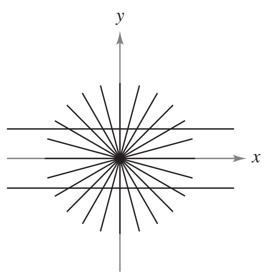
a) Circunferencia: $x^2 + y^2 = C^2$
$x = 3, y = 4, C = 5$



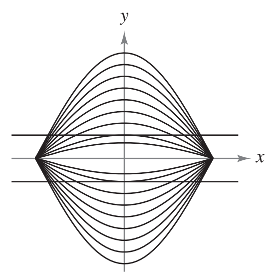
b) Hipérbolas: $xy = C$
$x = 1, y = 4, C = 4$



c) Rectas: $ax = by$
$x = \sqrt{3}, y = 3,$
$a = \sqrt{3}, b = 1$



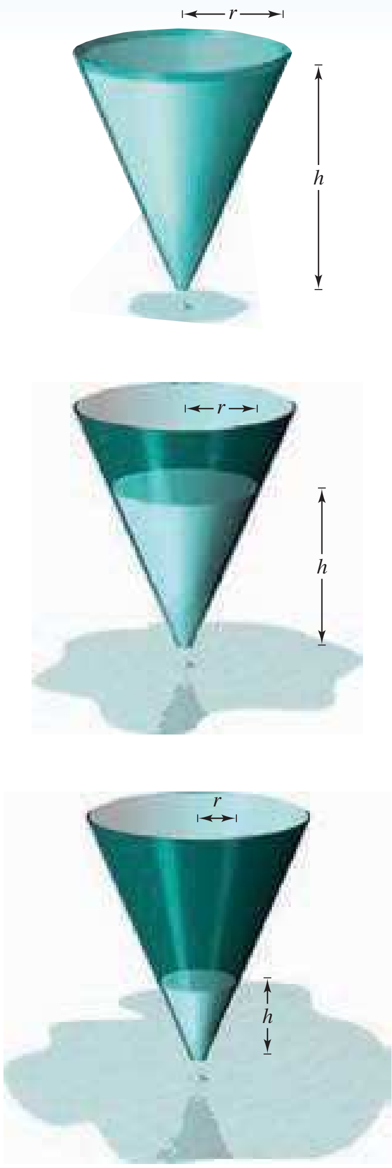
d) Curvas coseno: $y = C\cos x$
$x = \dfrac{\pi}{3}, y = \dfrac{1}{3}, C = \dfrac{2}{3}$



PARA MAYOR INFORMACIÓN Para obtener más información sobre las matemáticas de las ilusiones ópticas, leer el artículo "Descriptive Models for Perception of Optical Illusions", de David A. Smith, en *The UMAP Journal*.

2.6 Razones de cambio relacionadas

- Hallar una razón de cambio relacionada.
- Resolver problemas de la vida real con razones de cambio relacionadas.



El volumen está relacionado con el radio y con la altura
Figura 2.33

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para aprender más sobre la historia de los problemas de razones de cambio relacionadas, ver el artículo "The Lengthening Shadow: The Story of Related Rates", de Bill Austin, Don Barry y David Berman, en *Mathematics Magazine*.

Cálculo de razones de cambio relacionadas

Ya se sabe cómo usar la regla de la cadena para encontrar dy/dx de manera implícita. Otra aplicación relevante de la regla de la cadena consiste en encontrar razones de cambio de dos o más variables relacionadas que están cambiando respecto al *tiempo*.

Por ejemplo, cuando sale agua de un depósito cónico (figura 2.33), el volumen V, el radio r y la altura h del nivel del agua son funciones de t. Sabiendo que estas magnitudes variables se relacionan mediante la ecuación

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \qquad \text{Ecuación original.}$$

se puede derivar implícitamente con respecto a t a fin de obtener la ecuación de **razones de cambio**

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(V) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{3} r^2 h\right)\\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi}{3}\left[r^2\frac{dh}{dt} + h\left(2r\frac{dr}{dt}\right)\right] \qquad \text{Diferenciar con respecto a } t.\\ &= \frac{\pi}{3}\left(r^2\frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}\right).\end{aligned}$$

Para esta ecuación se puede ver que la razón de cambio de V está relacionada con la razón de cambio de h y r.

EXPLORACIÓN

Cálculo de una razón de cambio relacionada Suponer que en el tanque cónico que se muestra en la figura 2.33, la altura está cambiando a un ritmo de -0.2 pies por minuto y el radio lo está haciendo a un ritmo de -0.1 pies por minuto. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen cuando el radio es $r = 1$ pie y la altura es $h = 2$ pies? ¿La razón de cambio del volumen depende de los valores de r y h? Explicar la respuesta.

EJEMPLO 1 Dos razones de cambio relacionadas

Sean x y y dos funciones derivables de t, y relacionadas por la ecuación $y = x^2 + 3$. Calcular dy/dt para $x = 1$, sabiendo que $dx/dt = 2$ para $x = 1$.

Solución Derivar ambos lados *con respecto a t*, utilizando la regla de la cadena.

$$y = x^2 + 3 \qquad \text{Ecuación original.}$$

$$\frac{d}{dt}[y] = \frac{d}{dt}[x^2 + 3] \qquad \text{Derivar con respecto a } t.$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \qquad \text{Regla de la cadena.}$$

Cuando $x = 1$ y $dx/dt = 2$, se tiene

$$\frac{dy}{dt} = 2(1)(2) = 4.$$

Solución de problemas con razones de cambio relacionadas

En el ejemplo 1 se *dio* la ecuación que relaciona las variables x y y, y se pedía hallar el ritmo de cambio de y para $x = 1$.

Ecuación: $y = x^2 + 3$

Ritmo dado: $\dfrac{dx}{dt} = 2$ cuando $x = 1$

Hallar: $\dfrac{dy}{dt}$ cuando $x = 1$

En los ejemplos restantes de esta sección, se debe *crear* un modelo matemático a partir de una descripción verbal.

EJEMPLO 2 Ondas en un lago

El área total se incrementa a medida que lo hace el radio del círculo exterior
Figura 2.34

En un lago en calma se deja caer una piedra, lo que provoca ondas circulares, como se muestra en la figura 2.34. El radio r del círculo exterior está creciendo a una razón constante de 1 pie/s. Cuando el radio es 4 pies, ¿a qué razón está cambiando el área A de la región circular perturbada?

Solución Las variables r y A están relacionadas por $A = \pi r^2$. La razón de cambio del radio r es $dr/dt = 1$.

Ecuación: $A = \pi r^2$

Ritmo dado: $\dfrac{dr}{dt} = 1$

Hallar: $\dfrac{dA}{dt}$ cuando $r = 4$

Con esta información, proceder como en el ejemplo 1.

$$\frac{d}{dt}[A] = \frac{d}{dt}[\pi r^2] \qquad \text{Derivar con respecto a } t.$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \qquad \text{Regla de la cadena.}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(4)(1) = 8\pi \qquad \text{Sustituir 4 por } r \text{ y 1 por } dr/dt.$$

Cuando el radio es de 4 pies, el área cambia a razón de 8π pies^2/s.

Estrategia para la solución de problemas de razones de cambio relacionadas

1. Identificar todas las cantidades *dadas* y *por determinar*. Hacer un esbozo y clasificarlas.
2. Escribir una ecuación que incluya las variables cuyas razones de cambio se encuentran en la información dada o deben calcularse.
3. Utilizando la regla de la cadena, derivar de manera implícita ambos lados de la ecuación con *respecto al tiempo t*.
4. *Después* de terminar el paso 3, sustituir en la ecuación resultante todos los valores conocidos de las variables y sus razones de cambio. Luego se despeja la razón de cambio requerida.

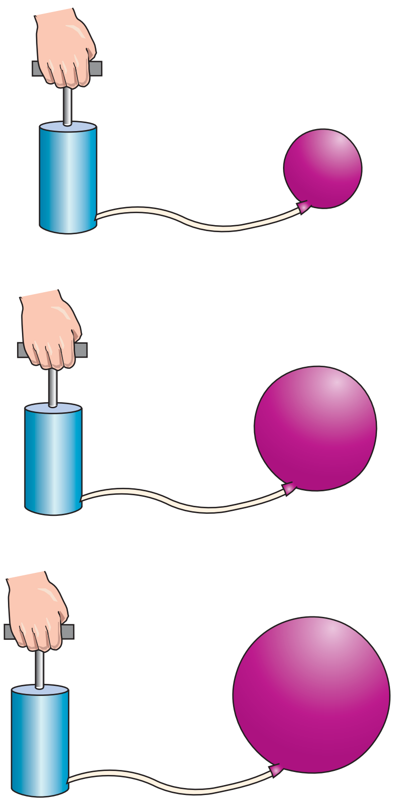
NOTA Al utilizar esta estrategia, hay que cerciorarse de que el paso 4 no se realiza hasta que el paso 3 esté terminado. Sustituir los valores conocidos de las variables antes de derivarlas tendría como resultado final una derivada inapropiada.

La tabla siguiente contiene varios ejemplos de modelos matemáticos que incluyen razones de cambio. Por ejemplo, la razón de cambio del primer ejemplo es la velocidad del automóvil.

Enunciado verbal	Modelo matemático
La velocidad de un automóvil tras una hora de viaje es de 50 millas por hora.	$x =$ distancia recorrida $\frac{dx}{dt} = 50$ cuando $t = 1$
Se introduce agua en una piscina a razón de 10 metros cúbicos por hora.	$V =$ volumen de agua en la piscina $\frac{dV}{dt} = 10 \text{ m}^3/\text{h}$
Una rueda gira a 25 revoluciones por minuto (1 revolución $= 2\pi$ radianes).	$\theta =$ ángulo de giro $\frac{d\theta}{dt} = 25(2\pi)$ rad/min

EJEMPLO 3 Inflado de un globo

Se bombea aire en el interior de un globo esférico (ver la figura 2.35) a razón de 4.5 pies cúbicos por minuto. Calcular la razón de cambio del radio del globo cuando el radio es de 2 pies.


Inflando un globo
Figura 2.35

Solución Sea V el volumen del globo y r su radio. Puesto que el volumen está creciendo a razón de 4.5 pies cúbicos por minuto, se sabe que en el instante t la razón de cambio del volumen es $dV/dt = \frac{9}{2}$. De tal modo que el problema se puede formular de la siguiente manera:

Ritmo dado: $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{9}{2}$ (ritmo constante)

Calcular: $\dfrac{dr}{dt}$ cuando $r = 2$

Para encontrar el ritmo de cambio del radio, encontrar una ecuación que relacione el radio r con el volumen V.

Ecuación: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ Volumen de una esfera.

Derivar ambos lados de la ecuación con respecto a t, para obtener:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad \text{Derivar con respecto a } t.$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{dV}{dt}\right). \quad \text{Despejar } dr/dt.$$

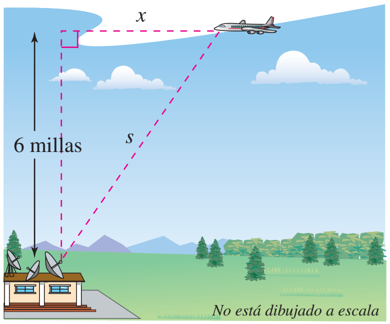
Por último, cuando $r = 2$ la razón de cambio del radio resulta ser

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{9}{2}\right) \approx 0.09 \text{ pies por minuto.}$$

Observar que en el ejemplo 3 el volumen está creciendo a razón *constante*, pero el radio cambia a razón *variable*. El hecho de que dos razones estén relacionados no implica que sean proporcionales. En este caso en particular, el radio crece más y más lentamente con el paso del tiempo. ¿Por qué?

EJEMPLO 4 Velocidad de un avión detectado por radar

Un avión recorre una ruta de vuelo que le llevará directamente sobre una estación de radar, como se muestra en la figura 2.36. Si s está decreciendo a razón de 400 millas por hora cuando $s = 10$ millas, ¿cuál es la velocidad del avión?



Un avión vuela a 6 millas de altura y dista s millas de la estación de radar
Figura 2.36

Solución Sea x la distancia horizontal al radar, como se ilustra en la figura 2.36. Observar que cuando $s = 10$, $x = \sqrt{10^2 - 36} = 8$.

Ritmo dado: $ds/dt = -400$ cuando $s = 10$

Encontrar: dx/dt cuando $s = 10$ y $x = 8$

Encontrar la velocidad del avión de la siguiente manera:

Ecuación:

$$x^2 + 6^2 = s^2 \qquad \text{Teorema de Pitágoras.}$$

$$2x\frac{dx}{dt} = 2s\frac{ds}{dt} \qquad \text{Derivar con respecto a } t.$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{x}\left(\frac{ds}{dt}\right) \qquad \text{Despejar } dx/dt.$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{8}(-400) \qquad \text{Sustituir } s, x \text{ y } ds/dt.$$

$$= -500 \text{ millas por hora} \qquad \text{Simplificar.}$$

Puesto que la velocidad es de -500 millas por hora, la *rapidez* (o "velocidad" en sentido coloquial) es 500 millas/h.

NOTA Observar en el ejemplo 4 que la velocidad es negativa porque x representa una distancia que disminuye.

EJEMPLO 5 Ángulo de elevación variable

Calcular la razón de cambio del ángulo de elevación θ de la cámara que se muestra en la figura 2.37, diez segundos después del despegue.

Solución Sea θ el ángulo de elevación, como se muestra en la figura 2.37. Cuando $t = 10$, la altura s del cohete es $s = 50t^2 = 50(10)^2 = 5\,000$ pies.

Ritmo dado: $ds/dt = 100t =$ velocidad del cohete

Encontrar: $d\theta/dt$ cuando $t = 10$ y $s = 5\,000$

Utilizando la figura 2.37, relacionar s y θ mediante la ecuación $\tan\theta = s/2\,000$.

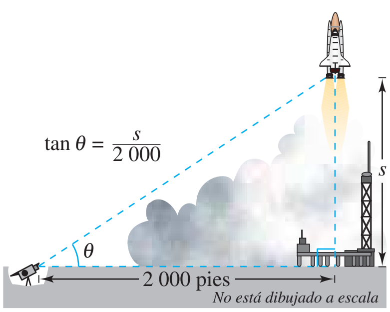
Ecuación:

$$\tan\theta = \frac{s}{2\,000} \qquad \text{Ver la figura 2.37.}$$

$$(\sec^2\theta)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\,000}\left(\frac{ds}{dt}\right) \qquad \text{Derivar con respecto a } t.$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \cos^2\theta\,\frac{100t}{2\,000} \qquad \text{Sustituir } 100t \text{ por } ds/dt.$$

$$= \left(\frac{2\,000}{\sqrt{s^2 + 2\,000^2}}\right)^2 \frac{100t}{2\,000} \qquad \cos\theta = 2\,000/\sqrt{s^2 + 2\,000^2}.$$



Una cámara de televisión, situada a ras del suelo, está filmando el despegue del transbordador espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación de posición $s = 50t^2$, donde s se mide en pies y t en segundos. La cámara está a 2 000 pies de la plataforma de lanzamiento
Figura 2.37

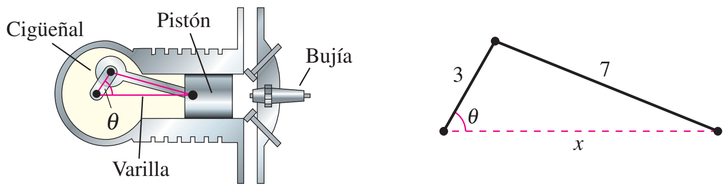
Cuando $t = 10$ y $s = 5\,000$, se tiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\,000(100)(10)}{5\,000^2 + 2\,000^2} = \frac{2}{29} \text{ radianes por segundo.}$$

De tal modo, cuando $t = 10$, θ cambia a razón de $\frac{2}{29}$ radianes por segundo.

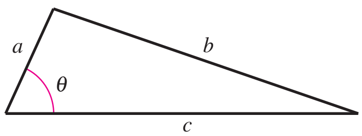
EJEMPLO 6 Velocidad de un pistón

En el motor que se muestra en la figura 2.38, una varilla de 7 pulgadas está conectada a un cigüeñal de 3 pulgadas de radio, que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a 200 revoluciones por minuto. Calcular la velocidad del pistón cuando $\theta = \pi/3$.



La velocidad de un pistón está relacionada con el ángulo del cigüeñal
Figura 2.38

Solución Nombrar las distancias como se muestra en la figura 2.38. Puesto que una revolución completa equivale a 2π radianes, se deduce que $d\theta/dt = 200(2\pi) = 400\pi$ radianes por minuto.



Ley de los cosenos:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta$
Figura 2.39

Ritmo dado: $\dfrac{d\theta}{dt} = 400\pi$ (razón constante)

Encontrar: $\dfrac{dx}{dt}$ cuando $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Usar la ley de los cosenos (figura 2.39) para encontrar una ecuación que relacione a x y a θ.

Ecuación:

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2(3)(x) \cos \theta$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} - 6\left(-x \operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta \frac{dx}{dt}\right)$$

$$(6 \cos \theta - 2x)\frac{dx}{dt} = 6x \operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6x \operatorname{sen} \theta}{6 \cos \theta - 2x}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

Cuando $\theta = \pi/3$, se puede despejar x de la siguiente manera:

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2(3)(x) \cos \frac{\pi}{3}$$

$$49 = 9 + x^2 - 6x\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$0 = x^2 - 3x - 40$$

$$0 = (x - 8)(x + 5)$$

$$x = 8$$

Elegir la solución positiva.

De esta manera, cuando $x = 8$ y $\theta = \pi/3$, la velocidad del pistón es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6(8)\left(\sqrt{3}/2\right)}{6(1/2) - 16}(400\pi)$$

$$= \frac{9\,600\pi\sqrt{3}}{-13}$$

$$\approx -4\,018 \text{ pulgadas por minuto.}$$

NOTA Observar que la velocidad en el ejemplo 6 es negativa porque x representa una distancia que está decreciendo.

2.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, suponer que x y y son funciones derivables de t y encontrar los valores señalados de dy/dt y dx/dt.

	Ecuación		*Encontrar*	*Dado*
1.	$y = \sqrt{x}$	*a*)	$\dfrac{dy}{dt}$ cuando $x = 4$	$\dfrac{dx}{dt} = 3$
		b)	$\dfrac{dx}{dt}$ cuando $x = 25$	$\dfrac{dy}{dt} = 2$
2.	$y = 4(x^2 - 5x)$	*a*)	$\dfrac{dy}{dt}$ cuando $x = 3$	$\dfrac{dx}{dt} = 2$
		b)	$\dfrac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$	$\dfrac{dy}{dt} = 5$
3.	$xy = 4$	*a*)	$\dfrac{dy}{dt}$ cuando $x = 8$	$\dfrac{dx}{dt} = 10$
		b)	$\dfrac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$	$\dfrac{dy}{dt} = -6$
4.	$x^2 + y^2 = 25$	*a*)	$\dfrac{dy}{dt}$ cuando $x = 3, y = 4$	$\dfrac{dx}{dt} = 8$
		b)	$\dfrac{dx}{dt}$ cuando $x = 4, y = 3$	$\dfrac{dy}{dt} = -2$

En los ejercicios 5 a 8, un punto se está moviendo sobre la gráfica de la función, de modo que dx/dt es 2 cm/s. Calcular dy/dt para los valores de x que se indican.

5.	$y = 2x^2 + 1$	*a*) $x = -1$	*b*) $x = 0$	*c*) $x = 1$
6.	$y = \dfrac{1}{1 + x^2}$	*a*) $x = -2$	*b*) $x = 0$	*c*) $x = 2$
7.	$y = \tan x$	*a*) $x = -\dfrac{\pi}{3}$	*b*) $x = -\dfrac{\pi}{4}$	*c*) $x = 0$
8.	$y = \cos x$	*a*) $x = \dfrac{\pi}{6}$	*b*) $x = \dfrac{\pi}{4}$	*c*) $x = \dfrac{\pi}{3}$

Desarrollo de conceptos

9. Considerando la función lineal $y = ax + b$, ¿si x cambia a razón constante, ¿y también lo hace a razón constante? De ser así, ¿lo hace con la misma razón que x? Explicar la respuesta.

10. Con las propias palabras, mencionar la estrategia para resolver problemas de razones de cambio relacionadas.

11. Encontrar la razón de cambio de la distancia entre el origen y un punto que se mueve por la gráfica de $y = x^2 + 1$, si $dx/dt = 2$ cm/s.

12. Encontrar la razón de cambio de la distancia entre el origen y un punto que se mueve sobre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, si $dx/dt = 2$ cm/s.

13. ***Área*** El radio r de un círculo está creciendo a razón de 4 centímetros por minuto. Calcular la razón de cambio del área cuando *a*) $r = 8$ cm y *b*) $r = 32$ cm.

14. ***Área*** Sea A el área de un círculo con un radio r variable con el tiempo. Si dr/dt es constante, ¿es constante dA/dt? Explicar la respuesta.

15. ***Área*** El ángulo entre los dos lados iguales, con longitud s, de un triángulo isósceles es θ.

a) Demostrar que el área del triángulo se obtiene mediante $A = \frac{1}{2}s^2 \operatorname{sen} \theta$.

b) Si θ está creciendo a razón de $\frac{1}{2}$ radián por minuto, encontrar la razón de cambio del área cuando $\theta = \pi/6$ y $\theta = \pi/3$.

c) Explicar por qué la razón de cambio del área del triángulo no es constante, a pesar de que $d\theta/dt$ es constante.

16. ***Volumen*** El radio r de una esfera está creciendo a razón de 3 pulgadas por minuto.

a) Calcular la razón de cambio del volumen cuando $r = 9$ y $r = 36$ pulgadas.

b) Explicar por qué la razón de cambio del volumen de la esfera no es constante, a pesar de que dr/dt es constante.

17. ***Volumen*** Se infla un globo esférico con gas a razón de 800 centímetros cúbicos por minuto. ¿A qué razón está aumentando su radio en el momento en el que éste está a *a*) 30 centímetros y *b*) 60 centímetros?

18. ***Volumen*** Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 6 centímetros por segundo. ¿A qué ritmo está aumentando el volumen cuando cada arista mide *a*) 2 cm y *b*) 10 cm?

19. ***Superficie*** Bajo las condiciones del problema anterior, determinar la razón a la que cambia el *área de la superficie* cuando cada arista mide *a*) 2 cm y *b*) 10 cm.

20. ***Volumen*** La fórmula para calcular el volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Encontrar el ritmo de cambio del volumen si dr/dt es de 2 pulgadas por minuto y $h = 3r$, cuando *a*) $r = 6$ pulgadas y *b*) $r = 24$ pulgadas.

21. ***Volumen*** En una planta de arena y grava, la arena cae de una cinta transportadora creando un montículo de forma cónica, a razón de 10 pies cúbicos por minuto. El diámetro de la base del montículo es de aproximadamente tres veces la altura. ¿A qué razón cambia la altura del montón cuando su altura es 15 pies?

22. ***Profundidad*** Un depósito cónico (con el vértice abajo) mide 10 pies de ancho en su parte más alta y tiene 12 pies de profundidad. Si se le vierte agua a razón de 10 pies^3 por minuto, calcular la razón de cambio de la profundidad del agua cuando ésta es de 8 pies.

23. ***Profundidad*** Una piscina tiene 12 metros de largo, 6 de ancho y una profundidad que oscila desde 1 hasta 3 m (ver la figura). Se bombea agua en ella a razón de $\frac{1}{4}$ de metro cúbico por minuto y ya hay 1 m de agua en el extremo más profundo.

a) ¿Qué porcentaje de la piscina está lleno?

b) ¿A qué razón se eleva el nivel del agua?

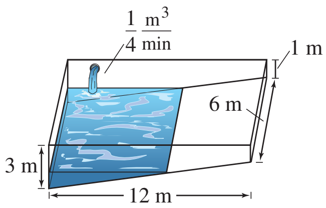


Figura para 23

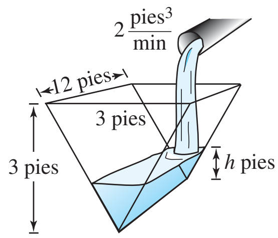


Figura para 24

24. ***Profundidad*** Una artesa tiene 12 pies de largo y 3 de ancho en su parte superior (ver la figura), sus extremos tienen forma de triángulo isósceles con una altura de 3 pies.

a) Si se vierte agua en ella a razón de 2 pies cúbicos por minuto, ¿a qué razón sube el nivel del agua cuando hay 1 pie de profundidad de agua?

b) Si el agua sube a una razón de $\frac{3}{8}$ de pulgada por minuto cuando $h = 2$, determinar una razón al que se está vertiendo agua en la artesa.

25. ***Escalera deslizante*** Una escalera de 25 pies de longitud está apoyada sobre una pared (ver la figura). Su base se desliza por la pared a razón de 2 pies por segundo.

a) ¿A qué razón está bajando su extremo superior por la pared cuando la base está a 7, 15 y 24 pies de la pared?

b) Determinar la razón a la que cambia el área del triángulo formado por la escalera, el suelo y la pared, cuando la base de la primera está a 7 pies de la pared.

c) Calcular la razón de cambio del ángulo formado por la escalera y la pared cuando la base está a 7 pies de la pared.

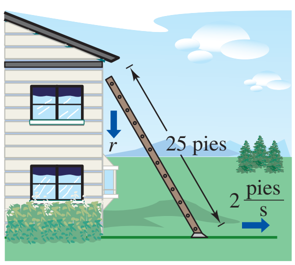


Figura para 25

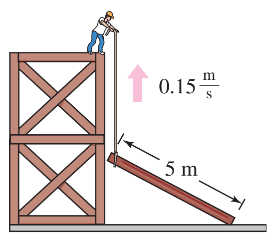


Figura para 26

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para obtener más información sobre las matemáticas relativas a las escaleras deslizantes, ver el artículo "The Falling Ladder Paradox", de Paul Scholten y Andrew Simoson, en *The College Mathematics Journal*.

26. ***Construcción*** Un obrero levanta, con ayuda de una soga, un tablón de cinco metros hasta lo alto de un edificio en construcción (ver la figura). Suponer que el otro extremo del tablón sigue una trayectoria perpendicular a la pared y que el obrero mueve el tablón a razón de 0.15 m/s. ¿A qué ritmo desliza por el suelo el extremo cuando está a 2.5 m de la pared?

27. ***Construcción*** Una polea situada en lo alto de un edificio de 12 metros levanta un tubo de la misma longitud hasta colocarlo en posición vertical, como se muestra en la figura. La polea recoge la cuerda a razón de -0.2 m/s. Calcular las razones de cambio vertical y horizontal del extremo del tubo cuando $y = 6$.

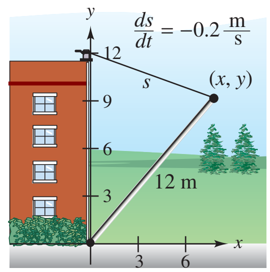


Figura para 27

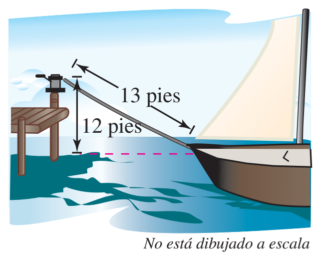


Figura para 28

28. ***Navegación*** Un velero es arrastrado hacia el muelle por medio de una polea situada a una altura de 12 pies por encima de la quilla del barco (ver la figura).

a) Si la cuerda se recoge a razón de 4 pies por segundo, determinar la velocidad del velero cuando quedan 13 pies de cuerda sin recoger. ¿Qué ocurre con la velocidad del velero a medida que el barco se acerca más al muelle?

b) Suponiendo que el bote se mueve a un ritmo constante de 4 pies por segundo, determinar la velocidad a la que la polea recoge la cuerda cuando quedan 13 pies de ella por recoger. ¿Qué ocurre con la velocidad de la polea a medida que el barco se acerca más al muelle?

29. ***Control de tráfico aéreo*** Un controlador detecta que dos aviones que vuelan a la misma altura tienen trayectorias perpendiculares y convergen en un punto (ver la figura). Uno de ellos está a 225 millas de dicho punto y vuela a 450 millas por hora. El otro está a 300 millas y se desplaza a 600 millas/h.

a) ¿A qué ritmo se reduce la distancia entre ellos?

b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para modificar la ruta de alguno de ellos?

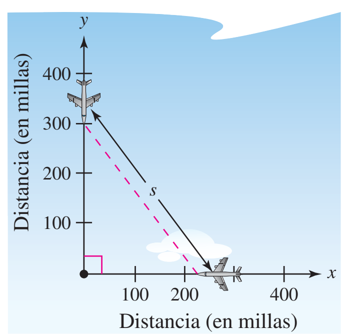


Figura para 29

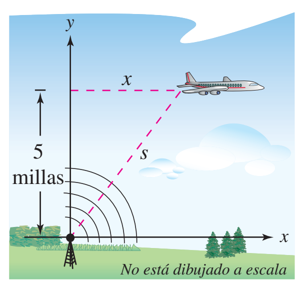


Figura para 30

30. ***Control de tráfico aéreo*** Un avión vuela a 5 millas de altura y pasa exactamente por encima de una antena de radar (ver la figura). Cuando el avión está a 10 millas ($s = 10$), el radar detecta que la distancia s está cambiando a una velocidad de 240 millas/h. ¿Cuál es la velocidad del avión?

31. ***Deportes*** Un campo de beisbol tiene forma de un cuadrado con lados de 90 pies (ver la figura). Si un jugador corre de segunda a tercera a 25 pies por segundo y se encuentra a 20 pies de la tercera base, ¿a qué ritmo está cambiando su distancia s respecto a *home*?

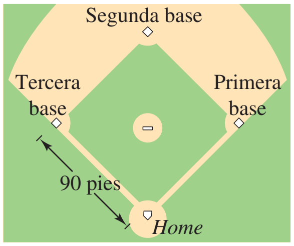


Figura para 31 y 32

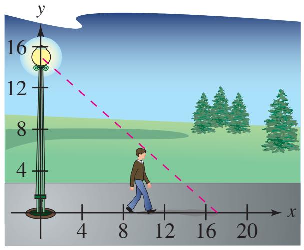


Figura para 33

32. ***Deportes*** En el campo de beisbol del ejercicio anterior, suponer que el jugador corre desde primera hasta segunda base a 25 pies por segundo. Calcular la razón de cambio de su distancia con respecto a *home* cuando se encuentra a 20 pies de la segunda base.

33. ***Longitud de una sombra*** Un hombre de 6 pies de altura camina a 5 pies por segundo alejándose de una luz que está a 15 pies de altura sobre el suelo (ver la figura). Cuando este hombre está a 10 pies de la base de la luz:
   a) ¿a qué velocidad se mueve el extremo de su sombra?
   b) ¿a qué razón está cambiando la longitud de su sombra?

34. ***Longitud de una sombra*** Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que el hombre camina *hacia* la luz y que ésta se encuentra situada a 20 pies de altura (ver la figura).

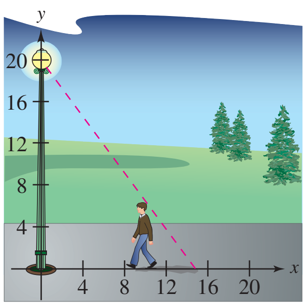


Figura para 34

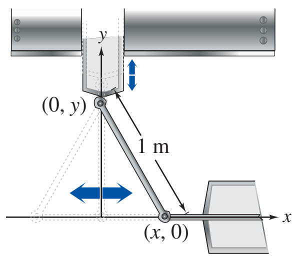


Figura para 35

35. ***Diseño de máquinas*** Los extremos de una varilla móvil de 1 m de longitud tienen coordenadas $(x, 0)$ y $(0, y)$ (ver la figura). La posición del extremo que se apoya en el eje x es

$$x(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{6}$$

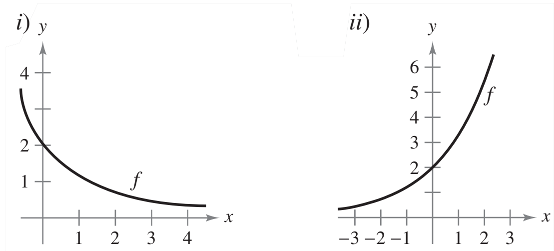
donde t se mide en segundos.
   a) Calcular la duración de un ciclo completo de la varilla.
   b) ¿Cuál es el punto más bajo que alcanza el extremo de la varilla que está en el eje y?
   c) Encontrar la velocidad del extremo que se mueve por el eje y cuando el otro está en $(\frac{1}{4}, 0)$.

36. ***Diseño de máquinas*** Repetir el ejercicio anterior para una función de posición $x(t) = \frac{3}{5} \operatorname{sen} \pi t$. Utilizar el punto $(\frac{3}{10}, 0)$ para el apartado *c*).

37. ***Evaporación*** Al caer, una gota esférica alcanza una capa de aire seco y comienza a evaporarse a un ritmo proporcional a su área superficial ($S = 4\pi r^2$). Demostrar que el radio de la gota decrece a ritmo constante.

Para discusión

38. Utilizando la gráfica de f, *a*) determinar si dy/dt es positiva o negativa dado que dx/dt es negativa y *b*) determinar si dx/dt es positiva o negativa dado que dy/dt es positiva.



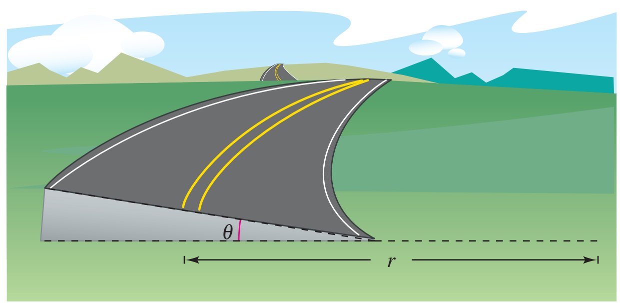
39. ***Electricidad*** La resistencia eléctrica combinada R de R_1 y R_2, conectadas en paralelo, es dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

donde R, R_1 y R_2 se miden en ohmios. R_1 y R_2 están creciendo a razón de 1 y 1.5 ohmios por segundo, respectivamente. ¿A qué ritmo está cambiando R cuando $R_1 = 50$ y $R_2 = 75$ ohmios?

40. ***Expansión adiabática*** Cuando cierto gas poliatómico sufre una expansión adiabática, su presión p y su volumen V satisfacen la ecuación $pV^{1.3} = k$, donde k es una constante. Encontrar la relación que existe entre las razones dp/dt y dV/dt.

41. ***Diseño de autopistas*** En cierta autopista, la trayectoria de los automóviles es un arco circular de radio r. Con el fin de no depender totalmente de la fricción para compensar la fuerza centrífuga, se construye un peralte con un ángulo de inclinación θ sobre la horizontal (ver la figura). Este ángulo satisface la ecuación $rg \tan \theta = v^2$, donde v es la velocidad de los automóviles y $g = 32$ pies por segundo al cuadrado es la aceleración de la gravedad. Encontrar la relación que existe entre las razones de cambio relacionadas dv/dt y $d\theta/dt$.



42. ***Ángulo de elevación*** Un globo asciende a 4 metros por segundo desde un punto del suelo a 50 m de un observador. Calcular la razón de cambio del ángulo de elevación del globo cuando está a 50 metros de altura.

43. ***Ángulo de elevación*** El pescador de la figura recoge sedal para capturar su pieza a razón de 1 pie por segundo, desde un punto que está a 10 pies por encima del agua (ver la figura). ¿A qué ritmo cambia el ángulo θ entre el sedal y el agua cuando quedan por recoger 25 pies de sedal?

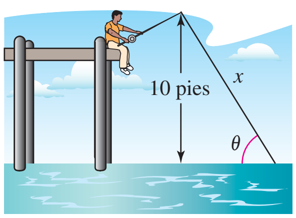


Figura para 43

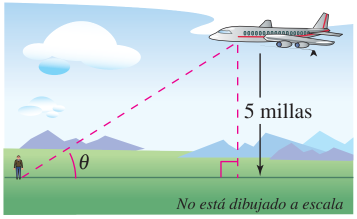


Figura para 44

44. ***Ángulo de elevación*** Un avión vuela a 5 millas de altitud y a una velocidad de 600 millas por hora, hacia un punto situado exactamente en la vertical de un observador (ver la figura). ¿A qué ritmo está cambiando el ángulo de elevación θ cuando el ángulo es *a*) $\theta = 30°$, *b*) $\theta = 60°$ y *c*) $\theta = 75°$?

45. ***Velocidad lineal y velocidad angular*** La patrulla de la figura está estacionada a 50 pies de un largo almacén. La luz de su torreta gira a 30 revoluciones por minuto. ¿A qué velocidad se está moviendo la luz a lo largo del muro cuando el haz forma ángulos de *a*) $\theta = 30°$, *b*) $\theta = 60°$ y *c*) $\theta = 70°$?

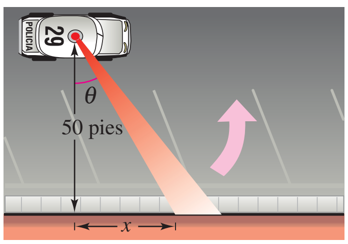


Figura para 45

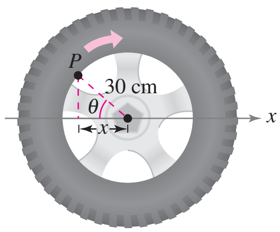


Figura para 46

46. ***Velocidad lineal y velocidad angular*** Una rueda de 30 cm de radio gira a razón de 10 vueltas por segundo. Se pinta un punto P en su borde (ver la figura).

a) Encontrar dx/dt como función de θ.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función del apartado *a*).

c) ¿Cuándo es mayor el valor absoluto del ritmo de cambio de x?, ¿y el menor?

d) Calcular dx/dt cuando $\theta = 30°$ y $\theta = 60°$.

47. ***Control de vuelo*** Un avión vuela en condiciones de aire en calma a una velocidad de 275 millas por hora. Si asciende con un ángulo de 18°, calcular el ritmo al que está ganando altura.

48. ***Cámara de vigilancia*** Una cámara de vigilancia está a 50 pies de altura sobre un vestíbulo de 100 pies de largo (ver la figura). Es más fácil diseñar la cámara con una velocidad de rotación constante, pero en tal caso toma las imágenes del vestíbulo a velocidad variable. En consecuencia, es deseable diseñar un sistema con velocidad angular variable de modo tal que la velocidad de la toma a lo largo del vestíbulo sea constante. Encontrar un modelo para la velocidad variable de rotación adecuado si $|dx/dt| = 2$ pies por segundo.

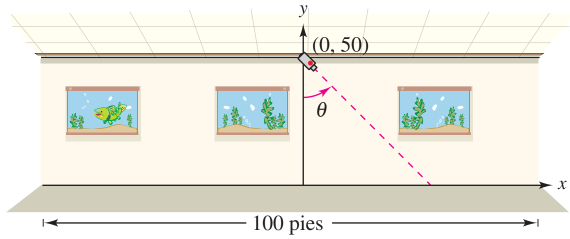


Figura para 48

49. ***Para pensar*** Describir la relación que existe entre la razón de cambio de y y el de x en los casos siguientes. Suponer que todas las variables y derivadas son positivas.

a) $\dfrac{dy}{dt} = 3\dfrac{dx}{dt}$ *b*) $\dfrac{dy}{dt} = x(L - x)\dfrac{dx}{dt}, \quad 0 \le x \le L$

Aceleración **En los ejercicios 50 y 51, calcular la aceleración del objeto especificado. (*Sugerencia:* Recordar que si una variable cambia a velocidad constante, su aceleración es nula.)**

50. Calcular la aceleración del extremo superior de la escalera del ejercicio 25 cuando su base está a 7 pies de la pared.

51. Calcular la aceleración del velero del ejercicio 28*a* cuando faltan por recoger 13 pies de cuerda.

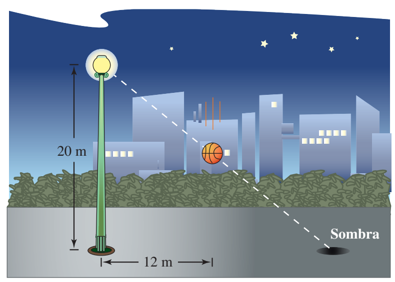
52. ***Modelo matemático*** La siguiente tabla muestra el número de mujeres solteras s (nunca casadas) y casadas m (en millones) en el mundo laboral estadounidense desde 1997 hasta 2005. (*Fuente*: *U.S. Bureau of Labor Statistics*)

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
s	16.5	17.1	17.6	17.8	18.0	18.2	18.4	18.6	19.2
m	33.8	33.9	34.4	35.1	35.2	35.5	36.0	35.8	35.9

a) Utilizar las funciones de regresión de su herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $m(s) = as^3 + bs^2 + cs + d$ para esos datos, donde t es el tiempo en años, siendo $t = 7$ el año 1997.

b) Encontrar dm/dt. Después utilizar ese modelo para estimar dm/dt para $t = 10$, si se supone que el número de mujeres solteras s que forman parte de la fuerza de trabajo va a crecer a razón de 0.75 millones al año.

53. ***Sombra en movimiento*** Se deja caer una pelota desde una altura de 20 m, a una distancia de 12 m de una lámpara (ver la figura). La sombra de la pelota se mueve a lo largo del suelo. ¿A qué ritmo se está moviendo la sombra 1 segundo después de soltar la pelota? (*Enviado por Dennis Gittinger, St. Philips College, San Antonio, TX*)



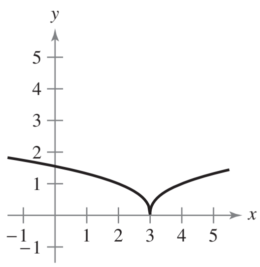
2 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 a 4, encontrar la derivada de la función usando la propia definición de derivada.

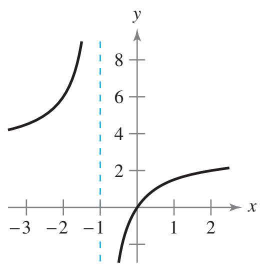
1. $f(x) = x^2 - 4x + 5$
2. $f(x) = \sqrt{x} + 1$
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{6}{x}$

En los ejercicios 5 y 6, buscar los valores de x en los que f es derivable.

5. $f(x) = (x-3)^{2/5}$



6. . $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$



7. Construir la gráfica de $f(x) = 4 - |x - 2|$.
   a) ¿f es continua en $x = 2$?
   b) ¿f es derivable en $x = 2$? Explicar la respuesta.

8. Construir la gráfica de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2, & x < -2 \\ 1 - 4x - x^2, & x \geq -2. \end{cases}$
   a) ¿f es continua en $x = -2$?
   b) ¿f es derivable en $x = -2$? Explicar la respuesta.

En los ejercicios 9 y 10, encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

9. $g(x) = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{x}{6}, \quad \left(-1, \dfrac{5}{6}\right)$
10. $h(x) = \dfrac{3x}{8} - 2x^2, \quad \left(-2, -\dfrac{35}{4}\right)$

En los ejercicios 11 y 12, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto dado, *b*) utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su tangente en el punto y *c*) usar la función *derivative* de una herramienta de graficación para confirmar sus resultados.

11. $f(x) = x^3 - 1, \quad (-1, -2)$
12. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}, \quad (0, 2)$

En los ejercicios 13 y 14, utilizar la forma alternativa de la derivada para calcular la derivada en $x = c$ (si existe).

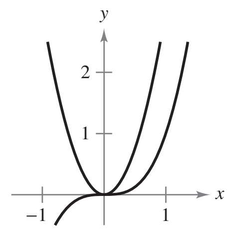
13. $g(x) = x^2(x-1), \quad c = 2$
14. $f(x) = \dfrac{1}{x+4}, \quad c = 3$

En los ejercicios 15 a 30, usar las reglas de derivación para encontrar la derivada de la función.

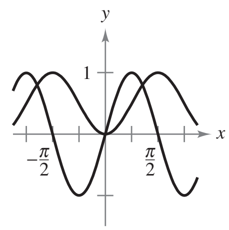
15. $y = 25$
16. $y = -30$
17. $f(x) = x^8$
18. $g(x) = x^{20}$
19. $h(t) = 13t^4$
20. $f(t) = -8t^5$
21. $f(x) = x^3 - 11x^2$
22. $g(s) = 4s^4 - 5s^2$
23. $h(x) = 6\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$
24. $f(x) = x^{1/2} - x^{-1/2}$
25. $g(t) = \dfrac{2}{3t^2}$
26. $h(x) = \dfrac{10}{(7x)^2}$
27. $f(\theta) = 4\theta - 5 \operatorname{sen} \theta$
28. $g(\alpha) = 4 \cos \alpha + 6$
29. $f(\theta) = 3 \cos \theta - \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{4}$
30. $g(\alpha) = \dfrac{5 \operatorname{sen} \alpha}{3} - 2\alpha$

Redacción **En los ejercicios 31 y 32, en la figura se muestran las gráficas de una función y su derivada. Nombrar las gráficas como f y f' y escribir un pequeño párrafo estableciendo los criterios utilizados al hacer la selección.**

31.



32.



33. ***Cuerda vibrante*** Cuando se pulsa la cuerda de una guitarra, ésta vibra con una frecuencia $F = 200\sqrt{T}$, donde F se mide en vibraciones por segundo y la tensión T se mide en libras. Encontrar las razones de cambio en F cuando *a*) $T = 4$ y *b*) $T = 9$.

34. ***Movimiento vertical*** Se deja caer una pelota desde una altura de 100 pies. Un segundo después, se deja caer otra pelota desde una altura de 75 pies. ¿Cuál de ellas llega primero al suelo?

35. ***Movimiento vertical*** Para estimar la altura de un edificio, se deja caer una piedra desde su parte superior a una piscina que se encuentra a nivel del suelo. ¿Qué altura tiene el edificio si el impacto en el agua ocurre 9.2 segundos después de lanzada la piedra?

36. ***Movimiento vertical*** Se deja caer una bomba desde un aeroplano que vuela a una altura de 14 400 pies. ¿Cuánto tiempo tardará la bomba en llegar al suelo? (Debido al movimiento del avión, la caída no será vertical, pero el tiempo será el mismo.) Si el avión viaja a 600 millas por hora, ¿cuánto se moverá la bomba de manera horizontal después de soltarla?

37. ***Movimiento de un proyectil*** Se lanza una pelota que sigue la trayectoria descrita por $y = x - 0.02x^2$.
    a) Construir la gráfica de la trayectoria.
    b) Encontrar la distancia horizontal total de la pelota.
    c) ¿En qué valor de x alcanzará la pelota la altura máxima? (Utilizar la simetría de la ruta.)
    d) Encontrar la ecuación que sirve para calcular el ritmo de cambio instantáneo para la altura de la pelota con respecto al cambio horizontal. Evaluar la ecuación en $x = 0, 10, 25, 30$ y 50.
    e) ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de la altura cuando la pelota alcanza su altura máxima?

38. ***Movimiento de un proyectil*** La trayectoria de un proyectil lanzado con un ángulo de 45° con respecto al piso es

$$y = x - \frac{32}{v_0^2}(x^2)$$

donde la velocidad inicial es v_0 pies por segundo.

a) Encontrar la coordenada x del punto donde el proyectil golpea al suelo. Utilizar la simetría de la trayectoria del proyectil para localizar la coordenada x del punto en el que alcanza su altura máxima.

b) ¿Cuál es la razón de cambio instantáneo de la altura cuando el proyectil se encuentra a su altura máxima?

c) Demostrar que duplicar la velocidad inicial del proyectil multiplicaría por 4 la altura máxima y el alcance.

d) Calcular la altura máxima y el alcance de un proyectil lanzado con una velocidad inicial de 70 pies por segundo. Utilizar una herramienta de graficación para representar la trayectoria del proyectil.

39. ***Movimiento horizontal*** La función de posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x es:

$x(t) = t^2 - 3t + 2$ para $-\infty < t < \infty$.

a) Calcular la velocidad de la partícula.

b) Encontrar el o los intervalos t abiertos en los que la partícula se mueve hacia la izquierda.

c) Determinar la posición de la partícula cuando la velocidad es 0.

d) Encontrar la velocidad de la partícula cuando la posición es 0.

40. ***Modelado matemático*** En la siguiente tabla se muestra la velocidad de un automóvil en millas por hora y la distancia de frenado en pies:

Velocidad, x	20	30	40	50	60
Distancia de frenado, y	25	55	105	188	300

a) Utilizar las funciones de regresión de la herramienta de graficación para encontrar un modelo cuadrático para los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar los datos y trazar el modelo.

c) Utilizar una herramienta de graficación para representar dy/dx.

d) Utilizar el modelo para aproximar la distancia de frenado para una velocidad de 65 millas por hora.

e) Utilizar la gráfica de los apartados *b*) y *c*) para explicar el cambio en la distancia de frenado a medida que aumenta la velocidad.

En los ejercicios 41 a 54, encontrar la derivada de la función.

41. $f(x) = (5x^2 + 8)(x^2 - 4x - 6)$

42. $g(x) = (x^3 + 7x)(x + 3)$

43. $h(x) = \sqrt{x}\,\operatorname{sen} x$

44. $f(t) = 2t^5 \cos t$

45. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

46. $f(x) = \dfrac{6x - 5}{x^2 + 1}$

47. $f(x) = \dfrac{1}{9 - 4x^2}$

48. $f(x) = \dfrac{9}{3x^2 - 2x}$

49. $y = \dfrac{x^4}{\cos x}$

50. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^4}$

51. $y = 3x^2 \sec x$

52. $y = 2x - x^2 \tan x$

53. $y = x\cos x - \operatorname{sen} x$

54. $g(x) = 3x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$

En los ejercicios 55 a 58, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto dado.

55. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2}$, $(1, 1)$

56. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$, $\left(\dfrac{1}{2}, -3\right)$

57. $f(x) = -x \tan x$, $(0, 0)$

58. $f(x) = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

59. ***Aceleración*** La velocidad de un objeto es $v(t) = 36 - t^2$, $0 \le t \le 6$, en metros por segundo. Calcular la velocidad y aceleración del objeto cuando $t = 4$.

60. ***Aceleración*** La velocidad inicial de un automóvil que parte del reposo es

$$v(t) = \frac{90t}{4t + 10}$$

donde v se mide en pies por segundo. Calcular la velocidad y aceleración del vehículo una vez transcurridos los siguientes tiempos:

a) 1 segundo *b*) 5 segundos *c*) 10 segundos

En los ejercicios 61 a 66, calcular la segunda derivada de la función.

61. $g(t) = -8t^3 - 5t + 12$

62. $h(x) = 21x^{-3} + 3x$

63. $f(x) = 15x^{5/2}$

64. $f(x) = 20\sqrt[5]{x}$

65. $f(\theta) = 3\tan\theta$

66. $h(t) = 10\cos t - 15\operatorname{sen} t$

En los ejercicios 67 y 68, demostrar que la función que satisface la ecuación.

	Función	*Ecuación*
67.	$y = 2\operatorname{sen} x + 3\cos x$	$y'' + y = 0$
68.	$y = \dfrac{10 - \cos x}{x}$	$xy' + y = \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 69 a 80, encontrar la derivada de la función.

69. $h(x) = \left(\dfrac{x + 5}{x^2 + 3}\right)^2$

70. $f(x) = \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^5$

71. $f(s) = (s^2 - 1)^{5/2}(s^3 + 5)$

72. $h(\theta) = \dfrac{\theta}{(1 - \theta)^3}$

73. $y = 5\cos(9x + 1)$

74. $y = 1 - \cos 2x + 2\cos^2 x$

75. $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{4}$

76. $y = \dfrac{\sec^7 x}{7} - \dfrac{\sec^5 x}{5}$

77. $y = \dfrac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2} x - \dfrac{2}{7}\operatorname{sen}^{7/2} x$

78. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

79. $y = \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{x + 2}$

80. $y = \dfrac{\cos(x - 1)}{x - 1}$

En los ejercicios 81 a 84, encontrar la derivada de la función en el punto dado.

81. $f(x) = \sqrt{1 - x^3}$, $(-2, 3)$

82. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$, $(3, 2)$

83. $y = \frac{1}{2}\csc 2x, \quad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$

84. $y = \csc 3x + \cot 3x, \quad \left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$

CAS **En los ejercicios 85 a 88, utilizar un sistema algebraico computarizado para encontrar la derivada de la función. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su derivada en el mismo plano cartesiano. Describir el comportamiento de la función que corresponda a todo cero de la gráfica de la derivada.**

85. $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$ **86.** $f(x) = [(x-2)(x+4)]^2$

87. $f(t) = \sqrt{t+1}\,\sqrt[3]{t+1}$ **88.** $y = \sqrt{3x}\,(x+2)^3$

CAS **En los ejercicios 89 a 92, *a*) utilizar un sistema algebraico computarizado para encontrar la derivada de la función en el punto dado, *b*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto y *c*) representar gráficamente la función y su recta tangente en el mismo plano cartesiano.**

89. $f(t) = t^2(t-1)^5, \quad (2, 4)$

90. $g(x) = x\sqrt{x^2+1}, \quad \left(3, 3\sqrt{10}\right)$

91. $f(x) = \tan\sqrt{1-x}, \quad \left(-2, \tan\sqrt{3}\right)$

92. $f(x) = 2\csc^3\left(\sqrt{x}\right), \quad (1, 2\csc^3 1)$

En los ejercicios 93 a 96, encontrar la segunda derivada de la función.

93. $y = 7x^2 + \cos 2x$ **94.** $y = \dfrac{1}{x} + \tan x$

95. $f(x) = \cot x$ **96.** $y = \operatorname{sen}^2 x$

CAS **En los ejercicios 97 a 100, utilizar un sistema algebraico computarizado para encontrar la segunda derivada de la función.**

97. $f(t) = \dfrac{4t^2}{(1-t)^2}$ **98.** $g(x) = \dfrac{6x-5}{x^2+1}$

99. $g(\theta) = \tan 3\theta - \operatorname{sen}(\theta - 1)$ **100.** $h(x) = 5x\sqrt{x^2-16}$

101. ***Refrigeración*** La temperatura T en grados Fahrenheit de los alimentos colocados en un congelador es

$$T = \frac{700}{t^2 + 4t + 10}$$

donde t es el tiempo en horas. Calcular la razón de cambio de T con respecto a t en cada uno de los siguientes tiempos:

a) $t = 1$ *b*) $t = 3$ *c*) $t = 5$ *d*) $t = 10$

102. ***Flujo de fluidos*** La velocidad de salida v de un líquido que fluye por el orificio que se encuentra en la parte inferior de un tanque está dada por $v = \sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración de la gravedad (32 pies por segundo al cuadrado) y h es la profundidad del líquido dentro del tanque. Encontrar el ritmo de cambio de v con respecto a h cuando *a*) $h = 9$ y *b*) $h = 4$. (Observar que $g = +32$ pies por segundo al cuadrado. El signo g depende de cómo se modele el problema. En este caso, considerar una g negativa produciría un valor imaginario para v.)

En los ejercicios 103 a 108, utilizar la derivación implícita para encontrar dy/dx.

103. $x^2 + 3xy + y^3 = 10$ **104.** $y^2 = (x-y)(x^2+y)$

105. $\sqrt{xy} = x - 4y$ **106.** $y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 25$

107. $x \operatorname{sen} y = y \cos x$ **108.** $\cos(x+y) = x$

En los ejercicios 109 y 110, encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la ecuación en el punto dado. Utilizar una herramienta de graficación para representar la ecuación, la recta tangente y la normal.

109. $x^2 + y^2 = 10, \quad (3, 1)$ **110.** $x^2 - y^2 = 20, \quad (6, 4)$

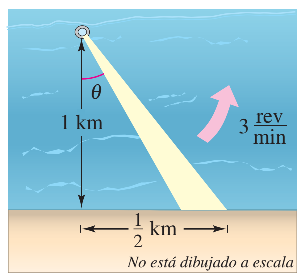
111. Un punto se mueve sobre la curva $y = \sqrt{x}$ de manera tal que el valor en y aumenta con un ritmo de dos unidades por segundo. ¿A qué ritmo cambia x en cada uno de los siguientes valores?

a) $x = \frac{1}{2}$ *b*) $x = 1$ *c*) $x = 4$

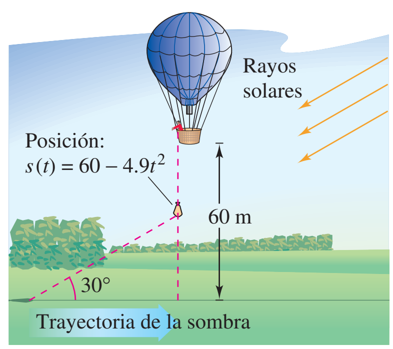
112. ***Superficie*** Las aristas de un cubo se expanden a un ritmo de 8 centímetros por segundo. ¿A qué ritmo cambia el área de su superficie cuando sus aristas tienen 6.5 centímetros?

113. ***Profundidad*** La sección transversal de un canal de 5 metros es un trapezoide isósceles con base menor de dos metros, base mayor de tres metros y una altura de dos metros. El agua corre por el canal a un ritmo de un metro cúbico por minuto. ¿Con qué rapidez aumenta el nivel del agua cuando ésta tiene un metro de profundidad?

114. ***Velocidad lineal y angular*** Un faro giratorio se localiza a 1 kilómetro en línea recta de una playa (ver la figura). Si el faro gira a un ritmo de tres revoluciones por minuto, ¿a qué velocidad parece moverse el haz de luz (en kilómetros por hora) para un espectador que se encuentra a medio kilómetro sobre la playa?



115. ***Sombra en movimiento*** Se deja caer un costal de arena desde un globo aerostático que se encuentra a 60 metros de altura; en ese momento el ángulo de elevación del Sol es de 30 grados (ver la figura). Encontrar el ritmo al que se mueve la sombra sobre el piso cuando el costal está a una altura de 35 metros. [*Sugerencia:* La posición del costal está dada por $s(t) = 60 - 4.9t^2$.]



SP Solución de problemas

1. Tomando en cuenta la gráfica de la parábola $y = x^2$:

a) Encontrar el radio r del círculo más grande posible centrado sobre el eje x que es tangente a la parábola en el origen, como se muestra en la figura. Este círculo se denomina el **círculo de curvatura** (ver la sección 12.5). Encontrar la ecuación de este círculo. Utilizar una herramienta de graficación para representar el círculo y la parábola en la misma ventana, con el fin de verificar la respuesta.

b) Encontrar el centro $(0, b)$ del círculo con radio 1 centrado sobre el eje y que es tangente a la parábola en dos puntos, como se muestra en la figura. Encontrar la ecuación de este círculo. Utilizar una herramienta de graficación para representar el círculo y la parábola en la misma ventana, con el fin de verificar la respuesta.

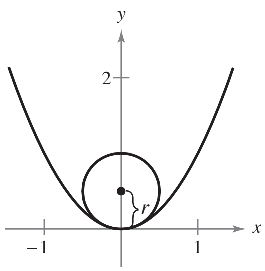


Figura para 1*a*

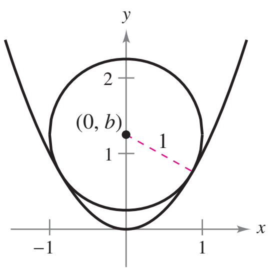


Figura para 1*b*

2. Representar las dos parábolas $y = x^2$ y $y = -x^2 + 2x - 5$ en el mismo plano cartesiano. Encontrar las ecuaciones de las dos rectas igualmente tangentes a ambas parábolas.

3. *a*) Encontrar el polinomio $P_1(x) = a_0 + a_1x$ cuyo valor y pendiente concuerdan con el valor y la pendiente de $f(x) = \cos x$ en el punto $x = 0$.

b) Encontrar el polinomio $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ cuyo valor y primeras dos derivadas concuerdan con el valor y las dos primeras derivadas de $f(x) = \cos x$ en el punto $x = 0$. Este polinomio se denomina **polinomio de Taylor** de segundo grado de $f(x) = \cos x$ en $x = 0$.

c) Completar la siguiente tabla comparando los valores de $f(x) = \cos x$ y $P_2(x)$. ¿Qué es lo que se observa?

x	-1.0	-0.1	-0.001	0	0.001	0.1	1.0
$\cos x$							
$P_2(x)$							

d) Encontrar el polinomio de Taylor de tercer grado de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$.

4. *a*) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(2, 4)$.

b) Encontrar la ecuación de la recta normal a $y = x^2$ en el punto $(2, 4)$. (La recta normal es perpendicular a la tangente.) ¿Dónde corta esta recta a la parábola por segunda vez?

c) Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a $y = x^2$ en el punto $(0, 0)$.

d) Demostrar que para todo punto $(a, b) \neq (0, 0)$ sobre la parábola $y = x^2$, la recta normal corta a la gráfica una segunda vez.

5. Encontrar un polinomio de tercer grado $p(x)$ tangente a la recta $y = 14x - 13$ en el punto $(1, 1)$, y tangente a la recta $y = -2x - 5$ en el punto $(-1, -3)$.

6. Encontrar la función de la forma $f(x) = a + b \cos cx$ tangente a la recta $y = 1$ en el punto $(0, 1)$ y tangente a la recta

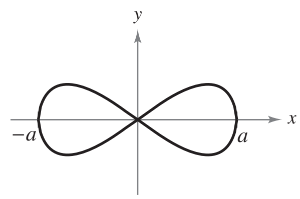
$$y = x + \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$$

en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

7. La gráfica de la **curva ocho**, en forma de pera,

$$x^4 = a^2(x^2 - y^2),\ a \neq 0,$$

es la siguiente



a) Explicar cómo podría utilizarse una herramienta de graficación para representar esta curva.

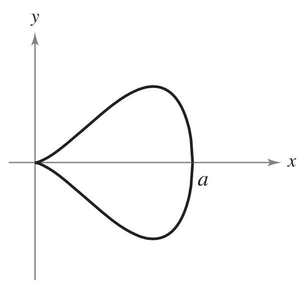
b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la curva para diversos valores de la constante a. Describir cómo influye en la forma de la curva.

c) Determinar los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal.

8. La gráfica de la **curva cuártica**, en forma de pera,

$$b^2y^2 = x^3(a - x), \quad a, b > 0,$$

es la siguiente



a) Explicar cómo podría utilizar una herramienta de graficación para representar esta curva.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la curva para diversos valores de las constantes a y b. Describir cómo influyen en la forma de la curva.

c) Determinar los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal.

9. Un hombre que mide seis pies de estatura camina a un ritmo de 5 pies por segundo hacia una farola del alumbrado público que tiene 30 pies de altura (ver la figura). Su hijo, que mide 3 pies, le sigue a la misma velocidad pero 10 pies detrás de él. Por momentos, la sombra que queda detrás del niño es la producida por el hombre, y en otros, es la del niño.

a) Suponiendo que el hombre está a 90 pies de la farola, demostrar que su sombra se proyecta tras del niño.
b) Suponiendo que el hombre está a 60 pies de la farola, demostrar que la sombra del niño se extiende más allá de la del hombre.
c) Determinar la distancia d desde el hombre hasta la farola en la que los bordes de ambas sombras están exactamente a la misma distancia de la farola.
d) Determinar a qué velocidad se mueve el borde de la sombra en función de x, la distancia entre el hombre y la farola. Analizar la continuidad de esta función de velocidad de la sombra.

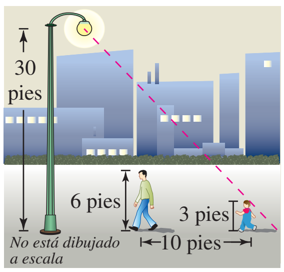


Figura para 9

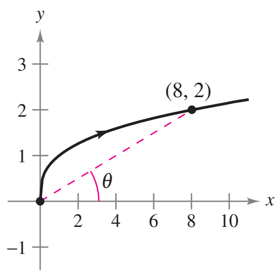


Figura para 10

10. Una partícula se mueve sobre la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ (ver la figura). Cuando $x = 8$, la componente y de su posición aumenta con un ritmo de un centímetro por segundo.

a) ¿A qué velocidad se modifica la componente x en este momento?
b) ¿A qué velocidad se modifica la distancia desde el origen en este momento?
c) ¿A qué velocidad cambia el ángulo de inclinación θ en este momento?

11. Sea L una función derivable para todo x. Demostrar que si $L(a + b) = L(a) + L(b)$ para todo a y b, entonces $L'(x) = L'(0)$ para todo x. ¿A qué se parece la gráfica de L?

12. Sea E una función que satisface $E(0) = E'(0) = 1$. Demostrar que si $E(a + b) = E(a)E(b)$ para todo a y b, entonces E es derivable y $E'(x) = E(x)$ para todo x. Encontrar un ejemplo de una función que satisfaga $E(a + b) = E(a)E(b)$.

13. El límite fundamental $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ supone que x se mide en radianes. ¿Qué sucede si x se midió en grados en vez de radianes?

a) Configurar una herramienta de graficación en modo *degree* y completar la tabla.

z **(en grados)**	0.1	0.01	0.0001
$\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$			

b) Utilizar la tabla para estimar

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

para z en grados. ¿Cuál es el valor exacto de este límite? (*Sugerencia:* $180° = \pi$ radianes).

c) Utilizar la definición por límite de la derivada para encontrar

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z$$

para z en grados.

d) Definir las nuevas funciones $S(z) = \operatorname{sen}(cz)$ y $C(z) = \cos(cz)$, donde $c = \pi/180°$. Encontrar $S(90)$ y $C(180)$. Utilizar la regla de la cadena para calcular

$$\frac{d}{dz}S(z).$$

e) Explicar por qué el cálculo es más sencillo utilizando radianes en lugar de grados.

14. Un astronauta que está en la Luna lanza una roca. El peso de dicha roca es

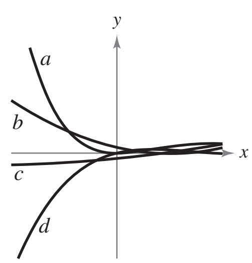
$$s = -\frac{27}{10}t^2 + 27t + 6$$

donde s se mide en pies y t en segundos.

a) Encontrar expresiones para la velocidad y aceleración de la roca.
b) Encontrar el tiempo en que la roca está en su punto más alto calculando el tiempo en el que la velocidad es igual a 0. ¿Cuál es la altura de la roca en este momento?
c) ¿Cómo se compara la aceleración de la roca con la aceleración de la gravedad de la Tierra?

15. Si a es la aceleración de objeto, la *variación de la aceleración* j se define como $j = a'(t)$.

a) Utilizar esta definición para elaborar una interpretación física de j.
b) Encontrar j para el vehículo que se menciona en el ejercicio 119 de la sección 2.3 e interpretar el resultado.
c) En la figura se muestra la gráfica de las funciones de posición, velocidad, aceleración y variación de la aceleración de un vehículo. Identificar cada gráfica y explicar el razonamiento.



3 Aplicaciones de la derivada

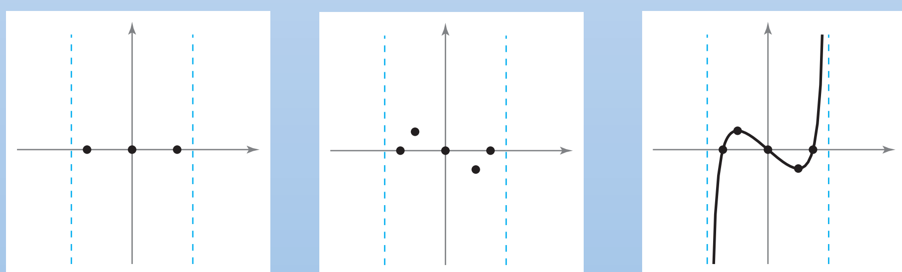
En este capítulo se discutirán diferentes aplicaciones de la derivada de una función. Estas aplicaciones se dividen en tres categorías básicas: trazado de curvas, optimización y técnicas de aproximación.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo utilizar la derivada para localizar los valores máximos y mínimos de una función en un intervalo cerrado. (3.1)
- Cómo un gran número de resultados en este capítulo dependen de dos importantes teoremas: el *Teorema de Rolle* y el *Teorema del valor medio*. (3.2)
- Cómo utilizar la primera derivada para determinar si una función es creciente o decreciente. (3.3)
- Cómo emplear la segunda derivada para determinar si la gráfica de una función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. (3.4)
- Cómo determinar las asíntotas horizontales de la gráfica de una función. (3.5)
- Cómo graficar una función con las técnicas del capítulo P-3. (3.6)
- Cómo resolver problemas de optimización. (3.7)
- Cómo utilizar técnicas de aproximación para resolver problemas. (3.8 y 3.9)

© E.J. Baumeister Jr./Alamy

Una nave pequeña inicia su descenso desde una altitud de 1 milla, 4 millas al oeste de la pista de aterrizaje. Dada una función que modela la trayectoria en la que planea el avión, ¿cuándo desciende el avión con la mayor razón de cambio? (Ver la sección 3.4, ejercicio 75.)



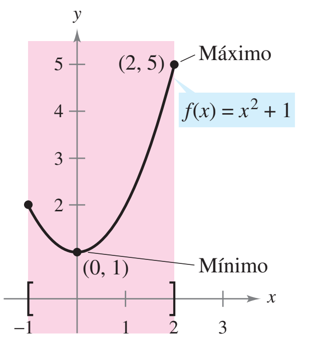
En el capítulo 3 se usará el cálculo para analizar gráficas de funciones. Por ejemplo, se puede usar la derivada de una función para determinar sus valores máximos y mínimos. Se usarán límites para identificar las asíntotas de la gráfica de una función. En la sección 3.6 se combinarán estas técnicas para trazar la gráfica de una función.

3.1 Extremos en un intervalo

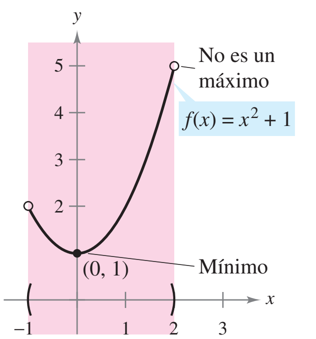
- Entender la definición de extremos de una función en un intervalo.
- Entender la definición de extremos relativos de una función en un intervalo abierto.
- Encontrar los extremos en un intervalo cerrado.

Extremos de una función

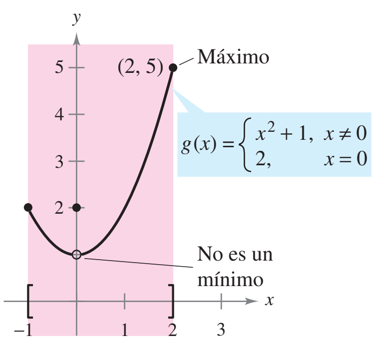
En el cálculo, se dedica mucho esfuerzo para determinar el comportamiento de una función f sobre un intervalo I. ¿f tiene un valor máximo en I? ¿Tiene un valor mínimo? ¿Dónde es creciente la función? ¿Dónde es decreciente? En este capítulo se verá cómo las derivadas se utilizan para responder estas preguntas. También por qué los planteamientos anteriores son importantes en las aplicaciones de la vida real.



a) f es continua [– 1, 2] es cerrado



b) f es continua (– 1, 2) es abierto



c) g no es continua [–1, 2] es cerrado.
Los extremos pueden encontrarse en puntos interiores o en puntos terminales de un intervalo. Los extremos que se presentan en puntos terminales se denominan **extremos o terminales**
Figura 3.1

DEFINICIÓN DE EXTREMOS

Sea f definida sobre un intervalo I que contiene a c.

1. $f(c)$ es el **mínimo de f en I** si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en I.
2. $f(c)$ es el **máximo de f en I** si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en I.

Los mínimos y máximos de una función en un intervalo son los **valores extremos**, o simplemente **extremos**, de la función en el intervalo. El mínimo y el máximo de una función en un intervalo también reciben el nombre de **mínimo absoluto** y **máximo absoluto** en el intervalo.

Una función no siempre tiene un mínimo o un máximo en un intervalo. Por ejemplo, en la figura 3.1*a* y *b*, es posible ver que la función $f(x) = x^2 + 1$ tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo cerrado $[-1, 2]$, pero no tiene un máximo en el intervalo abierto $(-1, 2)$. Además, en la figura 3.1*c* se observa que la continuidad (o la falta de la misma) puede afectar a la existencia de un extremo en un intervalo. Esto sugiere el siguiente teorema. (Aunque el teorema de los valores extremos es intuitivamente plausible, la prueba del mismo no se encuentra dentro del objetivo de este libro.)

TEOREMA 3.1 EL TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

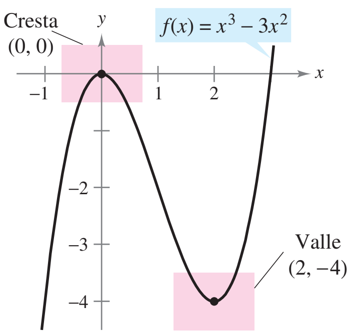
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo.

EXPLORACIÓN

Determinación de los valores mínimo y máximo El teorema del valor extremo (al igual que el teorema del valor intermedio) es un *teorema de existencia* porque indica la existencia de valores mínimo y máximo, pero no muestra cómo determinarlos. Emplear la función para valores extremos de una herramienta de graficación con el fin de encontrar los valores mínimo y máximo de cada una de las siguientes funciones. En cada caso, ¿los valores de x son exactos o aproximados? Explicar.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en el intervalo cerrado $[-1, 3]$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 2$ en el intervalo cerrado $[-1, 3]$



f tiene un máximo relativo en (0, 0) y un mínimo relativo en (2, − 4)

Figura 3.2

Extremos relativos y puntos o números críticos

En la figura 3.2, la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2$ tiene un **máximo relativo** en el punto (0, 0) y un **mínimo relativo** en el punto $(2, -4)$. De manera informal, para una función continua, es posible que se piense que un máximo relativo ocurre en una "cima" de la gráfica. Y que un mínimo relativo se presenta en un "valle" en la gráfica. Tales cimas y valles pueden ocurrir de dos maneras. Si la cima (o valle) es suave y redondeada, la gráfica tiene una tangente horizontal en el punto alto (o punto bajo). Si la cima (o valle) es angosta y picuda, la gráfica representa una función que no es derivable en el punto alto (o punto bajo).

DEFINICIÓN DE EXTREMOS RELATIVOS

1. Si hay un intervalo abierto que contiene a c en el cual $f(c)$ es un máximo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de **máximo relativo** de f, o se podría afirmar que f tiene un **máximo relativo en $(c, f(c))$.**
2. Si hay un intervalo abierto que contiene a c en el cual $f(c)$ es un mínimo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de **mínimo relativo** de f, o se podría afirmar que f tiene un **mínimo relativo en $(c, f(c))$.**

El plural de máximo relativo es máximos relativos, y el plural de mínimo relativo es mínimos relativos. Un máximo relativo y un mínimo relativo algunas veces son llamados **máximo local** y **mínimo local**, respectivamente.

El ejemplo 1 examina las derivadas de una función en extremos relativos *dados*. (Se habla bastante acerca de la *determinación* de los extremos relativos de una función en la sección 3.3.)

EJEMPLO 1 El valor de la derivada en los extremos relativos

Encontrar el valor de la derivada en cada uno de los extremos relativos que se ilustran en la figura 3.3.

Solución

a) La derivada de $f(x) = \dfrac{9(x^2-3)}{x^3}$ es

$$f'(x) = \frac{x^3(18x) - (9)(x^2-3)(3x^2)}{(x^3)^2} \qquad \text{Derivar utilizando la regla del cociente.}$$

$$= \frac{9(9-x^2)}{x^4}. \qquad \text{Simplificar.}$$

En el punto (3, 2), el valor de la derivada es $f'(3) = 0$ (ver la figura 3.3*a*).

b) En $x = 0$, la derivada de $f(x) = |x|$ *no existe* debido a que difieren los siguientes límites unilaterales (ver la figura 3.3*b*).

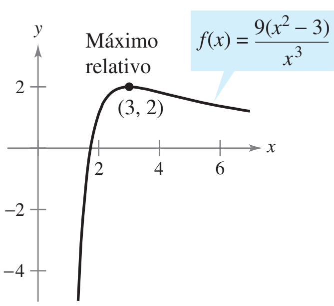
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad \text{Límite desde la izquierda.}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \qquad \text{Límite desde la derecha.}$$

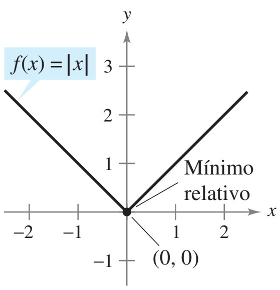
c) La derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es

$$f'(x) = \cos x.$$

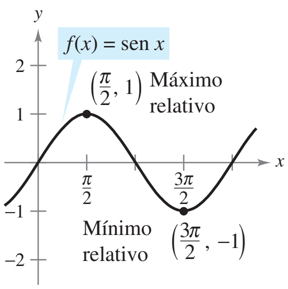
En el punto $(\pi/2, 1)$, el valor de la derivada es $f'(\pi/2,) = \cos(\pi/2) = 0$. En el punto $(3\pi/2, -1)$, el valor de la derivada es $f'(3\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0$ (ver la figura 3.3*c*).



a) $f'(3) = 0$



b) $f'(0)$ no existe



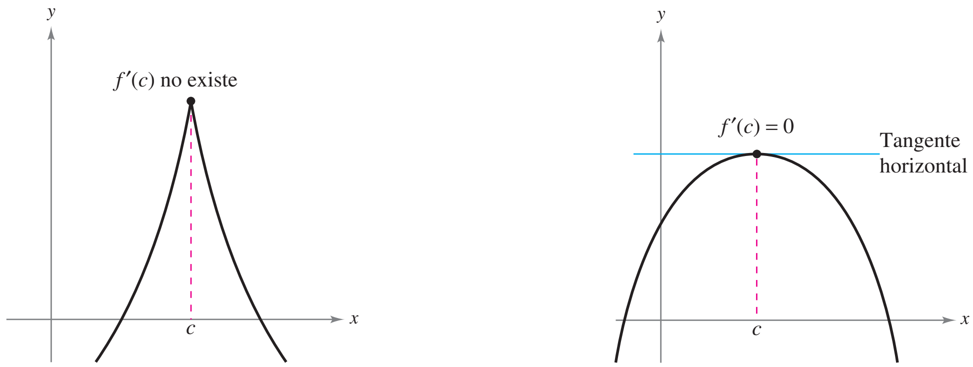
c) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;\ f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = ($

Figura 3.3

Nótese que en el ejemplo 1 en los extremos relativos la derivada es cero o no existe. Los valores de x en estos puntos especiales reciben el nombre de **puntos críticos**. La figura 3.4 ilustra los dos tipos de números críticos. Obsérvese en la definición que el número crítico c debe estar en el dominio de f, pero c no tiene que estar en el dominio de f'.

DEFINICIÓN DE UN NÚMERO O PUNTO CRÍTICO

Sea f definida en c. Si $f'(c) = 0$ o si f no es derivable en c, entonces c es un **punto crítico** de f.



c es un punto crítico de f
Figura 3.4

TEOREMA 3.2 LOS EXTREMOS RELATIVOS OCURREN SÓLO EN NÚMEROS O PUNTOS CRÍTICOS

Si f tiene un mínimo relativo o un máximo relativo en $x = c$, entonces c es un punto crítico de f.

Mary Evans Picture Library

Pierre de Fermat (1601-1665)

Para Fermat, que estudió abogacía, las matemáticas eran más una afición que una profesión. Sin embargo, Fermat realizó muchas contribuciones a la geometría analítica, la teoría de números, el cálculo y la probabilidad. En cartas a sus amigos, escribió muchas de las ideas fundamentales del cálculo, bastante antes de Newton o Leibniz. Por ejemplo, el teorema 3.2 algunas veces se atribuye a Fermat.

DEMOSTRACIÓN

Caso 1: Si f *no* es derivable en $x = c$, entonces, por definición, c es un punto crítico de f y el teorema es válido.

Caso 2: Si f es derivable en $x = c$, entonces $f'(c)$ debe ser positiva, negativa o 0. Suponer que $f'(c)$ es positiva. Entonces

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

lo cual implica que existe un intervalo (a, b) que contiene a c de modo tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0, \text{ para todo } x \neq c \text{ en } (a, b).$$

(Ver el ejercicio 82*b*, sección 1.2.)

Como este cociente es positivo, los signos en el denominador y el numerador deben coincidir. Lo anterior produce las siguientes desigualdades para los valores de x en el intervalo (a, b).

Izquierda de c: $x < c$ y $f(x) < f(c)$ $\Rightarrow$ $f(c)$ no es un mínimo relativo

Derecha de c: $x > c$ y $f(x) > f(c)$ $\Rightarrow$ $f(c)$ no es un máximo relativo

De tal modo, la suposición de que $f'(c) > 0$ contradice la hipótesis de que $f(c)$ es un extremo relativo. Suponiendo que $f'(c) < 0$ produce una contradicción similar, sólo queda una posibilidad, a saber, $f'(c) = 0$. En consecuencia, por definición, c es un punto crítico de f y el teorema resulta válido.

Determinación de extremos en un intervalo cerrado

El teorema 3.2 señala que los extremos relativos de una función *sólo* pueden ocurrir en los puntos críticos de la función. Sabiendo lo anterior, se pueden utilizar las siguientes estrategias para determinar los extremos en un intervalo cerrado.

Estrategias para la determinación de extremos en un intervalo cerrado

Para determinar los extremos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$, se siguen estos pasos.

1. Se encuentran los puntos críticos de f en (a, b).
2. Se evalúa f en cada punto crítico en (a, b).
3. Se evalúa f en cada punto extremo de $[a, b]$.
4. El más pequeño de estos valores es el mínimo. El más grande es el máximo.

Los siguientes tres ejemplos muestran cómo aplicar estas estrategias. Asegurarse de ver que la determinación de los puntos críticos de la función sólo es una parte del procedimiento. La evaluación de la función en los puntos críticos *y* los puntos extremos o terminales corresponden a la otra parte.

EJEMPLO 2 Determinación de los extremos en un intervalo cerrado

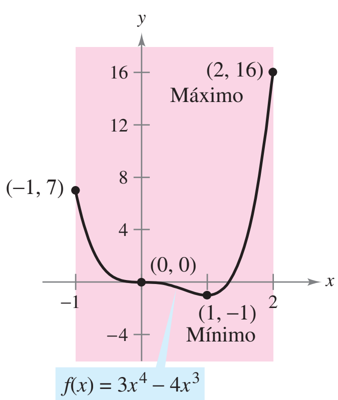
Determinar los extremos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en el intervalo $[-1, 2]$.

Solución Se empieza derivando la función

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 \qquad \text{Escribir la función original.}$$
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 \qquad \text{Derivar.}$$

Para determinar los puntos críticos de f, se necesitan encontrar los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$ y todos los valores de x para los cuales $f'(x)$ no existe.

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$
$$12x^2(x - 1) = 0 \qquad \text{Factor.}$$
$$x = 0, 1 \qquad \text{Números críticos.}$$

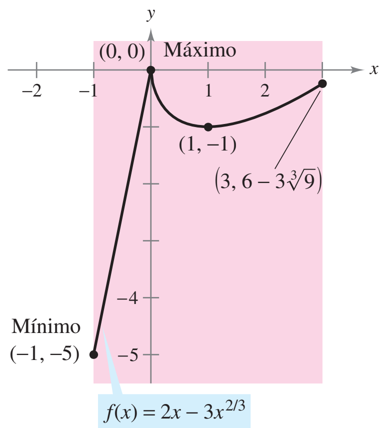


En el intervalo cerrado $[-1, 2]$, f tiene un mínimo en $(1, -1)$ y un máximo en $(2, 16)$
Figura 3.5

Debido a que f' se define para todo x, es posible concluir que estos números son los únicos puntos críticos de f. Al evaluar f en estos dos puntos críticos y en los puntos extremos de $[-1, 2]$, es posible determinar que el máximo es $f(2) = 16$ y el mínimo corresponde a $f(1) = -1$, como se muestra en la tabla. La gráfica de f se muestra en la figura 3.5.

Punto terminal izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto terminal derecho
$f(-1) = 7$	$f(0) = 0$	$f(1) = -1$ Mínimo	$f(2) = 16$ Máximo

En la figura 3.5 nótese que el punto crítico $x = 0$ no produce un mínimo relativo o un máximo relativo. Esto indica que el recíproco del teorema 3.2 no es válido. En otras palabras, *los números críticos de una función no necesitan producir extremos relativos*.



En el intervalo cerrado $[-1, 3]$, f tiene un mínimo en $(-1, -5)$ y un máximo en $(0, 0)$
Figura 3.6

EJEMPLO 3 Determinación de los extremos en un intervalo cerrado

Encontrar los extremos de $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$ en el intervalo $[-1, 3]$.

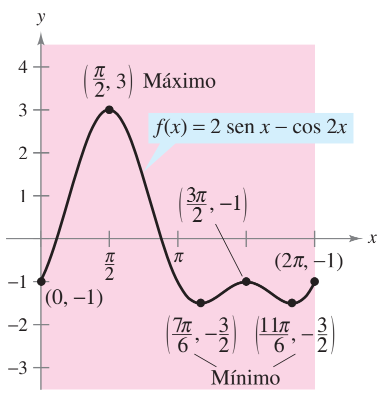
Solución Se empieza derivando la función.

$$f(x) = 2x - 3x^{2/3} \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^{1/3}} = 2\left(\frac{x^{1/3} - 1}{x^{1/3}}\right) \qquad \text{Derivar.}$$

A partir de esta derivada, es posible advertir que la función tiene dos puntos críticos en el intervalo $[-1, 3]$. El número 1 es crítico porque $f'(1) = 0$, y el punto 0 es un punto crítico debido a que $f'(0)$ no existe. Al evaluar f en estos dos números y en los puntos extremos del intervalo, se puede concluir que el mínimo es $f(-1) = -5$ y el máximo, $f(0) = 0$, como se indica en la tabla. La gráfica de f se muestra en la figura 3.6.

Punto terminal izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto terminal derecho
$f(-1) = -5$ Mínimo	$f(0) = 0$ Máximo	$f(1) = -1$	$f(3) = 6 - 3\sqrt[3]{9} \approx -0.24$



En el intervalo cerrado, $[0, 2\pi]$, f tiene dos mínimos en $(7\pi/6, -3/2)$ y $(11\pi/6, -3/2)$ y un máximo en $(\pi/2, 3)$
Figura 3.7

EJEMPLO 4 Determinación de los extremos en un intervalo cerrado

Encontrar los extremos de $f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \cos 2x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Solución Esta función es derivable para todo x real, por lo que es posible determinar todos los puntos críticos derivándola e igualando $f'(x)$ a cero, como se indica.

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \cos 2x \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f'(x) = 2 \cos x + 2 \operatorname{sen} 2x = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

$$2 \cos x + 4 \cos x \operatorname{sen} x = 0 \qquad \operatorname{sen} 2x = 2 \cos x \operatorname{sen} x.$$

$$2(\cos x)(1 + 2 \operatorname{sen} x) = 0 \qquad \text{Factor.}$$

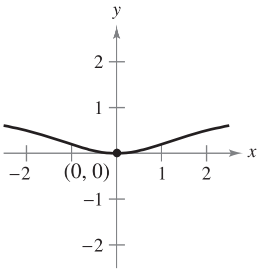
En el intervalo $[0, 2\pi]$, el factor $\cos x$ es cero cuando $x = \pi/2$ y cuando $x = 3\pi/2$. El factor $(1 + 2 \operatorname{sen} x)$ es cero cuando $x = 7\pi/6$ y cuando $x = 11\pi/6$. Al evaluar f en estos cuatro números críticos y en los puntos extremos del intervalo, se concluye que el máximo es $f(\pi/2) = 3$ y que el mínimo se presenta en *dos* puntos, $f(7\pi/6) = -3/2$ y $f(11\pi/6) = -3/2$, como se indica en la tabla. La gráfica se muestra en la figura 3.7.

Punto terminal izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto crítico	Punto crítico	Punto terminal derecho
$f(0) = -1$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ Máximo	$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$ Mínimo	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$	$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$ Mínimo	$f(2\pi) = -1$

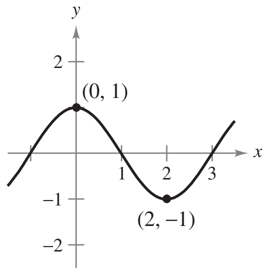
3.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, determinar el valor de la derivada (si ésta existe) en cada extremo indicado.

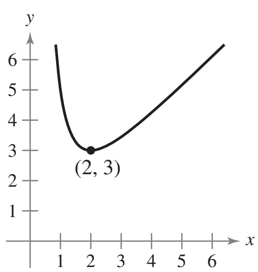
1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$



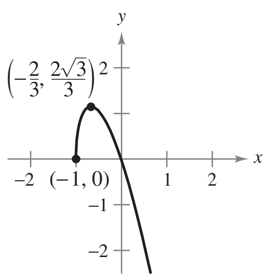
2. $f(x) = \cos \dfrac{\pi x}{2}$



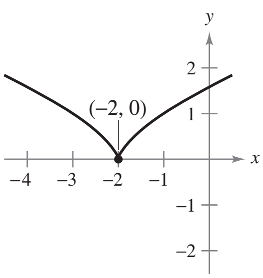
3. $g(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$



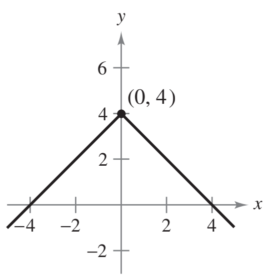
4. $f(x) = -3x\sqrt{x + 1}$



5. $f(x) = (x + 2)^{2/3}$

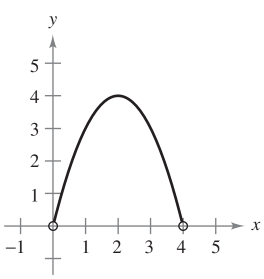


6. $f(x) = 4 - |x|$

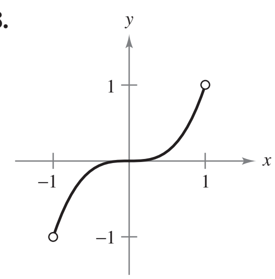


En los ejercicios 7 a 10, aproximar los puntos críticos de la función que se muestra en la gráfica. Determinar si la función tiene un máximo relativo, mínimo relativo, máximo absoluto, mínimo absoluto o ninguno de éstos en cada número crítico sobre el intervalo indicado.

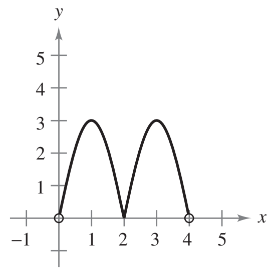
7.



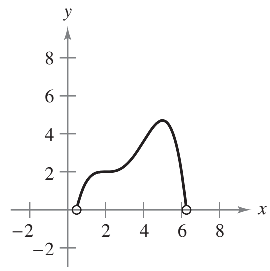
8.



9.



10.



En los ejercicios 11 a 16, determinar cualesquiera de los puntos críticos de la función.

11. $f(x) = x^3 - 3x^2$

12. $g(x) = x^4 - 4x^2$

13. $g(t) = t\sqrt{4 - t},\ t < 3$

14. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

15. $h(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$, $0 < x < 2\pi$

16. $f(\theta) = 2 \sec \theta + \tan \theta$, $0 < \theta < 2\pi$

En los ejercicios 17 a 36, ubicar los extremos absolutos de la función en el intervalo cerrado.

17. $f(x) = 3 - x,\ [-1, 2]$

18. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{3},\ [0, 5]$

19. $g(x) = x^2 - 2x,\ [0, 4]$

20. $h(x) = -x^2 + 3x - 5,\ [-2, 1]$

21. $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2,\ [-1, 2]$

22. $f(x) = x^3 - 12x,\ [0, 4]$

23. $y = 3x^{2/3} - 2x,\ [-1, 1]$

24. $g(x) = \sqrt[3]{x},\ [-1, 1]$

25. $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + 3},\ [-1, 1]$

26. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1},\ [-2, 2]$

27. $h(s) = \dfrac{1}{s - 2},\ [0, 1]$

28. $h(t) = \dfrac{t}{t - 2},\ [3, 5]$

29. $y = 3 - |t - 3|,\ [-1, 5]$

30. $g(x) = \dfrac{1}{1 + |x + 1|},\ [-3, 3]$

31. $f(x) = [\![x]\!],\ [-2, 2]$

32. $h(x) = [\![2 - x]\!],\ [-2, 2]$

33. $f(x) = \cos \pi x,\ \left[0, \dfrac{1}{6}\right]$

34. $g(x) = \sec x,\ \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$

35. $y = 3 \cos x,\ [0, 2\pi]$

36. $y = \tan\left(\dfrac{\pi x}{8}\right),\ [0, 2]$

En los ejercicios 37 a 40, localizar los extremos absolutos de la función (si existen) sobre cada intervalo.

37. $f(x) = 2x - 3$

a) $[0, 2]$ *b)* $[0, 2)$
c) $(0, 2]$ *d)* $(0, 2)$

38. $f(x) = 5 - x$

a) $[1, 4]$ *b)* $[1, 4)$
c) $(1, 4]$ *d)* $(1, 4)$

39. $f(x) = x^2 - 2x$

a) $[-1, 2]$ *b)* $(1, 3]$
c) $(0, 2)$ *d)* $[1, 4)$

40. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

a) $[-2, 2]$ *b)* $[-2, 0)$
c) $(-2, 2)$ *d)* $[1, 2)$

En los ejercicios 41 a 46, dibujar la gráfica de la función. Luego localizar los extremos absolutos de la misma sobre el intervalo indicado.

41. $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4x^2, & 1 < x \leq 3 \end{cases}, \quad [0, 3]$

42. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & 1 \leq x < 3 \\ 2 - 3x, & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}, \quad [1, 5]$

43. $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}, \quad (1, 4]$ **44.** $f(x) = \dfrac{2}{2 - x}, \quad [0, 2)$

45. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x + 1, \quad [-1, 3]$

46. $f(x) = \sqrt{x} + \cos\dfrac{x}{2}, \quad [0, 2\pi]$

CAS **En los ejercicios 47 y 48, *a*) usar un sistema de álgebra por computadora para representar la función y aproximar cualesquiera extremos absolutos sobre el intervalo dado. *b*) Utilizar una herramienta de graficación para determinar cualesquiera puntos críticos y emplear éstos para encontrar todos los extremos absolutos no ubicados en los puntos extremos o terminales. Comparar los resultados con los del apartado *a*).**

47. $f(x) = 3.2x^5 + 5x^3 - 3.5x, \quad [0, 1]$

48. $f(x) = \dfrac{4}{3}x\sqrt{3 - x}, \quad [0, 3]$

CAS **En los ejercicios 49 y 50, utilizar un sistema de álgebra por computadora para encontrar el valor máximo de $|f''(x)|$ en el intervalo cerrado. (Este valor se usa en la estimación del error para la regla del trapecio, como se explica en la sección 4.6.)**

49. $f(x) = \sqrt{1 + x^3}, \quad [0, 2]$ **50.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}, \quad \left[\dfrac{1}{2}, 3\right]$

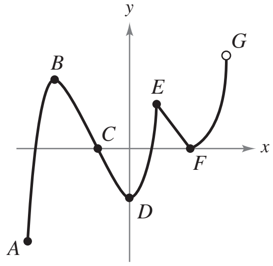
CAS **En los ejercicios 51 y 52, utilizar un sistema de álgebra por computadora para determinar el valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ en el intervalo cerrado. (Este valor se emplea en la estimación del error correspondiente a la regla de Simpson, como se explica en la sección 4.6.)**

51. $f(x) = (x + 1)^{2/3}, \quad [0, 2]$ **52.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}, \quad [-1, 1]$

53. ***Redacción*** Escribir un párrafo breve explicando por qué una función definida sobre un intervalo abierto puede no tener un máximo o un mínimo. Ilustrar la explicación con un dibujo de la gráfica de tal función.

Para discusión

54. Decidir si cada uno de los puntos etiquetados es un máximo o un mínimo absoluto, un máximo o un mínimo relativo o ninguno.



Desarrollo de conceptos

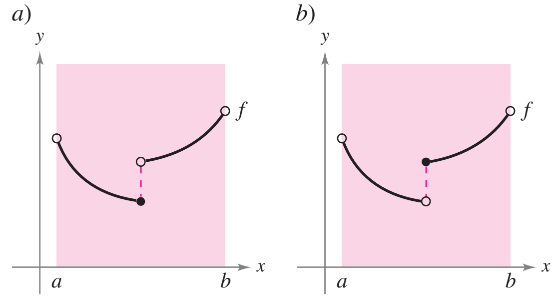
En los ejercicios 55 y 56, dibuje la gráfica de una función sobre el intervalo $[-2, 5]$ que tenga las siguientes características.

55. Máximo absoluto en $x = -2$, mínimo absoluto en $x = 1$, máximo relativo en $x = 3$.

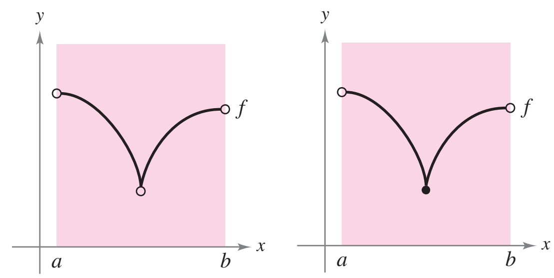
56. Mínimo relativo en $x = -1$, número crítico en $x = 0$, pero ningún extremo, máximo absoluto en $x = 2$, mínimo absoluto en $x = 5$.

En los ejercicios 57 a 60, determinar a partir de la gráfica si *f* tiene un mínimo en el intervalo abierto (a, b).

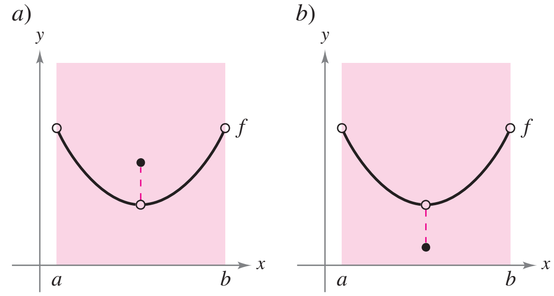
57. *a*) *b*)



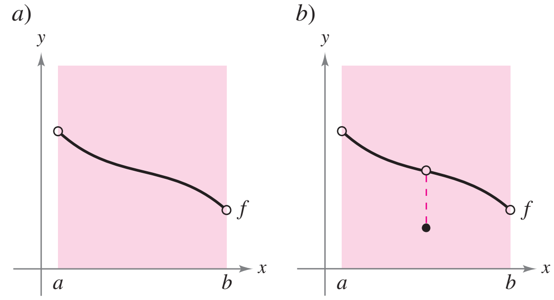
58. *a*) *b*)



59. *a*) *b*)



60. *a*) *b*)

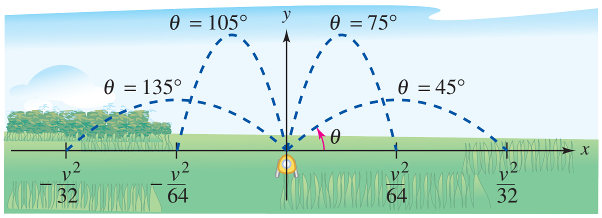


61. ***Potencia*** La fórmula para la salida de potencia P de una batería es $P = VI - RI^2$, donde V es la fuerza electromotriz en volts. R es la resistencia e I es la corriente. Determinar la corriente (medida en amperes) que corresponde a un valor máximo de P en una batería para la cual $V = 12$ volts y $R = 0.5$ ohms. Suponer que un fusible de 15 amperes enlaza la salida en el intervalo $0 \leq I \leq 15$. ¿Podría aumentarse la salida de potencia sustituyendo el fusible de 15 amperes por uno de 20 amperes? Explicar.

62. ***Aspersor giratorio para césped*** Un aspersor giratorio para césped se construye de manera tal que $d\theta/dt$ es constante, donde θ varía entre 45° y 135° (ver la figura). La distancia que el agua recorre horizontalmente es

$$x = \frac{v^2 \operatorname{sen} 2\theta}{32}, \quad 45° \leq \theta \leq 135°$$

donde v es la velocidad del agua. Determinar dx/dt y explicar por qué este aspersor no rocía de manera uniforme. ¿Qué parte del césped recibe la mayor cantidad de agua?



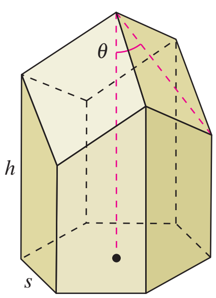
Aspersor de agua: $45° \leq \theta \leq 135°$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información acerca de "cálculo de un aspersor de riego para césped" consultar el artículo "Design of an Oscillating Sprinkler" de Bart Braden en *Mathematics Magazine*.

63. ***Panal*** El área de la superficie de una celda de un panal es

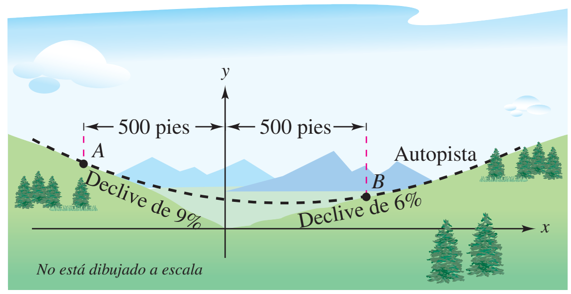
$$S = 6hs + \frac{3s^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3} - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$$

donde h y s son constantes positivas y θ es el ángulo al cual las caras superiores alcanzan la altura de la celda (ver la figura). Encontrar el ángulo θ $(\pi/6 \leq \theta \leq \pi/2)$ que minimiza el área superficial S.



PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información acerca de la estructura geométrica de una celda de un panal, consultar el artículo "The Design of Honeycombs" de Anthony L. Peressini en UMAP Módulo 502, publicado por COMAP, Inc., Suite 210, 57 Bedford Street, Lexington, MA.

64. ***Diseño de una autopista*** Para construir una autopista, es necesario rellenar una parte de un valle donde los declives (pendientes) son de 9 y 6% (ver la figura). La parte superior de la región rellenada tendrá la forma de un arco parabólico que es tangente a las dos pendientes en los puntos A y B. La distancia horizontal desde el punto A haste el eje y y desde el punto B hasta el eje y es de 500 pies en ambos casos.



a) Determinar las coordenadas de A y B.

b) Determinar una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, $-500 \leq x \leq 500$ que describa la parte superior de la región rellenada.

c) Construir una tabla en la que se indiquen las profundidades del relleno para $x = -500, -400, -300, -200, -100, 0, 100, 200, 300, 400$ y 500.

d) ¿Cuál será el punto más bajo de la autopista terminada? ¿Estará directamente sobre el punto donde se juntan los dos declives?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 65 a 68, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre la falsedad.**

65. El máximo de una función que es continua en un intervalo cerrado puede ocurrir en dos valores diferentes en el intervalo.

66. Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces debe tener un mínimo en el intervalo.

67. Si $x = c$ es un punto crítico de la función f, entonces también es un número crítico de la función $g(x) = f(x) + k$, donde k es una constante.

68. Si $x = c$ es un punto crítico de la función f, entonces también es un número crítico de la función $g(x) = f(x - k)$, donde k es una constante.

69. Sea la función f derivable en un intervalo I que contiene c. Si f tiene un valor máximo en $x = c$, demostrar que $-f$ tiene un valor mínimo en $x = c$.

70. Considerar la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$. Demostrar que f puede tener uno, dos o ningún punto crítico y dar un ejemplo de cada caso.

Preparación del examen Putnam

71. Determinar todos los números reales $a > 0$ para los que existe una función $f(x)$ continua y no negativa definida sobre $[0, a]$, con la propiedad de que la región definida por $R = \{(x, y)\,;\, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq f(x)\}$ tiene perímetro k y área k^2 para algún número real k.

3.2 El teorema de Rolle y el teorema del valor medio

- **Comprender el uso del teorema de Rolle.**
- **Comprender el uso del teorema del valor medio.**

Teorema de Rolle

El teorema del valor extremo (sección 3.1) establece que una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ debe tener tanto un mínimo como un máximo en el intervalo. Ambos valores, sin embargo, pueden ocurrir en los puntos extremos. El **teorema de Rolle**, nombrado así en honor del matemático francés Michel Rolle (1652-1719), proporciona las condiciones que garantizan la existencia de un valor extremo en el *interior* de un intervalo cerrado.

TEOREMA DE ROLLE
Michel Rolle, matemático francés, fue el primero en publicar en 1691 el teorema que lleva su nombre. Sin embargo, antes de ese tiempo Rolle fue uno de los más severos críticos del cálculo, señalando que éste proporcionaba resultados erróneos y se basaba en razonamientos infundados. Posteriormente Rolle se dio cuenta de la utilidad del cálculo.

EXPLORACIÓN

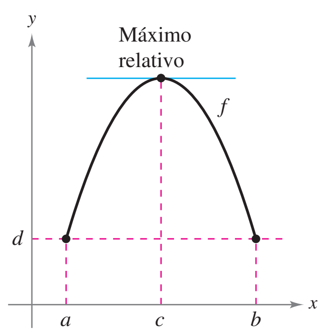
Valores extremos en un intervalo cerrado Dibujar un plano de coordenadas rectangular en un pedazo de papel. Marcar los puntos (1, 3) y (5, 3). Utilizando un lápiz o una pluma, dibujar la gráfica de una función derivable f que empieza en (1, 3) y termina en (5, 3). ¿Existe al menos un punto sobre la gráfica para el cual la derivada sea cero? ¿Sería posible dibujar la gráfica de manera que no hubiera un punto para el cual la derivada es cero? Explicar el razonamiento.

TEOREMA 3.3 TEOREMA DE ROLLE

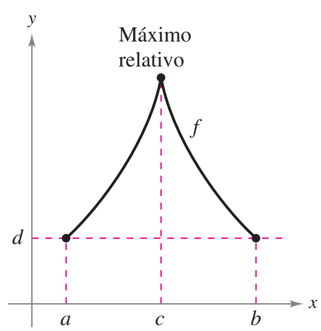
Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Si

$$f(a) = f(b)$$

entonces existe al menos un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.



a) f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)



b) f es continua en $[a, b]$
Figura 3.8

DEMOSTRACIÓN Sea $f(a) = d = f(b)$.

Caso 1: Si $f(x) = d$ para todo x en $[a, b]$, f es constante en el intervalo y, por el teorema 2.2, $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b).

Caso 2: Suponer que $f(x) > d$ para algún x en (a, b). Por el teorema del valor extremo, se sabe que f tiene un máximo en algún punto c en el intervalo. Además, como $f(c) > d$, este máximo no puede estar en los puntos terminales. De tal modo, f tiene un máximo en el intervalo *abierto* (a, b). Esto implica que $f(c)$ es un máximo *relativo* y por el teorema 3.2, c es un número crítico de f. Por último, como f es derivable en c, es posible concluir que $f'(c) = 0$.

Caso 3: Si $f(x) < d$ para algún x en (a, b), se puede utilizar un argumento similar al del caso 2, pero implicando el mínimo en vez del máximo.

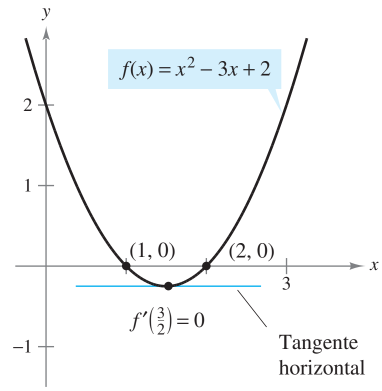
De acuerdo con el teorema de Rolle, puede verse que si una función f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y si $f(a) = f(b)$, debe existir al menos un valor x entre a y b en el cual la gráfica de f tiene una tangente horizontal, como se muestra en la figura 3.8*a*. Si se elimina el requerimiento de derivabilidad del teorema de Rolle, f seguirá teniendo un número crítico en (a, b), pero quizá no produzca una tangente horizontal. Un caso de este tipo se presenta en la figura 3.8*b*.

EJEMPLO 1 Ilustración del teorema de Rolle

Encontrar las dos intersecciones en x de

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

y demostrar que $f'(x) = 0$ en algún punto entre las dos intersecciones en x.



El valor de x para el cual $f'(x) = 0$ está entre las dos intersecciones con el eje x
Figura 3.9

Solución Advertir que f es derivable en toda la recta real. Igualando a 0 $f(x)$ se obtiene

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad \text{Igualar } f(x) \text{ a cero.}$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0. \qquad \text{Factor.}$$

De tal modo, $f(1) = f(2) = 0$, y de acuerdo con el teorema de Rolle se sabe que *existe* al menos una c en el intervalo $(1, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Para *determinar* una c de este tipo, es factible resolver la ecuación

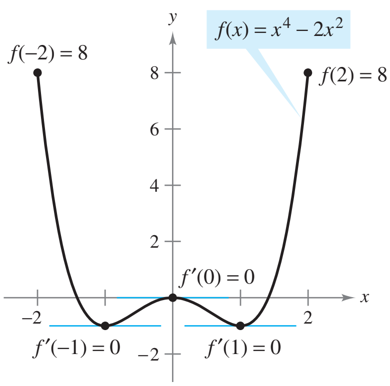
$$f'(x) = 2x - 3 = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

y determinar que $f'(x) = 0$ cuando $x = \frac{3}{2}$. Advertir que el valor de x se encuentra en el intervalo abierto $(1, 2)$, como se indica en la figura 3.9.

El teorema de Rolle establece que si f satisface las condiciones del teorema, debe haber *al menos* un punto entre a y b en el cual la derivada es 0. Es posible que exista más de un punto de estas características, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Ilustración del teorema de Rolle

Sea $f(x) = x^4 - 2x^2$. Determinar todos los valores de c en el intervalo $(-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.



$f'(x) = 0$ para más de un valor de x en el intervalo $(-2, 2)$
Figura 3.10

Solución Para empezar, advertir que la función satisface las condiciones del teorema de Rolle. Esto es, f es continua en el intervalo $[-2, 2]$ y derivable en el intervalo $(-2, 2)$. Además, debido a que $f(-2) = f(2) = 8$, es posible concluir que existe al menos una c en $(-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Igualando a 0 la derivada, se obtiene

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

$$4x(x - 1)(x + 1) = 0 \qquad \text{Factor.}$$

$$x = 0, 1, -1. \qquad \text{Valores de } x \text{ para los cuales } f'(x) \text{ es igual a cero.}$$

De tal modo, en el intervalo $(-2, 2)$, la derivada es cero en valores diferentes de x, como se indica en la figura 3.10.

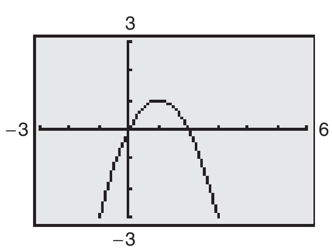


Figura 3.11

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Una herramienta de graficación puede utilizarse para indicar si los puntos sobre las gráficas de los ejemplos 1 y 2 son mínimos o máximos relativos de las funciones. Sin embargo, al usar una herramienta de graficación, se debe tener presente que es posible obtener imágenes o gráficas equivocadas. Por ejemplo, usar una herramienta de graficación para representar

$$f(x) = 1 - (x - 1)^2 - \frac{1}{1\,000(x - 1)^{1/7} + 1}.$$

Con la mayoría de las ventanas de visión, parece ser que la función tiene un máximo de 1 cuando $x = 1$ (ver la figura 3.11). No obstante al evaluar la función en $x = 1$, se observará que $f(1) = 0$. Para determinar el comportamiento de esta función cerca de $x = 1$, es necesario examinar la gráfica de manera analítica para obtener la imagen completa.

El teorema del valor medio

El teorema de Rolle puede utilizarse para probar otro teorema: el **teorema del valor medio**.

TEOREMA 3.4 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

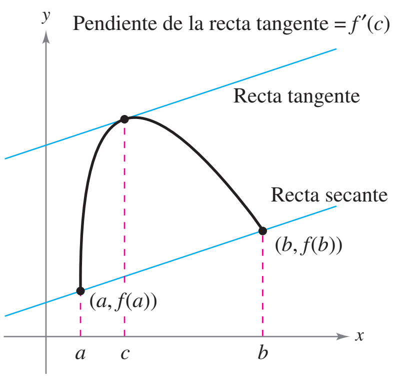


Figura 3.12

DEMOSTRACIÓN Hacemos refererencia a la figura 3.12. La ecuación de la recta secante que contiene los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$y = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) + f(a).$$

Sea $g(x)$ la diferencia entre $f(x)$ y y. Entonces

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - y \\ &= f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) - f(a). \end{aligned}$$

Evaluando g en a y b, se observa que $g(a) = 0 = g(b)$. Como f es continua en $[a, b]$ se sigue que g también es continua en $[a, b]$. Además, en virtud de que f es derivable, g también lo es, y resulta posible aplicar el teorema de Rolle a la función g. Así, existe un número c en (a, b) tal que $g'(c) = 0$, lo que implica que

$$\begin{aligned} 0 &= g'(c) \\ &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

De tal modo, existe un número c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

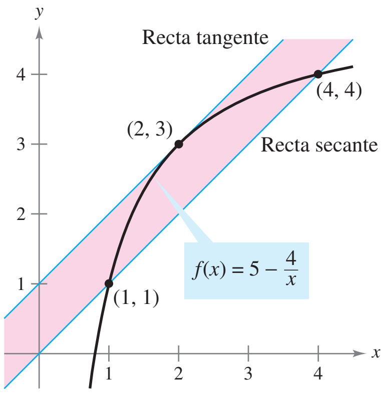
NOTA El término "medio" en el teorema del valor medio se refiere al ritmo de cambio medio (o promedio) de f en el intervalo $[a, b]$.

Mary Evans Picture Library

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813)
El teorema del valor medio fue demostrado por primera vez por el famoso matemático Joseph-Louis Lagrange. Nacido en Italia, Lagrange formó parte de la corte de Federico El Grande en Berlín durante 20 años. Después, se trasladó a Francia, donde se reunió con el emperador Napoleón Bonaparte, quien dijo lo siguiente: "Lagrange es la cúspide de las ciencias matemáticas".

Aunque es posible utilizar el teorema del valor medio de manera directa en la solución de problemas, se usa más a menudo para demostrar otros teoremas. De hecho, algunas personas consideran que éste es el teorema más importante en el cálculo (se relaciona estrechamente con el teorema fundamental del cálculo explicado en la sección 4.4). Por ahora, es posible obtener una idea de la versatilidad de este teorema considerando los resultados planteados en los ejercicios 81 a 89 de esta sección.

El teorema del valor medio tiene implicaciones para ambas interpretaciones básicas de la derivada. Geométricamente, el teorema garantiza la existencia de una recta tangente que es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, como se indica en la figura 3.12. El ejemplo 3 ilustra esta interpretación geométrica del teorema del valor medio. En términos del ritmo o velocidad de cambio, el teorema del valor medio implica que debe haber un punto en el intervalo abierto (a, b) en el cual el ritmo o velocidad de cambio instantánea es igual al ritmo o velocidad de cambio promedio sobre el intervalo $[a, b]$. Esto se ilustra en el ejemplo 4.



La recta tangente en (2, 3) es paralela a la línea secante que pasa por (1, 1) y (4, 4)
Figura 3.13

EJEMPLO 3 Determinación de una recta tangente

Dada $f(x) = 5 - (4/x)$, determinar todos los valores de c en el intervalo abierto $(1, 4)$ tales que

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}.$$

Solución La pendiente de la recta secante que pasa por $(1, f(1))$ y $(4, f(4))$ es

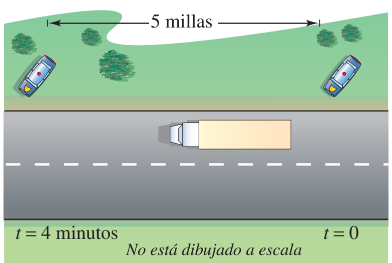
$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 1}{4 - 1} = 1.$$

Nótese que f satisface las condiciones del teorema del valor medio. Esto es que f es continua en el intervalo $[1, 4]$ y derivable en el intervalo $(1, 4)$. Entonces, existe al menos un número c en $(1, 4)$ tal que $f'(c) = 1$. Resolviendo la ecuación $f'(x) = 1$, se obtiene

$$f'(x) = \frac{4}{x^2} = 1$$

que implica $x = \pm 2$. De tal modo, en el intervalo $(1, 4)$, se puede concluir que $c = 2$, como se indica en la figura 3.13.

EJEMPLO 4 Determinación del ritmo de cambio instantáneo



En algún tiempo t, la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio durante los 4 minutos
Figura 3.14

Dos patrullas estacionadas equipadas con radar se encuentran a 5 millas de distancia sobre una autopista, como se indica en la figura 3.14. Cuando pasa un camión al lado de la primera patrulla, la velocidad de éste se registra en un valor de 55 millas por hora. Cuatro minutos después, cuando el camión pasa al lado de la segunda patrulla, el registro de velocidad corresponde a 50 millas por hora. Demostrar que el camión ha excedido el límite de velocidad (de 55 millas por hora) en algún momento dentro del intervalo de los 4 minutos señalados.

Solución Sea $t = 0$ el tiempo (en horas) cuando el camión pasa al lado de la primera patrulla. El tiempo en el que el camión pasa al lado de la segunda patrulla es

$$t = \frac{4}{60} = \frac{1}{15} \text{ hora.}$$

Si $s(t)$ representa la distancia (en millas) recorridas por el camión, se tiene que $s(0) = 0$ y $s(\frac{1}{15}) = 5$. Por tanto, la velocidad promedio del camión sobre el trecho de cinco millas de autopista es

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{s(1/15) - s(0)}{(1/15) - 0}$$

$$= \frac{5}{1/15} = 75 \text{ millas por hora.}$$

Suponiendo que la función de posición es derivable, es posible aplicar el teorema del valor medio para concluir que el camión debe haber estado viajando a razón de 75 millas por hora en algún momento durante los 4 minutos.

Una forma alternativa útil del teorema del valor medio es como sigue: si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(c).$$

Forma alternativa del teorema del valor medio.

NOTA Al realizar los ejercicios de esta sección tener presente que las funciones polinomiales, las racionales y las trigonométricas son derivables en todos los puntos en sus dominios. ■

3.2 Ejercicios

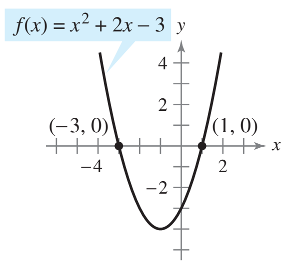
En los ejercicios 1 a 4, explicar por qué el teorema de Rolle no se aplica a la función aun cuando existan a y b tales que $f(a) = f(b)$.

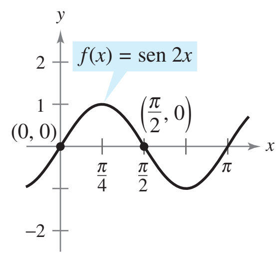
1. $f(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$, $[-1, 1]$
2. $f(x) = \cot \dfrac{x}{2}$, $[\pi, 3\pi]$
3. $f(x) = 1 - |x - 1|$, $[0, 2]$
4. $f(x) = \sqrt{(2 - x^{2/3})^3}$, $[-1, 1]$

En los ejercicios 5 a 8, determinar dos intersecciones con el eje x de la función f y demostrar que $f'(x) = 0$ en algún punto entre las dos intersecciones.

5. $f(x) = x^2 - x - 2$
6. $f(x) = x(x - 3)$
7. $f(x) = x\sqrt{x + 4}$
8. $f(x) = -3x\sqrt{x + 1}$

Teorema de Rolle **En los ejercicios 9 y 10, se muestra la gráfica de f. Aplicar el teorema de Rolle y determinar todos los valores de c tales que $f'(c) = 0$ en algún punto entre las intersecciones marcadas.**

9.


10.


En los ejercicios 11 a 24, determinar si es posible aplicar el teorema de Rolle a f en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si se puede aplicar el teorema de Rolle, determinar todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b) tales que $f'(c) = 0$. Si no se puede aplicar, explicar por qué no.

11. $f(x) = -x^2 + 3x$, $[0, 3]$
12. $f(x) = x^2 - 5x + 4$, $[1, 4]$
13. $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, $[1, 3]$
14. $f(x) = (x - 3)(x + 1)^2$, $[-1, 3]$
15. $f(x) = x^{2/3} - 1$, $[-8, 8]$
16. $f(x) = 3 - |x - 3|$, $[0, 6]$
17. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$, $[-1, 3]$
18. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$, $[-1, 1]$
19. $f(x) = \text{sen } x$, $[0, 2\pi]$
20. $f(x) = \cos x$, $[0, 2\pi]$
21. $f(x) = \dfrac{6x}{\pi} - 4 \text{ sen}^2 x$, $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$
22. $f(x) = \cos 2x$, $[-\pi, \pi]$
23. $f(x) = \tan x$, $[0, \pi]$
24. $f(x) = \sec x$, $[\pi, 2\pi]$

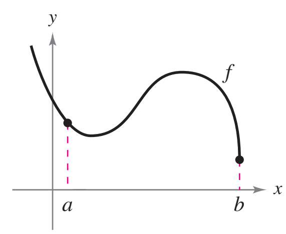
En los ejercicios 25 a 28, utilizar una herramienta de graficación para representar la función en el intervalo cerrado $[a, b]$. Determinar si el teorema de Rolle puede aplicarse a f en el intervalo y, si es así, encontrar todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b) tales que $f'(c) = 0$.

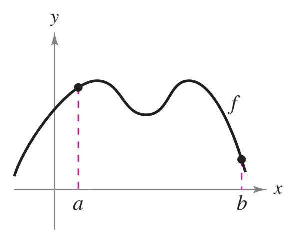
25. $f(x) = |x| - 1$, $[-1, 1]$
26. $f(x) = x - x^{1/3}$, $[0, 1]$
27. $f(x) = x - \tan \pi x$, $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$
28. $f(x) = \dfrac{x}{2} - \text{sen } \dfrac{\pi x}{6}$, $[-1, 0]$

29. ***Movimiento vertical*** La altura de una pelota t segundos después de que se lanzó hacia arriba a partir de una altura de 6 pies y con una velocidad inicial de 48 pies por segundo es $f(t) = -16t^2 + 48t + 6$.
   a) Verificar que $f(1) = f(2)$.
   b) De acuerdo con el teorema de Rolle, ¿cuál debe ser la velocidad en algún tiempo en el intervalo $(1, 2)$? Determinar ese tiempo.

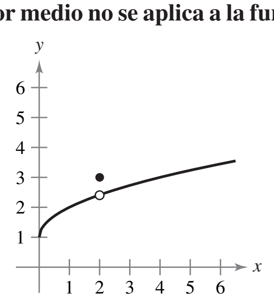
30. ***Costos de nuevos pedidos*** El costo de pedido y transporte C para componentes utilizados en un proceso de manufactura se aproxima mediante $C(x) = 10\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x + 3}\right)$, donde C se mide en miles de dólares y x es el tamaño del pedido en cientos.
   a) Verificar que $C(3) = C(6)$.
   b) De acuerdo con el teorema de Rolle, el ritmo de cambio del costo debe ser 0 para algún tamaño de pedido en el intervalo $(3, 6)$. Determinar ese tamaño de pedido.

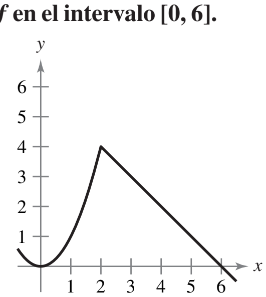
En los ejercicios 31 y 32, copiar la gráfica y dibujar la recta secante a la misma a través de los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Después dibujar cualquier recta tangente a la gráfica para cada valor de c garantizada por el teorema del valor medio.

31.


32.


Redacción **En los ejercicios 33 a 36 explicar por qué el teorema de valor medio no se aplica a la función f en el intervalo $[0, 6]$.**

33.


34.


35. $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$
36. $f(x) = |x - 3|$

37. ***Teorema del valor medio*** Considerar la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 5$. *a*) Determinar la ecuación de la recta secante que une los puntos $(-1, 4)$ y $(2, 1)$. *b*) Utilizar el teorema del valor medio para determinar un punto c en el intervalo $(-1, 2)$ tal que la recta tangente en c sea paralela a la recta secante. *c*) Encontrar la ecuación de la recta tangente que pasa por c. *d*) Utilizar después una herramienta de graficación para representar f, la recta secante y la recta tangente.

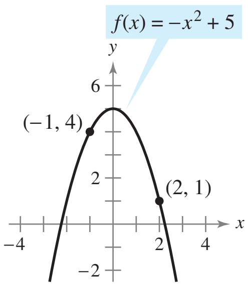


Figura para 37

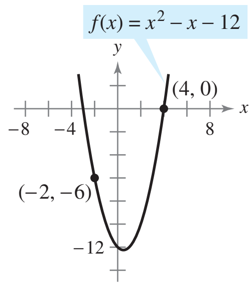


Figura para 38

38. ***Teorema del valor medio*** Considerar la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x - 12$. *a*). Encontrar la ecuación de la recta secante que une los puntos $(-2, -6)$ y $(4, 0)$. *b*) Emplear el teorema del valor medio para determinar un punto c en el intervalo $(-2, 4)$ tal que la recta tangente en c sea paralela a la recta secante. *c*) Determinar la ecuación de la recta tangente que pasa por c. *d*) Utilizar después una herramienta de graficación para representar f, la recta secante y la recta tangente.

En los ejercicios 39 a 48, determinar si el teorema del valor medio puede aplicarse a f sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Si el teorema del valor medio puede aplicarse, encontrar todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Si no puede aplicarse explicar por qué no.

39. $f(x) = x^2, \quad [-2, 1]$

40. $f(x) = x^3, \quad [0, 1]$

41. $f(x) = x^3 + 2x, \quad [-1, 1]$

42. $f(x) = x^4 - 8x, \quad [0, 2]$

43. $f(x) = x^{2/3}, \quad [0, 1]$

44. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x}, \quad [-1, 2]$

45. $f(x) = |2x + 1|, \quad [-1, 3]$

46. $f(x) = \sqrt{2 - x}, \quad [-7, 2]$

47. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad [0, \pi]$

48. $f(x) = \cos x + \tan x, \quad [0, \pi]$

En los ejercicios 49 a 52, utilizar una herramienta de graficación para *a*) representar la función f sobre el intervalo, *b*) encontrar y representar la recta secante que pasa por los puntos sobre la gráfica de f en los puntos terminales del intervalo dado y *c*) encontrar y representar cualesquiera rectas tangentes a la gráfica de f que sean paralelas a la recta secante.

49. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

50. $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x, \quad [-\pi, \pi]$

51. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [1, 9]$

52. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2, \quad [0, 6]$

53. ***Movimiento vertical*** La altura de un objeto tres segundos después de que se deja caer desde una altura de 300 metros es $s(t) = -4.9t^2 + 300$.

a) Encontrar la velocidad promedio del objeto durante los primeros tres segundos.

b) Utilizar el teorema del valor medio para verificar que en algún momento durante los primeros tres segundos de la caída la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio. Determinar ese momento.

54. ***Ventas*** Una compañía introduce un nuevo producto para el cual el número de unidades vendidas S es

$$S(t) = 200\left(5 - \frac{9}{2 + t}\right)$$

donde t es el tiempo en meses.

a) Encontrar el valor promedio de cambio de $S(t)$ durante el primer año.

b) ¿Durante qué mes del primer año $S'(t)$ es igual al valor promedio de cambio?

Desarrollo de conceptos

55. Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si existe c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$, ¿se concluye que $f(a) = f(b)$? Explicar.

56. Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Además, suponer que $f(a) = f(b)$ y que c es un número real en el intervalo tal que $f'(c) = 0$. Encontrar un intervalo para la función g sobre la cual pueda aplicarse el teorema de Rolle y determinar el punto crítico correspondiente de g (k es una constante).

a) $g(x) = f(x) + k$ *b*) $g(x) = f(x - k)$

c) $g(x) = f(kx)$

57. La función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 - x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

es derivable en $(0, 1)$ y satisface $f(0) = f(1)$. Sin embargo, su derivada nunca es cero en $(0, 1)$. ¿Contradice lo anterior al teorema de Rolle? Explicar.

58. ¿Es posible encontrar una función f tal que $f(-2) = -2$, $f(2) = 6$ y $f'(x) < 1$ para toda x. ¿Por qué sí o por qué no?

59. ***Velocidad*** Un avión despega a las 2:00 p.m. en un vuelo de 2 500 millas. El avión llega a su destino a las 7:30 p.m. Explicar por qué hay al menos dos momentos durante el vuelo en los que la velocidad del avión es de 400 millas por hora.

60. ***Temperatura*** Cuando se saca un objeto del horno y se pone a temperatura ambiente constante de 90° F la temperatura de su núcleo es de 1 500° F. Cinco horas después la temperatura del núcleo corresponde a 390° F. Explicar por qué debe existir un momento (o instante) en el intervalo en el que la temperatura disminuye a un ritmo o tasa de 222° F por hora.

61. ***Velocidad*** Dos ciclistas empiezan una carrera a las 8:00 a.m. Ambos terminan la carrera 2 horas y 15 minutos después. Demostrar en qué momento de la carrera los ciclistas viajan a la misma velocidad.

62. ***Aceleración*** A las 9:13 a.m., un automóvil deportivo viaja a 35 millas por hora. Dos minutos después se desplaza a 85 millas por hora. Demostrar que en algún momento durante este intervalo, la aceleración del automóvil es exactamente igual a 1 500 millas por hora al cuadrado.

63. Considerar la función $f(x) = 3\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar f y f'.

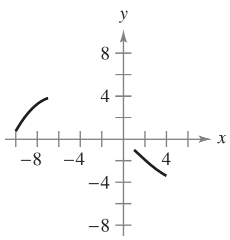
b) ¿Es f una función continua? ¿Es f' una función continua?

c) ¿Se aplica el teorema de Rolle al intervalo $[-1, 1]$? ¿Se aplica en el intervalo $[1, 2]$? Explicar.

d) Evaluar si es posible, $\lim\limits_{x \to 3^-} f'(x)$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f'(x)$.

Para discusión

64. ***Razonamiento gráfico*** La figura muestra dos partes de la gráfica de una función derivable continua f en $[-10, 4]$. La derivada f' también es continua.



a) Explicar por qué f debe tener al menos un cero en $[-10, 4]$.

b) Explicar por qué f' debe tener también al menos un cero en el intervalo $[-10, 4]$. ¿Cómo se llaman estos ceros?

c) Realizar un posible dibujo de la función con un cero con f' en el intervalo $[-10, 4]$.

d) Realizar un posible dibujo de la función con dos ceros de f' en el intervalo $[-10, 4]$.

e) ¿Fueron necesarias las condiciones de continuidad de f y f' para efectuar las partes de la *a*) a la *d*)? Explicar.

Para pensar **En los ejercicios 65 y 66, dibujar la gráfica de una función arbitraria f que satisface la condición dada pero que no cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[-5, 5]$.**

65. f es continua en $[-5, 5]$.

66. f no es continua en $[-5, 5]$.

En los ejercicios 67 a 70, usar el teorema del valor intermedio y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación tiene exactamente una solución real.

67. $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$

68. $2x^5 + 7x - 1 = 0$

69. $3x + 1 - \operatorname{sen} x = 0$

70. $2x - 2 - \cos x = 0$

71. Determinar los valores a, b y c tales que la función f satisfaga la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 3]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ ax + b, & 0 < x \le 1 \\ x^2 + 4x + c, & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

72. Determinar los valores a, b, c y d de manera que la función f satisfaga la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 2]$.

$$f(x) = \begin{cases} a, & x = -1 \\ 2, & -1 < x \le 0 \\ bx^2 + c, & 0 < x \le 1 \\ dx + 4, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 73 a 76, encontrar una función f que tiene la derivada $f'(x)$ y cuya gráfica pasa por el punto dado. Explicar el razonamiento.**

73. $f'(x) = 0, \quad (2, 5)$

74. $f'(x) = 4, \quad (0, 1)$

75. $f'(x) = 2x, \quad (1, 0)$

76. $f'(x) = 2x + 3, \quad (1, 0)$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 77 a 80, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

77. El teorema del valor medio puede aplicarse a $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[-1, 1]$.

78. Si la gráfica de una función tiene tres intersecciones con el eje x, entonces debe tener al menos dos puntos en los cuales su recta tangente es horizontal.

79. Si la gráfica de una función polinomial tiene tres intersecciones con el eje x, entonces debe tener al menos dos puntos en los cuales su recta tangente es horizontal.

80. Si $f'(x) = 0$ para todo x en el dominio de f, entonces f es una función constante.

81. Demostrar que si $a > 0$ y n es cualquier entero positivo, entonces la función polinomial $p(x) = x^{2n+1} + ax + b$ no puede tener dos raíces reales.

82. Demostrar que si $f'(x) = 0$ para todo x en el intervalo (a, b), entonces f es constante en (a, b).

83. Sea $p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Demostrar que para cualquier intervalo $[a, b]$, el valor c garantizado por el teorema del valor medio es el punto medio del intervalo.

84. *a*) Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^3 + x^2 + 3x + 2$. Entonces $f(-1) = g(-1)$ y $f(2) = g(2)$. Demostrar que hay al menos un valor c en el intervalo $(-1, 2)$ donde la recta tangente a f en $(c, f(c))$ es paralela a la recta tangente g en $(c, g(c))$. Identificar c.

b) Sea f y g la función derivable en $[a, b]$ donde $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$. Demostrar que hay al menos un valor c en el intervalo (a, b) donde la recta tangente f en $(c, f(c))$ es paralela a la recta tangente a g en $(c, g(c))$.

85. Demostrar que si f es derivable en $(-\infty, \infty)$ y $f'(x) < 1$ para todo número real, entonces f tiene al menos un punto fijo. Un punto fijo para una función f es un número real c tal que $f(c) = c$.

86. Usar el resultado del ejercicio 85 para demostrar que $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$ tiene al menos un punto fijo.

87. Demostrar que $|\cos a - \cos b| \le |a - b|$ para toda a y b.

88. Demostrar que $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \le |a - b|$ para toda a y b.

89. Sea $0 < a < b$. Utilizar el teorema del valor medio para demostrar que

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b - a}{2\sqrt{a}}.$$

3.3 Funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada

- **Determinar los intervalos sobre los cuales una función es creciente o decreciente.**
- **Aplicar el criterio de la primera derivada para determinar los extremos relativos de una función.**

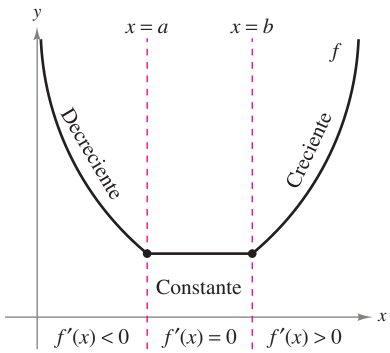
Funciones crecientes y decrecientes

En esta sección se verá cómo se pueden utilizar las derivadas para *clasificar* extremos relativos ya sea como mínimos o como máximos relativos. En primer término, es importante definir las funciones crecientes y decrecientes.

DEFINICIÓN DE FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Una función f es **creciente** sobre un intervalo si para cualesquiera dos números x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función f es **decreciente** sobre un intervalo si para cualesquiera dos números x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$.



La derivada se relaciona con la pendiente de una función
Figura 3.15

Una función es creciente si, *cuando x se mueve hacia la derecha*, su gráfica asciende, y es decreciente si su gráfica desciende. Por ejemplo, la función en la figura 3.15 es decreciente en el intervalo $(-\infty, a)$, es constante en el intervalo (a, b) y creciente en el intervalo (b, ∞). Como se muestra en el teorema 3.5, una derivada positiva implica que la función es creciente; una derivada negativa implica que la función es decreciente, y una derivada cero en todo el intervalo implica que la función es constante en ese intervalo.

TEOREMA 3.5 CRITERIO PARA LAS FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Sea f una función que es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b).

1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.
2. Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b) entonces f es decreciente en $[a, b]$.
3. Si $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b) entonces f es constante en $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN Para probar el primer caso, supongamos que $f'(x) > 0$ para todo x en el intervalo (a, b) y sean $x_1 < x_2$ cualesquiera dos puntos en el intervalo. Mediante el teorema del valor medio, se sabe que existe un número c tal que $x_1 < c < x_2$, y

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $f'(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$, se sabe que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

lo cual implica que $f(x_1) < f(x_2)$. De tal modo, f es creciente en el intervalo. El segundo caso tiene una demostración similar (ver el ejercicio 104), y el tercer caso se dio en el ejercicio 82 en la sección 3.2.

NOTA Las conclusiones en los primeros dos casos del teorema 3.5 son válidas incluso si $f'(x) = 0$ en un número finito de valores de x en (a, b).

EJEMPLO 1 Intervalos sobre los cuales f es creciente y decreciente

Determinar los intervalos abiertos sobre los cuales $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ es creciente o decreciente.

Solución Nótese que f es derivable en toda la recta de los números reales. Para determinar los puntos críticos de f, igualar a cero $f'(x)$.

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 0 \qquad \text{Derivar e igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

$$3(x)(x - 1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x = 0, 1 \qquad \text{Puntos críticos.}$$

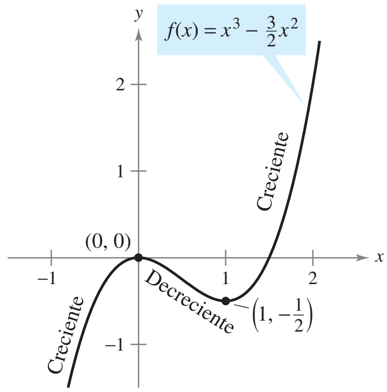


Figura 3.16

Como no hay puntos para los cuales f' no exista, es posible concluir que $x = 0$ y $x = 1$ son los únicos puntos críticos. La tabla siguiente resume la prueba de los tres intervalos determinados por estos dos puntos críticos.

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Signo de $f'(x)$	$f'(-1) = 6 > 0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = 6 > 0$
Conclusión	Creciente	Decreciente	Creciente

De tal modo, f es creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(0, 1)$, como se indica en la figura 3.16.

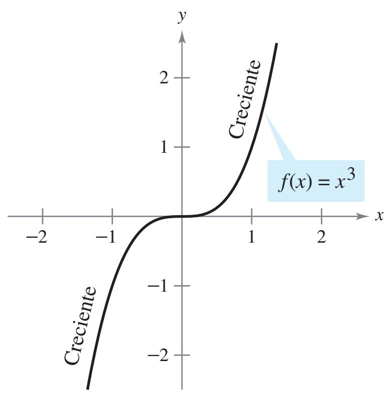
El ejemplo 1 muestra cómo determinar intervalos sobre los cuales una función es creciente o decreciente. La guía siguiente resume los pasos que se siguen en el ejemplo.

Estrategias para determinar los intervalos en los que una función es creciente o decreciente

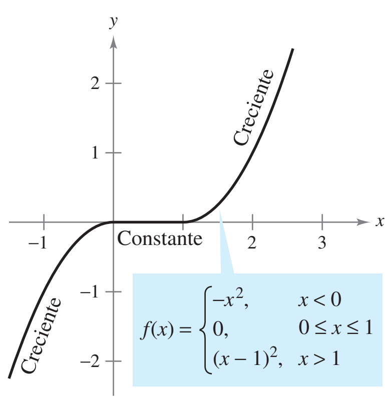
Sea f continua en el intervalo (a, b). Para encontrar los intervalos abiertos sobre los cuales f es creciente o decreciente, hay que seguir los siguientes pasos.

1. Localizar los puntos críticos de f en (a, b), y utilizarlos para determinar intervalos de prueba.
2. Determinar el signo de $f'(x)$ en un valor de prueba en cada uno de los intervalos.
3. Recurrir al teorema 3.5 para determinar si f es creciente o decreciente para cada intervalo.

Estas estrategias también son válidas si el intervalo (a, b) se sustituye por un intervalo de la forma $(-\infty, b)$, (a, ∞) o $(-\infty, \infty)$.



***a*)** Función estrictamente monótona



***b*)** No estrictamente monótona
Figura 3.17

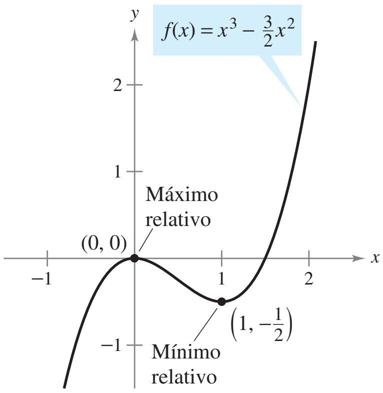
Una función es **estrictamente monótona** sobre un intervalo si es creciente o decreciente en todo el intervalo. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es estrictamente monótona en toda la recta de los números reales porque es creciente siempre sobre ella, como se indica en la figura 3.17*a*. La función que se muestra en la figura 3.17*b* no es estrictamente monótona en toda la recta de los números reales porque es constante en el intervalo [0, 1].

Criterio de la primera derivada

Una vez que se han determinado los intervalos de crecimiento o decrecimiento, es fácil localizar los extremos relativos de la función. Por ejemplo, en la figura 3.18 (del ejemplo 1), la función

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

tiene un máximo relativo en el punto (0, 0) porque f es creciente inmediatamente a la izquierda de $x = 0$ y decreciente inmediatamente a la derecha de $x = 0$. De manera similar, f tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -\frac{1}{2})$ debido a que f decrece de inmediato a la izquierda de $x = 1$ y crece de inmediato a la derecha de $x = 1$. El siguiente teorema, denominado prueba o criterio de la primera derivada, precisa más esta observación.

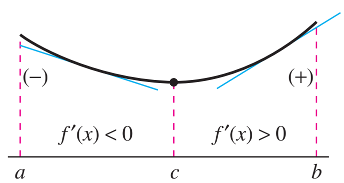


Extremos relativos de f
Figura 3.18

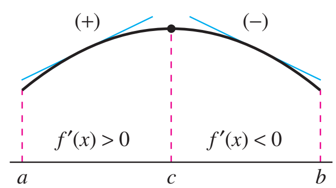
TEOREMA 3.6 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Sea c un punto crítico de una función f que es continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en el intervalo, excepto posiblemente en c, entonces $f(c)$ puede clasificarse como sigue.

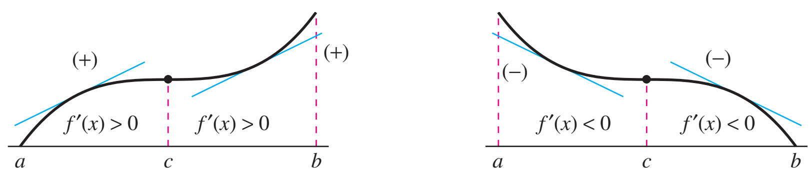
1. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un *mínimo relativo* en $(c, f(c))$.
2. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un *máximo relativo* en $(c, f(c))$.
3. Si $f'(x)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo.



Mínimo relativo



Máximo relativo



Ni mínimo relativo ni máximo relativo

DEMOSTRACIÓN Supóngase que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c. Entonces ahí existen a y b en I tales que

$$f'(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ en } (a, c)$$

y

$$f'(x) > 0 \text{ para todo } x \text{ en } (c, b).$$

Por el teorema 3.5, f es decreciente en $[a, c]$ y creciente en $[c, b]$. De tal modo, $f(c)$ es un mínimo de f en el intervalo abierto (a, b) y, en consecuencia, un mínimo relativo de f. Esto demuestra el primer caso del teorema. El segundo caso puede demostrarse de una manera similar (ver el ejercicio 105).

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio de la primera derivada

Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Solución Obsérvese que f es continua en el intervalo $(0, 2\pi)$. Para determinar los puntos críticos de f en este intervalo, hacer $f'(x)$ igual a 0.

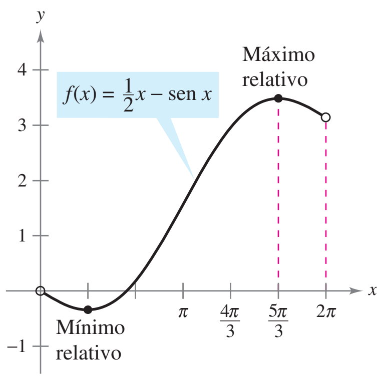
$$f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \qquad \text{Puntos críticos.}$$

Debido a que f' existe en todos los puntos, se puede concluir que $x = \pi/3$ y $x = 5\pi/3$ son los únicos puntos críticos. La tabla resume valores prueba en cada uno de los tres intervalos de prueba determinados por estos dos puntos críticos.

Intervalo	$0 < x < \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$
Valor de prueba	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \pi$	$x = \frac{7\pi}{4}$
Signo de $f'(x)$	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$	$f'(\pi) > 0$	$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right) < 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente



Ocurre un mínimo relativo donde f cambia de decreciente a creciente, y un máximo relativo donde f cambia de creciente a decreciente
Figura 3.19

Aplicando el criterio de la primera derivada, es posible concluir que f tiene un mínimo relativo en el punto donde

$$x = \frac{\pi}{3} \qquad \text{Valor de } x \text{ donde ocurre el mínimo relativo.}$$

y un máximo relativo en el punto en el que

$$x = \frac{5\pi}{3} \qquad \text{Valor de } x \text{ donde ocurre el máximo relativo.}$$

como se muestra en la figura 3.19.

EXPLORACIÓN

Comparación de los enfoques gráfico y analítico De la sección 3.2, se sabe que una herramienta de graficación, por sí misma, puede producir información equivocada acerca de los extremos relativos de una gráfica. Sin embargo, *utilizada en conjunción con un enfoque analítico* una herramienta de graficación tiene la posibilidad de ofrecer una buena forma de reforzar sus conclusiones. Recurra a una herramienta de graficación para representar la función del ejemplo 2. Después utilizar las características *zoom* y *trace* para estimar los extremos relativos. ¿Cómo son de precisas las aproximaciones gráficas que se obtuvieron?

Nótese que en los ejemplos 1 y 2 las funciones dadas son derivables en toda la recta real. Para tales funciones, los únicos puntos críticos son aquellos para los cuales $f'(x) = 0$. El ejemplo 3 se relaciona con una función que tiene dos tipos de puntos críticos: aquellos para los cuales $f'(x) = 0$ y aquellos para los cuales f no es derivable.

EJEMPLO 3 Aplicación del criterio de la primera derivada

Encontrar los extremos relativos de

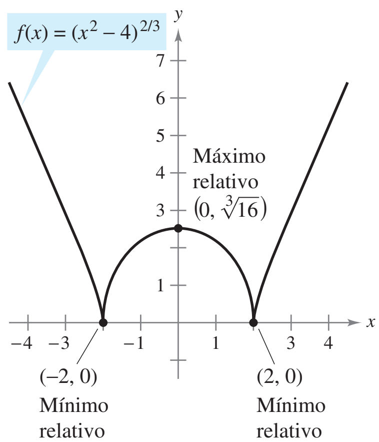
$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}.$$

Solución Empezar observando que f es continua en toda la recta real. La derivada de f

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3}(2x) \qquad \text{Regla de la potencia general.}$$

$$= \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}} \qquad \text{Simplificar.}$$

es 0 cuando $x = 0$ y no existe cuando $x = \pm 2$. De tal modo, los puntos críticos son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$. La tabla resume los valores prueba de cuatro intervalos determinados por estos puntos críticos.



Se puede aplicar el criterio de la primera derivada para encontrar los extremos relativos
Figura 3.20

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

Aplicando el criterio de la primera derivada, se puede concluir que f tiene un mínimo relativo en el punto $(-2, 0)$, un máximo relativo en el punto $(0, \sqrt[3]{16})$, y otro mínimo relativo en el punto $(2, 0)$, como se ilustra en la figura 3.20.

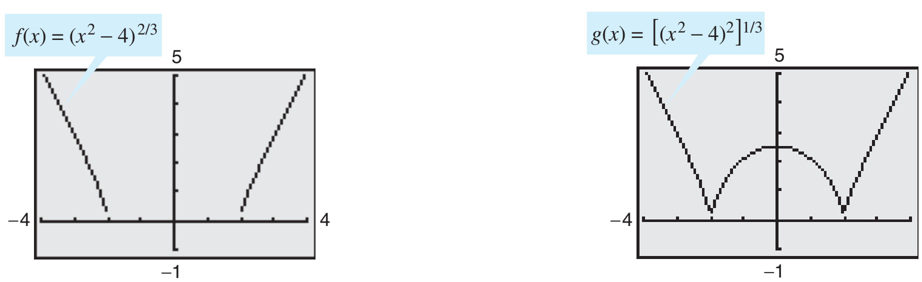
CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Cuando se utiliza una herramienta de graficación para representar una función que incluya radicales o exponentes racionales, hay que cerciorarse de entender la forma en que la herramienta de graficación evalúa las expresiones radicales. Por ejemplo, aun cuando

$$f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$$

y

$$g(x) = [(x^2 - 4)^2]^{1/3}$$

son los mismos algebraicamente, algunas herramientas de graficación establecen una distinción entre estas dos funciones. ¿Cuál de las gráficas que se muestran en la figura 3.21 es incorrecta? ¿Por qué la herramienta de graficación produce una gráfica incorrecta?



¿Cuál de las gráficas es incorrecta?
Figura 3.21

Al usar el criterio de la primera derivada, es necesario asegurarse de que se considere el dominio de la función. Por ejemplo, en el siguiente ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

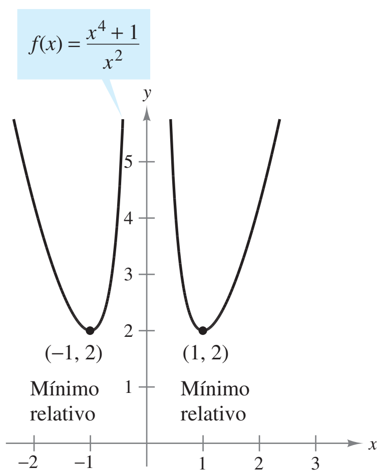
no está definida cuando $x = 0$. Este valor de x debe utilizarse con los puntos críticos para determinar los intervalos de prueba.

EJEMPLO 4 Aplicación del criterio de la primera derivada

Determinar los extremos relativos de $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$.

Solución

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x^{-2} && \text{Reescribir la función original.}\\ f'(x) &= 2x - 2x^{-3} && \text{Derivar.}\\ &= 2x - \frac{2}{x^3} && \text{Reescribir con exponente positivo.}\\ &= \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} && \text{Simplificar.}\\ &= \frac{2(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)}{x^3} && \text{Factorizar.} \end{aligned}$$



Valores de x que no están en el dominio de f, así como los puntos críticos, determinan los intervalos prueba de f'
Figura 3.22

De tal modo, $f'(x)$ es cero en $x = \pm 1$. Además, como $x = 0$ no está en el dominio de f, es necesario utilizar este valor de x junto con los puntos críticos para determinar los intervalos prueba.

$$\begin{aligned} x &= \pm 1 && \text{Puntos críticos, } f'(\pm 1) = 0.\\ x &= 0 && \text{Cero no está en el dominio de } f. \end{aligned}$$

La tabla resume los valores prueba de los cuatro intervalos determinados por estos tres valores de x.

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -2$	$x = -\frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Signo de $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	$f'\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$	$f'(2) > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

Aplicando el criterio de la primera derivada, se puede concluir que f tiene un mínimo relativo en el punto $(-1, 2)$ y otro en el punto $(1, 2)$, como se muestra en la figura 3.22.

TECNOLOGÍA El paso más difícil al aplicar el criterio de la primera derivada es determinar los valores para los cuales la derivada es igual a 0. Por ejemplo, los valores de x para los cuales la derivada de

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$$

es igual a cero son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Si se tiene acceso a tecnología que puede efectuar derivación simbólica y resolver ecuaciones, utilizarla para aplicar el criterio de la primera derivada a esta función.

EJEMPLO 5 La trayectoria de un proyectil

Si un proyectil se lanza desde el nivel del suelo y se ignora la resistencia del aire, el objeto viajará más lejos con un ángulo inicial de 45°. Pero, si el proyectil se lanza desde un punto sobre el nivel del suelo, el ángulo que produce una distancia máxima horizontal no es 45° (ver el ejemplo 5).

Ignorando la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil que se lanza a un ángulo θ es

$$y = \frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2}x^2 + (\tan \theta)x + h, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

donde y es la altura, x es la distancia horizontal, g es la aceleración debida a la gravedad, v_0 es la velocidad inicial y h es la altura inicial. (Esta ecuación se obtuvo en la sección 12.3.) Sea $g = -32$ pies por segundo, $v_0 = 24$ pies por segundo y $h = 9$ pies por segundo. ¿Qué valor de θ producirá una máxima distancia horizontal?

Solución Para encontrar la distancia que el proyectil recorre, sea $y = 0$, y utilizar la fórmula cuadrática para resolver con respecto a x.

$$\frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2}x^2 + (\tan \theta)x + h = 0$$

$$\frac{-32 \sec^2 \theta}{2(24^2)}x^2 + (\tan \theta)x + 9 = 0$$

$$-\frac{\sec^2 \theta}{36}x^2 + (\tan \theta)x + 9 = 0$$

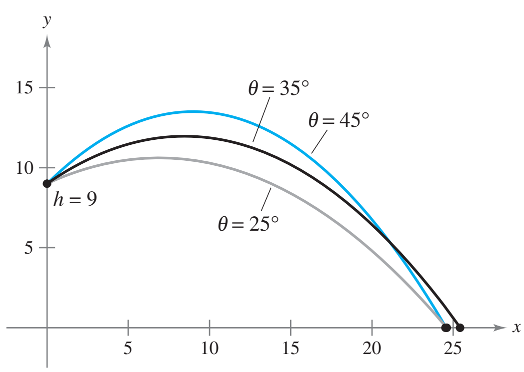
$$x = \frac{-\tan \theta \pm \sqrt{\tan^2 \theta + \sec^2 \theta}}{-\sec^2 \theta/18}$$

$$x = 18 \cos \theta\left(\operatorname{sen} \theta + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + 1}\right), \quad x \ge 0$$

En este punto, se necesita determinar el valor de θ que produce un valor máximo de x. La aplicación del criterio de la primera derivada en forma manual resultaría tediosa. Sin embargo, el uso de tecnología para resolver la ecuación $dx/d\theta = 0$ elimina la mayoría de los cálculos engorrosos. El resultado es que el valor máximo de x ocurre cuando

$$\theta \approx 0.61548 \text{ radianes, o } 35.3°.$$

Esta conclusión se refuerza dibujando la trayectoria del proyectil para diferentes valores de θ como se indica en la figura 3.23. De las tres trayectorias indicadas, notar que la distancia recorrida es mayor para $\theta = 35°$.

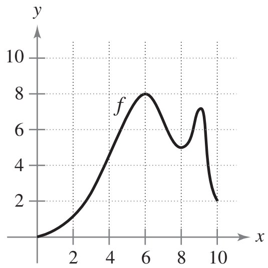


La trayectoria de un proyectil con un ángulo inicial θ
Figura 3.23

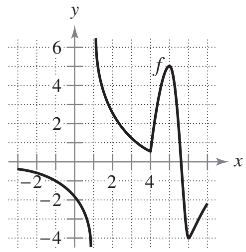
3.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica de *f* para determinar *a*) el intervalo abierto más grande sobre el cual *f* es creciente y *b*) el intervalo abierto más grande sobre el cual *f* es decreciente.

1.

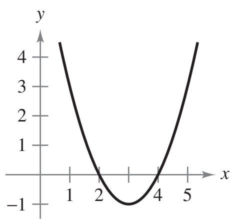


2.

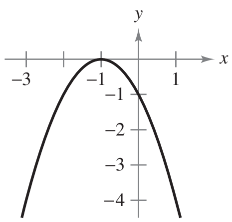


En los ejercicios 3 a 8, utilizar la gráfica para estimar los intervalos abiertos sobre los cuales la función es creciente o decreciente. Posteriormente determinar los mismos intervalos analíticamente.

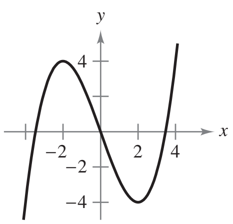
3. $f(x) = x^2 - 6x + 8$



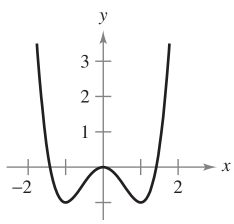
4. $y = -(x + 1)^2$



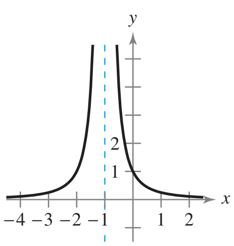
5. $y = \dfrac{x^3}{4} - 3x$



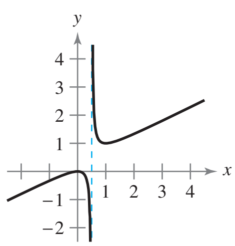
6. $f(x) = x^4 - 2x^2$



7. $f(x) = \dfrac{1}{(x + 1)^2}$



8. $y = \dfrac{x^2}{2x - 1}$



En los ejercicios 9 a 16, identificar los intervalos abiertos sobre los cuales la función es creciente o decreciente.

9. $g(x) = x^2 - 2x - 8$

10. $h(x) = 27x - x^3$

11. $y = x\sqrt{16 - x^2}$

12. $y = x + \dfrac{4}{x}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x - 1, \quad 0 < x < 2\pi$

14. $h(x) = \cos \dfrac{x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi$

15. $y = x - 2\cos x, \quad 0 < x < 2\pi$

16. $f(x) = \cos^2 x - \cos x, \quad 0 < x < 2\pi$

En los ejercicios 17 a 42, *a*) encontrar los puntos críticos de *f* (si los hay), *b*) determinar el (los) intervalo(s) abierto(s) sobre los cuales la función es creciente o decreciente, *c*) aplicar el criterio de la primera derivada para identificar todos los extremos relativos y *d*) utilizar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

17. $f(x) = x^2 - 4x$

18. $f(x) = x^2 + 6x + 10$

19. $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

20. $f(x) = -(x^2 + 8x + 12)$

21. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

22. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

23. $f(x) = (x - 1)^2(x + 3)$

24. $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)$

25. $f(x) = \dfrac{x^5 - 5x}{5}$

26. $f(x) = x^4 - 32x + 4$

27. $f(x) = x^{1/3} + 1$

28. $f(x) = x^{2/3} - 4$

29. $f(x) = (x + 2)^{2/3}$

30. $f(x) = (x - 3)^{1/3}$

31. $f(x) = 5 - |x - 5|$

32. $f(x) = |x + 3| - 1$

33. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$

34. $f(x) = \dfrac{x}{x + 3}$

35. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

36. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2}$

37. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$

38. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$

39. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \le 0 \\ -2x, & x > 0 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \le -1 \\ x^2 - 2, & x > -1 \end{cases}$

41. $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \le 1 \\ 5 - x^2, & x > 1 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1, & x \le 0 \\ -x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}$

En los ejercicios 43 a 50, considerar la función sobre el intervalo $(0, 2\pi)$. Para cada función, *a*) encontrar el (los) intervalo(s) abierto(s) sobre los cuales la función es creciente o decreciente, *b*) aplicar el criterio de la primera derivada para identificar todos los extremos relativos y *c*) utilizar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

43. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos x$

44. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x + 5$

45. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

46. $f(x) = x + 2\operatorname{sen} x$

47. $f(x) = \cos^2(2x)$

48. $f(x) = \sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x$

49. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x$

50. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}$

CAS **En los ejercicios 51 a 56, *a*) utilizar un sistema de álgebra por computadora para derivar la función, *b*) dibujar las gráficas de *f* y *f′* en el mismo conjunto de ejes de coordenadas sobre el intervalo indicado, *c*) encontrar los puntos críticos de *f* en el intervalo abierto y *d*) determinar el (los) intervalo(s) sobre el cual *f′* es positiva y el (los) intervalo(s) sobre el cual es negativa. Comparar el comportamiento de *f* y el signo de *f′*.**

51. $f(x) = 2x\sqrt{9 - x^2}, \quad [-3, 3]$

52. $f(x) = 10\left(5 - \sqrt{x^2 - 3x + 16}\right), \quad [0, 5]$

53. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} t, \quad [0, 2\pi]$ **54.** $f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}, \quad [0, 4\pi]$

55. $f(x) = -3 \operatorname{sen}\dfrac{x}{3}, \quad [0, 6\pi]$

56. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x + 4 \cos 3x, \quad [0, \pi]$

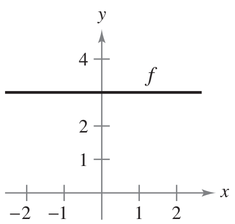
En los ejercicios 57 y 58, utilizar la simetría, los extremos y los ceros para dibujar la gráfica de f. ¿En qué difieren f y g?

57. $f(x) = \dfrac{x^5 - 4x^3 + 3x}{x^2 - 1}, \quad g(x) = x(x^2 - 3)$

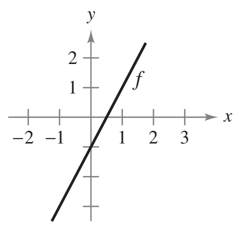
58. $f(t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t, \quad g(t) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 t$

Para pensar **En los ejercicios 59 a 64, la gráfica de f se muestra en la figura. Dibujar una gráfica de la derivada de f.**

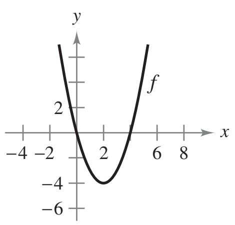
59.



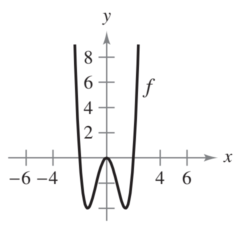
60.



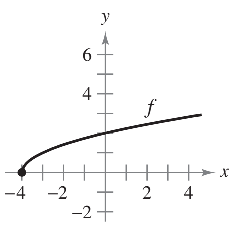
61.



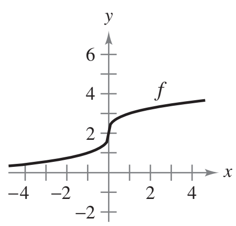
62.



63.

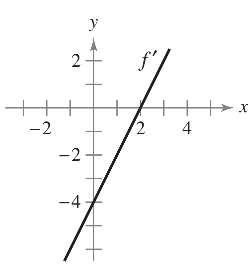


64.

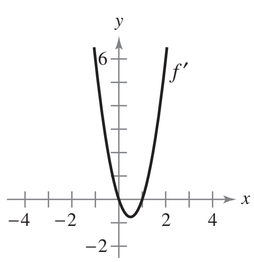


En los ejercicios 65 a 68, utilizar la gráfica de f' para *a*) identificar el (los) intervalo(s) sobre el cual f es creciente o decreciente y *b*) estimar los valores de x para los cuales f tiene un máximo o mínimo relativo.

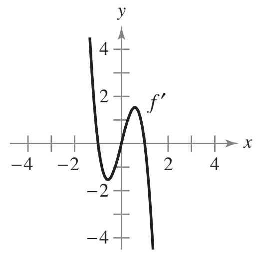
65.



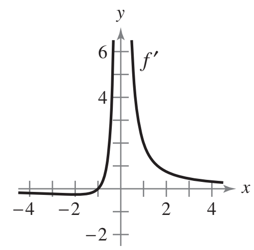
66.



67.

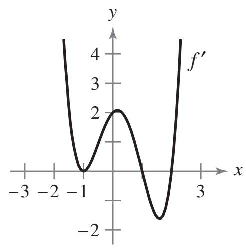


68.

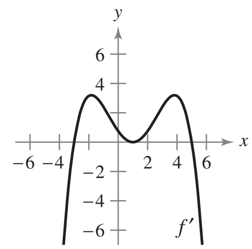


En los ejercicios 69 y 70, utilizar la gráfica de f' para *a*) identificar los puntos críticos de f y *b*) determinar si f tiene un máximo relativo, un mínimo relativo, o ninguno de los dos en cada punto crítico.

69.



70.



Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 71 a 76, suponer que f es derivable para todo x. Los signos de f' son como sigue.

$f'(x) > 0$ **en** $(-\infty, -4)$

$f'(x) < 0$ **en** $(-4, 6)$

$f'(x) > 0$ **en** $(6, \infty)$

Indicar la desigualdad apropiada para el valor de c indicado.

	Función	*Signo de $g'(c)$*
71.	$g(x) = f(x) + 5$	$g'(0)$ ▭ 0
72.	$g(x) = 3f(x) - 3$	$g'(-5)$ ▭ 0
73.	$g(x) = -f(x)$	$g'(-6)$ ▭ 0
74.	$g(x) = -f(x)$	$g'(0)$ ▭ 0
75.	$g(x) = f(x - 10)$	$g'(0)$ ▭ 0
76.	$g(x) = f(x - 10)$	$g'(8)$ ▭ 0

77. Dibujar la gráfica de la función arbitraria de f tal que

$$f'(x)\begin{cases} > 0, & x < 4 \\ \text{indefinida}, & x = 4. \\ < 0, & x > 4 \end{cases}$$

Para discusión

78. Una función derivable de f tiene un punto crítico en $x = 5$. Identificar los extremos relativos de f en el punto crítico si $f'(4) = -2.5$ y $f'(6) = 3$.

Para pensar **En los ejercicios 79 y 80, la función f es derivable en el intervalo indicado. La tabla muestra el valor de $f'(x)$ para algunos valores seleccionados de x. *a*) Dibujar la gráfica de f, *b*) aproximar los puntos críticos y *c*) identificar los extremos relativos.**

79. f es derivable sobre $[-1, 1]$.

x	-1	-0.75	-0.50	-0.25
$f'(x)$	-10	-3.2	-0.5	0.8

x	0	0.25	0.50	0.75	1
$f'(x)$	5.6	3.6	-0.2	-6.7	-20.1

80. f es derivable sobre $[0, \pi]$.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$f'(x)$	3.14	-0.23	-2.45	-3.11	0.69

x	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$f'(x)$	3.00	1.37	-1.14	-2.84

81. ***Rodamiento de un cojinete de bola*** Un cojinete de bola se coloca sobre un plano inclinado y empieza a rodar. El ángulo de elevación del plano es θ. La distancia (en metros) que el cojinete de bola rueda en t segundos es $s(t) = 4.9(\operatorname{sen}\theta)t^2$.

a) Determinar la velocidad del cojinete de bola después de t segundos.

b) Completar la tabla y utilizarla para determinar el valor de θ que produce la máxima velocidad en un instante particular.

θ	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	π
$s'(t)$							

82. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** La concentración C de un compuesto químico en el flujo sanguíneo t horas después de la inyección en el tejido muscular es

$$C(t) = \frac{3t}{27 + t^3}, \quad t \geq 0.$$

a) Completar la tabla y utilizarla para aproximar el tiempo en el que la concentración es más grande.

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$C(t)$							

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función de concentración y emplear la gráfica para aproximar el tiempo en el que la concentración es más grande.

c) Recurrir al cálculo para determinar analíticamente el tiempo en que la concentración es más grande.

83. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Considerar las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0, \pi)$.

a) Completar la tabla y hacer una conjetura acerca de cuál es la función más grande en el intervalo $(0, \pi)$.

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$						
$g(x)$						

b) Utilizar la herramienta de graficación para representar las funciones y emplear las gráficas para hacer una conjetura acerca de cuál es la función más grande en el intervalo $(0, \pi)$.

c) Demostrar que $f(x) > g(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$. [*Sugerencia*: Demostrar que $h'(x) > 0$ donde $h = f - g$.]

84. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Considerar las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \tan x$ en el intervalo $(0, \pi/2)$.

a) Completar la tabla y realizar una conjetura acerca de cuál es la función más grande en el intervalo $(0, \pi/2)$.

x	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5
$f(x)$						
$g(x)$						

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar las funciones y utilizar las gráficas para realizar una suposición acerca de cuál es la función más grande en el intervalo $(0, \pi/2)$.

c) Demostrar que $f(x) < g(x)$ en el intervalo $(0, \pi/2)$. [*Sugerencia*: Demostrar que $h'(x) > 0$, donde $h = g - f$.]

85. ***Contracción de la tráquea*** La tos obliga a que la tráquea (tubo de viento) se contraiga, lo cual afecta la velocidad v del aire que pasa a través de este conducto. La velocidad del aire cuando se tose es $v = k(R - r)r^2$, $0 \leq r < R$ donde k es una constante, R es el radio normal de la tráquea y r es el radio cuando se tose. ¿Qué radio producirá la máxima velocidad del aire?

86. ***Potencia*** La potencia eléctrica P en watts en un circuito de corriente directa con dos resistores R_1 y R_2 conectados en paralelo es

$$P = \frac{vR_1R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

donde v es el voltaje. Si v y R_1 se mantienen constantes, ¿qué resistencia R_2 produce la potencia máxima?

87. ***Resistencia eléctrica*** La resistencia R de cierto tipo de resistor es

$$R = \sqrt{0.001T^4 - 4T + 100}$$

donde R se mide en ohms y la temperatura T se mide en grados Celsius.

CAS *a*) Utilizar un sistema algebraico por computadora para determinar dR/dT y el punto crítico de la función. Determinar la resistencia mínima para este tipo de resistor.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función R y usar la gráfica para aproximar la resistencia mínima de este tipo de resistor.

88. ***Modelado matemático*** Los activos al final del año para el Medicare Hospital Insurance Trust Fund (en miles de millones de dólares) en los años 1995 a 2006 se muestran a continuación:

1995: 130.3; 1996: 124.9; 1997: 115.6; 1998: 120.4;

1999: 141.4; 2000: 177.5; 2001: 208.7; 2002: 234.8;

2003: 256.0; 2004: 269.3; 2005: 285.8; 2006: 305.4

(*Fuente*: *U.S. Center for Medicare and Medicaid Services*)

a) Utilizar las capacidades de regresión de la herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $M = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$ para los datos. (Dejar que $t = 5$ represente a 1995.)

b) Utilizar una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

c) Encontrar en forma analítica el mínimo del modelo y comparar el resultado con los datos reales.

Movimiento a lo largo de una recta **En los ejercicios 89 a 92, la función $s(t)$ describe el movimiento de una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Para cada función, *a*) encontrar la función de la velocidad de la partícula en cualquier instante $t \geq 0$, *b*) identificar el (los) intervalo(s) de tiempo cuando la partícula se está moviendo en la dirección positiva, *c*) identificar el (los) intervalo(s) de tiempo cuando la partícula se mueve en la dirección negativa y *d*) identificar el instante en el que la partícula cambia su dirección.**

89. $s(t) = 6t - t^2$

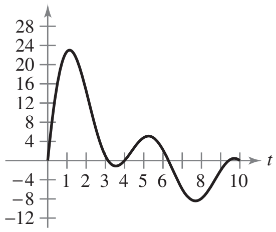
90. $s(t) = t^2 - 7t + 10$

91. $s(t) = t^3 - 5t^2 + 4t$

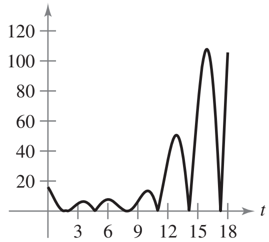
92. $s(t) = t^3 - 20t^2 + 128t - 280$

Movimiento a lo largo de una recta **En los ejercicios 93 y 94, la gráfica muestra la posición de una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Describir cómo cambia la posición de la partícula con respecto al tiempo.**

93.



94.



Creación de funciones polinomiales **En los ejercicios 95 a 98, encontrar una función polinomial**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

que tiene únicamente los extremos especificados. *a*) Determinar el grado mínimo de la función y proporcionar los criterios que se utilizaron para determinar el grado. *b*) Recurriendo al hecho de que las coordenadas de los extremos son puntos solución de la función y al de que las coordenadas x son puntos críticos, determinar un sistema de ecuaciones lineales cuya solución produce los coeficientes de la función requerida. *c*) Utilizar una herramienta de graficación para resolver el sistema de ecuaciones y determinar la función. *d*) Utilizar la herramienta de graficación para confirmar su resultado.

95. Mínimo relativo: (0, 0); máximo relativo: (2, 2)

96. Mínimo relativo: (0, 0); máximo relativo: (4, 1 000)

97. Mínimo relativo: (0, 0), (4, 0); máximo relativo: (2, 4)

98. Mínimo relativo: (1, 2); máximo relativo: $(-1, 4)$, (3, 4)

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 99 a 103, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

99. La suma de dos funciones crecientes es creciente.

100. El producto de dos funciones crecientes es creciente.

101. Todo polinomio de grado n tiene $(n - 1)$ puntos críticos.

102. Un polinomio de grado n tiene a lo más $(n - 1)$ puntos críticos.

103. Existe un máximo o mínimo relativo en cada punto crítico.

104. Demostrar el segundo caso del teorema 3.5.

105. Demostrar el segundo caso del teorema 3.6.

106. Utilizar las definiciones de funciones crecientes y decrecientes para demostrar que $f(x) = x^3$ es creciente en $(-\infty, \infty)$.

107. Utilizar las definiciones de funciones creciente y decreciente para demostrar que $f(x) = 1/x$ es decreciente en $(0, \infty)$.

Preparación del examen Putnam

108. Encontrar el mínimo valor de

$$|\operatorname{sen} x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$$

con números reales x.

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

PROYECTO DE TRABAJO

Arco iris

Los arco iris se forman cuando la luz incide sobre gotas de lluvia, sufriendo reflexión y refracción como se indica en la figura. (Esta figura presenta una sección transversal de una gota de lluvia esférica.) La ley de la refracción establece que $(\operatorname{sen} \alpha)/(\operatorname{sen} \beta) = k$, donde $k \approx 1.33$ (para el agua). El ángulo de deflexión está dado por $D = \pi + 2\alpha - 4\beta$.

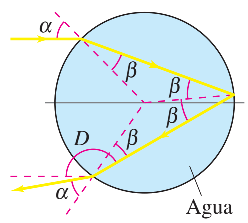
a) Utilizar una herramienta de graficación para representar

$D = \pi + 2\alpha - 4 \operatorname{sen}^{-1}(1/k \operatorname{sen} \alpha)$,

$0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

b) Demostrar que el ángulo mínimo de la deflexión ocurre cuando

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{3}}.$$



Para el agua, ¿cuál es el ángulo mínimo de deflexión, $D_{\text{mín}}$? (El ángulo $\pi - D_{\text{mín}}$ recibe el nombre de *ángulo de arco iris*.) ¿Qué valor de α produce este ángulo mínimo? (Un rayo de luz solar que incide sobre una gota de lluvia a este ángulo, α, se conoce como un *rayo de arco iris*.)

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información acerca de las matemáticas de los arco iris, consultar el artículo "Somewhere Within the Rainbow" de Steven Janke en *The UMAP Journal*.

3.4 Concavidad y el criterio de la segunda derivada

- **Determinar intervalos sobre los cuales una función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.**
- **Encontrar cualesquiera puntos de inflexión de la gráfica de una función.**
- **Aplicar el criterio de la segunda derivada para determinar extremos relativos de una función.**

Concavidad

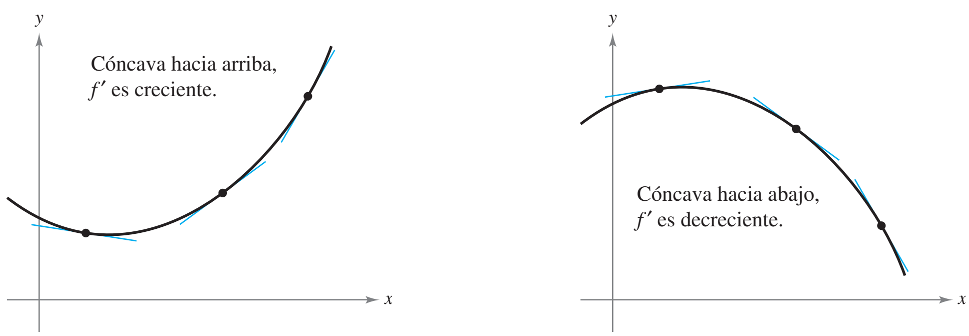
Ya se ha visto que localizar los intervalos en los que una función f es creciente o decreciente ayuda a describir su gráfica. En esta sección, se verá cómo el localizar los intervalos en los que f' es creciente o decreciente puede utilizarse para determinar dónde la gráfica de f se *curva hacia arriba* o se *curva hacia abajo*.

DEFINICIÓN DE CONCAVIDAD

Sea f derivable en un intervalo abierto I. La gráfica de f es **cóncava hacia arriba** sobre I si f' es creciente en el intervalo y **cóncava hacia abajo** en I si f' es decreciente en el intervalo.

La siguiente interpretación gráfica de concavidad es útil. (Ver el apéndice A para una prueba de estos resultados.)

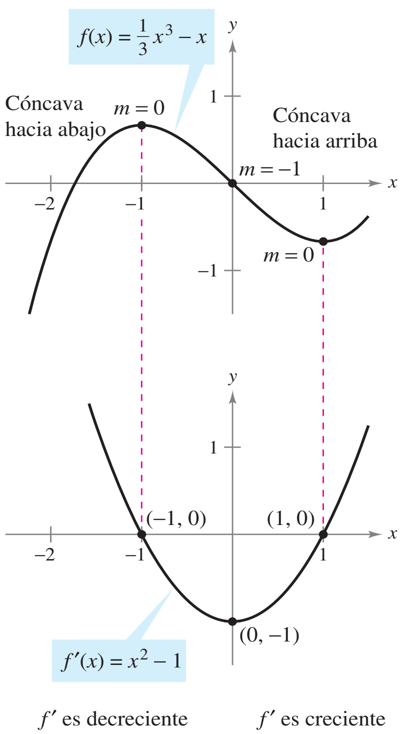
1. Sea f derivable sobre un intervalo abierto I. Si la gráfica de f es cóncava *hacia arriba* en I, entonces la gráfica de f yace *sobre* todas sus rectas tangentes en I. (Ver la figura 3.24*a*.)
2. Sea f derivable en un intervalo abierto I. Si la gráfica de f es cóncava *hacia abajo* en I, entonces la gráfica de f yace *debajo de* todas sus rectas tangentes en I. (Ver la figura 3.24*b*.)



a) La gráfica de f se encuentra sobre sus rectas tangentes

b) La gráfica de f se encuentra debajo de sus rectas tangentes

Figura 3.24



La concavidad de f se relaciona con la monotonía de la derivada

Figura 3.25

Para determinar los intervalos abiertos sobre los cuales la gráfica de una función f es cóncava hacia arriba o hacia abajo, se necesita determinar los intervalos sobre los cuales f' sea creciente o decreciente. Por ejemplo, la gráfica de

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - x$$

es cóncava hacia abajo en el intervalo abierto $(-\infty, 0)$ debido a que $f'(x) = x^2 - 1$ es ahí decreciente. (Ver la figura 3.25.) De manera similar, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(0, \infty)$ debido a que f' es creciente en $(0, \infty)$.

El siguiente teorema muestra cómo utilizar la *segunda* derivada de una función f para determinar intervalos sobre los cuales la gráfica de f es cóncava hacia arriba o hacia abajo. Una prueba de este teorema sigue directamente del teorema 3.5 y de la definición de concavidad.

TEOREMA 3.7 CRITERIO DE CONCAVIDAD

Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

1. Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.
2. Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

NOTA Un tercer caso del teorema 3.7 podría ser que si $f''(x) = 0$ para todo x en I, entonces f es lineal. Notar, sin embargo, que la concavidad no se define para una recta. En otras palabras una recta no es ni cóncava hacia arriba ni cóncava hacia abajo.

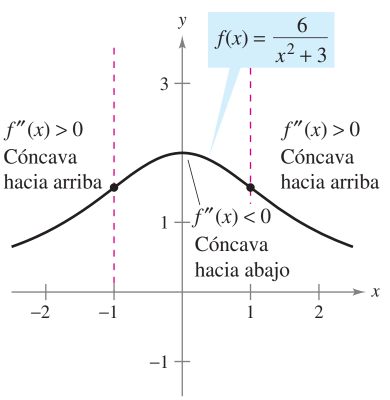
Para aplicar el teorema 3.7, se localizan los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$ o f'' no existe. Segundo, se usan los valores de x para determinar los intervalos de prueba. Por último, se prueba el signo de $f''(x)$ en cada uno de los intervalos de prueba.

EJEMPLO 1 Determinación de la concavidad

Determinar los intervalos abiertos en los cuales la gráfica de

$$f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$$

es cóncava hacia arriba o hacia abajo.



A partir del signo de f'' se puede determinar la concavidad de la gráfica de f
Figura 3.26

Solución Se empieza observando que f es continua en toda la recta real. A continuación, se encuentra la segunda derivada de f.

$$f(x) = 6(x^2 + 3)^{-1} \qquad \text{Reescribir la función original.}$$

$$f'(x) = (-6)(x^2 + 3)^{-2}(2x) \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{-12x}{(x^2 + 3)^2} \qquad \text{Primera derivada.}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 3)^2(-12) - (-12x)(2)(x^2 + 3)(2x)}{(x^2 + 3)^4} \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3} \qquad \text{Segunda derivada.}$$

Como $f''(x) = 0$ cuando $x = \pm 1$ y f'' se define en toda la recta real, se debe probar f'' en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$. Los resultados se muestran en la tabla y en la figura 3.26.

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
Signo de $f''(x)$	$f''(-2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

La función dada en el ejemplo 1 es continua en toda la recta real. Si hay valores de x en los cuales la función no es continua, dichos valores deben usarse junto con los puntos en los cuales $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe para formar los intervalos de prueba.

EJEMPLO 2 Determinación de la concavidad

Determinar los intervalos abiertos sobre los cuales la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Solución Al derivar dos veces se obtiene lo siguiente

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4} \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)(2x)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-4)^2} \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{-10x}{(x^2-4)^2} \qquad \text{Primera derivada.}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2-4)^2(-10)-(-10x)(2)(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4} \qquad \text{Derivar.}$$

$$= \frac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \qquad \text{Segunda derivada.}$$

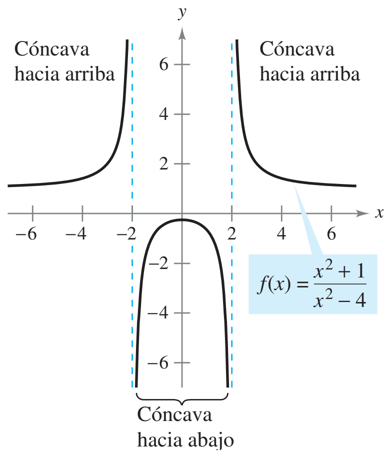


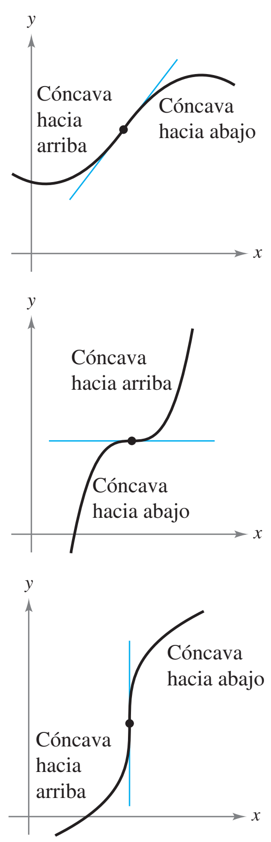
Figura 3.27

No hay puntos en los cuales $f''(x) = 0$, pero en $x = \pm 2$ la función f no es continua, por lo que se prueba la concavidad en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$, como se ilustra en la tabla. La gráfica de f se muestra en la figura 3.27.

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -3$	$x = 0$	$x = 3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-3) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Puntos de inflexión

La gráfica en la figura 3.26 tiene dos puntos en los cuales cambia la concavidad. Si la recta tangente a la gráfica existe en un punto de este tipo, ese punto es un **punto de inflexión**. Se muestran tres tipos de puntos de inflexión en la figura 3.28.



La concavidad de f cambia en un punto de inflexión. Notar que la gráfica cruza su recta tangente en un punto de inflexión

Figura 3.28

DEFINICIÓN DE PUNTO DE INFLEXIÓN

Sea f una función que es continua en un intervalo abierto y sea c un punto en ese intervalo. Si la gráfica de f tiene una recta tangente en este punto $(c, f(c))$, entonces este punto es un **punto de inflexión** de la gráfica de f si la concavidad de f cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo (o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba) en ese punto.

NOTA La definición de *punto de inflexión* dada en este libro requiere que la recta tangente exista en el punto de inflexión. Algunos libros no requieren esto. Por ejemplo, en este libro no se considera que la función

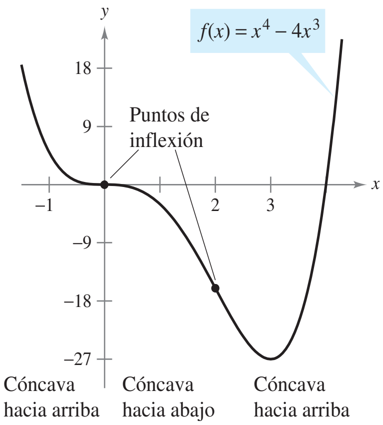
$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x^2 + 2x, & x \ge 0 \end{cases}$$

tenga un punto de inflexión en el origen, aun cuando la concavidad de la gráfica cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Para localizar los *posibles* puntos de inflexión, se pueden determinar los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe. Esto es similar al procedimiento para localizar los extremos relativos de f.

TEOREMA 3.8 PUNTO DE INFLEXIÓN

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(c) = 0$ o f'' no existe en $x = c$.



Pueden ocurrir puntos de inflexión donde $f''(x) = 0$ o f'' no existe
Figura 3.29

EJEMPLO 3 Determinación de los puntos de inflexión

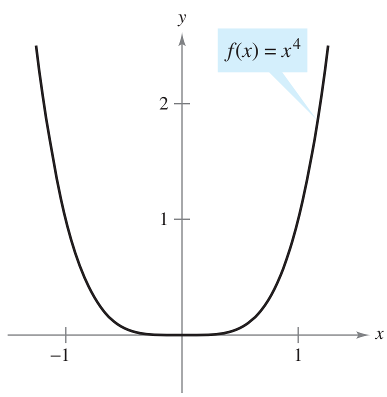
Determinar los puntos de inflexión y analizar la concavidad de la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Solución La derivación doble produce lo siguiente.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 \qquad \text{Escribir la función original.}$$
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \qquad \text{Encontrar la primera derivada.}$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) \qquad \text{Encontrar la segunda derivada.}$$

Haciendo $f''(x) = 0$ es posible determinar que los puntos de inflexión posibles ocurren en $x = 0$ y $x = 2$. Al probar los intervalos determinados por estos valores de x, se puede concluir que ambos producen puntos de inflexión. Un resumen de esta prueba se presenta en la tabla, y la gráfica de f se ilustra en la figura 3.29.

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba



$f''(x) = 0$, pero $(0, 0)$ no es un punto de inflexión
Figura 3.30

El recíproco del teorema 3.8 por lo general no es cierto. Esto es, es posible que la segunda derivada sea 0 en un punto que *no* es un punto de inflexión. Por ejemplo, la gráfica de $f(x) = x^4$ se muestra en la figura 3.30. La segunda derivada es 0 cuando $x = 0$, pero el punto $(0, 0)$ no es un punto de inflexión porque la gráfica de f es cóncava hacia arriba en ambos intervalos $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$.

EXPLORACIÓN

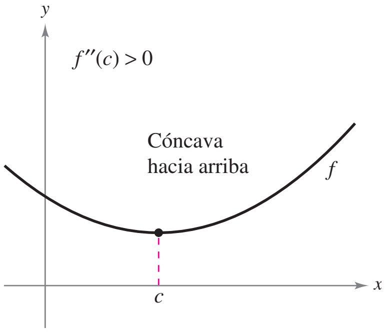
Considerar una función cúbica general de la forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

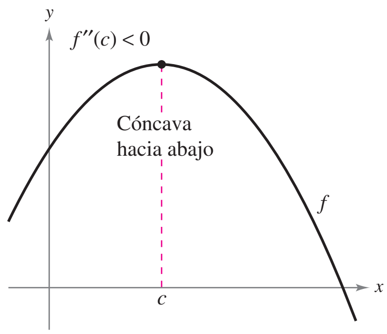
Se sabe que el valor de d tiene relación con la localización de la gráfica, pero no con el valor de la primera derivada en los valores dados de x. Gráficamente, esto es cierto debido a que los cambios en el valor de d desplazan a la gráfica hacia arriba o hacia abajo, pero no cambian su forma básica. Utilizar una herramienta de graficación para representar varias funciones cúbicas con diferentes valores de c. Después proporcionar una explicación gráfica de por qué los cambios en c no afectan los valores de la segunda derivada.

Criterio de la segunda derivada

Además de un método para analizar la concavidad, es posible utilizar la segunda derivada para efectuar una prueba simple correspondiente a los máximos y mínimos relativos. Se basa en el hecho de que si la gráfica de una función f es cóncava hacia arriba en un intervalo abierto que contiene a c y $f'(c) = 0$, $f(c)$ debe ser un mínimo relativo de f. De manera similar, si la gráfica de una función es cóncava hacia abajo en un intervalo abierto que contiene a c y $f'(c) = 0$, $f(c)$ debe ser un máximo relativo de f (ver la figura 3.31).



Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un mínimo relativo



Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un máximo relativo

Figura 3.31

TEOREMA 3.9 CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a c.

1. Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$.
2. Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$.

Si $f''(c) = 0$, entonces el criterio falla. Esto es, f quizá tenga un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de los dos. En tales casos, se puede utilizar el criterio de la primera derivada.

DEMOSTRACIÓN Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, existe un intervalo abierto I que contiene a c para el cual

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \frac{f'(x)}{x - c} > 0$$

para todo $x \neq c$ en I. Si $x < c$, entonces $x - c < 0$ y $f'(x) < 0$. Además, si $x > c$, entonces $x - c > 0$ y $f'(x) > 0$. De tal modo, $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, y el criterio de la primera derivada implica que $f(c)$ es un mínimo relativo. Una demostración del segundo caso se deja al lector.

EJEMPLO 4 Empleo del criterio de la segunda derivada

Encontrar los extremos relativos correspondientes a $f(x) = -3x^5 + 5x^3$.

Solución Empezando con la determinación de los puntos críticos de f.

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2) = 0 \qquad \text{Igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

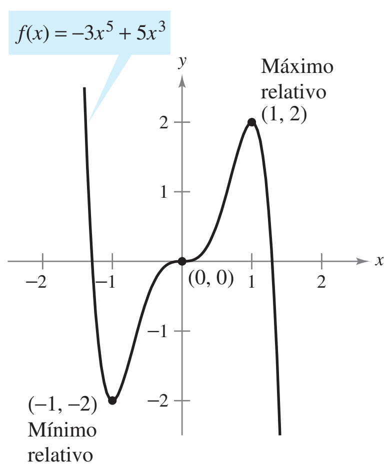
$$x = -1, 0, 1 \qquad \text{Puntos críticos.}$$

Empleando

$$f''(x) = -60x^3 + 30x = 30(-2x^3 + x)$$

se puede aplicar el criterio de la segunda derivada como se indica a continuación.

Punto	$(-1, -2)$	$(1, 2)$	$(0, 0)$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(0) = 0$
Conclusión	Mínimo relativo	Máximo relativo	Falla de la prueba



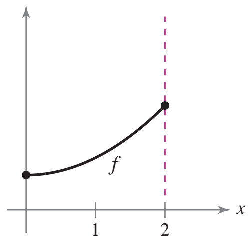
(0, 0) no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo

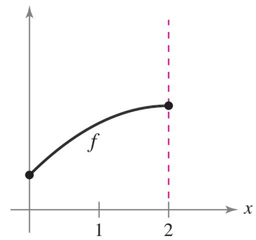
Figura 3.32

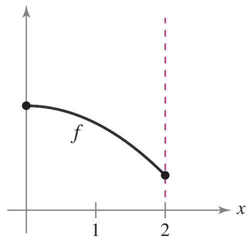
Como el criterio de la segunda derivada no decide en (0, 0), es posible utilizar el criterio de la primera derivada y observar que f aumenta hacia la izquierda y hacia la derecha de $x = 0$. De tal modo, (0, 0) no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo (aun cuando la gráfica tiene una recta tangente horizontal en este punto). La gráfica de f se muestra en la figura 3.32.

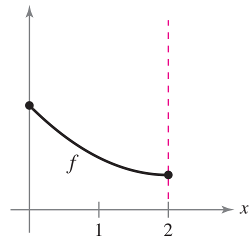
3.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4 se muestra la gráfica de f. Establecer los signos de f' y f'' sobre el intervalo $(0, 2)$.

1.


2.


3.


4.


En los ejercicios 5 a 18, determinar los intervalos abiertos en los cuales la gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

5. $y = x^2 - x - 2$
6. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$
7. $g(x) = 3x^2 - x^3$
8. $h(x) = x^5 - 5x + 2$
9. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x - 1$
10. $f(x) = x^5 + 5x^4 - 40x^2$
11. $f(x) = \dfrac{24}{x^2 + 12}$
12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$
13. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
14. $y = \dfrac{-3x^5 + 40x^3 + 135x}{270}$
15. $g(x) = \dfrac{x^2 + 4}{4 - x^2}$
16. $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 1}$
17. $y = 2x - \tan x, \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$
18. $y = x + \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}, \quad (-\pi, \pi)$

En los ejercicios 19 a 36, encontrar los puntos de inflexión y analizar la concavidad de la gráfica de la función.

19. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3$
20. $f(x) = -x^4 + 24x^2$
21. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$
22. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$
23. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$
24. $f(x) = 2x^4 - 8x + 3$
25. $f(x) = x(x - 4)^3$
26. $f(x) = (x - 2)^3(x - 1)$
27. $f(x) = x\sqrt{x + 3}$
28. $f(x) = x\sqrt{9 - x}$
29. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$
30. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$
31. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}, \quad [0, 4\pi]$
32. $f(x) = 2\csc\dfrac{3x}{2}, \quad (0, 2\pi)$
33. $f(x) = \sec\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right), \quad (0, 4\pi)$
34. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad [0, 2\pi]$
35. $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x, \quad [0, 2\pi]$
36. $f(x) = x + 2\cos x, \quad [0, 2\pi]$

En los ejercicios 37 a 52, encontrar todos los extremos relativos. Utilizar el criterio de la segunda derivada donde sea conveniente.

37. $f(x) = (x - 5)^2$
38. $f(x) = -(x - 5)^2$
39. $f(x) = 6x - x^2$
40. $f(x) = x^2 + 3x - 8$
41. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$
42. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$
43. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$
44. $f(x) = -x^4 + 4x^3 + 8x^2$
45. $g(x) = x^2(6 - x)^3$
46. $g(x) = -\frac{1}{8}(x + 2)^2(x - 4)^2$
47. $f(x) = x^{2/3} - 3$
48. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
49. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$
50. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$
51. $f(x) = \cos x - x, \quad [0, 4\pi]$
52. $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x, \quad [0, 2\pi]$

CAS **En los ejercicios 53 a 56, recurrir a un sistema algebraico por computadora para analizar la función sobre el intervalo que se indica. *a*) Encontrar la primera y la segunda derivadas de la función. *b*) Determinar cualesquiera extremos relativos y puntos de inflexión. *c*) Representar gráficamente f, f' y f'' en el mismo conjunto de ejes de coordenadas y establecer la relación entre el comportamiento de f y los signos de f' y f''.**

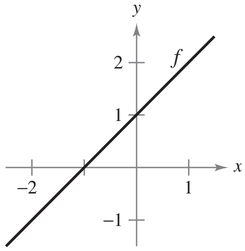
53. $f(x) = 0.2x^2(x - 3)^3, \quad [-1, 4]$
54. $f(x) = x^2\sqrt{6 - x^2}, \quad [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$
55. $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x, \quad [0, \pi]$
56. $f(x) = \sqrt{2x}\operatorname{sen} x, \quad [0, 2\pi]$

Desarrollo de conceptos

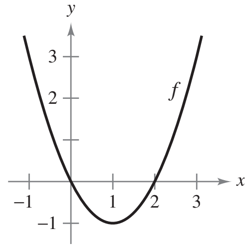
57. Considerar a una función f tal que f' es creciente. Dibujar gráficas de f para *a*) $f' < 0$ y *b*) $f' > 0$.
58. Considerar a una función f tal que f' es decreciente. Dibujar gráficas de f para *a*) $f' < 0$ y *b*) $f' > 0$.
59. Dibujar la gráfica de una función f tal que *no* tenga un punto de inflexión en $(c, f(c))$ aun cuando $f''(c) = 0$.
60. S representa las ventas semanales de un producto. ¿Qué puede decirse de S' y S'' en relación con cada uno de los siguientes enunciados?
    a) El ritmo de cambio de las ventas está creciendo.
    b) Las ventas están creciendo a un ritmo más lento.
    c) El ritmo de cambio de las ventas es constante.
    d) Las ventas están estables.
    e) Las ventas están declinando, pero a una velocidad menor.
    f) Las ventas se han desplomado y han empezado a crecer.

En los ejercicios 61 a 64, se muestra la gráfica de f. Representar gráficamente f, f' y f'' en el mismo conjunto de ejes de coordenadas.

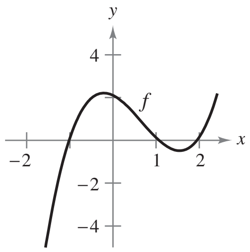
61.



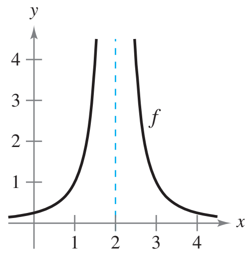
62.



63.



64.



Para pensar **En los ejercicios 65 a 68, dibujar la gráfica de una función f que tenga las características indicadas.**

65. $f(2) = f(4) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x < 3$
$f'(3)$ no existe.
$f'(x) > 0$ si $x > 3$
$f''(x) < 0,\ x \quad 3$

66. $f(0) = f(2) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x < 1$
$f'(1) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x > 1$
$f''(x) < 0$

67. $f(2) = f(4) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x < 3$
$f'(3)$ no existe.
$f'(x) < 0$ si $x > 3$
$f''(x) > 0,\ x \quad 3$

68. $f(0) = f(2) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x < 1$
$f'(1) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x > 1$
$f''(x) > 0$

69. ***Para pensar*** La figura muestra la gráfica de f''. Dibujar una gráfica de f. (La respuesta no es única.)

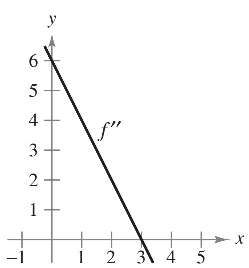


Figura para 69

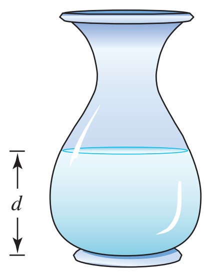


Figura para 70

Para discusión

70. ***Para pensar*** Se vierte agua en el florero que se muestra en la figura a una velocidad constante.

a) Representar gráficamente la profundidad d del agua en el florero como una función del tiempo.
b) ¿La función tiene algún extremo? Explicar.
c) Interpretar los puntos de inflexión de la gráfica de d.

71. ***Conjetura*** Considerar la función $f(x) = (x - 2)^n$.

a) Emplear una herramienta de graficación para representar f con respecto a $n = 1, 2, 3$ y 4. Utilizar las gráficas para realizar una conjetura acerca de la relación entre n y cualesquiera de los puntos de inflexión de la gráfica de f.
b) Verificar la conjetura del apartado *a*).

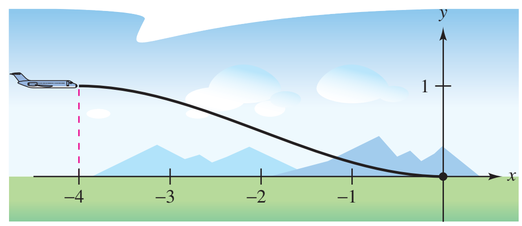
72. *a*) Representar gráficamente $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e identificar el punto de inflexión.
b) ¿Existe $f''(x)$ en el punto de inflexión? Explicar.

En los ejercicios 73 y 74, determinar a, b, c y d tales que la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ satisfaga las condiciones que se indican.

73. Máximo relativo: (3, 3)
Mínimo relativo: (5, 1)
Punto de inflexión: (4, 2)

74. Máximo relativo: (2, 4)
Mínimo relativo: (4, 2)
Punto de inflexión: (3, 3)

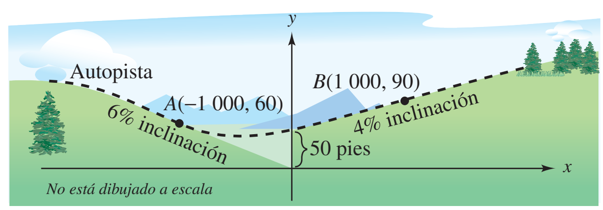
75. ***Trayectoria de planeo de un avión*** Un pequeño avión empieza su descenso desde una altura de 1 milla, 4 millas al oeste de la pista de aterrizaje (ver la figura).



a) Encontrar la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en el intervalo $[-4, 0]$ que describe una trayectoria de planeo uniforme para el aterrizaje.
b) La función del apartado *a*) modela la trayectoria de planeo del avión. ¿Cuándo descendería el avión a la velocidad más rápida?

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información acerca de este tipo de modelación, ver el artículo "How Not to Land at Lake Tahoe!" de Richard Barshinger en *The American Mathematical Monthly*.

76. ***Diseño de autopistas*** Una sección de autopista que conecta dos laderas con inclinación de 6 y 4% se va a construir entre dos puntos que están separados por una distancia horizontal de 2 000 pies (ver la figura). En el punto en que se juntan las dos laderas, hay una diferencia de altura de 50 pies.



a) Diseñar una sección de la autopista que conecte las laderas modeladas por la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(-1\,000 \le x \le 1\,000)$. En los puntos A y B, la pendiente del modelo debe igualar la inclinación de la ladera.
b) Utilizar una herramienta de graficación para representar el modelo.
c) Emplear una herramienta de graficación para representar la derivada del modelo.
d) Determinar la parte más inclinada de la sección de transición de la autopista.

77. ***Deflexión de viga*** La deflexión D de una viga de longitud L es $D = 2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2$, donde x es la distancia a un extremo de la viga. Determinar el valor de x que produce la máxima deflexión.

78. ***Gravedad específica*** Un modelo para el peso específico del agua S es

$$S = \frac{5.755}{10^8}T^3 - \frac{8.521}{10^6}T^2 + \frac{6.540}{10^5}T + 0.99987, \quad 0 < T < 25$$

donde T es la temperatura del agua en grados Celsius.

CAS *a*) Utilizar un sistema algebraico por computadora para determinar las coordenadas del valor máximo de la función.

b) Dibujar una gráfica de la función sobre el dominio especificado. (Utilizar un ajuste en el cual $0.996 \leq S \leq 1.001$.)

c) Estimar el peso específico del agua cuando $T = 20°$.

79. ***Costo promedio*** Un fabricante ha determinado que el costo total C de operación de una fábrica es $C = 0.5x^2 + 15x + 5\,000$, donde x es el número de unidades producidas. ¿En qué nivel de producción se minimizará el costo promedio por unidad? (El costo promedio por unidad es C/x.)

80. ***Costo de inventario*** El costo total C para pedir y almacenar x unidades es $C = 2x + (300\,000/x)$. ¿Qué tamaño de pedido producirá un costo mínimo?

81. ***Crecimiento de ventas*** Las ventas anuales S de un nuevo producto están dadas por $S = \dfrac{5\,000t^2}{8 + t^2}$, $0 \leq t \leq 3$, donde t es el tiempo en años.

a) Completar la tabla. Después utilizarla para estimar cuándo las ventas anuales se incrementan a ritmo más alto.

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3
S						

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función S. Después emplear la gráfica para estimar cuándo las ventas anuales están creciendo más rápidamente.

c) Encontrar el tiempo exacto en el que las ventas anuales crecen al ritmo más alto.

82. ***Modelado matemático*** La tabla muestra la velocidad media S (palabras por minuto) a la que teclea un estudiante de mecanografía después de t semanas de asistir a clase.

t	5	10	15	20	25	30
S	38	56	79	90	93	94

Un modelo para los datos es $S = \dfrac{100t^2}{65 + t^2}$, $t > 0$.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.

b) Utilizar la segunda derivada para determinar la concavidad de S. Comparar el resultado con la gráfica del apartado *a*).

c) ¿Cuál es el signo de la primera derivada para $t > 0$? Combinando esta información con la concavidad del modelo, ¿qué se puede inferir sobre la velocidad cuando t crece?

Aproximaciones lineal y cuadrática **En los ejercicios 83 a 86, utilizar una herramienta de graficación para representar la función. Representar después las aproximaciones lineal y cuadrática**

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

en la misma ventana de observación. Comparar los valores de f, P_1 y P_2 y sus primeras derivadas en $x = a$. ¿Cómo cambia la aproximación cuando se aleja de $x = a$?

	Función	*Valor de a*
83.	$f(x) = 2(\operatorname{sen} x + \cos x)$	$a = \dfrac{\pi}{4}$
84.	$f(x) = 2(\operatorname{sen} x + \cos x)$	$a = 0$
85.	$f(x) = \sqrt{1 - x}$	$a = 0$
86.	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$	$a = 2$

87. Utilizar una herramienta de graficación para representar $y = x \operatorname{sen}(1/x)$. Demostrar que la gráfica es cóncava hacia abajo hacia la derecha de $x = 1/\pi$.

88. Mostrar que el punto de inflexión de $f(x) = x(x - 6)^2$ se encuentra a medio camino entre los extremos relativos de f.

89. Comprobar que toda función cúbica con tres distintos ceros reales tiene un punto de inflexión cuya coordenada x es el promedio de los tres ceros.

90. Mostrar que el polinomio cúbico $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene exactamente un punto de inflexión (x_0, y_0), donde

$$x_0 = \frac{-b}{3a} \quad \text{y} \quad y_0 = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d.$$

Utilizar esta fórmula para determinar el punto de inflexión de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 91 a 94, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar la razón o proporcionar un contraejemplo.**

91. La gráfica de todo polinomio cúbico tiene precisamente un punto de inflexión.

92. La gráfica de $f(x) = 1/x$ es cóncava hacia abajo para $x < 0$ y cóncava hacia arriba para $x > 0$, y por ello tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

93. Si $f'(c) > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba en $x = c$.

94. Si $f''(2) = 0$, entonces la gráfica de f debe tener un punto de inflexión en $x = 2$.

En los ejercicios 95 y 96, considerar que f y g representan funciones derivables tales que $f'' \neq 0$ y $g'' \neq 0$.

95. Demostrar que si f y g son cóncavas hacia arriba en el intervalo (a, b), entonces $f + g$ es también cóncava hacia arriba en (a, b).

96. Demostrar que si f y g son positivas, crecientes y cóncavas hacia arriba en el intervalo (a, b), entonces fg es también cóncava hacia arriba en (a, b).

3.5 Límites al infinito

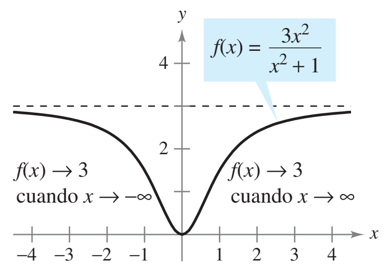
- **Determinar límites (finitos) al infinito.**
- **Determinar las asíntotas horizontales, si las hay, de la gráfica de una función.**
- **Determinar límites infinitos en el infinito.**

Límites en el infinito

Esta sección analiza el "comportamiento final (o asintótico)" de una función en un intervalo *infinito*. Considerar la gráfica de

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$$

como se ilustra en la figura 3.33. Gráficamente, puede verse que los valores de $f(x)$ parecen aproximarse a 3 cuando x crece o decrece sin límite. Se puede llegar numéricamente a las mismas conclusiones, como se indica en la tabla.



El límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ o ∞ es 3
Figura 3.33

x decrece sin límite. ← → *x* crece sin límite.

x	$-\infty \leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\to \infty$
$f(x)$	$3 \leftarrow$	2.9997	2.97	1.5	0	1.5	2.97	2.9997	$\to 3$

$f(x)$ se aproxima a 3. ← → $f(x)$ se aproxima a 3.

La tabla sugiere que el valor de $f(x)$ se aproxima a 3 cuando x crece sin límite ($x \to \infty$). De manera similar, $f(x)$ tiende a 3 cuando x decrece sin límite ($x \to -\infty$). Estos **límites en el infinito** se denotan mediante

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3 \qquad \text{Límite en infinito negativo.}$$

y

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3. \qquad \text{Límite en infinito positivo.}$$

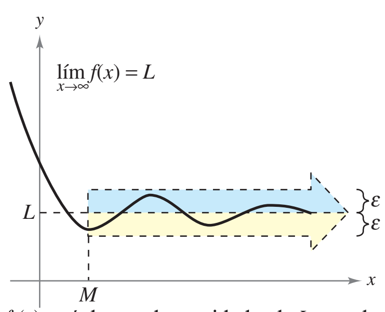
NOTA La afirmación $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que el límite existe *y* el límite es igual a L. ■

Decir que un enunciado es cierto cuando x crece *sin límite* significa que para algún número real (grande) M, el enunciado es verdadero para *todo* x en el intervalo $\{x: x > M\}$. La siguiente definición recurre a este concepto.

DEFINICIÓN DE LÍMITES AL INFINITO

Sea L un número real.

1. El enunciado $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x > M$.
2. El enunciado $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x < N$.



$f(x)$ está dentro de ε unidades de L cuando $x \to \infty$
Figura 3.34

La definición de un límite al infinito se muestra en la figura 3.34. En esta figura, se advierte que para un número positivo dado ε existe un número positivo M tal que, para $x > M$, la gráfica de f estará entre las rectas horizontales dadas por $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$.

Asíntotas horizontales

En la figura 3.34, la gráfica de f se aproxima a la recta $y = L$ cuando x crece sin límite. La recta $y = L$ recibe el nombre de **asíntota horizontal** de la gráfica de f.

DEFINICIÓN DE UNA ASÍNTOTA HORIZONTAL

La recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de f si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

Nótese que a partir de esta definición se concluye que la gráfica de una *función* de x puede tener a lo mucho dos asíntotas horizontales (una hacia la derecha y otra hacia la izquierda).

Los límites al infinito tienen muchas de las propiedades de los límites que se estudiaron en la sección 1.3. Por ejemplo, si existen tanto $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$$

y

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)g(x)] = \left[\lim_{x\to\infty} f(x)\right]\left[\lim_{x\to\infty} g(x)\right].$$

Se cumplen propiedades similares para límites en $-\infty$.

Cuando se evalúan límites al infinito, resulta de utilidad el siguiente teorema. (Una prueba de este teorema se da en el apéndice A.)

EXPLORACIÓN

Utilizar una herramienta de graficación para hacer la representación

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 6}{3x^2 + 2x - 16}.$$

Describir todas las características importantes de la gráfica. ¿Se puede encontrar una sola ventana de observación que muestre con claridad todas esas características? Explicar el razonamiento.

¿Cuáles son las asíntotas horizontales de la gráfica, de manera que ésta se encuentre dentro de 0.001 unidades de su asíntota horizontal? Explicar el razonamiento.

TEOREMA 3.10 LÍMITES AL INFINITO

Si r es un número racional positivo y c es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

Además, si x^r se define cuando $x < 0$, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

EJEMPLO 1 Determinación del límite al infinito

Encontrar el límite: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5 - \dfrac{2}{x^2}\right)$.

Solución Utilizando el teorema 3.10, es posible escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(5 - \frac{2}{x^2}\right) &= \lim_{x\to\infty} 5 - \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} && \text{Propiedad de límites.}\\ &= 5 - 0\\ &= 5.\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Determinación de un límite al infinito

Determinar el límite: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{x+1}$.

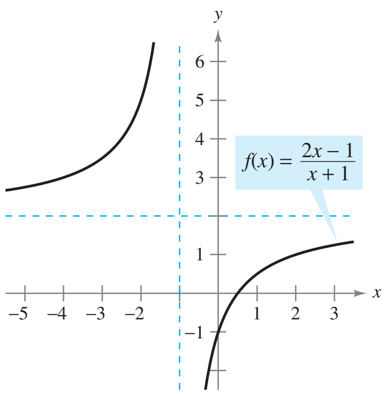
Solución Advertir que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} (2x-1) \to \infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} (x+1) \to \infty \end{cases}$$

NOTA Cuando se encuentra una forma indeterminada tal como la del ejemplo 2, se debe dividir el numerador y el denominador entre la potencia más alta de x en el *denominador*.

Esto produce una **forma indeterminada** $\frac{\infty}{\infty}$. Para resolver este problema, es posible dividir tanto el numerador como el denominador entre x. Después de eso, el límite puede evaluarse como se muestra.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x-1}{x}}{\dfrac{x+1}{x}} && \text{Dividir el numerador y el denominador entre } x. \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} && \text{Simplificar.} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2 - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}} && \text{Tomar límites del numerador y el denominador.} \\
&= \frac{2-0}{1+0} && \text{Aplicar el teorema 3.10.} \\
&= 2
\end{aligned}$$



$y = 2$ es una asíntota horizontal
Figura 3.35

De tal modo, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal a la derecha. Al tomar el límite cuando $x \to -\infty$, puede verse que $y = 2$ también es una asíntota horizontal hacia la izquierda. La gráfica de la función se ilustra en la figura 3.35.

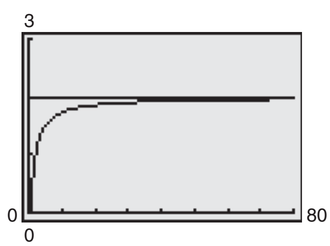
TECNOLOGÍA Se puede verificar que el límite del ejemplo 2 es razonable evaluando $f(x)$ para unos pocos valores positivos grandes de x. Por ejemplo,

$$f(100) \approx 1.9703, \quad f(1\,000) \approx 1.9970 \quad \text{y} \quad f(10\,000) \approx 1.9997.$$

Otra forma de verificar que el límite obtenido es razonable consiste en representar la gráfica con una herramienta de graficación. Por ejemplo, en la figura 3.36, la gráfica de

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

se muestra con la recta horizontal $y = 2$. Notar que cuando x crece, la gráfica de f se mueve más y más cerca de su asíntota horizontal.



Cuando x aumenta, la gráfica de f se mueve más y más cerca a la recta $y = 2$
Figura 3.36

EJEMPLO 3 Una comparación de tres funciones racionales

The Granger Collection

MARIA GAETANA AGNESI (1718-1799)
Agnesi fue una de las pocas mujeres en recibir crédito por aportaciones importantes a las matemáticas antes del siglo XX. Casi al cumplir 20 años, escribió el primer texto que incluyó tanto cálculo diferencial como integral. Alrededor de los 30, fue miembro honorario de la facultad en la Universidad de Boloña.

Para mayor información sobre las contribuciones de las mujeres a las matemáticas, ver el artículo "Why Women Succeed in Mathematics" de Mona Fabricant, Sylvia Svitak y Patricia Clark Kenschaft en *Mathematics Teacher*.

Determinar cada límite.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{3x^2+1}$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+5}{3x^2+1}$ ***c)*** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+5}{3x^2+1}$

Solución En cada caso, el intento de evaluar el límite produce la forma indeterminada ∞/∞.

a) Dividir tanto el numerador como el denominador entre x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2/x)+(5/x^2)}{3+(1/x^2)} = \frac{0+0}{3+0} = \frac{0}{3} = 0$$

b) Dividir tanto el numerador como el denominador entre x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+(5/x^2)}{3+(1/x^2)} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

c) Dividir tanto el numerador como el denominador entre x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+(5/x^2)}{3+(1/x^2)} = \frac{\infty}{3}$$

Es posible concluir que el límite *no existe* porque el numerador aumenta sin límite mientras el denominador se aproxima a 3.

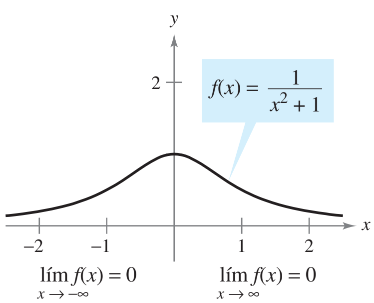
Estrategia para determinar límites en $\pm\infty$ de funciones racionales

1. Si el grado del numerador es *menor que* el grado de denominador, entonces el límite de la función racional es 0.
2. Si el grado del numerador es *igual al* grado de denominador, entonces el límite de la función racional es el cociente de los coeficientes dominantes.
3. Si el grado del numerador es *mayor que* el grado del denominador, entonces el límite de la función racional no existe.

Recurrir a esta estrategia para verificar los resultados del ejemplo 3. Estos límites parecen razonables cuando se considera que para grandes valores de x, el término de la potencia más alta de la función racional es lo que más "influye" en la determinación del límite. Por ejemplo, el límite cuando x tiende a infinito de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

es 0 porque el denominador supera al numerador cuando x aumenta o disminuye sin límite, como se muestra en la figura 3.37.



f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$
Figura 3.37

La función que se muestra en la figura 3.37 es un caso especial de un tipo de curva estudiado por la matemática italiana Maria Gaetana Agnesi. La fórmula general de esta función es

$$f(x) = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$$ Bruja de Agnesi.

y, a través de la traducción errónea de la palabra italiana *vertéré*, la curva ha llegado a conocerse como la bruja (o hechicera) de Agnesi. El trabajo de Agnesi con esta curva apareció por primera vez en un amplio libro de cálculo que se publicó en 1748.

En la figura 3.37 se puede observar que la función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ tiende a la misma asíntota horizontal hacia la derecha que hacia la izquierda. Esto siempre es cierto para las funciones racionales. Las funciones que no son racionales, sin embargo, pueden tender a diferentes asíntotas horizontales hacia la derecha y hacia la izquierda. Esto se demuestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Una función con dos asíntotas horizontales

Determinar cada límite.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$ ***b)*** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

Solución

a) Para $x > 0$, es posible escribir $x = \sqrt{x^2}$. De tal modo, dividiendo tanto el numerador como el denominador entre x, se obtiene

$$\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{\dfrac{3x-2}{x}}{\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{3-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x^2}}} = \frac{3-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}$$

y se puede tomar el límite de la manera siguiente.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{3-0}{\sqrt{2+0}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

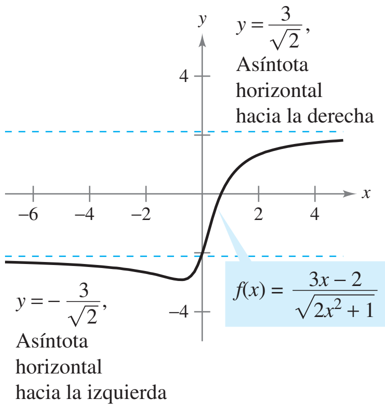
b) Para $x < 0$, puede escribirse $x = -\sqrt{x^2}$. De manera que al dividir tanto el denominador como el numerador entre x, se obtiene

$$\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{\dfrac{3x-2}{x}}{\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}} = \frac{3-\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x^2}}} = \frac{3-\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}$$

y es posible tomar el límite de la manera siguiente.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{3-0}{-\sqrt{2+0}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

La gráfica de $f(x) = (3x-2)/\sqrt{2x^2+1}$ se presenta en la figura 3.38.

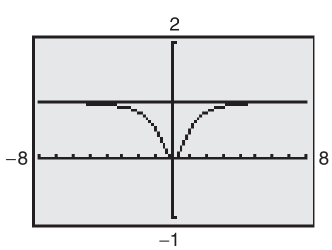


Las funciones que no son racionales pueden tener diferentes asíntotas horizontales derecha e izquierda
Figura 3.38

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Si se utiliza una herramienta de graficación para auxiliarse en la estimación de un límite, cerciorarse de confirmar también la estimación en forma analítica (las imágenes que muestra una herramienta de graficación pueden ser erróneas). Por ejemplo, la figura 3.39 muestra una vista de la gráfica de

$$y = \frac{2x^3 + 1\,000x^2 + x}{x^3 + 1\,000x^2 + x + 1\,000}.$$

De acuerdo con esta imagen, sería convincente pensar que la gráfica tiene a $y = 1$ como una asíntota horizontal. Un enfoque analítico indica que la asíntota horizontal es en realidad $y = 2$. Confirmar lo anterior agrandando la ventana de la observación de la herramienta de graficación.



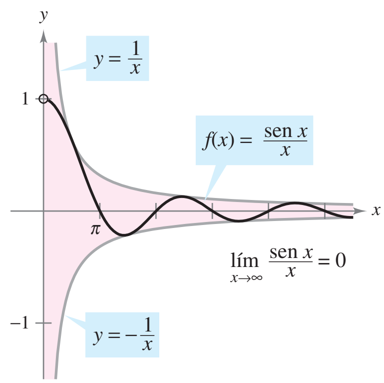
La asíntota horizontal parece ser la recta $y = 1$ pero en realidad es la recta $y = 2$
Figura 3.39

En la sección 1.3 (ejemplo 9) se vio cómo el teorema del encaje se puede utilizar para evaluar límites que incluyen funciones trigonométricas. Este teorema también es válido para límites al infinito.

EJEMPLO 5 Límites que implican funciones trigonométricas

Encontrar cada límite.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$



Cuando x aumenta sin límite $f(x)$ tiende a cero
Figura 3.40

Solución

a) Cuando x tiende a infinito, la función seno oscila entre 1 y -1. De tal manera, este límite no existe.

b) Como $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$, se concluye que para $x > 0$,

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le \frac{1}{x}$$

donde $\lim\limits_{x\to\infty} (-1/x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} (1/x) = 0$. De tal modo, por el teorema del encaje, es posible obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

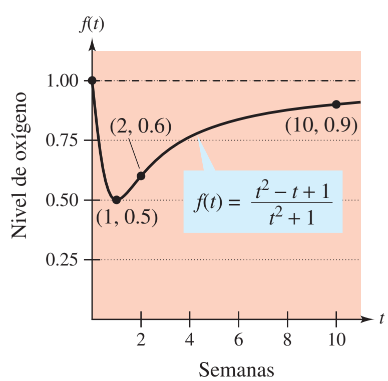
como se muestra en la figura 3.40.

EJEMPLO 6 Nivel de oxígeno en un estanque

Suponga que $f(t)$ mide el nivel de oxígeno en un estanque, donde $f(t) = 1$ es el nivel normal (no contaminado) y el tiempo t se mide en semanas. Cuando $t = 0$, se descarga desperdicio orgánico en el estanque, y como el material de desperdicio se oxida, el nivel de oxígeno en el estanque es

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}.$$

¿Qué porcentaje del nivel normal de oxígeno existe en el estanque después de una semana? ¿Después de dos semanas? ¿Después de 10 semanas? ¿Cuál es el límite cuando t tiende a infinito?



El nivel de oxígeno en el estanque se aproxima a nivel normal de 1 cuando t tiende a ∞
Figura 3.41

Solución Cuando $t = 1$, 2 y 10, los niveles de oxígeno son como se muestra.

$$f(1) = \frac{1^2 - 1 + 1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} = 50\% \qquad \text{1 semana.}$$

$$f(2) = \frac{2^2 - 2 + 1}{2^2 + 1} = \frac{3}{5} = 60\% \qquad \text{2 semanas.}$$

$$f(10) = \frac{10^2 - 10 + 1}{10^2 + 1} = \frac{91}{101} \approx 90.1\% \qquad \text{10 semanas.}$$

Para encontrar el límite cuando t tiende a infinito, dividir el numerador y el denominador entre t^2 con el fin de obtener

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1} = \lim_{t\to\infty} \frac{1 - (1/t) + (1/t^2)}{1 + (1/t^2)} = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0} = 1 = 100\%.$$

Ver la figura 3.41.

Límites infinitos al infinito

Muchas funciones no tienden a un límite finito cuando x crece (o decrece) sin límite. Por ejemplo, ninguna función polinómica tiene un límite finito en infinito. La siguiente definición se usa para describir el comportamiento de funciones polinomiales y de otras funciones al infinito.

NOTA La determinación de si una función tiene un límite infinito al infinito es útil al analizar el "comportamiento asintótico" de la gráfica. Se verán ejemplos de esto en la sección 3.6 sobre dibujo de curvas.

DEFINICIÓN DE LÍMITES INFINITOS AL INFINITO

Sea f una función definida en el intervalo (a, ∞).

1. El enunciado $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ significa que para cada número positivo M, existe un número correspondiente $N > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $x > N$.
2. El enunciado $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ significa que para cada número negativo M, existe un número correspondiente $N > 0$ tal que $f(x) < M$ siempre que $x > N$.

Pueden darse definiciones similares para los enunciados $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

EJEMPLO 7 Determinación de límites infinitos al infinito

Determinar cada límite.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} x^3$ ***b)*** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$

Solución

a) Cuando x crece sin límite, x^3 también crece sin límite. De tal modo, es posible escribir $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 = \infty$.

b) Cuando x decrece sin límite, x^3 también decrece sin límite. En consecuencia, se puede escribir $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

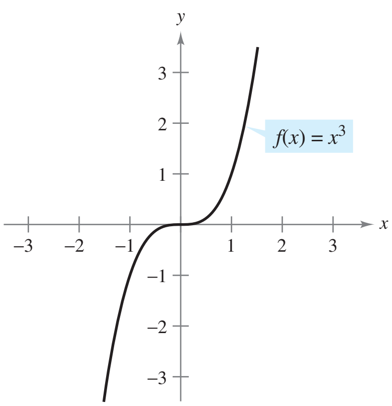


Figura 3.42

La gráfica de $f(x) = x^3$ en la figura 3.42 ilustra estos dos resultados, los cuales concuerdan con el criterio del coeficiente dominante para las funciones polinomiales que se describen en la sección P.3.

EJEMPLO 8 Determinación de límites infinitos al infinito

Encontrar cada límite.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 4x}{x + 1}$ ***b)*** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 4x}{x + 1}$

Solución Una manera de evaluar cada uno de estos límites consiste en utilizar una división larga para rescribir la función racional impropia como la suma de un polinomio y de una función racional.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 4x}{x + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(2x - 6 + \dfrac{6}{x + 1}\right) = \infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 4x}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x - 6 + \dfrac{6}{x + 1}\right) = -\infty$

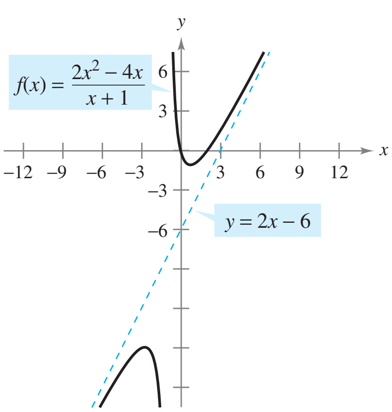


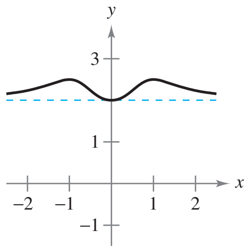
Figura 3.43

Los enunciados anteriores pueden interpretarse diciendo que cuando x tiende a $\pm\infty$, la función $f(x) = (2x^2 - 4x)/(x + 1)$ se comporta como la función $g(x) = 2x - 6$. En la sección 3.6 esto se describe en forma gráfica afirmando que la recta $y = 2x - 6$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f, como se muestra en la figura 3.43.

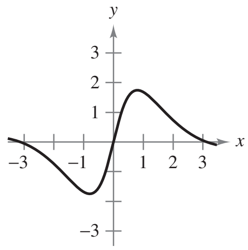
3.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, hacer que corresponda la función con una de las gráficas [*a*), *b*), *c*), *d*), *e*) o *f*)] utilizando como ayuda asíntotas horizontales.

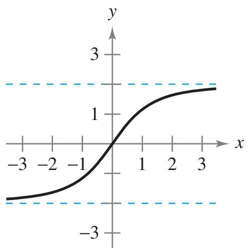
a)



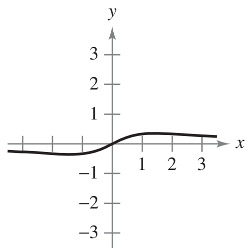
b)



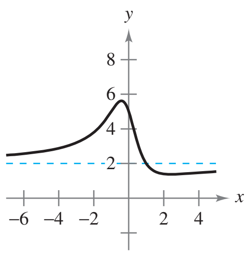
c)



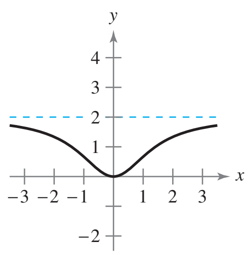
d)



e)



f)



1. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 2}$

2. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

4. $f(x) = 2 + \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

5. $f(x) = \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$

6. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + 1}$

Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 7 a 12, utilizar una herramienta de graficación para completar la tabla y estimar el límite cuando *x* tiende a infinito. Utilizar después una herramienta de graficación para representar la función y estimar gráficamente el límite.**

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$							

7. $f(x) = \dfrac{4x + 3}{2x - 1}$

8. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x + 1}$

9. $f(x) = \dfrac{-6x}{\sqrt{4x^2 + 5}}$

10. $f(x) = \dfrac{20x}{\sqrt{9x^2 - 1}}$

11. $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x^2 + 1}$

12. $f(x) = 4 + \dfrac{3}{x^2 + 2}$

En los ejercicios 13 y 14, determinar $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$, si es posible.

13. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10x$

a) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ *b*) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$

c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^4}$

14. $f(x) = -4x^2 + 2x - 5$

a) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ *b*) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$

c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$

En los ejercicios 15 a 18, encontrar cada límite, si es posible.

15. *a*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2}{x^3 - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2}{x - 1}$

16. *a*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3 - 2x}{3x^3 - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3 - 2x}{3x - 1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3 - 2x^2}{3x - 1}$

17. *a*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5 - 2x^{3/2}}{3x^2 - 4}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5 - 2x^{3/2}}{3x^{3/2} - 4}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5 - 2x^{3/2}}{3x - 4}$

18. *a*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^{3/2}}{4x^2 + 1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^{3/2}}{4x^{3/2} + 1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^{3/2}}{4\sqrt{x} + 1}$

En los ejercicios 19 a 38, encontrar el límite.

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(4 + \dfrac{3}{x}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{5}{x} - \dfrac{x}{3}\right)$

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x - 1}{3x + 2}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 3}{2x^2 - 1}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2 - 1}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 + 1}{10x^3 - 3x^2 + 7}$

25. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2}{x + 3}$

26. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{4}{x^2}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$

28. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

29. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - x}}$

30. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 + x}}$

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x - 1}$

32. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^4 - 1}}{x^3 - 1}$

33. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + 1}{(x^2 + 1)^{1/3}}$

34. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{(x^6 - 1)^{1/3}}$

35. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x + \operatorname{sen} x}$

36. $\lim\limits_{x\to\infty} \cos \dfrac{1}{x}$

37. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

38. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \cos x}{x}$

En los ejercicios 39 a 42, utilizar una herramienta de graficación para representar la función e identificar cualquier asíntota horizontal.

39. $f(x) = \dfrac{|x|}{x + 1}$

40. $f(x) = \dfrac{|3x + 2|}{x - 2}$

41. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

42. $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^2 - 2}}{2x + 1}$

En los ejercicios 43 y 44, determinar el límite. (*Sugerencia*: Sea $x = 1/t$ y encontrar el límite cuando $t \to 0^+$.)

43. $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

44. $\lim\limits_{x\to\infty} x \tan \dfrac{1}{x}$

En los ejercicios 45 a 48, encontrar el límite. (*Sugerencia*: Tratar la expresión como una fracción cuyo denominador es 1 y racionalizar el numerador.) Utilizar una herramienta de graficación para verificar su resultado.

45. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 3}\right)$

46. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x}\right)$

47. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3x + \sqrt{9x^2 - x}\right)$

48. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(4x - \sqrt{16x^2 - x}\right)$

Análisis numérico, gráfico y analítico **En los ejercicios 49 a 52, utilizar una herramienta de graficación para completar la tabla y estimar el límite cuando x tiende a infinito. Emplear después una herramienta de graficación para representar la función y estimar el límite. Por último, encontrar el límite analíticamente y comparar los resultados con las estimaciones.**

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$							

49. $f(x) = x - \sqrt{x(x - 1)}$

50. $f(x) = x^2 - x\sqrt{x(x - 1)}$

51. $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{2x}$

52. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x\sqrt{x}}$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 53 y 54, describir en sus propias palabras el significado de los siguientes enunciados.

53. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$

54. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

55. Dibujar una gráfica de una función derivable que satisfaga las siguientes condiciones y tenga $x = 2$ como su único punto crítico.

$f'(x) < 0$ para $x < 2$ $\quad$ $f'(x) > 0$ para $x > 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 6$

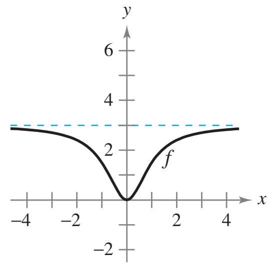
56. ¿Es posible dibujar una gráfica de una función que satisface las condiciones del ejercicio 55 y que *no* tiene puntos de inflexión? Explicar.

57. Si f es una función continua tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$, determinar, si es posible, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ para cada condición especificada.

a) La gráfica de f es simétrica al eje y.
b) La gráfica de f es simétrica al origen.

Para discusión

58. La gráfica de una función se muestra a continuación.



a) Dibujar f'.
b) Utilizar las gráficas para estimar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.
c) Explicar las respuestas que se obtuvieron en el apartado *b*).

En los ejercicios 59 a 76, dibujar la gráfica de la función utilizando extremos, intersecciones, simetría y asíntotas. Emplear después una herramienta de graficación para verificar el resultado.

59. $y = \dfrac{x}{1 - x}$

60. $y = \dfrac{x - 4}{x - 3}$

61. $y = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$

62. $y = \dfrac{2x}{9 - x^2}$

63. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 16}$

64. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 16}$

65. $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}$

66. $y = \dfrac{2x^2}{x^2 + 4}$

67. $xy^2 = 9$

68. $x^2y = 9$

69. $y = \dfrac{3x}{1 - x}$

70. $y = \dfrac{3x}{1 - x^2}$

71. $y = 2 - \dfrac{3}{x^2}$

72. $y = 1 + \dfrac{1}{x}$

73. $y = 3 + \dfrac{2}{x}$

74. $y = 4\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

75. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}}$

76. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

CAS **En los ejercicios 77 a 84, utilizar un sistema algebraico por computadora para analizar la gráfica de la función. Marcar cualquier extremo y/o asíntota que existan.**

77. $f(x) = 9 - \dfrac{5}{x^2}$

78. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$

79. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4x + 3}$

80. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + x + 1}$

81. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$

82. $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

83. $g(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - 2}\right), \quad x > 3$

84. $f(x) = \dfrac{2 \operatorname{sen} 2x}{x}$

En los ejercicios 85 y 86, *a*) emplear una herramienta de graficación para representar *f* y *g* en la misma ventana de observación, *b*) verificar algebraicamente que *f* y *g* representan la misma función y *c*) hacer un acercamiento suficiente para que la gráfica aparezca como una recta. ¿Qué ecuación parece tener esta recta? (Notar que todos los puntos en los cuales la función no es continua no se observan con facilidad cuando se realiza el acercamiento.)

85. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x(x-3)}$

$g(x) = x + \dfrac{2}{x(x-3)}$

86. $f(x) = -\dfrac{x^3 - 2x^2 + 2}{2x^2}$

$g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{1}{x^2}$

87. ***Eficiencia de un motor*** La eficiencia de un motor de combustión interna es

$$\text{Eficiencia } (\%) = 100\left[1 - \frac{1}{(v_1/v_2)^c}\right]$$

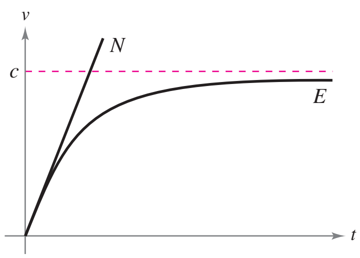
donde v_1/v_2 es la razón entre el gas no comprimido y el gas comprimido y c es una constante positiva que depende del diseño del motor. Encontrar el límite de la eficiencia cuando la razón de compresión se acerca a infinito.

88. ***Costo promedio*** Un negocio tiene un costo de $C = 0.5x + 500$ para producir x unidades. El costo promedio por unidad es

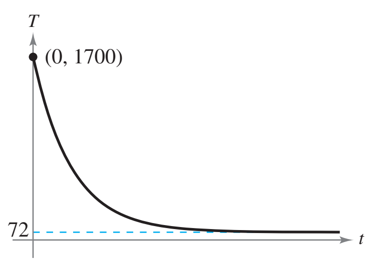
$$\overline{C} = \frac{C}{x}.$$

Encontrar el límite de $\overline{C}$ cuando x tiende a infinito.

89. ***Física*** La primera ley de movimiento de Newton y la teoría especial de la relatividad de Einstein difieren en lo que respecta al comportamiento de las partículas cuando su velocidad se acerca a la velocidad de la luz, c. Las funciones N y E representan la velocidad predicha, v, con respecto al tiempo, t, para una partícula acelerada por una fuerza constante como lo predijeron Newton y Einstein. Desarrollar una condición límite que describa a cada teoría.



90. ***Temperatura*** La gráfica muestra la temperatura T, en grados Fahrenheit, de un pastel de manzana t segundos después de que se saca del horno y se pone en una repisa de enfriamiento.



a) Determinar $\lim\limits_{t \to 0^+} T$. ¿Qué representa este límite?

b) Encontrar $\lim\limits_{t \to \infty} T$. ¿Qué representa este límite?

c) ¿La temperatura del vidrio alcanzará en algún momento la temperatura del cuarto? ¿Por qué?

91. ***Modelado matemático*** La tabla muestra los tiempos del récord mundial para la carrera de una milla, donde t representa el año, con $t = 0$ correspondiente a 1900 y y es el tiempo en minutos y segundos.

t	23	33	45	54	58
y	4:10.4	4:07.6	4:01.3	3:59.4	3:54.5

t	66	79	85	99
y	3:51.3	3:48.9	3:46.3	3:43.1

Un modelo para los datos es

$$y = \frac{3.351t^2 + 42.461t - 543.730}{t^2}$$

donde los segundos se han cambiado a partes decimales de un minuto.

a) Emplear una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

b) ¿Parece haber un tiempo límite para la carrera de una milla? Explicar la respuesta.

92. ***Modelado matemático*** La tabla muestra la velocidad media S a la que un estudiante de mecanografía teclea t semanas después de iniciar su aprendizaje.

t	5	10	15	20	25	30
S	28	56	79	90	93	94

Un modelo para los datos es $S = \dfrac{100t^2}{65 + t^2}, \quad t > 0.$

a) Recurrir a una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

b) ¿Parece haber alguna velocidad para mecanografiar límite? Explicar.

93. ***Modelado matemático*** Una zona de calor se une a un intercambiador de calor de un sistema calefactor. La temperatura T (grados Celsius) se registra t segundos después de que el horno empieza su operación. Los resultados para los primeros dos minutos se registran en la tabla.

t	0	15	30	45	60
T	25.2°	36.9°	45.5°	51.4°	56.0°

t	75	90	105	120
T	59.6°	62.0°	64.0°	65.2°

a) Utilizar los programas para el cálculo de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $T_1 = at^2 + bt + c$ para los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar T_1.

c) Un modelo racional para los datos es $T_2 = \dfrac{1\,451 + 86t}{58 + t}$. Emplear una herramienta de graficación para representar el modelo T_2.

d) Determinar $T_1(0)$ y $T_2(0)$.

e) Encontrar $\lim\limits_{t \to \infty} T_2$.

f) Interpretar el resultado del apartado *e*) en el contexto del problema. ¿Es posible efectuar este tipo de análisis utilizando T_1? Explicar.

94. ***Modelado matemático*** Un recipiente contiene 5 litros de una solución salina al 25%. La tabla muestra las concentraciones C de la mezcla después de agregar x litros de una solución salina al 75% al recipiente.

x	0	0.5	1	1.5	2
C	0.25	0.295	0.333	0.365	0.393

x	2.5	3	3.5	4
C	0.417	0.438	0.456	0.472

a) Utilizar las características de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $C_1 = ax^2 + bx + c$ para los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar C_1.

c) Un modelo racional para estos datos es $C_2 = \dfrac{5 + 3x}{20 + 4x}$. Utilizar una herramienta de graficación para representar C_2.

d) Determinar $\lim_{x\to\infty} C_1$ y $\lim_{x\to\infty} C_2$. ¿Qué modelo representa mejor la concentración de la mezcla? Explicar.

e) ¿Cuál es la concentración límite?

95. Una recta con una pendiente m pasa por el punto (0, 4).

a) Escribir la distancia d entre la recta y el punto (3, 1) como una función de m.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la ecuación del apartado *a*).

c) Determinar $\lim_{m\to\infty} d(m)$ y $\lim_{m\to-\infty} d(m)$. Interpretar geométricamente los resultados.

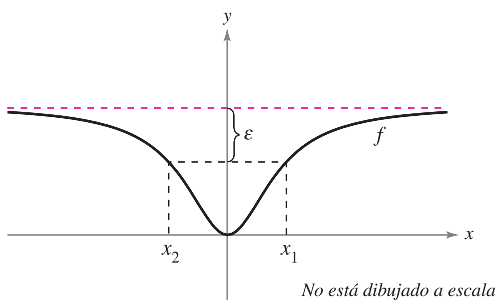
96. Una recta con pendiente m pasa por el punto (0, –2).

a) Escribir la distancia d entre la recta y el punto (4, 2) como una función de m.

b) Emplear una herramienta de graficación para representar la ecuación del apartado *a*).

c) Determinar $\lim_{m\to\infty} d(m)$ y $\lim_{m\to-\infty} d(m)$. Interpretar geométricamente los resultados.

97. Se muestra la gráfica de $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 2}$.



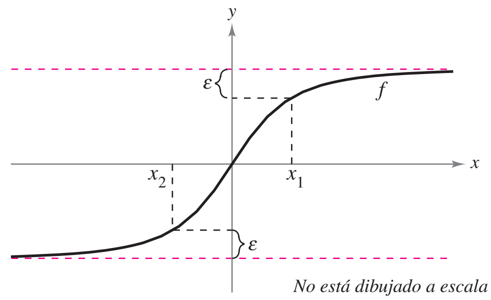
a) Determinar $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

b) Determinar x_1 y x_2 en términos de ε.

c) Determinar M, donde $M > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para $x > M$.

d) Determinar N, donde $N < 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para $x < N$.

98. Se muestra la gráfica de $f(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{x^2 + 2}}$.



a) Encontrar $L = \lim_{m\to\infty} f(x)$ y $K \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determinar x_1 y x_2 en términos de ε.

c) Determinar M, donde $M > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para $x > M$

d) Determinar N, donde $N < 0$, tal que $|f(x) - K| < \varepsilon$ para $x < N$.

99. Considerar $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$. Utilizar la definición de límites al infinito para encontrar los valores de M que corresponden a *a*) $\varepsilon = 0.5$ y *b*) $\varepsilon = 0.1$.

100. Considerar $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$. Utilizar la definición de límites al infinito para encontrar los valores de N que correspondan a *a*) $\varepsilon = 0.5$ y *b*) $\varepsilon = 0.1$.

En los ejercicios 101 a 104, usar la definición de límites al infinito para comprobar el límite.

101. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

102. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$

103. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$

104. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x - 2} = 0$

105. Demostrar que si $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ $(a_n \neq 0,\ b_m \neq 0)$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0, & n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & n = m. \\ \pm\infty, & n > m \end{cases}$$

106. Utilizar la definición de límites infinitos al infinito para demostrar que $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 107 y 108, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que demuestre dicha falsedad.**

107. Si $f'(x) > 0$ para todo número real x, entonces f es creciente sin límite.

108. Si $f''(x) < 0$ para todo número real x, entonces f es decreciente sin límite.

3.6 Análisis de gráficas

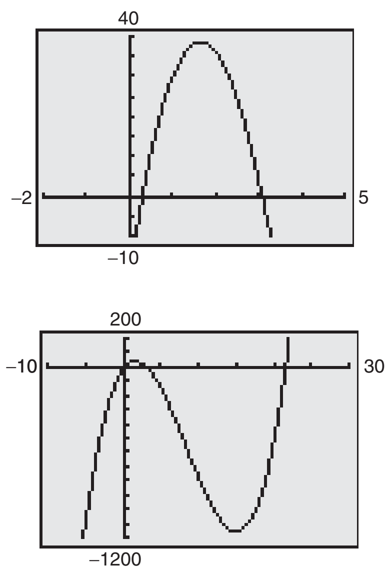
- **Analizar y trazar la gráfica de una función.**

Análisis de la gráfica de una función

Sería difícil exagerar la importancia de usar gráficas en matemáticas. La introducción de la geometría analítica por parte de Descartes contribuyó de manera significativa a los rápidos avances en el cálculo que se iniciaron durante la mitad del siglo XVII. En palabras de Lagrange: "Mientras el álgebra y la geometría recorrieron caminos independientes, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Sin embargo, cuando estas dos ciencias se juntaron, extrajeron una de la otra una fresca vitalidad y a partir de ahí marcharon a gran velocidad hacia la perfección."

Hasta ahora, se han estudiado varios conceptos que son útiles al analizar la gráfica de una función.

- Intersecciones con los ejes *x* y *y* (sección P.1)
- Simetría (sección P.1)
- Dominio y rango o recorrido (sección P.3)
- Continuidad (sección 1.4)
- Asíntotas verticales (sección 1.5)
- Derivabilidad (sección 2.1)
- Extremos relativos (sección 3.1)
- Concavidad (sección 3.4)
- Puntos de inflexión (sección 3.4)
- Asíntotas horizontales (sección 3.5)
- Límites infinitos al infinito (sección 3.5)



Diferentes ventanas de observación para la gráfica de $f(x) = x^3 - 25x^2 + 74x - 20$
Figura 3.44

Al dibujar la gráfica de una función, ya sea en forma manual o por medio de una herramienta gráfica, recordar que normalmente no es posible mostrar la gráfica *entera*. La decisión en cuanto a la parte de la gráfica que se decide mostrar es muchas veces crucial. Por ejemplo, ¿cuál de las ventanas de observación en la figura 3.44 representa mejor a la gráfica de

$$f(x) = x^3 - 25x^2 + 74x - 20?$$

Al ver ambas imágenes, es claro que la segunda ventana de observación proporciona una representación más completa de la gráfica. Sin embargo, ¿una tercera ventana de observación revelaría otras porciones interesantes de la gráfica? Para responder a esta pregunta, es necesario utilizar el cálculo para interpretar la primera y la segunda derivadas. A continuación se presentan unas estrategias para determinar una buena ventana de observación de la gráfica de una función.

Estrategia para analizar la gráfica de una función

1. Determinar el dominio y el rango de la función.
2. Determinar las intersecciones, asíntotas y simetría de la gráfica.
3. Localizar los valores de x para los cuales $f'(x)$ y $f''(x)$ son cero o no existen. Usar los resultados para determinar extremos relativos y puntos de inflexión.

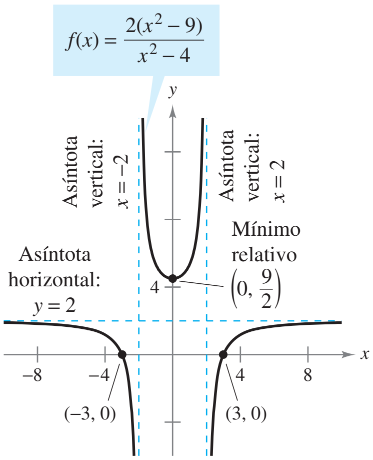
NOTA En estas estrategias, advertir la importancia del *álgebra* (así como del cálculo) para resolver las ecuaciones $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ y $f''(x) = 0$.

EJEMPLO 1 Dibujo de la gráfica de una función racional

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x)=\dfrac{2(x^2-9)}{x^2-4}$.

Solución

Primera derivada:	$f'(x) = \dfrac{20x}{(x^2-4)^2}$
Segunda derivada:	$f''(x) = \dfrac{-20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$
Intersecciones en x:	$(-3, 0), (3, 0)$
Intersección en y:	$\left(0, \frac{9}{2}\right)$
Asíntotas verticales:	$x = -2, x = 2$
Asíntota horizontal:	$y = 2$
Punto crítico:	$x = 0$
Posibles puntos de inflexión:	Ninguno
Dominio:	Todos los números reales excepto $x = \pm 2$
Simetría:	Con respecto al eje y
Intervalos de prueba:	$(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, \infty)$



Empleando el cálculo, se puede tener la certeza de que se han determinado todas las características de la gráfica de f
Figura 3.45

La tabla muestra cómo se usan los intervalos de prueba para determinar varias características de la gráfica. La gráfica de f se ilustra en la figura 3.45.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Característica de la gráfica
$-\infty < x < -2$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = -2$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$-2 < x < 0$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 0$	$\frac{9}{2}$	0	$+$	Mínimo relativo
$0 < x < 2$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 2$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$2 < x < \infty$		$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo

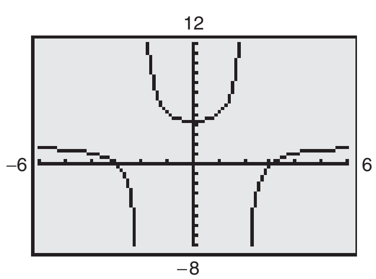
PARA MAYOR INFORMACIÓN Para mayor información del uso de tecnología para representar funciones racionales, consultar el artículo "Graphs of Rational Functions for Computer Assisted Calculus" de Stan Bird y Terry Walters en *The College Mathematics Journal*.

Asegurarse de entender todas las indicaciones de la creación de una tabla tal como la que se muestra en el ejemplo 1. Debido al uso del cálculo, se debe *estar seguro* de que la gráfica no tiene extremos relativos o puntos de inflexión aparte de los que se muestran en la figura 3.45.

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Sin utilizar el tipo de análisis que se describe en el ejemplo 1, es fácil obtener una visión incompleta de las características básicas de la gráfica. Por ejemplo, la figura 3.46 muestra una imagen de la gráfica de

$$g(x)=\frac{2(x^2-9)(x-20)}{(x^2-4)(x-21)}.$$

De acuerdo con esta imagen, parece que la gráfica de g es casi la misma que la gráfica de f que se muestra en la figura 3.45. Sin embargo, las gráficas de estas dos funciones difieren bastante. Tratar de agrandar la ventana de observación para ver las diferencias.



Al no usar el cálculo se puede pasar por alto importantes características de la gráfica de g
Figura 3.46

EJEMPLO 2 Dibujo de la gráfica de una función racional

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$.

Solución

Primera derivada: $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

Segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{8}{(x-2)^3}$

Intersecciones en x: Ninguna

Intersección en y: $(0, -2)$

Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntotas horizontales: Ninguna

Comportamiento final o asintótico: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Puntos críticos: $x = 0, x = 4$

Posibles puntos de inflexión: Ninguno

Dominio: Todos los números reales excepto $x = 2$

Intervalos de prueba: $(-\infty, 0), (0, 2), (2, 4), (4, \infty)$

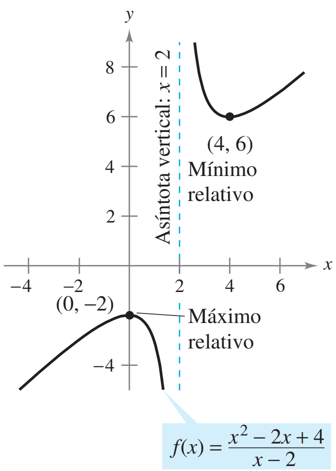


Figura 3.47

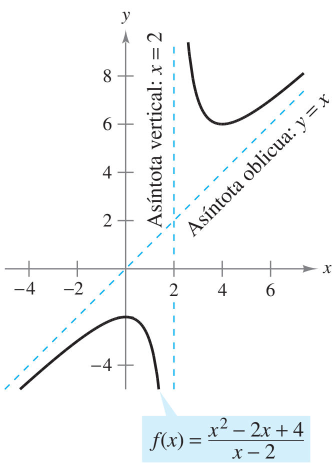
El análisis de la gráfica de f se muestra en la tabla, y la gráfica se ilustra en la figura 3.47.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$-\infty < x < 0$		+	−	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	-2	0	−	Máximo relativo
$0 < x < 2$		−	−	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 2$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$2 < x < 4$		−	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 4$	6	0	+	Mínimo relativo
$4 < x < \infty$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba

Aunque la gráfica de la función en el ejemplo 2 no tiene asíntota horizontal, tiene una asíntota oblicua. La gráfica de una función racional (que no tiene factores comunes y cuyo denominador es de grado 1 o mayor) tiene una **asíntota oblicua** si el grado del numerador excede al grado del denominador exactamente en 1. Para determinar la asíntota oblicua, usar la división larga para describir la función racional como la suma de un polinomio de primer grado y otra función racional.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$= x + \frac{4}{x - 2} \qquad \text{Reescribir utilizando la división larga.}$$



Una asíntota oblicua
Figura 3.48

En la figura 3.48, advertir que la gráfica de f se acerca a la asíntota oblicua $y = x$ cuando x tiende a $-\infty$ o ∞.

EJEMPLO 3 Dibujo de la gráfica de una función radical

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

Solución

$$f'(x) = \frac{2}{(x^2+2)^{3/2}} \qquad f''(x) = -\frac{6x}{(x^2+2)^{5/2}}$$

La gráfica sólo tiene una intersección, (0, 0). No tiene asíntotas verticales, pero cuenta con dos asíntotas horizontales: $y = 1$ (a la derecha) y $y = -1$ (a la izquierda). La función no tiene puntos críticos y sólo un posible punto de inflexión ($x = 0$). El dominio de la función son todos los números reales, y la gráfica es simétrica con respecto al origen. El análisis de la gráfica de f se muestra en la tabla, y la gráfica se presenta en la figura 3.49.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$-\infty < x < 0$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 0$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	Punto de inflexión
$0 < x < \infty$		$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo

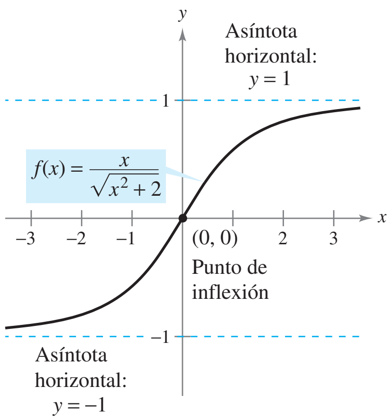


Figura 3.49

EJEMPLO 4 Dibujo de la gráfica de una función radical

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}$.

Solución

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{1/3}(x^{1/3}-2) \qquad f''(x) = \frac{20(x^{1/3}-1)}{9x^{2/3}}$$

La función tiene dos intersecciones: (0, 0) y $\left(\frac{125}{8}, 0\right)$. No hay asíntotas horizontales o verticales. La función tiene dos puntos críticos ($x = 0$ y $x = 8$) y dos posibles puntos de inflexión ($x = 0$ y $x = 1$). El dominio son todos los números reales. El análisis de la gráfica de f se presenta en la tabla, y la gráfica se ilustra en la figura 3.50.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$-\infty < x < 0$		$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	0	Indef.	Máximo relativo
$0 < x < 1$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 1$	-3	$-$	0	Punto de inflexión
$1 < x < 8$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 8$	-16	0	$+$	Mínimo relativo
$8 < x < \infty$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba

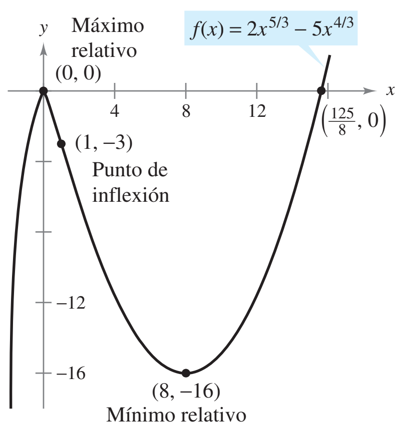


Figura 3.50

EJEMPLO 5 Dibujo de la gráfica de una función polinomial

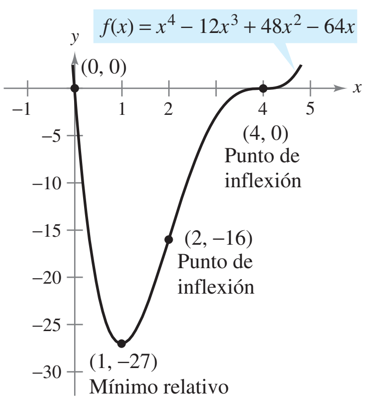
Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$.

Solución Se inicia factorizando para obtener

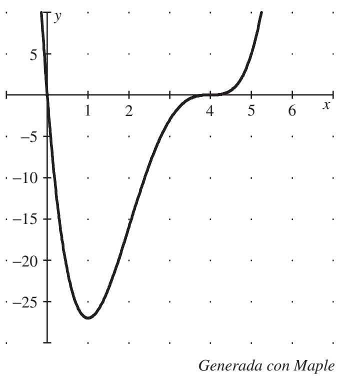
$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x \\ &= x(x-4)^3. \end{aligned}$$

Luego, utilizando la forma factorizada de $f(x)$, se puede efectuar el siguiente análisis.

Primera derivada:	$f'(x) = 4(x-1)(x-4)^2$
Segunda derivada:	$f''(x) = 12(x-4)(x-2)$
Intersecciones en x:	$(0, 0)$, $(4, 0)$
Intersección en y:	$(0, 0)$
Asíntotas verticales:	Ninguna
Asíntotas horizontales:	Ninguna
Comportamiento final o asintótico:	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
Puntos críticos:	$x = 1$, $x = 4$
Posibles puntos de inflexión:	$x = 2$, $x = 4$
Dominio:	Todos los números reales
Intervalos de prueba:	$(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, \infty)$



a)



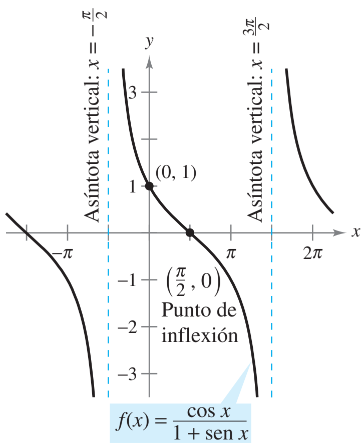
b)
Una función polinomial de grado par debe tener al menos un extremo relativo
Figura 3.51

El análisis de la gráfica de f se muestra en la tabla, y la gráfica se presenta en la figura 3.51*a*. El uso de un sistema de álgebra por computadora como *Maple* (ver la figura 3.51*b*) puede resultar de utilidad para verificar el análisis.

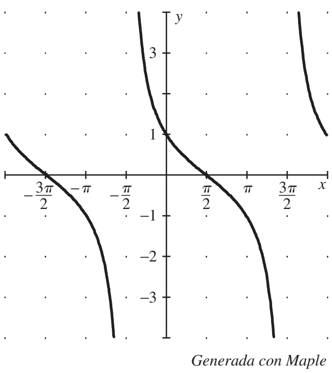
	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Característica de la gráfica
$-\infty < x < 1$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 1$	-27	0	$+$	Mínimo relativo
$1 < x < 2$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 2$	-16	$+$	0	Punto de inflexión
$2 < x < 4$		$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 4$	0	0	0	Punto de inflexión
$4 < x < \infty$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba

La función polinomial de cuarto grado del ejemplo 5 tiene un mínimo relativo y ningún máximo relativo. En general, una función polinomial de grado n puede tener *a lo más* $n - 1$ extremos relativos, y *cuando mucho* $n - 2$ puntos de inflexión. Además, las funciones polinomiales de grado par deben tener *al menos* un extremo relativo.

Recordemos del criterio del coeficiente adelantado o dominante que se describió en la sección P.3 que el "comportamiento final" o asintótico de la gráfica de una función polinomial se determina mediante su coeficiente dominante y por su grado. Por ejemplo, debido a que el polinomio en el ejercicio 5 tiene un coeficiente dominante positivo, la gráfica crece hacia la derecha. Además, como el grado es par, la gráfica también crece hacia la izquierda.



a)



b)

Figura 3.52

EJEMPLO 6 Dibujo de la gráfica de una función trigonométrica

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$.

Solución Debido a que la función tiene un periodo de 2π, se puede restringir el análisis de la gráfica a cualquier intervalo de longitud 2π. Por conveniencia, utilizar $(-\pi/2, 3\pi/2)$.

Primera derivada: $f'(x) = -\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$

Segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}$

Periodo: 2π

Intersección en x: $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

Intersección en y: $(0, 1)$

Asíntotas verticales: $x = -\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{3\pi}{2}$ Véase nota anterior.

Asíntotas horizontales: Ninguna

Puntos críticos: Ninguno

Posibles puntos de inflexión: $x = \dfrac{\pi}{2}$

Dominio: Todos los números reales excepto $x = \dfrac{3 + 4n}{2}\pi$

Intervalos de prueba: $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

El análisis de la gráfica de f en el intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$ se muestra en la tabla, y la gráfica se presenta en la figura 3.52*a*. Comparar esto con la gráfica generada por el sistema algebraico por computadora *Maple* en la figura 3.52*b*.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$x = -\dfrac{\pi}{2}$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = \dfrac{\pi}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	0	Punto de inflexión
$\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = \dfrac{3\pi}{2}$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical

NOTA Sustituyendo $-\pi/2$ o $3\pi/2$ en la función, se obtiene la forma $0/0$. Ésta recibe el nombre de forma indeterminada y se estudiará en la sección 8.7. Para determinar si la función tiene asíntotas verticales en estos dos valores, es posible rescribir las funciones como sigue.

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{(\cos x)(1 - \operatorname{sen} x)}{(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{(\cos x)(1 - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

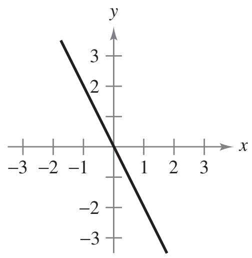
En esta forma, es claro que la gráfica de f tiene asíntotas verticales cuando $x = -\pi/2$ y $3\pi/2$. ■

3.6 Ejercicios

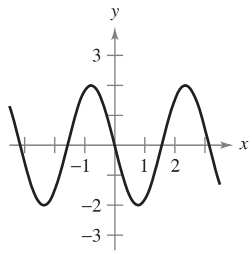
En los ejercicios 1 a 4, hacer que corresponda la gráfica de *f* en la columna izquierda con la de su derivada en la columna derecha.

Gráfica de f | *Gráfica de f′*

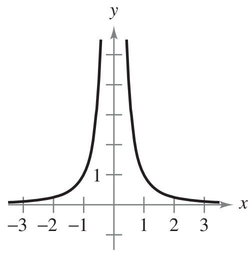
1.



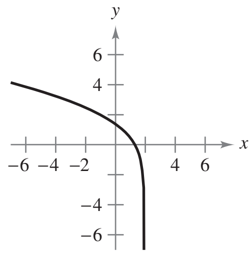
a)



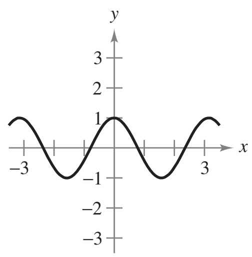
2.



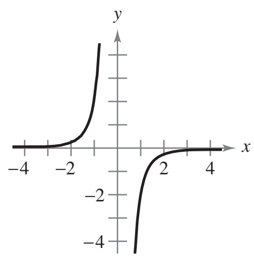
b)



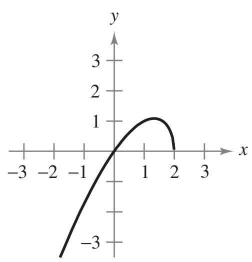
3.



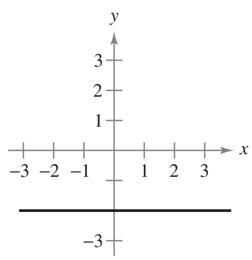
c)



4.



d)



En los ejercicios 5 a 32, analizar y dibujar una gráfica de la función. Indicar todas las intersecciones, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Utilizar una herramienta de graficación para verificar los resultados.

5. $y = \dfrac{1}{x-2} - 3$

6. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

7. $y = \dfrac{x^2}{x^2+3}$

8. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

9. $y = \dfrac{3x}{x^2-1}$

10. $f(x) = \dfrac{x-3}{x}$

11. $g(x) = x - \dfrac{8}{x^2}$

12. $f(x) = x + \dfrac{32}{x^2}$

13. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

14. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-9}$

15. $y = \dfrac{x^2-6x+12}{x-4}$

16. $y = \dfrac{2x^2-5x+5}{x-2}$

17. $y = x\sqrt{4-x}$

18. $g(x) = x\sqrt{9-x}$

19. $h(x) = x\sqrt{4-x^2}$

20. $g(x) = x\sqrt{9-x^2}$

21. $y = 3x^{2/3} - 2x$

22. $y = 3(x-1)^{2/3} - (x-1)^2$

23. $y = x^3 - 3x^2 + 3$

24. $y = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x + 2)$

25. $y = 2 - x - x^3$

26. $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + 2$

27. $y = 3x^4 + 4x^3$

28. $y = 3x^4 - 6x^2 + \frac{5}{3}$

29. $y = x^5 - 5x$

30. $y = (x-1)^5$

31. $y = |2x-3|$

32. $y = |x^2 - 6x + 5|$

CAS **En los ejercicios 33 a 36, utilizar un sistema algebraico por computadora para analizar y representar gráficamente la función. Identificar todos los extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas.**

33. $f(x) = \dfrac{20x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x}$

34. $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2+1}$

35. $f(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2+7}}$

36. $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+15}}$

En los ejercicios 37 a 46, dibujar una gráfica de la función sobre el intervalo dado. Utilizar una herramienta de graficación para verificar la gráfica.

37. $f(x) = 2x - 4\,\operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

38. $f(x) = -x + 2\cos x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

39. $y = \operatorname{sen} x - \frac{1}{18}\operatorname{sen} 3x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

40. $y = \cos x - \frac{1}{4}\cos 2x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

41. $y = 2x - \tan x, \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

42. $y = 2(x-2) + \cot x, \quad 0 < x < \pi$

43. $y = 2(\csc x + \sec x), \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

44. $y = \sec^2\left(\dfrac{\pi x}{8}\right) - 2\tan\left(\dfrac{\pi x}{8}\right) - 1, \quad -3 < x < 3$

45. $g(x) = x\tan x, \quad -\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$

46. $g(x) = x\cot x, \quad -2\pi < x < 2\pi$

Desarrollo de conceptos

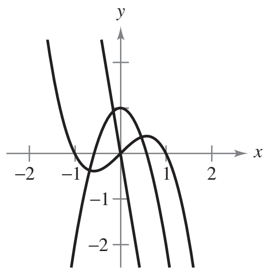
47. Suponer que $f'(t) < 0$ para todo t en el intervalo (2, 8). Explicar por qué $f(3) > f(5)$.

48. Suponer que $f(0) = 3$ y $2 \le f'(x) \le 4$ para todo x en el intervalo [−5, 5]. Determinar los valores más grande y más pequeño posibles de $f(2)$.

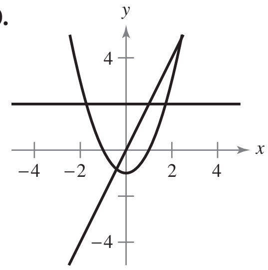
Desarrollo de conceptos (*continuación*)

En los ejercicios 49 y 50, las gráficas de f, f' y f'' se muestran sobre el mismo conjunto de ejes de coordenadas. ¿Cuál es cuál? Explicar el razonamiento.

49.



50.



En los ejercicios 51 a 54, utilizar una herramienta de graficación para representar la función. Emplear la gráfica para determinar, si es posible, que la gráfica de la función cruce su asíntota horizontal. ¿Es posible que la gráfica de una función cruce su asíntota vertical? ¿Por qué sí o por qué no?

51. $f(x) = \dfrac{4(x-1)^2}{x^2-4x+5}$

52. $g(x) = \dfrac{3x^4-5x+3}{x^4+1}$

53. $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

54. $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{4x}$

En los ejercicios 55 y 56, emplear una herramienta de graficación para representar la función. Explicar por qué no hay asíntota vertical cuando una inspección superficial de la función quizá indique que debería haber una.

55. $h(x) = \dfrac{6-2x}{3-x}$

56. $g(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

En los ejercicios 57 a 60, utilizar una herramienta de graficación para representar la función y determinar la asíntota oblicua de la gráfica. Realizar acercamientos repetidos y describir cómo parece cambiar la gráfica que se exhibe. ¿Por qué ocurre lo anterior?

57. $f(x) = -\dfrac{x^2-3x-1}{x-2}$

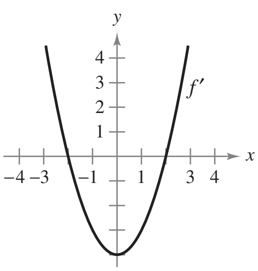
58. $g(x) = \dfrac{2x^2-8x-15}{x-5}$

59. $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$

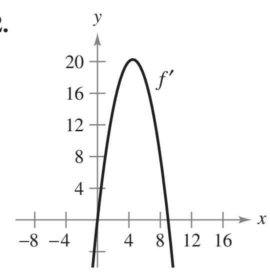
60. $h(x) = \dfrac{-x^3+x^2+4}{x^2}$

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 61 a 64, utilizar la gráfica de f' para dibujar la gráfica de f y la gráfica de f''.**

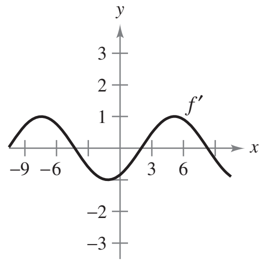
61.



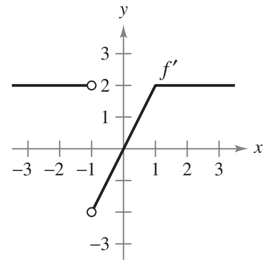
62.



63.



64.



(*Proporcionado por Big Fox, Moverly Area Community College, Moverly MO*)

CAS **65.** ***Razonamiento gráfico*** Considerar la función

$$f(x) = \frac{\cos^2 \pi x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad 0 < x < 4.$$

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar la función y emplear la gráfica para aproximar en forma visual los puntos críticos.

b) Emplear un sistema algebraico por computadora para determinar f' y aproximar los puntos críticos. ¿Los resultados son los mismos que los de la aproximación visual del apartado *a*)? Explicar.

66. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la función

$f(x) = \tan(\operatorname{sen} \pi x)$.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función.

b) Identificar toda simetría de la gráfica.

c) ¿Es periódica la función? Si es así, ¿cuál es el periodo?

d) Identificar todos los extremos en $(-1, 1)$.

e) Utilizar una herramienta de graficación para determinar la concavidad de la gráfica en $(0, 1)$.

Para pensar **En los ejercicios 67 a 70, crear una función cuya gráfica tiene las características indicadas. (Hay más de una respuesta correcta.)**

67. Asíntota vertical: $x = 3$
Asíntota horizontal: $y = 0$

68. Asíntota vertical: $x = -5$
Asíntota horizontal: ninguna

69. Asíntota vertical: $x = 3$
Asíntota oblicua: $y = 3x + 2$

70. Asíntota vertical: $x = 2$
Asíntota oblicua: $y = -x$

71. ***Razonamiento gráfico*** A continuación se muestra la gráfica de la función f.

a) ¿Para cuáles valores de x es $f'(x)$ cero, positiva y negativa?

b) ¿Para cuáles valores de x es $f''(x)$ cero, positiva y negativa?

c) ¿Sobre qué intervalo la función f' es creciente?

d) ¿Para qué valor de x la función $f'(x)$ tiene un mínimo? Para este valor de x, ¿cómo se comporta la razón de cambio de f en comparación con la razón de cambio para otros valores? Explicar.

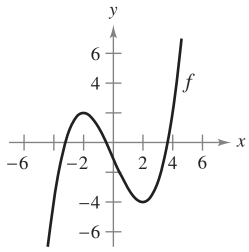


Figura para 71

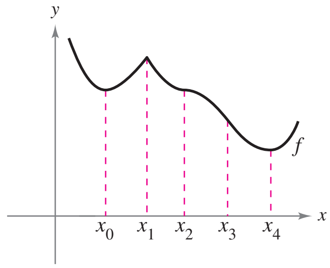


Figura para 72

Para discusión

72. ***Razonamiento gráfico*** Identificar en la figura los números reales x_0, x_1, x_2, x_3 y x_4 de tal manera que los siguientes enunciados sean verdaderos.

a) $f'(x) = 0$ *b)* $f''(x) = 0$

c) $f'(x)$ no existe. *d)* f tiene un máximo relativo.

e) f tiene un punto de inflexión.

73. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la función

$$f(x) = \frac{ax}{(x - b)^2}.$$

Determinar el efecto sobre la gráfica de f si a y b cambian. Considerar casos en los que a y b son ambos positivos o ambos negativos, y casos en los que a y b tienen signos opuestos.

74. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{2}(ax)^2 - (ax)$, $a \neq 0$.

a) Determinar los cambios (si los hay) en las intersecciones, los extremos y la concavidad de la gráfica f cuando varía a.

b) En la misma ventana de observación, utilizar una herramienta de graficación para representar la función relativa a 4 valores diferentes de a.

75. ***Investigación*** Considerar la función

$$f(x) = \frac{2x^n}{x^4 + 1}$$

para valores enteros no negativos de n.

a) Analizar la relación entre el valor de n y la simetría de la gráfica.

b) ¿Para qué valores de n el eje x será la asíntota horizontal?

c) ¿Para qué valor de n será $y = 2$ la asíntota horizontal?

d) ¿Cuál es la asíntota de la gráfica cuando $n = 5$?

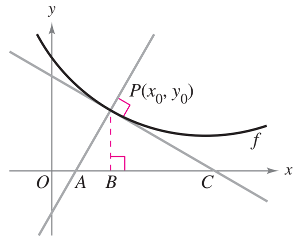
e) Representar f en una herramienta de graficación para cada valor de n indicado en la tabla. Emplear la gráfica para determinar el número M de extremos y el número N de puntos de inflexión de la gráfica.

n	0	1	2	3	4	5
M						
N						

76. ***Investigación*** Sea $P(x_0, y_0)$ un punto arbitrario sobre la gráfica de f tal que $f'(x_0) \neq 0$, como se indica en la figura. Verificar cada afirmación.

a) La intersección con el eje x de la recta tangente es

$$\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right).$$



b) La intersección con el eje y de la recta tangente es

$$(0, f(x_0) - x_0 f'(x_0)).$$

c) La intersección con el eje x de la recta normal es

$$(x_0 + f(x_0)f'(x_0), 0).$$

d) La intersección con el eje y de la recta normal es

$$\left(0, y_0 + \frac{x_0}{f'(x_0)}\right).$$

e) $|BC| = \left|\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|$ *f)* $|PC| = \left|\dfrac{f(x_0)\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}}{f'(x_0)}\right|$

g) $|AB| = |f(x_0)f'(x_0)|$

h) $|AP| = |f(x_0)|\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}$

77. ***Modelado matemático*** Los datos en la tabla muestran el número N de bacterias en un cultivo en el tiempo t, donde t se mide en días.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
N	25	200	804	1 756	2 296	2 434	2 467	2 473

Un modelo para estos datos está dado por

$$N = \frac{24\,670 - 35\,153t + 13\,250t^2}{100 - 39t + 7t^2}, \quad 1 \leq t \leq 8.$$

a) Utilizar una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

b) Recurrir al modelo para estimar el número de bacterias cuando $t = 10$.

c) Aproximar el día cuando el número de bacterias es más grande.

CAS *d)* Utilizar un sistema algebraico por computadora para determinar el tiempo en que la tasa de incremento en el número de bacterias es más grande.

e) Calcular $\lim\limits_{t \to \infty} N(t)$.

Asíntotas oblicuas **En los ejercicios 78 y 79, la gráfica de la función tiene dos asíntotas oblicuas. Identificar cada asíntota oblicua. Después representar gráficamente la función y sus asíntotas.**

78. $y = \sqrt{4 + 16x^2}$ **79.** $y = \sqrt{x^2 + 6x}$

Preparación del examen Putnam

80. Considerar que $f(x)$ está definida en $a \leq x \leq b$. Suponiendo propiedades apropiadas de continuidad y derivabilidad, demostrar para $a < x < b$ que

$$\frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}{x - b} = \frac{1}{2}f''(\beta)$$

donde β es algún número entre a y b.

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.

3.7 Problemas de optimización

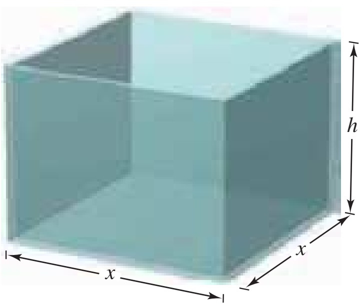
- **Resolver problemas de máximos y mínimos aplicados.**

Problemas de aplicación de máximos y mínimos

Una de las aplicaciones más comunes del cálculo implica la determinación de los valores mínimo y máximo. Recordar cuántas veces hemos oído hablar de utilidad (beneficio) máxima(o), mínimo costo, tiempo mínimo, voltaje máximo, forma óptima, tamaño mínimo, máxima resistencia y máxima distancia. Antes de describir una estrategia general de solución para tales problemas, se considera un ejemplo.

EJEMPLO 1 Determinación del volumen máximo

Un fabricante quiere diseñar una caja abierta que tenga una base cuadrada y un área superficial de 108 pulgadas cuadradas, como se muestra en la figura 3.53. ¿Qué dimensiones producirá una caja con un volumen máximo?



Caja abierta con base cuadrada: $S = x^2 + 4xh = 108$
Figura 3.53

Solución Debido a que la caja tiene una base cuadrada, su volumen es

$$V = x^2h \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación primaria** porque proporciona una fórmula para la cantidad que se va a optimizar. El área de la superficie de la caja es

$$S = (\text{área de la base}) + (\text{área de los cuatro lados})$$
$$S = x^2 + 4xh = 108. \qquad \text{Ecuación secundaria.}$$

Como V se va a maximizar, escribir V como una función de una sola variable. Para hacerlo, es posible resolver la ecuación $x^2 + 4xh = 108$ para h en términos de x y obtener $h = (108 - x^2)/(4x)$. Sustituyendo en la ecuación primaria, se obtiene

$$\begin{aligned} V &= x^2h && \text{Función de dos variables.}\\ &= x^2\left(\frac{108 - x^2}{4x}\right) && \text{Sustituir para } h.\\ &= 27x - \frac{x^3}{4}. && \text{Función de una variable.} \end{aligned}$$

Antes de determinar qué valor de x producirá un valor máximo de V, se necesita determinar el *dominio admisible*. Esto es, ¿qué valores de x tienen sentido en este problema? Se sabe que $V \geq 0$. También que x debe ser no negativa y que el área de la base ($A = x^2$) es a lo sumo 108. De tal modo, el dominio admisible es

$$0 \leq x \leq \sqrt{108}. \qquad \text{Dominio admisible.}$$

Para maximizar V, determinar los puntos críticos de la función de volumen en el intervalo $(0, \sqrt{108})$.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} = 27 - \frac{3x^2}{4} &= 0 && \text{Igualar la derivada a cero.}\\ 3x^2 &= 108 && \text{Simplificar.}\\ x &= \pm 6 && \text{Puntos críticos.} \end{aligned}$$

De tal modo, los puntos críticos son $x = \pm 6$. No se necesita considerar $x = -6$ porque está fuera del dominio. La evaluación V en el punto crítico $x = 6$ y en los puntos terminales del dominio produce $V(0) = 0$, $V(6) = 108$ y $V\left(\sqrt{108}\right) = 0$. De tal modo, V es máximo cuando $x = 6$ y las dimensiones de la caja son $6 \times 6 \times 3$ pulgadas.

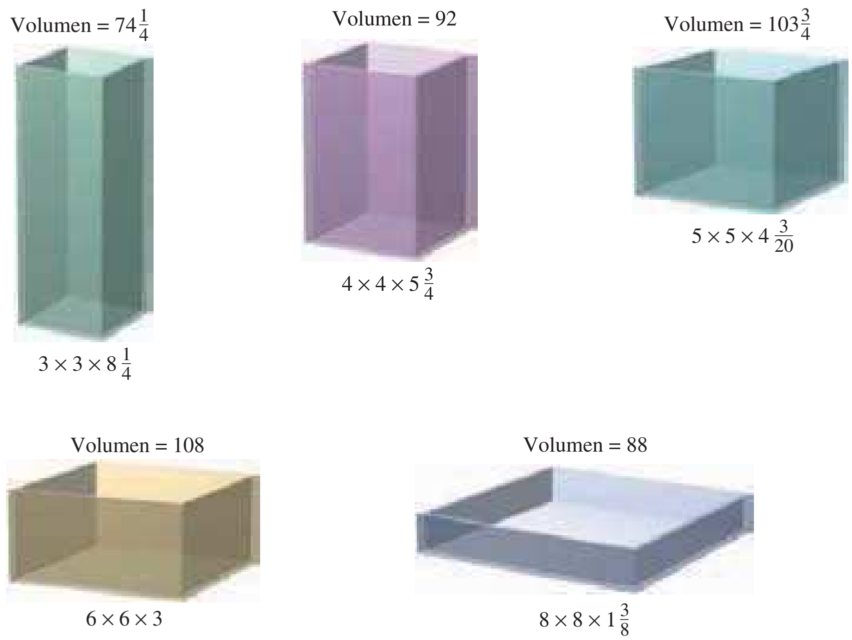
TECNOLOGÍA Se puede verificar la respuesta utilizando una herramienta de graficación para representar la función volumen

$$V = 27x - \frac{x^3}{4}.$$

Usar una ventana de observación en la que $0 \leq x \leq \sqrt{108} \approx 10.4$ y $0 \leq y \leq 120$, y la función *trace* para determinar el valor máximo de V.

En el ejemplo 1 se nota que hay un número infinito de cajas abiertas que tienen 108 pulgadas cuadradas de área superficial. Para empezar a resolver el problema es necesario preguntar qué forma básica parecería producir un volumen máximo. ¿La caja debe ser alta, muy baja o casi cúbica?

Incluso se puede tratar de calcular unos cuantos volúmenes, como se muestra en la figura 3.54, para ver si se obtiene una mejor idea de lo que deben ser las dimensiones óptimas. Recordar que no se puede resolver un problema hasta que no haya sido identificado con toda claridad.



¿Qué caja tiene el volumen mayor?
Figura 3.54

El ejemplo 1 ilustra las siguientes estrategias para resolver problemas aplicados de mínimos y máximos.

Estrategias para resolver problemas aplicados de mínimos y máximos

1. Identificar todas las cantidades *dadas* y las que *se van a determinar*. Si es posible, elaborar un dibujo.
2. Escribir una **ecuación primaria** para la cantidad que se va a maximizar o minimizar.
3. Reducir la ecuación primaria a una que tenga una *sola variable independiente*. Esto quizá implique el uso de **ecuaciones secundarias** que relacionan las variables independientes de la ecuación primaria.
4. Determinar el dominio admisible de la ecuación primaria. Esto es, determinar los valores para los cuales el problema planteado tiene sentido.
5. Determinar el valor máximo o mínimo deseado mediante las técnicas de cálculo estudiadas en las secciones 3.1 a 3.4.

NOTA Al efectuar el paso 5, recordar que para determinar el valor máximo o mínimo de una función continua f en un intervalo cerrado, hay que comparar los valores de f en sus puntos críticos con los valores de f en los puntos terminales del intervalo.

EJEMPLO 2 Determinación de la distancia mínima

¿Qué puntos sobre la gráfica de $y = 4 - x^2$ son más cercanos al punto $(0, 2)$?

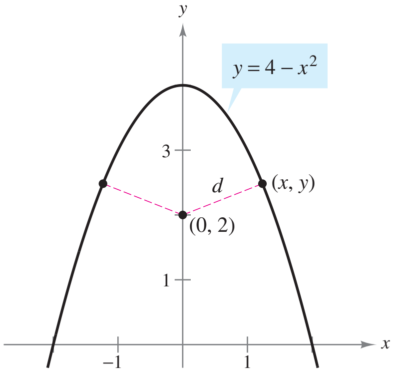
Solución

La figura 3.55 muestra que hay dos puntos a una distancia mínima del punto $(0, 2)$. La distancia entre el punto $(0, 2)$ y el punto (x, y) sobre la gráfica de $y = 4 - x^2$ está dada por

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2}. \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

Utilizando la ecuación secundaria $y = 4 - x^2$, se puede rescribir la ecuación primaria como

$$d = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}.$$



La cantidad por minimizar es la distancia: $d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2}$.
Figura 3.55

Como d es más pequeña cuando la expresión dentro de radicales es menor, sólo se necesitan determinar los puntos críticos de $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$. Advertir que el dominio de f es toda la recta de los números reales. De tal modo, no hay puntos terminales del dominio por considerar. Además, igualando $f'(x)$ a 0 se obtiene

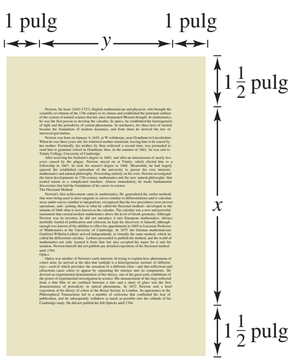
$$f'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3) = 0$$

$$x = 0, \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

El criterio de la primera derivada verifica que $x = 0$ produce un máximo relativo, mientras que $x = \sqrt{3/2}$ y $x = -\sqrt{3/2}$ producen una distancia mínima. De tal modo, los puntos más cercanos son $\left(\sqrt{3/2}, 5/2\right)$ y $\left(-\sqrt{3/2}, 5/2\right)$.

EJEMPLO 3 Determinación del área mínima

Una página rectangular ha de contener 24 pulgadas cuadradas de impresión. Los márgenes de la parte superior y de la parte inferior de la página van a ser de $1\frac{1}{2}$ pulgadas, y los márgenes de la izquierda y la derecha corresponderán a 1 pulgada (ver la figura 3.56). ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para que se use la menor cantidad de papel?



La cantidad que se va a minimizar es el área: $A = (x + 3)(y + 2)$
Figura 3.56

Solución Sea A el área que se va a minimizar

$$A = (x + 3)(y + 2) \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

El área impresa dentro del margen está dada por

$$24 = xy. \qquad \text{Ecuación secundaria.}$$

Despejando de esta ecuación para y produce $y = 24/x$. La sustitución en la ecuación primaria da lugar a

$$A = (x + 3)\left(\frac{24}{x} + 2\right) = 30 + 2x + \frac{72}{x}. \qquad \text{Función de una variable.}$$

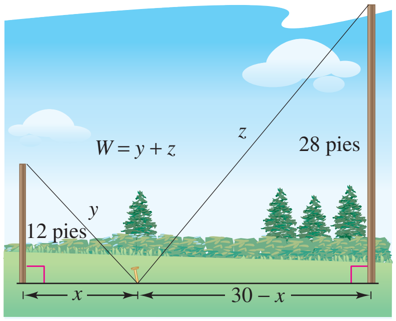
Debido a que x debe ser positiva, se está interesado sólo en los valores de A para $x > 0$. Para encontrar los puntos críticos, derivar con respecto a x.

$$\frac{dA}{dx} = 2 - \frac{72}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 36$$

De tal modo, los puntos críticos son $x = \pm 6$. No es necesario considerar $x = -6$ porque este punto está fuera del dominio. El criterio de la primera derivada confirma que A es un mínimo cuando $x = 6$. De tal modo, $y = \frac{24}{6} = 4$ y las dimensiones de la página deben ser $x + 3 = 9$ pulgadas por $y + 2 = 6$ pulgadas.

EJEMPLO 4 Hallar la longitud mínima

Dos postes, uno de 12 pies de altura y el otro de 28 pies, están a 30 pies de distancia. Se sostienen por dos cables, conectados a una sola estaca, desde el nivel del suelo hasta la parte superior de cada poste. ¿Dónde debe colocarse la estaca para que se use la menor cantidad de cable?



La cantidad que se va a minimizar es la longitud. De acuerdo con el diagrama, puede verse que x varía entre 0 y 30

Figura 3.57

Solución

Sea W la longitud del cable que se va a minimizar. Utilizando la figura 3.57, puede escribirse

$$W = y + z. \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

En este problema, más que resolver para y en términos de z (o viceversa), se deben despejar tanto para y como para z en términos de una tercera variable x, como se indica en la figura 3.57. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 + 12^2 &= y^2 \\ (30 - x)^2 + 28^2 &= z^2 \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 + 144} \\ z &= \sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}. \end{aligned}$$

De tal modo, W está dada por

$$\begin{aligned} W &= y + z \\ &= \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}, \qquad 0 \le x \le 30. \end{aligned}$$

La derivación de W con respecto a x produce

$$\frac{dW}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}}.$$

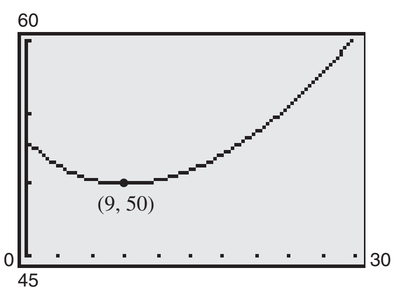
Haciendo $dW/dx = 0$, se obtendrá

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}} &= 0 \\ x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,684} &= (30 - x)\sqrt{x^2 + 144} \\ x^2(x^2 - 60x + 1\,684) &= (30 - x)^2(x^2 + 144) \\ x^4 - 60x^3 + 1\,684x^2 &= x^4 - 60x^3 + 1\,044x^2 - 8\,640x + 129\,600 \\ 640x^2 + 8\,640x - 129\,600 &= 0 \\ 320(x - 9)(2x + 45) &= 0 \\ x &= 9, -22.5. \end{aligned}$$

Como $x = -22.5$ no está en el dominio y

$$W(0) \approx 53.04, \qquad W(9) = 50 \qquad \text{y} \qquad W(30) \approx 60.31$$

se puede concluir que el alambre debe colocarse a 9 pies del poste de 12 pies.



Se puede confirmar el valor mínimo de W con una herramienta de graficación

Figura 3.58

TECNOLOGÍA De acuerdo con el ejemplo 4, puede verse que los problemas de optimización aplicada implican una gran cantidad de álgebra. Si se tiene acceso a una herramienta de graficación, confirmar que $x = 9$ produce un valor mínimo de W al trazar la gráfica

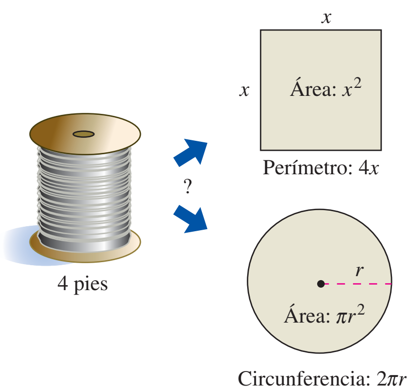
$$W = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}$$

como se muestra en la figura 3.58.

En cada uno de los primeros cuatro ejemplos, el valor extremo ocurriría en un punto crítico. Aunque esto sucede a menudo, recordar que un valor extremo también puede presentarse en un punto terminal de un intervalo, como se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Un máximo en un punto terminal

Se van a usar cuatro pies de alambre para formar un cuadrado y un círculo. ¿Qué cantidad de alambre debe usarse para el cuadrado y qué cantidad para el círculo a fin de abarcar la máxima área total?



La cantidad que se va a maximizar es el área: $A = x^2 + \pi r^2$
Figura 3.59

Solución

El área total (ver la figura 3.59) está dada por

$$A = (\text{área del cuadrado}) + (\text{área del círculo})$$
$$A = x^2 + \pi r^2. \qquad \text{Ecuación primaria.}$$

Como la longitud total de alambre es 4 pies, se obtiene

$$4 = (\text{perímetro del cuadrado}) + (\text{circunferencia del círculo})$$
$$4 = 4x + 2\pi r.$$

De tal modo, $r = 2(1 - x)/\pi$, y sustituyendo en la ecuación primaria se obtiene

$$\begin{aligned} A &= x^2 + \pi\left[\frac{2(1-x)}{\pi}\right]^2 \\ &= x^2 + \frac{4(1-x)^2}{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}[(\pi + 4)x^2 - 8x + 4]. \end{aligned}$$

El dominio admisible es $0 \leq x \leq 1$ restringido por el perímetro cuadrado. Como

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2(\pi + 4)x - 8}{\pi}$$

el único punto crítico en $(0, 1)$ es $x = 4/(\pi + 4) \approx 0.56$. Así, utilizando

$$A(0) \approx 1.273, \quad A(0.56) \approx 0.56 \quad \text{y} \quad A(1) = 1$$

Puede concluirse que el área máxima ocurre cuando $x = 0$. Esto es, *todo* el alambre se usa para el círculo.

EXPLORACIÓN

¿Cuál sería la respuesta si en el ejemplo 5 se preguntaran las dimensiones necesarias para encerrar el área total *mínima*?

Revisar las ecuaciones primarias formuladas en los primeros cinco ejemplos. Como indican las aplicaciones, estos cinco ejemplos son bastante simples, no obstante las ecuaciones primarias resultantes son bastante complicadas.

$$V = 27x - \frac{x^3}{4} \qquad W = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,684}$$

$$d = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \qquad A = \frac{1}{\pi}[(\pi + 4)x^2 - 8x + 4]$$

$$A = 30 + 2x + \frac{72}{x}$$

Por lo común, debe esperarse que las aplicaciones de la vida real incluyan ecuaciones *al menos tan complicadas* como estas cinco. Recordar que una de las metas principales de este curso es aprender a utilizar el cálculo con el fin de analizar ecuaciones que en un principio parecen ser sumamente complejas.

3.7 Ejercicios

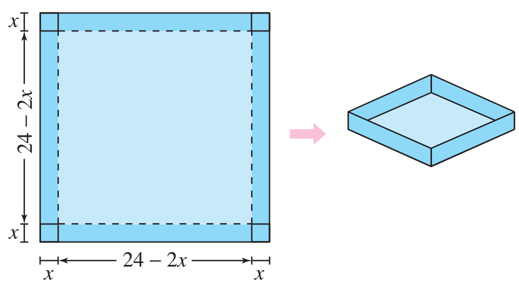
1. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Encontrar dos números positivos cuya suma es 110 y cuyo producto es un máximo posible.

   a) Completar analíticamente seis renglones de una tabla tal como la siguiente. (Se muestran los primeros dos renglones.)

Primer número x	Segundo número	Producto P
10	$110 - 10$	$10(110 - 10) = 1\,000$
20	$110 - 20$	$20(110 - 20) = 1\,800$

   b) Utilizar una herramienta de graficación para generar renglones adicionales en la tabla. Emplear la tabla para estimar la solución. (*Sugerencia:* Utilizar la función *table* de la herramienta de graficación.)
   c) Escribir el producto P como una función de x.
   d) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función en el apartado *c*) y estimar la solución a partir de la gráfica.
   e) Usar el cálculo para determinar el punto crítico de la función en el apartado *c*). Encontrar después los dos números.

2. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Una caja abierta de volumen máximo se va a construir a partir de una pieza cuadrada de material, de 24 pulgadas de lado, cortando cuadrados iguales a partir de las esquinas y doblando los bordes (ver la figura).



   a) Completar analíticamente seis renglones de una tabla tal como la siguiente. (Se muestran los primeros dos renglones.) Usar la tabla para estimar el volumen máximo.

Altura x	Largo y ancho	Volumen V
1	$24 - 2(1)$	$1[24 - 2(1)]^2 = 484$
2	$24 - 2(2)$	$2[24 - 2(2)]^2 = 800$

   b) Escribir el volumen V como una función de x.
   c) Emplear cálculo para determinar el punto crítico de la función en el apartado *b*) y encontrar el valor máximo.
   d) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función del apartado *b*) y verificar el volumen máximo a partir de la gráfica.

En los ejercicios 3 a 8, encontrar dos números positivos que satisfagan los requerimientos dados.

3. La suma es S y el producto es un máximo.
4. El producto es 185 y la suma es un mínimo.
5. El producto es 147 y la suma del primero más tres veces el segundo es un mínimo.
6. El segundo número es el recíproco del primero y la suma es un mínimo.
7. La suma del primero y el doble del segundo es 108 y el producto es un máximo.
8. La suma del primer número al cuadrado y el segundo es 54 y el producto es un máximo.

En los ejercicios 9 y 10, encontrar el largo y el ancho de un rectángulo que tiene el perímetro dado y un área máxima.

9. Perímetro: 80 metros
10. Perímetro: P unidades

En los ejercicios 11 y 12, encontrar el largo y el ancho de un rectángulo que tiene el área dada y un perímetro mínimo.

11. Área: 32 pies cuadrados
12. Área: A centímetros cuadrados

En los ejercicios 13 a 16, determinar el punto sobre la gráfica de la función que está más cerca al punto dado.

	Función	*Punto*		*Función*	*Punto*
13.	$f(x) = x^2$	$\left(2, \frac{1}{2}\right)$	14.	$f(x) = (x - 1)^2$	$(-5, 3)$
15.	$f(x) = \sqrt{x}$	$(4, 0)$	16.	$f(x) = \sqrt{x - 8}$	$(12, 0)$

17. ***Área*** Una página rectangular contendrá 30 pulgadas cuadradas de área impresa. Los márgenes de cada lado son de 1 pulgada. Encontrar las dimensiones de la página de manera tal que se use la menor cantidad de papel.
18. ***Área*** Una página rectangular contendrá 36 pulgadas cuadradas de área impresa. Los márgenes de cada lado serán de $1\frac{1}{2}$ pulgadas. Encontrar las dimensiones de la página de manera tal que se use la menor cantidad de papel.
19. ***Reacción química*** En una reacción química autocatalítica, el producto formado es un catalizador para la reacción. Si Q_0 es la cantidad de la sustancia original y x es la cantidad del catalizador formado, el ritmo o velocidad de la reacción química es

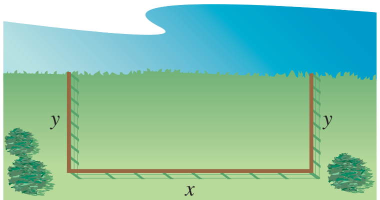
$$\frac{dQ}{dx} = kx(Q_0 - x).$$

   ¿Para qué valor de x la velocidad de la reacción química será la mayor?
20. ***Control de tráfico*** En un día determinado, el ritmo o tasa de flujo F (vehículos por hora) en una autopista congestionada es

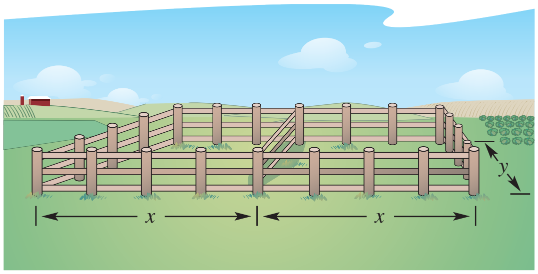
$$F = \frac{v}{22 + 0.02v^2}$$

   donde v es la velocidad del tráfico en millas por hora. ¿Qué velocidad maximizará el ritmo o tasa de flujo en la autopista?

21. ***Área*** Un granjero planea cercar un pastizal rectangular adyacente a un río. El pastizal debe contener 245 000 m^2 para proporcionar suficiente pastura para el rebaño. ¿Qué dimensiones requeriría la cantidad mínima de cercado si no es necesario vallar a lo largo del río?



22. ***Área máxima*** Un ganadero tiene 400 pies de cercado con los cuales delimita dos corrales rectangulares adyacentes (ver la figura). ¿Qué dimensiones deben utilizarse de manera que el área delimitada será un máximo?

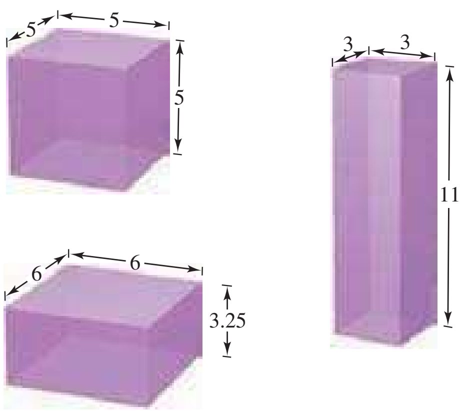


23. ***Volumen máximo***

a) Verificar que cada uno de los sólidos rectangulares que se muestran en la figura tenga un área superficial de 150 pulgadas cuadradas.

b) Encontrar el volumen de cada sólido.

c) Determinar las dimensiones de un sólido rectangular (con una base cuadrada) de volumen máximo si su área superficial es de 150 pulgadas cuadradas.



24. ***Volumen máximo*** Determinar las dimensiones de un sólido rectangular (con base cuadrada) de volumen máximo si su área rectangular es de 337.5 cm^2.

25. ***Área máxima*** Una ventana Norman se construye juntando un semicírculo a la parte superior de una ventana rectangular ordinaria (ver la figura). Encontrar las dimensiones de una ventana Norman de área máxima si el perímetro total es de 16 pies.

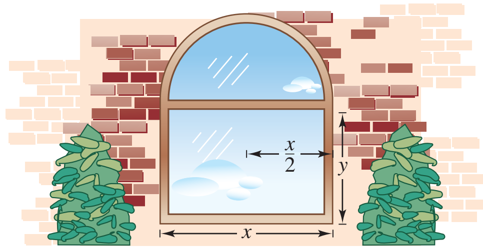


Figura para 25

26. ***Área máxima*** Un rectángulo está cortado por los ejes x y y y la gráfica de $y = (6 - x)/2$ (ver la figura). ¿Qué longitud y ancho debe tener el rectángulo de manera que su área sea un máximo?

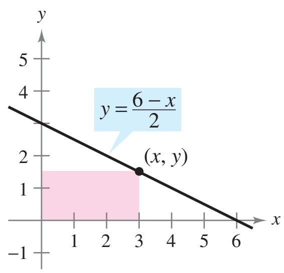


Figura para 26

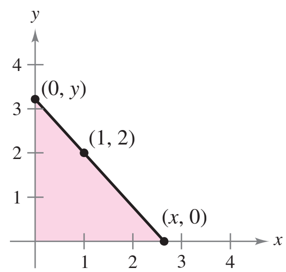


Figura para 27

27. ***Longitud mínima*** Un triángulo rectángulo se forma en el primer cuadrante mediante los ejes x y y y una recta que pasa por el punto (1, 2) (ver la figura).

a) Escribir la longitud L de la hipotenusa como una función de x.

b) Utilizar una herramienta de graficación para aproximar x de manera tal que la longitud de la hipotenusa sea un mínimo.

c) Determinar los vértices del triángulo de manera tal que su área sea un mínimo.

28. ***Área máxima*** Determinar el área del triángulo isósceles más grande que pueda inscribirse en un círculo de radio 6 (ver la figura).

a) Resolver escribiendo el área como una función de h.

b) Resolver escribiendo el área como una función de α.

c) Identificar el tipo de triángulo de área máxima.

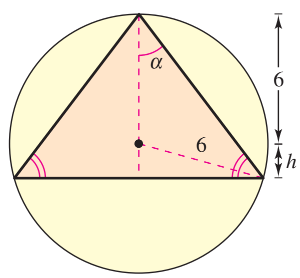


Figura para 28

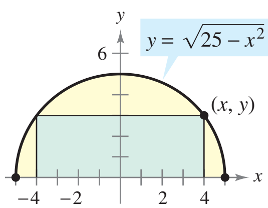


Figura para 29

29. ***Área máxima*** Un rectángulo está delimitado por el eje x y el semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$ (ver la figura). ¿Qué largo y ancho debe tener el rectángulo de manera que su área sea un máximo?

30. ***Área*** Encontrar las dimensiones del rectángulo más grande que puede inscribirse en un semicírculo de radio r (ver el ejercicio 29).

31. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Una sala de ejercicios tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo en cada extremo. Por la parte externa una pista de carreras de 200 metros delimita a la sala.

a) Dibujar una figura para representar el problema. Dejar que x y y representen el largo y el ancho del rectángulo.

b) De manera analítica completar seis renglones de una tabla tal como la siguiente. (Se muestran los dos primeros renglones.) Utilizar la tabla para estimar el área máxima de la región rectangular.

Largo x	Ancho y	Área xy
10	$\frac{2}{\pi}(100 - 10)$	$(10)\frac{2}{\pi}(100 - 10) \approx 573$
20	$\frac{2}{\pi}(100 - 20)$	$(20)\frac{2}{\pi}(100 - 20) \approx 1\,019$

c) Escribir el área A como una función de x.

d) Utilizar el cálculo para encontrar el punto crítico de la función del apartado *c*) y determinar el valor máximo.

e) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función en el apartado *c*) y verificar el área máxima a partir de la gráfica.

32. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Se va a diseñar un cilindro circular recto que pueda contener 22 pulgadas cúbicas de refresco (aproximadamente 12 onzas de fluido).

a) En forma analítica completar seis renglones de una tabla como la siguiente. (Se muestran los dos primeros renglones.)

Radio r	Altura	Área de la superficie S
0.2	$\frac{22}{\pi(0.2)^2}$	$2\pi(0.2)\left[0.2 + \frac{22}{\pi(0.2)^2}\right] \approx 220.3$
0.4	$\frac{22}{\pi(0.4)^2}$	$2\pi(0.4)\left[0.4 + \frac{22}{\pi(0.4)^2}\right] \approx 111.0$

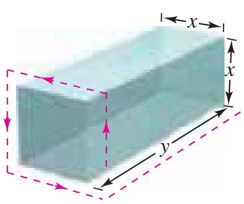
b) Recurrir a una herramienta de graficación para generar renglones adicionales de la tabla. Utilizar ésta para estimar el área superficial mínima. (*Sugerencia:* Utilizar la característica *table* de la herramienta de graficación.)

c) Escribir el área superficial S como una función de r.

d) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función del apartado *c*) y estimar el área superficial mínima a partir de la gráfica.

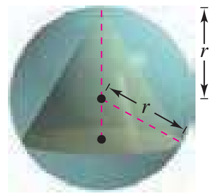
e) Recurrir al cálculo para encontrar el punto crítico de la función en el apartado *c*) y encontrar las dimensiones que producirán el área superficial mínima.

33. ***Volumen máximo*** Un paquete rectangular que se va a enviar por un servicio postal puede tener una longitud y un perímetro que tiene un máximo de 108 pulgadas (ver la figura). Determinar las dimensiones del paquete de volumen máximo que puede enviarse. (Suponer que la sección transversal es cuadrada.)



34. ***Volumen máximo*** Trabajar de nuevo el ejercicio 33 para un paquete cilíndrico. (La sección transversal es circular.)

35. ***Volumen máximo*** Encontrar el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio r.



36. ***Volumen máximo*** Determinar el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio r.

Desarrollo de conceptos

37. Una botella de shampú tiene la forma de un cilindro circular recto. Como el área superficial de la botella no cambia cuando ésta se comprime, ¿es cierto que el volumen permanece invariable? Explicar.

Para discusión

38. El perímetro de un rectángulo es de 20 pies. De todas las dimensiones posibles, el área máxima es de 25 pies cuadrados cuando su largo y ancho son ambos de 5 pies. ¿Hay dimensiones que producirán un área mínima? Explicar.

39. ***Área superficial mínima*** Un sólido se forma juntando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. El volumen total del sólido es de 14 cm^3. Encontrar el radio del cilindro que produce el área superficial mínima.

40. ***Costo mínimo*** Un tanque industrial de la forma que se describe en el ejercicio 39 debe tener un volumen de 4 000 pies cúbicos. Si el costo de fabricación de los hemisferios es, por pie cuadrado, doble que el del lateral, determinar las dimensiones que minimizarán el costo.

41. ***Área mínima*** La suma de los perímetros de un triángulo equilátero y un cuadrado es igual a 10. Encontrar las dimensiones del triángulo y el cuadrado que producen el área total mínima.

42. ***Área máxima*** Veinte pies de alambre se usarán para formar dos figuras. En cada uno de los siguientes casos, ¿qué cantidad de alambre debe utilizarse en cada figura de manera que el área total encerrada sea máxima?

a) Triángulo equilátero y cuadrado

b) Cuadrado y pentágono regular

c) Pentágono regular y hexágono regular

d) Hexágono regular y círculo

¿Qué se puede concluir a partir de este patrón? {*Sugerencia:* El área de un polígono rectangular con n lados de longitud x es $A = (n/4)[\cot(\pi/n)]x^2$.}

43. ***Resistencia de una viga*** Una viga de madera tiene una sección transversal rectangular de altura h y ancho w (ver la figura en la siguiente página). La resistencia S de la viga es directamente proporcional al ancho y al cuadrado de la altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la viga más fuerte que puede cortarse a partir de un leño redondo de 20 pulgadas de diámetro? (*Sugerencia:* $S = kh^2w$, donde k es la constante de proporcionalidad.)

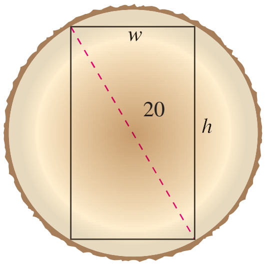


Figura para 43

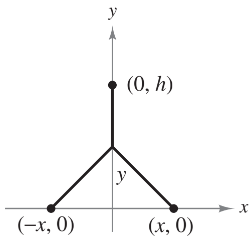


Figura para 44

44. ***Longitud mínima*** Dos fábricas se localizan en las coordenadas $(-x, 0)$ y $(x, 0)$ con su suministro eléctrico ubicado en $(0, h)$ (ver la figura). Determinar y de manera tal que la longitud total de la línea de transmisión eléctrica desde el suministro eléctrico hasta las fábricas sea un mínimo.

45. ***Alcance de proyectil*** El alcance R de un proyectil lanzado con una velocidad inicial v_0 a un ángulo θ con la horizontal es $R = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Determinar el ángulo θ tal que el alcance sea un máximo.

46. ***Conjetura*** Considerar las funciones $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ y $g(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ en el dominio $[0, 4]$.

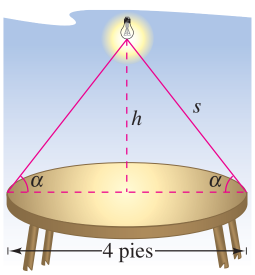
a) Utilizar una herramienta de graficación para representar las funciones en el dominio especificado.

b) Escribir la distancia vertical d entre las funciones como una función de x y recurrir al cálculo para determinar el valor de x respecto al cual d es un máximo.

c) Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de f y g en el punto crítico encontrado en el apartado *b*). Representar gráficamente las rectas tangentes. ¿Cuál es la relación entre las rectas?

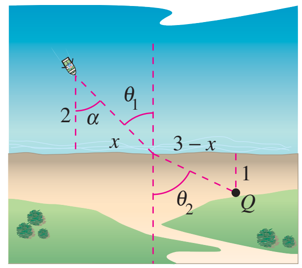
d) Enunciar una conjetura acerca de la relación entre las rectas tangentes a las gráficas de las dos funciones en el valor de x al cual la distancia vertical entre las funciones es más grande, y demostrar la conjetura.

47. ***Iluminación*** Una fuente luminosa se localiza sobre el centro de una mesa circular de 4 pies de diámetro (ver la figura). Encontrar la altura h de la fuente luminosa de modo tal que la iluminación I en el perímetro de la mesa sea máxima si $I = k(\operatorname{sen} \alpha)/s^2$, donde s es la altura oblicua, α es el ángulo al cual la luz incide sobre la mesa y k es una constante.



48. ***Iluminación*** La iluminación a partir de una fuente luminosa es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a partir de la fuente. Dos fuentes luminosas de intensidades I_1 e I_2 se encuentran separadas d unidades. ¿Qué punto del segmento de recta que une a las dos fuentes tiene una menor iluminación?

49. ***Tiempo mínimo*** Un hombre se encuentra en un bote a 2 millas del punto más cercano a la costa. Se dirige al punto Q, localizado a 3 millas por la costa y a una milla tierra adentro (ver la figura). El hombre puede remar a 2 millas por hora y caminar a 4 millas por hora. ¿Hacia qué punto sobre la costa debe remar para llegar al punto Q en el menor tiempo?



50. ***Tiempo mínimo*** Considerar en el ejercicio 49 si el punto Q está sobre la línea costera y no a una milla tierra adentro.

a) Escribir el tiempo de recorrido T como una función de α.

b) Utilizar el resultado del apartado *a*) para encontrar el tiempo mínimo para llegar a Q.

c) El hombre puede remar a v_1 millas por hora y caminar a v_2 millas por hora. Escribir el tiempo T como una función de α. Mostrar que el punto crítico T depende sólo de v_1 y v_2 y no de las distancias. Explicar cómo este resultado sería más favorable para el hombre que el resultado del ejercicio 49.

d) Describir cómo aplicar el resultado del apartado *c*) para minimizar el costo de construcción de un cable de transmisión eléctrica que cuesta c_1 dólares por milla bajo el agua y c_2 dólares por milla sobre tierra.

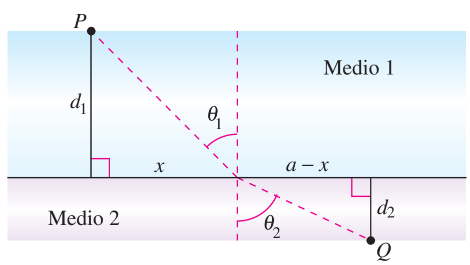
51. ***Tiempo mínimo*** Las condiciones son las mismas que en el ejercicio 49 salvo que el hombre puede remar a v_1 millas por hora y caminar a v_2 millas por hora. Si θ_1 y θ_2 son las magnitudes de los ángulos, mostrar que el hombre llegará al punto Q en el menor tiempo cuando

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{v_2}.$$

52. ***Tiempo mínimo*** Cuando las ondas luminosas, que viajan en un medio transparente, inciden sobre la superficie de un segundo medio transparente, cambian de dirección. Este cambio de dirección recibe el nombre de *refracción* y se define mediante la **ley de Snell de la refracción,**

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{v_2}$$

donde θ_1 y θ_2 son las magnitudes de los ángulos que se muestran en la figura y v_1 y v_2 son las velocidades de la luz en los dos medios. Demostrar que este problema es equivalente al del ejercicio 51, y que las ondas luminosas que viajan de P a Q siguen la trayectoria de tiempo mínimo.



53. Dibujar las gráficas de $f(x) = 2 - 2 \text{ sen } x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

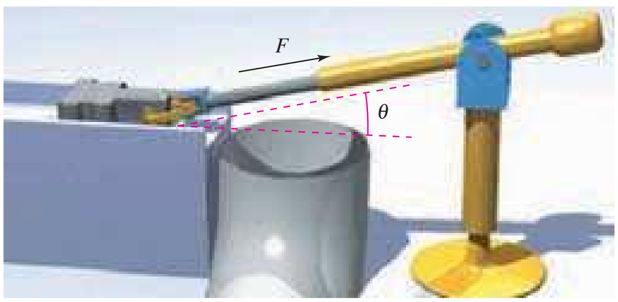
a) Determinar la distancia desde el origen a la intersección con el eje *y* y la distancia desde el origen a la intersección con el eje *x*.

b) Escribir la distancia *d* desde el origen hasta un punto sobre la gráfica de *f* como una función de *x*. Utilizar una herramienta de graficación para representar *d* y encontrar la distancia mínima.

c) Usar el cálculo y la función *zero* o *root* de una herramienta de graficación para encontrar el valor de *x* que minimiza la función *d* en el intervalo $[0, \pi/2]$. ¿Cuál es la distancia mínima? (*Proporcionado por Tim Chapell Penn Valley Community College, Kansas City, MO)*

54. ***Costo mínimo*** Un pozo petrolero marino se encuentra a 2 kilómetros de la costa. La refinería está a 4 kilómetros por la costa. La instalación de la tubería en el océano es dos veces más cara que sobre tierra. ¿Qué trayectoria debe seguir la tubería para minimizar el costo?

55. ***Fuerza mínima*** Se diseña un componente para deslizar un bloque de acero con peso *W* a través de una mesa y hacia una canaleta (ver la figura). Se opone al movimiento del bloque una fuerza de fricción proporcional a su peso aparente. (Sea *k* la constante de proporcionalidad.) Determinar la fuerza mínima *F* necesaria para deslizar el bloque y encontrar el valor correspondiente de θ. (*Sugerencia*: $F \cos \theta$ es la fuerza en la dirección del movimiento, y $F \text{ sen } \theta$ es la cantidad de fuerza que tiende a levantar el bloque. De tal modo, el peso aparente del bloque es $W - F \text{ sen } \theta$.)



56. ***Volumen máximo*** Un sector con ángulo central θ se corta de un círculo de 12 pulgadas de radio (ver la figura), y los bordes del sector se juntan para formar un cono. Determinar la magnitud de θ tal que el volumen del cono sea un máximo.

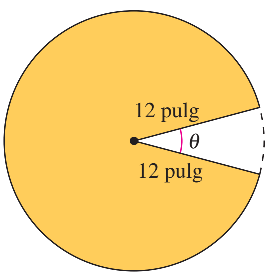


Figura para 56

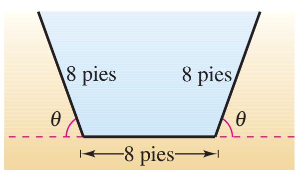


Figura para 57

57. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Las secciones transversales de un canal de irrigación son trapezoides isósceles de los cuales tres lados miden 8 pies de largo (ver la figura). Determinar el ángulo de elevación θ de los lados de manera tal que el área de la sección transversal sea un máximo, completando lo siguiente.

a) Completar analíticamente seis renglones de una tabla como la siguiente. (Se muestran los dos primeros renglones.)

Base 1	Base 2	Altura	Área
8	$8 + 16 \cos 10°$	$8 \text{ sen } 10°$	≈ 22.1
8	$8 + 16 \cos 20°$	$8 \text{ sen } 20°$	≈ 42.5

b) Emplear una herramienta de graficación para generar renglones adicionales de la tabla y estimar el área de sección transversal máxima. (*Sugerencia*: Utilizar la función *table* de la herramienta de graficación.)

c) Escribir el área de la sección transversal *A* como una función de θ.

d) Recurrir al cálculo para determinar el punto crítico de la función en el apartado *c*) y encontrar el ángulo que producirá la máxima área de sección transversal.

e) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función del apartado *c*) y verificar el área máxima de sección transversal.

58. ***Utilidad máxima (beneficio máximo)*** Suponer que la cantidad de dinero depositada en un banco es proporcional al cuadrado de la tasa de interés que paga el banco sobre este dinero. Además, el banco puede reinvertir esta suma a 12%. Determinar la tasa de interés que el banco debe pagar para maximizar la utilidad (el beneficio). (Utilizar la fórmula de interés simple.)

59. ***Costo mínimo*** El costo de pedido y transporte *C* de las componentes utilizadas en la fabricación de un producto es

$$C = 100\left(\frac{200}{x^2} + \frac{x}{x + 30}\right), \quad x \geq 1$$

donde *C* se mide en miles de dólares y *x* es el tamaño del pedido en cientos. Encontrar el tamaño del pedido que minimiza el costo. (*Sugerencia*: Utilizar la función *root* de una herramienta de graficación.)

60. ***Disminución de rendimientos*** La utilidad (el beneficio) *P* (en miles de dólares) para una compañía que gasta una cantidad *s* (en miles de dólares) en publicidad es

$$P = -\tfrac{1}{10}s^3 + 6s^2 + 400.$$

a) Hallar la cantidad de dinero que la compañía debe gastar en publicidad para producir una utilidad máxima (un rendimiento máximo).

b) El *punto de disminución de rendimientos* es el punto en el cual la tasa de crecimiento de la función de utilidad (de rendimiento) empieza a declinar. Determinar el punto de disminución de rendimientos.

Distancia mínima **En los ejercicios 61 a 63, considerar un centro de distribución de combustible localizado en el origen del sistema rectangular de coordenadas (unidades en millas; ver las figuras en la siguiente página). El centro suministra a tres fábricas con coordenadas (4, 1), (5, 6) y (10, 3). Los camiones de reparto siguen la línea $y = mx$, y líneas de alimentación a las tres fábricas. El objetivo es determinar *m* de forma que la suma de las longitudes de las líneas sea lo más pequeña posible.**

61. Minimizar la suma de los cuadrados de las longitudes de las líneas de alimentación dada por

$$S_1 = (4m - 1)^2 + (5m - 6)^2 + (10m - 3)^2.$$

Hallar la ecuación de la ruta recta de los camiones mediante este método y después determinar la suma de las longitudes de las líneas de alimentación.

62. Minimizar la suma de los valores absolutos de las longitudes de las líneas de alimentación dada por

$$S_2 = |4m - 1| + |5m - 6| + |10m - 3|.$$

Hallar la ecuación para la ruta recta de los camiones mediante este método y luego determinar la suma de las longitudes de las líneas de alimentación. (*Sugerencia*: Utilizar una herramienta de graficación para representar la función S_2 y aproximar el punto crítico requerido.)

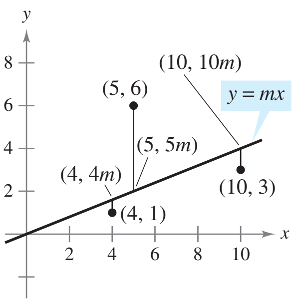


Figura para 61 y 62

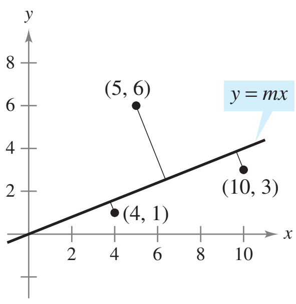


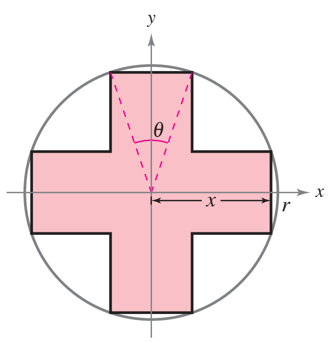
Figura para 63

63. Minimizar la suma de las distancias perpendiculares (ver los ejercicios 87 a 92 en la sección P.2) de la línea a las fábricas dada por

$$S_3 = \frac{|4m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{|5m - 6|}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{|10m - 3|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Hallar la ecuación para la línea mediante este método y a continuación determinar la suma de las longitudes de los desvíos. (*Sugerencia:* Utilizar una herramienta de graficación para representar la función S_3 y aproximar el punto crítico requerido.)

64. ***Área máxima*** Considerar una cruz simétrica inscrita en un círculo de radio r (ver la figura).



a) Escribir el área A de la cruz como una función de x y determinar el valor de x que maximiza el área.

b) Escribir el área A de la cruz como una función de θ y encontrar el valor de θ que maximiza el área.

c) Demostrar que los puntos críticos de los apartados *a*) y *b*) producen la misma área máxima. ¿Cuál es esta área?

Preparación del examen Putnam

65. Determinar el valor máximo de $f(x) = x^3 - 3x$ en un conjunto de números reales x que satisfacen $x^4 + 36 \le 13x^2$. Explicar el razonamiento.

66. Encontrar el valor mínimo de

$$\frac{(x + 1/x)^6 - (x^6 + 1/x^6) - 2}{(x + 1/x)^3 + (x^3 + 1/x^3)}$$

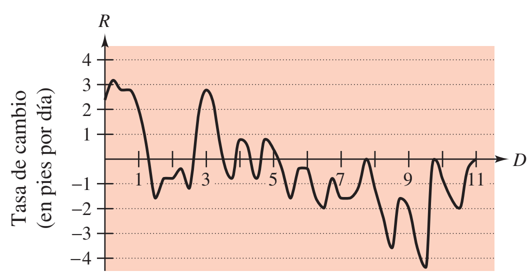
para $x > 0$.

PROYECTO DE TRABAJO

Río Connecticut

Cada vez que el río Connecticut alcanza un nivel de 105 pies sobre el nivel del mar, dos operadores de la estación de control de inundaciones en Northampton, Massachusetts, inician una vigilancia horaria del río. Cada 2 horas verifican la altura del mismo, utilizando una escala marcada en décimas de pie, y registran los datos en una bitácora. En la primavera de 1996, la vigilancia de la crecida se efectuó del 4 de abril, cuando el río alcanzó 105 pies y se elevaba a razón de 0.2 pies por hora, hasta el 25 de abril, cuando el nivel regresó de nuevo a 105 pies. Entre estas fechas, los registros muestran que el río creció y bajó varias veces, en un punto cercano a la marca de 115 pies. Si el río hubiera alcanzado 115 pies, la ciudad habría tenido que cerrar la autopista Mount Tom (Ruta 5, al sur de Northampton).

La gráfica siguiente muestra el ritmo o tasa de cambio del nivel del río durante una parte de la vigilancia de la crecida. Recurrir a la gráfica para responder cada pregunta.



Día (0 ↔ 12:01 a.m. abril 14)

a) ¿En qué fecha el río creció con mayor rapidez? ¿Cómo se puede saber?

b) ¿En qué fecha el río tuvo el descenso más rápido? ¿Cómo se puede saber?

c) Hubo dos fechas seguidas en las que el río creció, después bajó, después creció de nuevo durante el curso del día. ¿Qué día ocurrió lo anterior y cómo se puede determinar?

d) Un minuto después de la medianoche, el 14 de abril, el nivel del río se encontraba en 111.0 pies. Estimar la altura del mismo 24 horas después y 48 horas después. Explicar cómo se efectuaron las estimaciones.

e) El río alcanzó su valor más alto en 114.4 pies. ¿En qué fecha ocurrió lo anterior?

(Propuesto por Mary Murphy, Smith College, Northampton, MA)

3.8 Método de Newton

- **Aproximar un cero de una función utilizando el método de Newton.**

Método de Newton

En esta sección se estudiará una técnica para aproximar los ceros reales de una función. La técnica recibe el nombre de **método de Newton** y utiliza rectas tangentes para aproximar la gráfica de la función cerca de sus intersecciones con el eje x.

Para ver cómo funciona el método de Newton, considerar una función f que es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si $f(a)$ y $f(b)$ difieren en signo, entonces, por el teorema del valor intermedio, f debe tener al menos un cero en el intervalo (a, b). Suponer que se estima que este cero ocurre en

$$x = x_1 \qquad \text{Primera estimación.}$$

como se muestra en la figura 3.60*a*. El método de Newton se basa en la suposición de que la gráfica de f y la recta tangente en $(x_1, f(x_1))$ cruzan ambas por el eje x en *casi* el mismo punto. Debido a que es muy fácil calcular la intersección con el eje x de esta recta tangente, es posible utilizarla como una segunda estimación (y, usualmente, mejor) del cero de f. La recta tangente pasa por el punto $(x_1, f(x_1))$ con una pendiente de $f'(x_1)$. En la forma de punto-pendiente, la ecuación de la recta tangente es en consecuencia

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$
$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1).$$

Dejando $y = 0$ y despejando x, se obtiene

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

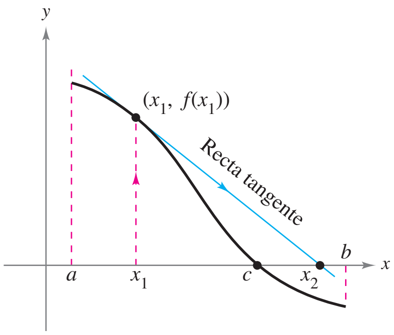
De tal modo, a partir de la estimación inicial x_1 se obtiene una nueva estimación

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \qquad \text{Segunda estimación (ver la figura 3.60}b\text{).}$$

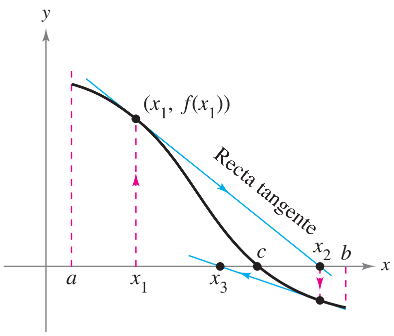
Es posible mejorar x_2 y calcular aun una tercera estimación

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \qquad \text{Tercera estimación.}$$

La aplicación repetida de este proceso se denomina método de Newton.



a)



b)
La intersección con el eje x de la recta tangente se aproxima a cero de f
Figura 3.60

MÉTODO DE NEWTON

Quizá Newton fue el primero que describió el método para aproximar los ceros reales de una función en su texto *Method of Fluxions*. Aunque el libro lo escribió en 1671, no se publicó hasta 1736. Entre tanto, en 1690, Joseph Raphson (1648-1715) publicó un artículo que describía un método para aproximar los ceros reales de una función que era muy similar al de Newton. Por esta razón, el método a veces recibe el nombre de método de Newton-Raphson.

MÉTODO DE NEWTON PARA APROXIMAR LOS CEROS DE UNA FUNCIÓN

Sea $f(c) = 0$, donde f es derivable en un intervalo abierto que contiene a c. Entonces, para aproximar c, se siguen los siguientes pasos.

1. Se efectúa una estimación inicial x_1 que es cercana a c. (Una gráfica es útil.)
2. Se determina una nueva aproximación
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
3. Si $|x_n - x_{n+1}|$ está dentro de la precisión deseada, dejar que x_{n+1} sirva como la aproximación final. En otro caso, volver al paso dos y calcular una nueva aproximación.

Cada aplicación sucesiva de este procedimiento recibe el nombre de **iteración**.

NOTA Para muchas funciones, con unas pocas iteraciones del método de Newton, se conseguirán errores de aproximación muy pequeños como muestra el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Aplicación del método de Newton

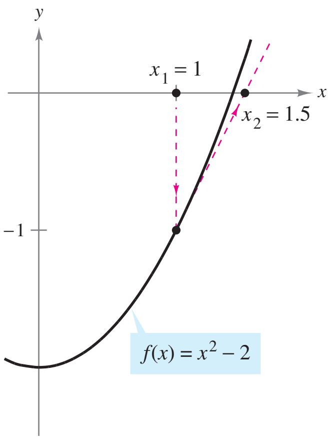
Calcular tres iteraciones del método de Newton para aproximar un cero de $f(x) = x^2 - 2$. Utilizar $x_1 = 1$ como la estimación inicial.

Solución Como $f(x) = x^2 - 2$, se tiene que $f'(x) = 2x$, y el proceso iterativo está dado por la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}.$$

Los cálculos para tres iteraciones se muestran en la tabla.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	1.000000	−1.000000	2.000000	−0.500000	1.500000
2	1.500000	0.250000	3.000000	0.083333	1.416667
3	1.416667	0.006945	2.833334	0.002451	1.414216
4	1.414216				



La primera iteración del método de Newton
Figura 3.61

Desde luego, en este caso, se sabe que los dos ceros de la función son $\pm\sqrt{2}$. Hasta seis lugares decimales, $\sqrt{2} = 1.414214$. De tal modo, después de sólo tres iteraciones del método de Newton, se obtiene una aproximación que está dentro de 0.000002 de una raíz real. La primera iteración de este proceso se muestra en la figura 3.61.

EJEMPLO 2 Aplicación del método de Newton

Utilizar el método de Newton para aproximar los ceros de

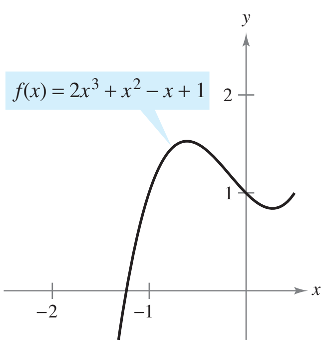
$$f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1.$$

Continuar las iteraciones hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran por menos de 0.0001.

Solución Empezar dibujando una gráfica de f, como se muestra en la figura 3.62. A partir de la gráfica, se puede observar que la función tiene sólo un cero, el cual ocurre cerca de $x = -1.2$. A continuación, derivar f y construir la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^3 + x_n^2 - x_n + 1}{6x_n^2 + 2x_n - 1}.$$

Los cálculos se muestran en la tabla.



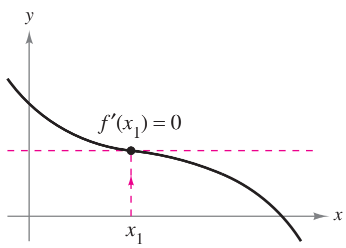
Después de tres iteraciones del método de Newton, el cero de f se aproxima hasta la exactitud deseada
Figura 3.62

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	−1.20000	0.18400	5.24000	0.03511	−1.23511
2	−1.23511	−0.00771	5.68276	−0.00136	−1.23375
3	−1.23375	0.00001	5.66533	0.00000	−1.23375
4	−1.23375				

Como dos aproximaciones sucesivas difieren por menos del valor requerido de 0.0001, se puede estimar el cero de f como −1.23375.

Cuando, como en los ejemplos 1 y 2, las aproximaciones tienden a un límite, se dice que la sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ **converge**. Además, si el límite es c, puede demostrarse que c debe ser un cero de f.

El método de Newton no siempre produce una sucesión convergente. La figura 3.63 ilustra una situación así. Debido a que el método de Newton implica la división entre $f'(x_n)$, es claro que fallará si la derivada es cero para cualquier x_n en la sucesión. Cuando existe este problema, es fácil superarlo eligiendo un valor diferente para x_1. Otra forma en la que el método de Newton puede fallar se muestra en el siguiente ejemplo.



El método de Newton no converge si $f'(x)_n = 0$
Figura 3.63

EJEMPLO 3 Ejemplo en el que el método de Newton falla

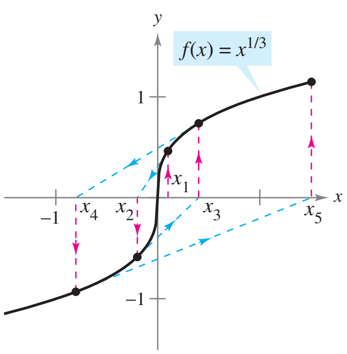
La función $f(x) = x^{1/3}$ no es derivable en $x = 0$. Demostrar que el método de Newton no converge al utilizar $x_1 = 0.1$.

Solución Como $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, la fórmula iterativa es

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x_n^{-2/3}} \\ &= x_n - 3x_n \\ &= -2x_n. \end{aligned}$$

Los cálculos se presentan en la tabla. Esta tabla y la figura 3.64 indican que x_n continúa creciendo en magnitud a medida que $n \to \infty$, y por ello el límite de la sucesión no existe.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	0.10000	0.46416	1.54720	0.30000	-0.20000
2	-0.20000	-0.58480	0.97467	-0.60000	0.40000
3	0.40000	0.73681	0.61401	1.20000	-0.80000
4	-0.80000	-0.92832	0.38680	-2.40000	1.60000



El método de Newton no converge para todo valor de x distinto del cero real de f
Figura 3.64

NOTA En el ejemplo 3, la estimación inicial $x_1 = 0.1$ no produce una sucesión convergente. Intentar demostrar que el método de Newton también falla para cualquier otra elección de x_1 (distinta del cero real).

Es posible demostrar que una condición suficiente para producir la convergencia del método de Newton a un cero de f es que

$$\left|\frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1$$

Condición para convergencia.

en un intervalo abierto que contenga al cero. Por ejemplo, en el ejemplo 1 en donde $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, se tendrá

$$\left|\frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| = \left|\frac{(x^2-2)(2)}{4x^2}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\right|.$$

Ejemplo 1.

En el intervalo (1, 3), esta cantidad es menor que 1 y, en consecuencia, se garantiza la convergencia del método de Newton. Por otro lado, en el ejemplo 3, se tiene $f(x) = x^{1/3}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ y

$$\left|\frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| = \left|\frac{x^{1/3}(-2/9)(x^{-5/3})}{(1/9)(x^{-4/3})}\right| = 2$$

Ejemplo 3.

que no es menor que 1 para ningún valor de x, por lo que el método de Newton no convergerá.

The Granger Collection

NIELS HENRIK ABEL (1802-1829)

The Granger Collection

EVARISTE GALOIS (1811-1832)

Aunque las vidas tanto de Abel como de Galois fueron breves, su trabajo en el campo del análisis y el álgebra abstracta tuvieron un gran alcance.

Soluciones algebraicas de ecuaciones polinomiales

Los ceros de algunas funciones, tales como

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

pueden determinarse mediante técnicas algebraicas simples, tales como la factorización. Los ceros de otras funciones, tales como

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

no pueden determinarse mediante métodos algebraicos *elementales*. Esta función particular sólo tiene un cero real, y utilizando técnicas algebraicas más avanzadas se puede determinar que el cero es

$$x = -\sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{23/3}}{6}} - \sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{23/3}}{6}}.$$

Como la solución *exacta* se escribe en términos de raíces cuadradas y raíces cúbicas, ésta se denomina una **solución por radicales**.

NOTA Intentar la aproximación del cero real de $f(x) = x^3 - x + 1$ y comparar el resultado con la solución exacta dada arriba. ■

La determinación de las soluciones radicales de una ecuación polinomial es uno de los problemas fundamentales del Álgebra. El primero de este tipo de resultados es la fórmula cuadrática, que data por lo menos de los tiempos de los babilónicos. La fórmula general para los ceros de una función cúbica se desarrolló mucho después. En el siglo XVI un matemático italiano, Girolamo Cardano, publicó el método para encontrar soluciones radicales a ecuaciones cúbicas y de cuarto grado. Después, durante 300 años, el problema de encontrar una fórmula general para el quinto grado permaneció sin resolver. Por último, en el siglo XIX, el problema fue resuelto de manera independiente por dos jóvenes matemáticos. Niels Henrik Abel, un matemático noruego y Evariste Galois, un matemático francés, demostraron que no es posible resolver una ecuación polinomial *general* de quinto grado (o mayor) por medio de radicales. Desde luego, se pueden resolver ecuaciones particulares de quinto grado tales como $x^5 - 1 = 0$, pero Abel y Galois fueron capaces de demostrar que no existe una solución general por *radicales*.

3.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, completar dos iteraciones del método de Newton para la función utilizando la estimación inicial indicada.

1. $f(x) = x^2 - 5, \quad x_1 = 2.2$ **2.** $f(x) = x^3 - 3, \quad x_1 = 1.4$

3. $f(x) = \cos x, \quad x_1 = 1.6$ **4.** $f(x) = \tan x, \quad x_1 = 0.1$

En los ejercicios 5 a 14, aproximar el (los) cero(s) de la función. Utilizar el método de Newton y continuar el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0.001. Después encontrar el (los) cero(s) utilizando una herramienta de graficación y comparar los resultados.

5. $f(x) = x^3 + 4$ **6.** $f(x) = 2 - x^3$

7. $f(x) = x^3 + x - 1$ **8.** $f(x) = x^5 + x - 1$

9. $f(x) = 5\sqrt{x-1} - 2x$ **10.** $f(x) = x - 2\sqrt{x+1}$

11. $f(x) = x^3 - 3.9x^2 + 4.79x - 1.881$

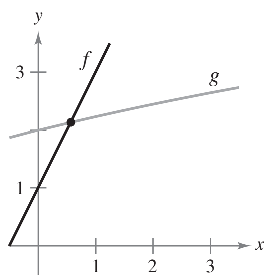
12. $f(x) = x^4 + x^3 - 1$

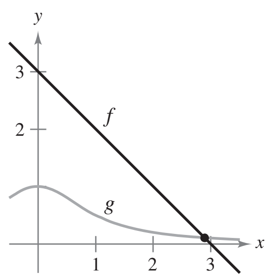
13. $f(x) = -x + \operatorname{sen} x$ **14.** $f(x) = x^3 - \cos x$

En los ejercicios 15 a 18, aplicar el método de Newton para aproximar el (los) valor(es) de x del (los) punto(s) indicado(s) de intersección de las dos gráficas. Continuar el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran por menos de 0.001. [*Sugerencia*: Sea $h(x) = f(x) - g(x)$.]

15. $f(x) = 2x + 1$
$g(x) = \sqrt{x+4}$

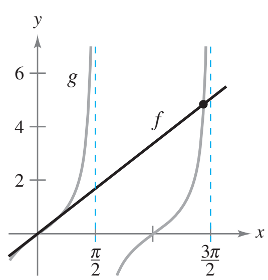
16. $f(x) = 3 - x$
$g(x) = 1/(x^2 + 1)$

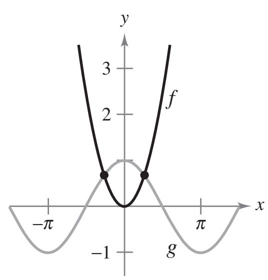




17. $f(x) = x$
$g(x) = \tan x$

18. $f(x) = x^2$
$g(x) = \cos x$





19. ***Regla de la mecánica*** La regla de la mecánica para aproximar $\sqrt{a}$, $a > 0$, es

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

donde x_1 es una aproximación de $\sqrt{a}$.

a) Utilizar el método de Newton y la función $f(x) = x^2 - a$ para derivar la regla de la mecánica.

b) Utilizar la regla de la mecánica para aproximar $\sqrt{5}$ y $\sqrt{7}$ hasta tres decimales.

20. *a*) Emplear el método de Newton y la función $f(x) = x^n - a$ para obtener una regla general relativa a la aproximación de $x = \sqrt[n]{a}$.

b) Utilizar la regla general que se encontró en el apartado *a*) para aproximar $\sqrt[4]{6}$ y $\sqrt[3]{15}$ hasta tres decimales.

En los ejercicios 21 a 24, aplicar el método de Newton utilizando la estimación inicial indicada y explicar por qué falla el método.

21. $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 1, \quad x_1 = 1$

22. $y = x^3 - 2x - 2, \quad x_1 = 0$

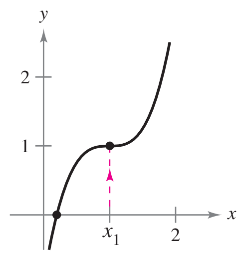


Figura para 21

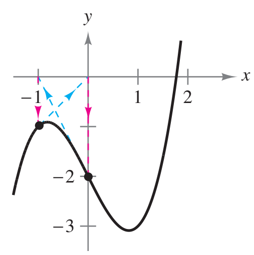


Figura para 22

23. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10x + 6, \quad x_1 = 2$

24. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x, \quad x_1 = \dfrac{3\pi}{2}$

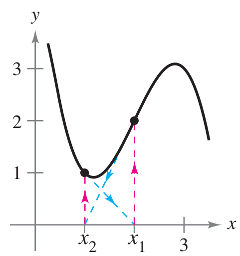


Figura para 23

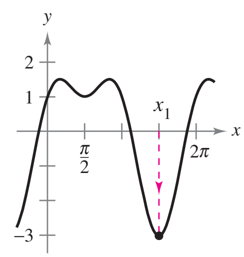


Figura para 24

Punto fijo **En los ejercicios 25 y 26, aproximar el punto fijo de la función hasta dos lugares decimales. [Un *punto fijo* x_0 de una función f es un valor de x tal que $f(x_0) = x_0$.]**

25. $f(x) = \cos x$

26. $f(x) = \cot x, \quad 0 < x < \pi$

27. Utilizar el método de Newton para que la ecuación $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$ pueda utilizarse para aproximar $1/a$ si x_1 es una estimación inicial del recíproco de a. Notar que este método de aproximación de recíprocos utiliza sólo las operaciones de resta y producto. [*Sugerencia:* Considerar $f(x) = (1/x) - a$.]

28. Utilizar el resultado del ejercicio anterior para aproximar *a*) $\frac{1}{3}$ y *b*) $\frac{1}{11}$ hasta tres decimales.

Desarrollo de conceptos

29. Considerar la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar f.

b) Utilizar el método de Newton con $x_1 = 1$ como estimación inicial.

c) Repetir el apartado *b*) utilizando $x_1 = \frac{1}{4}$ como estimación inicial y observar que el resultado es diferente.

d) Para comprender por qué los resultados de los apartados *b*) y *c*) son diferentes, dibujar las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos $(1, f(1))$ y $\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$. Determinar la intersección con el eje x de cada recta tangente y comparar las intersecciones con la primera iteración del método de Newton utilizando las estimaciones iniciales respectivas.

e) Escribir un breve párrafo en el que se resuma la forma en que funciona el método de Newton. Utilizar los resultados de este ejercicio para describir por qué es importante seleccionar con cuidado la estimación inicial.

30. Repetir los pasos en el ejercicio 29 para la función $f(x) = \text{sen}\, x$ con estimaciones iniciales de $x_1 = 1.8$ y $x_1 = 3$.

31. En sus propias palabras y utilizando un dibujo, describir el método de Newton para aproximar los ceros de una función.

Para discusión

32. ¿Bajo cuáles condiciones fallará el método de Newton?

En los ejercicios 33 y 34, aproximar el punto crítico de *f* en el intervalo $(0, \pi)$. Dibujar la gráfica de *f*, marcando cualquier extremo.

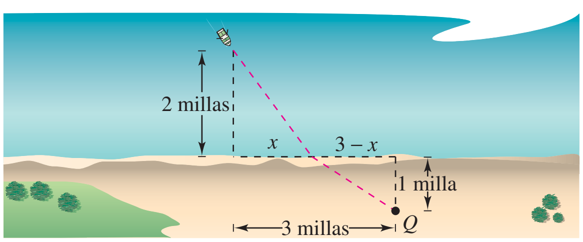
33. $f(x) = x \cos x$ **34.** $f(x) = x\ \text{sen}\, x$

En los ejercicios 35 a 38, se incluyen algunos problemas típicos de las secciones previas de este capítulo. En cada caso, utilizar el método de Newton para aproximar la solución.

35. ***Distancia mínima*** Hallar sobre la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ el punto más cercano al punto $(1, 0)$.

36. ***Distancia mínima*** Encontrar sobre la gráfica de $f(x) = x^2$ el punto más cercano al punto $(4, -3)$.

37. ***Tiempo mínimo*** Se encuentra en un bote a 2 millas del punto más cercano sobre la costa (ver la figura) y se dirige al punto Q, que se ubica a 3 millas por la costa y a 1 milla tierra adentro. Tiene la posibilidad de remar a 3 millas por hora y de caminar a 4 millas por hora. ¿Hacia qué punto sobre la costa debe remar para llegar a Q en el tiempo mínimo?



38. ***Medicina*** La concentración C de un compuesto químico en el flujo sanguíneo t horas después de la inyección en el tejido muscular está dada por $C = (3t^2 + t)/(50 + t^3)$. ¿Cuándo es más grande la concentración?

39. ***Crimen*** El número total de arrestos T (en miles) para hombres de 14 a 27 años en 2006 está aproximado por el modelo

$$T = 0.602x^3 - 41.44x^2 + 922.8x - 6\,330, \quad 14 \le x \le 27$$

donde x es la edad en años (ver la figura). Aproximar las dos edades que completen un total de 225 arrestos. (*Fuente: U.S. Department of Justice*)

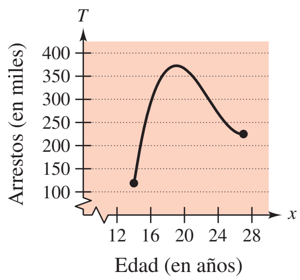


Figura para 39

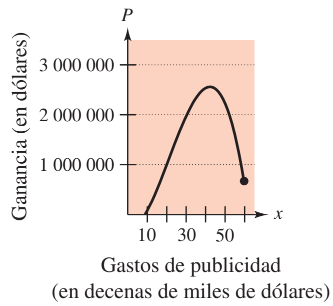


Figura para 40

40. ***Costos de publicidad*** Una compañía que produce reproductores de discos compactos portátiles estima que la ganancia por la venta de un modelo particular es

$$P = -76x^3 + 4\,830x^2 - 320\,000, \quad 0 \le x \le 60$$

donde P es la ganancia en dólares y x es el gasto de publicidad en 10 000 dólares (ver la figura). De acuerdo con este modelo, determinar la más pequeña de dos cantidades de publicidad que producirían una ganancia P de 2 500 000 dólares.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 41 a 44, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un contraejemplo.**

41. Los ceros de $f(x) = p(x)/q(x)$ coinciden con los ceros de $p(x)$.

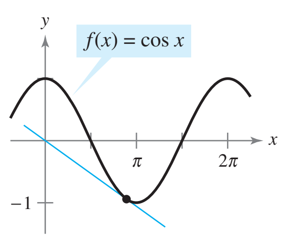
42. Si los coeficientes de una función polinomial son todos positivos, entonces el polinomio no tiene ceros positivos.

43. Si $f(x)$ es un polinomio cúbico tal que $f'(x)$ nunca es cero, entonces cualquier estimación inicial forzará a que el método de Newton converja al cero de f.

44. Las raíces de $\sqrt{f(x)} = 0$ coinciden con las raíces de $f(x) = 0$.

45. ***Rectas tangentes*** La gráfica de $f(x) = -\text{sen}\, x$ tiene un número infinito de rectas tangentes que pasan por el origen. Utilizar el método de Newton para aproximar la pendiente de la recta tangente que tenga la pendiente más grande hasta tres lugares decimales.

46. ***Punto de tangencia*** En la figura se muestra la gráfica de $f(x) = \cos x$ y una línea tangente de f que pasa por el origen. Encontrar las coordenadas del punto de tangencia con una aproximación de tres decimales.



3.9 Diferenciales

- **Entender el concepto de una aproximación por medio de una recta tangente.**
- **Comparar el valor de la diferencial, dy, con el cambio real en y, Δy.**
- **Estimar un error propagado utilizando una diferencial.**
- **Encontrar la diferencial de una función utilizando fórmulas de derivación.**

EXPLORACIÓN

Aproximación mediante la recta tangente Usar una herramienta de graficación para representar

$$f(x) = x^2.$$

En la misma ventana de observación, representar la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 1)$. Realizar un doble acercamiento en el punto de tangencia. ¿La herramienta de graficación distingue las dos gráficas? Utilizar la característica *trace* para comparar las dos gráficas. A medida que los valores de x se acercan más a 1, ¿qué se puede decir acerca de los valores de y?

Aproximaciones por recta tangente

El método de Newton (sección 3.8) es un ejemplo del uso de una recta tangente a una gráfica para aproximar la gráfica. En esta sección se estudiarán otras situaciones en las cuales la gráfica de la función puede aproximarse mediante una línea recta.

De inicio, considerar una función f que es derivable en c, la ecuación para la recta tangente en el punto $(c, f(c))$ está dada por

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

$$\boxed{y = f(c) + f'(c)(x - c)}$$

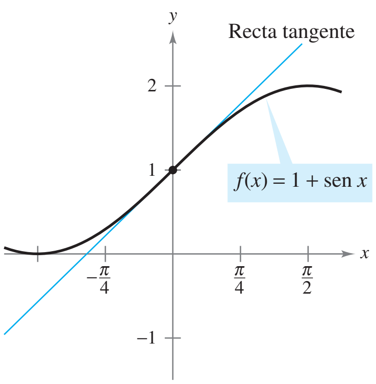
y es llamada **aproximación por medio de una recta tangente** (o **aproximación lineal**) **de f en c**. Como c es una constante, y es una función lineal de x. Además, restringiendo los valores de x de modo que sean suficientemente cercanos a c, los valores de y pueden utilizarse como aproximaciones (hasta cualquier precisión deseada) de los valores de la función f. En otras palabras, cuando $x \to c$, el límite de y es $f(c)$.

EJEMPLO 1 Utilización de la aproximación por medio de una recta tangente

Determinar la aproximación por medio de una recta tangente de

$$f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$$

en el punto $(0, 1)$. Utilizar después una tabla para comparar los valores y de la función lineal con los de $f(x)$ en un intervalo abierto que contenga a $x = 0$.



La aproximación de la recta tangente de f en el punto $(0, 1)$
Figura 3.65

Solución La derivada de f es

$$f'(x) = \cos x. \qquad \text{Primera derivada.}$$

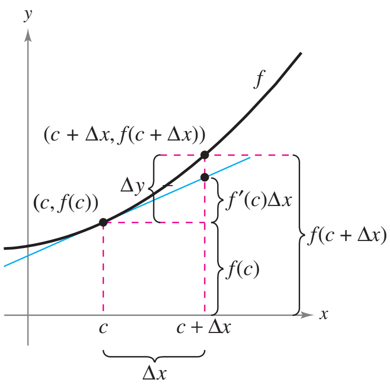
De tal modo, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(0, 1)$ es

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$
$$y - 1 = (1)(x - 0)$$
$$y = 1 + x. \qquad \text{Aproximación por la recta tangente.}$$

La tabla compara los valores de y dados por esta aproximación lineal con los valores de $f(x)$ cerca de $x = 0$. Advertir que cuanto más cercana es x a 0, tanto mejor es la aproximación. Esta conclusión se refuerza por medio de la gráfica que se muestra en la figura 3.65.

x	-0.5	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.5
$f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$	0.521	0.9002	0.9900002	1	1.0099998	1.0998	1.479
$y = 1 + x$	0.5	0.9	0.99	1	1.01	1.1	1.5

NOTA Asegurarse de ver que esta aproximación lineal de $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$ depende del punto de tangencia. En un punto diferente sobre la gráfica de f, se obtendría una aproximación mediante la recta tangente diferente.



Cuando Δx es pequeña, $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$ es aproximada por $f'(c)\,\Delta x$
Figura 3.66

Diferenciales

Cuando la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$

$$y = f(c) + f'(c)(x - c) \qquad \text{Recta tangente en } (c, f(c)).$$

se usa como una aproximación de la gráfica de f, la cantidad $x - c$ recibe el nombre de cambio en x, y se denota mediante Δx, como se muestra en la figura 3.66. Cuando Δx es pequeña, el cambio en y (denotado por Δy) puede aproximarse como se muestra.

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(c + \Delta x) - f(c) && \text{Cambio real en } y. \\ &\approx f'(c)\Delta x && \text{Cambio aproximado en } y. \end{aligned}$$

Para una aproximación de este tipo, la cantidad Δx tradicionalmente se denota mediante dx, y recibe el nombre de la **diferencial de *x***. La expresión $f'(x)\,dx$ se denota por dy, y se denomina la **diferencial de *y***.

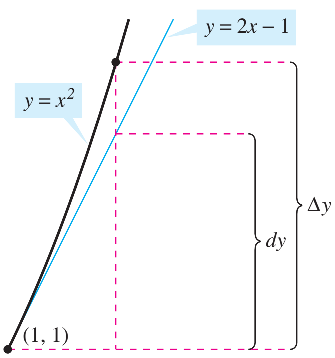
DEFINICIÓN DE DIFERENCIALES

Considerar que $y = f(x)$ representa una función que es derivable en un intervalo abierto que contiene a x. La **diferencial de *x*** (denotada por dx) es cualquier número real distinto de cero. La **diferencial de *y*** (denotada por dy) es

$$dy = f'(x)\,dx.$$

En muchos tipos de aplicaciones, la diferencial de y puede utilizarse como una aproximación del cambio en y. Esto es

$$\Delta y \approx dy \qquad \text{o} \qquad \Delta y \approx f'(x)dx.$$



El cambio en y, Δy, se aproxima por la diferencial de y, dy
Figura 3.67

EJEMPLO 2 Comparación de Δy y dy

Sea $y = x^2$, determinar dy cuando $x = 1$ y $dx = 0.01$. Comparar este valor con Δy para $x = 1$ y $\Delta x = 0.01$.

Solución Como $y = f(x) = x^2$, se tiene $f'(x) = 2x$, y la diferencial dy está dada por

$$dy = f'(x)\,dx = f'(1)(0.01) = 2(0.01) = 0.02. \qquad \text{Diferencial de } y.$$

Ahora, utilizando $\Delta x = 0.01$, el cambio en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(1.01) - f(1) = (1.01)^2 - 1^2 = 0.0201.$$

La figura 3.67 muestra la comparación geométrica de dy y Δy. Intente comparar otros valores de dy y Δy. Verá que los valores se aproximan cada vez más entre sí cuando dx (o Δx) tiende a cero.

En el ejemplo 2, la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $x = 1$ es

$$y = 2x - 1 \qquad \text{o} \qquad g(x) = 2x - 1. \qquad \text{Recta tangente a la gráfica de } f \text{ en } x = 1.$$

Para valores de x cercanos a 1, esta recta es cercana a la gráfica de f, como se muestra en la figura 3.67. Por ejemplo

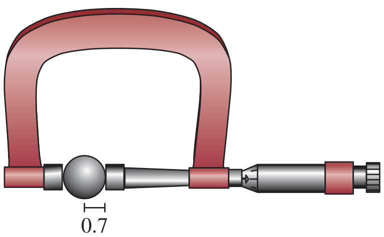
$$f(1.01) = 1.01^2 = 1.0201 \qquad \text{y} \qquad g(1.01) = 2(1.01) - 1 = 1.02.$$

Propagación del error

Los físicos e ingenieros tienden a hacer un uso libre de las aproximaciones de Δy mediante dy. Así sucede en la práctica al estimar los errores propagados por los aparatos (dispositivos) de medida. Por ejemplo, si x denota el valor medido de una variable y $x + \Delta x$ representa el valor exacto, entonces Δx es el *error de medida (medición)*. Por último, si el valor medido x se usa para calcular otro valor $f(x)$, la diferencia entre $f(x + \Delta x)$ y $f(x)$ es el **error propagado**.

$$\underbrace{f(x + \overbrace{\Delta x}^{\text{Error de medición}})}_{\text{Valor exacto}} - \underbrace{f(x)}_{\text{Valor medido}} = \overbrace{\Delta y}^{\text{Error propagado}}$$

EJEMPLO 3 Estimación del error



Cojinete de bola con el radio medido que no tiene un error mayor de 0.01 pulgadas
Figura 3.68

Se mide el radio de una bola de un cojinete y se encuentra que es igual a 0.7 pulgadas, como se muestra en la figura 3.68. Si la medición no tiene un error mayor que 0.01 pulgadas, estimar el error propagado en el volumen V de la bola del cojinete.

Solución La fórmula para el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio de la esfera. De tal modo, es posible escribir

$$r = 0.7 \qquad \text{Radio medido.}$$

y

$$-0.01 \le \Delta r \le 0.01. \qquad \text{Error posible.}$$

Para aproximar el error propagado en el volumen, se diferencia V para obtener $dV/dr = 4\pi r^2$ y se escribe

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx dV && \text{Aproximar } \Delta V \text{ con } dV. \\ &= 4\pi r^2\, dr \\ &= 4\pi(0.7)^2(\pm 0.01) && \text{Sustituir } r \text{ y } dr. \\ &\approx \pm 0.06158 \text{ pulgadas cúbicas} \end{aligned}$$

De este modo, el volumen ha propagado un error de casi 0.06 pulgadas cúbicas.

¿El error propagado en el ejemplo 3 es grande o pequeño? La respuesta se indica de mejor manera en términos *relativos* al comparar dV con V. La proporción

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= \frac{4\pi r^2\, dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} && \text{Cociente de } dV \text{ y } V. \\ &= \frac{3\, dr}{r} && \text{Simplificar.} \\ &\approx \frac{3}{0.7}(\pm 0.01) && \text{Sustituir } dr \text{ y } r. \\ &\approx \pm 0.0429 \end{aligned}$$

recibe el nombre de **error relativo**. El correspondiente **error porcentual** es aproximadamente 4.29%.

Cálculo de diferenciales

Cada una de las reglas de derivación que se estudiaron en el capítulo 2 pueden escribirse en **forma diferencial**. Por ejemplo, suponer que u y v son funciones derivables de x. A partir de la definición de diferenciales, se tiene

$$du = u'\,dx \qquad \text{y} \qquad dv = v'\,dx.$$

De tal manera, se puede escribir la forma diferencial de la regla del producto como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} d[uv] &= \frac{d}{dx}[uv]\,dx && \text{Diferencial de } uv. \\ &= [uv' + vu']\,dx && \text{Regla del producto.} \\ &= uv'\,dx + vu'\,dx \\ &= u\,dv + v\,du \end{aligned}$$

FÓRMULAS DIFERENCIALES

Sean u y v funciones diferenciables de x.

Múltiplo constante: $d[cu] = c\,du$

Suma o diferencia: $d[u \pm v] = du \pm dv$

Producto: $d[uv] = u\,dv + v\,du$

Cociente: $d\left[\dfrac{u}{v}\right] = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

EJEMPLO 4 Determinación de diferenciales

	Función	*Derivada*	*Diferencial*
a)	$y = x^2$	$\dfrac{dy}{dx} = 2x$	$dy = 2x\,dx$
b)	$y = 2 \operatorname{sen} x$	$\dfrac{dy}{dx} = 2 \cos x$	$dy = 2 \cos x\,dx$
c)	$y = x \cos x$	$\dfrac{dy}{dx} = -x \operatorname{sen} x + \cos x$	$dy = (-x \operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$
d)	$y = \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$	$dy = -\dfrac{dx}{x^2}$

Mary Evans Picture Library

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

Tanto a Leibniz como a Newton se les acredita como creadores del cálculo. Sin embargo, fue Leibniz quien trató de ampliar el cálculo formulando reglas y la notación formal. A menudo pasaba días eligiendo una notación adecuada para un nuevo concepto.

La notación en el ejemplo 4 recibe el nombre de **notación de Leibniz** para derivadas y diferenciales, en honor del matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz. La belleza de esta notación se debe a que proporciona una forma fácil de recordar varias fórmulas de cálculo importantes al dar la apariencia de que las fórmulas se derivaron de manipulaciones algebraicas de diferenciales. Por ejemplo, en la notación de Leibniz, la *regla de la cadena*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

parecería ser verdadera debido a que las du se anulan. Aunque este razonamiento es *incorrecto*, la notación ayuda a recordar la regla de la cadena.

EJEMPLO 5 Diferencial de una función compuesta

$$y = f(x) = \operatorname{sen} 3x \qquad \text{Función original.}$$

$$f'(x) = 3\cos 3x \qquad \text{Aplicación de la regla de la cadena.}$$

$$dy = f'(x)\,dx = 3\cos 3x\,dx \qquad \text{Forma diferencial.}$$

EJEMPLO 6 Diferencial de una función compuesta

$$y = f(x) = (x^2 + 1)^{1/2} \qquad \text{Función original.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \text{Aplicación de la regla de la cadena.}$$

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx \qquad \text{Forma diferencial.}$$

Las diferenciales pueden utilizarse para aproximar valores de funciones. Para realizar esto con respecto a la función dada por $y = f(x)$, utilizar la fórmula

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,dx$$

la cual se deriva de la aproximación $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$. La clave para utilizar esta fórmula es elegir un valor de x que facilite el cálculo, como se muestra en el ejemplo 7. (Esta fórmula es equivalente a la recta tangente de aproximación dada anteriormente en esta sección.)

EJEMPLO 7 Aproximación de los valores de una función

Utilizar diferenciales para aproximar $\sqrt{16.5}$.

Solución Utilizando $f(x) = \sqrt{x}$, se puede escribir

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,dx = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Ahora bien, eligiendo $x = 16$ y $dx = 0.5$, se obtiene la siguiente aproximación

$$f(x + \Delta x) = \sqrt{16.5} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}(0.5) = 4 + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 4.0625$$

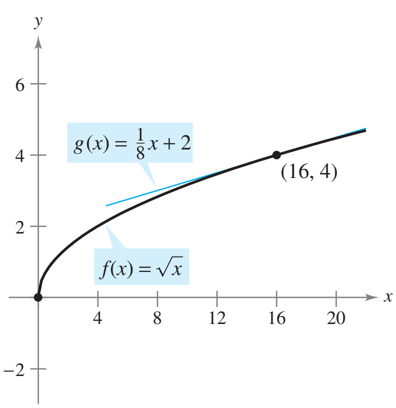


Figura 3.69

La aproximación por medio de la recta tangente a $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 16$ es la línea $g(x) = \frac{1}{8}x + 2$. Para valores de x cercanos a 16, las gráficas de f y g son muy próximas entre sí, como se muestra en la figura 3.69. Por ejemplo,

$$f(16.5) = \sqrt{16.5} \approx 4.0620 \quad \text{y} \quad g(16.5) = \frac{1}{8}(16.5) + 2 = 4.0625.$$

De hecho, si se usa una herramienta de graficación para realizar un acercamiento al punto de tangencia (16, 4), se verá que las dos gráficas parecen coincidir. Advertir también que a medida que se aleja del punto de tangencia, la aproximación lineal es menos exacta.

3.9 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, determinar la ecuación de la recta tangente T a la gráfica de f en un punto dado. Utilizar esta aproximación lineal para completar la tabla.

x	1.9	1.99	2	2.01	2.1
$f(x)$					
$T(x)$					

1. $f(x) = x^2, \quad (2, 4)$
2. $f(x) = \dfrac{6}{x^2}, \quad \left(2, \dfrac{3}{2}\right)$
3. $f(x) = x^5, \quad (2, 32)$
4. $f(x) = \sqrt{x}, \quad \left(2, \sqrt{2}\right)$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad (2, \operatorname{sen} 2)$
6. $f(x) = \csc x, \quad (2, \csc 2)$

En los ejercicios 7 a 10, utilizar la información para evaluar y comparar Δy y dy.

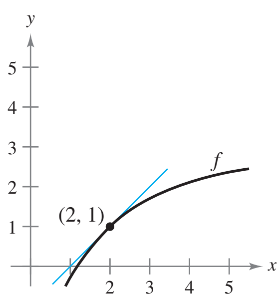
7. $y = x^3 \qquad x = 1 \qquad \Delta x = dx = 0.1$
8. $y = 1 - 2x^2 \qquad x = 0 \qquad \Delta x = dx = -0.1$
9. $y = x^4 + 1 \qquad x = -1 \qquad \Delta x = dx = 0.01$
10. $y = 2 - x^4 \qquad x = 2 \qquad \Delta x = dx = 0.01$

En los ejercicios 11 a 20, determinar la diferencial dy de la función indicada.

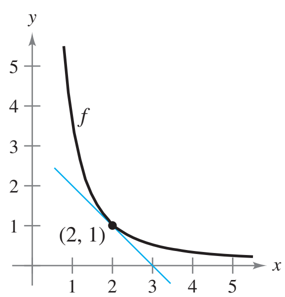
11. $y = 3x^2 - 4$
12. $y = 3x^{2/3}$
13. $y = \dfrac{x + 1}{2x - 1}$
14. $y = \sqrt{9 - x^2}$
15. $y = x\sqrt{1 - x^2}$
16. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
17. $y = 3x - \operatorname{sen}^2 x$
18. $y = x \cos x$
19. $y = \dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{6\pi x - 1}{2}\right)$
20. $y = \dfrac{\sec^2 x}{x^2 + 1}$

En los ejercicios 21 a 24, emplear diferenciales y la gráfica de f para aproximar *a*) $f(1.9)$ y *b*) $f(2.04)$.

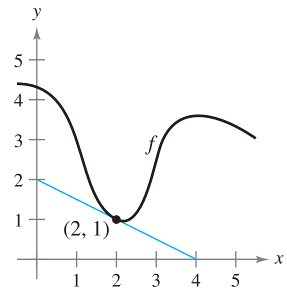
21.



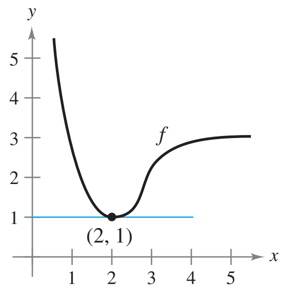
22.



23.

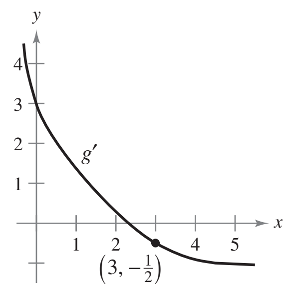


24.

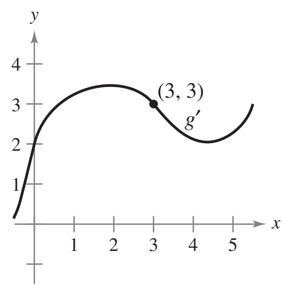


En los ejercicios 25 y 26, utilizar diferenciales y la gráfica de g' para aproximar *a*) $g(2.93)$ y *b*) $g(3.1)$ dado que $g(3) = 8$.

25.



26.



27. ***Área*** Se encuentra que la medición del lado de un cuadrado es igual a 10 pulgadas, con un posible error de $\frac{1}{32}$ de pulgada. Usar diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área del cuadrado.

28. ***Área*** Se encuentra que las mediciones de la base y la altura de un triángulo son iguales, respectivamente, a 36 y 50 cm. El posible error en cada medición es de 0.25 cm. Emplear diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área del triángulo.

29. ***Área*** Se mide el radio del extremo de un tronco y se encuentra que es igual a 16 pulgadas, con un posible error de $\frac{1}{4}$ de pulgada. Utilizar diferenciales para aproximar el posible error propagado en el cálculo del área del extremo del tronco.

30. ***Volumen y área superficial*** La medición del borde de un cubo indica un valor de 15 pulgadas, con un error posible de 0.03 pulgadas. Utilizar diferenciales para aproximar el máximo error de propagación posible en el cálculo de *a*) el volumen del cubo y *b*) el área superficial del cubo.

31. ***Área*** La medición del lado de un cuadrado produce un valor igual a 12 cm, con un posible error de 0.05 cm.
    a) Aproximar el error porcentual en el cálculo del área del cuadrado.
    b) Estimar el máximo error porcentual permisible en la medición del lado si el error en el cálculo del área no fue mayor que 2.5%.

32. ***Circunferencia*** La medición de la circunferencia de un círculo produce un valor de 64 centímetros, con un posible error de 0.9 centímetros.
    a) Aproximar el error porcentual en el cálculo del área del círculo.

b) Estimar el máximo error porcentual permisible en la medición de la circunferencia si el error en el cálculo del área no excede de 3%.

33. ***Volumen y área superficial*** Se mide el radio de una esfera y se encuentra un valor de 8 pulgadas, con un posible error de 0.02 pulgadas. Utilizar diferenciales para aproximar el máximo error posible en el cálculo de *a*) el volumen de la esfera, *b*) el área superficial de la esfera y *c*) los errores relativos en los apartados *a*) y *b*).

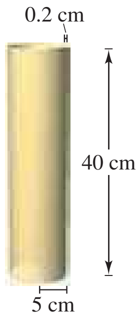
34. ***Distancia de frenado*** La distancia total T en la que se detiene un vehículo es

$$T = 2.5x + 0.5x^2$$

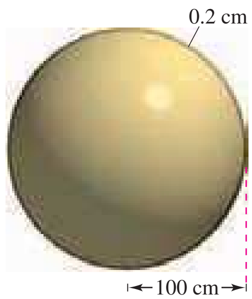
donde T está en pies y x es la velocidad en millas por hora. Aproximar el cambio y el porcentaje de cambio en la distancia total de frenado conforme la velocidad cambia de $x = 25$ a $x = 26$ millas por hora.

Volumen **En los ejercicios 35 y 36, el espesor de cada cubierta es de 0.2 cm. Utilizar diferenciales para aproximar el volumen de cada cubierta.**

35.



36.



37. ***Péndulo*** El periodo de un péndulo está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde L es la longitud del péndulo en pies, g es la aceleración debida a la gravedad y T es el tiempo en segundos. El péndulo se ha sometido a un aumento de temperatura tal que la longitud ha aumentado en $\frac{1}{2}$%.

a) Encontrar el cambio porcentual aproximado en el periodo.

b) Utilizando el resultado del apartado *a*), encontrar el error aproximado en este reloj de péndulo en 1 día.

38. ***Ley de Ohm*** Una corriente de I amperes pasa por un resistor de R ohms. La **ley de Ohm** establece que el voltaje E aplicado al resistor es $E = IR$. Si el voltaje es constante, demostrar que la magnitud del error relativo en R provocado por el cambio en I es igual en magnitud al error relativo en I.

39. ***Mediciones de triángulos*** Se encuentra que la medición de un lado de un triángulo rectángulo es igual a 9.5 pulgadas y que el ángulo opuesto a ese lado es de $26°45'$ con un error posible de $15'$.

a) Aproximar el error porcentual en el cálculo de la longitud de la hipotenusa.

b) Estimar el máximo error porcentual permisible en la medición del ángulo si el error en el cálculo de la longitud de la hipotenusa no puede ser mayor que 2%.

40. ***Área*** Aproximar el error porcentual en el cálculo del área del triángulo del ejercicio 39.

41. ***Movimiento de proyectiles*** El alcance R de un proyectil es

$$R = \frac{v_0^2}{32}(\text{sen } 2\theta)$$

donde v_0 es la velocidad inicial en pies por segundo y θ es el ángulo de elevación. Si $v_0 = 2\,500$ pies por segundo y θ cambia de 10° a 11°, utilizar diferenciales para aproximar el cambio en el alcance.

42. ***Agrimensura*** Un agrimensor que está a 50 pies de la base de un árbol mide el ángulo de elevación de la parte superior de este último y obtiene un valor de 71.5°. ¿Con qué precisión debe medirse el ángulo si el error porcentual en la estimación de la altura de este mismo será menor que 6%?

En los ejercicios 43 a 46, utilizar diferenciales para aproximar el valor de la expresión. Comparar su respuesta con la que se obtiene usando una herramienta de graficación.

43. $\sqrt{99.4}$ **44.** $\sqrt[3]{26}$

45. $\sqrt[4]{624}$ **46.** $(2.99)^3$

En los ejercicios 47 y 48, verificar la aproximación por medio de la recta tangente de la función en el punto indicado. Después utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su aproximación en la misma ventana de observación.

	Función	*Aproximación*	*Punto*
47.	$f(x) = \sqrt{x + 4}$	$y = 2 + \frac{x}{4}$	(0, 2)
48.	$f(x) = \tan x$	$y = x$	(0, 0)

Desarrollo de conceptos

49. Describir la variación en precisión de dy como una aproximación para Δy cuando Δx está disminuyendo.

50. Cuando se usan diferenciales, ¿qué se entiende por los términos *error propagado*, *error relativo* y *error porcentual*?

51. Dar una breve explicación de por qué las siguientes aproximaciones son válidas.

a) $\sqrt{4.02} \approx 2 + \frac{1}{4}(0.02)$

b) $\tan 0.05 \approx 0 + 1(0.05)$

Para discusión

52. ¿Se puede utilizar $y = x$ para aproximar $f(x) = \text{sen } x$ cerca de $x = 0$? ¿Por qué sí o por qué no?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 53 a 56, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o brindar un ejemplo que lo demuestre.**

53. Si $y = x + c$, entonces $dy = dx$.

54. Si $y = ax + b$, entonces $\Delta y/\Delta x = dy/dx$.

55. Si y es derivable, entonces $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y - dy) = 0$.

56. Si $y = f(x)$, f es creciente y derivable, y $\Delta x > 0$, entonces $\Delta y \geq dy$.

3 Ejercicios de repaso

1. Proporcionar la definición de un punto crítico y representar gráficamente una función f que muestre los diferentes tipos de puntos críticos.
2. Considerar la función impar f que es continua y derivable y tiene los valores funcionales que se muestran en la tabla.

x	-5	-4	-1	0	2	3	6
$f(x)$	1	3	2	0	-1	-4	0

a) Determinar $f(4)$.
b) Determinar $f(-3)$.
c) Representar los puntos y realizar un dibujo posible de la gráfica de f en el intervalo $[-6, 6]$. ¿Cuál es el número más pequeño de puntos críticos en el intervalo? Explicar.
d) ¿Existe al menos un número real c en el intervalo $(-6, 6)$ donde $f'(c) = -1$? Explicar.
e) ¿Es posible que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no exista? Explicar la respuesta.
f) ¿Es necesario que $f'(x)$ exista en $x = 2$? Explicar la respuesta.

En los ejercicios 3 y 6, determinar los extremos absolutos de la función en el intervalo cerrado. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función sobre el intervalo dado para confirmar los resultados.

3. $f(x) = x^2 + 5x, \quad [-4, 0]$
4. $h(x) = 3\sqrt{x} - x, \quad [0, 9]$
5. $g(x) = 2x + 5\cos x, \quad [0, 2\pi]$
6. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad [0, 2]$

En los ejercicios 7 a 10, determinar si el teorema de Rolle puede aplicarse a f en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si el teorema de Rolle puede aplicarse, determinar todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b) en los que $f'(c) = 0$. Si el teorema de Rolle no puede ser aplicado, explicar por qué.

7. $f(x) = 2x^2 - 7, \quad [0, 4]$
8. $f(x) = (x - 2)(x + 3)^2, \quad [-3, 2]$
9. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}, \quad [-2, 2]$
10. $f(x) = |x - 2| - 2, \quad [0, 4]$
11. Considerar la función $f(x) = 3 - |x - 4|$.
a) Representar gráficamente la función y verificar que $f(1) = f(7)$.
b) Notar que $f'(x)$ no es igual a cero para ningún x en $[1, 7]$. Explicar por qué esto no contradice al teorema de Rolle.
12. ¿Puede aplicarse el teorema del valor medio a la función $f(x) = 1/x^2$ en el intervalo $[-2, 1]$? Explicar.

En los ejercicios 13 a 18, determinar si el teorema del valor medio puede o no ser aplicado a la función f sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Si se puede aplicar el teorema, encontrar todos los valores de c en el intervalo (a, b) tales que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Si el teorema no puede ser aplicado, explicar por qué.

13. $f(x) = x^{2/3}, \quad [1, 8]$
14. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad [1, 4]$
15. $f(x) = |5 - x|, \quad [2, 6]$
16. $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}, \quad [-1, 1]$
17. $f(x) = x - \cos x, \quad \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
18. $f(x) = \sqrt{x} - 2x, \quad [0, 4]$
19. Para la función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, determinar el valor de c garantizado por el teorema del valor medio en el intervalo $[x_1, x_2]$.
20. Demostrar el resultado del ejercicio 19 para $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ en el intervalo $[0, 4]$.

En los ejercicios 21 a 26, determinar los puntos críticos (si los hay) y los intervalos abiertos sobre los cuales la función es creciente o es decreciente.

21. $f(x) = x^2 + 3x - 12$
22. $h(x) = (x + 2)^{1/3} + 8$
23. $f(x) = (x - 1)^2(x - 3)$
24. $g(x) = (x + 1)^3$
25. $h(x) = \sqrt{x}(x - 3), \quad x > 0$
26. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

En los ejercicios 27 a 30, utilizar el criterio de la primera derivada para encontrar cualesquiera extremos relativos de la función. Utilizar la herramienta de graficación para verificar los resultados.

27. $f(x) = 4x^3 - 5x$
28. $g(x) = \dfrac{x^3 - 8x}{4}$
29. $h(t) = \dfrac{1}{4}t^4 - 8t$
30. $g(x) = \dfrac{3}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2} - 1\right), \quad [0, 4]$
31. ***Movimiento armónico*** La altura de un objeto unido a un resorte está dada por la ecuación armónica

$$y = \tfrac{1}{3}\cos 12t - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 12t$$

donde y se mide en pulgadas y t en segundos.
a) Calcular la altura y velocidad del objeto cuando $t = \pi/8$ segundos.
b) Demostrar que el desplazamiento máximo del objeto es $\frac{5}{12}$ de pulgada.
c) Encontrar el periodo P de y, así como determinar la frecuencia f (número de oscilaciones por segundo) si $f = 1/P$.
32. ***Comentario*** La ecuación general que da la altura de un objeto oscilante unido a un resorte es

$$y = A\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + B\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

donde k es la constante de resorte y m es la masa del objeto.
a) Demostrar que el desplazamiento máximo del objeto es $\sqrt{A^2 + B^2}$.
b) Demostrar que el objeto oscila con una frecuencia de

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

En los ejercicios 33 a 36, determinar los puntos de inflexión y analizar la concavidad de la gráfica de la función.

33. $f(x) = x^3 - 9x^2$

34. $g(x) = x\sqrt{x + 5}$

35. $f(x) = x + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

36. $f(x) = (x + 2)^2(x - 4)$

En los ejercicios 37 a 40, utilizar el criterio de la segunda derivada para encontrar todos los extremos relativos.

37. $f(x) = (x + 9)^2$

38. $h(x) = x - 2 \cos x, \quad [0, 4\pi]$

39. $g(x) = 2x^2(1 - x^2)$

40. $h(t) = t - 4\sqrt{t + 1}$

Para pensar **En los ejercicios 41 y 42, dibujar la gráfica de una función *f* que tenga las características indicadas.**

41. $f(0) = f(6) = 0$
$f'(3) = f'(5) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x < 3$
$f'(x) > 0$ si $3 < x < 5$
$f'(x) < 0$ si $x > 5$
$f''(x) < 0$ si $x < 3$ o $x > 4$
$f''(x) > 0$ si $3 < x < 4$

42. $f(0) = 4, \; f(6) = 0$
$f'(x) < 0$ si $x < 2$ o $x > 4$
$f'(2)$ no existe
$f'(4) = 0$
$f'(x) > 0$ si $2 < x < 4$
$f''(x) < 0$ si $x \neq 2$

43. ***Redacción*** El titular de un periódico señala que "La tasa (el ritmo) de crecimiento del déficit nacional está decreciendo". ¿Qué es lo que significa esto? ¿Qué implica este comentario en cuanto a la gráfica del déficit como una función del tiempo?

44. ***Costo de inventario*** El costo del inventario depende de los costos de pedidos y almacenamiento de acuerdo con el modelo de inventario.

$$C = \left(\frac{Q}{x}\right)s + \left(\frac{x}{2}\right)r.$$

Determinar el tamaño de pedido que minimizará el costo, suponiendo que las ventas ocurren a una tasa constante, Q es el número de unidades vendidas por año, r es el costo de almacenamiento de una unidad durante un año, s es el costo de colocar un pedido y x es el número de unidades por pedido.

45. ***Modelado matemático*** Los gastos para la defensa nacional D (en miles de millones de dólares) para años determinados de 1970 a 2005 se muestran en la tabla, donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiente a 1970. (*Fuente*: *U.S. Office of Management and Budget*)

t	0	5	10	15	20
D	81.7	86.5	134.0	252.7	299.3

t	25	30	35
D	272.1	294.5	495.3

a) Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para ajustar un modelo de la forma

$$D = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$$

a los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

c) Para el año que se muestra en la tabla, ¿cuándo indica el modelo que el gasto para la defensa nacional es un máximo? ¿Cuándo es un mínimo?

d) Para los años que se indican en la tabla, ¿cuándo indica el modelo que el gasto para la defensa nacional está creciendo a mayor velocidad?

46. ***Modelado matemático*** El gerente de un almacén registra las ventas anuales S (en miles de dólares) de un producto durante un periodo de 7 años, como se indica en la tabla, donde t es el tiempo en años, con $t = 1$ correspondiendo a 2001.

t	1	2	3	4	5	6	7
S	5.4	6.9	11.5	15.5	19.0	22.0	23.6

a) Utilizar las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para determinar un modelo de la forma $S = at^3 + bt^2 + ct + d$ correspondiente a los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.

c) Utilizar el cálculo para determinar el tiempo t en el que las ventas estuvieron creciendo a la mayor velocidad.

d) ¿Piensa que el modelo sería exacto para predecir las ventas futuras? Explicar.

En los ejercicios 47 a 56, determinar el límite.

47. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(8 + \frac{1}{x}\right)$

48. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3 - x}{2x + 5}$

49. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2 + 5}$

50. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x^2 + 5}$

51. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x + 5}$

52. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2 + x}}{-2x}$

53. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5 \cos x}{x}$

54. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

55. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{x + \cos x}$

56. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2 \operatorname{sen} x}$

En los ejercicios 57 a 60, determinar cualesquiera asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la función. Recurrir a una herramienta de graficación para verificar los resultados.

57. $f(x) = \dfrac{3}{x} - 2$

58. $g(x) = \dfrac{5x^2}{x^2 + 2}$

59. $h(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4}$

60. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

En los ejercicios 61 a 64, utilizar una herramienta de graficación para representar la función. Emplear la gráfica para aproximar cualesquiera extremos relativos o asíntotas.

61. $f(x) = x^3 + \dfrac{243}{x}$

62. $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2x|$

63. $f(x) = \dfrac{x - 1}{1 + 3x^2}$

64. $g(x) = \dfrac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos 2x$

En los ejercicios 65 a 82, analizar y dibujar la gráfica de la función.

65. $f(x) = 4x - x^2$

66. $f(x) = 4x^3 - x^4$

67. $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$

68. $f(x) = (x^2 - 4)^2$

69. $f(x) = (x - 1)^3(x - 3)^2$

70. $f(x) = (x - 3)(x + 2)^3$

71. $f(x) = x^{1/3}(x + 3)^{2/3}$

72. $f(x) = (x - 2)^{1/3}(x + 1)^{2/3}$

73. $f(x) = \dfrac{5 - 3x}{x - 2}$

74. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

75. $f(x) = \dfrac{4}{1 + x^2}$

76. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^4}$

77. $f(x) = x^3 + x + \dfrac{4}{x}$

78. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

79. $f(x) = |x^2 - 9|$

80. $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$

81. $f(x) = x + \cos x, \qquad 0 \le x \le 2\pi$

82. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}(2 \operatorname{sen} \pi x - \operatorname{sen} 2\pi x), \qquad -1 \le x \le 1$

83. Determinar los puntos máximos y mínimos en la gráfica de

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$$

a) Sin utilizar cálculo.

b) Utilizando cálculo.

84. Considerar la función $f(x) = x^n$ para valores enteros positivos de n.

a) ¿Para qué valores de n la función tiene un mínimo relativo en el origen?

b) ¿Para qué valores de n la función tiene un punto de inflexión en el origen?

85. ***Distancia*** En la noche, el barco A se encuentra a 100 kilómetros en dirección este del barco B. El barco A navega hacia el oeste a 12 km/h, y el barco B lo hace hacia el sur a 10 km/h. ¿A qué hora se encontrarán a distancia mínima uno del otro? ¿Cuál es la distancia?

86. ***Área máxima*** Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima, con lados paralelos a los ejes de coordenadas, que puede inscribirse en la elipse dada por

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

87. ***Longitud mínima*** Un triángulo rectángulo en el primer cuadrante tiene los ejes de coordenadas como lados, y la hipotenusa pasa por el punto (1, 8). Encontrar los vértices del triángulo de modo tal que la longitud de la hipotenusa sea mínima.

88. ***Longitud mínima*** Hay que apuntalar la fachada de un edificio con una viga que debe pasar sobre una cerca (valla) paralela de 5 pies de altura y a 4 pies de distancia del edificio. Determinar la longitud de la viga más corta que puede usarse.

89. ***Área máxima*** Tres lados de un trapezoide tienen la misma longitud s. De todos los trapezoides posibles de estas características, mostrar que uno de área máxima tiene un cuarto lado de longitud $2s$.

90. ***Área máxima*** Demostrar que el área más grande de cualquier rectángulo inscrito en un triángulo es la correspondiente a la mitad de la del triángulo.

91. ***Distancia*** Calcular (sin el uso de la trigonometría) la longitud de la tubería más larga que se puede transportar sin inclinarla por dos pasillos, de anchuras 4 y 6 pies, que forman esquina en el ángulo recto.

92. ***Distancia*** Repetir el ejercicio 91, considerando que los corredores (pasillos) tienen anchos iguales a a y b metros.

93. ***Distancia*** Un pasadizo con 6 pies de ancho se junta con otro de 9 pies de ancho formando un ángulo recto. Encontrar la longitud del tubo más largo que puede transportarse sin inclinarse alrededor de esta esquina. [*Sugerencia*: Si L es la longitud de la tubería, demostrar que

$$L = 6 \csc \theta + 9 \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

donde θ es el ángulo entre el tubo y la pared del pasadizo más estrecho.]

94. ***Longitud*** Repetir el ejercicio 93, dado que uno de los pasadizos es de a metros de ancho y el otro de b metros de ancho. Demostrar que el resultado es el mismo que en el ejercicio 92.

Costo mínimo **En los ejercicios 95 y 96, determinar la velocidad v, en millas por hora, que minimizará los costos en un viaje de entrega de 110 millas. El costo por hora del combustible es C dólares, y al conductor se le pagarán W dólares por hora. (Suponer que no hay otros costos aparte de los salarios y el combustible.)**

95. Costo del comb.: $C = \dfrac{v^2}{600}$

Conductor: $W = \$5$

96. Costo del comb.: $C = \dfrac{v^2}{500}$

Conductor: $W = \$7.50$

En los ejercicios 97 y 98, utilizar el método de Newton para aproximar cualesquiera ceros reales de la función con una precisión de hasta tres decimales. Utilizar la característica *cero* o *root* de una herramienta de graficación para verificar los resultados.

97. $f(x) = x^3 - 3x - 1$

98. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

En los ejercicios 99 y 100, utilizar el método de Newton para aproximar, hasta tres lugares decimales, el (los) valor(es) x del (los) punto(s) de intersección de las ecuaciones. Utilizar una herramienta de graficación para verificar los resultados.

99. $y = x^4$

$y = x + 3$

100. $y = \operatorname{sen} \pi x$

$y = 1 - x$

En los ejercicios 101 y 102, encontrar la diferencial dy.

101. $y = x(1 - \cos x)$

102. $y = \sqrt{36 - x^2}$

103. ***Área superficial y volumen*** El diámetro de una esfera se mide y se obtiene un valor de 18 centímetros, con un error máximo posible de 0.05 centímetros. Utilizar diferenciales para aproximar los posibles error propagado y error porcentual al calcular el área de la superficie y el volumen de la esfera.

104. ***Función de demanda*** Una compañía descubre que la demanda de uno de sus productos es

$$p = 75 - \frac{1}{4}x.$$

Si x cambia de 7 a 8, encontrar y comparar los valores de Δp y dp.

SP Solución de problemas

1. Representar el polinomio de cuarto grado $p(x) = x^4 + ax^2 + 1$ para diversos valores de la constante a.
   a) Determinar el valor de a para el cual p tiene exactamente un mínimo relativo.
   b) Determinar los valores de a para los cuales p tiene exactamente un máximo relativo.
   c) Determinar los valores de a para los cuales p tiene exactamente dos mínimos relativos.
   d) Mostrar que la gráfica de p no puede tener exactamente dos extremos relativos.

2. a) Representar el polinomio de cuarto grado $p(x) = ax^4 - 6x^2$ para $a = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3. ¿Para qué valores de la constante a para p tiene un mínimo o máximo relativo?
   b) Demostrar que p tiene un máximo relativo para todos los valores de la constante a.
   c) Determinar analíticamente los valores de a para los cuales p tiene un mínimo relativo.
   d) Sea $(x, y) = (x, p(x))$ un extremo relativo de p. Demostrar que (x, y) se encuentra en la gráfica de $y = -3x^2$. Verificar gráficamente este resultado representando $y = -3x^2$ junto con las siete curvas del apartado a).

3. Sea $f(x) = \frac{c}{x} + x^2$. Determinar todos los valores de la constante c tales que f tiene un mínimo relativo, pero no un máximo relativo.

4. a) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, un polinomio cuadrático. ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la gráfica de f?
   b) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, un polinomio cúbico. ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la gráfica de f?
   c) Suponer que la función $y = f(x)$ satisface la ecuación $\frac{dy}{dx} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$, donde k y L son constantes positivas. Demostrar que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en el punto donde $y = \frac{L}{2}$. (Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación diferencial logística**.)

5. Demostrar el teorema de Darboux: sea f derivable en el intervalo cerrado $[a, b]$ de modo tal que $f'(a) = y_1$ y $f'(b) = y_2$. Si d se encuentra entre y_1 y y_2, entonces existe c en (a, b) tal que $f'(c) = d$.

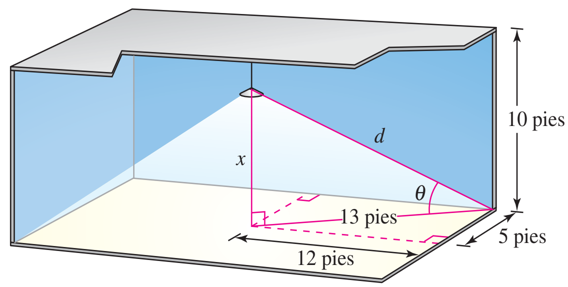
6. Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Demostrar que si $f(a) = g(a)$ y $g'(x) > f'(x)$ para todo x en (a, b), entonces $g(b) > f(b)$.

7. Demostrar el siguiente **teorema del valor medio extendido**. Si f y f' son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si f'' existe en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

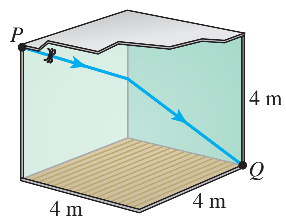
$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{1}{2}f''(c)(b - a)^2.$$

8. a) Sea $V = x^3$. Determinar dV y ΔV. Demostrar que para valores pequeños de x, la diferencia $\Delta V - dV$ es muy pequeña en el sentido de que existe ε tal que $\Delta V - dV = \varepsilon\Delta x$, donde $\varepsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.
   b) Generalizar este resultado demostrando que si $y = f(x)$ es una función derivable, entonces $\Delta y - dy = \varepsilon\Delta x$, donde $\varepsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

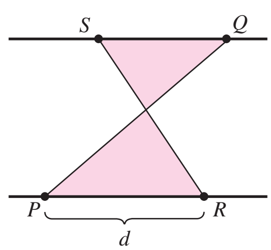
9. La cantidad de iluminación de una superficie es proporcional a la intensidad de la fuente luminosa, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la fuente luminosa, y proporcional a sen θ, donde θ es el ángulo al cual la luz incide sobre la superficie. Un cuarto rectangular mide 10 por 24 pies, con un techo de 10 pies. Determinar la altura a la cual la luz debe ubicarse para permitir que las esquinas del piso reciban la mayor cantidad posible de luz.



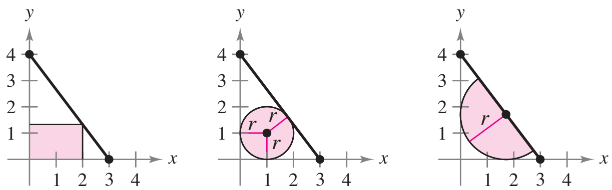
10. Considerar un cuarto en la forma de un cubo, de 4 metros de lado. Un insecto en el punto P desea desplazarse hasta el punto Q en la esquina opuesta, como se indica en la figura. Emplear el cálculo para determinar la trayectoria más corta. ¿Se puede resolver el problema sin el cálculo?



11. La recta que une P y Q cruza las dos rectas paralelas, como se muestra en la figura. El punto R está a d unidades de P. ¿A qué distancia de Q debe situarse el punto S de manera que la suma de las áreas de los dos triángulos sombreados sea un mínimo? ¿De qué modo para que la suma sea un máximo?



12. Las figuras muestran un rectángulo, un círculo y un semicírculo inscritos en un triángulo delimitado por los ejes de coordenadas y la porción del primer cuadrante de la recta con intersecciones (3, 0) y (0, 4). Encontrar las dimensiones de cada figura inscrita de manera tal que su área sea máxima. Establecer qué tipo de cálculo fue útil para determinar las dimensiones requeridas. Explicar el razonamiento.

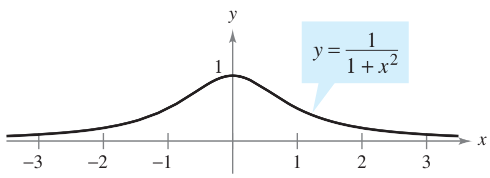


13. *a*) Demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

b) Probar que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$.

c) Sea L un número real. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{y\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{y}\right) = L$.

14. Encontrar el punto sobre la gráfica de $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ (ver la figura) donde la recta tangente tiene la pendiente más grande, y el punto donde la recta tangente tiene la pendiente menor.



15. *a*) Sea x un número positivo. Utilizar la función *table* de una herramienta de graficación para verificar que $\sqrt{1 + x} < \frac{1}{2}x + 1$.

b) Recurrir al teorema del valor medio para demostrar que $\sqrt{1 + x} < \frac{1}{2}x + 1$ para todos los números reales positivos x.

16. *a*) Sea x un número positivo. Utilizar la función *table* de una herramienta de graficación para verificar que sen $x < x$.

b) Utilizar el teorema del valor medio para demostrar que $x < x$ para todo número real positivo x.

17. El departamento de policía debe determinar el límite de velocidad sobre un puente de manera tal que la tasa de flujo de automóviles sea máxima por unidad de tiempo. Cuanto mayor es el límite de velocidad, tanto más separados deben estar los automóviles para mantener una distancia de frenado segura. Los datos experimentales respecto a la distancia de frenado d (en metros) para diversas velocidades v (en kilómetros por hora) se indican en la tabla.

v	20	40	60	80	100
d	5.1	13.7	27.2	44.2	66.4

a) Convertir las velocidades v en la tabla a velocidades s en metros por segundo. Utilizar las capacidades de regresión de la calculadora para determinar un modelo de la forma $d(s) = as^2 + bs + c$ para los datos.

b) Considerar dos vehículos consecutivos de longitud promedio igual a 5.5 metros, que viajan a una velocidad segura sobre el puente. Sea T la diferencia entre los tiempos (en segundos) cuando los parachoques frontales de los vehículos pasan por un punto dado sobre el puente. Verificar que esta diferencia de tiempos está dada por

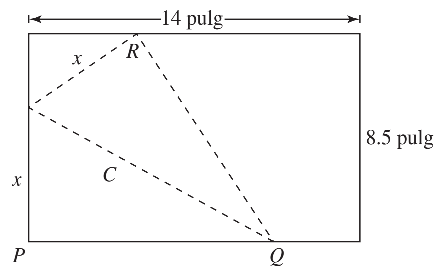
$$T = \frac{d(s)}{s} + \frac{5.5}{s}.$$

c) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función T y estimar la velocidad s que minimiza el tiempo entre vehículos.

d) Recurrir al cálculo para determinar la velocidad que minimiza T. ¿Cuál es el valor mínimo de T? Convertir la velocidad requerida a kilómetros por hora.

e) Determinar la distancia óptima entre vehículos para el límite de velocidad máxima determinado en el apartado *d*).

18. Una hoja de papel de tamaño cuartilla (8.5 × 14 pulgadas) se dobla de manera que la esquina P toca el borde opuesto de 14 pulgadas en R (ver la figura). (*Nota*: $PQ = \sqrt{C^2 - x^2}$.)



a) Demostrar que $C^2 = \dfrac{2x^3}{2x - 8.5}$.

b) ¿Cuál es el dominio de C?

c) Determinar el valor de x que minimiza a C.

d) Determinar la longitud mínima C.

19. El polinomio $P(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2$ es la aproximación cuadrática de la función f en $(a, f(a))$ si $P(a) = f(a)$, $P'(a) = f'(a)$ y $P''(a) = f''(a)$.

a) Encontrar la aproximación cuadrática de

$$f(x) = \frac{x}{x + 1}$$

en (0, 0).

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar $P(x)$ y $f(x)$ en la misma ventana de observación.

20. Sean $x > 0$ y $n > 1$ dos números reales. Demostrar que

$(1 + x)^n > 1 + nx.$

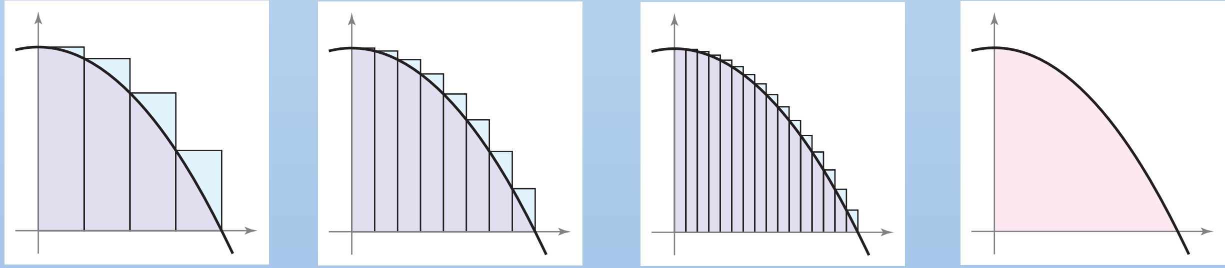
4 Integración

En este capítulo, se estudiará un importante proceso de cálculo que está estrechamente relacionado con la diferenciación-*integración*. El lector aprenderá nuevos métodos y reglas para resolver integrales definidas e indefinidas, incluido el teorema fundamental del cálculo. Posteriormente se aplicarán esas reglas para encontrar algunos términos como la función posición para un objeto y el valor promedio de una función.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo evaluar integrales indefinidas usando reglas de integración básicas. (**4.1**)
- Cómo evaluar una suma y aproximar el área de una región del plano. (**4.2**)
- Cómo evaluar una integral definida usando un límite. (**4.3**)
- Cómo evaluar una integral definida usando el teorema fundamental del cálculo. (**4.4**)
- Cómo evaluar diferentes tipos de integrales definidas e indefinidas con una variedad de métodos. (**4.5**)
- Cómo evaluar una integral definida con la regla trapezoidal y la regla de Simpson. (**4.6**)

Aunque su sobrenombre oficial sea Ciudad Esmeralda, Seattle se conoce a veces como la Ciudad Lluviosa debido a su clima. No obstante, existen varias ciudades, incluidas Nueva York y Boston, que típicamente tienen más precipitación anual. ¿Cómo se podría usar la integración para calcular la precipitación normal anual para el área de Seattle? (Vea la sección 4.5, ejercicio 117.)



El área de una región parabólica puede aproximarse como la suma de las áreas de rectángulos. Conforme se incrementa el número de rectángulos, la aproximación tiende a ser cada vez más exacta. En la sección 4.2, el lector aprenderá cómo se puede usar el proceso de límite para encontrar áreas de una variedad de ancho de regiones.

4.1 Antiderivadas o primitivas e integración indefinida

- **Escribir la solución general de una ecuación diferencial.**
- **Usar la notación de la integral indefinida para las antiderivadas o primitivas.**
- **Utilizar las reglas de la integración básicas para encontrar antiderivadas.**
- **Encontrar una solución particular de una ecuación diferencial.**

EXPLORACIÓN

Determinación de antiderivadas o primitivas Para cada derivada, describir la función original F.

a) $F'(x) = 2x$

b) $F'(x) = x$

c) $F'(x) = x^2$

d) $F'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

e) $F'(x) = \dfrac{1}{x^3}$

f) $F'(x) = \cos x$

¿Qué estrategia se usó para determinar F?

Antiderivadas o primitivas

Suponer que se decide encontrar una función F cuya derivada es $f(x) = 3x^2$. Por lo que se sabe de derivadas, es posible afirmar que

$$F(x) = x^3 \text{ porque } \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2.$$

La función F es una *antiderivada* de f.

DEFINICIÓN DE UNA ANTIDERIVADA O PRIMITIVA

Se dice que una función F es una **antiderivada o primitiva** de f, en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Nótese que F es *una* antiderivada de f, en vez de *la* antiderivada de f. Para entender por qué, observar que

$$F_1(x) = x^3, \quad F_2(x) = x^3 - 5 \quad \text{y} \quad F_3(x) = x^3 + 97$$

son todas antiderivadas de $f(x) = 3x^2$. De hecho, para cualquier constante C, la función dada por $F(x) = x^3 + C$ es una antiderivada de f.

TEOREMA 4.1 REPRESENTACIÓN DE ANTIDERIVADAS O PRIMITIVAS

Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es una antiderivada de f en el intervalo I si y sólo si G es de la forma $G(x) = F(x) + C$, para todo x en I, donde C es una constante.

DEMOSTRACIÓN La prueba del teorema 4.1 en un sentido es directa. Esto es, si $G(x) = F(x) + C$, $F'(x) = f(x)$, y C es constante, entonces

$$G'(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C] = F'(x) + 0 = f(x).$$

Para probar este teorema en otro sentido, se supone que G es una antiderivada de f. Se define una función H tal que

$$H(x) = G(x) - F(x).$$

Para cualesquiera dos puntos a y b $(a < b)$ en el intervalo, H es continua dentro de $[a, b]$ y diferenciable dentro de (a, b). Mediante el teorema del valor medio,

$$H'(c) = \frac{H(b) - H(a)}{b - a}.$$

para algún c en (a, b). Sin embargo, $H'(c) = 0$, por consiguiente $H(a) = H(b)$. Dado que a y b son puntos arbitrarios en el intervalo, se sabe que H es una función constante C. Así, $G(x) - F(x) = C$ y esto conlleva a que $G(x) = F(x) + C$.

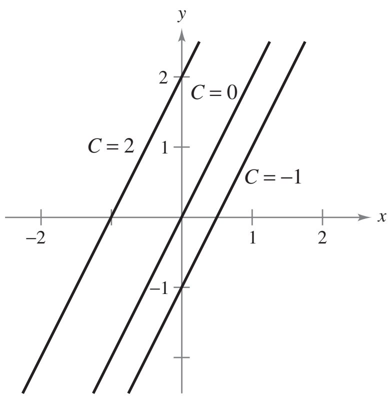
Si utiliza el teorema 4.1, puede representarse la familia completa de antiderivadas de una función agregando una constante a una antiderivada *conocida*. Por ejemplo, sabiendo que $D_x[x^2] = 2x$, es posible representar la familia de *todas* las antiderivadas de $f(x) = 2x$ por

$$G(x) = x^2 + C \qquad \text{Familia de todas las antiderivadas de } f(x) = 2x.$$

donde C es constante. La constante C recibe el nombre de **constante de integración**. La familia de funciones representadas por G es la **antiderivada general** de f, y $G(x) = x^2 + C$ es la **solución general** de la *ecuación diferencial*.

$$G'(x) = 2x. \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

Una **ecuación diferencial** en x y y es una ecuación que incluye a x, y y *a* las derivadas de y. Por ejemplo, $y' = 3x$ y $y' = x^2 + 1$ son ejemplos de ecuaciones diferenciales.



Funciones de la forma $y = 2x + C$
Figura 4.1

EJEMPLO 1 Resolución de una ecuación diferencial

Determinar la solución general de la ecuación diferencial $y' = 2$.

Solución Para empezar, determinar una función cuya derivada es 2. Una función de esta característica es

$$y = 2x. \qquad 2x \text{ es } \textit{una} \text{ antiderivada de 2.}$$

Ahora bien, utilizar el teorema 4.1 para concluir que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = 2x + C. \qquad \text{Solución general.}$$

Las gráficas de varias funciones de la forma $y = 2x + C$ se muestran en la figura 4.1.

Notación para antiderivadas o primitivas

Cuando se resuelve una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

es conveniente escribirla en la forma diferencial equivalente

$$dy = f(x)\,dx.$$

La operación para determinar todas las soluciones de esta ecuación se denomina **antiderivación** (o **integración indefinida**) y se denota mediante un signo integral $\int$. La solución general se denota mediante

$$y = \int \underbrace{f(x)}_{\text{Integrando}} \overbrace{dx}^{\text{Variable de integración}} = \underbrace{F(x)}_{\text{Una antiderivada de } f(x)} + \overbrace{C}^{\text{Constante de integración}}.$$

La expresión $\int f(x)dx$ se lee como la *antiderivada o primitiva de f con respecto a x*. De tal manera, la diferencial de dx sirve para identificar a x como la variable de integración. El término **integral indefinida** es sinónimo de antiderivada.

NOTA En este texto, la notación $\int f(x)dx = F(x) + C$ significa que F es una antiderivada o primitiva de f *en un intervalo*.

Reglas básicas de integración

La naturaleza inversa de la integración y la derivación puede verificarse sustituyendo $F'(x)$ por $f(x)$ en la definición de integración indefinida para obtener

$$\int F'(x)\, dx = F(x) + C.$$

La integración es la "inversa" de la derivación.

Además, si $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx\right] = f(x).$$

La derivación es la "inversa" de la integración.

Estas dos ecuaciones permiten obtener directamente fórmulas de integración a partir de fórmulas de derivación, como se muestra en el siguiente resumen.

Reglas básicas de integración

Fórmula de derivación	*Fórmula de integración*
$\frac{d}{dx}[C] = 0$	$\int 0\, dx = C$
$\frac{d}{dx}[kx] = k$	$\int k\, dx = kx + C$
$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$	$\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$
$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \quad - \quad 1$ Regla de la potencia.
$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

NOTA La regla de la potencia para la integración tiene la restricción $n \neq -1$. El cálculo de $\int 1/x\, dx$ debe esperar hasta el análisis de la función logaritmo natural en el capítulo 5. ■

EJEMPLO 2 Aplicación de las reglas básicas de integración

Describir las antiderivadas o primitivas de $3x$.

Solución

$$\begin{aligned}\int 3x\,dx &= 3\int x\,dx && \text{Regla del múltiplo constante.}\\ &= 3\int x^1\,dx && \text{Reescribir } x \text{ como } x^1.\\ &= 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + C && \text{Regla de potencia } (n = 1).\\ &= \frac{3}{2}x^2 + C && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$

De tal manera, las antiderivadas o primitivas de $3x$ son de la forma $\frac{3}{2}x^2 + C$, donde C es cualquier constante.

Cuando se evalúan integrales indefinidas, una aplicación estricta de las reglas básicas de integración tiende a producir complicadas constantes de integración. En el caso del ejemplo 2, se podría haber escrito

$$\int 3x\,dx = 3\int x\,dx = 3\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = \frac{3}{2}x^2 + 3C.$$

Sin embargo, como C representa *cualquier* constante, es tanto problemático como innecesario escribir $3C$ como la constante de integración. De tal modo, $\frac{3}{2}x^2 + 3C$ se escribe en la forma más simple, $\frac{3}{2}x^2 + C$.

En el ejemplo 2, advertir que el patrón general de integración es similar al de la derivación.

Integral original ⇨ Reescribir ⇨ Integrar ⇨ Simplificar

EJEMPLO 3 Reescribir antes de integrar

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
a)	$\int \frac{1}{x^3}\,dx$	$\int x^{-3}\,dx$	$\frac{x^{-2}}{-2} + C$	$-\frac{1}{2x^2} + C$
b)	$\int \sqrt{x}\,dx$	$\int x^{1/2}\,dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
c)	$\int 2\operatorname{sen} x\,dx$	$2\int \operatorname{sen} x\,dx$	$2(-\cos x) + C$	$-2\cos x + C$

TECNOLOGÍA Algunos programas de software tales como *Maple, Mathematica* y el *TI-89*, son capaces de efectuar simbólicamente la integración. Si se tiene acceso a estas herramientas de integración simbólica, utilizarlas para calcular las integrales indefinidas del ejemplo 3.

Recordar que, por simple derivación, puede comprobarse si una primitiva es correcta. Así, en el ejemplo 3*b*, para saber si la primitiva $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$ es correcta, basta con derivarla para obtener

$$D_x\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + C\right] = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{1/2} = \sqrt{x}. \qquad \text{Usar la derivación para verificar la antiderivada.}$$

Las reglas básicas de integración listadas antes en esta sección permiten integrar cualquier función polinomial, como se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Integración de funciones polinomiales

a) $\int dx = \int 1\, dx$ — Se entiende que el integrando es uno.

$= x + C$ — Integrar.

b) $\int (x + 2)\, dx = \int x\, dx + \int 2\, dx$

$= \dfrac{x^2}{2} + C_1 + 2x + C_2$ — Integrar.

$= \dfrac{x^2}{2} + 2x + C$ — $C = C_1 + C_2$.

La segunda línea en la solución suele omitirse.

c) $\int (3x^4 - 5x^2 + x)\, dx = 3\left(\dfrac{x^5}{5}\right) - 5\left(\dfrac{x^3}{3}\right) + \dfrac{x^2}{2} + C$ — Integrar.

$= \dfrac{3}{5}x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$ — Simplificar.

EJEMPLO 5 Reescribir antes de integrar

$\int \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(\dfrac{x}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ — Reescribir como dos fracciones.

$= \int (x^{1/2} + x^{-1/2})\, dx$ — Reescribir con exponentes fraccionarios.

$= \dfrac{x^{3/2}}{3/2} + \dfrac{x^{1/2}}{1/2} + C$ — Integrar.

$= \dfrac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$ — Simplificar.

$= \dfrac{2}{3}\sqrt{x}(x + 3) + C$

AYUDA DE ESTUDIO Recordar que la respuesta puede verificarse por derivación.

NOTA Cuando se integren los cocientes, no debe integrarse numerador y denominador por separado. Esto es incorrecto tanto en la integración como en la derivación. Al respecto, obsérvese el ejemplo 5.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + C \text{ no es lo mismo que } \frac{\int (x+1)\, dx}{\int \sqrt{x}\, dx} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + C_1}{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C_2}.$$

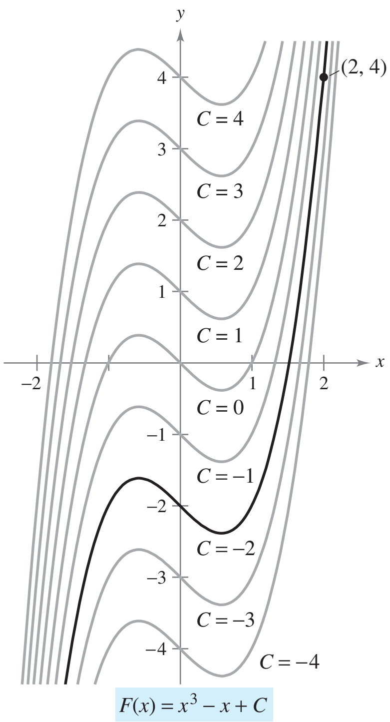
EJEMPLO 6 Reescribir antes de integrar

$\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) dx$ — Reescribir como un producto.

$= \int \sec x \tan x\, dx$ — Reescribir utilizando identidades trigonométricas.

$= \sec x + C$ — Integrar.

Condiciones iniciales y soluciones particulares



La solución particular que satisface la condición inicial $F(2) = 4$ es $F(x) = x^3 - x - 2$
Figura 4.2

Se ha visto que la ecuación $y = \int f(x)\,dx$ tiene muchas soluciones (cada una difiriendo de las otras en una constante). Eso significa que las gráficas de cualesquiera dos antiderivadas o primitivas de f son traslaciones verticales una de otra. Por ejemplo, la figura 4.2 muestra las gráficas de varias de las antiderivadas o primitivas de la forma

$$y = \int (3x^2 - 1)\,dx = x^3 - x + C \qquad \text{Solución general.}$$

para diversos valores enteros de C. Cada una de estas antiderivadas o primitivas es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1.$$

En muchas aplicaciones de la integración, se da suficiente información para determinar una **solución particular**. Para hacer esto, sólo se necesita conocer el valor de $y = F(x)$ para un valor de x. Esta información recibe el nombre de **condición inicial**. Por ejemplo, en la figura 4.2, sólo una de las curvas pasa por el punto (2, 4). Para encontrar esta curva, se utiliza la siguiente información.

$$F(x) = x^3 - x + C \qquad \text{Solución general.}$$
$$F(2) = 4 \qquad \text{Condición inicial.}$$

Utilizando la condición inicial en la solución general, es posible determinar que $F(2) = 8 - 2 + C = 4$, lo que implica que $C = -2$. De tal modo, se obtiene

$$F(x) = x^3 - x - 2. \qquad \text{Solución particular.}$$

EJEMPLO 7 Determinación de una solución particular

Encontrar la solución general de

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$$

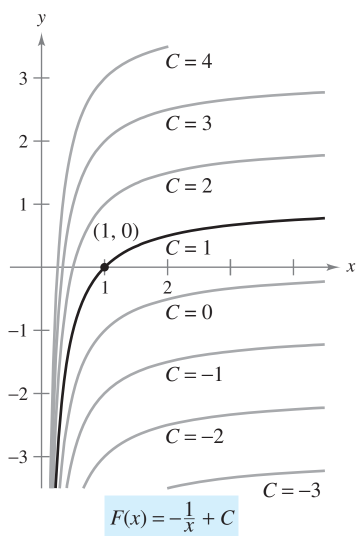
y determinar la solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 0$.

Solución Para encontrar la solución general, se integra para obtener

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{x^2}\,dx && F(x) = \textstyle\int F'(x)dx. \\ &= \int x^{-2}\,dx && \text{Reescribir como una potencia.} \\ &= \frac{x^{-1}}{-1} + C && \text{Integrar.} \\ &= -\frac{1}{x} + C, \quad x > 0. && \text{Solución general.} \end{aligned}$$

Utilizando la condición inicial $F(1) = 0$, resolver para C de la manera siguiente.

$$F(1) = -\frac{1}{1} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$



La solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 0$ es $F(x) = -(1/x) + 1, x > 0$
Figura 4.3

De tal modo, la solución particular, como se muestra en la figura 4.3, es

$$F(x) = -\frac{1}{x} + 1, \quad x > 0. \qquad \text{Solución particular.}$$

Hasta ahora, en esta sección se ha utilizado x como variable de integración. En las aplicaciones, es a menudo conveniente utilizar una variable distinta. Así, en el siguiente ejemplo, la variable de integración es el *tiempo* t.

EJEMPLO 8 Solución de un problema de movimiento vertical

Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies por segundo a partir de una altura inicial de 80 pies.

a) Encontrar la función posición que expresa la altura s en una función del tiempo t.
b) ¿Cuándo llegará la pelota al suelo?

Solución

a) Considerar que $t = 0$ representa el tiempo inicial. Las dos condiciones iniciales indicadas pueden escribirse de la siguiente manera.

$$s(0) = 80 \qquad \text{La altura inicial es 80 pies.}$$
$$s'(0) = 64 \qquad \text{La velocidad inicial es de 64 pies por segundo.}$$

Utilizando -32 pies/s^2 como la aceleración de la gravedad, se tiene

$$s''(t) = -32$$
$$s'(t) = \int s''(t)\,dt = \int -32\,dt = -32t + C_1.$$

Empleando la velocidad inicial, se obtiene $s'(0) = 64 = -32(0) + C_1$, lo cual implica que $C_1 = 64$. Después, integrando $s'(t)$, se obtiene

$$s(t) = \int s'(t)\,dt = \int (-32t + 64)\,dt = -16t^2 + 64t + C_2.$$

Al utilizar la altura inicial, se encuentra que

$$s(0) = 80 = -16(0^2) + 64(0) + C_2$$

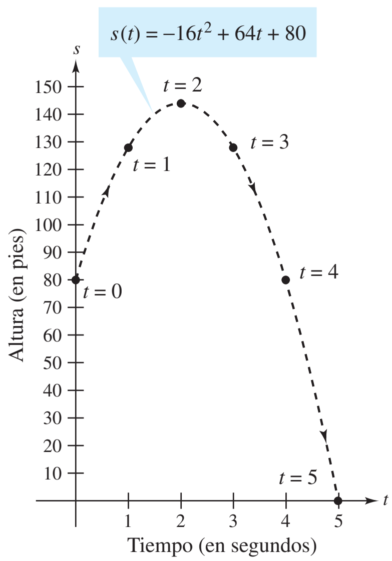
lo que implica que $C_2 = 80$. De ese modo, la función posición es

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80. \qquad \text{Ver la figura 4.4.}$$

b) Utilizando la función posición que se encontró en el apartado *a*), es posible determinar el tiempo en que la pelota pega en el suelo al resolver la ecuación $s(t) = 0$.

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80 = 0$$
$$-16(t + 1)(t - 5) = 0$$
$$t = -1, 5$$

Como t debe ser positivo, se puede concluir que la pelota golpea el suelo 5 segundos después de haber sido lanzada.



Altura de una pelota en el tiempo t
Figura 4.4

El ejemplo 8 muestra cómo utilizar el cálculo para analizar problemas de movimiento vertical en los que la aceleración es determinada por una fuerza gravitacional. Se puede utilizar una estrategia similar para analizar otros problemas de movimiento rectilíneo (vertical u horizontal) en los que la aceleración (o desaceleración) es el resultado de alguna otra fuerza, como se verá en los ejercicios 81 a 89.

NOTA En el ejemplo 8, obsérvese que la función posición tiene la forma

$$s(t) = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$$

donde $g = -32$, v_0 es la velocidad inicial y s_0 es la altura inicial, como se presentó en la sección 2.2.

Antes de hacer los ejercicios, se debe reconocer que uno de los pasos más importantes en la integración es *reescribir el integrando* en una forma que corresponda con las reglas básicas de integración. Para ilustrar este punto, a continuación se presentan algunos ejemplos adicionales.

Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
$\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$	$2\int x^{-1/2}\,dx$	$2\left(\frac{x^{1/2}}{1/2}\right) + C$	$4x^{1/2} + C$
$\int (t^2 + 1)^2\,dt$	$\int (t^4 + 2t^2 + 1)\,dt$	$\frac{t^5}{5} + 2\left(\frac{t^3}{3}\right) + t + C$	$\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + C$
$\int \frac{x^3 + 3}{x^2}\,dx$	$\int (x + 3x^{-2})\,dx$	$\frac{x^2}{2} + 3\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C$	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} + C$
$\int \sqrt[3]{x}(x - 4)\,dx$	$\int (x^{4/3} - 4x^{1/3})\,dx$	$\frac{x^{7/3}}{7/3} - 4\left(\frac{x^{4/3}}{4/3}\right) + C$	$\frac{3}{7}x^{7/3} - 3x^{4/3}$

4.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, verificar el enunciado demostrando que la derivada del lado derecho es igual al integrando del lado izquierdo.

1. $\int \left(-\frac{6}{x^4}\right) dx = \frac{2}{x^3} + C$

2. $\int \left(8x^3 + \frac{1}{2x^2}\right) dx = 2x^4 - \frac{1}{2x} + C$

3. $\int (x - 4)(x + 4)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 16x + C$

4. $\int \frac{x^2 - 1}{x^{3/2}}\,dx = \frac{2(x^2 + 3)}{3\sqrt{x}} + C$

En los ejercicios 5 a 8, encontrar la solución general de la ecuación diferencial y verificar el resultado mediante derivación.

5. $\frac{dy}{dt} = 9t^2$

6. $\frac{dr}{d\theta} = \pi$

7. $\frac{dy}{dx} = x^{3/2}$

8. $\frac{dy}{dx} = 2x^{-3}$

En los ejercicios 9 a 14, completar la tabla.

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
9.	$\int \sqrt[3]{x}\,dx$			
10.	$\int \frac{1}{4x^2}\,dx$			
11.	$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$			
12.	$\int x(x^3 + 1)\,dx$			
13.	$\int \frac{1}{2x^3}\,dx$			
14.	$\int \frac{1}{(3x)^2}\,dx$			

En los ejercicios 15 a 34, encontrar la integral indefinida y verificar el resultado mediante derivación.

15. $\int (x + 7)\,dx$

16. $\int (13 - x)\,dx$

17. $\int (2x - 3x^2)\,dx$

18. $\int (8x^3 - 9x^2 + 4)\,dx$

19. $\int (x^5 + 1)\,dx$

20. $\int (x^3 - 10x - 3)\,dx$

21. $\int (x^{3/2} + 2x + 1)\,dx$

22. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

23. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

24. $\int \left(\sqrt[4]{x^3} + 1\right) dx$

25. $\int \frac{1}{x^5}\,dx$

26. $\int \frac{1}{x^6}\,dx$

27. $\int \frac{x + 6}{\sqrt{x}}\,dx$

28. $\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x^4}\,dx$

29. $\int (x + 1)(3x - 2)\,dx$

30. $\int (2t^2 - 1)^2\,dt$

31. $\int y^2\sqrt{y}\,dy$

32. $\int (1 + 3t)t^2\,dt$

33. $\int dx$

34. $\int 14\,dt$

En los ejercicios 35 a 44, hallar la integral indefinida y verificar el resultado mediante derivación.

35. $\int (5\cos x + 4\,\mathrm{sen}\,x)\,dx$

36. $\int (t^2 - \cos t)\,dt$

37. $\int (1 - \csc t \cot t)\,dt$

38. $\int (\theta^2 + \sec^2\theta)\,d\theta$

39. $\int (\sec^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta$

40. $\int \sec y(\tan y - \sec y)\,dy$

41. $\displaystyle\int (\tan^2 y + 1)\, dy$

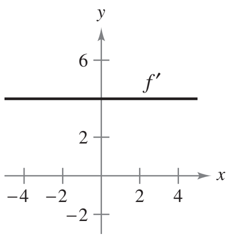
42. $\displaystyle\int (4x - \csc^2 x)\, dx$

43. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x}\, dx$

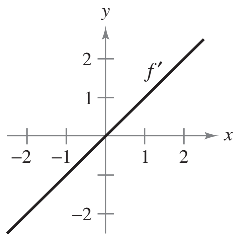
44. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

En los ejercicios 45 a 48, se presenta la gráfica de la derivada de una función. Dibujar las gráficas de *dos* funciones que tengan la derivada señalada. (Hay más de una respuesta correcta.)

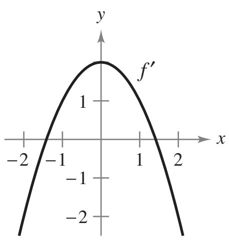
45.



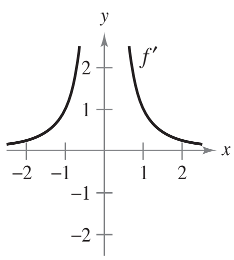
46.



47.

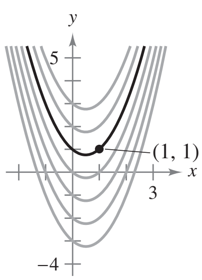


48.

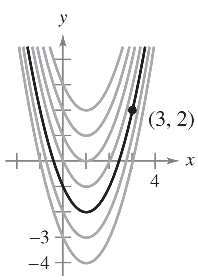


En los ejercicios 49 y 50, determinar la ecuación para *y*, dada la derivada y el punto indicado sobre la curva.

49. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 1$

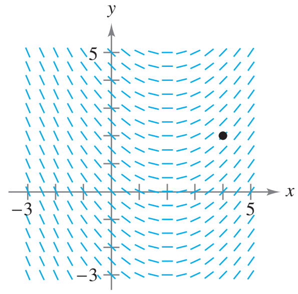


50. $\dfrac{dy}{dx} = 2(x - 1)$

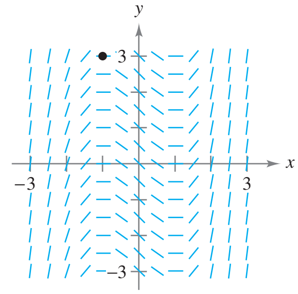


Campos de pendientes **En los ejercicios 51 a 54, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. Un *campo de pendientes* (*o campo de direcciones*) está compuesto por segmentos de recta con pendientes dadas por la ecuación diferencial. Estos segmentos de recta proporcionan una perspectiva visual de las pendientes de las soluciones de la ecuación diferencial. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pasa por el punto indicado. *b*) Utilizar la integración para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representar la solución. Comparar el resultado con los dibujos del apartado *a*).**

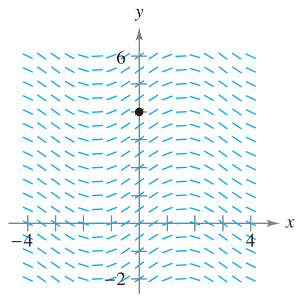
51. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x - 1, \quad (4, 2)$



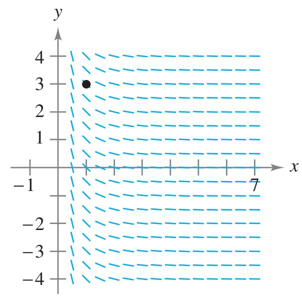
52. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 1, \quad (-1, 3)$



53. $\dfrac{dy}{dx} = \cos x, (0, 4)$



54. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}, x > 0, (1, 3)$



Campos de pendientes **En los ejercicios 55 y 56, *a*) utilizar una herramienta de graficación para representar un campo de pendientes para la ecuación diferencial, *b*) utilizar la integración y el punto indicado para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y *c*) hacer la gráfica de la solución y el campo de pendientes.**

55. $\dfrac{dy}{dx} = 2x, (-2, -2)$

56. $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{x}, (4, 12)$

En los ejercicios 57 a 64, resolver la ecuación diferencial.

57. $f'(x) = 6x, f(0) = 8$

58. $g'(x) = 6x^2, g(0) = -1$

59. $h'(t) = 8t^3 + 5, h(1) = -4$

60. $f'(s) = 10s - 12s^3, f(3) = 2$

61. $f''(x) = 2,\ f'(2) = 5,\ f(2) = 10$

62. $f''(x) = x^2,\ f'(0) = 8,\ f(0) = 4$

63. $f''(x) = x^{-3/2},\ f'(4) = 2,\ f(0) = 0$

64. $f''(x) = \operatorname{sen} x,\ f'(0) = 1,\ f(0) = 6$

65. ***Crecimiento de árboles*** Un vivero de plantas verdes suele vender cierto arbusto después de 6 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 6 años es, aproximadamente, $dh/dt = 1.5t + 5$, donde t es el tiempo en años y h es la altura en centímetros. Las plantas de semillero miden 12 centímetros de altura cuando se plantan ($t = 0$).

a) Determinar la altura después de t años.

b) ¿Qué altura tienen los arbustos cuando se venden?

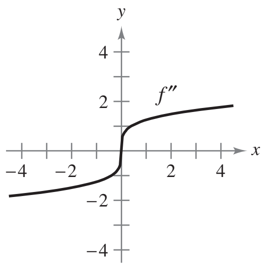
66. ***Crecimiento de población*** La tasa de crecimiento dP/dt de una población de bacterias es proporcional a la raíz cuadrada de t, donde P es el tamaño de la población y t es el tiempo en días $(0 \leq t \leq 10)$. Esto es, $dP/dt = k\sqrt{t}$. El tamaño inicial de la población es igual a 500. Después de un día la población ha crecido hasta 600. Estimar el tamaño de la población después de 7 días.

Desarrollo de conceptos

67. ¿Cuál es la diferencia, si existe, entre encontrar la antiderivada de $f(x)$ y evaluar la integral $\int f(x)\,dx$?

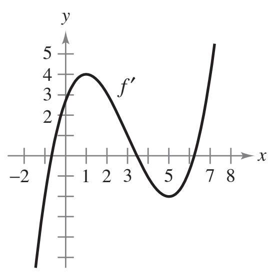
68. Considerar $f(x) = \tan^2 x$ y $g(x) = \sec^2 x$. ¿Qué se nota acerca de las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$? ¿Qué se puede concluir acerca de la relación entre $f(x)$ y $g(x)$?

69. Las gráficas de f y f' pasan a través del origen. Usar la gráfica de f'' mostrada en la figura para bosquejar la gráfica de f y f'.



Para discusión

70. Usar la gráfica de f' que se muestra en la figura para responder lo siguiente, dado que $f(0) = -4$.



a) Aproximar la pendiente de f en $x = 4$. Explicar.

b) ¿Es posible que $f(2) = -1$? Explicar.

c) ¿Es $f(5) - f(4) > 0$? Explicar.

d) Aproximar el valor de x donde f es máxima. Explicar.

e) Aproximar cualquier intervalo en el que la gráfica de f es cóncava hacia arriba y cualquier intervalo en el cual es cóncava hacia abajo. Aproximar la coordenada x a cualquier punto de inflexión.

f) Aproximar la coordenada x del mínimo de $f''(x)$.

g) Dibujar una gráfica aproximada de f.

Movimiento vertical **En los ejercicios 71 a 74, utilizar $a(t) = -32$ pies/s² como la aceleración debida a la gravedad. (Ignorar la resistencia al aire.)**

71. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde una altura de 6 pies con una velocidad inicial de 60 pies por segundo. ¿Qué altura alcanzará la pelota?

72. Mostrar que la altura a la que llega un objeto lanzado hacia arriba desde un punto s_0 pies a una velocidad inicial de v_0 por segundo está dada por la función

$$f(t) = -16t^2 + v_0 t + s_0.$$

73. ¿Con qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde el nivel del suelo) para alcanzar la parte superior del monumento a Washington (cerca de 550 pies)?

74. Un globo aerostático, que asciende verticalmente con una velocidad de 16 pies por segundo, deja caer una bolsa de arena en el instante en el que está a 64 pies sobre el suelo.

a) ¿En cuántos segundos llegará la bolsa al suelo?

b) ¿A qué velocidad hará contacto con el suelo?

Movimiento vertical **En los ejercicios 75 a 78, emplear $a(t) = -9.8$ m/s² como aceleración de la gravedad. (Ignorar la resistencia al aire.)**

75. Mostrar que la altura sobre el suelo de un objeto que se lanza hacia arriba desde un punto s_0 metros sobre el suelo a una velocidad inicial de v_0 metros por segundo está dada por la función

$$f(t) = -4.9t^2 + v_0 t + s_0.$$

76. El Gran Cañón tiene una profundidad de 1 800 metros en su punto más profundo. Se deja caer una roca desde el borde sobre ese punto. Escribir la altura de la roca como una función del tiempo t en segundos. ¿Cuánto tardará la roca en llegar al suelo del cañón?

77. Una pelota de beisbol es lanzada hacia arriba desde una altura de 2 metros con una velocidad inicial de 10 metros por segundo. Determinar su altura máxima.

78. ¿A qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde una altura de 2 metros) para que alcance una altura máxima de 200 metros?

79. ***Gravedad lunar*** Sobre la Luna, la aceleración de la gravedad es de -1.6 m/s². En la Luna se deja caer una piedra desde un peñasco y golpea la superficie de esta misma 20 segundos después. ¿Desde qué altura cayó? ¿Cuál era su velocidad en el momento del impacto?

80. ***Velocidad de escape*** La velocidad mínima que se requiere para que un objeto escape de su atracción gravitatoria se obtiene a partir de la solución de la ecuación

$$\int v\,dv = -GM\int \frac{1}{y^2}\,dy$$

donde v es la velocidad del objeto lanzado desde la Tierra, y es la distancia desde el centro terrestre, G es la constante de la gravitación y M es la masa de la Tierra. Demostrar que v y y están relacionados por la ecuación

$$v^2 = v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)$$

donde v_0 es la velocidad inicial del objeto y R es el radio terrestre.

Movimiento rectilíneo **En los ejercicios 81 a 84, considerar una partícula que se mueve a lo largo del eje x, donde $x(t)$ es la posición de la partícula en el tiempo t, $x'(t)$ su velocidad y $x''(t)$ su aceleración.**

81. $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 2, \quad 0 \le t \le 5$

a) Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula.

b) Encontrar los intervalos abiertos de t en los cuales la partícula se mueve hacia la derecha.

c) Encontrar la velocidad de la partícula cuando la aceleración es 0.

82. Repetir el ejercicio 81 para la función posición

$x(t) = (t - 1)(t - 3)^2, \quad 0 \le t \le 5$

83. Una partícula se mueve a lo largo del eje x a una velocidad de $v(t) = 1/\sqrt{t}$, $t > 0$. En el tiempo $t = 1$, su posición es $x = 4$. Encontrar las funciones posición y la aceleración de la partícula.

84. Una partícula, inicialmente en reposo, se mueve a lo largo del eje x de manera que su aceleración en el tiempo $t > 0$ está dada por $a(t) = \cos t$. En el tiempo $t = 0$, su posición es $x = 3$.

a) Determinar las funciones velocidad y la posición de la partícula.

b) Encontrar los valores de t para los cuales la partícula está en reposo.

85. ***Aceleración*** El fabricante de un automóvil indica en su publicidad que el vehículo tarda 13 segundos en acelerar desde 25 kilómetros por hora hasta 80 kilómetros por hora. Suponiendo aceleración constante, calcular lo siguiente.

a) La aceleración en m/s^2.

b) La distancia que recorre el automóvil durante los 13 segundos.

86. ***Desaceleración*** Un automóvil que viaja a 45 millas por hora recorre 132 pies, a desaceleración constante, luego de que se aplican los frenos para detenerlo.

a) ¿Qué distancia recorre el automóvil cuando su velocidad se reduce a 30 millas por hora?

b) ¿Qué distancia recorre el automóvil cuando su velocidad se reduce a 15 millas por hora?

c) Dibujar la recta de números reales desde 0 hasta 132 y hacer la gráfica de los puntos que se encontraron en los apartados *a*) y *b*). ¿Qué se puede concluir?

87. ***Aceleración*** En el instante en que la luz de un semáforo se pone en verde, un automóvil que ha estado esperando en un crucero empieza a moverse con una aceleración constante de 6 pies/s^2. En el mismo instante, un camión que viaja a una velocidad constante de 30 pies por segundo rebasa al automóvil.

a) ¿A qué distancia del punto de inicio el automóvil rebasará al camión?

b) ¿A qué velocidad circulará el automóvil cuando rebase al camión?

88. ***Aceleración*** Suponer que un avión totalmente cargado que parte desde el reposo tiene una aceleración constante mientras se mueve por la pista. El avión requiere 0.7 millas de pista y una velocidad de 160 millas por hora para despegar. ¿Cuál es la aceleración del avión?

89. ***Separación de aviones*** Dos aviones están en un patrón de aterrizaje de línea recta y, de acuerdo con las regulaciones de la FAA, debe mantener por lo menos una separación de 3 millas. El avión A está a 10 millas de su descenso y gradualmente reduce su velocidad desde 150 millas por hora hasta la velocidad de aterrizaje de 100 millas por hora. El avión B se encuentra a 17 millas del descenso y reduce su velocidad de manera gradual desde 250 millas por hora hasta una velocidad de aterrizaje de 115 millas por hora.

a) Asumiendo que la desaceleración de cada avión es constante, determinar las condiciones de la posición s_A y s_B para el avión A y el avión B. Dejar que $t = 0$ represente los tiempos en los que los aviones están a 10 y 17 millas del aeropuerto.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar las funciones de la posición.

c) Encontrar una fórmula para la magnitud de la distancia d entre los dos aviones como una función de t. Utilizar una herramienta de graficación para representar d. ¿Es $d < 3$ durante algún momento previo al aterrizaje del avión A? Si es así, determinar ese tiempo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 90 a 95, determinar si el enunciado es falso o verdadero. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

90. Cada antiderivada o primitiva de una función polinomial de n grados es una función polinomial de grado $(n + 1)$.

91. Si $p(x)$ es una función polinomial, entonces p tiene exactamente una antiderivada o primitiva cuya gráfica contiene al origen.

92. Si $F(x)$ y $G(x)$ son antiderivadas o primitivas de $f(x)$, entonces $F(x) = G(x) + C$.

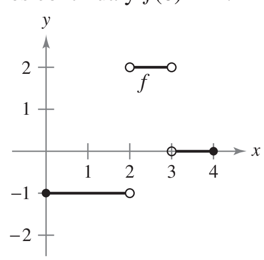
93. Si $f'(x) = g(x)$ entonces $\int g(x)\,dx = f(x) + C$.

94. $\int f(x)g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \int g(x)\,dx$.

95. La antiderivada o primitiva de $f(x)$ es única.

96. Encontrar una función f tal que la gráfica de ésta tenga una tangente horizontal en $(2, 0)$ y $f''(x) = 2x$.

97. Se muestra la gráfica de f'. Dibujar la gráfica de f dado que f es continua y $f(0) = 1$.



98. Si $f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 2 \\ 3x, & 2 \le x \le 5 \end{cases}$, f es continua y $f(1) = 3$, determinar f. ¿Es f diferenciable en $x = 2$?

99. Sean $s(x)$ y $c(x)$ dos funciones que satisfacen $s'(x) = c(x)$ y $c'(x) = -s(x)$ para todo x. Si $s(0) = 0$ y $c(0) = 1$, demostrar que $[s(x)]^2 + [c(x)]^2 = 1$.

Preparación del examen Putnam

100. Suponer que f y g son funciones no constantes, derivables y de valores reales en R. Además, suponer que para cada par de números reales x y y, $f(x + y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$ y $g(x + y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$. Si $f'(0) = 0$, probar que $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ para todo x.

4.2 Área

- **Emplear la notación sigma para escribir y calcular una suma.**
- **Entender el concepto de área.**
- **Aproximar el área de una región plana.**
- **Determinar el área de una región plana usando límites.**

Notación sigma

En la sección anterior, se estudió la antiderivación. En ésta se considerará en forma adicional un problema que se presentó en la sección 1.1: el de encontrar el área de una región en el plano. A primera vista, estas dos ideas parecen no relacionarse, aunque se descubrirá en la sección 4.4 que se relacionan de manera estrecha por medio de un teorema muy importante conocido como el teorema fundamental del cálculo.

Esta sección se inicia introduciendo una notación concisa para sumas. Esta notación recibe el nombre de **notación sigma** debido a que utiliza la letra griega mayúscula sigma, $\sum$.

NOTACIÓN SIGMA

La suma de n términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se escribe como

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

donde i es el **índice de suma**, a_i es el ***i*-ésimo término** de la suma y los **límites superior e inferior de la suma** son n y 1.

NOTA Los límites superior e inferior de la suma han de ser constantes respecto al índice de suma. Sin embargo, el límite inferior no tiene por qué ser 1. Cualquier entero menor o igual al límite superior es legítimo.

EJEMPLO 1 Ejemplos con la notación sigma

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{5} (i + 1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

c) $\displaystyle\sum_{j=3}^{7} j^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(k^2 + 1) = \frac{1}{n}(1^2 + 1) + \frac{1}{n}(2^2 + 1) + \cdots + \frac{1}{n}(n^2 + 1)$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$

En los apartados *a*) y *b*), obsérvese que la misma suma puede representarse de maneras diferentes utilizando la notación sigma.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para una interpretación geométrica de las fórmulas de suma, ver el artículo "Looking at $\sum_{k=1}^{n} k$ y $\sum_{k=1}^{n} k^2$ Geometrically" de Eric Hegblom en *Mathematics Teacher*.

Aunque puede utilizarse cualquier variable como índice de suma, suele preferirse i, j y k. Nótese en el ejemplo 1 que el índice de suma no aparece en los términos de la suma desarrollada.

LA SUMA DE LOS PRIMEROS CIEN ENTEROS

El maestro de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) pidió a sus alumnos que sumaran todos los enteros desde 1 hasta 100. Cuando Gauss regresó con la respuesta correcta muy poco tiempo después, el maestro no pudo evitar mirarle atónito. Lo siguiente fue lo que hizo Gauss:

$$\begin{array}{rcrcrcccr} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 \end{array}$$

$$\frac{100 \times 101}{2} = 5\,050$$

Esto se generaliza por medio del teorema 4.2, donde

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100(101)}{2} = 5\,050.$$

Las siguientes propiedades de la suma empleando la notación sigma se deducen de las propiedades asociativa y conmutativa de la suma y de la propiedad distributiva de la adición sobre la multiplicación. (En la primera propiedad, k es una constante.)

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

El siguiente teorema lista algunas fórmulas útiles para la suma de potencias. Una demostración de este teorema se incluye en el apéndice A.

TEOREMA 4.2 FÓRMULAS DE SUMA EMPLEANDO LA NOTACIÓN SIGMA

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = cn$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

EJEMPLO 2 Evaluación de una suma

Hallar $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2}$ para $n = 10, 100, 1\,000$ y $10\,000$.

Solución Al aplicar el teorema 4.2, es posible escribir

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i+1) \qquad \text{Factor constante } 1/n^2 \text{ fuera de la suma.}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) \qquad \text{Escribir como dos sumas.}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + n\right] \qquad \text{Aplicar el teorema 4.2.}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n^2+3n}{2}\right] \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= \frac{n+3}{2n}. \qquad \text{Simplificar.}$$

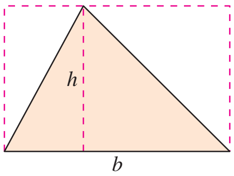
Después de esto se puede encontrar la suma sustituyendo los valores apropiados de n, como se muestra en la tabla de la izquierda.

n	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} = \frac{n+3}{2n}$
10	0.65000
100	0.51500
1 000	0.50150
10 000	0.50015

En la tabla, las sumas parecen tender a un límite conforme n aumenta. Aunque la discusión de límites en el infinito en la sección 3.5 se aplica a una variable de x, donde x puede ser cualquier número real, muchos de los resultados siguen siendo válidos cuando una variable n se restringe a valores enteros positivos. Así, para encontrar el límite de $(n + 3)/2n$ cuando n tiende a infinito, se puede escribir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n} + \frac{3}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2n}\right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

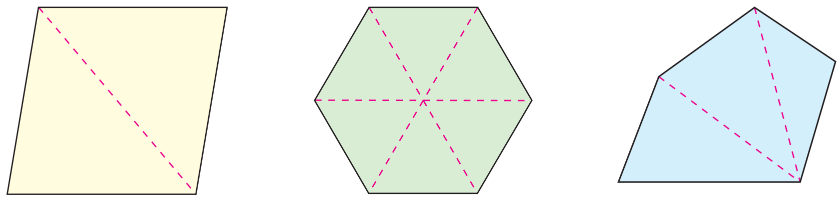
Área



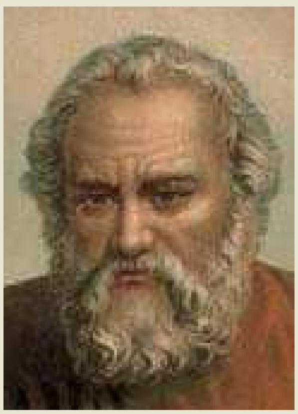
Triángulo: $A = \frac{1}{2}bh$
Figura 4.5

En la geometría euclideana, el tipo más simple de región plana es un rectángulo. Aunque la gente a menudo afirma que la *fórmula* para el área de un rectángulo es $A = bh$, resulta más apropiado decir que ésta es la *definición* del **área de un rectángulo**.

De esta definición, se pueden deducir fórmulas para áreas de muchas otras regiones planas. Por ejemplo, para determinar el área de un triángulo, se puede formar un rectángulo cuya área es dos veces la del triángulo, como se indica en la figura 4.5. Una vez que se sabe cómo encontrar el área de un triángulo, se puede determinar el área de cualquier polígono subdividiéndolo en regiones triangulares, como se ilustra en la figura 4.6.



Paralelogramo   Hexágono   Polígono
Figura 4.6



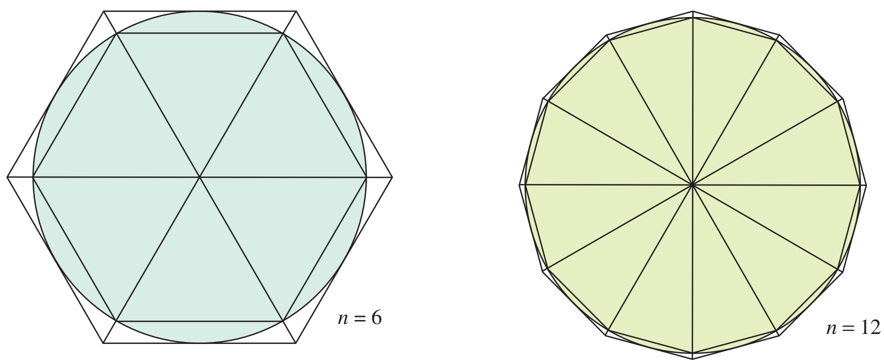
Mary Evans Picture Library

ARQUÍMEDES (287-212 A.C.)

Arquímedes utilizó el método de exhaución para deducir fórmulas para las áreas de elipses, segmentos parabólicos y sectores de una espiral. Se le considera como el más grande matemático aplicado de la antigüedad.

Hallar las áreas de regiones diferentes a las de los polígonos es más difícil. Los antiguos griegos fueron capaces de determinar fórmulas para las áreas de algunas regiones generales (principalmente aquellas delimitadas por cónicas) mediante el método de *exhaución*. La descripción más clara de este método la hizo Arquímedes. En esencia, el método es un proceso de límite en el que el área se encierra entre dos polígonos (uno inscrito en la región y otro circunscrito alrededor de la región).

Por ejemplo, en la figura 4.7 el área de una región circular se aproxima mediante un polígono inscrito de n lados y un polígono circunscrito de n lados. Para cada valor de n el área del polígono inscrito es menor que el área del círculo, y el área del polígono circunscrito es mayor que el área del círculo. Además, a medida que n aumenta, las áreas de ambos polígonos van siendo cada vez mejores aproximaciones al área del círculo.



El método de exhaución para determinar el área de una región circular
Figura 4.7

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para un desarrollo alternativo de la fórmula para el área de un círculo, ver el artículo "Proof Whitout Words: Area of a Disk is πR^2" de Russell Jay Hendel en *Mathematics Magazine*.

Un proceso similar al que usó Arquímedes para determinar el área de una región plana se usa en los ejemplos restantes en esta sección.

El área de una región plana

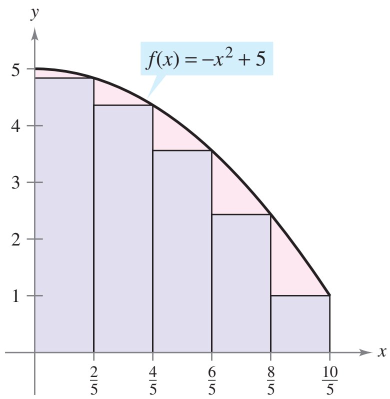
Recordar de la sección 1.1 que los orígenes del cálculo están relacionados con dos problemas clásicos: el problema de la recta tangente y el problema del área. En el ejemplo 3 se inicia la investigación del problema del área.

EJEMPLO 3 Aproximación del área de una región plana

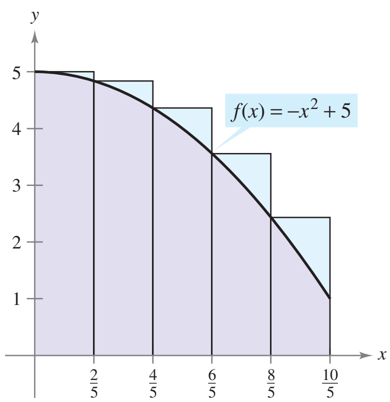
Emplear los cinco rectángulos de la figura 4.8*a*) y *b*) para determinar *dos* aproximaciones del área de la región que se encuentra entre la gráfica de

$$f(x) = -x^2 + 5$$

y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.



***a*)** El área de una región parabólica es mayor que el área de los rectángulos



***b*)** El área de la región parabólica es menor que el área de los rectángulos
Figura 4.8

Solución

***a*)** Los puntos terminales de la derecha de los cinco intervalos son $\frac{2}{5}i$, donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. El ancho de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$, y la altura de cada rectángulo se puede obtener al hallar f en el punto terminal derecho de cada intervalo.

$$\left[0, \frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right], \left[\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right], \left[\frac{8}{5}, \frac{10}{5}\right]$$

Evaluar f en los puntos terminales de la derecha de estos intervalos.

La suma de las áreas de los cinco rectángulos es

$$\sum_{i=1}^{5} \underbrace{f\left(\frac{2i}{5}\right)}_{\text{Altura}} \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}_{\text{Ancho}} = \sum_{i=1}^{5} \left[-\left(\frac{2i}{5}\right)^2 + 5\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{162}{25} = 6.48.$$

Como cada uno de los cinco rectángulos se encuentra dentro de la región parabólica, se concluye que el área de la región parabólica es mayor que 6.48.

***b*)** Los puntos terminales izquierdos de los cinco intervalos son $\frac{2}{5}(i - 1)$, donde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. La anchura de cada rectángulo es $\frac{2}{5}$ y la altura de cada uno puede obtenerse evaluando f en el punto terminal izquierdo de cada intervalo. Por tanto, la suma es

$$\sum_{i=1}^{5} \underbrace{f\left(\frac{2i-2}{5}\right)}_{\text{Altura}} \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}_{\text{Ancho}} = \sum_{i=1}^{5} \left[-\left(\frac{2i-2}{5}\right)^2 + 5\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{202}{25} = 8.08.$$

Debido a que la región parabólica se encuentra contenida en la unión de las cinco regiones rectangulares, es posible concluir que el área de la región parabólica es menor que 8.08.

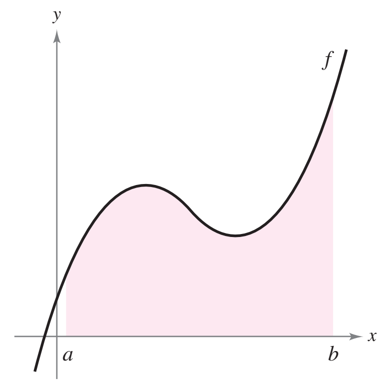
Combinando los resultados de los apartados *a*) y *b*), es posible concluir que

$$6.48 < (\text{Área de la región}) < 8.08.$$

NOTA Al incrementar el número de rectángulos utilizados en el ejemplo 3, se pueden obtener aproximaciones más y más cercanas al área de la región. Por ejemplo, al utilizar 25 rectángulos, cada uno de ancho $\frac{2}{25}$, puede concluirse que

$$7.17 < (\text{Área de la región}) < 7.49.$$

Sumas superior e inferior



La región bajo una curva
Figura 4.9

El procedimiento utilizado en el ejemplo 3 puede generalizarse de la manera siguiente. Considerar una región plana limitada en su parte superior por la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, como se muestra en la figura 4.9. La región está limitada en su parte inferior por el eje x y las fronteras izquierda y derecha por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

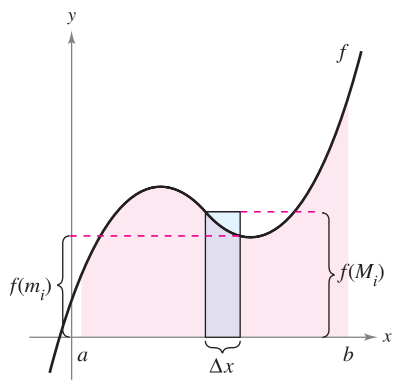
Para aproximar el área de la región, se empieza subdividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = (b - a)/n$ como se muestra en la figura 4.10. Los puntos terminales de los intervalos son los siguientes.

$$\overbrace{a + 0(\Delta x)}^{a = x_0} < \overbrace{a + 1(\Delta x)}^{x_1} < \overbrace{a + 2(\Delta x)}^{x_2} < \cdot \cdot \cdot < \overbrace{a + n(\Delta x)}^{x_n = b}$$

Como f es continua, el teorema del valor extremo garantiza la existencia de un valor mínimo y uno máximo de $f(x)$ en *cada* subintervalo.

$f(m_i) =$ valor mínimo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo

$f(M_i) =$ valor máximo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo



El intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos de ancho $\Delta x = \dfrac{b - a}{n}$
Figura 4.10

A continuación, se define un **rectángulo inscrito** que se encuentra *dentro* de la i-ésima subregión y un **rectángulo circunscrito** que se extiende *fuera* de la i-ésima región. La altura del i-ésimo rectángulo inscrito es $f(m_i)$ y la altura del i-ésimo rectángulo circunscrito es $f(M_i)$. Para *cada* i, el área del rectángulo inscrito es menor que o igual que el área del rectángulo circunscrito.

$$\begin{pmatrix}\text{Área del rectángulo}\\ \text{inscrito}\end{pmatrix} = f(m_i)\,\Delta x \leq f(M_i)\,\Delta x = \begin{pmatrix}\text{Área del rectángulo}\\ \text{circunscrito}\end{pmatrix}$$

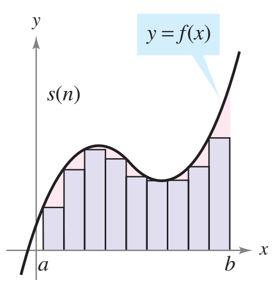
La suma de las áreas de los rectángulos inscritos recibe el nombre de **suma inferior**, y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos se conoce como **suma superior**.

$$\text{Suma inferior} = s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x \qquad \text{Área de rectángulos inscritos.}$$

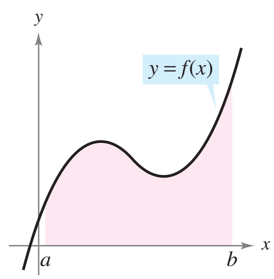
$$\text{Suma superior} = S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x \qquad \text{Área de rectángulos circunscritos.}$$

En la figura 4.11, se puede observar que la suma inferior $s(n)$ es menor o igual que la suma superior $S(n)$. Además, el área real de la región se encuentra entre estas dos sumas.

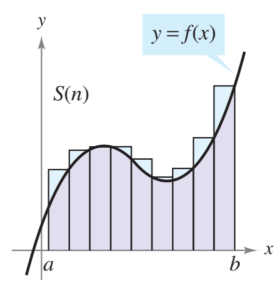
$$s(n) \leq (\text{Área de región}) \leq S(n)$$



El área de los rectángulos inscritos es menor que el área de la región



Área de la región



El área de los rectángulos circunscritos es mayor que el área de la región

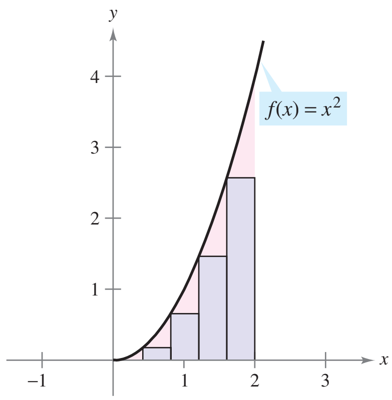
Figura 4.11

EJEMPLO 4 Hallar las sumas superior e inferior de una región

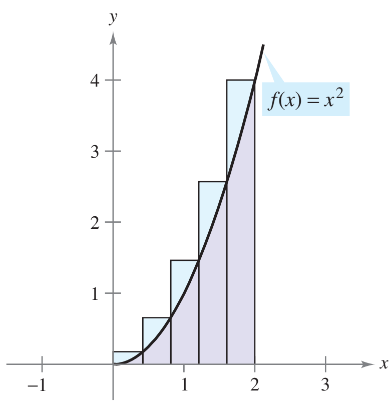
Determinar la suma superior e inferior de la región delimitada por la gráfica de $f(x) = x^2$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.

Solución Para empezar, se divide el intervalo [0, 2] en n subintervalos, cada uno de ancho

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}.$$



Rectángulos inscritos



Rectángulos circunscritos
Figura 4.12

La figura 4.12 muestra los puntos terminales de los subintervalos y varios de los rectángulos inscritos y circunscritos. Como f es creciente en el intervalo [0, 2], el valor mínimo en cada subintervalo ocurre en el punto terminal izquierdo, y el valor máximo ocurre en el punto terminal derecho.

Puntos terminales izquierdos

$$m_i = 0 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2(i-1)}{n}$$

Puntos terminales derechos

$$M_i = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n}$$

Utilizando los puntos terminales izquierdos, la suma inferior es

$$\begin{aligned}
s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} f\left[\frac{2(i-1)}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2(i-1)}{n}\right]^2\left(\frac{2}{n}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8}{n^3}\right)(i^2 - 2i + 1)\\
&= \frac{8}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)\\
&= \frac{8}{n^3}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n\right\}\\
&= \frac{4}{3n^3}(2n^3 - 3n^2 + n)\\
&= \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}. \qquad \text{Suma inferior.}
\end{aligned}$$

Empleando los puntos terminales derechos, la suma superior es

$$\begin{aligned}
S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8}{n^3}\right)i^2\\
&= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\\
&= \frac{4}{3n^3}(2n^3 + 3n^2 + n)\\
&= \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}. \qquad \text{Suma superior.}
\end{aligned}$$

EXPLORACIÓN

Para la región dada en el ejemplo 4, calcular la suma inferior

$$s(n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

y la suma superior

$$S(n) = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

para $n = 10$ 100 y 1 000. Utilizar los resultados para determinar el área de la región.

El ejemplo 4 ilustra algunos aspectos importantes acerca de las sumas inferior y superior. Primero, advertir que para cualquier valor de n, la suma inferior es menor (o igual) que la suma superior.

$$s(n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} < \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} = S(n)$$

Segundo, la diferencia entre estas dos sumas disminuye cuando n aumenta. De hecho, si se toman los límites cuando $n \to \infty$, tanto en la suma superior como en la suma inferior se aproximan a $\frac{8}{3}$.

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3} \qquad \text{Límite de la suma inferior.}$$

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3} \qquad \text{Límite de la suma superior.}$$

El siguiente teorema muestra que la equivalencia de los límites (cuando $n \to \infty$) de las sumas superior e inferior no es una mera coincidencia. Este teorema es válido para toda función continua no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$. La demostración de este teorema es más adecuada para un curso de cálculo avanzado.

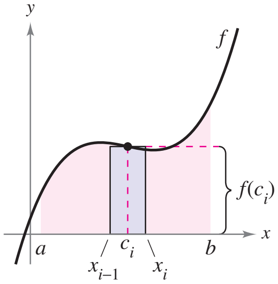
TEOREMA 4.3 LÍMITES DE LAS SUMAS SUPERIOR E INFERIOR

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. Los límites cuando $n \to \infty$ de las sumas inferior y superior existen y son iguales entre sí. Esto es

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s(n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} S(n)\end{aligned}$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $f(m_i)$ y $f(M_i)$ son los valores mínimo y máximo de f en el subintervalo.

Debido a que se alcanza el mismo límite tanto con el valor mínimo $f(m_i)$ como con el valor máximo $f(M_i)$, se sigue a partir del teorema del encaje o del emparedado (teorema 1.8) que la elección de x en el i-ésimo intervalo no afecta al límite. Esto significa que se está en libertad de elegir cualquier valor de x *arbitrario* en el i-ésimo subintervalo, como en la siguiente *definición del área de una región en el plano*.



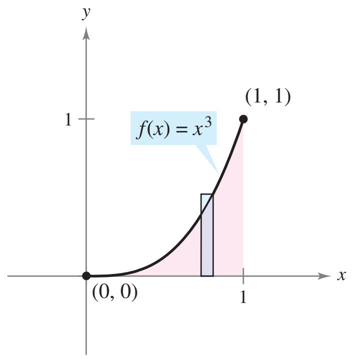
El ancho del i-ésimo subintervalo es $\Delta x = x_i - x_{i-1}$
Figura 4.13

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL PLANO

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ (ver la figura 4.13).



El área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = 0$ y $x = 1$ es $\frac{1}{4}$
Figura 4.14

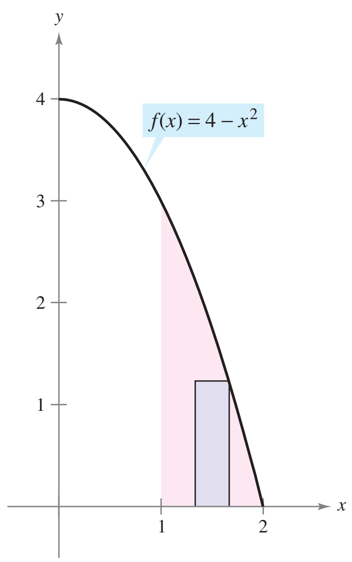
EJEMPLO 5 Hallar el área mediante la definición de límite

Encontrar el área de la región limitada por la gráfica $f(x) = x^3$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$, como se muestra en la figura 4.14.

Solución Se empieza notando que f es continua y no negativa en el intervalo $[0, 1]$. Después, se divide el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = 1/n$. De acuerdo con la definición de área, elegir cualquier valor de x en el i-ésimo subintervalo. En este ejemplo, los puntos terminales derechos $c_i = i/n$ resultan adecuados.

$$\begin{aligned}
\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{Puntos terminales derechos: } c_i = \frac{i}{n}. \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

El área de la región es $\frac{1}{4}$.



El área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = 1$ y $x = 2$ es $\frac{5}{3}$
Figura 4.15

EJEMPLO 6 Hallar el área mediante la definición de límite

Determinar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$, el eje x y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$, como se indica en la figura 4.15.

Solución La función f es continua y no negativa en el intervalo $[1, 2]$, y de tal modo se empieza dividiendo el intervalo en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = 1/n$. Eligiendo el punto terminal derecho

$$c_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{i}{n} \qquad \text{Puntos terminales derechos.}$$

de cada subintervalo, se obtiene

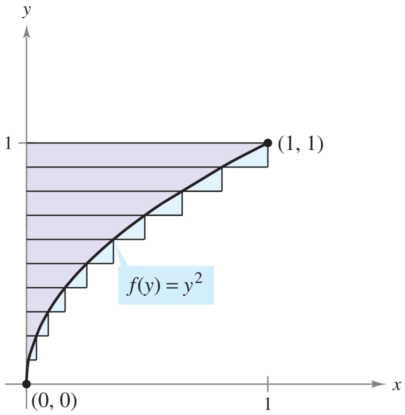
$$\begin{aligned}
\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[4 - \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2\right]\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{2i}{n} - \frac{i^2}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 3 - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[3 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right] \\
&= 3 - 1 - \frac{1}{3} \\
&= \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

El área de la región es $\frac{5}{3}$.

El último ejemplo en esta sección considera una región limitada por el eje y (en vez del eje x).

EJEMPLO 7 Una región limitada por el eje y

Encontrar el área de la región limitada por la gráfica de $f(y) = y^2$ y el eje y para $0 \le y \le 1$, como se muestra en la figura 4.16.



El área de la región acotada por la gráfica de f, el eje y para $0 \le y \le 1$ es $\frac{1}{3}$
Figura 4.16

Solución Cuando f es una función continua y no negativa de y, puede seguirse utilizando el mismo procedimiento básico que se ilustró en los ejemplos 5 y 6. Se empieza dividiendo el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta y = 1/n$. Después utilizando los puntos terminales superiores $c_i = i/n$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta y &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{Puntos terminales superiores: } c_i = \frac{i}{n}.\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

El área de la región es $\frac{1}{3}$.

4.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, encontrar la suma. Usar la función de suma de la herramienta de graficación para verificar el resultado.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} (3i + 2)$
2. $\displaystyle\sum_{k=5}^{8} k(k - 4)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k^2 + 1}$
4. $\displaystyle\sum_{j=4}^{7} \frac{2}{j}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} c$
6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} [(i - 1)^2 + (i + 1)^3]$

En los ejercicios 7 a 14, utilizar la notación sigma para escribir la suma.

7. $\dfrac{1}{5(1)} + \dfrac{1}{5(2)} + \dfrac{1}{5(3)} + \cdots + \dfrac{1}{5(11)}$
8. $\dfrac{9}{1+1} + \dfrac{9}{1+2} + \dfrac{9}{1+3} + \cdots + \dfrac{9}{1+14}$
9. $\left[7\left(\frac{1}{6}\right) + 5\right] + \left[7\left(\frac{2}{6}\right) + 5\right] + \cdots + \left[7\left(\frac{6}{6}\right) + 5\right]$
10. $\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] + \left[1 - \left(\frac{2}{4}\right)^2\right] + \cdots + \left[1 - \left(\frac{4}{4}\right)^2\right]$
11. $\left[\left(\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{2}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left[\left(\frac{2n}{n}\right)^3 - \frac{2n}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right)$
12. $\left[1 - \left(\frac{2}{n} - 1\right)^2\right]\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left[1 - \left(\frac{2n}{n} - 1\right)^2\right]\left(\frac{2}{n}\right)$
13. $\left[2\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + \left[2\left(1 + \frac{3n}{n}\right)^2\right]\left(\frac{3}{n}\right)$
14. $\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{0}{n}\right)^2} + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$

En los ejercicios 15 a 22, utilizar las propiedades de la notación sigma y el teorema 4.2 para calcular la suma. Utilizar la función de suma de la herramienta de graficación para verificar el resultado.

15. $\displaystyle\sum_{i=1}^{12} 7$
16. $\displaystyle\sum_{i=1}^{30} -18$
17. $\displaystyle\sum_{i=1}^{24} 4i$
18. $\displaystyle\sum_{i=1}^{16} (5i - 4)$
19. $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} (i - 1)^2$
20. $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} (i^2 - 1)$
21. $\displaystyle\sum_{i=1}^{15} i(i - 1)^2$
22. $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} i(i^2 + 1)$

En los ejercicios 23 y 24, usar la función de suma de una herramienta de graficación para evaluar la suma. Después emplear las propiedades de la notación sigma y el teorema 4.2 para verificar la suma.

23. $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} (i^2 + 3)$
24. $\displaystyle\sum_{i=1}^{15} (i^3 - 2i)$

25. Considerar la función $f(x) = 3x + 2$.

a) Estimar el área entre la gráfica de f y el eje x entre $x = 0$ y $x = 3$ usando seis rectángulos y puntos terminales derechos. Dibujar la gráfica y los rectángulos.

b) Repetir el apartado *a*) usando puntos terminales izquierdos.

26. Considerar la función $g(x) = x^2 + x - 4$.

a) Estimar el área entre la gráfica de g y el eje x entre $x = 2$ y $x = 4$, usando rectángulos y puntos terminales derechos. Bosquejar la gráfica y los rectángulos.

b) Repetir el apartado *a*) usando puntos terminales izquierdos.

En los ejercicios 27 a 32, usar los puntos terminales izquierdo y derecho y el número de rectángulos dado para encontrar dos aproximaciones del área de la región entre la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo dado.

27. $f(x) = 2x + 5$, $[0, 2]$, 4 rectángulos

28. $f(x) = 9 - x$, $[2, 4]$, 6 rectángulos

29. $g(x) = 2x^2 - x - 1$, $[2, 5]$, 6 rectángulos

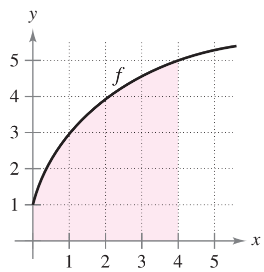
30. $g(x) = x^2 + 1$, $[1, 3]$, 8 rectángulos

31. $f(x) = \cos x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 4 rectángulos

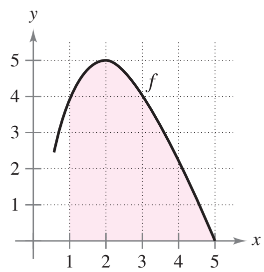
32. $g(x) = \operatorname{sen} x$, $[0, \pi]$, 6 rectángulos

En los ejercicios 33 a 36, delimitar el área de la región sombreada aproximando las sumas superior e inferior. Emplear rectángulos de ancho 1.

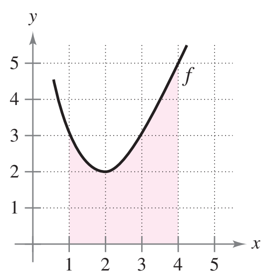
33.



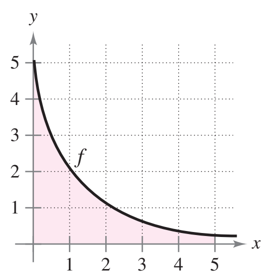
34.



35.



36.



En los ejercicios 37 a 40, encontrar el límite de $s(n)$ cuando $n \to \infty$.

37. $s(n) = \dfrac{81}{n^4}\left[\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

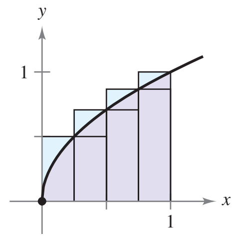
38. $s(n) = \dfrac{64}{n^3}\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

39. $s(n) = \dfrac{18}{n^2}\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

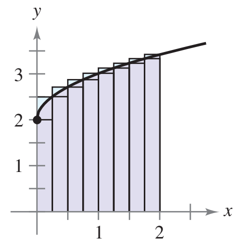
40. $s(n) = \dfrac{1}{n^2}\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

En los ejercicios 41 a 44, utilizar sumas superiores e inferiores para aproximar el área de la región empleando el número dado de subintervalos (de igual ancho).

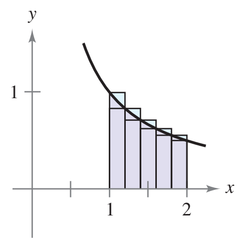
41. $y = \sqrt{x}$



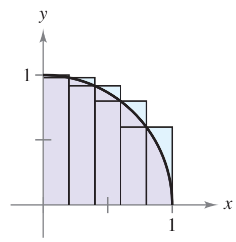
42. $y = \sqrt{x} + 2$



43. $y = \dfrac{1}{x}$



44. $y = \sqrt{1 - x^2}$



En los ejercicios 45 a 48, utilizar las fórmulas de suma con notación sigma para reescribir la expresión sin la notación sigma. Emplear el resultado para determinar la suma correspondiente a $n = 10$, 100, 1 000 y 10 000.

45. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{n^2}$

46. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{4j+3}{n^2}$

47. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6k(k-1)}{n^3}$

48. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2(i-1)}{n^4}$

En los ejercicios 49 a 54, encontrar una fórmula para la suma de los *n* términos. Emplear la fórmula para determinar el límite cuando $n \to \infty$.

49. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{24i}{n^2}$

50. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$

51. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3}(i-1)^2$

52. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$

53. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$

54. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}\right)$

55. ***Razonamiento numérico*** Considerar un triángulo de área 2 delimitado por las gráficas de $y = x$, $y = 0$ y $x = 2$.

a) Dibujar la región.

b) Dividir el intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos de igual ancho y demostrar que los puntos terminales son

$$0 < 1\left(\frac{2}{n}\right) < \cdots < (n-1)\left(\frac{2}{n}\right) < n\left(\frac{2}{n}\right).$$

c) Demostrar que $s(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[(i-1)\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$.

d) Demostrar que $S(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[i\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$.

e) Completar la tabla.

n	5	10	50	100
$s(n)$				
$S(n)$				

f) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} s(n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(n) = 2$.

56. ***Razonamiento numérico*** Considerar un trapezoide de área 4 delimitado por las gráficas de $y = x$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 3$.

a) Dibujar la región.

b) Dividir el intervalo $[1, 3]$ en n subintervalos de igual ancho y demostrar que los puntos terminales son

$$1 < 1 + 1\left(\frac{2}{n}\right) < \cdots < 1 + (n-1)\left(\frac{2}{n}\right) < 1 + n\left(\frac{2}{n}\right).$$

c) Demostrar que $s(n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left[1 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$.

d) Demostrar que $S(n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left[1 + i\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$.

e) Completar la tabla.

n	5	10	50	100
$s(n)$				
$S(n)$				

f) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} s(n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(n) = 4$.

En los ejercicios 57 a 66, utilizar el proceso de límite para encontrar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo indicado. Dibujar la región.

57. $y = -4x + 5, \quad [0, 1]$

58. $y = 3x - 2, \quad [2, 5]$

59. $y = x^2 + 2, \quad [0, 1]$

60. $y = x^2 + 1, \quad [0, 3]$

61. $y = 25 - x^2, \quad [1, 4]$

62. $y = 4 - x^2, \quad [-2, 2]$

63. $y = 27 - x^3, \quad [1, 3]$

64. $y = 2x - x^3, \quad [0, 1]$

65. $y = x^2 - x^3, \quad [-1, 1]$

66. $y = x^2 - x^3, \quad [-1, 0]$

En los ejercicios 67 a 72, emplear el proceso de límite para determinar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje *y* sobre el intervalo *y* indicado. Dibujar la región.

67. $f(y) = 4y,\ 0 \le y \le 2$

68. $g(y) = \frac{1}{2}y,\ 2 \le y \le 4$

69. $f(y) = y^2,\ 0 \le y \le 5$

70. $f(y) = 4y - y^2,\ 1 \le y \le 2$

71. $g(y) = 4y^2 - y^3,\ 1 \le y \le 3$

72. $h(y) = y^3 + 1,\ 1 \le y \le 2$

En los ejercicios 73 a 76, utilizar la *regla del punto medio*

$$\text{Área} \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x$$

con $n = 4$ para aproximar el área de la región limitada por la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo dado.

73. $f(x) = x^2 + 3, \quad [0, 2]$

74. $f(x) = x^2 + 4x, \quad [0, 4]$

75. $f(x) = \tan x, \quad \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

76. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Programación **Escribir un programa para una herramienta de graficación con el fin de aproximar áreas utilizando la regla del punto medio. Suponer que la función es positiva sobre el intervalo dado y que los subintervalos son de igual ancho. En los ejercicios 77 a 80, emplear el programa para aproximar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo indicado, y completar la tabla.**

n	4	8	12	16	20
Área aproximada					

77. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$

78. $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 1}, \quad [2, 6]$

79. $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi x}{8}\right), \quad [1, 3]$

80. $f(x) = \cos\sqrt{x}, \quad [0, 2]$

Desarrollo de conceptos

Aproximación **En los ejercicios 81 y 82, determinar cuál es el mejor valor que aproxima el área de la región entre el eje *x* y la gráfica de la función sobre el intervalo indicado. (Realizar la elección con base en un dibujo de la región y no efectuando cálculos.)**

81. $f(x) = 4 - x^2, \quad [0, 2]$

a) -2 *b*) 6 *c*) 10 *d*) 3 *e*) 8

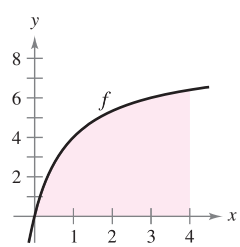
82. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{4}, \quad [0, 4]$

a) 3 *b*) 1 *c*) -2 *d*) 8 *e*) 6

83. Con sus propias palabras y utilizando las figuras adecuadas, describa los métodos de las sumas superior e inferior en la aproximación del área de una región.

84. Proporcionar la definición del área de una región en el plano.

85. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la región delimitada por la gráfica de $f(x) = \dfrac{8x}{x+1}$, $x = 0$, $x = 4$ y $y = 0$, como se muestra en la figura.



a) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos que representan a la suma inferior cuando $n = 4$. Encontrar esta suma inferior.

b) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos que representan la suma superior cuando $n = 4$. Determinar esta suma superior.

c) Redibujar la figura y trazar y sombrear los rectángulos cuyas alturas se determinan mediante los valores funcionales en el punto medio de cada subintervalo cuando $n = 4$. Determinar esta suma utilizando la regla del punto medio.

d) Verificar las siguientes fórmulas al aproximar el área de la región utilizando n subintervalos de igual ancho.

$$\text{Suma inferior: } s(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left[(i-1)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$$

$$\text{Suma superior: } S(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left[(i)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$$

$$\text{Regla del punto medio: } M(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{4}{n}\right]\left(\frac{4}{n}\right)$$

e) Utilizar una herramienta de graficación y las fórmulas del apartado *d*) para completar la tabla.

n	4	8	20	100	200
$s(n)$					
$S(n)$					
$M(n)$					

f) Explicar por qué $s(n)$ aumenta y $S(n)$ disminuye para valores recientes de n, como se muestra en la tabla en el apartado *e*).

Para discusión

86. Considerar una función $f(x)$ que se incrementa en el intervalo $[1, 4]$. El intervalo $[1, 4]$ está dividido en 12 subintervalos.

a) ¿Cuáles son los puntos terminales izquierdos del primer y último subintervalos?
b) ¿Cuáles son los puntos terminales derechos de los primeros dos subintervalos?
c) ¿Cuándo se usan los puntos terminales derechos, se trazan los rectángulos arriba o abajo de las gráficas de $f(x)$? Usar una gráfica para explicar su respuesta.
d) ¿Qué se puede concluir acerca de las alturas de los rectángulos si una función es constante en el intervalo dado?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 87 y 88, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

87. La suma de los primeros n enteros positivos es $n(n+1)/2$.

88. Si f es continua y no negativa en $[a, b]$, entonces los límites cuando $n \to \infty$ de su suma inferior $s(n)$ y de su suma superior $S(n)$ existen ambos y son iguales.

89. ***Comentario*** Utilizar la figura para escribir un pequeño párrafo donde se explique por qué la fórmula $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ es válida para todos los enteros positivos n.

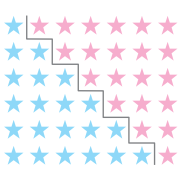


Figura para 89

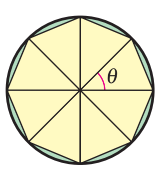


Figura para 90

90. ***Razonamiento gráfico*** Considerar un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio r. Unir los vértices del polígono al centro del círculo, formando n triángulos congruentes (ver la figura).

a) Determinar el ángulo central θ en términos de n.
b) Demostrar que el área de cada triángulo es $\frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen} \theta$.
c) Sea A_n la suma de las áreas de los n triángulos. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

91. ***Modelado matemático*** La tabla lista las mediciones de un terreno delimitado por un río y dos caminos rectos que se unen en ángulo recto, donde x y y se miden en pies (ver la figura).

x	0	50	100	150	200	250	300
y	450	362	305	268	245	156	0

a) Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
b) Emplear una herramienta de graficación para dibujar los datos y representar el modelo.
c) Recurrir al modelo del apartado *a*) para estimar el área del terreno.

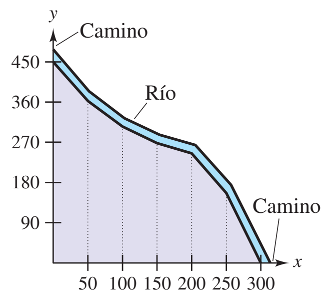
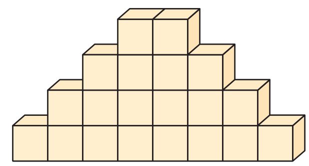


Figura para 91



n es par

Figura para 92

92. ***Bloques de construcción*** Un niño coloca n bloques cúbicos de construcción en una hilera para formar la base de un diseño triangular (ver la figura). Cada hilera sucesiva contiene dos bloques menos que la hilera precedente. Encontrar una fórmula para el número de bloques utilizados en el diseño. (*Sugerencia:* El número de bloques constitutivos en el diseño depende de si n es par o impar.)

93. Demostrar cada fórmula mediante inducción matemática. (Quizá se necesite revisar el método de prueba por inducción en un texto de precálculo.)

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$ *b*) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Preparación del examen Putnam

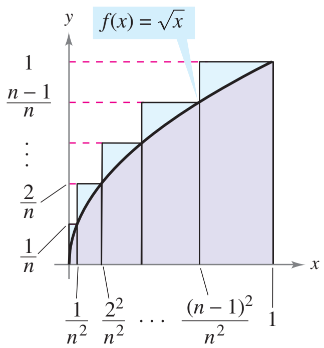
94. Un dardo, lanzado al azar, incide sobre un blanco cuadrado. Suponiendo que cualesquiera de las dos partes del blanco de igual área son igualmente probables de ser golpeadas por el dardo, encontrar la probabilidad de que el punto de incidencia sea más cercano al centro que a cualquier borde. Escribir la respuesta en la forma $\left(a\sqrt{b} + c\right)/d$, donde a, b, c y d son enteros positivos.

4.3 Sumas de Riemann e integrales definidas

- **Entender la definición de una suma de Riemann.**
- **Hallar una integral definida utilizando límites.**
- **Calcular una integral definida utilizando las propiedades de las integrales definidas.**

Sumas de Riemann

En la definición de área dada en la sección 4.2, las particiones tenían subintervalos de *igual ancho*. Esto se hizo sólo por conveniencia de cálculo. El siguiente ejemplo muestra que no es necesario tener subintervalos de igual ancho.



Los subintervalos no tienen anchos iguales
Figura 4.17

EJEMPLO 1 Una partición con subintervalos de anchos desiguales

Considerar la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ y el eje x para $0 \leq x \leq 1$, como se muestra en la figura 4.17. Hallar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

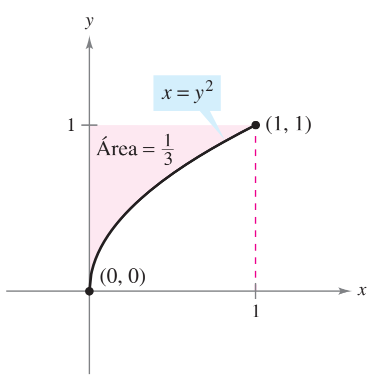
donde c_i es el punto terminal derecho de la partición dada por $c_i = i^2/n^2$ y Δx_i es el ancho del i-ésimo intervalo.

Solución El ancho del i-ésimo intervalo está dado por

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= \frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2}\\ &= \frac{i^2 - i^2 + 2i - 1}{n^2}\\ &= \frac{2i-1}{n^2}.\end{aligned}$$

De tal modo, el límite es

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i^2}{n^2}}\left(\frac{2i-1}{n^2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (2i^2 - i)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left[2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{n(n+1)}{2}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6n^3}\\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$



El área de la región acotada por la gráfica de $x = y^2$ y el eje y para $0 \leq y \leq 1$ es $\frac{1}{3}$
Figura 4.18

De acuerdo con el ejemplo 7 de la sección 4.2, se sabe que la región mostrada en la figura 4.18 tiene un área de $\frac{1}{3}$. Debido a que el cuadrado acotado por $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$ tiene un área de 1, puede concluirse que el área de la región que se muestra en la figura 4.17 tiene un área de $\frac{2}{3}$. Esto concuerda con el límite que se encontró en el ejemplo 1, aun cuando en ese ejemplo se utilizó una partición con subintervalos de anchos desiguales. La razón por la que esta partición particular da el área apropiada es que cuando n crece, el *ancho del subintervalo más grande tiende a cero*. Ésta es la característica clave del desarrollo de las integrales definidas.

GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866)

Riemann, matemático alemán, realizó su trabajo más notable en las áreas de geometría no euclidiana, ecuaciones diferenciales y la teoría de los números. Fueron los resultados de Riemann en física y matemáticas los que conformaron la estructura en la que se basa la teoría de la relatividad general de Einstein.

En la sección precedente, el límite de una suma se utilizó para definir el área de una región en el plano. La determinación del área por este medio es sólo una de las *muchas* aplicaciones que involucran el límite de una suma. Un enfoque similar puede utilizarse para determinar cantidades tan diversas como longitudes de arco, valores medios, centroides, volúmenes, trabajo y áreas de superficies. La siguiente definición honra el nombre de Georg Friedrich Bernhard Riemann. Aunque la integral definida se había utilizado ya con anterioridad, fue Riemann quien generalizó el concepto para cubrir una categoría más amplia de funciones.

En la definición siguiente de una suma de Riemann, notar que la función f no tiene otra restricción que haber sido definida en el intervalo $[a, b]$. (En la sección precedente, la función f se supuso continua y no negativa debido a que se trabajó con un área bajo una curva.)

DEFINICIÓN DE UNA SUMA DE RIEMANN

Sea f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea Δ una partición de $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_{n-1} < x_n = b$$

donde Δx_i es el ancho del i-ésimo subintervalo. Si c_i es *cualquier* punto en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

se denomina una **suma de Riemann** de f para la partición Δ.

NOTA Las sumas vistas en la sección 4.2 son ejemplos de las sumas de Riemann, pero hay sumas de Riemann más grandes que las que se mostraron ahí. ■

El ancho del subintervalo más grande de la partición Δ es la **norma** de la partición y se denota por medio de $\|\Delta\|$. Si todos los intervalos tienen la misma anchura, la partición es **regular** y la norma se denota mediante

$$\|\Delta\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}. \qquad \text{Partición ordinaria.}$$

En una partición general, la norma se relaciona con el número de subintervalos en $[a, b]$ de la siguiente manera.

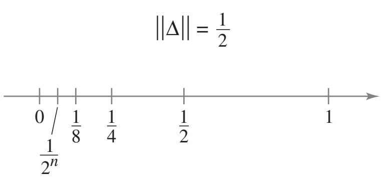
$$\frac{b-a}{\|\Delta\|} \le n \qquad \text{Partición general.}$$

De tal modo, el número de subintervalos en una partición tiende a infinito cuando la norma de la partición tiende a cero. Esto es $\|\Delta\| \to 0$ implica que $n \to \infty$.

La afirmación recíproca de este enunciado no es cierta. Por ejemplo, sea Δ_n la partición del intervalo [0, 1] dado por

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}} < \cdot \cdot \cdot < \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1.$$

Como se muestra en la figura 4.19, para cualquier valor positivo de n, la norma de la partición Δ_n es $\frac{1}{2}$. De tal modo, como al dejar que n tienda a infinito no obliga a que $\|\Delta\|$ se aproxime a 0. En una partición regular, sin embargo, los enunciados $\|\Delta\| \to 0$ y $n \to \infty$ son equivalentes.



$n \to \infty$ no implica que $\|\Delta\| \to 0$

Figura 4.19

Integrales definidas

Para definir la integral definida, considerar el siguiente límite.

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = L$$

Afirmar que este límite existe, significa que hay un número real L, tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para toda partición de $\|\Delta\| < \delta$ se sigue que

$$\left| L - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \right| < \varepsilon$$

a pesar de cualquier elección de c_i en el i-ésimo subintervalo de cada partición de Δ.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para obtener más información acerca de la historia de la integral definida, ver el artículo "The Evolution of Integration", de A. Shenitzer y J. Steprāns en *The American Mathematical Monthly*.

DEFINICIÓN DE UNA INTEGRAL DEFINIDA

Si f se define en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el límite de las sumas de Riemann sobre las particiones Δ

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

existe (como se describió antes), entonces f es **integrable** en $[a, b]$ y el límite se denota por

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

El límite recibe el nombre de **integral definida** de f de a a b. El número a es el **límite inferior** de integración, y el número b es el **límite superior** de integración.

No es coincidencia que la notación para las integrales definidas sea similar a la que se utilizó para las integrales indefinidas. Se verá la razón en la siguiente sección cuando se introduzca el teorema fundamental del cálculo. Por ahora es importante observar que las integrales definidas y las integrales indefinidas son identidades diferentes. Una integral definida es un *número*, en tanto que una integral indefinida es una *familia de funciones*.

A pesar de que las sumas de Riemann estaban definidas por funciones con muy pocas restricciones, una condición suficiente para que una función f sea integrable en $[a, b]$ es que sea continua en $[a, b]$. Una demostración de este teorema está más allá del objetivo de este texto.

AYUDA DE ESTUDIO Posteriormente en este capítulo, el lector aprenderá métodos convenientes para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ para funciones continuas. Por ahora, se debe usar la definición de límite.

TEOREMA 4.4 LA CONTINUIDAD IMPLICA INTEGRABILIDAD

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. Es decir, $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

EXPLORACIÓN

Converso del teorema 4.4 ¿Es verdadero el converso del teorema 4.4 ? Esto es, si una función es integrable, ¿tiene que ser continua? Explicar el razonamiento y proporcionar ejemplos.

Describir las relaciones entre continuidad, derivabilidad e integrabilidad. ¿Cuál es la condición más fuerte? ¿Cuál es la más débil? ¿Qué condiciones implican otras condiciones?

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral definida como límite

Hallar la integral definida $\int_{-2}^{1} 2x\, dx$.

Solución La función $f(x) = 2x$ es integrable en el intervalo $[-2, 1]$ porque es continua en $[-2, 1]$. Además, la definición de integrabilidad implica que cualquier partición cuya norma tienda a 0 puede utilizarse para determinar el límite. Por conveniencia computacional, definir Δ, subdividiendo $[-2, 1]$ en n subintervalos de la misma anchura.

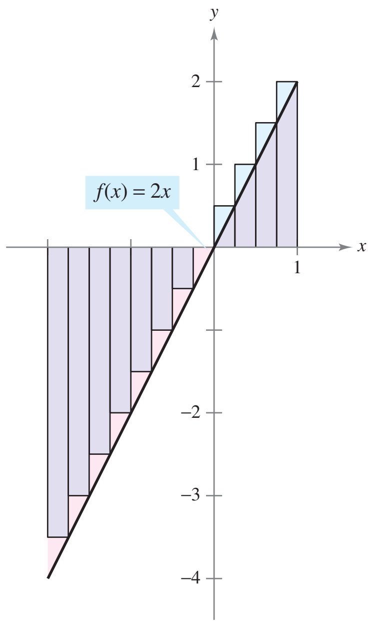
$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}.$$

Eligiendo c_i como el punto terminal derecho de cada subintervalo, se obtiene

$$c_i = a + i(\Delta x) = -2 + \frac{3i}{n}.$$

De este modo, la integral definida está dada por

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} 2x\, dx &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(-2 + \frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(-2 + \frac{3i}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left\{-2n + \frac{3}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(-12 + 9 + \frac{9}{n}\right) \\
&= -3.
\end{aligned}$$



Como la integral definida es negativa, no representa el área de la región
Figura 4.20

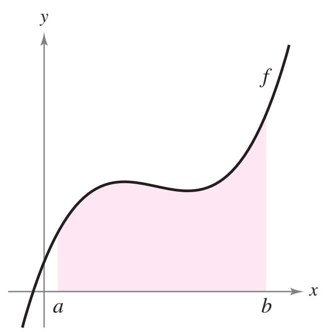
Debido a que la integral definida en el ejemplo 2 es negativa, ésta *no* representa el área de la región que se muestra en la figura 4.20. Las integrales definidas pueden ser positivas, negativas o cero. Para que una integral definida sea interpretada como un área (como se definió en la sección 4.2), la función f debe ser continua y no negativa en $[a, b]$, como se establece en el siguiente teorema. La demostración de este teorema es directa: utilizar simplemente la definición de área dada en la sección 4.2, porque es una suma de Riemann.

TEOREMA 4.5 LA INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA DE UNA REGIÓN

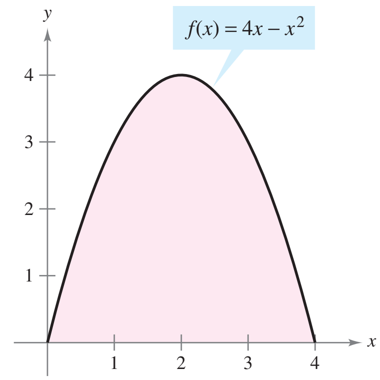
Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de f, del eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$\text{Área} = \int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

(Ver la figura 4.21.)



Se puede usar una integral definida para determinar el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = a$ y $x = b$
Figura 4.21



$$\text{Área} = \int_0^4 (4x - x^2)\, dx$$

Figura 4.22

Como un ejemplo del teorema 4.5, considerar la región delimitada por la gráfica de

$$f(x) = 4x - x^2$$

y el eje x, como se muestra en la figura 4.22. Debido a que f es continua y no negativa en el intervalo cerrado [0, 4], el área de la región es

$$\text{Área} = \int_0^4 (4x - x^2)\, dx$$

Una técnica directa para hallar una integral definida como ésta se analizará en la sección 4.4. Por ahora se puede calcular una integral definida de dos maneras: usando la definición en términos de límites o verificando si la integral definida representa el área de una región geométrica común, tal como un rectángulo, triángulo o semicírculo.

EJEMPLO 3 Áreas de figuras geométricas comunes

Dibujar la región correspondiente a cada integral definida. Evaluar después cada integral utilizando una fórmula geométrica.

a) $\displaystyle\int_1^3 4\, dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^3 (x + 2)\, dx$ ***c)*** $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

Solución Un dibujo de cada región se muestra en la figura 4.23.

a) Esta región es un rectángulo de 4 de alto por 2 de ancho.

$$\int_1^3 4\, dx = (\text{Área del rectángulo}) = 4(2) = 8$$

b) Esta región es un trapezoide con una altura de 3 y bases paralelas de longitudes 2 y 5. La fórmula para el área de un trapezoide es $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

$$\int_0^3 (x + 2)\, dx = (\text{Área del trapezoide}) = \frac{1}{2}(3)(2 + 5) = \frac{21}{2}$$

c) Esta región es un semicírculo de radio 2. La fórmula para el área de un semicírculo es $\frac{1}{2}\pi r^2$.

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = (\text{Área del semicírculo}) = \frac{1}{2}\pi(2^2) = 2\pi$$

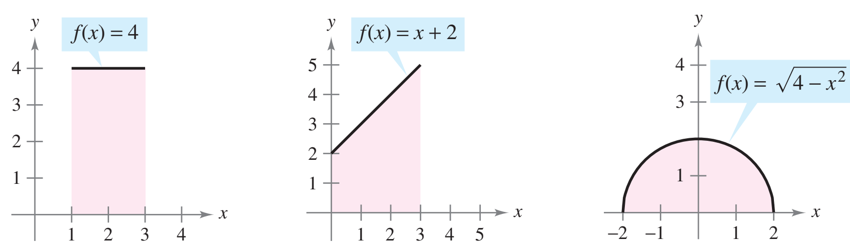
NOTA La variable de integración en una integral definida algunas veces se denomina como *variable muda* porque puede ser sustituida por cualquier otra variable sin cambiar el valor de la integral. Por ejemplo, las integrales definidas

$$\int_0^3 (x + 2)\, dx$$

y

$$\int_0^3 (t + 2)\, dt$$

tienen el mismo valor.



a) ***b)*** ***c)***

Figura 4.23

Propiedades de las integrales definidas

La definición de la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ especifica que $a < b$. Ahora, es conveniente, sin embargo, extender la definición para cubrir casos en los cuales $a = b$ o $a > b$. Geométricamente, las siguientes dos definiciones parecen razonables. Por ejemplo, tiene sentido definir el área de una región de ancho cero y altura finita igual a 0.

DEFINICIONES DE DOS INTEGRALES DEFINIDAS ESPECIALES

1. Si f está definida en $x = a$, entonces se define $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces se define $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

EJEMPLO 4 Cálculo de integrales definidas

a) Debido a que la función seno se define en $x = \pi$, y los límites superior e inferior de integración son iguales, puede decirse que

$$\int_\pi^\pi \operatorname{sen} x\,dx = 0.$$

b) La integral $\int_3^0 (x + 2)\,dx$ es la misma que la dada en el ejemplo 3*b* excepto por el hecho de que los límites superior e inferior se intercambian. Debido a que la integral en el ejemplo 3*b* tiene un valor de $\frac{21}{2}$, puede escribirse

$$\int_3^0 (x + 2)\,dx = -\int_0^3 (x + 2)\,dx = -\frac{21}{2}.$$

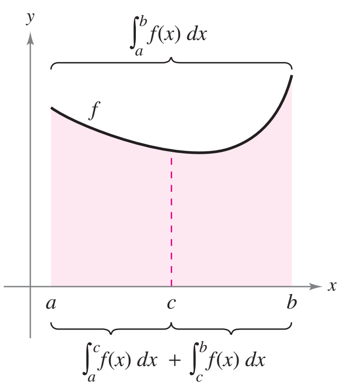


Figura 4.24

En la figura 4.24, la región más grande puede dividirse en $x = c$ en dos subregiones cuya intersección es un segmento de recta. Como el segmento de recta tiene área cero, se concluye que el área de la región más grande es igual a la suma de las áreas de las dos regiones más pequeñas.

TEOREMA 4.6 PROPIEDAD ADITIVA DE INTERVALOS

Si f es integrable en los tres intervalos cerrados determinados por a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

EJEMPLO 5 Empleo de la propiedad aditiva de intervalos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |x|\,dx &= \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^1 x\,dx && \text{Teorema 4.6.}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} && \text{Área del triángulo.}\\ &= 1\end{aligned}$$

Debido a que la integral definida se describe como el límite de una suma, hereda las propiedades de la suma dadas en la parte superior de la página 260.

TEOREMA 4.7 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y k es una constante, entonces las funciones kf y $f \pm g$ son integrables en $[a, b]$, y

1. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

Observar que la propiedad 2 del teorema 4.7 puede extenderse a cualquier número finito de funciones. Por ejemplo,

$$\int_a^b [f(x) + g(x) + h(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx.$$

EJEMPLO 6 Evaluación de una integral definida

Evaluar $\displaystyle\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx$ utilizando los siguientes valores.

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3}, \qquad \int_1^3 x\,dx = 4, \qquad \int_1^3 dx = 2$$

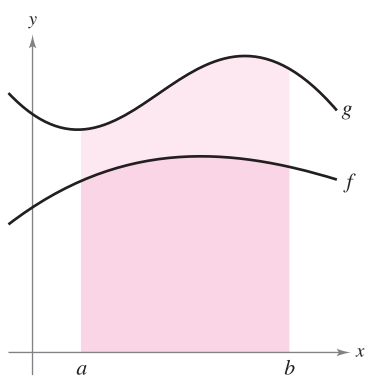
Solución

$$\begin{aligned}\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx &= \int_1^3 (-x^2)\,dx + \int_1^3 4x\,dx + \int_1^3 (-3)\,dx\\ &= -\int_1^3 x^2\,dx + 4\int_1^3 x\,dx - 3\int_1^3 dx\\ &= -\left(\frac{26}{3}\right) + 4(4) - 3(2)\\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Si f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

para $a \le x \le b$, las siguientes propiedades son ciertas. Primero, el área de la región acotada por la gráfica de f y el eje x (entre a y b) debe ser no negativa. Segundo, esta área debe ser menor o igual que el área de la región delimitada por la gráfica de g y el eje x (entre a y b), como se muestra en la figura 4.25. Estos dos resultados se generalizan en el teorema 4.8. (Una demostración de este teorema se presenta en el apéndice A.)



$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

Figura 4.25

TEOREMA 4.8 CONSERVACIÓN DE DESIGUALDADES

1. Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Si f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

4.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, utilizar el ejemplo 1 como modelo para evaluar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

sobre la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones.

1. $f(x) = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3$
(*Sugerencia:* Sea $c_i = 3i^2/n^2$.)
2. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$
(*Sugerencia:* Sea $c_i = i^3/n^3$.)

En los ejercicios 3 a 8, evaluar la integral definida mediante la definición de límite.

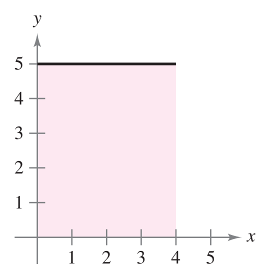
3. $\displaystyle\int_2^6 8\,dx$
4. $\displaystyle\int_{-2}^3 x\,dx$
5. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3\,dx$
6. $\displaystyle\int_1^4 4x^2\,dx$
7. $\displaystyle\int_1^2 (x^2 + 1)\,dx$
8. $\displaystyle\int_{-2}^1 (2x^2 + 3)\,dx$

En los ejercicios 9 a 12, escribir el límite como una integral definida en el intervalo $[a, b]$, donde c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo.

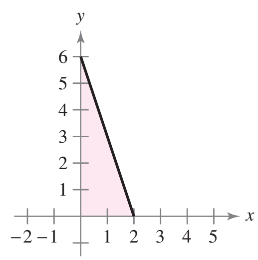
	Límite	*Intervalo*
9.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (3c_i + 10)\,\Delta x_i$	$[-1, 5]$
10.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 6c_i(4 - c_i)^2\,\Delta x_i$	$[0, 4]$
11.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_i^2 + 4}\,\Delta x_i$	$[0, 3]$
12.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{c_i^2}\right)\Delta x_i$	$[1, 3]$

En los ejercicios 13 a 22, formular una integral definida que produce el área de la región. (No evaluar la integral.)

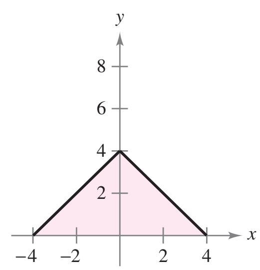
13. $f(x) = 5$



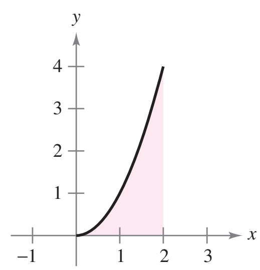
14. $f(x) = 6 - 3x$



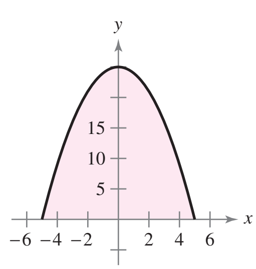
15. $f(x) = 4 - |x|$



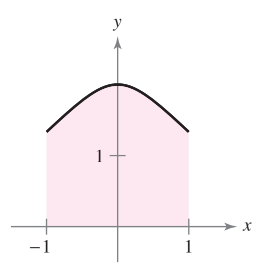
16. $f(x) = x^2$



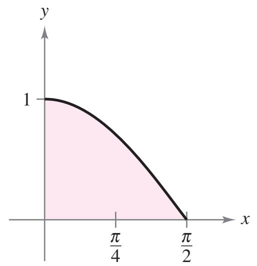
17. $f(x) = 25 - x^2$



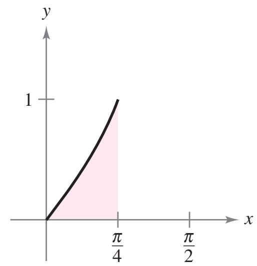
18. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 2}$



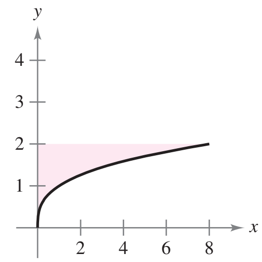
19. $f(x) = \cos x$



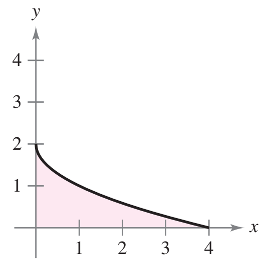
20. $f(x) = \tan x$



21. $g(y) = y^3$



22. $f(y) = (y - 2)^2$



En los ejercicios 23 a 32, dibujar la región cuya área está dada por la integral definida. Luego, usar una fórmula geométrica para evaluar la integral ($a > 0, r > 0$).

23. $\int_0^3 4\, dx$

24. $\int_{-a}^a 4\, dx$

25. $\int_0^4 x\, dx$

26. $\int_0^4 \frac{x}{2}\, dx$

27. $\int_0^2 (3x + 4)\, dx$

28. $\int_0^6 (6 - x)\, dx$

29. $\int_{-1}^1 (1 - |x|)\, dx$

30. $\int_{-a}^a (a - |x|)\, dx$

31. $\int_{-7}^7 \sqrt{49 - x^2}\, dx$

32. $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$

En los ejercicios 33 a 40, evaluar la integral utilizando los siguientes valores.

$$\int_2^4 x^3\, dx = 60, \qquad \int_2^4 x\, dx = 6, \qquad \int_2^4 dx = 2$$

33. $\int_4^2 x\, dx$

34. $\int_2^2 x^3\, dx$

35. $\int_2^4 8x\, dx$

36. $\int_2^4 25\, dx$

37. $\int_2^4 (x - 9)\, dx$

38. $\int_2^4 (x^3 + 4)\, dx$

39. $\int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x + 2\right) dx$

40. $\int_2^4 (10 + 4x - 3x^3)\, dx$

41. Dadas $\int_0^5 f(x)\, dx = 10$ y $\int_5^7 f(x)\, dx = 3$, hallar

a) $\int_0^7 f(x)\, dx.$ *b)* $\int_5^0 f(x)\, dx.$

c) $\int_5^5 f(x)\, dx.$ *d)* $\int_0^5 3f(x)\, dx.$

42. Dadas $\int_0^3 f(x)\, dx = 4$ y $\int_3^6 f(x)\, dx = -1$, hallar

a) $\int_0^6 f(x)\, dx.$ *b)* $\int_6^3 f(x)\, dx.$

c) $\int_3^3 f(x)\, dx.$ *d)* $\int_3^6 -5f(x)\, dx.$

43. Dadas $\int_2^6 f(x)\, dx = 10$ y $\int_2^6 g(x)\, dx = -2$, hallar

a) $\int_2^6 [f(x) + g(x)]\, dx.$ *b)* $\int_2^6 [g(x) - f(x)]\, dx.$

c) $\int_2^6 2g(x)\, dx.$ *d)* $\int_2^6 3f(x)\, dx.$

44. Dadas $\int_{-1}^1 f(x)\, dx = 0$ y $\int_0^1 f(x)\, dx = 5$, hallar

a) $\int_{-1}^0 f(x)\, dx.$ *b)* $\int_0^1 f(x)\, dx - \int_{-1}^0 f(x)\, dx.$

c) $\int_{-1}^1 3f(x)\, dx.$ *d)* $\int_0^1 3f(x)\, dx.$

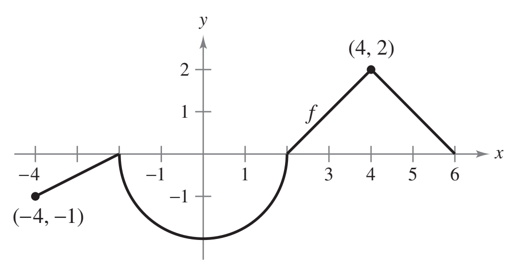
45. Utilizar la tabla de valores para determinar las estimaciones inferiores y superiores de $\int_0^{10} f(x)\, dx$. Suponer que f es una función decreciente.

x	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	32	24	12	-4	-20	-36

46. Utilizar la tabla de valores para estimar $\int_0^6 f(x)\, dx$. Utilizar tres subintervalos iguales y *a)* los puntos terminales izquierdos, *b)* los puntos terminales derechos y *c)* los puntos medios. Si f es una función creciente, ¿cómo se compara cada estimación con el valor real? Explicar el razonamiento.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-6	0	8	18	30	50	80

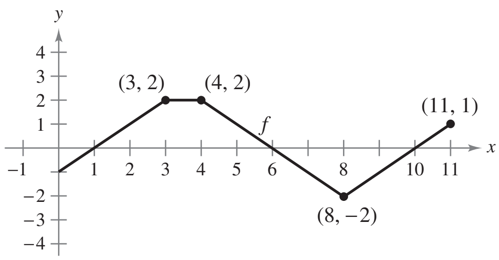
47. ***Para pensar*** La gráfica de f está compuesta por segmentos de recta y un semicírculo, como se muestra en la figura. Evaluar cada integral definida utilizando fórmulas geométricas.



a) $\int_0^2 f(x)\, dx$ *b)* $\int_2^6 f(x)\, dx$ *c)* $\int_{-4}^2 f(x)\, dx$

d) $\int_{-4}^6 f(x)\, dx$ *e)* $\int_{-4}^6 |f(x)|\, dx$ *f)* $\int_{-4}^6 [f(x) + 2]\, dx$

48. ***Para pensar*** La gráfica de f consta de segmentos de recta, como se muestra en la figura. Evaluar cada integral definida utilizando fórmulas geométricas.



a) $\displaystyle\int_0^1 -f(x)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_3^4 3\,f(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^7 f(x)\,dx$ *d)* $\displaystyle\int_5^{11} f(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{11} f(x)\,dx$ *f)* $\displaystyle\int_4^{10} f(x)\,dx$

49. ***Para pensar*** Considerar la función f que es continua en el intervalo $[-5, 5]$ y para la cual

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 4.$$

Evaluar cada integral.

a) $\displaystyle\int_0^5 [f(x) + 2]\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-2}^3 f(x+2)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-5}^5 f(x)\,dx$ (f es par) *d)* $\displaystyle\int_{-5}^5 f(x)\,dx$ (f es impar)

50. ***Para pensar*** Una función f se define como se indica a continuación. Usar fórmulas geométricas para encontrar $\int_0^8 f(x)\,dx$.

$$f(x) = \begin{cases} 4, & x < 4 \\ x, & x \geq 4 \end{cases}$$

51. ***Para pensar*** Abajo se define una función f. Usar fórmulas geométricas para encontrar $\int_0^{12} f(x)\,dx$.

$$f(x) = \begin{cases} 6, & x > 6 \\ -\frac{1}{2}x + 9, & x \leq 6 \end{cases}$$

Para discusión

52. Encontrar posibles valores de a y b que hagan el enunciado correcto. Si es posible, usar una gráfica para sustentar su respuesta. (Aquí puede haber más de una respuesta correcta.)

a) $\displaystyle\int_{-2}^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

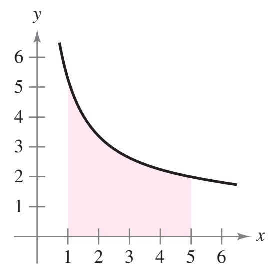
b) $\displaystyle\int_{-3}^3 f(x)\,dx + \int_3^6 f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^6 f(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_a^b \operatorname{sen} x\,dx < 0$

d) $\displaystyle\int_a^b \cos x\,dx = 0$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 53 y 54, utilizar la figura para llenar los espacios con el símbolo <, > o =.



53. El intervalo $[1, 5]$ se divide en n subintervalos de igual ancho Δx, y x_i es el punto terminal izquierdo del i-ésimo subintervalo.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \quad \square \quad \int_1^5 f(x)\,dx$$

54. El intervalo $[1, 5]$ se divide en n subintervalos de igual ancho Δx, y x_i es el punto terminal derecho del i-ésimo subintervalo.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \quad \square \quad \int_1^5 f(x)\,dx$$

55. Determinar si la función $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$ es integrable en el intervalo $[3, 5]$. Explicar.

56. Proporcionar un ejemplo de una función que sea integrable en el intervalo $[-1, 1]$, pero no continua en $[-1, 1]$.

En los ejercicios 57 a 60, determinar cuáles valores se aproximan mejor a la integral definida. Realizar la selección con base en un dibujo.

57. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

a) 5 *b)* -3 *c)* 10 *d)* 2 *e)* 8

58. $\displaystyle\int_0^{1/2} 4\cos \pi x\,dx$

a) 4 *b)* $\frac{4}{3}$ *c)* 16 *d)* 2π *e)* -6

59. $\displaystyle\int_0^1 2\operatorname{sen} \pi x\,dx$

a) 6 *b)* $\frac{1}{2}$ *c)* 4 *d)* $\frac{5}{4}$

60. $\displaystyle\int_0^9 (1 + \sqrt{x})\,dx$

a) -3 *b)* 9 *c)* 27 *d)* 3

Programación **Escribir un programa en la herramienta de graficación con el fin de aproximar una integral definida utilizando la suma de Riemann**

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

donde los subintervalos sean de igual ancho. La salida debe proporcionar tres aproximaciones de la integral donde c_i es el punto terminal del lado izquierdo $I(n)$, el punto medio $M(n)$ y el punto terminal del lado derecho $D(n)$ de cada subintervalo. En los ejercicios 61 a 64, usar el programa para aproximar la integral definida y completar la tabla.

n	4	8	12	16	20
$I(n)$					
$M(n)$					
$D(n)$					

61. $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{3-x}\,dx$ **62.** $\displaystyle\int_0^3 \frac{5}{x^2+1}\,dx$

63. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$ **64.** $\displaystyle\int_0^3 x \operatorname{sen} x\,dx$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 65 a 70, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

65. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

66. $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\left[\int_a^b g(x)\,dx\right]$

67. Si la norma de una partición tiende a cero, entonces el número de subintervalos tiende a infinito.

68. Si f es creciente en $[a, b]$, entonces el valor mínimo de $f(x)$ en $[a, b]$ es $f(a)$.

69. El valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ debe ser positivo.

70. El valor de $\int_2^2 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ es cero.

71. Encontrar la suma de Riemann para $f(x) = x^2 + 3x$ en el intervalo $[0, 8]$, donde $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$ y $x_4 = 8$, y donde $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$ y $c_4 = 8$.

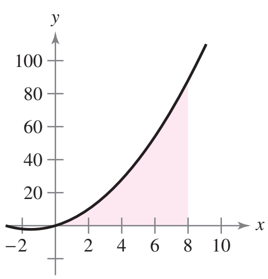


Figura para 71

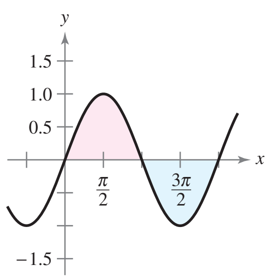


Figura para 72

72. Determinar la suma de Riemann para $f(x) = \operatorname{sen} x$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$, donde $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi$ y $x_4 = 2\pi$, y donde $c_1 = \pi/6$, $c_2 = \pi/3$, $c_3 = 2\pi/3$ y $c_4 = 3\pi/2$.

73. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

74. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$.

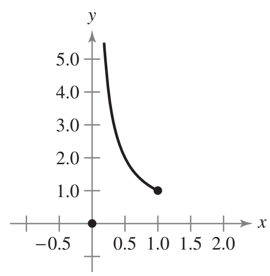
75. ***Para pensar*** Determinar si la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ es racional} \\ 0, & x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es integrable en el intervalo $[0, 1]$. Explicar.

75. Suponer que la función f se define en $[0, 1]$, como se muestra en la figura.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$



Demostrar que $\int_0^1 f(x)\,dx$ no existe. ¿Por qué lo anterior no contradice al teorema 4.4?

77. Encontrar las constantes a y b que maximizan el valor de

$$\int_a^b (1-x^2)\,dx.$$

Explicar el razonamiento.

78. Evaluar, si es posible, la integral $\displaystyle\int_0^2 [\![x]\!]\,dx$.

79. Determinar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2]$$

utilizando una suma de Riemann apropiada.

Preparación del examen Putnam

80. Para cada función continua $f\colon [0, 1] \to R$, sean $I(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx$ y $J(x) = \int_0^1 x(f(x))^2\,dx$. Encontrar el valor máximo de $I(f) - J(f)$ sobre todas las funciones f.

4.4 El teorema fundamental del cálculo

- **Evaluar una integral definida utilizando el teorema fundamental del cálculo.**
- **Entender y utilizar el teorema del valor medio para integrales.**
- **Encontrar el valor medio de una función sobre un intervalo cerrado.**
- **Entender y utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo.**
- **Entender y utilizar el teorema del cambio neto.**

El teorema fundamental del cálculo

Se han visto ya dos de las principales ramas del cálculo: el cálculo diferencial (presentado con el problema de la recta tangente) y el cálculo integral (presentado con el problema del área). En este punto, podría parecer que estos dos problemas no se relacionan, aunque tienen una conexión muy estrecha. La conexión fue descubierta independientemente por Isaac Newton y Gottfried Leibniz y está enunciada en un teorema que recibe el nombre de **teorema fundamental del cálculo**.

De manera informal, el teorema establece que la derivación y la integración (definida) son operaciones inversas, en el mismo sentido que lo son la división y la multiplicación. Para saber cómo Newton y Leibniz habrían pronosticado esta relación, considerar las aproximaciones que se muestran en la figura 4.26. La pendiente de la recta tangente se definió utilizando el *cociente* $\Delta y/\Delta x$ (la pendiente de la recta secante). De manera similar, el área de la región bajo una curva se definió utilizando el *producto* $\Delta y \Delta x$ (el área de un rectángulo). De tal modo, al menos en una etapa de aproximación primitiva, las operaciones de derivación y de integración definida parecen tener una relación inversa en el mismo sentido en el que son operaciones inversas la división y la multiplicación. El teorema fundamental del cálculo establece que los procesos de límite (utilizados para definir la derivada y la integral definida) preservan esta relación inversa.

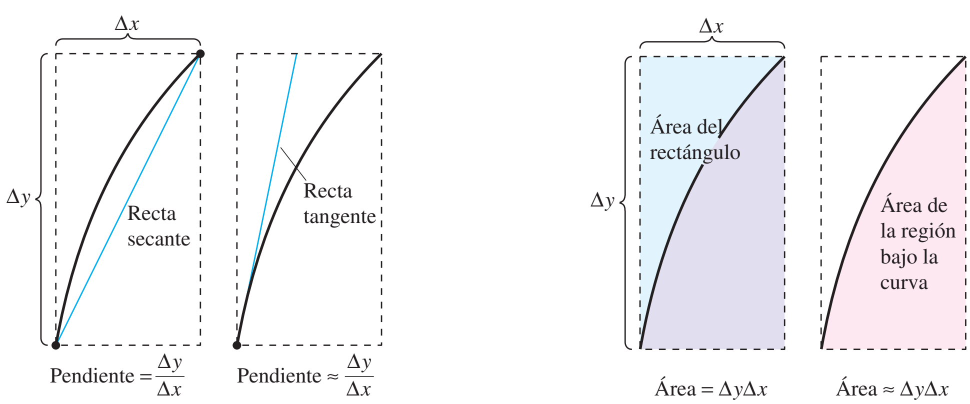
EXPLORACIÓN

Integración y antiderivación
A lo largo de este capítulo, se ha estado utilizando el signo de integral para denotar una antiderivada o primitiva (una familia de funciones) y una integral definida (un número).

Antiderivación: $\int f(x)\,dx$

Integración definida: $\int_a^b f(x)\,dx$

El uso de este mismo símbolo para ambas operaciones hace parecer que estarán relacionadas. En los primeros trabajos con cálculo, sin embargo, no se sabía que las dos operaciones estaban relacionadas. ¿A qué se aplicó primero el símbolo $\int$: a la antiderivación o a la integración definida? Explicar el razonamiento. (*Sugerencia:* El símbolo fue utilizado primero por Leibniz y proviene de la letra *S*.)



***a*)** Derivación ***b*)** Integración definida

La derivación y la integración definida tienen una relación "inversa"
Figura 4.26

TEOREMA 4.9 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

DEMOSTRACIÓN La clave para la demostración consiste en escribir la diferencia $F(b) - F(a)$ en una forma conveniente. Sea Δ la siguiente partición de $[a, b]$.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Mediante la resta y suma de términos análogos, se obtiene

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema del valor medio, se sabe que existe un número c_i en el i-ésimo subintervalo tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Como $F'(c_i) = f(c_i)$, puede dejarse que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y obtenerse

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

Esta importante ecuación dice que al aplicar repetidamente el teorema del valor medio, se puede siempre encontrar una colección de c_i tal que la *constante* $F(b) - F(a)$ es una suma de Riemann de f en $[a, b]$ para cualquier partición. El teorema 4.4 garantiza que el límite de sumas de Riemann sobre las particiones con $\|\Delta\| \to 0$ existe. Así, al tomar el límite (cuando $\|\Delta\| \to 0$) produce

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La siguiente guía puede ayudar a comprender el uso del teorema fundamental del cálculo.

Estrategia para utilizar el teorema fundamental del cálculo

1. *Suponiendo que se conozca* una antiderivada o primitiva f, se dispone de una forma de calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma.
2. Cuando se aplica el teorema fundamental del cálculo, la siguiente notación resulta conveniente.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= F(x)\Big]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Por ejemplo, para calcular $\int_1^3 x^3\,dx$, es posible escribir

$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

3. No es necesario incluir una constante de integración C en la antiderivada o primitiva ya que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \Big[F(x) + C\Big]_a^b \\ &= [F(b) + C] - [F(a) + C] \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Cálculo de una integral definida

Evaluar cada integral definida.

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - 3)\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$

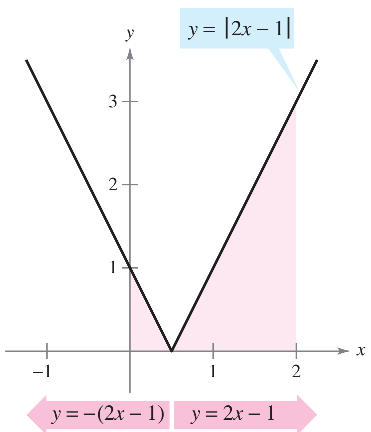
Solución

a) $$\int_1^2 (x^2 - 3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6\right) - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{3}$$

b) $$\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx = 3\int_1^4 x^{1/2}\,dx = 3\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = 2(4)^{3/2} - 2(1)^{3/2} = 14$$

c) $$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$$

EJEMPLO 2 Integral definida de un valor absoluto



La integral definida de y en $[0, 2]$ es $\frac{5}{2}$

Figura 4.27

Calcular $\displaystyle\int_0^2 |2x - 1|\,dx$.

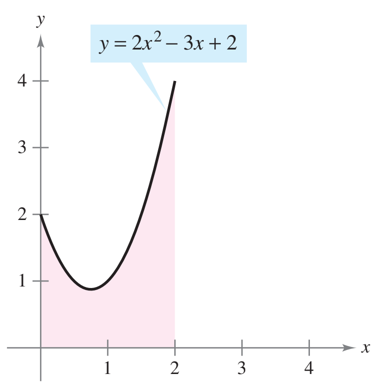
Solución Utilizando la figura 4.27 y la definición de valor absoluto, se puede reescribir el integrando como se indica.

$$|2x - 1| = \begin{cases} -(2x - 1), & x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

A partir de esto, es posible reescribir la integral en dos partes.

$$\begin{aligned}\int_0^2 |2x - 1|\,dx &= \int_0^{1/2} -(2x - 1)\,dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1)\,dx \\ &= \Big[-x^2 + x\Big]_0^{1/2} + \Big[x^2 - x\Big]_{1/2}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - (0 + 0) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Empleo del teorema fundamental para encontrar un área



El área de la región acotada por la gráfica de y, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$ es $\frac{10}{3}$

Figura 4.28

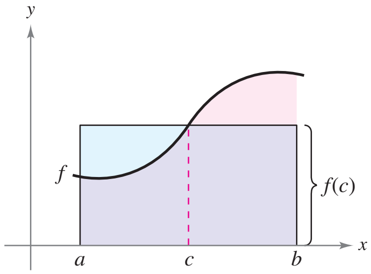
Encontrar el área de la región delimitada por la gráfica de $y = 2x^2 - 3x + 2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, como se muestra en la figura 4.28.

Solución Notar que $y > 0$ en el intervalo $[0, 2]$.

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)\,dx && \text{Integrar entre } x = 0 \text{ y } x = 2. \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^2 && \text{Encontrar la antiderivada.} \\ &= \left(\frac{16}{3} - 6 + 4\right) - (0 - 0 + 0) && \text{Aplicar el teorema fundamental del cálculo.} \\ &= \frac{10}{3} && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$

El teorema del valor medio para integrales

En la sección 4.2, se vio que el área de una región bajo una curva es mayor que el área de un rectángulo inscrito y menor que el área de un rectángulo circunscrito. El teorema del valor medio para integrales establece que en alguna parte "entre" los rectángulos inscrito y circunscrito hay un rectángulo cuya área es precisamente igual al área de la región bajo la curva, como se ilustra en la figura 4.29.



Rectángulo de valor medio:

$$f(c)(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

Figura 4.29

TEOREMA 4.10 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

DEMOSTRACIÓN

Caso 1: Si f es constante en el intervalo $[a, b]$, el teorema es claramente válido debido a que c puede ser cualquier punto en $[a, b]$.

Caso 2: Si f no es constante en $[a, b]$, entonces, por el teorema del valor extremo, pueden elegirse $f(m)$ y $f(M)$ como valores mínimo y máximo de f en $[a, b]$. Como $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ para todo x en $[a, b]$, se puede aplicar el teorema 4.8 para escribir

$$\int_a^b f(m)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(M)\,dx$$

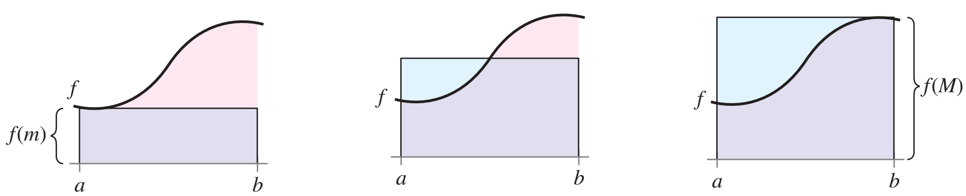
Ver la figura 4.30.

$$f(m)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f(M)(b-a)$$

$$f(m) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq f(M)$$

De acuerdo con la tercera desigualdad, puede aplicarse el teorema del valor medio para concluir que existe alguna c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$



Rectángulo inscrito (menor que el área real)

$$\int_a^b f(m)\,dx = f(m)(b-a)$$

Rectángulo del valor medio (igual al área real)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

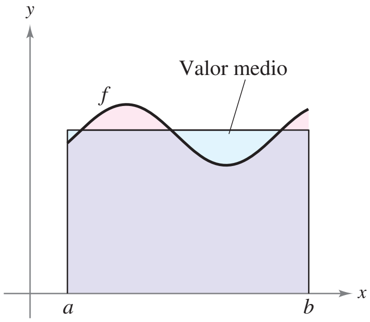
Rectángulo circunscrito (mayor que el área real)

$$\int_a^b f(M)\,dx = f(M)(b-a)$$

Figura 4.30

NOTA Adviértase que el teorema 4.10 no especifica cómo determinar c. Sólo garantiza la existencia de al menos un número c en el intervalo.

Valor medio de una función



Valor medio $= \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Figura 4.31

El valor de $f(c)$ dado en el teorema del valor medio para integrales recibe el nombre de **valor medio** de f en el intervalo $[a, b]$.

DEFINICIÓN DEL VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

Si f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el **valor medio** de f en el intervalo es

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

NOTA Obsérvese en la figura 4.31 que el área de la región bajo la gráfica f es igual al área del rectángulo cuya altura es el valor medio.

Para saber por qué el promedio de f se define de esta manera, supóngase que se divide $[a, b]$ en n subintervalos de igual anchura $\Delta x = (b-a)/n$. Si c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo, la media aritmética de los valores de la función en los c_i está dada por

$$a_n = \frac{1}{n}[f(c_1) + f(c_2) + \cdot \cdot \cdot + f(c_n)]. \qquad \text{Porcentaje de } f(c_1), \ldots, f(c_n).$$

Al multiplicar y dividir entre $(b - a)$, puede escribirse la media como

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{b-a}\right) &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x. \end{aligned}$$

Por último, al tomar el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene el valor medio de f en el intervalo $[a, b]$, como se indicó en la definición anterior.

Este desarrollo del valor medio de una función en un intervalo es sólo uno de los muchos usos prácticos de las integrales definidas para representar procesos de suma. En el capítulo 7, se estudiarán otras aplicaciones, tales como volumen, longitud de arco, centros de masa y trabajo.

EJEMPLO 4 Determinación del valor medio de una función

Determinar el valor medio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1, 4]$.

Solución El valor medio está dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{4-1}\int_1^4 (3x^2 - 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\Big[x^3 - x^2\Big]_1^4 \\ &= \frac{1}{3}[64 - 16 - (1 - 1)] = \frac{48}{3} = 16. \end{aligned}$$

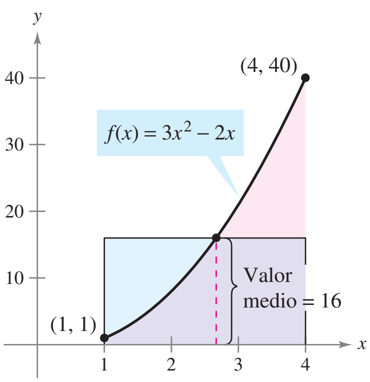
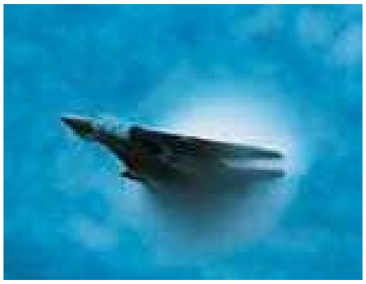


Figura 4.32

(Ver la figura 4.32.)



George Hall/Corbis

La primera persona en volar a una velocidad mayor que la del sonido fue Charles Yeager. El 14 de octubre de 1947, a una altura de 12.2 kilómetros, Yeager alcanzó 295.9 metros por segundo. Si Yeager hubiera volado a una altura menor que 11.275 kilómetros, su velocidad de 295.9 metros por segundo no hubiera "roto la barrera del sonido". La foto muestra un *Tomcat* F-14, un avión bimotor supersónico. Normalmente, el *Tomcat* puede alcanzar alturas de 15.24 km y velocidades que superan en más del doble la velocidad del sonido (707.78 m/s).

EJEMPLO 5 La velocidad del sonido

A diferentes alturas en la atmósfera de la Tierra, el sonido viaja a distintas velocidades. La velocidad del sonido $s(x)$ (en metros por segundo) puede modelarse mediante

$$s(x) = \begin{cases} -4x + 341, & 0 \le x < 11.5 \\ 295, & 11.5 \le x < 22 \\ \frac{3}{4}x + 278.5, & 22 \le x < 32 \\ \frac{3}{2}x + 254.5, & 32 \le x < 50 \\ -\frac{3}{2}x + 404.5, & 50 \le x \le 80 \end{cases}$$

donde x es la altura en kilómetros (ver la figura 4.33). ¿Cuál es la velocidad media del sonido sobre el intervalo [0, 80]?

Solución Se empieza con la integración $s(x)$ en el intervalo [0, 80]. Para hacer esto, se puede dividir la integral en cinco partes.

$$\int_0^{11.5} s(x)\,dx = \int_0^{11.5} (-4x + 341)\,dx = \Big[-2x^2 + 341x\Big]_0^{11.5} = 3\,657$$

$$\int_{11.5}^{22} s(x)\,dx = \int_{11.5}^{22} (295)\,dx = \Big[295x\Big]_{11.5}^{22} = 3\,097.5$$

$$\int_{22}^{32} s(x)\,dx = \int_{22}^{32} \left(\tfrac{3}{4}x + 278.5\right)dx = \Big[\tfrac{3}{8}x^2 + 278.5x\Big]_{22}^{32} = 2\,987.5$$

$$\int_{32}^{50} s(x)\,dx = \int_{32}^{50} \left(\tfrac{3}{2}x + 254.5\right)dx = \Big[\tfrac{3}{4}x^2 + 254.5x\Big]_{32}^{50} = 5\,688$$

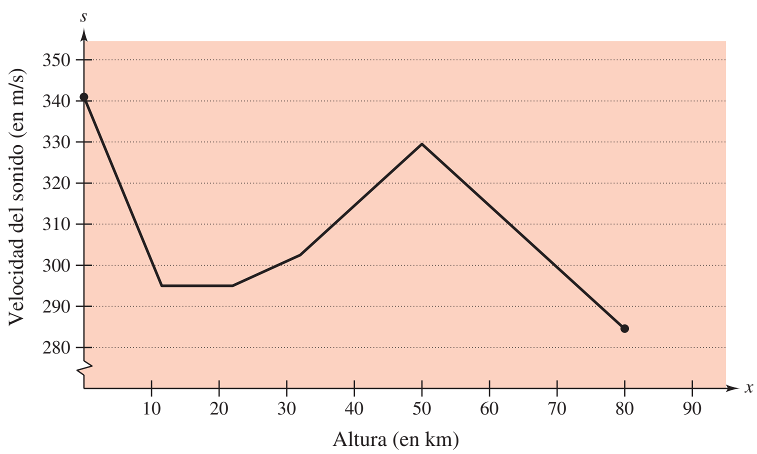
$$\int_{50}^{80} s(x)\,dx = \int_{50}^{80} \left(-\tfrac{3}{2}x + 404.5\right)dx = \Big[-\tfrac{3}{4}x^2 + 404.5x\Big]_{50}^{80} = 9\,210$$

Al sumar los valores de las cinco integrales, se obtiene

$$\int_0^{80} s(x)\,dx = 24\,640.$$

De tal modo, la velocidad media del sonido entre los 0 y los 80 km de altitud es

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{1}{80}\int_0^{80} s(x)\,dx = \frac{24\,640}{80} = 308 \text{ metros por segundo}$$



La velocidad del sonido depende de la altura
Figura 4.33

El segundo teorema fundamental del cálculo

Al introducir la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ se ha tomado como fijo el límite superior de integración b y x como la variable de integración. Sin embargo, es posible que surja una situación un poco diferente en la que la variable x se use como el límite superior de integración. Para evitar la confusión de utilizar x de dos maneras diferentes, se usa temporalmente t como la variable de integración. (Recordar que la integral definida *no* es una función de su variable de integración.)

La integral definida como un número

Constante

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Constante — f es una función de x

La integral definida como una función de x

F es una función de x

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Constante — f es una función de t

> **EXPLORACIÓN**
>
> Emplear una herramienta de graficación para representar la función
>
> $$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$$
>
> para $0 \le x \le \pi$. ¿Reconoce esta gráfica? Explicar.

EJEMPLO 6 La integral definida como función

Calcular la función

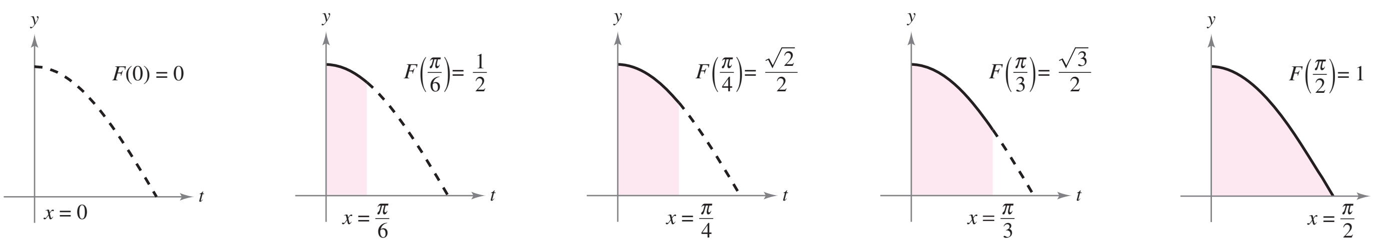
$$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$$

en $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ y $\pi/2$.

Solución Se podrían calcular cinco integrales definidas diferentes, una para cada uno de los límites superiores dados. Sin embargo, es mucho más simple fijar x (como una constante) por el momento para obtener

$$\int_0^x \cos t\,dt = \operatorname{sen} t\Big]_0^x = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} x.$$

Después de esto, utilizando $F(x) = \operatorname{sen} x$, es posible obtener los resultados que se muestran en la figura 4.34.



$F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$ es el área bajo la curva $f(t) = \cos t$ desde 0 hasta x

Figura 4.34

Podría considerarse la función $F(x)$ como la *acumulación* del área bajo la curva $f(t) = \cos t$ desde $t = 0$ hasta $t = x$. Para $x = 0$, el área es 0 y $F(0) = 0$. Para $x = \pi/2$, $F(\pi/2) = 1$ produce el área acumulada bajo la curva coseno del intervalo completo $[0, \pi/2]$. Esta interpretación de una integral como una **función acumulación** se usa a menudo en aplicaciones de la integración.

En el ejemplo 6, advertir que la derivada de F es el integrando original (sólo que con la variable cambiada). Esto es,

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = \frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \cos t\, dt\right] = \cos x.$$

Este resultado se generaliza en el siguiente teorema, denominado el **segundo teorema fundamental del cálculo**.

TEOREMA 4.11 EL SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es continua en un intervalo abierto I que contiene a, entonces, para todo x en el intervalo,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\, dt\right] = f(x).$$

DEMOSTRACIÓN Empezar definiendo F como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

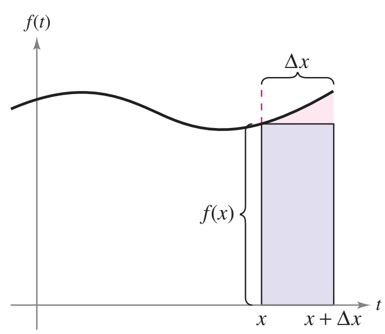
Luego, de acuerdo con la definición de la derivada, es posible escribir

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt + \int_x^a f(t)\, dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt\right]. \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio para integrales (suponiendo que $\Delta x > 0$), se sabe que existe un número c en el intervalo $[x, x+\Delta x]$ tal que la integral en la expresión anterior es igual a $f(c)\,\Delta x$. Además, como $x \le c \le x + \Delta x$ se sigue que $c \to x$ cuando $\Delta x \to 0$. De tal modo, se obtiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{\Delta x} f(c)\,\Delta x\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Es posible plantear un argumento similar para $\Delta x < 0$.



$$f(x)\,\Delta x \approx \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$$

Figura 4.35

NOTA Utilizando el modelo del área para integrales definidas, considerar la aproximación

$$f(x)\,\Delta x \approx \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$$

se dice que el área del rectángulo de altura $f(x)$ y anchura Δx es aproximadamente igual al área de la región que se encuentra entre la gráfica de f y el eje x en el intervalo $[x, x+\Delta x]$, como se muestra en la figura 4.35.

Nótese que el segundo teorema del cálculo indica que toda f continua admite una antiderivada o primitiva. Sin embargo, ésta no necesita ser una función elemental. (Recordar la discusión de las funciones elementales en la sección P.3.)

EJEMPLO 7 Empleo del segundo teorema fundamental del cálculo

Calcular $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right]$.

Solución Advertir que $f(t) = \sqrt{t^2+1}$ es continua en toda la recta real. De tal modo, empleando el segundo teorema fundamental del cálculo, es posible escribir

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right] = \sqrt{x^2+1}.$$

La derivación que se muestra en el ejemplo 7 es una aplicación directa del segundo teorema fundamental del cálculo. El siguiente ejemplo muestra cómo puede combinarse este teorema con la regla de la cadena para encontrar la derivada de una función.

EJEMPLO 8 Empleo del segundo teorema fundamental del cálculo

Encontrar la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt$.

Solución Haciendo $u = x^3$, es factible aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo junto con la regla de la cadena como se ilustra.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} && \text{Regla de la cadena.}\\
&= \frac{d}{du}[F(x)]\frac{du}{dx} && \text{Definición de } \frac{dF}{du}.\\
&= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt\right]\frac{du}{dx} && \text{Sustituir } \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt \text{ por } F(x).\\
&= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{u} \cos t\,dt\right]\frac{du}{dx} && \text{Sustituir } u \text{ por } x^3.\\
&= (\cos u)(3x^2) && \text{Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo.}\\
&= (\cos x^3)(3x^2) && \text{Reescribir como función de } x.
\end{aligned}$$

Debido a que la integral del ejemplo 8 se integra con facilidad, se puede verificar la derivada del modo siguiente.

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\,dt = \operatorname{sen} t\Big]_{\pi/2}^{x^3} = \operatorname{sen} x^3 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = (\operatorname{sen} x^3) - 1$$

En esta forma, se tiene la posibilidad de aplicar la regla de las potencias para verificar que la derivada es la misma que la que se obtuvo en el ejemplo 8.

$$F'(x) = (\cos x^3)(3x^2)$$

Teorema del cambio neto

El teorema fundamental del cálculo (teorema 4.9) establece que si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Pero dado que $F'(x) = f(x)$, este enunciado se puede reescribir como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde la cantidad $F(b) - F(a)$ representa el *cambio neto de F* sobre el intervalo $[a, b]$.

TEOREMA 4.12 EL TEOREMA DEL CAMBIO NETO

La integral definida de la razón de cambio de una cantidad $F'(x)$ proporciona el cambio total, o **cambio neto**, en esa cantidad sobre el intervalo $[a, b]$.

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$ Cambio neto de F.

EJEMPLO 9 Uso del teorema del cambio neto

Una sustancia química fluye en un tanque de almacenamiento a una razón de $180 + 3t$ litros por minuto, donde $0 \le t \le 60$. Encontrar la cantidad de la sustancia química que fluye en el tanque durante los primeros 20 minutos.

Solución Sea $c(t)$ la cantidad de la sustancia química en el tanque en el tiempo t. Entonces $c'(t)$ representa la razón a la cual la sustancia química fluye dentro del tanque en el tiempo t. Durante los primeros 20 minutos, la cantidad que fluye dentro del tanque es

$$\begin{aligned}\int_0^{20} c'(t)\,dt &= \int_0^{20} (180 + 3t)\,dt\\ &= \left[180t + \frac{3}{2}t^2\right]_0^{20}\\ &= 3\,600 + 600 = 4\,200.\end{aligned}$$

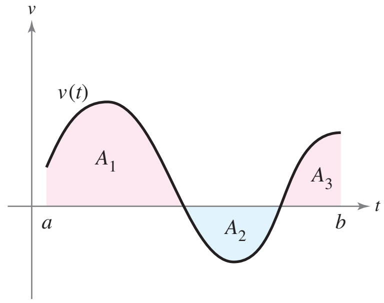
Así, la cantidad que fluye dentro del tanque durante los primeros 20 minutos es de 4 200 litros.

Otra forma de ilustrar el teorema del cambio neto es examinar la velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, donde $s(t)$ es la posición en el tiempo t. Entonces, su velocidad es $v(t) = s'(t)$ y

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a).$$

Esta integral definida representa el cambio neto en posición, o **desplazamiento**, de la partícula.

Cuando se calcula la distancia *total* recorrida por la partícula, se deben considerar los intervalos donde $v(t) \le 0$ y los intervalos donde $v(t) \ge 0$. Cuando $v(t) \le 0$, la partícula se mueve a la izquierda, y cuando $v(t) \ge 0$, la partícula se mueve hacia la derecha. Para calcular la distancia total recorrida, se integra el valor absoluto de la velocidad $|v(t)|$. Así, el



A_1, A_2 y A_3 son las áreas de las regiones sombreadas
Figura 4.36

desplazamiento de una partícula y la distancia total recorrida por una partícula sobre $[a, b]$, se puede escribir como

$$\textbf{Desplazamiento sobre } [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \int_a^b v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\textbf{Distancia total recorrida sobre } [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \int_a^b |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$$

(ver la figura 4.36).

EJEMPLO 10 Solución de un problema de movimiento de partícula

Una partícula está moviéndose a lo largo de una línea, así, su velocidad es $v(t) = t^3 - 10t^2 + 29t - 20$ pies por segundo en el tiempo t.

a) ¿Cuál es el desplazamiento de la partícula en el tiempo $1 \le t \le 5$?

b) ¿Cuál es la distancia total recorrida por la partícula en el tiempo $1 \le t \le 5$?

Solución

a) Por definición, se sabe que el desplazamiento es

$$\begin{aligned}\int_1^5 v(t)\,dt &= \int_1^5 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\,dt\\ &= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t\right]_1^5\\ &= \frac{25}{12} - \left(-\frac{103}{12}\right)\\ &= \frac{128}{12}\\ &= \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

Así, la partícula se mueve $\frac{32}{3}$ pies hacia la derecha.

b) Para encontrar la distancia total recorrida, calcular $\int_1^5 |v(t)|\,dt$. Usando la figura 4.37 y el hecho de que $v(t)$ pueda factorizarse como $(t - 1)(t - 4)(t - 5)$, se puede determinar que $v(t) \ge 0$ en $[1, 4]$ y $v(t) \le 0$ en $[4, 5]$. Así, la distancia total recorrida es

$$\begin{aligned}\int_1^5 |v(t)|\,dt &= \int_1^4 v(t)\,dt - \int_4^5 v(t)\,dt\\ &= \int_1^4 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\,dt - \int_4^5 (t^3 - 10t^2 + 29t - 20)\,dt\\ &= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t\right]_1^4 - \left[\frac{t^4}{4} - \frac{10}{3}t^3 + \frac{29}{2}t^2 - 20t\right]_4^5\\ &= \frac{45}{4} - \left(-\frac{7}{12}\right)\\ &= \frac{71}{6}\text{ pies.}\end{aligned}$$

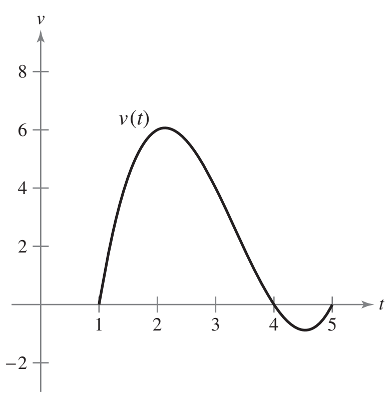


Figura 4.37

4.4 Ejercicios

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 1 a 4, utilizar una herramienta de graficación para representar el integrando. Emplear la gráfica para determinar si la integral definida es positiva, negativa o cero.**

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{4}{x^2+1}\,dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

3. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ **4.** $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\sqrt{2-x}\,dx$

En los ejercicios 5 a 26, hallar la integral definida de la función algebraica. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

5. $\displaystyle\int_0^2 6x\,dx$ **6.** $\displaystyle\int_4^9 5\,dv$

7. $\displaystyle\int_{-1}^0 (2x-1)\,dx$ **8.** $\displaystyle\int_2^5 (-3v+4)\,dv$

9. $\displaystyle\int_{-1}^1 (t^2-2)\,dt$ **10.** $\displaystyle\int_1^7 (6x^2+2x-3)\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^1 (2t-1)^2\,dt$ **12.** $\displaystyle\int_{-1}^1 (t^3-9t)\,dt$

13. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2}-1\right)dx$ **14.** $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(u-\frac{1}{u^2}\right)du$

15. $\displaystyle\int_1^4 \frac{u-2}{\sqrt{u}}\,du$ **16.** $\displaystyle\int_{-3}^3 v^{1/3}\,dv$

17. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\sqrt[3]{t}-2\right)dt$ **18.** $\displaystyle\int_1^8 \sqrt{\frac{2}{x}}\,dx$

19. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-\sqrt{x}}{3}\,dx$ **20.** $\displaystyle\int_0^2 (2-t)\sqrt{t}\,dt$

21. $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(t^{1/3}-t^{2/3}\right)dt$ **22.** $\displaystyle\int_{-8}^{-1} \frac{x-x^2}{2\sqrt[3]{x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int_0^5 |2x-5|\,dx$ **24.** $\displaystyle\int_1^4 (3-|x-3|)\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^3 |x^2-9|\,dx$ **26.** $\displaystyle\int_0^4 |x^2-4x+3|\,dx$

En los ejercicios 27 a 34, hallar la integral definida de la función trigonométrica. Emplear una herramienta de graficación para verificar el resultado.

27. $\displaystyle\int_0^{\pi} (1+\operatorname{sen} x)\,dx$ **28.** $\displaystyle\int_0^{\pi} (2+\cos x)\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$ **30.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\,d\theta$

31. $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sec^2 x\,dx$

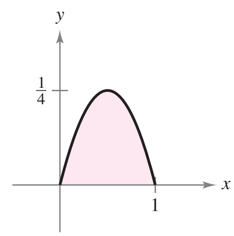
32. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} (2-\csc^2 x)\,dx$

33. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

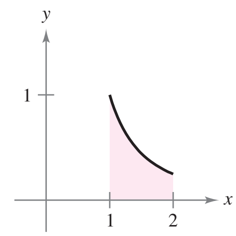
34. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2t+\cos t)\,dt$

En los ejercicios 35 a 38, determinar el área de la región indicada.

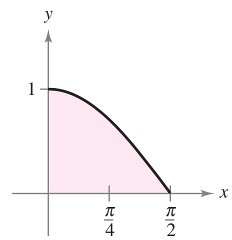
35. $y = x - x^2$



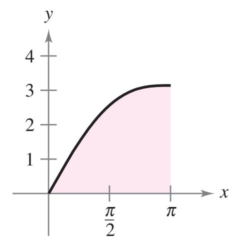
36. $y = \dfrac{1}{x^2}$



37. $y = \cos x$



38. $y = x + \operatorname{sen} x$



En los ejercicios 39 a 44, encontrar el área de la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones.

39. $y = 5x^2+2,\quad x=0,\quad x=2,\quad y=0$

40. $y = x^3+x,\quad x=2,\quad y=0$

41. $y = 1+\sqrt[3]{x},\quad x=0,\quad x=8,\quad y=0$

42. $y = (3-x)\sqrt{x},\quad y=0$

43. $y = -x^2+4x,\quad y=0$ **44.** $y = 1-x^4,\quad y=0$

En los ejercicios 45 a 50, determinar el (los) valor(es) de *c* cuya existencia es garantizada por el teorema del valor medio para integrales de la función en el intervalo indicado.

45. $f(x) = x^3,\quad [0, 3]$ **46.** $f(x) = \dfrac{9}{x^3},\quad [1, 3]$

47. $f(x) = \sqrt{x},\quad [4, 9]$ **48.** $f(x) = x - 2\sqrt{x},\quad [0, 2]$

49. $f(x) = 2\sec^2 x,\quad [-\pi/4, \pi/4]$

50. $f(x) = \cos x,\quad [-\pi/3, \pi/3]$

En los ejercicios 51 a 56, encontrar el valor medio de la función sobre el intervalo dado y todos los valores de *x* en el intervalo para los cuales la función sea igual a su valor promedio.

51. $f(x) = 9 - x^2,\quad [-3, 3]$

52. $f(x) = \dfrac{4(x^2+1)}{x^2},\quad [1, 3]$

53. $f(x) = x^3,\quad [0, 1]$

54. $f(x) = 4x^3 - 3x^2,\quad [-1, 2]$

55. $f(x) = \operatorname{sen} x,\quad [0, \pi]$

56. $f(x) = \cos x,\quad [0, \pi/2]$

57. ***Velocidad*** La gráfica muestra la velocidad, en pies por segundo, de un automóvil que acelera desde el reposo. Emplear la gráfica para estimar la distancia que el automóvil recorre en 8 segundos.

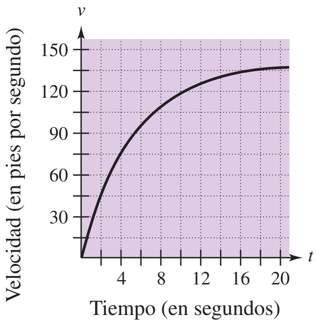


Figura para 57

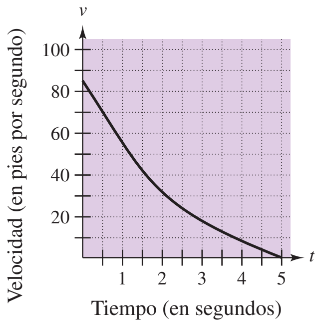
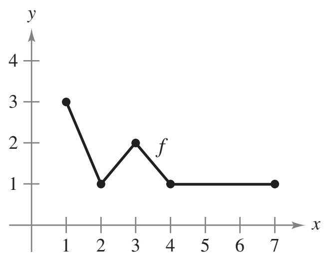


Figura para 58

58. ***Velocidad*** La gráfica muestra la velocidad de un automóvil tan pronto como el conductor aplica los frenos. Emplear la gráfica para estimar qué distancia recorre el auto antes de detenerse.

Desarrollo de conceptos

59. La gráfica de f se muestra en la figura.



a) Calcular $\int_1^7 f(x)\, dx$.

b) Determinar el valor medio de f en el intervalo $[1, 7]$.

c) Determinar las respuestas a los apartados *a*) y *b*) si la gráfica se desplaza dos unidades hacia arriba.

60. Si $r'(t)$ representa la razón de crecimiento de un perro en libras por año, ¿qué representa $r(t)$? ¿Qué representa $\int_2^6 r'(t)\, dt$ en el perro?

61. ***Fuerza*** La fuerza F (en newtons) de un cilindro hidráulico en una prensa es proporcional al cuadrado de sec x, donde x es la distancia (en metros) que el cilindro se desplaza en su ciclo. El dominio de F es $[0, \pi/3]$ y $F(0) = 500$.

a) Encontrar F como una función de x.

b) Determinar la fuerza media ejercida por la prensa sobre el intervalo $[0, \pi/3]$.

62. ***Flujo sanguíneo*** La velocidad v del flujo de sangre a una distancia r del eje central de cualquier arteria de radio R es

$$v = k(R^2 - r^2)$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Determinar el flujo medio de sangre a lo largo de un radio de la arteria. (Usar 0 y R como los límites de integración.)

63. ***Ciclo respiratorio*** El volumen V en litros de aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de cinco segundos se aproxima mediante el modelo $V = 0.1729t + 0.1522t^2 - 0.0374t^3$ donde t es el tiempo en segundos. Aproximar el volumen medio de aire en los pulmones durante un ciclo.

64. ***Promedio de ventas*** Una compañía ajusta un modelo a los datos de ventas mensuales de un producto de temporada. El modelo es

$$S(t) = \frac{t}{4} + 1.8 + 0.5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right), \qquad 0 \le t \le 24$$

donde S son las ventas (en miles) y t es el tiempo en meses.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar $f(t) = 0.5 \operatorname{sen}(\pi t/6)$ para $0 \le t \le 24$. Emplear la gráfica para explicar por qué el valor medio de $f(t)$ es cero sobre el intervalo.

b) Recurrir a una herramienta de graficación para representar $S(t)$ y la recta $g(t) = t/4 + 1.8$ en la misma ventana de observación. Utilizar la gráfica y el resultado del apartado *a*) para explicar por qué g recibe el nombre *recta de tendencia*.

65. ***Modelado matemático*** Se prueba un vehículo experimental en una pista recta. Parte del reposo y su velocidad v (metros por segundo) se registra en la tabla cada 10 segundos durante un minuto.

t	0	10	20	30	40	50	60
v	0	5	21	40	62	78	83

a) Emplear una herramienta de graficación para determinar un modelo de la forma $v = at^3 + bt^2 + ct + d$ para los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para dibujar los datos y hacer la gráfica del modelo.

c) Emplear el teorema fundamental del cálculo para aproximar la distancia recorrida por el vehículo durante la prueba.

Para discusión

66. La gráfica de f se muestra en la figura. La región sombreada A tiene un área de 1.5, y $\int_0^6 f(x)\, dx = 3.5$. Usar esta información para completar los espacios en blanco.

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx =$ ▭

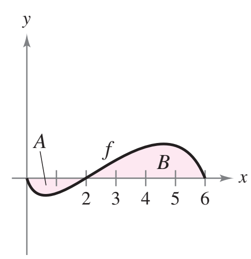
b) $\displaystyle\int_2^6 f(x)\, dx =$ ▭

c) $\displaystyle\int_0^6 |f(x)|\, dx =$ ▭

d) $\displaystyle\int_0^2 -2f(x)\, dx =$ ▭

e) $\displaystyle\int_0^6 [2 + f(x)]\, dx =$ ▭

f) El valor promedio de f sobre el intervalo $[0, 6]$ es ▭.



En los ejercicios 67 a 72, encontrar F como una función de x y evaluar en $x = 2$, $x = 5$ y $x = 8$.

67. $F(x) = \displaystyle\int_0^x (4t - 7)\, dt$

68. $F(x) = \displaystyle\int_2^x (t^3 + 2t - 2)\, dt$

69. $F(x) = \int_1^x \frac{20}{v^2}\,dv$ **70.** $F(x) = \int_2^x -\frac{2}{t^3}\,dt$

71. $F(x) = \int_1^x \cos\theta\,d\theta$ **72.** $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

73. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra en la figura.

a) Estimar $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$ y $g(8)$.
b) Determinar el intervalo abierto más grande en el cual g está creciendo. Encontrar el intervalo abierto más grande en el que g decrezca.
c) Identificar cualesquiera extremos de g.
d) Dibujar una gráfica sencilla de g.

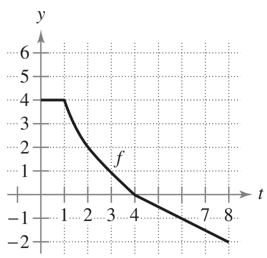


Figura para 73

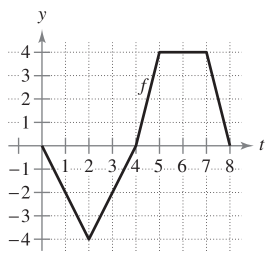


Figura para 74

74. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es una función cuya gráfica se muestra en la figura.

a) Estimar $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$ y $g(8)$.
b) Encontrar el intervalo abierto más grande en el cual g esté creciendo. Determinar el intervalo abierto más grande en el que g decrezca.
c) Identificar cualesquiera extremos de g.
d) Dibujar una gráfica sencilla de g.

En los ejercicios 75 a 80, *a*) integrar para determinar *F* como una función de *x* y *b*) demostrar el segundo teorema fundamental del cálculo derivando el resultado del apartado *a*).

75. $F(x) = \int_0^x (t + 2)\,dt$ **76.** $F(x) = \int_0^x t(t^2 + 1)\,dt$

77. $F(x) = \int_8^x \sqrt[3]{t}\,dt$ **78.** $F(x) = \int_4^x \sqrt{t}\,dt$

79. $F(x) = \int_{\pi/4}^x \sec^2 t\,dt$ **80.** $F(x) = \int_{\pi/3}^x \sec t \tan t\,dt$

En los ejercicios 81 a 86, utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo para encontrar $F'(x)$.

81. $F(x) = \int_{-2}^x (t^2 - 2t)\,dt$ **82.** $F(x) = \int_1^x \frac{t^2}{t^2 + 1}\,dt$

83. $F(x) = \int_{-1}^x \sqrt{t^4 + 1}\,dt$ **84.** $F(x) = \int_1^x \sqrt[4]{t}\,dt$

85. $F(x) = \int_0^x t\cos t\,dt$ **86.** $F(x) = \int_0^x \sec^3 t\,dt$

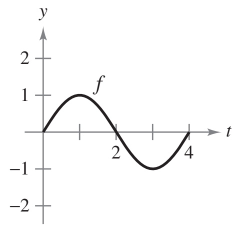
En los ejercicios 87 a 92, encontrar $F'(x)$.

87. $F(x) = \int_x^{x+2} (4t + 1)\,dt$ **88.** $F(x) = \int_{-x}^x t^3\,dt$

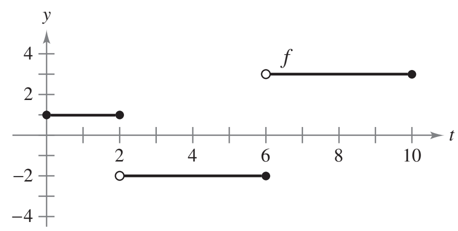
89. $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{t}\,dt$ **90.** $F(x) = \int_2^{x^2} \frac{1}{t^3}\,dt$

91. $F(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen} t^2\,dt$ **92.** $F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}\theta^2\,d\theta$

93. ***Análisis gráfico*** Aproximar la gráfica de g en el intervalo $0 \le x \le 4$, donde $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Identificar la coordenada x de un extremo de g.



94. Utilizar la gráfica de la función f que se muestra en la figura y la función g definida por $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.



a) Completar la tabla.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(x)$										

b) Dibujar los puntos de la tabla en el apartado *a*) y graficar g.
c) ¿Dónde tiene g un mínimo? Explicar.
d) ¿Dónde tiene g un máximo? Explicar.
e) ¿En qué intervalo g crece a la mayor velocidad? Explicar.
f) Identificar los ceros de g.

95. ***Costo*** El costo total C (en dólares) de compra y mantenimiento de una pieza de equipo durante x años es

$$C(x) = 5\,000\left(25 + 3\int_0^x t^{1/4}\,dt\right).$$

a) Efectuar la integración para escribir C como una función de x.
b) Encontrar $C(1)$, $C(5)$ y $C(10)$.

96. ***Área*** El área A entre la gráfica de la función $g(t) = 4 - 4/t^2$ y el eje t sobre el intervalo $[1, x]$ es

$$A(x) = \int_1^x \left(4 - \frac{4}{t^2}\right) dt.$$

a) Determinar la asíntota horizontal de la gráfica de g.
b) Integrar para encontrar A como una función de x. ¿La gráfica de A tiene una asíntota horizontal? Explicar.

En los ejercicios 97 a 102, la función velocidad, en pies por segundo, está dada para una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta. Encontrar *a*) el desplazamiento y *b*) la distancia total que la partícula recorre en el intervalo dado.

97. $v(t) = 5t - 7, \quad 0 \leq t \leq 3$

98. $v(t) = t^2 - t - 12, \quad 1 \leq t \leq 5$

99. $v(t) = t^3 - 10t^2 + 27t - 18, \quad 1 \leq t \leq 7$

100. $v(t) = t^3 - 8t^2 + 15t, \quad 0 \leq t \leq 5$

101. $v(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}, \quad 1 \leq t \leq 4$

102. $v(t) = \cos t, \quad 0 \leq t \leq 3\pi$

103. Una partícula se mueve a lo largo del eje x. La posición de la partícula en el tiempo t está dada por $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 2$, $0 \leq t \leq 5$. Encontrar el desplazamiento total que la partícula recorre en 5 unidades de tiempo.

104. Repetir el ejercicio 103 para la función posición dada por $x(t) = (t - 1)(t - 3)^2, 0 \leq t \leq 5$.

105. ***Flujo de agua*** Fluye agua a través de un tanque de almacenamiento a una razón de $500 - 5t$ litros por minuto. Encontrar la cantidad de agua que fluye hacia afuera del tanque durante los primeros 18 minutos.

106. ***Filtración de aceite*** A la 1:00 p.m., empieza a filtrarse aceite desde un tanque a razón de $4 + 0.75t$ galones por hora.

a) ¿Cuánto aceite se pierde desde la 1:00 p.m. hasta las 4:00 p.m.?

b) ¿Cuánto aceite se pierde desde las 4:00 p.m. hasta las 7:00 p.m.?

c) Comparar los resultados de los apartados *a*) y *b*). ¿Qué se observa?

En los ejercicios 107 a 110, describir por qué el enunciado es incorrecto.

107. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{-2}\, dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$

108. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{2}{x^3}\, dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_{-2}^{1} = -\frac{3}{4}$

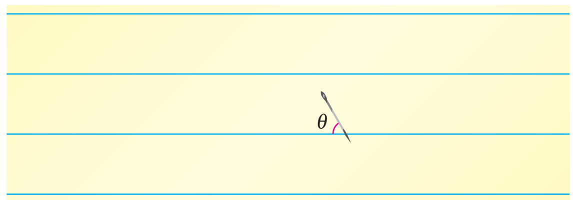
109. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sec^2 x\, dx = \left[\tan x\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = -2$

110. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \csc x \cot x\, dx = \left[-\csc x\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = 2$

111. ***Experimento de la aguja de Buffon*** Sobre un plano horizontal se trazan rectas paralelas separadas por una distancia de 2 pulgadas. Una aguja de 2 pulgadas se lanza aleatoriamente sobre el plano. La probabilidad de que la aguja toque una recta es

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta\, d\theta$$

donde θ es el ángulo agudo entre la aguja y cualquiera de las rectas paralelas. Determinar esta probabilidad.



112. Demostrar que $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt\right] = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 113 y 114, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

113. Si $F'(x) = G'(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

114. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

115. Demostrar que la función

$$f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2 + 1}\, dt + \int_0^{x} \frac{1}{t^2 + 1}\, dt$$

es constante para $x > 0$.

116. Encontrar la función $f(x)$ y todos los valores de c, tal que

$$\int_c^x f(t)\, dt = x^2 + x - 2.$$

117. Sea $G(x) = \displaystyle\int_0^x \left[s\int_0^s f(t)dt\right] ds$, donde f es continua para todo t real. Determinar *a*) $G(0)$, *b*) $G'(0)$, *c*) $G''(x)$ y *d*) $G''(0)$.

PROYECTO DE TRABAJO

Demostración del teorema fundamental

Utilizar una herramienta de graficación para representar la función $y_1 = \operatorname{sen}^2 t$ en el intervalo $0 \leq t \leq \pi$. Sea $F(x)$ la siguiente función de x.

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}^2 t\, dt$$

a) Completar la tabla. Explicar por qué los valores de f están creciendo.

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
$F(x)$							

b) Utilizar las funciones de integración de una herramienta de graficación para representar F.

c) Emplear las funciones de derivación de una herramienta de graficación para hacer la gráfica de $F'(x)$. ¿Cómo se relaciona esta gráfica con la gráfica de la parte *b*)?

d) Verificar que la derivada de $y = (1/2)t - (\operatorname{sen} 2t)/4$ es $\operatorname{sen}^2 t$. Graficar y y escribir un pequeño párrafo acerca de cómo esta gráfica se relaciona con las de los apartados *b*) y *c*).

4.5 Integración por sustitución

- **Utilizar el reconocimiento de patrones para encontrar una integral indefinida.**
- **Emplear un cambio de variable para determinar una integral indefinida.**
- **Utilizar la regla general de las potencias para la integración con el fin de determinar una integral indefinida.**
- **Utilizar un cambio de variable para calcular una integral definida.**
- **Calcular una integral definida que incluya una función par o impar.**

Reconocimiento de patrones

En esta sección se estudiarán técnicas para integrar funciones compuestas. La discusión se divide en dos partes: *reconocimiento de patrones* y *cambio de variables*. Ambas técnicas implican una ***u*-sustitución**. Con el reconocimiento de patrones se efectúa la sustitución mentalmente, y con el cambio de variable se escriben los pasos de la sustitución.

El papel de la sustitución en la integración es comparable al de la regla de la cadena en la derivación. Recordar que para funciones derivables dadas por $y = F(u)$ y $u = g(x)$, la regla de la cadena establece que

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x).$$

De acuerdo con la definición de una antiderivada o primitiva, se sigue

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Estos resultados se resumen en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.13 ANTIDERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Sea g una función cuyo recorrido o rango es un intervalo I, y sea f una función continua en I. Si g es derivable en su dominio y F es una antiderivada o primitiva de f en I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$ y

$$\int f(u)\,du = F(u) + C.$$

NOTA El enunciado del teorema 4.13 no dice cómo distinguir entre $f(g(x))$ y $g'(x)$ en el integrando. A medida que se tenga más experiencia en la integración, la habilidad para efectuar esta operación aumentará. Desde luego, parte de la clave es la familiaridad con las derivadas.

Los ejemplos 1 y 2 muestran cómo aplicar *directamente* el teorema 4.13, reconociendo la presencia de $f(g(x))$ y $g'(x)$. Notar que la función compuesta en el integrando tiene una *función exterior* f y una *función interior* g. Además, la derivada $g'(x)$ está presente como un factor del integrando.

$$\int \overbrace{f}^{\text{Función exterior}}(\underbrace{g(x)}_{\text{Función interior}})\underbrace{g'(x)}_{\text{Derivada de la función interior}}\,dx = F(g(x)) + C$$

EJEMPLO 1 Reconocimiento del patrón de $f(g(x))g'(x)$

Determinar $\int (x^2 + 1)^2(2x)\,dx$.

Solución Tomando $g(x) = x^2 + 1$, se obtiene

$$g'(x) = 2x$$

y

$$f(g(x)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2.$$

A partir de esto, se puede reconocer que el integrando sigue el patrón $f(g(x))g'(x)$. Utilizando la regla de la potencia para la integración y el teorema 4.13, es posible escribir

$$\int \overbrace{(x^2 + 1)^2}^{f(g(x))}\overbrace{(2x)}^{g'(x)}\,dx = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C.$$

Es fácil comprobar, mediante la regla de la cadena, que la derivada de $\frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C$ es, en efecto, el integrando de la integral original.

EJEMPLO 2 Reconocimiento del patrón $f(g(x))g'(x)$

Determinar $\int 5 \cos 5x\,dx$.

Solución Tomando $g(x) = 5x$, se obtiene

$$g'(x) = 5$$

y

$$f(g(x)) = f(5x) = \cos 5x.$$

A partir de esto, se puede reconocer que el integrando sigue el patrón $f(g(x))g'(x)$. Utilizando la regla del coseno para la integración y el teorema 4.13, puede escribirse

$$\int \overbrace{(\cos(5x))}^{f(g(x))}\overbrace{(5)}^{g'(x)}\,dx = \operatorname{sen} 5x + C.$$

Lo anterior se verifica derivando $\operatorname{sen} 5x + C$ para obtener el integrando original.

TECNOLOGÍA Usar un sistema algebraico computarizado, tal como *Maple, Mathematica* o *TI-89*, para resolver las integrales dadas en los ejemplos 1 y 2. ¿Se obtienen las mismas antiderivadas o primitivas que las que se citan en los ejemplos?

EXPLORACIÓN

Reconocimiento de patrones El integrando en cada una de las siguientes integrales corresponde al patrón $f(g(x))g'(x)$. Identificar el patrón y utilizar el resultado para calcular la integral.

a) $\int 2x(x^2 + 1)^4\,dx$ ***b)*** $\int 3x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx$ ***c)*** $\int \sec^2 x(\tan x + 3)\,dx$

Las siguientes tres integrales son similares a las primeras tres. Mostrar cómo se puede multiplicar y dividir por una constante para calcular estas integrales.

d) $\int x(x^2 + 1)^4\,dx$ ***e)*** $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx$ ***f)*** $\int 2\sec^2 x(\tan x + 3)\,dx$

Los integrandos en los ejemplos 1 y 2 corresponden exactamente al patrón $f(g(x))g'(x)$ (sólo se tiene que reconocer el patrón). Es posible extender esta técnica de manera considerable utilizando la regla del múltiplo constante.

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

Muchos integrandos contienen la parte esencial (la parte variable) de $g'(x)$, aunque está faltando un múltiplo constante. En tales casos, es posible multiplicar y dividir por el múltiplo constante necesario, como se muestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Multiplicar y dividir por una constante

Determinar $\displaystyle\int x(x^2+1)^2\,dx.$

Solución Esto es similar a la integral dada en el ejemplo 1, salvo porque al integrando le falta un factor 2. Al reconocer que $2x$ es la derivada de x^2+1, se toma $g(x)=x^2+1$ y se incluye el término $2x$ de la manera siguiente.

$$\int x(x^2+1)^2\,dx = \int (x^2+1)^2\left(\frac{1}{2}\right)(2x)\,dx \qquad \text{Multiplicar y dividir entre 2.}$$

$$= \frac{1}{2}\int \overbrace{(x^2+1)^2}^{f(g(x))}\,\overbrace{(2x)}^{g'(x)}\,dx \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^3}{3}\right]+C \qquad \text{Integrar.}$$

$$= \frac{1}{6}(x^2+1)^3+C \qquad \text{Simplificar.}$$

En la práctica, la mayoría de la gente no escribiría tantos pasos como los que se muestran en el ejemplo 3. Por ejemplo, podría calcularse la integral escribiendo simplemente

$$\int x(x^2+1)^2\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^2\,2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^3}{3}\right]+C$$

$$= \frac{1}{6}(x^2+1)^3+C.$$

NOTA Asegurarse de ver que la regla del múltiplo constante se aplica sólo a *constantes*. No se puede multiplicar y dividir por una variable y después mover la variable fuera del signo integral. Por ejemplo,

$$\int (x^2+1)^2\,dx \neq \frac{1}{2x}\int (x^2+1)^2(2x)\,dx.$$

Después de todo, si fuera legítimo mover cantidades variables fuera del signo de la integral, se podría sacar el integrando completo y simplificar el proceso completo. Sin embargo, el resultado sería incorrecto. ■

Cambio de variables

Con un **cambio de variables** formal se puede reescribir por completo la integral en términos de u y du (o cualquier otra variable conveniente). Aunque este procedimiento puede implicar más pasos escritos que el reconocimiento de patrones ilustrado en los ejemplos 1 a 3, resulta útil para integrandos complicados. La técnica del cambio de variable utiliza la notación de Leibniz para la diferencial. Esto es, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$, y la integral en el teorema 4.13 toma la forma

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C.$$

EJEMPLO 4 Cambio de variable

Encontrar $\displaystyle\int \sqrt{2x-1}\,dx$.

Solución Primero, sea u la función interior, $u = 2x - 1$. Calcular después la diferencial du de manera que $du = 2\,dx$. Ahora, utilizando $\sqrt{2x-1} = \sqrt{u}$ y $dx = du/2$, sustituir para obtener

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2x-1}\,dx &= \int \sqrt{u}\left(\frac{du}{2}\right) && \text{Integrar en términos de } u.\\
&= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du && \text{Regla del múltiplo constante.}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C && \text{Antiderivada en términos de } u.\\
&= \frac{1}{3}u^{3/2} + C && \text{Simplificar.}\\
&= \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C. && \text{Antiderivada en términos de } x.
\end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO Como la integración suele ser más difícil que la derivación, verificar la respuesta en un problema de integración mediante la derivación. Así, en el ejemplo 4 debe derivarse $\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C$ para verificar que se obtiene el integrando original.

EJEMPLO 5 Cambio de variables

Encontrar $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$.

Solución Como en el ejemplo previo, considerar que $u = 2x - 1$ para obtener $dx = du/2$. Como el integrando contiene un factor de x, se tiene que despejar x en términos de u, como se muestra.

$$u = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad x = (u+1)/2 \qquad \text{Resolver para } x \text{ en términos de } u.$$

Después de esto, utilizando la sustitución, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{2x-1}\,dx &= \int \left(\frac{u+1}{2}\right) u^{1/2}\left(\frac{du}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\int (u^{3/2} + u^{1/2})\,du\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C\\
&= \frac{1}{10}(2x-1)^{5/2} + \frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

Para completar el cambio de variable en el ejemplo 5, debe resolverse para x en términos de u. Algunas veces esto es muy difícil. Por fortuna no siempre es necesario, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Cambio de variables

Determinar $\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x \, dx$.

Solución Debido a que $\operatorname{sen}^2 3x = (\operatorname{sen} 3x)^2$, podemos tomar $u = \operatorname{sen} 3x$. Entonces

$$du = (\cos 3x)(3)\, dx.$$

Luego, debido a que $\cos 3x \, dx$ es parte de la integral original, puede escribirse

$$\frac{du}{3} = \cos 3x \, dx.$$

AYUDA DE ESTUDIO Cuando se realiza un cambio de variable, cerciorarse de que la respuesta se escriba utilizando las mismas variables que en el integrando original. Así, en el ejemplo 6, no debe dejarse la respuesta como

$$\tfrac{1}{9}u^3 + C$$

sino más bien, reemplazar u por $\operatorname{sen} 3x$.

Sustituyendo u y $du/3$ en la integral original, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x \, dx &= \int u^2 \frac{du}{3} \\
&= \frac{1}{3}\int u^2 \, du \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{u^3}{3}\right) + C \\
&= \frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x + C.
\end{aligned}$$

Es posible verificar lo anterior derivando.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x\right] &= \left(\frac{1}{9}\right)(3)(\operatorname{sen} 3x)^2(\cos 3x)(3) \\
&= \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x
\end{aligned}$$

Como la derivación produce el integrando original, se ha obtenido la antiderivada o primitiva correcta.

Los pasos que se utilizan para la integración por sustitución se resumen en la siguiente guía.

Estrategia para realizar un cambio de variable

1. Elegir una sustitución $u = g(x)$. Usualmente, es mejor elegir la parte *interna* de una función compuesta, tal como una cantidad elevada a una potencia.
2. Calcular $du = g'(x)dx$.
3. Reescribir la integral en términos de la variable u.
4. Encontrar la integral resultante en términos de u.
5. Reemplazar u por $g(x)$ para obtener una antiderivada o primitiva en términos de x.
6. Verificar la respuesta por derivación.

La regla general de la potencia para integrales

Una de las sustituciones de u más comunes incluye cantidades en el integrando que se elevan a una potencia. Debido a la importancia de este tipo de sustitución, se le da un nombre especial: la **regla general de la potencia para integrales**. Una prueba de esta regla sigue directamente de la regla (simple) de la potencia para la integración, junto con el teorema 4.13.

TEOREMA 4.14 LA REGLA GENERAL DE LA POTENCIA PARA INTEGRALES

Si g es una función derivable de x, entonces

$$\int [g(x)]^n g'(x)\, dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

De manera equivalente, si $u = g(x)$, entonces

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

EJEMPLO 7 Sustitución y regla general de la potencia

a) $$\int 3(3x-1)^4\, dx = \int \overbrace{(3x-1)^4}^{u^4}\overbrace{(3)\, dx}^{du} = \overbrace{\frac{(3x-1)^5}{5}}^{u^5/5} + C$$

b) $$\int (2x+1)(x^2+x)\, dx = \int \overbrace{(x^2+x)^1}^{u^1}\overbrace{(2x+1)\, dx}^{du} = \overbrace{\frac{(x^2+x)^2}{2}}^{u^2/2} + C$$

c) $$\int 3x^2\sqrt{x^3-2}\, dx = \int \overbrace{(x^3-2)^{1/2}}^{u^{1/2}}\overbrace{(3x^2)\, dx}^{du} = \overbrace{\frac{(x^3-2)^{3/2}}{3/2}}^{u^{3/2}/(3/2)} + C = \frac{2}{3}(x^3-2)^{3/2} + C$$

d) $$\int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2}\, dx = \int \overbrace{(1-2x^2)^{-2}}^{u^{-2}}\overbrace{(-4x)\, dx}^{du} = \overbrace{\frac{(1-2x^2)^{-1}}{-1}}^{u^{-1}/(-1)} + C = -\frac{1}{1-2x^2} + C$$

e) $$\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx = -\int \overbrace{(\cos x)^2}^{u^2}\overbrace{(-\operatorname{sen} x)\, dx}^{du} = -\overbrace{\frac{(\cos x)^3}{3}}^{u^3/3} + C$$

Algunas integrales cuyos integrandos incluyen cantidades elevadas a potencias no pueden determinarse mediante la regla general de la potencia. Considerar las dos integrales

$$\int x(x^2+1)^2\, dx \quad \text{y} \quad \int (x^2+1)^2\, dx.$$

La sustitución $u = x^2 + 1$ funciona en la primera integral pero no en la segunda. En la segunda, la sustitución falla porque al integrando le falta el factor x necesario para formar du. Por fortuna, *esta integral particular* puede hacerse desarrollando el integrando como $(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$ y utilizando la regla (simple) de la potencia para integrar cada término.

EXPLORACIÓN

Suponer que se pide encontrar una de las siguientes integrales. ¿Cuál elegiría? Explicar la respuesta.

a) $\displaystyle\int \sqrt{x^3+1}\, dx$ o

$\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}\, dx$

b) $\displaystyle\int \tan(3x)\sec^2(3x)\, dx$ o

$\displaystyle\int \tan(3x)\, dx$

Cambio de variable para integrales definidas

Cuando se usa la sustitución de u en una integral definida, muchas veces es conveniente determinar los límites de integración para la variable u en vez de convertir la antiderivada o primitiva de nuevo a la variable x y calcularla en los límites originales. Este cambio de variable se establece explícitamente en el siguiente teorema. La demostración sigue del teorema 4.13 en combinación con el teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA 4.15 CAMBIO DE VARIABLE PARA INTEGRALES DEFINIDAS

Si la función $u = g(x)$ tiene una derivada continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y f es continua en el recorrido o rango de g, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

EJEMPLO 8 Cambio de variables

Calcular $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx$.

Solución Para calcular esta integral, sea $u = x^2 + 1$. Después,

$$u = x^2 + 1 \implies du = 2x\,dx.$$

Antes de sustituir, determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = 0,\ u = 0^2 + 1 = 1.$	Cuando $x = 1,\ u = 1^2 + 1 = 2.$

Ahora, es posible sustituir para obtener

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^3(2x)\,dx$$

Límites de integración para x.

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\,du$$

Límites de integración para u.

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{15}{8}.$$

Intentar reescribir la antiderivada o primitiva $\frac{1}{2}(u^4/4)$ en términos de la variable x y calcular la integral definida en los límites originales de integración, como se muestra.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

Notar que se obtiene el mismo resultado.

EJEMPLO 9 Cambio de variables

Calcular $A = \displaystyle\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx.$

Solución Para calcular esta integral, considerar que $u = \sqrt{2x-1}$. Después, obtener

$$\begin{aligned} u^2 &= 2x - 1 \\ u^2 + 1 &= 2x \\ \frac{u^2+1}{2} &= x \\ u\,du &= dx. \end{aligned}$$

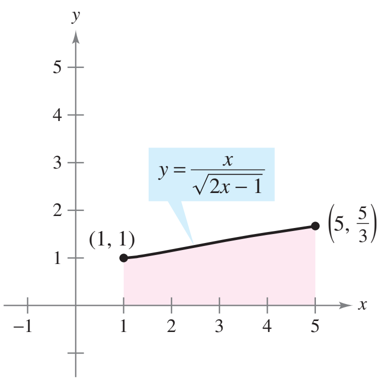
Diferenciar cada lado.

Antes de sustituir, determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = 1$, $u = \sqrt{2-1} = 1$.	Cuando $x = 5$, $u = \sqrt{10-1} = 3$.

Ahora, sustituir para obtener

$$\begin{aligned} \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx &= \int_1^3 \frac{1}{u}\left(\frac{u^2+1}{2}\right) u\,du \\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 (u^2+1)\,du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3} + u\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2}\left(9 + 3 - \frac{1}{3} - 1\right) \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$



La región antes de la sustitución tiene un área de $\frac{16}{3}$
Figura 4.38

Geométricamente, es posible interpretar la ecuación

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \int_1^3 \frac{u^2+1}{2}\,du$$

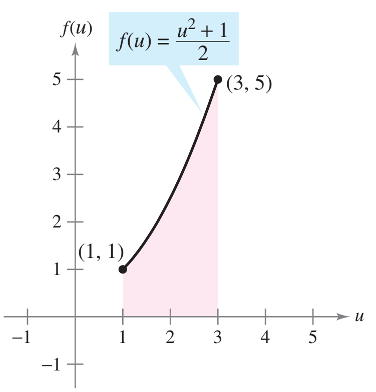
en el sentido de que las dos regiones *diferentes* que se ilustran en las figuras 4.38 y 4.39 tienen la *misma* área.

Al calcular integrales definidas por cambio de variable (sustitución), es posible que el límite superior de integración correspondiente a la nueva variable u sea más pequeño que el límite inferior. Si esto ocurre, no hay que reordenar los límites. Simplemente se calcula la integral de la manera usual. Por ejemplo, después de sustituir $u = \sqrt{1-x}$ en la integral

$$\int_0^1 x^2(1-x)^{1/2}\,dx$$

se obtiene $u = \sqrt{1-1} = 0$ cuando $x = 1$, y $u = \sqrt{1-0} = 1$ cuando $x = 0$. De tal modo, la forma correcta de esta integral en la variable u es

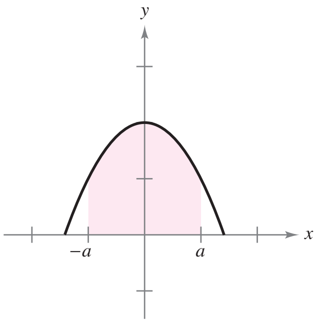
$$-2\int_1^0 (1-u^2)^2 u^2\,du.$$



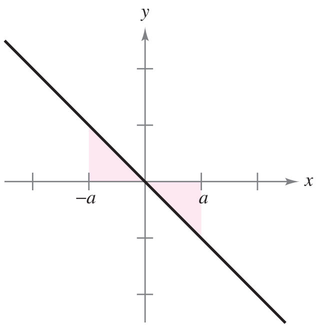
La región después de la sustitución tiene un área de $\frac{16}{3}$
Figura 4.39

Integración de funciones pares e impares

Incluso con un cambio de variable, la integración puede ser difícil. En ocasiones se puede simplificar el cálculo de una integral definida (en un intervalo que es simétrico respecto al eje y o respecto al origen) reconociendo que el integrando es una función par o impar (ver la figura 4.40).



Función par



Función impar
Figura 4.40

TEOREMA 4.16 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES PARES E IMPARES

Sea f integrable en el intervalo cerrado $[-a, a]$.

1. Si f es una función *par*, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

2. Si f es una función *impar*, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

DEMOSTRACIÓN Como f es par, se sabe que $f(x) = f(-x)$. Utilizando el teorema 4.13 con la sustitución $u = -x$, se obtiene

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = -\int_{a}^{0} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Por último, utilizando el teorema 4.6, se llega a

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Esto demuestra la primera propiedad. La demostración de la segunda propiedad se deja al lector (ver el ejercicio 137).

EJEMPLO 10 Integración de una función impar

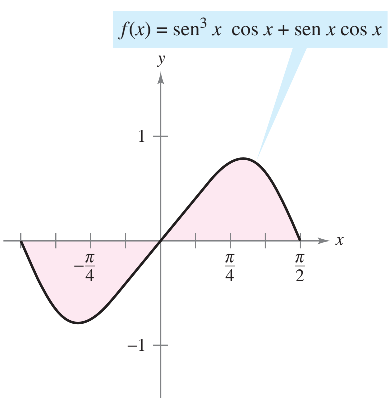
Calcular $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x)\,dx.$

Solución Haciendo $f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x$ se obtiene

$$\begin{aligned}f(-x) &= \operatorname{sen}^3(-x)\cos(-x) + \operatorname{sen}(-x)\cos(-x)\\ &= -\operatorname{sen}^3 x \cos x - \operatorname{sen} x \cos x = -f(x).\end{aligned}$$

De tal modo, f es una función impar, y debido a que f es simétrica respecto al origen en $[-\pi/2, \pi/2]$, es posible aplicar el teorema 4.16 para concluir que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x)\,dx = 0.$$



Como f es una función impar,
$\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx = 0$
Figura 4.41

NOTA De acuerdo con la figura 4.41 puede verse que las dos regiones a cualquier lado del eje tienen la misma área. Sin embargo, como una se encuentra por debajo del eje x y otra está por encima del mismo, la integración produce un efecto de cancelación. (Se verá más al respecto en la sección 7.1.)

4.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, completar la tabla identificando *u* y *du* para la integral.

$\int f(g(x))g'(x)\,dx$	$u = g(x)$	$du = g'(x)\,dx$
1. $\int (8x^2+1)^2(16x)\,dx$		
2. $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$		
3. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$		
4. $\int \sec 2x \tan 2x\,dx$		
5. $\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx$		
6. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$		

En los ejercicios 7 a 10, determinar qué se necesita para usar sustitución para calcular la integral. (No calcular la integral.)

7. $\int \sqrt{x}(6-x)\,dx$ **8.** $\int x\sqrt{x+4}\,dx$

9. $\int x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$ **10.** $\int x\cos x^2\,dx$

En los ejercicios 11 a 38, encontrar la integral indefinida y verificar el resultado por derivación.

11. $\int (1+6x)^4(6)\,dx$ **12.** $\int (x^2-9)^3(2x)\,dx$

13. $\int \sqrt{25-x^2}\,(-2x)\,dx$ **14.** $\int \sqrt[3]{3-4x^2}(-8x)\,dx$

15. $\int x^3(x^4+3)^2\,dx$ **16.** $\int x^2(x^3+5)^4\,dx$

17. $\int x^2(x^3-1)^4\,dx$ **18.** $\int x(5x^2+4)^3\,dx$

19. $\int t\sqrt{t^2+2}\,dt$ **20.** $\int t^3\sqrt{t^4+5}\,dt$

21. $\int 5x\,\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ **22.** $\int u^2\sqrt{u^3+2}\,du$

23. $\int \frac{x}{(1-x^2)^3}\,dx$ **24.** $\int \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,dx$

25. $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$ **26.** $\int \frac{x^2}{(16-x^3)^2}\,dx$

27. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **28.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$

29. $\int \left(1+\frac{1}{t}\right)^3\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$ **30** $\int \left[x^2+\frac{1}{(3x)^2}\right]dx$

31. $\int \frac{1}{\sqrt{2x}}\,dx$ **32.** $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

33. $\int \frac{x^2+5x-8}{\sqrt{x}}\,dx$ **34.** $\int \frac{t-9t^2}{\sqrt{t}}\,dt$

35. $\int t^2\left(t-\frac{8}{t}\right)dt$ **36.** $\int \left(\frac{t^3}{3}+\frac{1}{4t^2}\right)dt$

37. $\int (9-y)\sqrt{y}\,dy$ **38.** $\int 4\pi y(6+y^{3/2})\,dy$

En los ejercicios 39 a 42, resolver la ecuación diferencial.

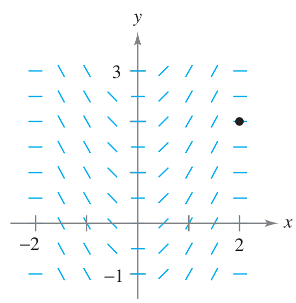
39. $\frac{dy}{dx} = 4x + \frac{4x}{\sqrt{16-x^2}}$ **40.** $\frac{dy}{dx} = \frac{10x^2}{\sqrt{1+x^3}}$

41. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}$ **42.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+1}}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 43 a 46, se indican una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. Un *campo de pendientes* consiste en segmentos de recta con pendientes dadas por la ecuación diferencial. Estos segmentos de recta proporcionan una perspectiva visual de las direcciones de las soluciones de la ecuación diferencial. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto dado. *b*) Utilizar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representar la solución. Comparar el resultado con los dibujos del apartado *a*).**

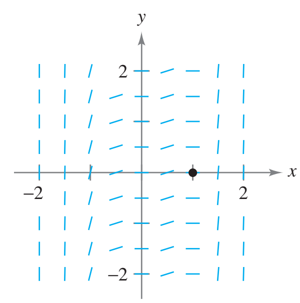
43. $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{4-x^2}$

$(2, 2)$



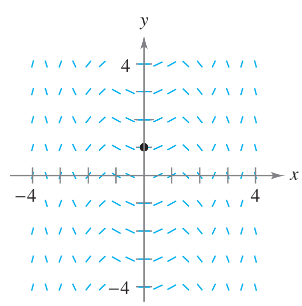
44. $\frac{dy}{dx} = x^2(x^3-1)^2$

$(1, 0)$



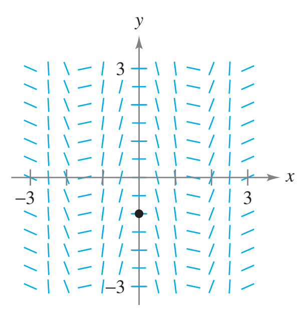
45. $\frac{dy}{dx} = x\cos x^2$

$(0, 1)$



46. $\frac{dy}{dx} = -2\sec(2x)\tan(2x)$

$(0, -1)$



En los ejercicios 47 a 60, encontrar la integral indefinida.

47. $\displaystyle\int \pi \operatorname{sen} \pi x\, dx$ **48.** $\displaystyle\int 4x^3 \operatorname{sen} x^4\, dx$

49. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 4x\, dx$ **50.** $\displaystyle\int \cos 8x\, dx$

51. $\displaystyle\int \frac{1}{\theta^2}\cos\frac{1}{\theta}\, d\theta$ **52.** $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x^2\, dx$

53. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x\, dx$

54. $\displaystyle\int \sec(1 - x)\tan(1 - x)\, dx$

55. $\displaystyle\int \tan^4 x \sec^2 x\, dx$ **56.** $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\,\sec^2 x\, dx$

57. $\displaystyle\int \frac{\csc^2 x}{\cot^3 x}\, dx$ **58.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\, dx$

59. $\displaystyle\int \cot^2 x\, dx$ **60.** $\displaystyle\int \csc^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

En los ejercicios 61 a 66, encontrar una ecuación para la función *f* que tiene la derivada dada y cuya gráfica pasa por el punto indicado.

	Derivada	*Punto*
61.	$f'(x) = -\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$	$(0, 6)$
62.	$f'(x) = \pi \sec \pi x \tan \pi x$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
63.	$f'(x) = 2 \operatorname{sen} 4x$	$\left(\dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{1}{2}\right)$
64.	$f'(x) = \sec^2(2x)$	$\left(\dfrac{\pi}{2}, 2\right)$
65.	$f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2$	$(2, 10)$
66.	$f'(x) = -2x\sqrt{8 - x^2}$	$(2, 7)$

En los ejercicios 67 a 74, encontrar la integral indefinida mediante el método que se muestra en el ejemplo 5.

67. $\displaystyle\int x\sqrt{x + 6}\, dx$ **68.** $\displaystyle\int x\sqrt{4x + 1}\, dx$

69. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1 - x}\, dx$ **70.** $\displaystyle\int (x + 1)\sqrt{2 - x}\, dx$

71. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2x - 1}}\, dx$ **72.** $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 4}}\, dx$

73. $\displaystyle\int \frac{-x}{(x + 1) - \sqrt{x + 1}}\, dx$ **74.** $\displaystyle\int t\sqrt[3]{t + 10}\, dt$

En los ejercicios 75 a 86, calcular la integral definida. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

75. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x^2 + 1)^3\, dx$ **76.** $\displaystyle\int_{-2}^{4} x^2(x^3 + 8)^2\, dx$

77. $\displaystyle\int_{1}^{2} 2x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx$ **78.** $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sqrt{1 - x^2}\, dx$

79. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}\, dx$ **80.** $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{1 + 2x^2}}\, dx$

81. $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + \sqrt{x})^2}\, dx$ **82.** $\displaystyle\int_{0}^{2} x\sqrt[3]{4 + x^2}\, dx$

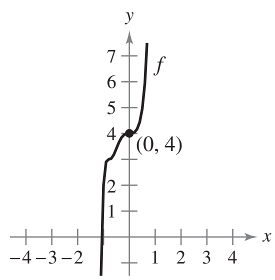
83. $\displaystyle\int_{1}^{2} (x - 1)\sqrt{2 - x}\, dx$ **84.** $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{x}{\sqrt{2x - 1}}\, dx$

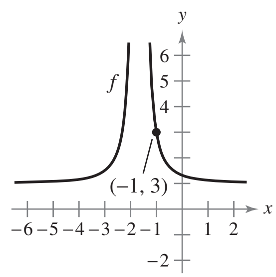
85. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos\left(\frac{2x}{3}\right) dx$

86. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} (x + \cos x)\, dx$

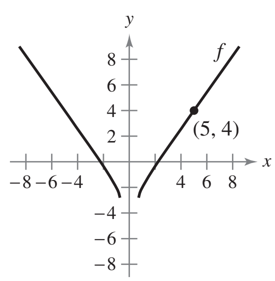
Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 87 a 90, se muestra la gráfica de una función *f*. Emplear la ecuación diferencial y el punto dado para determinar una ecuación de la función.**

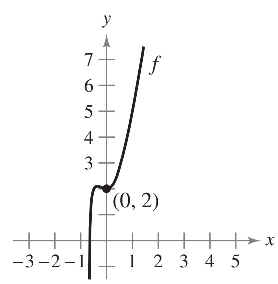
87. $\dfrac{dy}{dx} = 18x^2(2x^3 + 1)^2$ **88.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-48}{(3x + 5)^3}$





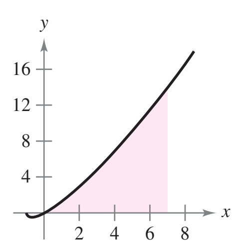
89. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 - 1}}$ **90.** $\dfrac{dy}{dx} = 4x + \dfrac{9x^2}{(3x^3 + 1)^{(3/2)}}$

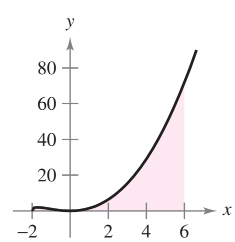




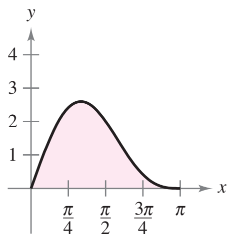
En los ejercicios 91 a 96, encontrar el área de la región. Emplear una herramienta de graficación para verificar el resultado.

91. $\displaystyle\int_{0}^{7} x\sqrt[3]{x + 1}\, dx$ **92.** $\displaystyle\int_{-2}^{6} x^2\sqrt[3]{x + 2}\, dx$

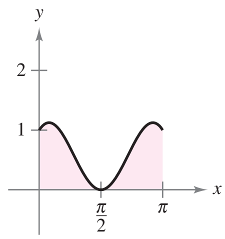




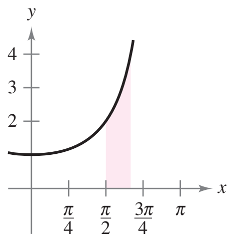
93. $y = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$



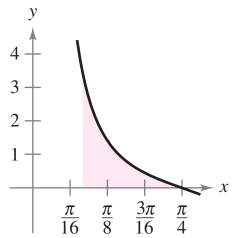
94. $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$



95. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$



96. $\displaystyle\int_{\pi/12}^{\pi/4} \csc 2x \cot 2x \, dx$



En los ejercicios 97 a 102, utilizar una herramienta de graficación para evaluar la integral. Hacer la gráfica de la región cuya área está dada por la integral definida.

97. $\displaystyle\int_0^6 \frac{x}{\sqrt{4x+1}}\, dx$

98. $\displaystyle\int_0^2 x^3\sqrt{2x+3}\, dx$

99. $\displaystyle\int_3^7 x\sqrt{x-3}\, dx$

100. $\displaystyle\int_1^5 x^2\sqrt{x-1}\, dx$

101. $\displaystyle\int_1^4 \left(\theta + \operatorname{sen}\frac{\theta}{4}\right) d\theta$

102. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos 3x \, dx$

En los ejercicios 103 a 106, calcular la integral utilizando las propiedades de las funciones pares e impares como una ayuda.

103. $\displaystyle\int_{-2}^2 x^2(x^2+1)\, dx$

104. $\displaystyle\int_{-2}^2 x(x^2+1)^3\, dx$

105. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx$

106. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x \, dx$

107. Usar $\int_0^4 x^2\, dx = \frac{64}{3}$ para calcular cada integral indefinida sin usar el teorema fundamental del cálculo.

a) $\displaystyle\int_{-4}^0 x^2\, dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-4}^4 x^2\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^4 -x^2\, dx$ *d)* $\displaystyle\int_{-4}^0 3x^2\, dx$

108. Emplear la simetría de las gráficas de las funciones seno y coseno como ayuda para el cálculo de cada integral definida.

a) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{sen} x\, dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx$ *d)* $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

En los ejercicios 109 y 110, escribir la integral como la suma de la integral de una función impar y la integral de una función par. Utilizar esta simplificación para calcular la integral.

109. $\displaystyle\int_{-3}^3 (x^3 + 4x^2 - 3x - 6)\, dx$

110. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen} 4x + \cos 4x)\, dx$

Desarrollo de conceptos

111. Describir por qué

$$\int x(5-x^2)^3\, dx \neq \int u^3\, du$$

donde $u = 5 - x^2$.

112. Sin integrar, explicar por qué

$$\int_{-2}^2 x(x^2+1)^2\, dx = 0.$$

113. Si f es continua y $\displaystyle\int_0^8 f(x)\, dx = 32$, encontrar $\displaystyle\int_0^4 f(2x)\, dx$.

Para discusión

114. ***Escribir*** Encontrar la integral indefinida en dos formas. Explicar alguna diferencia en las formas de la respuesta.

a) $\displaystyle\int (2x-1)^2\, dx$ *b)* $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

c) $\displaystyle\int \tan x \sec^2 x\, dx$

115. ***Flujo de efectivo*** La tasa de desembolso de dQ/dt de una donación federal de 2 millones de dólares es proporcional al cuadrado de $100 - t$. El tiempo t se mide en días $(0 \le t \le 100)$ y Q es la cantidad que queda para ser desembolsada. Determinar la cantidad que queda para desembolsarse después de 50 días. Suponer que todo el dinero se gastará en 100 días.

116. ***Depreciación*** La tasa de depreciación dV/dt de una máquina es inversamente proporcional al cuadrado de $t + 1$, donde V es el valor de la máquina t años después de que se compró. El valor inicial de la máquina fue de 500 000 dólares, y su valor decreció 100 000 dólares en el primer año. Estimar su valor después de 4 años.

117. ***Precipitación*** La precipitación mensual normal en el aeropuerto de Seattle-Tacoma puede aproximarse mediante el modelo

$R = 2.876 + 2.202 \operatorname{sen}(0.576t + 0.847)$

donde R se mide en pulgadas y t es el tiempo en meses, con $t = 0$ correspondiente al 1 de enero. (*Fuente: U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration*)

a) Determinar los extremos de la función en el periodo de un año.

b) Emplear integración para aproximar la precipitación anual normal. (*Sugerencia:* Integrar sobre el intervalo [0, 12].)

c) Aproximar el promedio de la precipitación mensual durante los meses de octubre, noviembre y diciembre.

118. ***Ventas*** Las ventas S (en miles de unidades) de un producto de temporada están dadas por el modelo

$$S = 74.50 + 43.75 \text{ sen } \frac{\pi t}{6}$$

donde t es el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiente a enero. Determinar las ventas medias para cada periodo.

a) El primer trimestre $(0 \leq t \leq 3)$

b) El segundo trimestre $(3 \leq t \leq 6)$

c) El año completo $(0 \leq t \leq 12)$

119. ***Suministro de agua*** Un modelo para la tasa de flujo de agua en una estación de bombeo en un día determinado es

$$R(t) = 53 + 7 \text{ sen}\left(\frac{\pi t}{6} + 3.6\right) + 9 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + 8.9\right)$$

donde $0 \leq t \leq 24$. R es la tasa de flujo en miles de galones por hora y t es el tiempo en horas.

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función de la tasa de flujo y aproximar la tasa de flujo máximo en la estación de bombeo.

b) Aproximar el volumen total del agua bombeada en un día.

120. ***Electricidad*** La intensidad de corriente alterna en un circuito eléctrico es

$$I = 2 \text{ sen}(60\pi t) + \cos(120\pi t)$$

donde I se mide en amperes y t se mide en segundos. Determinar la intensidad media para cada intervalo de tiempo.

a) $0 \leq t \leq \frac{1}{60}$

b) $0 \leq t \leq \frac{1}{240}$

c) $0 \leq t \leq \frac{1}{30}$

Probabilidad **En los ejercicios 121 y 122, la función**

$$\boldsymbol{f(x) = kx^n(1 - x)^m, \quad 0 \leq x \leq 1}$$

donde $n > 0$, $m > 0$ y k es una constante, puede utilizarse para representar diversas distribuciones de probabilidad. Si k se elige de manera tal que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

la probabilidad de que x caerá entre a y b $(0 \leq a \leq b \leq 1)$ es

$$P_{a,\,b} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

121. La probabilidad de que una persona recuerde entre $100a\%$ y $100b\%$ del material aprendido en un experimento es

$$P_{a,\,b} = \int_a^b \frac{15}{4} x\sqrt{1 - x}\,dx$$

donde x representa el porcentaje recordado. (Ver la figura.)

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo elegido al azar recuerde entre 50 y 75% del material?

b) ¿Cuál es el porcentaje medio de lo que se recuerda? Esto es, ¿para qué valor de b es cierto que la probabilidad de recordar de 0 a b es 0.5?

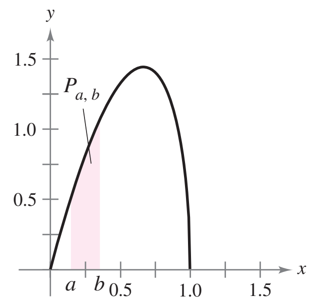


Figura para 121

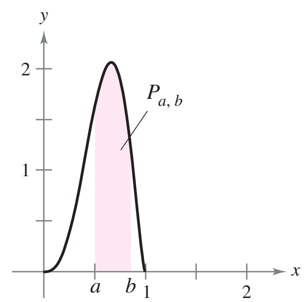
122. La probabilidad de que se tomen muestras de un mineral de una región que contiene entre $100a\%$ y $100b\%$ de hierro es

$$P_{a,\,b} = \int_a^b \frac{1\,155}{32} x^3(1 - x)^{3/2}\,dx$$

donde x representa el porcentaje de hierro. (Ver la figura.) ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contendrá entre

a) 0 y 25% de hierro?

b) 50 y 100% de hierro?



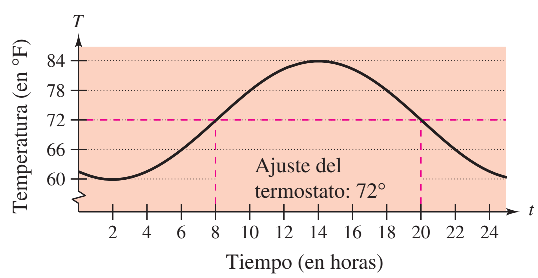
123. ***Temperatura*** La temperatura en grados Fahrenheit en una casa es

$$T = 72 + 12 \text{ sen}\left[\frac{\pi(t - 8)}{12}\right]$$

donde t es el tiempo en horas, con $t = 0$ representando la media noche. El costo horario de refrigeración de una casa es de 0.10 dólares por grado.

a) Encontrar el costo C de refrigeración de la casa si el termostato se ajusta en 72°F calculando la integral

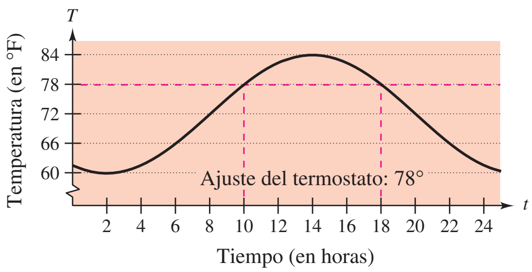
$$C = 0.1\int_8^{20} \left[72 + 12 \text{ sen } \frac{\pi(t - 8)}{12} - 72\right] dt. \text{ (Ver la figura.)}$$



b) Encontrar el ahorro al reajustar el termostato en 78 °F calculando la integral

$$C = 0.1\int_{10}^{18}\left[72 + 12\ \text{sen}\ \frac{\pi(t-8)}{12} - 78\right] dt.$$

(Ver la figura.)



124. ***Manufactura*** Un fabricante de fertilizantes encuentra que las ventas nacionales de fertilizantes siguen el patrón estacional

$$F = 100\,000\left[1 + \text{sen}\ \frac{2\pi(t-60)}{365}\right]$$

donde F se mide en libras y t representa el tiempo en días, con $t = 1$ correspondiente al 1 de enero. El fabricante desea establecer un programa para producir una cantidad uniforme de fertilizante cada día. ¿Cuál debe ser esta cantidad?

125. ***Análisis gráfico*** Considerar las funciones f y g, donde

$$f(x) = 6\ \text{sen}\ x \cos^2 x \quad \text{y} \quad g(t) = \int_0^t f(x)\, dx.$$

a) Emplear una herramienta de graficación para representar f y g en la misma ventana de observación.

b) Explicar por qué g es no negativa.

c) Identificar los puntos sobre la gráfica de g que corresponden a los extremos de f.

d) ¿Cada uno de los ceros de f corresponden a un extremo de g? Explicar.

e) Considerar la función

$$h(t) = \int_{\pi/2}^{t} f(x)\, dx.$$

Utilizar una herramienta de graficación para representar h. ¿Cuál es la relación entre g y h? Verificar la suposición.

126. Determinar $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\text{sen}(i\pi/n)}{n}$ evaluando una integral definida apropiada sobre el intervalo [0, 1].

127. *a*) Demostrar que $\int_0^1 x^2(1-x)^5\, dx = \int_0^1 x^5(1-x)^2\, dx$.

b) Demostrar que $\int_0^1 x^a(1-x)^b\, dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\, dx$.

128. *a*) Demostrar que $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\, x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$.

b) Demostrar que $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n\, x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$, donde n es un entero positivo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 129 a 134, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

129. $\int (2x+1)^2\, dx = \frac{1}{3}(2x+1)^3 + C$

130. $\int x(x^2+1)\, dx = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right) + C$

131. $\int_{-10}^{10} (ax^3 + bx^2 + cx + d)\, dx = 2\int_0^{10} (bx^2 + d)\, dx$

132. $\int_a^b \text{sen}\, x\, dx = \int_a^{b+2\pi} \text{sen}\, x\, dx$

133. $4\int \text{sen}\, x \cos x\, dx = -\cos 2x + C$

134. $\int \text{sen}^2 2x \cos 2x\, dx = \frac{1}{3}\text{sen}^3\, 2x + C$

135. Suponer que f es continua en todos lados y que c es una constante. Demostrar que

$$\int_{ca}^{cb} f(x)\, dx = c\int_a^b f(cx)\, dx.$$

136. *a*) Verificar que $\text{sen}\, u - u\cos u + C = \int u\ \text{sen}\, u\, du$.

b) Utilizar el apartado *a*) para demostrar que $\int_0^{\pi^2} \text{sen}\sqrt{x}\, dx = 2\pi$.

137. Completar la prueba del teorema 4.16.

138. Demostrar que si f es continua en la recta numérica real completa, entonces

$$\int_a^b f(x+h)\, dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x)\, dx.$$

Preparación del examen Putnam

139. Si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales que satisfacen

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

demostrar que la ecuación $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ tiene al menos un cero real.

140. Encontrar todas las funciones continuas positivas $f(x)$, para $0 \le x \le 1$, tales que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1$$

$$\int_0^1 f(x)x\, dx = \alpha$$

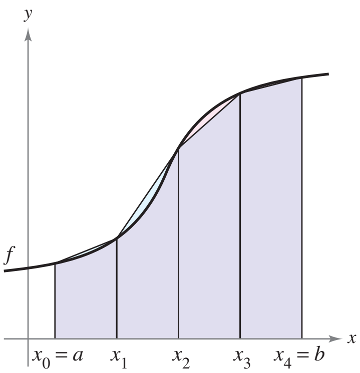
$$\int_0^1 f(x)x^2\, dx = \alpha^2$$

donde α es un número real.

4.6 Integración numérica

- **Aproximar una integral definida utilizando la regla de los trapecios.**
- **Aproximar una integral definida utilizando la regla de Simpson.**
- **Analizar los errores de aproximación en la regla de los trapecios y en la regla de Simpson.**

La regla de los trapecios



El área de la región puede aproximarse utilizando cuatro trapecios
Figura 4.42

Algunas funciones elementales simplemente no tienen antiderivadas o primitivas que sean funciones elementales. Por ejemplo, no hay función elemental que tenga alguna de las siguientes funciones como su derivada.

$$\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}, \qquad \sqrt{x}\cos x, \qquad \frac{\cos x}{x}, \qquad \sqrt{1-x^3}, \qquad \operatorname{sen} x^2$$

Si se ha de calcular una integral definida cuyo integrando no admite primitiva (antiderivada), el teorema fundamental del cálculo no es de utilidad y hay que recurrir a una técnica de aproximación. Dos de estas técnicas se describen en esta sección.

Una forma de aproximar una integral definida consiste en utilizar n trapecios, como se muestra en la figura 4.42. En la formulación de este método, se supone que f es continua y positiva en el intervalo $[a, b]$. De tal modo, la integral definida

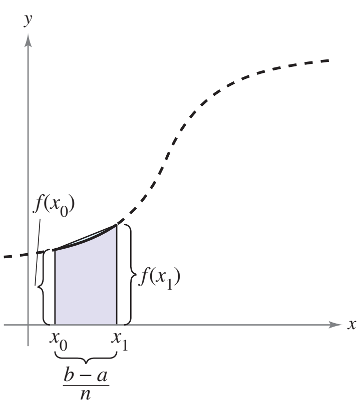
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

representa el área de la región delimitada por la gráfica de f y el eje x, desde $x = a$ hasta $x = b$. Primero, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = (b - a)/n$, de modo tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_n = b.$$

Luego se forma un trapecio para cada subintervalo (ver la figura 4.43). El área del i-ésimo trapecio es

$$\text{Área del } i\text{-ésimo trapecio} = \left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right).$$



El área del primer trapecio es

$$\left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Figura 4.43

Esto implica que la suma de las áreas de los n trapecios es

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\right] \\
&= \left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \cdot \cdot \cdot + f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\
&= \left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdot \cdot \cdot + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].
\end{aligned}$$

Haciendo $\Delta x = (b - a)/n$, puede tomarse el límite cuando $n \to \infty$ para obtener

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdot \cdot \cdot + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{[f(a) - f(b)]\,\Delta x}{2} + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{[f(a) - f(b)](b-a)}{2n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\
&\quad = 0 + \int_a^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

El resultado se resume en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.17 LA REGLA DE LOS TRAPECIOS

Sea f continua en $[a, b]$. La regla de los trapecios para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ está dada por

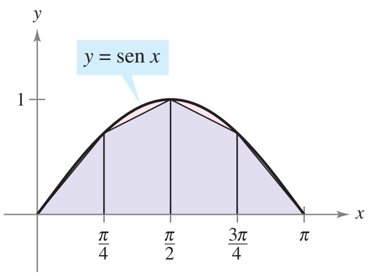
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdot\cdot\cdot + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Además, como $n \to \infty$, el lado derecho se aproxima a $\int_a^b f(x)\,dx$.

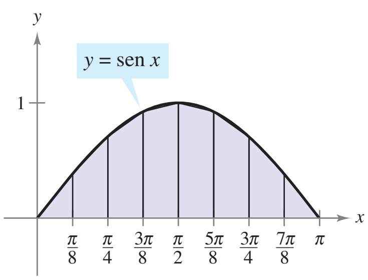
NOTA Observar que los coeficientes en la regla de los trapecios siguen el siguiente patrón.

1 2 2 2 . . . 2 2 1

EJEMPLO 1 Aproximación con la regla de los trapecios



Cuatro subintervalos



Ocho subintervalos

Aproximaciones trapezoidales
Figura 4.44

Utilizar la regla de los trapecios para aproximar

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx.$$

Comparar los resultados para $n = 4$ y $n = 8$, como se muestra en la figura 4.44.

Solución Cuando $n = 4$, $\Delta x = \pi/4$, y se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx &\approx \frac{\pi}{8}\left(\operatorname{sen} 0 + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\pi\right)\\ &= \frac{\pi}{8}\left(0 + \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 0\right) = \frac{\pi\left(1 + \sqrt{2}\right)}{4} \approx 1.896.\end{aligned}$$

Cuando $n = 8$, $\Delta x = \pi/8$, y se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\pi}{16}\Big(&\operatorname{sen} 0 + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\\ &+ 2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{7\pi}{8} + \operatorname{sen}\pi\Big)\\ = \frac{\pi}{16}\Big(&2 + 2\sqrt{2} + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + 4\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}\Big) \approx 1.974.\end{aligned}$$

Para esta integral particular, se podría haber encontrado una antiderivada y determinado que el área exacta de la región es 2.

TECNOLOGÍA La mayoría de las herramientas de graficación y de los sistemas algebraicos computarizados cuenta con programas incorporados que es posible utilizar para aproximar el valor de una integral definida. Utilizar un programa de este tipo para aproximar la integral del ejemplo 1. ¿Qué tan precisa es su aproximación?

Cuando se usa uno de estos programas, debe tenerse cuidado con sus limitaciones. Muchas veces, no se le da una indicación del grado de exactitud de la aproximación. Otras, se le puede dar una aproximación por completo equivocada. Por ejemplo, utilizar un programa de integración numérica incorporada para calcular

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\,dx.$$

La herramienta de graficación producirá un mensaje de error, ¿no es así?

Es interesante comparar la regla de los trapecios con la regla del punto medio que se dio en la sección 4.2 (ejercicios 73 a 76). En la regla de los trapecios, se promedian los valores de la función en los puntos extremos de los subintervalos, pero la regla del punto medio toma los valores de la función de los puntos medios de los subintervalos.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x \qquad \text{Regla del punto medio.}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}\right)\Delta x \qquad \text{Regla de los trapecios.}$$

NOTA Hay dos puntos importantes que deben señalarse respecto a la regla de los trapecios (o a la regla del punto medio). Primero, la aproximación tiende a volverse más exacta a medida que n aumenta. Así, en el ejemplo 1, si $n = 16$, la regla de los trapecios produce una aproximación de 1.994. Segundo, aunque podría utilizarse el teorema fundamental para calcular la integral en el ejemplo 1, este teorema no puede utilizarse para calcular una integral tan simple como $\int_0^\pi \operatorname{sen} x^2 dx$ debido a que $\operatorname{sen} x^2$ no tiene una antiderivada elemental. Sin embargo, es posible aplicar con facilidad la regla de los trapecios a esta integral. ■

Regla de Simpson

Una manera de ver la aproximación que permite la regla de trapecios de una integral definida consiste en decir que en cada subintervalo se aproxima f por medio de un polinomio de *primer* grado. En la regla de Simpson, que recibe ese nombre en honor del matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761), se lleva este procedimiento un paso adelante y aproxima f mediante polinomios de *segundo* grado.

Antes de presentar la regla de Simpson, enunciamos un teorema sobre las integrales de polinomios de grado 2 (o menor).

TEOREMA 4.18 INTEGRAL DE $p(x) = Ax^2 + Bx + C$

Si $p(x) = Ax^2 + Bx + C$, entonces

$$\int_a^b p(x)\,dx = \left(\frac{b-a}{6}\right)\left[p(a) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) + p(b)\right].$$

DEMOSTRACIÓN

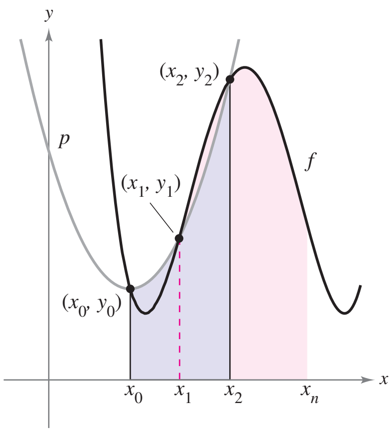
$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)\,dx &= \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx \\ &= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_a^b \\ &= \frac{A(b^3 - a^3)}{3} + \frac{B(b^2 - a^2)}{2} + C(b-a) \\ &= \left(\frac{b-a}{6}\right)[2A(a^2 + ab + b^2) + 3B(b+a) + 6C]\end{aligned}$$

Mediante la expansión y la agrupación de términos, la expresión dentro de los corchetes se convierte en

$$\underbrace{(Aa^2 + Ba + C)}_{p(a)} + \underbrace{4\left[A\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + B\left(\frac{b+a}{2}\right) + C\right]}_{4p\left(\frac{a+b}{2}\right)} + \underbrace{(Ab^2 + Bb + C)}_{p(b)}$$

y puede escribirse

$$\int_a^b p(x)\,dx = \left(\frac{b-a}{6}\right)\left[p(a) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) + p(b)\right].$$



$$\int_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx$$

Figura 4.45

Para formular la regla de Simpson con el fin de aproximar una integral definida, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Esta vez, sin embargo, se requiere que n sea par, y los subintervalos se agrupan en pares tales que

$$a = \underbrace{x_0 < x_1 < x_2}_{[x_0,\, x_2]} < \underbrace{x_3 < x_4}_{[x_2,\, x_4]} < \cdot \cdot \cdot < \underbrace{x_{n-2} < x_{n-1} < x_n}_{[x_{n-2},\, x_n]} = b.$$

En cada subintervalo (doble) $[x_{i-2}, x_i]$ puede aproximarse f por medio de un polinomio p de grado menor que o igual a 2. (Ver el ejercicio 56.) Por ejemplo, en el subintervalo $[x_0, x_2]$, elegir el polinomio de menor grado que pasa a través de los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) como se muestra en la figura 4.45. Ahora, utilizando p como una aproximación de f en este subintervalo, se tiene, por el teorema 4.18,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx &= \frac{x_2 - x_0}{6}\left[p(x_0) + 4p\left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right) + p(x_2)\right]\\ &= \frac{2[(b - a)/n]}{6}[p(x_0) + 4p(x_1) + p(x_2)]\\ &= \frac{b - a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].\end{aligned}$$

Repitiendo este procedimiento en el intervalo completo $[a, b]$ se produce el siguiente teorema.

TEOREMA 4.19 LA REGLA DE SIMPSON

Sea f continua en $[a, b]$ y sea n un entero par. La regla de Simpson para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ es

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b - a}{3n}[f(x_0) &+ 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdot \cdot \cdot\\ &+ 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].\end{aligned}$$

Además, cuando $n \to \infty$, el lado derecho tiende a $\int_a^b f(x)\,dx$.

NOTA Observar que los coeficientes en la regla de Simpson tienen el siguiente patrón.

1 4 2 4 2 4 . . . 4 2 4 1

En el ejemplo 1, la regla de los trapecios se utilizó para estimar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$. En el siguiente ejemplo, se aplica la regla de Simpson a la misma integral.

EJEMPLO 2 Aproximación con la regla de Simpson

Emplear la regla de Simpson para aproximar

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx.$$

Comparar los resultados para $n = 4$ y $n = 8$.

Solución Cuando $n = 4$, se tiene

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx \frac{\pi}{12}\left(\operatorname{sen} 0 + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\pi\right) \approx 2.005.$$

Cuando $n = 8$, se tiene $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx 2.0003$.

NOTA En el ejemplo 1, la regla de los trapecios con $n = 8$ aproxima $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ como 1.974. En el ejemplo 2, la regla de Simpson con $n = 8$ produjo una aproximación de 2.0003. La antiderivada o primitiva produciría el valor verdadero de 2.

Análisis de errores

Al usar una técnica de aproximación, es importante conocer la precisión del resultado. El siguiente teorema, que se enuncia sin demostración, proporciona las fórmulas para estimar los errores que implican en el uso de la regla de Simpson y de la regla de los trapecios. En general, cuando se realiza una aproximación se piensa en el error E como la diferencia entre $\int_a^b f(x)\,dx$ y la aproximación.

TEOREMA 4.20 ERRORES EN LA REGLA DE LOS TRAPECIOS Y EN LA DE SIMPSON

Si f tiene una segunda derivada continua en $[a, b]$, entonces el error E al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ por medio de la regla de los trapecios es

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}[\text{máx}\,|f''(x)|], \quad a \leq x \leq b. \quad \text{Regla de los trapecios.}$$

Además, si tiene cuarta derivada continua en $[a, b]$, entonces el error E al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la regla de Simpson es

$$|E| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4}[\text{máx}\,|f^{(4)}(x)|], \quad a \leq x \leq b. \quad \text{Regla de Simpson.}$$

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un sistema algebraico por computadora, utilizarlo para calcular la integral definida del ejemplo 3. Obtener un valor de

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] \approx 1.14779.$$

(“ln” representa la función logarítmica natural, la cual se estudiará en la sección 5.1.)

El teorema 4.20 establece que los errores generados por la regla de los trapecios y la regla de Simpson tienen cotas superiores dependientes de los valores extremos de $f''(x)$ y $f^{(4)}(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Además, estos errores pueden hacerse arbitrariamente pequeños *incrementando* n, siempre que f'' y $f^{(4)}$ sean continuas y, en consecuencia, acotadas en $[a, b]$.

EJEMPLO 3 El error aproximado en la regla de los trapecios

Determinar un valor de n tal que la regla de los trapecios se aproximará al valor de $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ con un error menor que 0.01.

Solución Primero se hace $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ y se halla la segunda derivada de f.

$$f'(x) = x(1+x^2)^{-1/2} \quad \text{y} \quad f''(x) = (1+x^2)^{-3/2}$$

El valor máximo de $|f''(x)|$ en el intervalo [0, 1] es $|f''(0)| = 1$. De tal modo, por el teorema 4.20, puede escribirse

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(0)| = \frac{1}{12n^2}(1) = \frac{1}{12n^2}.$$

Para obtener un error E menor que 0.01, debe elegirse n tal que $1/(12n^2) \leq 1/100$.

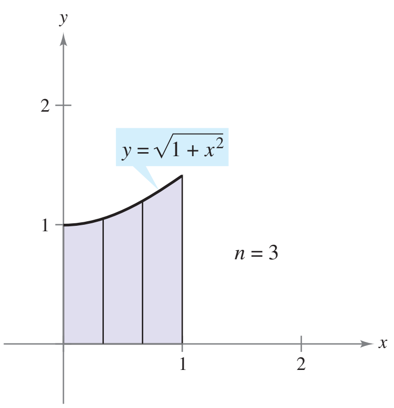
$$100 \leq 12n^2 \quad \Rightarrow \quad n \geq \sqrt{\frac{100}{12}} \approx 2.89$$

Así, basta tomar $n = 3$ (debido a que n debe ser mayor o igual a 2.89) y aplicar la regla de los trapecios, como se ilustra en la figura 4.46, para obtener

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{6}\left[\sqrt{1+0^2} + 2\sqrt{1+\left(\tfrac{1}{3}\right)^2} + 2\sqrt{1+\left(\tfrac{2}{3}\right)^2} + \sqrt{1+1^2}\right] \approx 1.154.$$

De tal modo que, al sumar y restar el error de esta estimación se sabe que

$$1.144 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq 1.164.$$



$$1.144 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq 1.164$$

Figura 4.46

4.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, usar la regla de los trapecios y la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral definida para un valor dado de n. Redondear la respuesta hasta cuatro decimales y comparar los resultados con el valor exacto de la integral definida.

1. $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx,\quad n = 4$

2. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^2}{4}+1\right)dx,\quad n = 4$

3. $\displaystyle\int_0^2 x^3\,dx,\quad n = 4$

4. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{x^2}\,dx,\quad n = 4$

5. $\displaystyle\int_1^3 x^3\,dx,\quad n = 6$

6. $\displaystyle\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx,\quad n = 8$

7. $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}\,dx,\quad n = 8$

8. $\displaystyle\int_1^4 (4 - x^2)\,dx,\quad n = 6$

9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,dx,\quad n = 4$

10. $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx,\quad n = 4$

En los ejercicios 11 a 20, aproximar la integral definida utilizando la regla de los trapecios y la regla de Simpson con $n = 4$. Comparar estos resultados con la aproximación de la integral utilizando una herramienta de graficación.

11. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

13. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\sqrt{1-x}\,dx$

14. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{x}\,\operatorname{sen} x\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \operatorname{sen} x^2\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \tan x^2\,dx$

17. $\displaystyle\int_3^{3.1} \cos x^2\,dx$

18. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

19. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\tan x\,dx$

20. $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx,\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Desarrollo de conceptos

21. La regla de los trapecios y la regla de Simpson producen aproximaciones de una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ basadas en aproximaciones polinomiales de f. ¿Qué grado de polinomio se usa para cada una?

22. Describir la dimensión del error cuando la regla de los trapecios se utiliza para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando $f(x)$ es una función lineal. Explicar el resultado con una gráfica.

En los ejercicios 23 a 28, utilizar las fórmulas de error del teorema 4.20 para estimar el error en la aproximación de la integral, con $n = 4$, utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.

23. $\displaystyle\int_1^3 2x^3\,dx$

24. $\displaystyle\int_3^5 (5x+2)\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$

26. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)\,dx$

En los ejercicios 29 a 34, utilizar las fórmulas del error en el teorema 4.20 con el fin de encontrar n tal que el error en la aproximación de la integral definida sea menor que 0.00001 utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.

29. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x+2}\,dx$

32. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^1 \cos(\pi x)\,dx$

34. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

CAS **En los ejercicios 35 a 38, emplear un sistema algebraico por computadora y las fórmulas del error para determinar n de manera tal que el error en la aproximación de la integral definida sea menor que 0.00001 utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.**

35. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x}\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^2 (x+1)^{2/3}\,dx$

37. $\displaystyle\int_0^1 \tan x^2\,dx$

38. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$

39. Aproximar el área de la región sombreada utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson con $n = 4$.

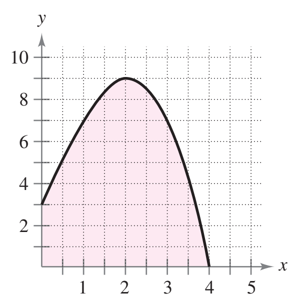


Figura para 39

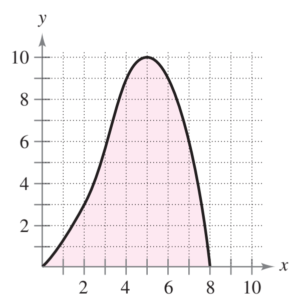


Figura para 40

40. Aproximar el área de la región sombreada utilizando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson con $n = 8$.

41. ***Programación*** Escribir un programa para una herramienta de graficación con el fin de aproximar una integral definida utilizando la regla de los trapecios y la regla de Simpson. Empezar con el programa escrito en la sección 4.3, ejercicios 61 a 64, y advertir que la regla de los trapecios puede escribirse como $T(n) = \frac{1}{2}[I(n) + D(n)]$ y la regla de Simpson, como

$$S(n) = \tfrac{1}{3}[T(n/2) + 2M(n/2)].$$

[Recordar que $I(n)$, $M(n)$ y $D(n)$ representan las sumas de Riemann utilizando los puntos terminales del lado izquierdo, los puntos medios y los puntos terminales del lado derecho de subintervalos con igual ancho.]

Programación **En los ejercicios 42 a 44, emplear el programa en el ejercicio 41 para aproximar la integral definida y completar la tabla.**

n	$I(n)$	$M(n)$	$D(n)$	$T(n)$	$S(n)$
4					
8					
10					
12					
16					
20					

42. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2 + 3x^2}\,dx$ **43.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ **44.** $\displaystyle\int_0^4 \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$

45. ***Área*** Emplear la regla de Simpson con $n = 14$ para aproximar el área de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}\cos x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi/2$.

Para discusión

46. Considerar una función $f(x)$ que es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $[0, 2]$ y la función $g(x)$ que es cóncava hacia abajo sobre $[0, 2]$.

a) Usando la regla trapezoidal, ¿qué integral sería sobreestimada? ¿Qué integral sería subestimada? Suponer $n = 4$. Usar gráficas para explicar su respuesta.

b) ¿Qué regla se usaría para mayor aproximación precisa de $\int_0^2 f(x)\,dx$ y $\int_0^2 g(x)\,dx$, la regla trapezoidal o la regla de Simpson? Explicar su razón.

47. ***Circunferencia*** La **integral elíptica**

$$8\sqrt{3}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \tfrac{2}{3}\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$$

proporciona la circunferencia de una elipse. Emplear la regla de Simpson con $n = 8$ para aproximar la circunferencia.

48. ***Trabajo*** Para determinar el tamaño del motor requerido en la operación de una prensa, una compañía debe conocer la cantidad de trabajo realizado cuando la prensa mueve un objeto linealmente 5 pies. La fuerza variable para desplazar el objeto es $F(x) = 100x\sqrt{125 - x^3}$, donde F está dada en libras y x produce la posición de la unidad en pies. Emplear la regla de Simpson con $n = 12$ para aproximar el trabajo W (en pies-libras) realizado a través de un ciclo si $W = \int_0^5 F(x)\,dx$.

49. La tabla presenta varias mediciones recopiladas en un experimento para aproximar una función continua desconocida $y = f(x)$.

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y	4.32	4.36	4.58	5.79	6.14

x	1.25	1.50	1.75	2.00
y	7.25	7.64	8.08	8.14

a) Aproximar la integral $\int_0^2 f(x)\,dx$ utilizando la regla de los trapecios y la regla de Simpson.

b) Utilizar una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para los datos. Integrar el polinomio resultante en $[0, 2]$ y comparar el resultado con el apartado *a*).

Aproximación de Pi **En los ejercicios 50 y 51, utilizar la regla de Simpson con $n = 6$ para aproximar π utilizando la ecuación dada. (En la sección 5.7, se podrán calcular las integrales utilizando funciones trigonométricas inversas.)**

50. $\displaystyle\pi = \int_0^{1/2} \frac{6}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$ **51.** $\displaystyle\pi = \int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}\,dx$

Área **En los ejercicios 52 y 53, utilizar la regla de los trapecios para estimar el número de metros cuadrados de tierra en un lote donde x y y se miden en metros, como se muestra en las figuras. La tierra es acotada por un río y dos caminos rectos que se juntan en ángulos rectos.**

52.

x	0	100	200	300	400	500
y	125	125	120	112	90	90

x	600	700	800	900	1 000
y	95	88	75	35	0

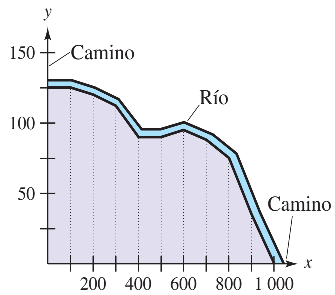


Figura para 52

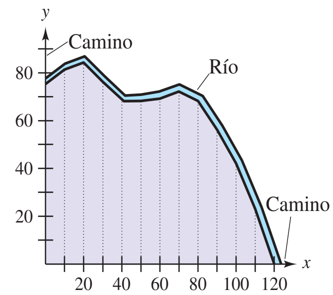


Figura para 53

53.

x	0	10	20	30	40	50	60
y	75	81	84	76	67	68	69

x	70	80	90	100	110	120
y	72	68	56	42	23	0

54. Demostrar que la regla de Simpson es exacta cuando aproxima la integral de una función polinomial cúbica, y demostrar el resultado para $\int_0^1 x^3\,dx$, $n = 2$.

CAS **55.** Usar la regla de Simpson con $n = 10$ y un sistema algebraico por computadora para aproximar t en la ecuación integral

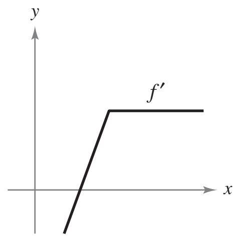
$$\int_0^t \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx = 2.$$

56. Demostrar que se puede encontrar un polinomio $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ que pasa por cualesquiera tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), donde las x_i son distintas.

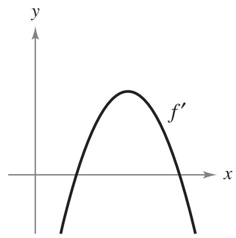
4 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica de f' para dibujar una gráfica de f.

1.



2.



En los ejercicios 3 a 8, encontrar la integral indefinida.

3. $\int (4x^2 + x + 3)\, dx$

4. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{3x}}\, dx$

5. $\int \frac{x^4 + 8}{x^3}\, dx$

6. $\int \frac{x^4 - 4x^2 + 1}{x^2}\, dx$

7. $\int (2x - 9 \operatorname{sen} x)\, dx$

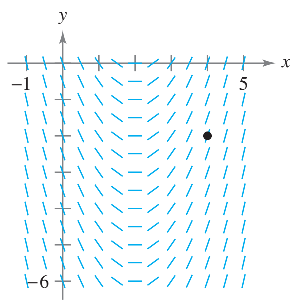
8. $\int (5 \cos x - 2 \sec^2 x)\, dx$

9. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial $f'(x) = -6x$ cuya gráfica pasa por el punto $(1, -2)$.

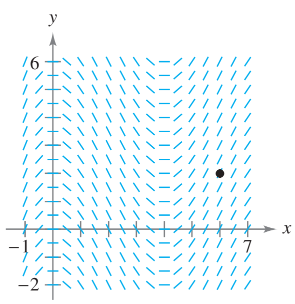
10. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial $f''(x) = 6(x - 1)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2, 1)$ y es tangente a la recta $3x - y - 5 = 0$ en ese punto.

Campos de pendientes **En los ejercicios 11 y 12 se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendiente, una de las cuales pase a través del punto indicado. *b*) Utilizar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y utilizar una herramienta de graficación para representar la solución.**

11. $\frac{dy}{dx} = 2x - 4, \quad (4, -2)$



12. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 - 2x, \quad (6, 2)$



13. ***Velocidad y aceleración*** Un avión que está despegando de una pista recorre 3 600 pies antes de elevarse. El avión parte desde el reposo, se desplaza con aceleración constante y efectúa el recorrido en 30 segundos. ¿A qué velocidad despega?

14. ***Velocidad y aceleración*** La velocidad de un automóvil que viaja en línea recta se reduce de 45 a 30 millas por hora en una distancia de 264 pies. Encontrar la distancia en la cual el automóvil puede llegar al reposo a partir de una velocidad de 30 millas por hora, suponiendo la misma desaceleración constante.

15. ***Velocidad y aceleración*** Se lanza una pelota hacia arriba verticalmente desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 96 pies por segundo.

a) ¿Cuánto tardará la pelota en alcanzar su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

b) ¿Cuándo la velocidad de la pelota es la mitad de la velocidad inicial?

c) ¿A qué altura está la pelota cuando su velocidad es la mitad de la velocidad inicial?

16. ***Modelado matemático*** La tabla muestra las velocidades (en millas por hora) de dos carros sobre una rampa de acceso a una carretera interestatal. El tiempo t está en segundos.

t	0	5	10	15	20	25	30
v_1	0	2.5	7	16	29	45	65
v_2	0	21	38	51	60	64	65

a) Reescribir las velocidades en pies por segundo.

b) Usar las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para encontrar los modelos cuadráticos para los datos en el apartado *a*).

c) Aproximar la distancia recorrida por cada carro durante los 30 segundos. Explicar la diferencia en las distancias.

En los ejercicios 17 y 18, utilizar la notación sigma para escribir la suma.

17. $\frac{1}{3(1)} + \frac{1}{3(2)} + \frac{1}{3(3)} + \cdots + \frac{1}{3(10)}$

18. $\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{1+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{2+1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$

En los ejercicios 19 a 22, utilizar las propiedades de las sumas y el teorema 4.2 para calcular las sumas.

19. $\sum_{i=1}^{20} 2i$

20. $\sum_{i=1}^{20} (4i - 1)$

21. $\sum_{i=1}^{20} (i + 1)^2$

22. $\sum_{i=1}^{12} i(i^2 - 1)$

23. Escribir en notación sigma *a*) la suma de los primeros diez enteros impares positivos, *b*) la suma de los cubos de los primeros n enteros positivos y *c*) $6 + 10 + 14 + 18 + \cdots + 42$.

24. Calcular cada suma para $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 3$ y $x_5 = 7$.

a) $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i$

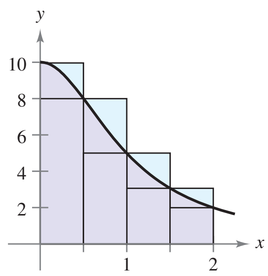
b) $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i}$

c) $\sum_{i=1}^{5} (2x_i - x_i^2)$

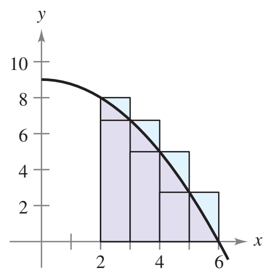
d) $\sum_{i=2}^{5} (x_i - x_{i-1})$

En los ejercicios 25 y 26, utilizar sumas superiores e inferiores para aproximar el área de la región utilizando el número indicado de subintervalos de igual ancho.

25. $y = \dfrac{10}{x^2 + 1}$



26. $y = 9 - \frac{1}{4}x^2$



En los ejercicios 27 a 30, recurrir al proceso de límite para determinar el área de la región entre la gráfica de la función y el eje x sobre el intervalo dado. Dibujar la región.

27. $y = 8 - 2x, \quad [0, 3]$

28. $y = x^2 + 3, \quad [0, 2]$

29. $y = 5 - x^2, \quad [-2, 1]$

30. $y = \frac{1}{4}x^3, \quad [2, 4]$

31. Emplear el proceso de límite para encontrar el área de la región acotada por $x = 5y - y^2$, $x = 0$, $y = 2$ y $y = 5$.

32. Considerar la región acotada por $y = mx$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$.

a) Determinar la suma superior e inferior para aproximar el área de la región cuando $\Delta x = b/4$.

b) Determinar la suma superior e inferior para aproximar el área de la región cuando $\Delta x = b/n$.

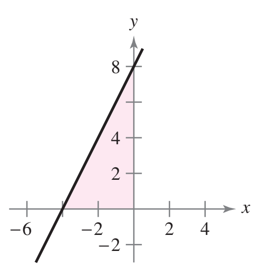
c) Encontrar el área de la región dejando que n tienda a infinito en ambas sumas en el apartado *b*). Demostrar que en cada caso se obtiene la fórmula para el área de un triángulo.

En los ejercicios 33 y 34, escribir el límite común integral definido en el intervalo $[a, b]$, donde c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo.

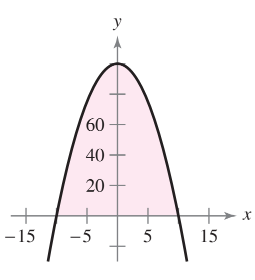
	Límite	*Intervalo*
33.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (2c_i - 3)\,\Delta x_i$	$[4, 6]$
34.	$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 3c_i(9 - c_i^2)\,\Delta x_i$	$[1, 3]$

En los ejercicios 35 y 36, formular una integral definida que produzca el área de la región. (No calcular la integral.)

35. $f(x) = 2x + 8$



36. $f(x) = 100 - x^2$



En los ejercicios 37 y 38, dibujar la región cuya área está dada por la integral definida. Utilizar después una fórmula geométrica para calcular la integral.

37. $\displaystyle\int_0^5 (5 - |x - 5|)\,dx$

38. $\displaystyle\int_{-6}^{6} \sqrt{36 - x^2}\,dx$

39. Dadas $\displaystyle\int_4^8 f(x)\,dx = 12$ y $\displaystyle\int_4^8 g(x)\,dx = 5$, evaluar

a) $\displaystyle\int_4^8 [f(x) + g(x)]\,dx.$

b) $\displaystyle\int_4^8 [f(x) - g(x)]\,dx.$

c) $\displaystyle\int_4^8 [2f(x) - 3g(x)]\,dx.$

d) $\displaystyle\int_4^8 7f(x)\,dx.$

40. Dadas $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = 4$ y $\displaystyle\int_3^6 f(x)\,dx = -1$, calcular

a) $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx.$

b) $\displaystyle\int_6^3 f(x)\,dx.$

c) $\displaystyle\int_4^4 f(x)\,dx.$

d) $\displaystyle\int_3^6 -10f(x)\,dx.$

En los ejercicios 41 a 48, emplear el teorema fundamental del cálculo para calcular la integral definida.

41. $\displaystyle\int_0^8 (3 + x)\,dx$

42. $\displaystyle\int_{-3}^{3} (t^2 + 1)\,dt$

43. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (4t^3 - 2t)\,dt$

44. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} (x^4 + 3x^2 - 4)\,dx$

45. $\displaystyle\int_4^9 x\sqrt{x}\,dx$

46. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$

47. $\displaystyle\int_0^{3\pi/4} \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

48. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 t\,dt$

En los ejercicios 49 a 54, dibujar la gráfica de la región cuya área está dada por la integral, y encontrar el área.

49. $\displaystyle\int_2^4 (3x - 4)\,dx$

50. $\displaystyle\int_0^6 (8 - x)\,dx$

51. $\displaystyle\int_3^4 (x^2 - 9)\,dx$

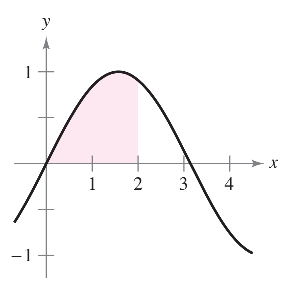
52. $\displaystyle\int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 (x - x^3)\,dx$

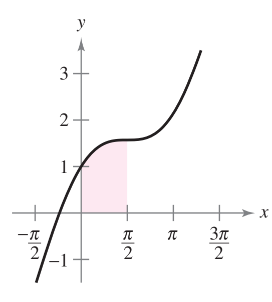
54. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,(1 - x)\,dx$

En los ejercicios 55 y 56, determinar el área de la región dada.

55. $y = \operatorname{sen} x$



56. $y = x + \cos x$



En los ejercicios 57 y 58, dibujar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones y determinar su área.

57. $y = \dfrac{4}{\sqrt{x}}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 9$

58. $y = \sec^2 x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{3}$

En los ejercicios 59 y 60, encontrar el valor medio de la función sobre el intervalo indicado. Determinar los valores de *x* a los cuales la función toma su valor medio, y graficar la función.

59. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad [4, 9]$

60. $f(x) = x^3, \quad [0, 2]$

En los ejercicios 61 a 64, emplear el segundo teorema fundamental del cálculo para encontrar $F'(x)$.

61. $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\sqrt{1 + t^3}\, dt$

62. $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt$

63. $F(x) = \displaystyle\int_{-3}^x (t^2 + 3t + 2)\, dt$

64. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \csc^2 t\, dt$

En los ejercicios 65 a 76, encontrar la integral definida.

65. $\displaystyle\int (3 - x^2)^3\, dx$

66. $\displaystyle\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

67. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 3}}\, dx$

68. $\displaystyle\int 3x^2\sqrt{2x^3 - 5}\, dx$

69. $\displaystyle\int x(1 - 3x^2)^4\, dx$

70. $\displaystyle\int \frac{x + 4}{(x^2 + 8x - 7)^2}\, dx$

71. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$

72. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} 3x^2\, dx$

73. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}\theta}}\, d\theta$

74. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$

75. $\displaystyle\int (1 + \sec \pi x)^2 \sec \pi x \tan \pi x\, dx$

76. $\displaystyle\int \sec 2x \tan 2x\, dx$

En los ejercicios 77 a 84, calcular la integral definida. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

77. $\displaystyle\int_{-2}^{1} x(x^2 - 6)\, dx$

78. $\displaystyle\int_0^1 x^2(x^3 - 2)^3\, dx$

79. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1 + x}}\, dx$

80. $\displaystyle\int_3^6 \frac{x}{3\sqrt{x^2 - 8}}\, dx$

81. $2\pi\displaystyle\int_0^1 (y + 1)\sqrt{1 - y}\, dy$

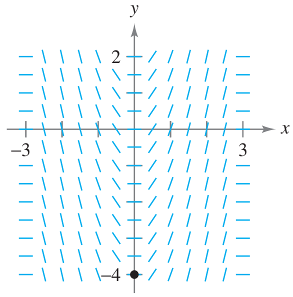
82. $2\pi\displaystyle\int_{-1}^0 x^2\sqrt{x + 1}\, dx$

83. $\displaystyle\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\, dx$

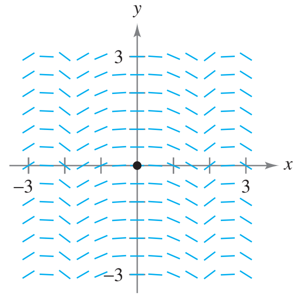
84. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{sen} 2x\, dx$

Campos de pendientes **En los ejercicios 85 y 86, se dan una ecuación diferencial y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Utilizar la integración para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y emplear una herramienta de graficación para representar la solución.**

85. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{9 - x^2}, \quad (0, -4)$

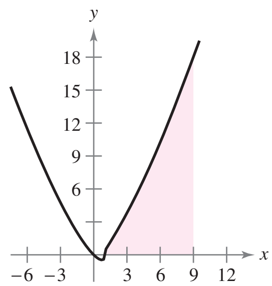


86. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}x \operatorname{sen}(x^2), \quad (0, 0)$

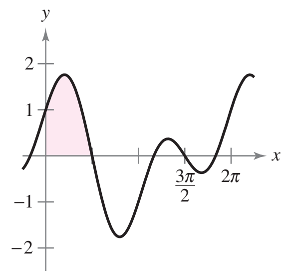


En los ejercicios 87 y 88, encontrar el área de la región. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

87. $\displaystyle\int_1^9 x\sqrt[3]{x - 1}\, dx$



88. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} [\cos x + \operatorname{sen}(2x)]\, dx$



89. ***Precipitación*** La precipitación normal mensual en Portland, Oregón, puede aproximarse mediante el modelo

$$R = 2.880 + 2.125 \operatorname{sen}(0.578t + 0.745)$$

donde R está medida en pulgadas y t es el tiempo en meses, con $t = 0$ correspondiendo al 1 de enero. (*Fuente:* U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration)

a) Escribir una integral y aproximar la precipitación normal anual.

b) Aproximar la precipitación promedio mensual durante los meses de septiembre y octubre.

90. ***Ciclo respiratorio*** Después de ejercitarse durante unos minutos, una persona tiene un ciclo respiratorio para el cual la tasa de admisión de aire es

$$v = 1.75 \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}.$$

Determinar el volumen, en litros, del aire inhalado durante un ciclo, integrando la función sobre el intervalo $[0, 2]$.

En los ejercicios 91 a 94, emplear la regla de los trapecios y la regla de Simpson con $n = 4$, y utilizar las capacidades de integración de una herramienta de graficación, para aproximar la integral definida. Comparar los resultados.

91. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{1 + x^2}\, dx$

92. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{3 - x^2}\, dx$

93. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{x}\cos x\, dx$

94. $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

SP Solución de problemas

1. Sea $(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,\ x > 0.$

   a) Encontrar $L(1)$.
   b) Encontrar $L'(x)$ y $L'(1)$.
   c) Utilizar una herramienta de graficación para aproximar el valor de x (hasta tres lugares decimales) para el cual $L(x) = 1$.
   d) Demostrar que $L(x_1\ x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ para todos los valores positivos de x_1 y x_2.

2. Sea '$(x) = \int_2^x \operatorname{sen} t^2\,dt.$

   a) Utilizar una herramienta de graficación para completar la tabla.

x	0	1.0	1.5	1.9	2.0
$F(x)$					

x	2.1	2.5	3.0	4.0	5.0
$F(x)$					

   b) Sea $G(x) = \frac{1}{x-2}F(x) = \frac{1}{x-2}\int_2^x \operatorname{sen} t^2\,dt$. Utilizar una herramienta de graficacón para completar la tabla y estimar $\lim_{x\to 2} G(x)$.

x	1.9	1.95	1.99	2.01	2.1
$G(x)$					

   c) Utilizar la definición de la derivada para encontrar el valor exacto del límite $\lim_{x\to 2} G(x)$.

En los ejercicios 3 y 4, *a*) escribir el área bajo la gráfica de la función dada definida sobre el intervalo indicado como un límite. Después *b*) calcular la suma del apartado *a*) y *c*) calcular el límite utilizando el resultado del apartado *b*).

3. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2,\quad [0, 2]$

   $\left(\textit{Sugerencia: } \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\right)$

4. $y = \frac{1}{2}x^5 + 2x^3,\quad [0, 2]$

   $\left(\textit{Sugerencia: } \sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}\right)$

5. La **función de Fresnel *S*** se define mediante la integral

   $$x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$$

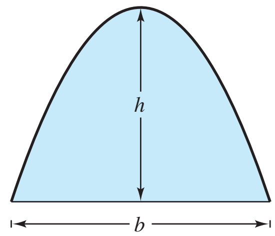
   a) Hacer la gráfica de la función $= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dt$ sobre el intervalo $[0, 3]$.
   b) Utilizar la gráfica del apartado *a*) para dibujar la gráfica de S en el intervalo $[0, 3]$.
   c) Ubicar todos los extremos relativos de S en el intervalo $(0, 3)$.
   d) Localizar todos los puntos de inflexión de S en el intervalo $(0, 3)$.

6. La **aproximación gaussiana de dos puntos** para f es

   $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

   a) Utilizar esta fórmula para aproximar $\int_{-1}^{1} \cos x\,dx$. Encontrar el error de la aproximación.
   b) Utilizar esta fórmula para aproximar $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.
   c) Probar que la aproximación gaussiana de dos puntos es exacta para todos los polinomios de grado 3 o menor.

7. Arquímedes demostró que el área de un arco parabólico es igual a $\frac{2}{3}$ del producto de la base y la altura (ver la figura).



   a) Graficar el arco parabólico delimitado por $y = 9 - x^2$ y el eje x. Utilizar una integral apropiada para encontrar el área A.
   b) Encontrar la base y la altura del arco y verificar la fórmula de Arquímedes.
   c) Demostrar la fórmula de Arquímedes para una parábola general.

8. Galileo Galilei (1564-1642) enunció la siguiente proposición relativa a los objetos en caída libre:

   El tiempo en cualquier espacio que se recorre por un cuerpo acelerado uniformemente es igual al tiempo en el cual ese mismo espacio se recorrería por el mismo cuerpo moviéndose a una velocidad uniforme cuyo valor es la media de la velocidad más alta del cuerpo acelerado y la velocidad justo antes de que empiece la aceleración.

   Utilizar las técnicas de este capítulo para verificar esta proposición.

9. La gráfica de una función f consta de tres segmentos de recta que unen a los puntos $(0, 0)$, $(2, -2)$, $(6, 2)$ y $(8, 3)$. La función F se define por medio de la integral.

   $$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

   a) Dibujar la gráfica de f.
   b) Completar la tabla.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x)$									

   c) Encontrar los extremos de F en el intervalo $[0, 8]$.
   d) Determinar todos los puntos de inflexión de F en el intervalo $(0, 8)$.

10. Un automóvil se desplaza en línea recta durante una hora. Su velocidad v en millas por hora en intervalos de seis minutos se muestra en la tabla.

t **(horas)**	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
v **(mi/h)**	0	10	20	40	60	50

t **(horas)**	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
v **(mi/h)**	40	35	40	50	65

a) Elaborar una gráfica razonable de la función de velocidad v graficando estos puntos y conectándolos con una curva uniforme.

b) Encontrar los intervalos abiertos sobre los cuales la aceleración a es positiva.

c) Encontrar la aceleración media del automóvil (en millas por hora cuadrada) sobre el intervalo [0, 0.4].

d) ¿Qué significa la integral $\int_0^1 v(t)\,dt$? Aproximar esta integral utilizando la regla de los trapecios con cinco subintervalos.

e) Aproximar la aceleración en $t = 0.8$.

11. Demostrar que $\displaystyle\int_0^x f(t)(x-t)\,dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(v)\,dv\right) dt.$

12. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\left([f(b)]^2 - [f(a)]^2\right).$

13. Utilizar una suma de Riemann apropiada para calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$

14. Utilizar una suma de Riemann apropiada para calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5}{n^6}.$$

15. Suponer que f es integrable en $[a, b]$ y $0 < m \le f(x) \le M$ para todo x en el intervalo $[a, b]$. Demostrar que

$$m(a-b) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Utilizar este resultado para estimar $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx.$

16. Sea f continua en el intervalo $[0, b]$ donde $f(x) + f(b-x) \ne 0$ en $[0, b]$.

a) Demostrar que $\displaystyle\int_0^b \frac{f(x)}{f(x) + f(b-x)}\,dx = \frac{b}{2}.$

b) Utilizar el resultado del apartado *a*) para calcular

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(1-x) + \operatorname{sen} x}\,dx.$$

c) Utilizar el resultado del apartado *a*) para calcular

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{3-x}}\,dx.$$

17. Verificar que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

demostrando lo siguiente.

a) $(1+i)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$

b) $(n+1)^3 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i^2 + 3i + 1) + 1$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

18. Demostrar que si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \qquad \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

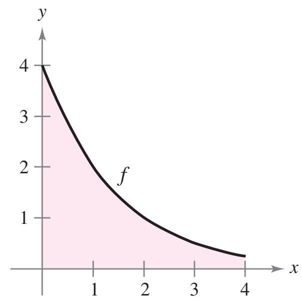
19. Sea

$$I = \int_0^4 f(x)\,dx$$

donde f se muestra en la figura. Considerar que $I(n)$ y $D(n)$ representan las sumas de Riemann utilizando los puntos extremos del lado izquierdo y los puntos terminales del lado derecho de n subintervalos de igual ancho. (Suponer que n es par.) Sean $T(n)$ y $S(n)$ los valores correspondientes de la regla de los trapecios y la regla de Simpson.

a) Para cualquier n, listar $I(n)$, $D(n)$, $T(n)$ e I en orden creciente.

b) Aproximar $S(4)$.



20. La **función integral seno**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

se utiliza a menudo en la ingeniería. La función $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ no está definida en $t = 0$, pero su límite es 1 cuando $t \to 0$. De tal modo, definir $f(0) = 1$. En ese caso f es continua en todos lados.

a) Emplear una herramienta de graficación para representar $\operatorname{Si}(x)$.

b) ¿En qué valores de x $\operatorname{Si}(x)$ tiene máximos relativos?

c) Encontrar las coordenadas del primer punto de inflexión donde $x > 0$.

d) Decidir si $\operatorname{Si}(x)$ tiene alguna asíntota horizontal. Si es así, identificar cada una.

21. Determinar los límites de integración donde $a \le b$, tal que

$$\int_a^b (x^2 - 16)\,dx$$

tiene valor mínimo.

5 Funciones logarítmica, exponencial y otras funciones trascendentes

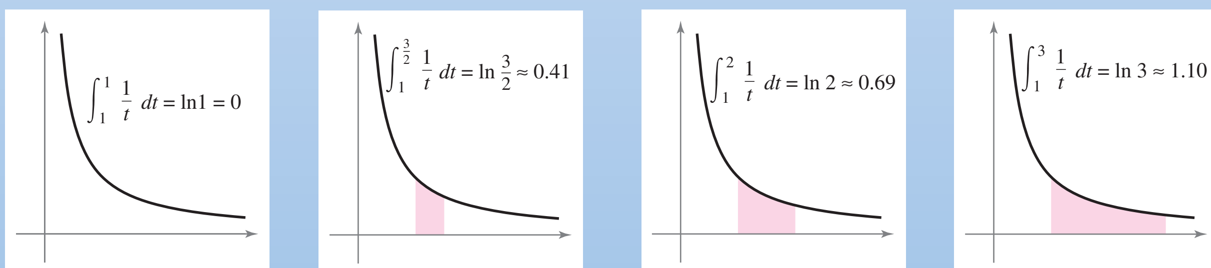
Hasta ahora en este texto, se han estudiado dos tipos de funciones elementales: funciones algebraicas y funciones trigonométricas. Este capítulo concluye la introducción de funciones elementales. Como cuando se introduce un nuevo tipo, se estudiarán sus propiedades, su derivada y su antiderivada.

En este capítulo, se aprenderá:

- Las propiedades de la función logaritmo natural. Cómo encontrar la derivada y antiderivada de la función logaritmo natural. (**5.1, 5.2**)
- Cómo determinar si una función tiene una función inversa. (**5.3**)
- Las propiedades de la función exponencial natural. Cómo encontrar la derivada y antiderivada de la función exponencial natural. (**5.4**)
- Las propiedades, derivadas y antiderivadas de las funciones logarítmica y exponencial con base diferente de *e*. (**5.5**)
- Las propiedades de las funciones trigonométricas inversas. Cómo encontrar derivadas y antiderivadas de funciones trigonométricas inversas. (**5.6, 5.7**)
- Las propiedades de las funciones hiperbólicas. Cómo encontrar derivadas y antiderivadas de funciones hiperbólicas. (**5.8**)

Owaki-Kulla/Photolibrary

El arco de entrada en San Luis, Missouri, tiene más de 600 pies de alto y está cubierto con 886 toneladas de acero inoxidable de un cuarto de pulgada. ¿Qué función se involucra en la ecuación matemática usada para construir el arco? (Ver la sección 5.8, Proyecto de trabajo.)



En la sección 5.1 se verá cómo la función $f(x) = 1/x$ puede usarse para definir la función logaritmo natural. Para hacer esto, considerar la integral definida $\int_1^x 1/t\,dt$. Cuando $x < 1$, el valor de esta integral definida es negativa. Cuando $x = 1$, el valor es cero. Cuando $x > 1$, el valor es positivo.

5.1 La función logaritmo natural: derivación

- Desarrollar y usar propiedades de la función logaritmo natural.
- Comprender la definición del número *e*.
- Derivar funciones que involucran la función logaritmo natural.

The Granger Collection

JOHN NAPIER (1550-1617)

El matemático escocés John Napier inventó los logaritmos. Napier formó el término *logaritmo* con dos palabras griegas: *logos* (razón) y *arithmos* (número), para denominar la teoría que desarrolló a lo largo de veinte años y que apareció por primera vez en el libro *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio* (Una descripción de la maravillosa regla de los algoritmos). Aunque no introdujo la función logaritmo natural, algunas veces se llama función logaritmo napieriana.

La función logaritmo natural

Recordar que en la regla general de la potencia

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad \text{Regla general de la potencia.}$$

tiene una restricción importante, no se aplica al caso $n = -1$. De hecho, todavía no se ha encontrado una antiderivada o primitiva para la función $f(x) = 1/x$. En esta sección se usará el segundo teorema fundamental del cálculo para *definir* esa antiderivada o primitiva. Ésta es una función que no ha aparecido previamente en este libro. No es algebraica ni trigonométrica, sino que está incluida en una nueva clase de funciones, llamadas *funciones logarítmicas*. Esta función particular es la **función logaritmo natural**.

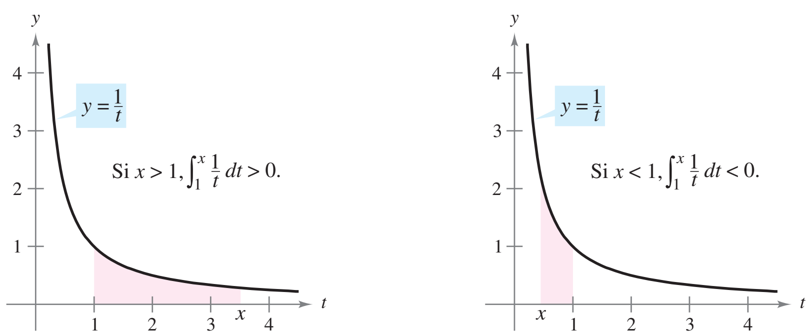
DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

La **función logaritmo natural** se define como

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0.$$

El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de todos los números reales positivos.

A partir de la definición se deduce que $\ln x$ es positiva para $x > 1$ y negativa para $0 < x < 1$ (figura 5.1). Además, $\ln(1) = 0$, ya que los límites inferior y superior de integración son iguales cuando $x = 1$.



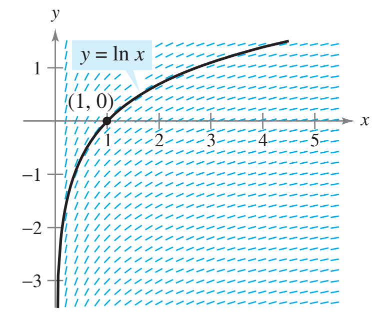
Si $x > 1$, entonces $\ln x > 0$

Si $0 < x < 1$, entonces $\ln x < 0$

Figura 5.1

EXPLORACIÓN

Representación de la función logaritmo natural Usando *sólo* la definición de la función logaritmo natural, trazar una gráfica. Explicar el razonamiento.



Cada pequeño segmento recto tiene una pendiente de $1/x$
Figura 5.2

Para dibujar la gráfica de $y = \ln x$, se puede pensar en la función logaritmo natural como una *antiderivada* o primitiva dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

La figura 5.2 es una gráfica generada por computadora; llamada *campo de pendientes* o *campo de direcciones*, que consta de pequeños segmentos de pendiente $1/x$. La gráfica de $y = \ln x$ es la solución que pasa por el punto $(1, 0)$. Se estudiarán campos de pendientes en la sección 6.1.

El siguiente teorema resume varias propiedades básicas de la función logaritmo natural.

TEOREMA 5.1 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

La función logaritmo natural tiene las siguientes propiedades.

1. El dominio es $(0, \infty)$ y el recorrido o rango es $(-\infty, \infty)$.
2. La función es continua, creciente e inyectiva.
3. La gráfica es cóncava hacia abajo.

DEMOSTRACIÓN El dominio de $f(x) = \ln x$ es $(0, \infty)$ por definición. Además, la función es continua, por ser derivable. Y es creciente porque su derivada

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{Primera derivada.}$$

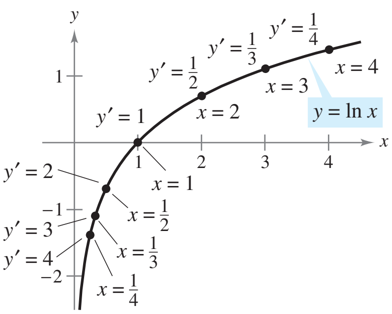
es positiva para $x > 0$, como se muestra en la figura 5.3. Es cóncava hacia abajo porque

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{Segunda derivada.}$$

es negativa para $x > 0$. La prueba de que f es inyectiva se presenta en el apéndice A. Los siguientes límites implican que el recorrido o rango es toda la recta real.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

La justificación de ambos límites se encuentra en el apéndice A.



La función logaritmo natural es creciente, y su gráfica es cóncava hacia abajo
Figura 5.3

Utilizando la definición de la función logaritmo natural, se pueden probar importantes propiedades de las operaciones con logaritmos naturales. Si ya está familiarizado con los logaritmos, el lector reconocerá que estas propiedades son características de todos los logaritmos.

TEOREMA 5.2 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Si a y b son números positivos y n es racional, se satisfacen las siguientes propiedades.

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$
4. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

DEMOSTRACIÓN La primera propiedad ya se ha discutido. La segunda se deduce del hecho de que dos antiderivadas o primitivas de una misma función difieren en una constante. Del segundo teorema fundamental del cálculo y la definición de la función logaritmo natural, se sabe que

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{d}{dx}\left[\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right] = \frac{1}{x}.$$

Así pues, se consideran las dos derivadas

$$\frac{d}{dx}[\ln(ax)] = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$$

y

$$\frac{d}{dx}[\ln a + \ln x] = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Como $\ln(ax)$ y $(\ln a + \ln x)$ son antiderivadas o primitivas de $1/x$, deben diferir a lo más en una constante.

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x + C$$

Tomando $x = 1$, se puede ver que $C = 0$. La tercera propiedad se demuestra de manera análoga comparando las derivadas de $\ln(x^n)$ y $n \ln x$. Por último, al utilizar la segunda y tercera propiedades, se puede comprobar la cuarta.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln[a(b^{-1})] = \ln a + \ln(b^{-1}) = \ln a - \ln b$$

El ejemplo 1 muestra cómo usar propiedades de los logaritmos para desarrollar expresiones logarítmicas.

EJEMPLO 1 Desarrollo de expresiones logarítmicas

a) $\ln\frac{10}{9} = \ln 10 - \ln 9$ Propiedad 4.

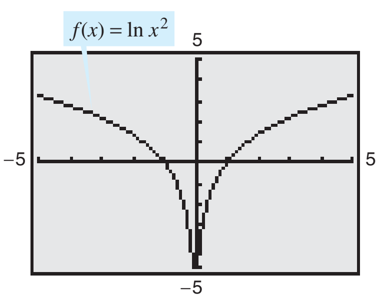
b) $\ln\sqrt{3x+2} = \ln(3x+2)^{1/2}$ Reescribir con exponente racional.

$= \frac{1}{2}\ln(3x+2)$ Propiedad 3.

c) $\ln\frac{6x}{5} = \ln(6x) - \ln 5$ Propiedad 4.

$= \ln 6 + \ln x - \ln 5$ Propiedad 2.

d) $$\ln\frac{(x^2+3)^2}{x\sqrt[3]{x^2+1}} = \ln(x^2+3)^2 - \ln\left(x\sqrt[3]{x^2+1}\right)$$
$$= 2\ln(x^2+3) - [\ln x + \ln(x^2+1)^{1/3}]$$
$$= 2\ln(x^2+3) - \ln x - \ln(x^2+1)^{1/3}$$
$$= 2\ln(x^2+3) - \ln x - \frac{1}{3}\ln(x^2+1)$$



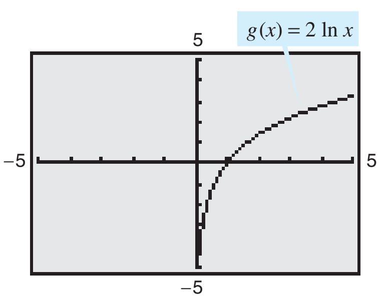
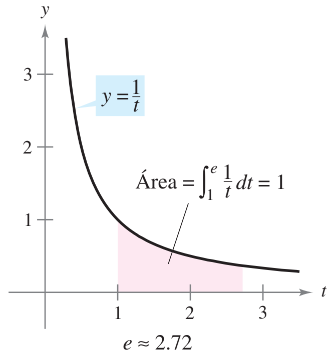


Figura 5.4

Cuando se usan las propiedades de los logaritmos para reexpresar funciones logarítmicas, hay que analizar si el dominio de la función reescrita es el mismo que el de la función original. Así, el dominio de $f(x) = \ln x^2$ son todos los números reales salvo $x = 0$, mientras que el de $g(x) = 2 \ln x$ son todos los números reales positivos (ver la figura 5.4).

El número *e*



e es la base de los logaritmos naturales porque $\ln e = 1$
Figura 5.5

Es muy probable que ya se hayan estudiado los logaritmos en cursos anteriores de álgebra. Ahí, sin las ventajas del cálculo, suelen definirse en términos de un número **base**. Por ejemplo, los logaritmos comunes tienen base 10 porque $\log_{10}10 = 1$. (Volveremos a esto en la sección 5.5.)

Para definir la **base de los logaritmos naturales**, se aprovecha que la función logaritmo natural es continua, inyectiva y con recorrido o rango de $(-\infty, \infty)$. Por tanto, debe existir un único número real x tal que $\ln x = 1$, como muestra la figura 5.5. Este número se denota por la letra e. Puede demostrarse que e es irracional y que tiene un valor aproximado.

$$e \approx 2.71828182846$$

DEFINICIÓN DE *e*

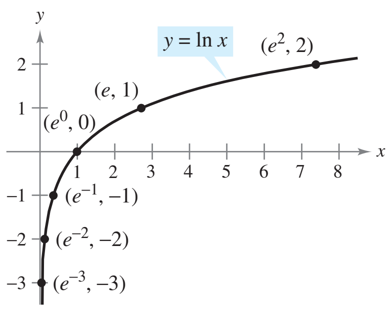
La letra e denota el número real positivo tal que

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre el número e, se recomienda ver el artículo "Unexpected Occurrences of the Number e", de Harris S. Shultz y Bill Leonard en la revista *Mathematics Magazine*.

Sabiendo que $\ln e = 1$, usar las propiedades logarítmicas para calcular los logaritmos naturales de otros números. Por ejemplo, usando la propiedad

$$\begin{aligned}\ln(e^n) &= n \ln e\\ &= n(1)\\ &= n\end{aligned}$$



Si $x = e^n$, entonces $\ln x = n$
Figura 5.6

se puede evaluar $\ln(e^n)$ para diversos valores de n, como se muestran en la tabla y en la figura 5.6.

x	$\frac{1}{e^3} \approx 0.050$	$\frac{1}{e^2} \approx 0.135$	$\frac{1}{e} \approx 0.368$	$e^0 = 1$	$e \approx 2.718$	$e^2 \approx 7.389$
$\ln x$	-3	-2	-1	0	1	2

Los logaritmos de esta tabla son fáciles de calcular de esa forma porque los valores de x son potencias enteras de e. Sin embargo, la mayoría de las expresiones logarítmicas se pueden evaluar mejor con una calculadora.

EJEMPLO 2 Evaluación de expresiones con logaritmos naturales

a) $\ln 2 \approx 0.693$

b) $\ln 32 \approx 3.466$

c) $\ln 0.1 \approx -2.303$

La derivada de la función logaritmo natural

La derivada de la función logaritmo natural se da por el teorema 5.3. La primera parte del teorema proviene de la definición de la función logaritmo natural como una antiderivada o primitiva. La segunda parte del teorema es simplemente la versión de la regla de la cadena de la primera parte.

TEOREMA 5.3 DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

Sea u una función derivable en x.

1. $\dfrac{d}{dx}[\ln x] = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$ **2.** $\dfrac{d}{dx}[\ln u] = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u'}{u}, \quad u > 0$

EXPLORACIÓN

Usar una herramienta de graficación para representar

$$y_1 = \frac{1}{x}$$

y

$$y_2 = \frac{d}{dx}[\ln x]$$

en la misma pantalla, con $0.1 \leq x \leq 5$ y $-2 \leq y \leq 8$. Explicar por qué las gráficas aparentemente son idénticas.

EJEMPLO 3 Derivación de funciones logarítmicas

a) $\dfrac{d}{dx}[\ln(2x)] = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$ $u = 2x$.

b) $\dfrac{d}{dx}[\ln(x^2+1)] = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $u = x^2 + 1$.

c) $\dfrac{d}{dx}[x \ln x] = x\left(\dfrac{d}{dx}[\ln x]\right) + (\ln x)\left(\dfrac{d}{dx}[x]\right)$ Regla del producto.

$$= x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$$

d) $\dfrac{d}{dx}[(\ln x)^3] = 3(\ln x)^2 \dfrac{d}{dx}[\ln x]$ Regla de la cadena.

$$= 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}$$

Napier utilizaba las propiedades de los logaritmos para simplificar *cálculos* con productos, cocientes y potencias. Por supuesto, actualmente con las calculadoras a nuestra disposición hay poco lugar para esas aplicaciones de los logaritmos. No obstante, es de gran valor el uso de las propiedades de los logaritmos para simplificar la derivada de productos, cocientes y potencias.

EJEMPLO 4 Propiedades de los logaritmos como ayuda en la derivación

Derivar $f(x) = \ln\sqrt{x+1}$.

Solución Como

$$f(x) = \ln\sqrt{x+1} = \ln(x+1)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(x+1)$$ Reescribir antes de derivar.

se puede escribir

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2(x+1)}.$$ Derivar.

EJEMPLO 5 Propiedades de los logaritmos como ayuda en la derivación

Derivar $f(x) = \ln \dfrac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$.

Solución

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}} && \text{Escribir la función original.} \\ &= \ln x + 2\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2x^3-1) && \text{Reescribir antes de derivar.} \\ f'(x) &= \frac{1}{x} + 2\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{6x^2}{2x^3-1}\right) && \text{Derivar.} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+1} - \frac{3x^2}{2x^3-1} && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

NOTA En los ejemplos 4 y 5 se puede ver la ventaja de aplicar las propiedades de los logaritmos *antes* de derivar. Considérese, por ejemplo, la dificultad de derivar directamente la función del ejemplo 5.

En ocasiones, es conveniente usar los logaritmos como ayuda en la derivación de funciones *no logarítmicas*. Este procedimiento se llama **derivación logarítmica**.

EJEMPLO 6 Derivación logarítmica

Encontrar la derivada de

$$y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 2.$$

Solución Notar que $y > 0$ para todo $x \neq 2$. Así, $\ln y$ está definido. Iniciar aplicando el logaritmo natural en los dos miembros de la ecuación. Y a continuación aplicar las propiedades de los logaritmos y la derivación implícita. Por último, despejar y'.

$$\begin{aligned} y &= \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq 2 && \text{Escribir la ecuación original.} \\ \ln y &= \ln \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}} && \text{Aplicar logaritmo natural en ambos lados.} \\ \ln y &= 2\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) && \text{Propiedades de los logaritmos.} \\ \frac{y'}{y} &= 2\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) && \text{Derivar.} \\ &= \frac{x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)} && \text{Simplificar.} \\ y' &= y\left[\frac{x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)}\right] && \text{Despejar } y'. \\ &= \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}\left[\frac{x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)}\right] && \text{Sustituir } y. \\ &= \frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{(x^2+1)^{3/2}} && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

Puesto que el logaritmo natural no está definido para números negativos, encontraremos con frecuencia expresiones como $\ln|u|$. El siguiente teorema afirma que se pueden derivar funciones de la forma $y = \ln|u|$ ignorando el signo del valor absoluto.

TEOREMA 5.4 DERIVADAS CON VALORES ABSOLUTOS

Si u es una función derivable de x tal que $u \neq 0$, entonces

$$\frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}.$$

DEMOSTRACIÓN Si $u > 0$, entonces $|u| = u$, y el resultado se obtiene aplicando el teorema 5.3. Si $u < 0$, entonces $|u| = -u$, y se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\ln|u|] &= \frac{d}{dx}[\ln(-u)]\\ &= \frac{-u'}{-u}\\ &= \frac{u'}{u}.\end{aligned}$$

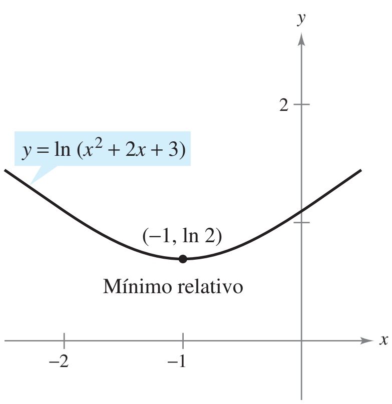
EJEMPLO 7 Derivadas con valores absolutos

Encontrar la derivada de

$$f(x) = \ln|\cos x|.$$

Solución Según el teorema 5.4, tomar $u = \cos x$ y escribir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\ln|\cos x|] &= \frac{u'}{u} && \frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}\\ &= \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} && u = \cos x\\ &= -\tan x. && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$



La derivada de y cambia de negativo a positivo en $x = -1$
Figura 5.7

EJEMPLO 8 Localización de extremos relativos

Localizar los extremos relativos de

$$y = \ln(x^2 + 2x + 3).$$

Solución Al derivar y, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3}.$$

Como $dy/dx = 0$ para $x = -1$, se puede aplicar el criterio de la primera derivada y concluir que el punto $(-1, \ln 2)$ es un mínimo relativo. Como no hay más puntos críticos, ése es el único extremo relativo (ver la figura 5.7).

5.1 Ejercicios

1. Completar la tabla usando la herramienta de graficación y la regla de Simpson con $n = 10$, aproximar la integral $\int_1^x (1/t)\,dt$.

x	0.5	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\int_1^x (1/t)\,dt$							

2. *a*) Dibujar los puntos generados en el ejercicio 1 y conectarlos con una curva suave. Comparar el resultado con la gráfica de $y = \ln x$.

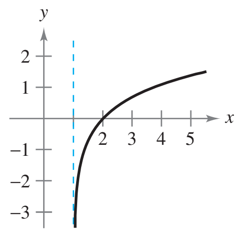
   b) Usar la herramienta de graficación para representar $y = \int_1^x (1/t)\,dt$ para $0.2 \le x \le 4$. Comparar los resultados con la gráfica de $y = \ln x$.

En los ejercicios 3 a 6, usar la herramienta de graficación para evaluar la función logaritmo *a*) usando la tecla logaritmo natural y *b*) usando la función de integración para evaluar la integral $\int_1^x (1/t)\,dt$.

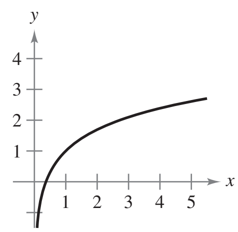
3. $\ln 45$
4. $\ln 8.3$
5. $\ln 0.8$
6. $\ln 0.6$

En los ejercicios 7 a 10, comparar la función con los gráficos. [Las gráficas están etiquetadas *a*), *b*), *c*) y *d*).]

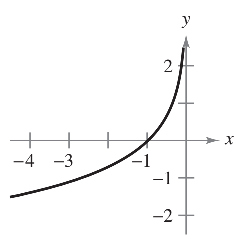
a)



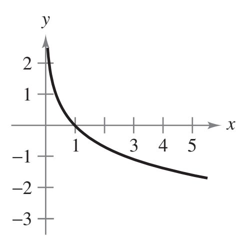
b)



c)



d)



7. $f(x) = \ln x + 1$
8. $f(x) = -\ln x$
9. $f(x) = \ln(x - 1)$
10. $f(x) = -\ln(-x)$

En los ejercicios 11 a 18, trazar la gráfica de la función y su dominio.

11. $f(x) = 3 \ln x$
12. $f(x) = -2 \ln x$
13. $f(x) = \ln 2x$
14. $f(x) = \ln|x|$
15. $f(x) = \ln(x - 1)$
16. $g(x) = 2 + \ln x$
17. $h(x) = \ln(x + 2)$
18. $f(x) = \ln(x - 2) + 1$

En los ejercicios 19 y 20, usar las propiedades de los logaritmos para aproximar el logaritmo indicado, teniendo que $\ln 2 \approx 0.6931$ y $\ln 3 \approx 1.0986$.

19. *a*) $\ln 6$ *b*) $\ln \frac{2}{3}$ *c*) $\ln 81$ *d*) $\ln \sqrt{3}$
20. *a*) $\ln 0.25$ *b*) $\ln 24$ *c*) $\ln \sqrt[3]{12}$ *d*) $\ln \frac{1}{72}$

En los ejercicios 21 a 30, usar las propiedades de los logaritmos para desarrollar las expresiones.

21. $\ln \dfrac{x}{4}$
22. $\ln \sqrt{x^5}$
23. $\ln \dfrac{xy}{z}$
24. $\ln(xyz)$
25. $\ln\left(x\sqrt{x^2 + 5}\right)$
26. $\ln \sqrt{a - 1}$
27. $\ln \sqrt{\dfrac{x - 1}{x}}$
28. $\ln(3e^2)$
29. $\ln z(z - 1)^2$
30. $\ln \dfrac{1}{e}$

En los ejercicios 31 a 36, escribir la expresión como el logaritmo de una sola cantidad.

31. $\ln(x - 2) - \ln(x + 2)$
32. $3 \ln x + 2 \ln y - 4 \ln z$
33. $\frac{1}{3}[2 \ln(x + 3) + \ln x - \ln(x^2 - 1)]$
34. $2[\ln x - \ln(x + 1) - \ln(x - 1)]$
35. $2 \ln 3 - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$
36. $\frac{3}{2}[\ln(x^2 + 1) - \ln(x + 1) - \ln(x - 1)]$

En los ejercicios 37 y 38, *a*) verificar que $f = g$ usando una herramienta de graficación para representar f y g en la misma pantalla. *b*) Entonces verificar que $f = g$ algebraicamente.

37. $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{4}, \quad x > 0, \quad g(x) = 2 \ln x - \ln 4$
38. $f(x) = \ln \sqrt{x(x^2 + 1)}, \quad g(x) = \frac{1}{2}[\ln x + \ln(x^2 + 1)]$

En los ejercicios 39 a 42, calcular el límite.

39. $\lim\limits_{x \to 3^+} \ln(x - 3)$
40. $\lim\limits_{x \to 6^-} \ln(6 - x)$
41. $\lim\limits_{x \to 2^-} \ln[x^2(3 - x)]$
42. $\lim\limits_{x \to 5^+} \ln \dfrac{x}{\sqrt{x - 4}}$

En los ejercicios 43 a 46, escribir la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función logarítmica en el punto (1, 0).

43. $y = \ln x^3$
44. $y = \ln x^{3/2}$
45. $y = x^4$
46. $y = \ln x^{1/2}$

En los ejercicios 47 a 76, hallar la derivada de la función.

47. $f(x) = \ln(3x)$
48. $f(x) = \ln(x - 1)$
49. $g(x) = \ln x^2$
50. $h(x) = \ln(2x^2 + 1)$
51. $y = (\ln x)^4$
52. $y = x^2 \ln x$

53. $y = \ln(t+1)^2$

54. $y = \ln\sqrt{x^2-4}$

55. $y = \ln\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$

56. $y = \ln[t(t^2+3)^3]$

57. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

58. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x+3}\right)$

59. $g(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$

60. $h(t) = \dfrac{\ln t}{t}$

61. $y = \ln(\ln x^2)$

62. $y = \ln(\ln x)$

63. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

64. $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

65. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x}\right)$

66. $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)$

67. $y = \dfrac{-\sqrt{x^2+1}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

68. $y = \dfrac{-\sqrt{x^2+4}}{2x^2} - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{x^2+4}}{x}\right)$

69. $y = \ln|\operatorname{sen} x|$

70. $y = \ln|\csc x|$

71. $y = \ln\left|\dfrac{\cos x}{\cos x - 1}\right|$

72. $y = \ln|\sec x + \tan x|$

73. $y = \ln\left|\dfrac{-1+\operatorname{sen} x}{2+\operatorname{sen} x}\right|$

74. $y = \ln\sqrt{2+\cos^2 x}$

75. $f(x) = \displaystyle\int_2^{\ln(2x)} (t+1)\,dt$

76. $g(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x} (t^2+3)\,dt$

En los ejercicios 77 a 82, *a*) encontrar una ecuación para la recta tangente a la gráfica de f en el punto indicado, *b*) usar una herramienta de graficación para representar la función y la recta tangente en el punto y *c*) usar la función *derivada* de la herramienta de graficación para confirmar los resultados.

77. $f(x) = 3x^2 - \ln x, \quad (1, 3)$

78. $f(x) = 4 - x^2 - \ln\left(\frac{1}{2}x+1\right), \quad (0, 4)$

79. $f(x) = \ln\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}, \quad \left(\dfrac{\pi}{4}, \ln\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$

80. $f(x) = \operatorname{sen} 2x \ln x^2, \quad (1, 0)$

81. $f(x) = x^3 \ln x, \quad (1, 0)$

82. $f(x) = \dfrac{1}{2}x \ln x^2, \quad (-1, 0)$

En los ejercicios 83 a 86, usar derivación implícita para encontrar dy/dx.

83. $x^2 - 3\ln y + y^2 = 10$

84. $\ln xy + 5x = 30$

85. $4x^3 + \ln y^2 + 2y = 2x$

86. $4xy + \ln x^2 y = 7$

En los ejercicios 87 y 88, usar la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto dado.

87. $x + y - 1 = \ln(x^2+y^2), \quad (1, 0)$

88. $y^2 + \ln xy = 2, \quad (e, 1)$

En los ejercicios 89 y 90, mostrar que la función es una solución de la ecuación diferencial.

	Función	*Ecuación diferencial*
89.	$y = 2\ln x + 3$	$xy'' + y' = 0$
90.	$y = x\ln x - 4x$	$x + y - xy' = 0$

En los ejercicios 91 a 96, hallar los extremos relativos y los puntos de inflexión. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

91. $y = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$

92. $y = x - \ln x$

93. $y = x\ln x$

94. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

95. $y = \dfrac{x}{\ln x}$

96. $y = x^2 \ln \dfrac{x}{4}$

Aproximaciones lineal y cuadrática **En los ejercicios 97 y 98, usar una herramienta de graficación para representar la función. A continuación, representar**

$$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1)$$

y

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \tfrac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$$

en la misma pantalla. Comparar los valores de f, P_1 y P_2 y sus primeras derivadas en $x = 1$.

97. $f(x) = \ln x$

98. $f(x) = x\ln x$

En los ejercicios 99 y 100, usar el método de Newton para aproximar, con tres cifras decimales, la coordenada x del punto de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones. Usar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

99. $y = \ln x, \quad y = -x$

100. $y = \ln x, \quad y = 3 - x$

En los ejercicios 101 a 106, usar derivación logarítmica para encontrar dy/dx.

101. $y = x\sqrt{x^2+1}, \quad x > 0$

102. $y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}, \quad x > 0$

103. $y = \dfrac{x^2\sqrt{3x-2}}{(x+1)^2}, \quad x > \dfrac{2}{3}$

104. $y = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}, \quad x > 1$

105. $y = \dfrac{x(x-1)^{3/2}}{\sqrt{x+1}}, \quad x > 1$

106. $y = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}, \quad x > 2$

Desarrollo de conceptos

107. Con sus propias palabras, enunciar las propiedades de la función logaritmo natural.

108. Definir la base de la función logaritmo natural.

109. Suponer que f es una función positiva y derivable en toda la recta real. Sea $g(x) = \ln f(x)$.

a) Si g es decreciente, ¿debe f ser decreciente necesariamente? Explicar la respuesta.

b) Si la gráfica de f es cóncava hacia arriba, ¿lo es necesariamente la de g? Explicar la respuesta.

110. Considerar la función $f(x) = x - 2\ln x$ sobre $[1, 3]$.

a) Explicar por qué el teorema de Rolle (sección 3.2) no se aplica.

b) ¿Piensa que la conclusión del teorema de Rolle es verdadera para f? Explicar.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 111 a 114, determinar si las ecuaciones son verdaderas o falsas. Si son falsas, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

111. $\ln(x + 25) = \ln x + \ln 25$

112. $\ln xy = \ln x \ln y$

113. Si $y = \ln \pi$, entonces $y' = 1/\pi$.

114. Si $y = \ln e$, entonces $y' = 1$.

115. ***Hipoteca de casa*** El término t (en años) de una hipoteca de casa de $200 000 al 7.5% de interés puede aproximarse mediante

$$t = 13.375 \ln\left(\frac{x}{x - 1\,250}\right), \quad x > 1\,250$$

donde x es el pago mensual en dólares.

a) Usar una herramienta de graficación para representar el modelo.

b) Usar el modelo para aproximar el término de una hipoteca de casa, para la cual el pago mensual es de $1 398.43. ¿Cuál es la cantidad de pago total?

c) Usar el modelo para aproximar el término de una hipoteca de casa para la cual el pago mensual es de $1 611.19. ¿Cuál es la cantidad de pago total?

d) Encontrar la razón de cambio instantánea de t con respecto a x cuando $x = \$1\,398.43$ y $x = \$1\,611.19$.

e) Escribir un párrafo corto que describa el beneficio del pago mensual más alto.

116. ***Intensidad del sonido*** La relación entre el número de decibeles β y la intensidad del sonido I en watts por cm^2 es

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-16}}\right).$$

Usar las propiedades de los logaritmos para simplificar la fórmula y determinar el número de decibeles de un sonido con intensidad de 10^{-10} watts por cm^2.

117. ***Modelo matemático*** La tabla muestra las temperaturas T (°F) de ebullición del agua a ciertas presiones p (libras por pulgada cuadrada). (*Fuente: Standard Handbook of Mechanical Engineers*)

p	5	10	14.696 (1 atm)	20
T	162.24°	193.21°	212.00°	227.96°

p	30	40	60	80	100
T	250.33°	267.25°	292.71°	312.03°	327.81°

Un modelo que ajusta los datos es

$$T = 87.97 + 34.96 \ln p + 7.91\sqrt{p}.$$

a) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.

b) Encontrar la razón de cambio de T respecto de p cuando $p = 10$ y $p = 70$.

c) Usar una herramienta de graficación para representar T'. Encontrar $\lim\limits_{p\to\infty} T'(p)$ e interpretar el resultado en el contexto del problema.

118. ***Modelado matemático*** La presión de la atmósfera decrece con el incremento de la altitud. A nivel del mar, el promedio de la presión del aire es una atmósfera (1.033227 kilogramos por centímetro cuadrado). La tabla muestra la presión p (en atmósferas) para algunas altitudes h (en kilómetros).

h	0	5	10	15	20	25
p	1	0.55	0.25	0.12	0.06	0.02

a) Usar una herramienta de graficación para ajustar un modelo de la forma $p = a + b \ln h$ a esos datos. Explicar por qué el resultado es un mensaje de error.

b) Usar una herramienta de graficación para ajustar el modelo logarítmico de $h = a + b \ln p$ a esos datos.

c) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.

d) Usar el modelo para estimar la altitud cuando $p = 0.75$.

e) Usar el modelo para estimar la presión cuando $h = 13$.

f) Usar el modelo para encontrar el ritmo o velocidad de cambio de la presión cuando $h = 5$ y $h = 20$. Interpretar los resultados.

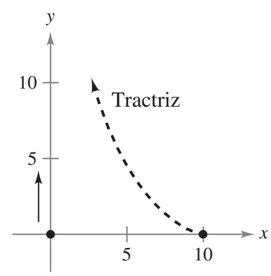
119. ***Tractriz*** Una persona que camina por un muelle recto, tira de un bote por medio de una cuerda de 10 metros. El bote viaja a lo largo de un camino conocido como *tractriz* (ver la figura). La ecuación de esta ruta es

$$y = 10 \ln\left(\frac{10 + \sqrt{100 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{100 - x^2}.$$

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función.

b) ¿Cuál es la pendiente de la curva cuando $x = 5$ y $x = 9$?

c) ¿Cuál es la pendiente de la curva cuando el camino se aproxima a $x \to 10$?



Para discusión

120. Dado que $f(x) = \ln x^a$, donde a es un número real tal que $a > 0$, determinar la razón de cambio de f cuando *a*) $x = 10$ y *b*) $x = 100$.

121. ***Conjetura*** Usar una herramienta de graficación para representar f y g en la misma pantalla y determinar cuál de ellas crece a mayor ritmo para valores "grandes" de x. ¿Qué se puede concluir del ritmo de crecimiento de la función logaritmo natural?

a) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \sqrt{x}$ *b*) $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \sqrt[4]{x}$

122. Para aproximar e^x puede usarse una función de la forma $f(x) = \dfrac{a + bx}{1 + cx}$. (Esta función se conoce como una **aproximación de Padé**.) Los valores de $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$ son iguales al valor correspondiente de e^x. Mostrar que esos valores son iguales a 1 y encontrar los valores de a, b y c, tal que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$. Después, usar una herramienta de graficación para comparar las gráficas de f y e^x.

5.2 La función logaritmo natural: integración

- **Usar la regla de logaritmo de integración para integrar una función racional.**
- **Integrar funciones trigonométricas.**

Regla de logaritmo para integración

Las reglas de derivación

$$\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}$$

que se estudiaron en la sección anterior producen las siguientes reglas de integración.

TEOREMA 5.5 REGLA DE LOGARITMO PARA INTEGRACIÓN

Sea u una función derivable de x.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ **2.** $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

Como $du = u'\,dx$, la segunda fórmula también puede expresarse como

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C.$$

Forma alternativa para la regla de logaritmo.

EXPLORACIÓN

Integración de funciones racionales En el capítulo 4 se estudiaron las reglas a seguir para integrar cualquier función polinomial. La regla de logaritmo presentada en esta sección facilita la integración de funciones racionales. Por ejemplo, cada una de las siguientes funciones puede ser integrada con la regla de logaritmo.

$\dfrac{2}{x}$	Ejemplo 1
$\dfrac{1}{4x-1}$	Ejemplo 2
$\dfrac{x}{x^2+1}$	Ejemplo 3
$\dfrac{3x^2+1}{x^3+x}$	Ejemplo 4*a*
$\dfrac{x+1}{x^2+2x}$	Ejemplo 4*c*
$\dfrac{1}{3x+2}$	Ejemplo 4*d*
$\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$	Ejemplo 5
$\dfrac{2x}{(x+1)^2}$	Ejemplo 6

Hay todavía muchas funciones racionales que no pueden ser integradas usando la regla de logaritmo. Dar ejemplos de estas funciones y explicar el razonamiento.

EJEMPLO 1 Uso de la regla de logaritmo para integración

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{x}\,dx &= 2\int \frac{1}{x}\,dx && \text{Regla del múltiplo constante.}\\
&= 2\ln|x| + C && \text{Regla de logaritmo para integración.}\\
&= \ln(x^2) + C && \text{Propiedad de los logaritmos.}
\end{aligned}$$

Como x^2 no puede ser negativa, el valor absoluto no es necesario en la forma final de la primitiva o antiderivada.

EJEMPLO 2 Uso de la regla de logaritmo con cambio de variables

Hallar $\displaystyle\int \frac{1}{4x-1}\,dx.$

Solución Si se toma $u = 4x - 1$, entonces $du = 4\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{4x-1}\,dx &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{4x-1}\right)4\,dx && \text{Multiplicar y dividir entre 4.}\\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,du && \text{Sustituir } u = 4x-1.\\
&= \frac{1}{4}\ln|u| + C && \text{Aplicar la regla de logaritmo.}\\
&= \frac{1}{4}\ln|4x-1| + C && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

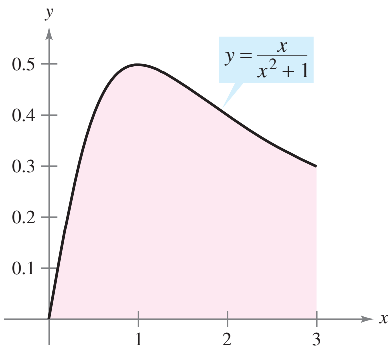
En el ejemplo 3 usar la forma alternativa de la regla de logaritmo. Para aplicar esta regla, buscar cocientes en los que el numerador sea la derivada del denominador.

EJEMPLO 3 Cálculo de un área con la regla de logaritmo

Encontrar el área de la región limitada por la gráfica de

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

el eje x y la recta $x = 3$.



$\text{Área} = \int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$

El área de la región limitada por la gráfica de y, el eje x y $x = 3$ es $\frac{1}{2}\ln 10$

Figura 5.8

Solución En la figura 5.8 se puede observar que el área está dada por la integral definida

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx.$$

Si se toma $u = x^2 + 1$, entonces $u' = 2x$. Para aplicar la regla de logaritmo, se debe multiplicar y dividir entre 2 como se muestra.

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2x}{x^2 + 1}\,dx \qquad \text{Multiplicar y dividir entre 2.}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2 + 1)\Big]_0^3 \qquad \int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 10 \qquad \ln 1 = 0$$

$$\approx 1.151$$

EJEMPLO 4 Integración de cocientes para la regla de logaritmo

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x}\,dx = \ln|x^3 + x| + C \qquad u = x^3 + x$

b) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx = \ln|\tan x| + C \qquad u = \tan x$

c) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x}\,dx \qquad u = x^2 + 2x$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x| + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{3x + 2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x + 2}\,dx \qquad u = 3x + 2$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x + 2| + C$$

Con antiderivadas o primitivas que contienen logaritmos es fácil obtener formas que parecen diferentes, pero que son equivalentes. Por ejemplo, las siguientes son equivalentes a la antiderivada o primitiva que aparece en el ejemplo 4*d*.

$$\ln|(3x + 2)^{1/3}| + C \qquad \text{y} \qquad \ln|3x + 2|^{1/3} + C$$

Las integrales a las que se aplica la regla de logaritmo aparecen a menudo disfrazadas. Por ejemplo, si una función racional tiene un *numerador de grado mayor o igual que el del denominador*, la división puede revelar una forma a la que se pueda aplicar la regla de logaritmo. Esto se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Usar división larga antes de integrar

Hallar $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\,dx.$

Solución Primero se utiliza la división larga para reescribir el integrando.

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \Rightarrow \begin{array}{r|l} & 1 \\ x^2 + 1 & x^2 + x + 1 \\ & x^2 + 1 \\ \hline & x \end{array} \Rightarrow 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$$

Ahora, se puede integrar para obtener

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\,dx &= \int \left(1 + \frac{x}{x^2 + 1}\right) dx && \text{Reescribir usando la división larga.} \\ &= \int dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 + 1}\,dx && \text{Reescribir como dos integrales.} \\ &= x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C. && \text{Integrar.} \end{aligned}$$

Verificar este resultado por derivación para obtener el integrando original.

El siguiente ejemplo presenta otro caso en que el uso de la regla de logaritmo está disfrazado. En este caso, un cambio de la variable ayuda a reconocer la regla de logaritmo.

EJEMPLO 6 Cambio de variable con la regla de logaritmo

Hallar $\displaystyle\int \frac{2x}{(x + 1)^2}\,dx.$

Solución Si se toma $u = x + 1$, entonces $du = dx$ y $x = u - 1$.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{(x + 1)^2}\,dx &= \int \frac{2(u - 1)}{u^2}\,du && \text{Sustituir.} \\ &= 2\int \left(\frac{u}{u^2} - \frac{1}{u^2}\right) du && \text{Reescribir como dos fracciones.} \\ &= 2\int \frac{du}{u} - 2\int u^{-2}\,du && \text{Reescribir como dos integrales.} \\ &= 2\ln|u| - 2\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right) + C && \text{Integrar.} \\ &= 2\ln|u| + \frac{2}{u} + C && \text{Simplificar.} \\ &= 2\ln|x + 1| + \frac{2}{x + 1} + C && \text{Sustitución regresiva.} \end{aligned}$$

Comprobar este resultado por derivación para obtener el integrando original.

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un sistema algebraico por computadora, se puede usar para resolver las integrales indefinidas de los ejemplos 5 y 6. Comparar las formas de las primitivas dadas con los resultados obtenidos en los ejemplos 5 y 6.

Al estudiar los métodos mostrados en los ejemplos 5 y 6, está claro que ambos métodos involucran reescribir el integrando disfrazado ajustándolo a una o más fórmulas básicas de integración. En las próximas secciones del capítulo 5 y en el capítulo 8, se estudiarán ampliamente las técnicas de integración. Para dominar estas técnicas, se requiere reconocer la naturaleza de "probar y errar" de la integración. En este sentido, la integración no es tan directa como la derivación. La derivación se plantea así:

"He aquí la pregunta; ¿cuál es la respuesta?"

La integración viene a ser más bien

"He aquí la respuesta; ¿cuál es la pregunta?"

Las siguientes son estrategias que se pueden usar para la integración.

AYUDA DE ESTUDIO Tener en cuenta que se puede comprobar la respuesta de un problema de integración al derivar la respuesta. Como se ve en el ejemplo 7, la derivada de $y = \ln|\ln x| + C$ es $y' = 1/(x \ln x)$.

Estrategias para la integración

1. Memorizar una lista básica de fórmulas de integración. (Incluyendo las dadas en esta sección, ya disponemos de 12 fórmulas: la regla de la potencia, la regla de logaritmo y 10 reglas trigonométricas. Al final de la sección 5.7 la lista se ampliará a 20 reglas básicas.)
2. Buscar una fórmula de integración que se parezca total o parcialmente al integrando, y por prueba y error elegir una u que ajuste el integrando a la fórmula.
3. Si no se puede hallar una sustitución u adecuada, intentar transformar el integrando, mediante identidades trigonométricas, multiplicación y división por la misma cantidad, o suma y resta de una misma cantidad. Se requiere ingenio.
4. Si se tiene acceso a un software de computadora que resuelva antiderivadas, es conveniente usarlo.

EJEMPLO 7 Sustitución *u* y la regla de logaritmo

Resolver la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \ln x}$.

Solución La solución se puede escribir como una integral indefinida.

$$y = \int \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

Como el integrando es un cociente con denominador de potencia 1, se puede intentar utilizar la regla de logaritmo. Hay tres formas posibles para u. La forma $u = x$ y $u = x \ln x$, no logra ajustarse a la forma u'/u de la regla de logaritmo, sin embargo, la tercera forma sí se ajusta. Si $u = \ln x$, entonces $u' = 1/x$, se obtiene lo siguiente.

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int \frac{1/x}{\ln x}\, dx \qquad \text{Dividir numerador y denominador por } x.$$

$$= \int \frac{u'}{u}\, dx \qquad \text{Sustituir } u = \ln x.$$

$$= \ln|u| + C \qquad \text{Aplicar regla de logaritmo.}$$

$$= \ln|\ln x| + C \qquad \text{Sustitución regresiva.}$$

Por tanto, la solución es $y = \ln|\ln x| + C$.

Integrales de funciones trigonométricas

En la sección 4.1 se estudiaron seis reglas de integración trigonométrica, las seis que corresponden directamente a reglas de derivación. Con la regla de logaritmo, se puede completar el conjunto de reglas básicas de integración trigonométrica.

EJEMPLO 8 Uso de identidad trigonométrica

Hallar $\int \tan x\, dx$.

Solución Esta integral no parece ajustarse a ninguna de las reglas básicas de la lista. Sin embargo, al utilizar una identidad trigonométrica se tiene

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx.$$

Sabiendo que $D_x[\cos x] = -\operatorname{sen} x$, tenemos $u = \cos x$ y escribimos

$$\begin{aligned}
\int \tan x\, dx &= -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= -\int \frac{u'}{u}\, dx && \text{Sustituir } u = \cos x.\\
&= -\ln|u| + C && \text{Aplicar regla de logaritmo.}\\
&= -\ln|\cos x| + C. && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

En el ejemplo 8 se usó una identidad trigonométrica para derivar una regla de integración de la función tangente. En el siguiente ejemplo, se efectúa un paso algo inusual (multiplicar y dividir entre una misma cantidad) para llegar a una fórmula de integración para la función secante.

EJEMPLO 9 Obtención de la fórmula para secante

Hallar $\int \sec x\, dx$.

Solución Considerar el siguiente procedimiento.

$$\begin{aligned}
\int \sec x\, dx &= \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right) dx\\
&= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx
\end{aligned}$$

Al tomar u como el denominador de este cociente se obtiene

$$u = \sec x + \tan x \quad \Rightarrow \quad u' = \sec x \tan x + \sec^2 x.$$

Así, se puede concluir que

$$\begin{aligned}
\int \sec x\, dx &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx && \text{Reescribir el integrando.}\\
&= \int \frac{u'}{u}\, dx && \text{Sustituir } u = \sec x + \tan x.\\
&= \ln|u| + C && \text{Aplicar regla de logaritmo.}\\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C. && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

Con los resultados de los ejemplos 8 y 9, se dispone de las fórmulas de integración de sen x, cos x, tan x y sec x. Las seis reglas trigonométricas se resumen a continuación. (Las demostraciones de cot u y csc u se dejan como ejercicios 91 y 92.)

NOTA Al utilizar las identidades trigonométricas y las propiedades de los logaritmos, se pueden reescribir esas seis reglas de integración de otras maneras. Por ejemplo,

$$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C.$$

(Ver los ejercicios 93 a 96.) ■

Integrales de las seis funciones trigonométricas básicas

$$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C \qquad \int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C \qquad \int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C \qquad \int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$$

EJEMPLO 10 Integración de funciones trigonométricas

Evaluar $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x}\,dx$.

Solución Si $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, se puede escribir

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x}\,dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x}\,dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \sec x\,dx && \sec x \geq 0 \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \\
&= \ln|\sec x + \tan x|\Big]_0^{\pi/4} \\
&= \ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - \ln 1 \\
&\approx 0.881.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 11 Encontrar un valor promedio

Encontrar el valor promedio de $f(x) = \tan x$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Solución

$$\begin{aligned}
\text{Valor promedio} &= \frac{1}{(\pi/4) - 0}\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx && \text{Valor promedio} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx && \text{Simplificar.} \\
&= \frac{4}{\pi}\Big[-\ln|\cos x|\Big]_0^{\pi/4} && \text{Integrar.} \\
&= -\frac{4}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(1)\right] \\
&= -\frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&\approx 0.441
\end{aligned}$$

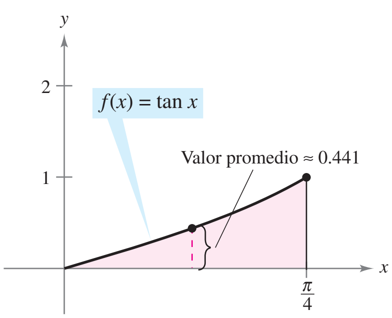


Figura 5.9

El valor promedio está alrededor de 0.441, como se muestra en la figura 5.9.

5.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 26, encontrar la integral indefinida.

1. $\int \frac{5}{x}\,dx$
2. $\int \frac{10}{x}\,dx$
3. $\int \frac{1}{x+1}\,dx$
4. $\int \frac{1}{x-5}\,dx$
5. $\int \frac{1}{2x+5}\,dx$
6. $\int \frac{1}{4-3x}\,dx$
7. $\int \frac{x}{x^2-3}\,dx$
8. $\int \frac{x^2}{5-x^3}\,dx$
9. $\int \frac{4x^3+3}{x^4+3x}\,dx$
10. $\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2}\,dx$
11. $\int \frac{x^2-4}{x}\,dx$
12. $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$
13. $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x}\,dx$
14. $\int \frac{x(x+2)}{x^3+3x^2-4}\,dx$
15. $\int \frac{x^2-3x+2}{x+1}\,dx$
16. $\int \frac{2x^2+7x-3}{x-2}\,dx$
17. $\int \frac{x^3-3x^2+5}{x-3}\,dx$
18. $\int \frac{x^3-6x-20}{x+5}\,dx$
19. $\int \frac{x^4+x-4}{x^2+2}\,dx$
20. $\int \frac{x^3-3x^2+4x-9}{x^2+3}\,dx$
21. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
22. $\int \frac{1}{x\ln x^3}\,dx$
23. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$
24. $\int \frac{1}{x^{2/3}(1+x^{1/3})}\,dx$
25. $\int \frac{2x}{(x-1)^2}\,dx$
26. $\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^3}\,dx$

En los ejercicios 27 a 30, hallar la integral indefinida por sustitución *u*. (*Sugerencia:* Tomar *u* como el denominador del integrando.)

27. $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\,dx$
28. $\int \frac{1}{1+\sqrt{3x}}\,dx$
29. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}\,dx$
30. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$

En los ejercicios 31 a 40, encontrar la integral indefinida.

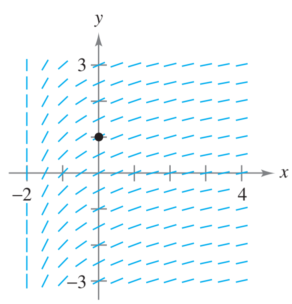
31. $\int \cot\frac{\theta}{3}\,d\theta$
32. $\int \tan 5\theta\,d\theta$
33. $\int \csc 2x\,dx$
34. $\int \sec\frac{x}{2}\,dx$
35. $\int (\cos 3\theta - 1)\,d\theta$
36. $\int \left(2-\tan\frac{\theta}{4}\right)d\theta$
37. $\int \frac{\cos t}{1+\operatorname{sen} t}\,dt$
38. $\int \frac{\csc^2 t}{\cot t}\,dt$
39. $\int \frac{\sec x\tan x}{\sec x - 1}\,dx$
40. $\int (\sec 2x + \tan 2x)\,dx$

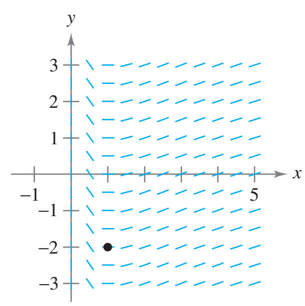
En los ejercicios 41 a 46, resolver la ecuación diferencial. Usar una herramienta de graficación para representar tres soluciones, una de las cuales tiene que pasar por el punto indicado.

41. $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x}$, $(1, 2)$
42. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2}{x}$, $(-1, 0)$
43. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2-x}$, $(1, 0)$
44. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2-9}$, $(0, 4)$
45. $\frac{ds}{d\theta} = \tan 2\theta$, $(0, 2)$
46. $\frac{dr}{dt} = \frac{\sec^2 t}{\tan t + 1}$, $(\pi, 4)$
47. Determinar la función f si $f''(x) = \frac{2}{x^2}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$, $x > 0$.
48. Determinar la función f si $f''(x) = -\frac{4}{(x-1)^2} - 2$, $f(2) = 3$, $f'(2) = 0$, $x > 1$.

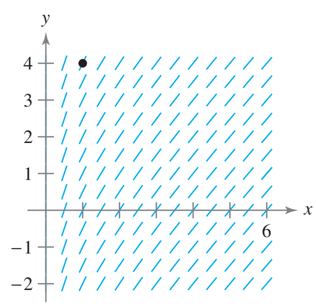
Campos de pendientes **En los ejercicios 49 a 52, se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Trazar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial del campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Hallar por integración la solución particular de la ecuación diferencial y representarla en una herramienta de graficación. Comparar el resultado con los trazos del apartado *a*).**

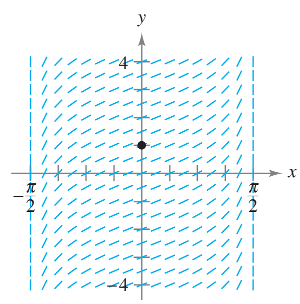
49. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+2}$, $(0, 1)$
50. $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x}$, $(1, -2)$





51. $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x}$, $(1, 4)$
52. $\frac{dy}{dx} = \sec x$, $(0, 1)$





En los ejercicios 53 a 60, calcular la integral. Verificar el resultado con una herramienta de graficación.

53. $\displaystyle\int_0^4 \frac{5}{3x+1}\,dx$

54. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{2x+3}\,dx$

55. $\displaystyle\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$

56. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

57. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2-2}{x+1}\,dx$

58. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,dx$

59. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1-\cos\theta}{\theta-\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

60. $\displaystyle\int_{0.1}^{0.2} (\csc 2\theta-\cot 2\theta)^2\,d\theta$

CAS **En los ejercicios 61 a 66, usar un sistema algebraico por computadora para hallar o evaluar la integral.**

61. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

62. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

63. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx$

64. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$

65. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc x-\operatorname{sen} x)\,dx$

66. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\cos x}\,dx$

En los ejercicios 67 a 70, encontrar $F'(x)$.

67. $F(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

68. $F(x)=\displaystyle\int_0^x \tan t\,dt$

69. $F(x)=\displaystyle\int_1^{3x} \frac{1}{t}\,dt$

70. $F(x)=\displaystyle\int_1^{x^2} \frac{1}{t}\,dt$

Aproximación **En los ejercicios 71 y 72, determinar el valor que mejor aproxima el área de la región entre el eje x y la gráfica de la función en el intervalo dado. (Basar la elección en un esbozo de la región y no en cálculos.)**

71. $f(x)=\sec x,\quad [0,1]$

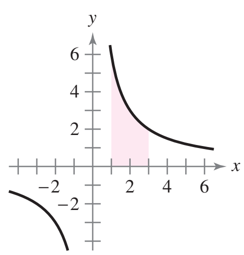
a) 6 *b)* -6 *c)* $\frac{1}{2}$ *d)* 1.25 *e)* 3

72. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1},\quad [0,4]$

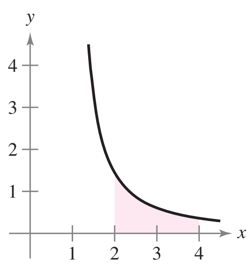
a) 3 *b)* 7 *c)* -2 *d)* 5 *e)* 1

Área **En los ejercicios 73 a 76, calcular el área de la región dada. Verificar el resultado con una herramienta de graficación.**

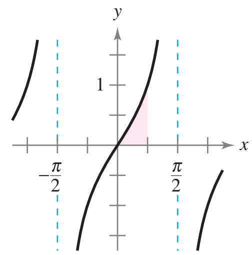
73. $y=\dfrac{6}{x}$



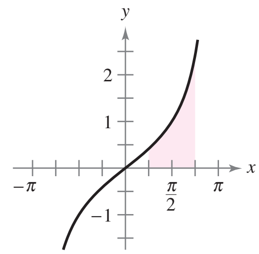
74. $y=\dfrac{2}{x\ln x}$



75. $y=\tan x$



76. $y=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$



Área **En los ejercicios 77 a 80, calcular el área de la región delimitada por la gráfica de las ecuaciones. Verificar el resultado con una herramienta de graficación.**

77. $y=\dfrac{x^2+4}{x},\ x=1,\ x=4,\ y=0$

78. $y=\dfrac{x+6}{x},\ x=1,\ x=5,\ y=0$

79. $y=2\sec\dfrac{\pi x}{6},\ x=0,\ x=2,\ y=0$

80. $y=2x-\tan 0.3x,\ x=1,\ x=4,\ y=0$

Integración numérica **En los ejercicios 81 a 84 usar la regla de los trapecios y la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral definida. Tomar $n=4$ y redondear la respuesta a 4 decimales. Verificar el resultado con una herramienta de graficación.**

81. $\displaystyle\int_1^5 \frac{12}{x}\,dx$

82. $\displaystyle\int_0^4 \frac{8x}{x^2+4}\,dx$

83. $\displaystyle\int_2^6 \ln x\,dx$

84. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x\,dx$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 85 a 88, especificar la fórmula de integración adecuada. No integrar.

85. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx$

86. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$

87. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$

88. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx$

89. Encontrar un valor de x, tal que $\displaystyle\int_1^x \frac{3}{t}\,dt=\int_{1/4}^x \frac{1}{t}\,dt.$

Para discusión

90. Encontrar un valor de x tal que

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

es igual a *a)* ln 5 y *b)* 1.

91. Mostrar que $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.

92. Mostrar que $\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$.

En los ejercicios 93 a 96, mostrar que las dos fórmulas son equivalentes.

93. $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$

94. $\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$

$\int \cot x\,dx = -\ln|\csc x| + C$

95. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

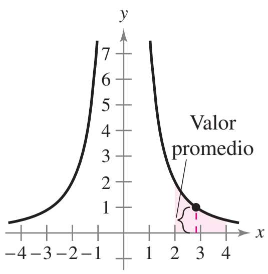
$\int \sec x\,dx = -\ln|\sec x - \tan x| + C$

96. $\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

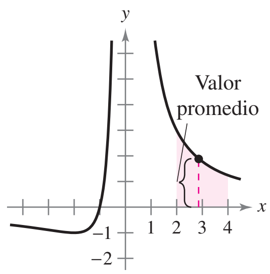
$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

En los ejercicios 97 a 100, encontrar el valor promedio de la función sobre el intervalo dado.

97. $f(x) = \dfrac{8}{x^2}$, $[2, 4]$



98. $f(x) = \dfrac{4(x+1)}{x^2}$, $[2, 4]$



99. $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$, $[1, e]$

100. $f(x) = \sec\dfrac{\pi x}{6}$, $[0, 2]$

101. ***Crecimiento de una población*** Una población de bacterias cambia a una razón

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3\,000}{1 + 0.25t}$$

donde t es el tiempo en días. La población inicial (cuando $t = 0$) era 1 000. Escribir una ecuación que describa la población en cualquier instante t y calcular la población cuando $t = 3$ días.

102. ***Transferencia de calor*** Calcular el tiempo requerido para enfriar un objeto de 300 a 250° F al evaluar

$$t = \frac{10}{\ln 2}\int_{250}^{300} \frac{1}{T - 100}\,dT$$

donde t es el tiempo en minutos.

103. ***Precio promedio*** La ecuación para la demanda de un producto es

$$p = \frac{90\,000}{400 + 3x}.$$

Calcular su precio *promedio* en el intervalo $40 \le x \le 50$.

104. ***Ventas*** La razón de cambio en las ventas S es inversamente proporcional al tiempo t $(t > 1)$ medido en semanas. Encontrar S en función de t, si las ventas después de 2 y 4 semanas son 200 y 300 unidades, respectivamente.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 105 a 108, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que confirme que es falsa.**

105. $(\ln x)^{1/2} = \frac{1}{2}(\ln x)$

106. $\int \ln x\,dx = (1/x) + C$

107. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|cx|, \quad c \neq 0$

108. $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

109. ***Trayectoria ortogonal***

a) Usar una herramienta de graficación para la ecuación $2x^2 - y^2 = 8$.

b) Evaluar la integral para encontrar y^2 en términos de x.

$$y^2 = e^{-\int(1/x)\,dx}$$

Para un valor particular de la constante de integración, graficar el resultado en la misma ventana usada en el apartado *a*).

c) Verificar que las tangentes para las gráficas en los apartados *a*) y *b*) son perpendiculares a los puntos de intersección.

110. Graficar la función

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

en el intervalo $[0, \infty)$.

a) Encontrar el área delimitada por la gráfica de f y la recta $y = \frac{1}{2}x$.

b) Determinar los valores de la pendiente m en los que la recta $y = mx$ y la gráfica de f están incluidos en la región finita.

c) Calcular el área de esta región como una función de m.

111. ***Desigualdad de Napier*** Para $0 < x < y$, mostrar que

$$\frac{1}{y} < \frac{\ln y - \ln x}{y - x} < \frac{1}{x}.$$

112. Probar que la función

$$F(x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{t}\,dt$$

es constante en el intervalo $(0, \infty)$.

5.3 Funciones inversas

- **Verificar que una función es la inversa de otra.**
- **Determinar si una función tiene una función inversa.**
- **Encontrar la derivada de una función inversa.**

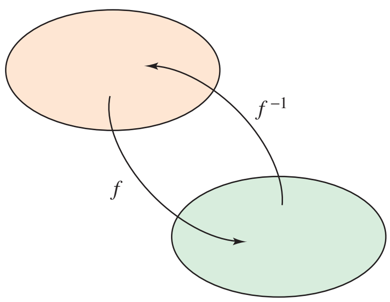
Funciones inversas

Recordar de la sección P.3 que una función se puede representar por un conjunto de pares ordenados. Por ejemplo, la función $f(x) = x + 3$ de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{4, 5, 6, 7\}$, se puede escribir como

$$f : \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}.$$

Por el intercambio de la primera y segunda coordenadas de cada par ordenado se puede formar la **función inversa** de f. Esta función se denota por f^{-1}. Ésta es una función de B en A, y se escribe como

$$f^{-1} : \{(4, 1), (5, 2), (6, 3), (7, 4)\}.$$



Dominio de f = recorrido o rango de f^{-1}
Dominio de f^{-1} = recorrido o rango de f
Figura 5.10

Notar que el dominio de f es el recorrido o rango de f^{-1}, y viceversa, como se ilustra en la figura 5.10. Las funciones f y f^{-1} tienen el efecto de "deshacer" cada una a la otra. Esto es, al componer f con f^{-1} o la composición de f^{-1} con f, se obtiene la función identidad.

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN INVERSA

Una función g es la **función inversa** de la función f si

$$f(g(x)) = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } g$$

y

$$g(f(x)) = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f.$$

La función g se denota por f^{-1} (se lee como "inversa de f").

EXPLORACIÓN

Cálculo de las funciones inversas Explicar cómo "deshacer" lo que hace cada una de las siguientes funciones. Usar la explicación para escribir la función inversa de f.

a) $f(x) = x - 5$
b) $f(x) = 6x$
c) $f(x) = \dfrac{x}{2}$
d) $f(x) = 3x + 2$
e) $f(x) = x^3$
f) $f(x) = 4(x - 2)$

Usar una herramienta de graficación para representar cada función junto con su inversa. ¿Qué observación se puede hacer acerca de cada par de gráficas?

NOTA Aunque la notación utilizada para la función inversa se parece a la *notación exponencial*, es un uso distinto del -1 como superíndice. Esto es, en general, $f^{-1}(x) \neq 1/f(x)$. ■

He aquí algunas observaciones relevantes acerca de las funciones inversas.

1. Si g es la función inversa de f, entonces f es la función inversa de g.
2. El dominio de f^{-1} es igual al recorrido o rango de f y el recorrido o rango f^{-1} es igual que el dominio de f.
3. Una función puede no tener función inversa, pero si la tiene, la función inversa es única (ver el ejercicio 108).

Se puede pensar en f^{-1} como una operación que deshace lo hecho por f. Por ejemplo, la resta deshace lo que la suma hace, y la división deshace lo que hace la multiplicación.

Usar la definición de función inversa para comprobar:

$$f(x) = x + c \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = x - c \quad \text{son funciones inversas una de la otra.}$$

$$f(x) = cx \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{c},\ c \neq 0, \quad \text{son funciones inversas una de la otra.}$$

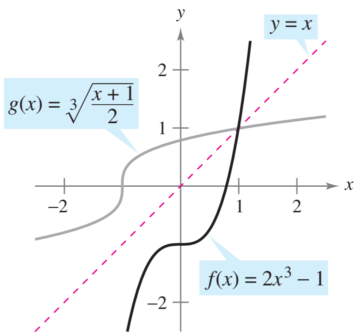
EJEMPLO 1 Comprobación de funciones inversas

Demostrar que las funciones siguientes son mutuamente inversas.

$$f(x) = 2x^3 - 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

Solución Como el dominio y el recorrido o rango de f y g son todos los números reales, se puede concluir que las dos funciones compuestas existen para todo x. La composición de f con g se da por

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 \\ &= 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 \\ &= x + 1 - 1 \\ &= x. \end{aligned}$$



f y g son funciones inversas una de la otra
Figura 5.11

La composición de g con f es

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt[3]{\frac{(2x^3 - 1) + 1}{2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x. \end{aligned}$$

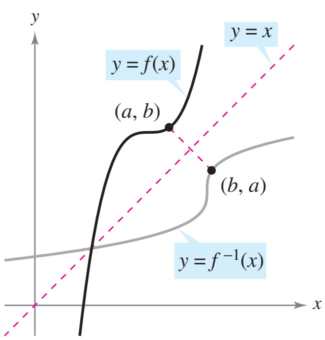
Puesto que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, se puede concluir que f y g son inversas una de otra (ver la figura 5.11).

AYUDA DE ESTUDIO En el ejemplo 1, comparar las funciones f y g en forma verbal.

Para f: Primero elevar x al cubo, luego multiplicar por 2, y después restar 1.

Para g: Primero sumar 1, después dividir entre 2, y luego sacar raíz cúbica.

¿Se ve cómo se "deshace el proceso"?



La gráfica de f^{-1} es un reflejo de la gráfica de f en la recta $y = x$
Figura 5.12

En la figura 5.11, las gráficas de f y $g = f^{-1}$ parecen el reflejo una de la otra respecto a la recta $y = x$. La gráfica de f^{-1} se obtiene **reflejando** la de f en la línea $y = x$. Esta idea generaliza el siguiente teorema.

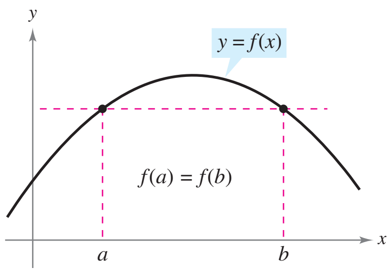
TEOREMA 5.6 PROPIEDAD DE REFLEXIÓN DE LAS FUNCIONES INVERSAS

La gráfica de f contiene el punto (a, b) si y sólo si la gráfica de f^{-1} contiene el punto (b, a).

DEMOSTRACIÓN Si (a, b) está en la gráfica de f, entonces es $f(a) = b$ y se puede escribir

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

De forma que (b, a) está en la gráfica de f^{-1}, como se muestra en la figura 5.12. Un argumento similar demuestra el teorema en la otra dirección.



Si una recta horizontal corta dos veces la gráfica de f, entonces f no es inyectiva
Figura 5.13

Existencia de una función inversa

No todas las funciones tienen función inversa; el teorema 5.6 sugiere un criterio gráfico para aquellas que lo son: el **criterio de la recta horizontal** para una función inversa. Esta prueba establece que la función f tiene inversa si y sólo si toda recta horizontal corta a la gráfica de f a lo más en sólo un punto (figura 5.13). El siguiente teorema explica por qué la prueba de la recta horizontal es válida. (Recordar de la sección 3.3 que la función es *estrictamente monótona* si ésta es creciente o decreciente en todo su dominio.)

TEOREMA 5.7 EXISTENCIA DE LA FUNCIÓN INVERSA

1. Una función tiene función inversa si y sólo si es inyectiva.
2. Si f es estrictamente monótona en todo su dominio, entonces ésta es inyectiva y, por tanto, tiene inversa.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la segunda parte del teorema, recordar de la sección P.3 que f es inyectiva si para x_1 y x_2 en su dominio

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ahora, se escoge x_1 y x_2 en el dominio de f. Si $x_1 \neq x_2$, entonces, como f es estrictamente monótona, se deduce que

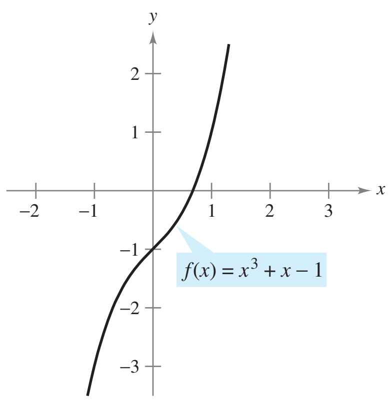
$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{o} \qquad f(x_1) > f(x_2).$$

En cualquier caso, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por tanto, f es inyectiva en el intervalo. La demostración de la primera parte del teorema se deja como ejercicio (ver el ejercicio 109).

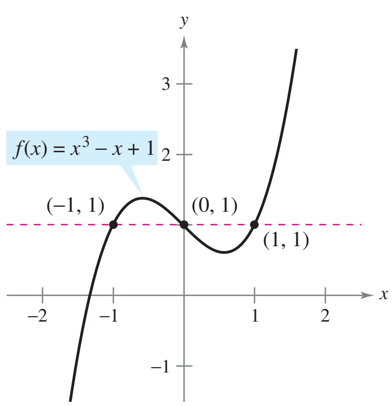
EJEMPLO 2 Existencia de la función inversa

¿Cuál de las funciones tiene inversa?

a) $f(x) = x^3 + x - 1$ *b*) $f(x) = x^3 - x + 1$



a) Dado que f es creciente en todo su dominio, tiene función inversa



b) Dado que f no es inyectiva, no tiene una función inversa
Figura 5.14

Solución

***a*)** En la figura 5.14*a* se observa una gráfica de f, que aparenta que f es creciente en todo su dominio. Para verificar esto, notar que su derivada, $f'(x) = 3x^2 + 1$, es positiva para todos los valores reales de x. Por tanto, f es estrictamente monótona y debe tener una función inversa.

***b*)** En la figura 5.14*b* se observa una gráfica de f, en la que se puede ver que la función no satisface el criterio de la recta horizontal. En otras palabras, no es inyectiva. Por ejemplo, f toma el mismo valor cuando $x = -1$, 0 y 1.

$$f(-1) = f(1) = f(0) = 1 \qquad \text{No inyectiva.}$$

En consecuencia, por el teorema 5.7, f no admite inversa.

NOTA Suele ser más fácil probar que una función *tiene* función inversa que hallarla. Por ejemplo, sería algebraicamente difícil hallar la función inversa del ejemplo 2*a*.

A continuación se sugiere un procedimiento para encontrar la función inversa de una función.

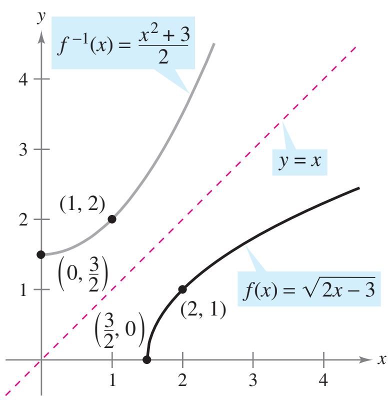
Estrategia para hallar la inversa de una función

1. Utilizar el teorema 5.7 para determinar si la función dada $y = f(x)$ tiene inversa.
2. Despejar x como función de y: $x = g(y) = f^{-1}(y)$.
3. Intercambiar x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.
4. Definir como dominio de f^{-1} el recorrido de f.
5. Verificar que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

EJEMPLO 3 Cálculo de la inversa de una función

Hallar la función inversa de

$$f(x) = \sqrt{2x - 3}.$$



El dominio de f^{-1}, $[0, \infty)$ es el recorrido o rango de f
Figura 5.15

Solución De la gráfica de f en la figura 5.15, aparece que f se incrementa sobre su dominio entero $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$. Para verificar esto, observar que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$ es positivo sobre el dominio de f. Así, f es estrictamente monótona y debe tener una función inversa. Para encontrar una ecuación para la función inversa, sea $y = f(x)$ y despejar x en términos de y.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-3} &= y && \text{Hacer } y = f(x). \\ 2x - 3 &= y^2 && \text{Elevar al cuadrado.} \\ x &= \frac{y^2+3}{2} && \text{Despejar } x. \\ y &= \frac{x^2+3}{2} && \text{Intercambiar } x \text{ y } y. \\ f^{-1}(x) &= \frac{x^2+3}{2} && \text{Sustituir } y \text{ por } f^{-1}(x). \end{aligned}$$

El dominio de f^{-1} es el recorrido o rango de f, que es $[0, \infty)$. Se puede verificar este resultado como sigue.

$$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{2\left(\frac{x^2+3}{2}\right) - 3} = \sqrt{x^2} = x, \quad x \geq 0$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 + 3}{2} = \frac{2x - 3 + 3}{2} = x, \quad x \geq \frac{3}{2}$$

NOTA Recordar que se puede utilizar cualquier letra para representar la variable independiente. Así,

$$f^{-1}(y) = \frac{y^2+3}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$$

$$f^{-1}(s) = \frac{s^2+3}{2}$$

representan la misma función.

El teorema 5.7 es útil en el siguiente tipo de problemas. Supóngase una función que *no* es inyectiva en su dominio. Al restringir el dominio a un intervalo en que la función sea estrictamente monótona, se obtiene una nueva función que *ya* es inyectiva en el dominio restringido.

EJEMPLO 4 Analizar si una función es inyectiva

Demostrar que la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

no es inyectiva en toda la recta real. Después demostrar que $[-\pi/2, \pi/2]$ es el intervalo más grande, centrado en el origen, en el que f es estrictamente monótona.

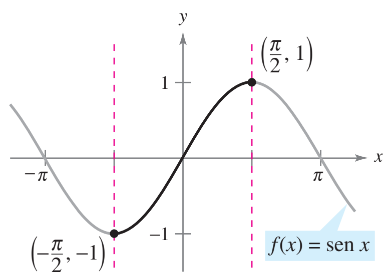
Solución Es claro que f no es inyectiva, ya que muchos valores diferentes de x dan un mismo valor de y. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}(0) = 0 = \operatorname{sen}(\pi).$$

Además, f es creciente en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, porque su derivada

$$f'(x) = \cos x$$

es positiva en él. Por último, como en los puntos terminales a la derecha y a la izquierda hay extremos relativos de la función seno, se puede concluir que la función f es creciente en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$ y que en cualquier otro intervalo mayor, la función no es estrictamente monótona (ver la figura 5.16).



f es inyectiva en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$
Figura 5.16

Derivada de la función inversa

Los dos teoremas siguientes discuten la derivada de las funciones inversas. El razonamiento del teorema 8 se sigue de la propiedad reflexiva de la función inversa, como se muestra en la figura 5.12. En el apéndice A pueden verse las demostraciones de los dos teoremas.

TEOREMA 5.8 CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD DE LAS FUNCIONES INVERSAS

Sea f una función cuyo dominio es un intervalo I. Si f tiene una función inversa, entonces los siguientes enunciados son verdaderos.

1. Si f es continua en su dominio, entonces f^{-1} es continua en su dominio.
2. Si f es creciente en su dominio, entonces f^{-1} es creciente en su dominio.
3. Si f es decreciente en su dominio, entonces f^{-1} es decreciente en su dominio.
4. Si f es derivable en c y $f'(c) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(c)$.

TEOREMA 5.9 LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si f tiene una función inversa g, entonces g es derivable para todo x tal que $f'(g(x)) \neq 0$. Además,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(g(x)) \neq 0.$$

EXPLORACIÓN

Graficar las funciones inversas

$$f(x) = x^3$$

y

$$g(x) = x^{1/3}.$$

Calcular la pendiente de f en (1, 1), (2, 8) y (3, 27), y la pendiente de g en (1, 1), (8, 2) y (27, 3). ¿Qué se observa? ¿Qué ocurre en (0, 0)?

EJEMPLO 5 Cálculo de la derivada de una función inversa

Sea $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 1$.

a) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(x)$ para $x = 3$?
b) ¿Cuál es el valor de $(f^{-1})'(x)$ para $x = 3$?

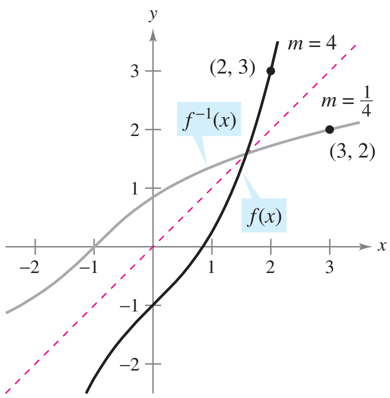
Solución Notar que f es una función inyectiva, así que tiene una función inversa.

a) Como $f(x) = 3$ cuando $x = 2$, se sabe que $f^{-1}(3) = 2$.
b) Como la función f es derivable y tiene inversa, se puede aplicar el teorema 5.9 (con $g = f^{-1}$) y se escribe

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(2)}.$$

Además, usando $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 1$, se concluye que

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{3}{4}(2^2) + 1} = \frac{1}{4}.$$



Las gráficas de las funciones inversas f y f^{-1} tienen pendientes recíprocas en los puntos (a, b) y (b, a)
Figura 5.17

En el ejemplo 5, notar que la pendiente en el punto (2, 3) de la gráfica de f es 4 y la pendiente de f^{-1} en el punto (3, 2) es $\frac{1}{4}$ (ver la figura 5.17). Esta relación recíproca (que se sigue del teorema 5.9) puede escribirse como se muestra.

Si $y = g(x) = f^{-1}(x)$, entonces $f(y) = x$ y $f'(y) = \dfrac{dx}{dy}$. El teorema 5.9 dice que

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(dx/dy)}.$$

Así que, $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy}.}$

EJEMPLO 6 Las gráficas de las funciones inversas tienen pendientes recíprocas

Sea $f(x) = x^2$ (para $x \geq 0$) y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Probar que las pendientes de las gráficas de f y f^{-1} son recíprocas en los puntos siguientes.

a) (2, 4) y (4, 2) ***b)*** (3, 9) y (9, 3)

Solución Las derivadas de f y f^{-1} están dadas por

$$f'(x) = 2x \quad \text{y} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

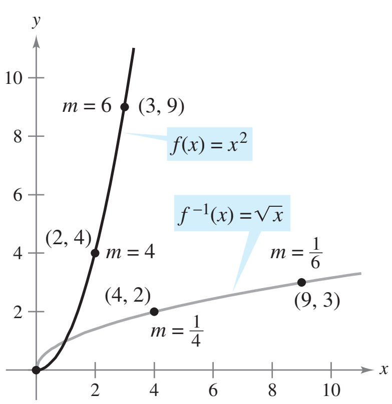
a) En (2, 4), la pendiente de la gráfica de f es $f'(2) = 2(2) = 4$. En (4, 2) la pendiente de la gráfica de f^{-1} es

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}.$$

b) En el punto (3, 9), la pendiente de la gráfica de f es $f'(3) = 2(3) = 6$. En (9, 3), la pendiente de la gráfica de f^{-1} es

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}.$$

Así, en ambos casos, las pendientes son recíprocas, como ilustra la figura 5.18.



En (0, 0), la derivada de f es 0, y la derivada de f^{-1} no existe
Figura 5.18

5.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, mostrar que f y g son funciones inversas *a*) analíticamente y *b*) gráficamente.

1. $f(x) = 5x + 1, \quad g(x) = \dfrac{x - 1}{5}$

2. $f(x) = 3 - 4x, \quad g(x) = \dfrac{3 - x}{4}$

3. $f(x) = x^3, \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$

4. $f(x) = 1 - x^3, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

5. $f(x) = \sqrt{x - 4}, \quad g(x) = x^2 + 4, \quad x \geq 0$

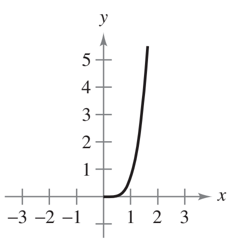
6. $f(x) = 16 - x^2, \quad x \geq 0, \quad g(x) = \sqrt{16 - x}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

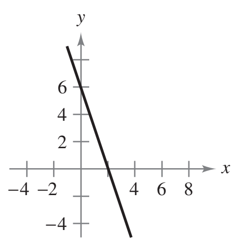
8. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}, \quad x \geq 0, \quad g(x) = \dfrac{1 - x}{x}, \quad 0 < x \leq 1$

En los ejercicios 9 a 12, relacionar la gráfica de la función con la gráfica de su inversa. [Las gráficas de las funciones inversas están rotuladas *a*), *b*), *c*) y *d*).]

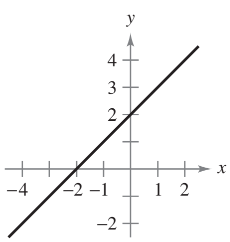
a)



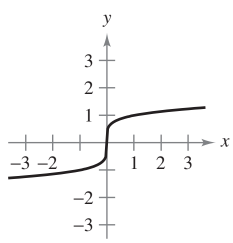
b)



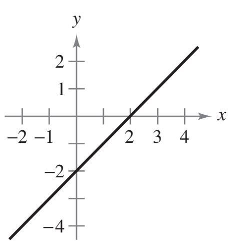
c)



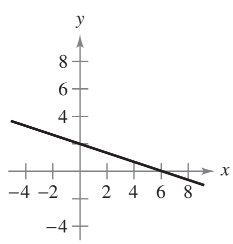
d)



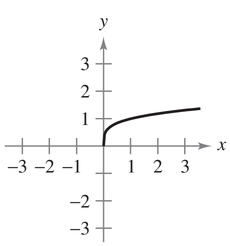
9.



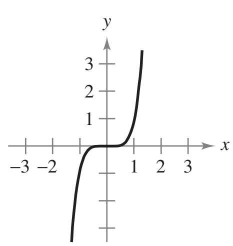
10.



11.



12.



En los ejercicios 13 a 22, usar una herramienta de graficación para representar la función. Entonces, usar la prueba de la recta horizontal para determinar si la función es inyectiva en su dominio entero y así tiene una función inversa.

13. $f(x) = \frac{3}{4}x + 6$

14. $f(x) = 5x - 3$

15. $f(\theta) = \operatorname{sen} \theta$

16. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$

17. $h(s) = \dfrac{1}{s - 2} - 3$

18. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$

19. $f(x) = \ln x$

20. $f(x) = 5x\sqrt{x - 1}$

21. $g(x) = (x + 5)^3$

22. $h(x) = |x + 4| - |x - 4|$

En los ejercicios 23 a 30, *a*) encontrar la función inversa de f, *b*) graficar f y f^{-1} sobre la misma configuración de ejes coordenados, *c*) describir la relación entre las gráficas y *d*) establecer el dominio y el rango de f y f^{-1}.

23. $f(x) = 2x - 3$

24. $f(x) = 3x$

25. $f(x) = x^5$

26. $f(x) = x^3 - 1$

27. $f(x) = \sqrt{x}$

28. $f(x) = x^2, \quad x \geq 0$

29. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$

30. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad x \geq 2$

En los ejercicios 31 a 36, *a*) encontrar la función inversa de f. *b*) Usar una herramienta de graficación para representar f y f^{-1} en la misma pantalla. *c*) Describir la relación entre las gráficas y *d*) establecer el dominio así como el recorrido o rango de f y f^{-1}.

31. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

32. $f(x) = 3\sqrt[5]{2x - 1}$

33. $f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$

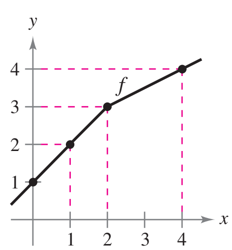
34. $f(x) = x^{3/5}$

35. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 7}}$

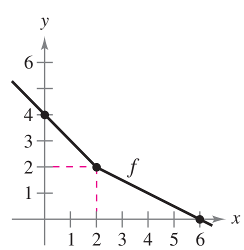
36. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$

En los ejercicios 37 y 38, usar la gráfica de la función f para hacer una tabla de valores para los puntos dados. Entonces, hacer una segunda tabla que pueda usarse para encontrar f^{-1} y bosquejar la gráfica de f^{-1}.

37.



38.



39. ***Costo*** Supóngase que se necesitan 50 libras de dos productos que cuestan \$1.25 y \$1.60 por libra.

a) Verificar que el costo total es $y = 1.25x + 1.60(50 - x)$, donde x es el número de libras del producto más barato.

b) Encontrar la función inversa de la función costo. ¿Qué representa cada variable en la función inversa?

c) ¿Cuál es el dominio de la función inversa? Validar o explicar el resultado a partir del contexto del problema.

d) Determinar el número de libras del producto más barato si el costo total es de \$73.

40. ***Temperatura*** La temperatura $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde $F \geq -459.6$, representa la temperatura C en grados Celsius como una función de la temperatura F en grados Fahrenheit.

a) Encontrar la función inversa de C.

b) ¿Qué representa la función inversa?

c) Determinar el dominio de la función inversa. Validar o explicar el resultado con el contexto del problema.

d) La temperatura es de 22° C. ¿Cuál es la temperatura correspondiente en grados Fahrenheit?

En los ejercicios 41 a 46, usar la derivada para determinar si la función es estrictamente monótona en su dominio completo y, por tanto, tiene una función inversa.

41. $f(x) = 2 - x - x^3$ **42.** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$

43. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$ **44.** $f(x) = (x + a)^3 + b$

45. $f(x) = \ln(x - 3)$ **46.** $f(x) = \cos \dfrac{3x}{2}$

En los ejercicios 47 a 52, mostrar que *f* es estrictamente monótona en el intervalo dado y, por tanto, tiene una función inversa en ese intervalo.

47. $f(x) = (x - 4)^2, \quad [4, \infty)$ **48.** $f(x) = |x + 2|, \quad [-2, \infty)$

49. $f(x) = \dfrac{4}{x^2}, \quad (0, \infty)$ **50.** $f(x) = \cot x, \quad (0, \pi)$

51. $f(x) = \cos x, \quad [0, \pi]$ **52.** $f(x) = \sec x, \quad \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

En los ejercicios 53 y 54, encontrar la inversa de *f* en el intervalo indicado. Usar una herramienta de graficación para representar *f* y f^{-1} en una misma pantalla. Describir la relación entre ambas gráficas.

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}, \quad (-2, 2)$ **54.** $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x^2}, \quad (0, 10)$

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 55 a 58, *a*) usar una herramienta de graficación para representar la función, *b*) representar su función inversa utilizando la herramienta de graficación y *c*) determinar si la gráfica de la relación inversa es una función inversa. Explicar la respuesta.**

55. $f(x) = x^3 + x + 4$ **56.** $h(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

57. $g(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 1}$ **58.** $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + 15}}$

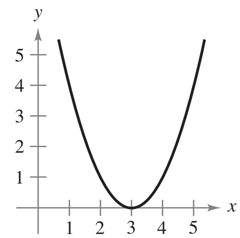
En los ejercicios 59 a 62, determinar si la función es inyectiva. Si lo es, encontrar su función inversa.

59. $f(x) = \sqrt{x - 2}$ **60.** $f(x) = -3$

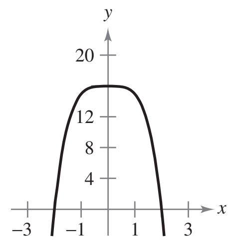
61. $f(x) = |x - 2|, \quad x \leq 2$ **62.** $f(x) = ax + b, \quad a \neq 0$

En los ejercicios 63 a 66, desechar la parte del dominio con el fin de que la función restringida sea inyectiva. Encontrar la función inversa de la función resultante y dar su dominio. (*Nota*: Hay más de una respuesta correcta.)

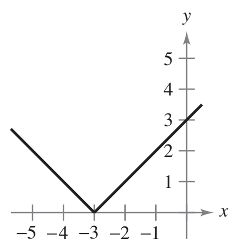
63. $f(x) = (x - 3)^2$



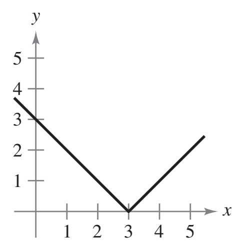
64. $f(x) = 16 - x^4$



65. $f(x) = |x + 3|$



66. $f(x) = |x - 3|$



Para pensar **En los ejercicios 67 a 70, determinar si la función admite inversa. Si es así, ¿cuál es la función inversa?**

67. $g(t)$ es el volumen de agua que ha pasado por una tubería a t minutos de abrir la llave de paso.

68. $h(t)$ es el nivel de la marea t horas pasada la medianoche, donde $0 \leq t < 24$.

69. $C(t)$ es el costo de una llamada telefónica de t minutos.

70. $A(r)$ es el área de un círculo de radio r.

En los ejercicios 71 a 80, verificar si *f* tiene una inversa. Entonces usar la función *f* y el número real dado *a* para encontrar $(f^{-1})'(a)$. (*Sugerencia:* Ver el ejemplo 5.)

71. $f(x) = x^3 - 1, \quad a = 26$ **72.** $f(x) = 5 - 2x^3, \quad a = 7$

73. $f(x) = x^3 + 2x - 1, \quad a = 2$

74. $f(x) = \frac{1}{27}(x^5 + 2x^3), \quad a = -11$

75. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \quad a = \dfrac{1}{2}$

76. $f(x) = \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \quad a = 1$

77. $f(x) = \dfrac{x + 6}{x - 2}, \quad x > 2, \quad a = 3$

78. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}, \quad x > -1, \quad a = 2$

79. $f(x) = x^3 - \dfrac{4}{x}, \quad x > 0, \quad a = 6$

80. $f(x) = \sqrt{x-4}, \quad a = 2$

En los ejercicios 81 a 84, *a*) hallar el dominio de f y de f^{-1}, *b*) encontrar los recorridos o rangos de f y f^{-1}, *c*) graficar f y f^{-1}, y *d*) demostrar que las pendientes de las gráficas de f y f^{-1} son recíprocas en los puntos dados.

	Funciones	*Punto*
81.	$f(x) = x^3$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$
	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$
82.	$f(x) = 3 - 4x$	$(1, -1)$
	$f^{-1}(x) = \dfrac{3-x}{4}$	$(-1, 1)$
83.	$f(x) = \sqrt{x-4}$	$(5, 1)$
	$f^{-1}(x) = x^2 + 4, \quad x \geq 0$	$(1, 5)$
84.	$f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}, \quad x \geq 0$	$(1, 2)$
	$f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$	$(2, 1)$

En los ejercicios 85 y 86, encontrar dy/dx en los puntos dados para la ecuación.

85. $x = y^3 - 7y^2 + 2, \quad (-4, 1)$ **86.** $x = 2\ln(y^2 - 3), \quad (0, 2)$

En los ejercicios 87 a 90, usar las funciones $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ y $g(x) = x^3$ para encontrar los valores dados.

87. $(f^{-1} \circ g^{-1})(1)$ **88.** $(g^{-1} \circ f^{-1})(-3)$

89. $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$ **90.** $(g^{-1} \circ g^{-1})(-4)$

En los ejercicios 91 a 94, usar las funciones $f(x) = x + 4$ y $g(x) = 2x - 5$ para encontrar las funciones dadas.

91. $g^{-1} \circ f^{-1}$ **92.** $f^{-1} \circ g^{-1}$

93. $(f \circ g)^{-1}$ **94.** $(g \circ f)^{-1}$

Desarrollo de conceptos

95. Describir cómo encontrar la función inversa de una función inyectiva dada por una ecuación en x y y. Dar un ejemplo.

96. Describir la relación entre la gráfica de una función y la gráfica de su función inversa.

En los ejercicios 97 y 98, la derivada de la función tiene el mismo signo para todo x en su dominio, pero la función no es inyectiva. Explicar.

97. $f(x) = \tan x$ **98.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

99. ***Para pensar*** La función $f(x) = k(2 - x - x^3)$ es inyectiva y $f^{-1}(3) = -2$. Encontrar k.

Para discusión

100. ***Para pensar*** El punto $(1, 3)$ se encuentra en la gráfica de f, y la pendiente de la recta tangente por este punto es $m = 2$. Suponer que f^{-1} existe. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente para la gráfica de f^{-1} en el punto $(3, 1)$?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 101 a 104, determinar cuál de las sentencias es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre que es falsa.**

101. Si f es una función par entonces f^{-1} existe.

102. Si la función inversa de f existe, entonces la intersección en y de f es una intersección en x de f^{-1}.

103. Si $f(x) = x^n$ donde n es impar, entonces f^{-1} existe.

104. No existe ninguna función f tal que $f = f^{-1}$.

105. *a*) Mostrar que $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ no es inyectiva en $(-\infty, \infty)$.

b) Determinar el mayor valor de c de forma que f sea inyectiva en $(-c, c)$.

106. Sean f y g funciones inyectivas. Probar que *a*) $f \circ g$ es inyectiva y *b*) $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

107. Probar que si f tiene una función inversa, entonces $(f^{-1})^{-1} = f$.

108. Demostrar que si una función tiene una función inversa, la función inversa es única.

109. Demostrar que una función tiene inversa si y sólo si es inyectiva.

110. ¿Es cierto el recíproco de la segunda parte del teorema 5.7? Esto es, si una función es inyectiva (y tiene una función inversa), entonces ¿debe ser, por tanto, una función estrictamente monótona? Si es cierto, demostrarlo. Si no lo es, dar un contraejemplo.

111. Sea f dos veces derivable e inyectiva en un intervalo abierto I. Probar que su función inversa g satisface

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3}.$$

Si f es creciente y cóncava hacia abajo, ¿cómo es la concavidad de $f^{-1} = g$?

112. Si $f(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$, encontrar $(f^{-1})'(0)$.

113. Demostrar que $f(x) = \displaystyle\int_2^x \sqrt{1+t^2}\, dt$ es inyectiva y encontrar $(f^{-1})'(0)$.

114. Sea $y = \dfrac{x-2}{x-1}$. Demostrar que y es su propia función inversa. ¿Qué se puede concluir acerca de la gráfica de f? Explicar.

115. Sea $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

a) Mostrar que f es inyectiva si y sólo si $bc - ad \neq 0$.

b) Dado $bc - ad \neq 0$, encontrar f^{-1}.

c) Determinar los valores de a, b, c y d tal que $f = f^{-1}$.

5.4 Funciones exponenciales: derivación e integración

- Desarrollar las propiedades de la función exponencial natural.
- Derivar las funciones exponenciales naturales.
- Integrar las funciones exponenciales naturales.

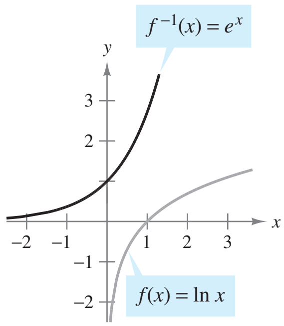
La función exponencial natural

La función $f(x) = \ln x$ es creciente en todo su dominio, y por tanto tiene una función inversa f^{-1}. El dominio de f^{-1} es el conjunto de todos los reales, y el recorrido o rango es el conjunto de todos los reales positivos, como se muestra en la figura 5.19. Así pues, para cualquier número real x,

$$f(f^{-1}(x)) = \ln[f^{-1}(x)] = x.$$ *x es cualquier número real.*

Si x es racional, entonces

$$\ln(e^x) = x \ln e = x(1) = x.$$ *x es un número racional.*



La función inversa de la función logaritmo natural es la función exponencial natural
Figura 5.19

Como la función logaritmo natural es inyectiva, se puede concluir que $f^{-1}(x)$ y e^x son iguales en valores *racionales* de x. La siguiente definición extiende el significado de e^x para incluir *todos* los valores reales de x.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

La función inversa de la función logaritmo natural $f(x) = \ln x$ se llama **función exponencial natural** y se denota por

$$f^{-1}(x) = e^x.$$

Esto es,

$$y = e^x \text{ si y sólo si } x = \ln y.$$

EL NÚMERO *e*

El símbolo *e* fue utilizado por primera vez para representar la base de los logaritmos naturales por el matemático Leonhard Euler en una carta a otro matemático, Christian Goldbach, en 1731.

La relación inversa entre las funciones logaritmo natural y exponencial natural se puede resumir como sigue:

$$\ln(e^x) = x \quad \text{y} \quad e^{\ln x} = x$$ *Relación inversa.*

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones exponenciales

Resolver $7 = e^{x+1}$.

Solución Se puede pasar de la forma exponencial a la forma logarítmica con sólo *aplicar el logaritmo natural en ambos miembros* de la ecuación.

$7 = e^{x+1}$	Ecuación original.
$\ln 7 = \ln(e^{x+1})$	Aplicar logaritmo natural a cada lado.
$\ln 7 = x + 1$	Aplicar la propiedad de inversa.
$-1 + \ln 7 = x$	Despejar x.
$0.946 \approx x$	Usar la calculadora.

Verificar esta solución en la ecuación original.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación logarítmica

Resolver $\ln(2x - 3) = 5$.

Solución Para convertir la forma logarítmica en la forma exponencial aplicar la función exponencial de ambos miembros de la ecuación logarítmica.

$$\ln(2x - 3) = 5 \qquad \text{Ecuación original.}$$
$$e^{\ln(2x-3)} = e^5 \qquad \text{Aplicar exponenciales a cada lado.}$$
$$2x - 3 = e^5 \qquad \text{Aplicar la propiedad inversa.}$$
$$x = \tfrac{1}{2}(e^5 + 3) \qquad \text{Despejar } x.$$
$$x \approx 75.707 \qquad \text{Usar la calculadora.}$$

Las reglas usuales para operar con exponentes racionales pueden ser extendidas a la función exponencial natural, como se muestra en el siguiente teorema.

TEOREMA 5.10 OPERACIONES CON FUNCIONES EXPONENCIALES

Sean a y b dos números reales arbitrarios.

1. $e^a e^b = e^{a+b}$
2. $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

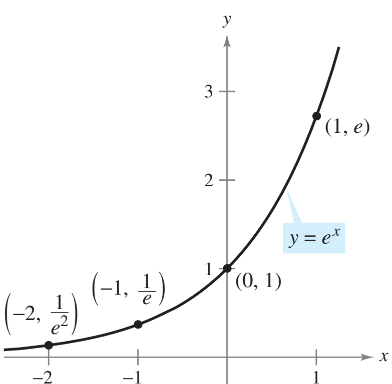
DEMOSTRACIÓN Para demostrar la propiedad 1, se puede escribir

$$\begin{aligned}\ln(e^a e^b) &= \ln(e^a) + \ln(e^b)\\ &= a + b\\ &= \ln(e^{a+b}).\end{aligned}$$

Como la función logaritmo natural es inyectiva, se puede concluir como

$$e^a e^b = e^{a+b}.$$

La demostración de la segunda propiedad se da en el apéndice A.



La función exponencial natural es creciente y su gráfica es cóncava hacia arriba
Figura 5.20

En la sección 5.3 se aprendió que una función inversa f^{-1} comparte muchas propiedades con f. Así, la función exponencial natural hereda las siguientes propiedades de la función logaritmo natural (ver la figura 5.20).

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

1. El dominio de $f(x) = e^x$ es $(-\infty, \infty)$, y el rango es $(0, \infty)$.
2. La función $f(x) = e^x$ es continua, creciente e inyectiva en todo su dominio.
3. La gráfica de $f(x) = e^x$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio.
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

Derivadas de las funciones exponenciales

Una de las características más intrigantes (y más útiles) de la función exponencial natural es que *su derivada es ella misma*. En otras palabras, es solución de la ecuación diferencial $y' = y$. Este resultado se enuncia en el siguiente teorema.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para encontrar más información acerca de derivadas de funciones exponenciales de orden $\frac{1}{2}$, ver el artículo "A Child's Garden of Fractional Derivates", de Marcia Kleinz y Thomas J. Osler en *The College Mathematics Journal*.

TEOREMA 5.11 DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Si u es una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$
2. $\dfrac{d}{dx}[e^u] = e^u \dfrac{du}{dx}$

DEMOSTRACIÓN Para probar la propiedad 1, usar el hecho de que $\ln e^x = x$, y derivar cada lado de la ecuación.

$$\ln e^x = x \qquad \text{Definición de la función exponencial.}$$

$$\frac{d}{dx}[\ln e^x] = \frac{d}{dx}[x] \qquad \text{Derivar ambos lados con respecto a } x.$$

$$\frac{1}{e^x}\frac{d}{dx}[e^x] = 1$$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

La derivada e^u se deduce de la regla de la cadena.

NOTA Se puede interpretar este teorema geométricamente diciendo que la pendiente de la gráfica de $f(x) = e^x$ en cualquier punto (x, e^x) es igual a la coordenada y del punto.

EJEMPLO 3 Derivación de funciones exponenciales

a) $\dfrac{d}{dx}[e^{2x-1}] = e^u \dfrac{du}{dx} = 2e^{2x-1}$ $\qquad u = 2x - 1$

b) $\dfrac{d}{dx}[e^{-3/x}] = e^u \dfrac{du}{dx} = \left(\dfrac{3}{x^2}\right)e^{-3/x} = \dfrac{3e^{-3/x}}{x^2}$ $\qquad u = -\dfrac{3}{x}$

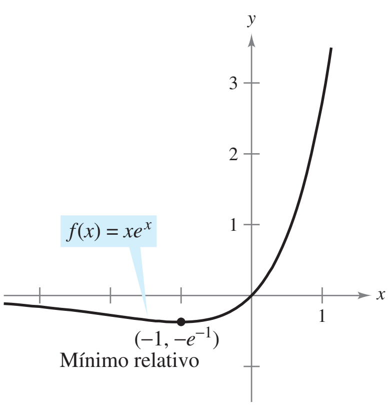
EJEMPLO 4 Localización de extremos relativos

Encontrar los extremos relativos de $f(x) = xe^x$.

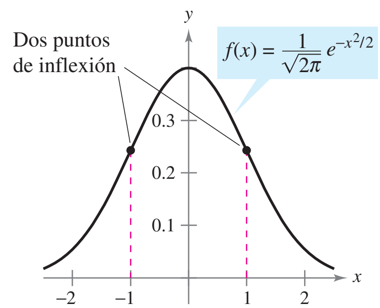
Solución La derivada de f está dada por

$$f'(x) = x(e^x) + e^x(1) \qquad \text{Regla del producto.}$$
$$= e^x(x + 1).$$

Como e^x nunca es 0, la derivada es 0 sólo cuando $x = -1$. Además, el criterio de la primera derivada permite determinar que en ese punto hay un mínimo relativo, como se muestra en la figura 5.21. Como la derivada $f'(x) = e^x(x + 1)$ está definida para todo x, no hay otros puntos críticos.



La derivada de f cambia de negativo a positivo en $x = -1$
Figura 5.21



La curva en forma de campana dada por una función de densidad de probabilidad estándar normal
Figura 5.22

EJEMPLO 5 La función densidad de probabilidad normal estándar

Probar que la *función densidad de probabilidad normal estándar*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

tiene puntos de inflexión cuando $x = \pm 1$.

Solución Para localizar los posibles puntos de inflexión, se deben buscar los valores de x para los cuales la segunda derivada es cero.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \text{Función original.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-x) e^{-x^2/2} \qquad \text{Primera derivada.}$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [(-x)(-x)e^{-x^2/2} + (-1)e^{-x^2/2}] \qquad \text{Regla del producto.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-x^2/2})(x^2 - 1) \qquad \text{Segunda derivada.}$$

Por tanto, $f''(x) = 0$ cuando $x = \pm 1$, y se pueden aplicar las técnicas del capítulo 3 para concluir que estos valores son los dos puntos de inflexión mostrados en la figura 5.22.

NOTA La forma general de una función de densidad de probabilidad normal (cuya media es 0) está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

donde σ es la desviación estándar (σ es la letra griega minúscula sigma). Esta "curva en forma de campana" tiene puntos de inflexión cuando $x = \pm\sigma$.

EJEMPLO 6 Transacciones comerciales

El número y de transacciones comerciales (en millones) en la bolsa de valores de Nueva York desde 1990 hasta 2005 puede ser modelado por

$$y = 39\,811 e^{0.1715t}$$

donde t representa el año, $t = 0$ corresponde a 1990. ¿A qué ritmo o velocidad cambió el número de transacciones comerciales en 2000? (*Fuente: New York Stock Exchange, Inc.*)

Solución La derivada del modelo dado es

$$y' = (0.1715)(39\,811)e^{0.1715t}$$
$$\approx 6\,828 e^{0.1715t}.$$

Al evaluar la derivada cuando $t = 10$, se puede concluir que el ritmo o velocidad de cambio en 2000 fue cerca de

37 941 millones de transacciones por año.

La gráfica de este modelo se muestra en la figura 5.23.

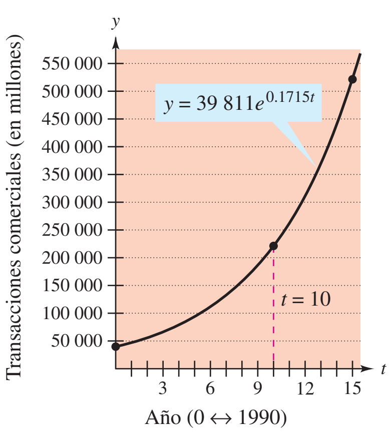


Figura 5.23

Integrales de funciones exponenciales

Cada fórmula de derivación en el teorema 5.11 tiene su correspondiente fórmula de integración.

TEOREMA 5.12 REGLAS DE INTEGRACIÓN PARA FUNCIONES EXPONENCIALES

Si u es una función derivable de x.

1. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$ **2.** $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$

EJEMPLO 7 Integración de funciones exponenciales

Encontrar $\displaystyle\int e^{3x+1}\,dx$.

Solución Si $u = 3x + 1$, entonces $du = 3\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int e^{3x+1}dx &= \frac{1}{3}\int e^{3x+1}(3)\,dx && \text{Multiplicar y dividir entre 3.}\\
&= \frac{1}{3}\int e^u\,du && \text{Sustituir } u = 3x+1.\\
&= \frac{1}{3}e^u + C && \text{Aplicar la regla exponencial.}\\
&= \frac{e^{3x+1}}{3} + C && \text{Sustituir nuevamente.}
\end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 7, el factor constante faltante 3 se ha introducido para crear $du = 3\,dx$. Sin embargo, recordemos que no se puede introducir un factor *variable* faltante en el integrando. Por ejemplo,

$$\int e^{-x^2}\,dx \qquad \frac{1}{x}\int e^{-x^2}\,(x\,dx).$$

EJEMPLO 8 Integración de funciones exponenciales

Encontrar $\displaystyle\int 5xe^{-x^2}\,dx$.

Solución Si se tiene $u = -x^2$, entonces $du = -2x\,dx$ o $x\,dx = -du/2$.

$$\begin{aligned}
\int 5xe^{-x^2}dx &= \int 5e^{-x^2}(x\,dx) && \text{Reagrupar el integrando.}\\
&= \int 5e^u\left(-\frac{du}{2}\right) && \text{Sustituir } u = -x^2.\\
&= -\frac{5}{2}\int e^u\,du && \text{Regla del múltiplo constante.}\\
&= -\frac{5}{2}e^u + C && \text{Aplicar la regla exponencial.}\\
&= -\frac{5}{2}e^{-x^2} + C && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Integración de funciones exponenciales

$$\textit{a)}\quad \int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = -\int \overbrace{e^{1/x}}^{e^u}\overbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx}^{du} \qquad u = \frac{1}{x}$$

$$= -e^{1/x} + C$$

$$\textit{b)}\quad \int \operatorname{sen} x\, e^{\cos x}\,dx = -\int \overbrace{e^{\cos x}}^{e^u}\overbrace{(-\operatorname{sen} x\,dx)}^{du} \qquad u = \cos x$$

$$= -e^{\cos x} + C$$

EJEMPLO 10 Cálculo de áreas acotadas o delimitadas por funciones exponenciales

Evaluar cada una de las integrales definidas.

$$\textit{a)}\ \int_0^1 e^{-x}\,dx \qquad \textit{b)}\ \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \qquad \textit{c)}\ \int_{-1}^0 [e^x\cos(e^x)]\,dx$$

Solución

$$\textit{a)}\quad \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big]_0^1 \qquad \text{Ver la figura 5.24}\textit{a}.$$

$$= -e^{-1} - (-1)$$

$$= 1 - \frac{1}{e}$$

$$\approx 0.632$$

$$\textit{b)}\quad \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x)\Big]_0^1 \qquad \text{Ver la figura 5.24}\textit{b}.$$

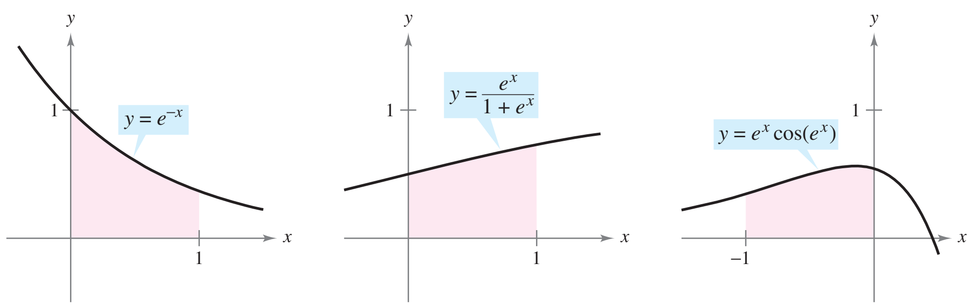
$$= \ln(1+e) - \ln 2$$

$$\approx 0.620$$

$$\textit{c)}\quad \int_{-1}^0 [e^x\cos(e^x)]\,dx = \operatorname{sen}(e^x)\Big]_{-1}^0 \qquad \text{Ver la figura 5.24}\textit{c}.$$

$$= \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen}(e^{-1})$$

$$\approx 0.482$$



a) *b)* *c)*

Figura 5.24

5.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 16, calcular x redondeando a tres decimales.

1. $e^{\ln x} = 4$
2. $e^{\ln 2x} = 12$
3. $e^x = 12$
4. $4e^x = 83$
5. $9 - 2e^x = 7$
6. $-6 + 3e^x = 8$
7. $50e^{-x} = 30$
8. $200e^{-4x} = 15$
9. $\dfrac{800}{100 - e^{x/2}} = 50$
10. $\dfrac{5\,000}{1 + e^{2x}} = 2$
11. $\ln x = 2$
12. $\ln x^2 = 10$
13. $\ln(x - 3) = 2$
14. $\ln 4x = 1$
15. $\ln\sqrt{x + 2} = 1$
16. $\ln(x - 2)^2 = 12$

En los ejercicios 17 a 22, dibujar la gráfica de la función

17. $y = e^{-x}$
18. $y = \frac{1}{2}e^x$
19. $y = e^x + 2$
20. $y = e^{x-1}$
21. $y = e^{-x^2}$
22. $y = e^{-x/2}$

23. Usar una herramienta de graficación para representar $f(x) = e^x$ y la función dada en la misma pantalla. ¿Cómo es la relación de las dos gráficas?

   a) $g(x) = e^{x-2}$ *b)* $h(x) = -\frac{1}{2}e^x$ *c)* $q(x) = e^{-x} + 3$

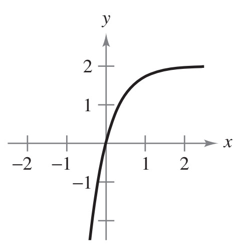
24. Usar una herramienta de graficación para representar la función. Usar la gráfica para determinar las asíntotas de la función.

   a) $f(x) = \dfrac{8}{1 + e^{-0.5x}}$

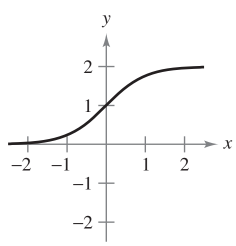
   b) $g(x) = \dfrac{8}{1 + e^{-0.5/x}}$

En los ejercicios 25 a 28, asociar cada ecuación con su gráfica. Suponer que a y C son números reales positivos. [Las gráficas están etiquetadas con *a*), *b*), *c*) y *d*).]

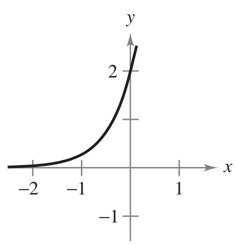
a)



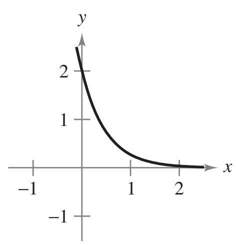
b)



c)



d)



25. $y = Ce^{ax}$
26. $y = Ce^{-ax}$
27. $y = C(1 - e^{-ax})$
28. $y = \dfrac{C}{1 + e^{-ax}}$

En los ejercicios 29 a 32, confirmar que las funciones son inversas una de la otra al representar ambas funciones sobre el mismo sistema de coordenadas.

29. $f(x) = e^{2x}$
   $g(x) = \ln\sqrt{x}$
30. $f(x) = e^{x/3}$
   $g(x) = \ln x^3$
31. $f(x) = e^x - 1$
   $g(x) = \ln(x + 1)$
32. $f(x) = e^{x-1}$
   $g(x) = 1 + \ln x$

33. ***Análisis gráfico*** Usar una herramienta de graficación para representar

$$f(x) = \left(1 + \frac{0.5}{x}\right)^x \quad \text{y} \quad g(x) = e^{0.5}$$

en la misma pantalla. ¿Cuál es la relación entre f y g cuando $x \to \infty$?

34. ***Conjetura*** Usar el resultado del ejercicio 33 para hacer una conjetura acerca del valor de

$$\left(1 + \frac{r}{x}\right)^x$$

como $x \to \infty$.

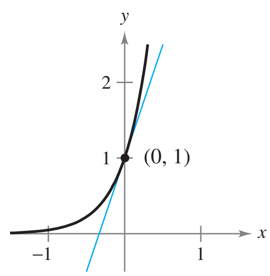
En los ejercicios 35 y 36, comparar los números dados con el número e. ¿Es el número mayor o menor que e?

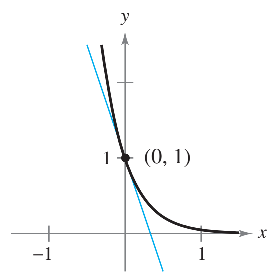
35. $\left(1 + \dfrac{1}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000}$ (ver el ejercicio 34.)

36. $1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{720} + \dfrac{1}{5\,040}$

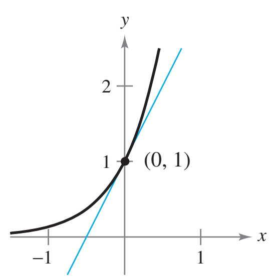
En los ejercicios 37 y 38, encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (0, 1).

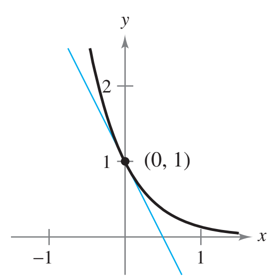
37. *a)* $y = e^{3x}$ *b)* $y = e^{-3x}$





38. *a)* $y = e^{2x}$ *b)* $y = e^{-2x}$





En los ejercicios 39 a 60, encontrar la derivada.

39. $f(x) = e^{2x}$

40. $y = e^{-5x}$

41. $y = e^{\sqrt{x}}$

42. $y = e^{-x^2}$

43. $y = e^{x-4}$

44. $f(x) = 3e^{1-x^2}$

45. $y = e^x \ln x$

46. $y = xe^x$

47. $y = x^3 e^x$

48. $y = x^2 e^{-x}$

49. $g(t) = (e^{-t} + e^t)^3$

50. $g(t) = e^{-3/t^2}$

51. $y = \ln(1 + e^{2x})$

52. $y = \ln\left(\dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}\right)$

53. $y = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

54. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

55. $y = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

56. $y = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

57. $y = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

58. $y = \ln e^x$

59. $F(x) = \displaystyle\int_{\pi}^{\ln x} \cos e^t\, dt$

60. $F(x) = \displaystyle\int_0^{e^{2x}} \ln(t + 1)\, dt$

En los ejercicios 61 a 68, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

61. $f(x) = e^{1-x}, \quad (1, 1)$

62. $y = e^{-2x+x^2}, \quad (2, 1)$

63. $y = \ln(e^{x^2}), \quad (-2, 4)$

64. $y = \ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (0, 0)$

65. $y = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x, \quad (1, e)$

66. $y = xe^x - e^x, \quad (1, 0)$

67. $f(x) = e^{-x} \ln x, \quad (1, 0)$

68. $f(x) = e^3 \ln x, \quad (1, 0)$

En los ejercicios 69 y 70, hallar dy/dx por derivación implícita.

69. $xe^y - 10x + 3y = 0$

70. $e^{xy} + x^2 - y^2 = 10$

En los ejercicios 71 y 72, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

71. $xe^y + ye^x = 1, \quad (0, 1)$

72. $1 + \ln xy = e^{x-y}, \quad (1, 1)$

En los ejercicios 73 y 74, encontrar la segunda derivada de la función.

73. $f(x) = (3 + 2x)e^{-3x}$

74. $g(x) = \sqrt{x} + e^x \ln x$

En los ejercicios 75 a 78, probar que la función $y = f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial.

75. $y = 4e^{-x}$
$y'' - y = 0$

76. $y = e^{3x} + e^{-3x}$
$y'' - 9y = 0$

77. $y = e^x\left(\cos \sqrt{2}\,x + \operatorname{sen} \sqrt{2}\,x\right)$
$y'' - 2y' + 3y = 0$

78. $y = e^x(3 \cos 2x - 4 \operatorname{sen} 2x)$
$y'' - 2y' + 5y = 0$

En los ejercicios 79 a 86, encontrar los extremos y puntos de inflexión (si existen) de la función. Utilizar una herramienta de graficación para representar la función y confirmar los resultados.

79. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

80. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

81. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-2)^2/2}$

82. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/2}$

83. $f(x) = x^2e^{-x}$

84. $f(x) = xe^{-x}$

85. $g(t) = 1 + (2 + t)e^{-t}$

86. $f(x) = -2 + e^{3x}(4 - 2x)$

87. ***Área*** Calcular el área del rectángulo más grande que puede ser inscrito bajo la curva $y = e^{-x^2}$ en el primer y segundo cuadrantes.

88. ***Área*** Efectuar los pasos siguientes para encontrar el área máxima del rectángulo mostrado en la figura.

a) Despejar c en la ecuación $f(c) = f(c + x)$.

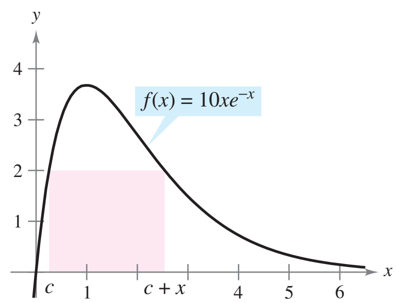
b) Usar el resultado del apartado *a*), para expresar el área A como función de x. [*Sugerencia:* $A = xf(c)$.]

c) Usar una herramienta de graficación para representar la función área. Usar la gráfica para aproximar las dimensiones del rectángulo de área máxima. Determinar el área máxima.

d) Usar una herramienta de graficación para representar la expresión de c encontrada en *a*). Usar la gráfica para aproximar.

$$\lim_{x \to 0^+} c \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} c.$$

Usar este resultado para describir los cambios en las dimensiones y posición del rectángulo para $0 < x < \infty$.



89. Encontrar un punto en la gráfica de la función $f(x) = e^{2x}$ tal que la recta tangente a la gráfica en este punto pase por el origen. Usar una herramienta de graficación para representar f y la recta tangente en la misma pantalla.

90. Localizar el punto en la gráfica de $y = e^{-x}$ donde la recta normal a la curva pasa por el origen. (Usar el método de Newton o cálculo de raíces en la herramienta de graficación.)

91. ***Depreciación*** El valor V de un objeto a t años de su adquisición es $V = 15\,000e^{-0.6286t}$, $0 \le t \le 10$.

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función.

b) Encontrar la razón de cambio de V respecto de t cuando $t = 1$ y $t = 5$.

c) Usar una herramienta de graficación para representar la recta tangente a la función cuando $t = 1$ y $t = 5$.

92. ***Movimiento armónico*** El desplazamiento desde el equilibrio de una masa que oscila en el extremo de un resorte suspendido del techo es $y = 1.56e^{-0.22t} \cos 4.9t$, donde y es el desplazamiento en pies y t el tiempo en segundos. Representar la función de desplazamiento en el intervalo $[0, 10]$ con la herramienta de graficación. Hallar el valor de t en el que el desplazamiento es menor que 3 pulgadas desde la posición de equilibrio.

93. ***Modelado matemático*** Un meteorólogo mide la presión atmosférica P (en kg por m^2) a la altitud h (en km). La tabla muestra los resultados.

h	0	5	10	15	20
P	10 332	5 583	2 376	1 240	517

a) Utilizar una herramienta de graficación para representar los puntos $(h, \ln P)$, y usar la función de regresión de la misma para encontrar un modelo lineal para los puntos.

b) La recta en *a*) tiene la forma $\ln P = ah + b$. Escribir la ecuación en forma exponencial.

c) Usar una herramienta de graficación para representar los datos originales y representar el modelo exponencial de *b*).

d) Calcular la razón de cambio de la presión cuando $h = 5$ y $h = 18$.

94. ***Modelado matemático*** La tabla muestra los valores aproximados V de un sedán de tamaño mediano para los años 2003 a 2009. La variable t representa el tiempo en años, con $t = 3$ correspondiendo a 2003.

t	3	4	5	6
V	\$23 046	\$20 596	\$18 851	\$17 001

t	7	8	9
V	\$15 226	\$14 101	\$12 841

a) Usar la función de regresión de una herramienta de graficación para encontrar los modelos lineal y cuadrático para los datos. Representar el modelo.

b) ¿Qué representa la pendiente en el modelo lineal en *a*)?

c) Usar la función de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo exponencial de los datos.

d) Determinar la asíntota horizontal del modelo exponencial del apartado *c*). Interpretar su significado en el contexto del problema.

e) Hallar el ritmo de depreciación en el valor del vehículo cuando $t = 4$ y $t = 8$ usando el modelo exponencial.

Aproximaciones lineal y cuadrática **En los ejercicios 95 y 96, usar una herramienta de graficación para representar la función. Después, trazar la gráfica**

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) \quad \text{y}$$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \tfrac{1}{2} f''(0)(x - 0)^2$$

en la misma pantalla. Comparar los valores de f, P_1 y P_2 y de sus primeras derivadas en $x = 0$.

95. $f(x) = e^x$ **96.** $f(x) = e^{x/2}$

Fórmula de Stirling **Para grandes valores de n,**

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdot \cdot (n - 1) \cdot n$$

puede aproximarse mediante la fórmula de Stirling, $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

En los ejercicios 97 y 98, encontrar el valor exacto de $n!$ y entonces aproximar $n!$, utilizando la fórmula de Stirling.

97. $n = 12$ **98.** $n = 15$

En los ejercicios 99 a 116, hallar la integral indefinida.

99. $\int e^{5x}(5)\, dx$ **100.** $\int e^{-x^4}(-4x^3)\, dx$

101. $\int e^{2x-1}\, dx$ **102.** $\int e^{1-3x}\, dx$

103. $\int x^2 e^{x^3}\, dx$ **104.** $\int e^x(e^x + 1)^2\, dx$

105. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ **106.** $\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\, dx$

107. $\int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\, dx$ **108.** $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\, dx$

109. $\int e^x\sqrt{1 - e^x}\, dx$ **110.** $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$

111. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\, dx$ **112.** $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}\, dx$

113. $\int \frac{5 - e^x}{e^{2x}}\, dx$ **114.** $\int \frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^x}\, dx$

115. $\int e^{-x}\tan(e^{-x})\, dx$ **116.** $\int \ln(e^{2x-1})\, dx$

En los ejercicios 117 a 126, evaluar la integral definida. Usar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

117. $\int_0^1 e^{-2x}\, dx$ **118.** $\int_3^4 e^{3-x}\, dx$

119. $\int_0^1 xe^{-x^2}\, dx$ **120.** $\int_{-2}^0 x^2 e^{x^3/2}\, dx$

121. $\int_1^3 \frac{e^{3/x}}{x^2}\, dx$ **122.** $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{-(x^2/2)}\, dx$

123. $\int_0^3 \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}\, dx$ **124.** $\int_0^1 \frac{e^x}{5 - e^x}\, dx$

125. $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} \pi x} \cos \pi x\, dx$ **126.** $\int_{\pi/3}^{\pi/2} e^{\sec 2x} \sec 2x \tan 2x\, dx$

Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 127 y 128, resolver la ecuación diferencial.**

127. $\frac{dy}{dx} = xe^{ax^2}$ **128.** $\frac{dy}{dx} = (e^x - e^{-x})^2$

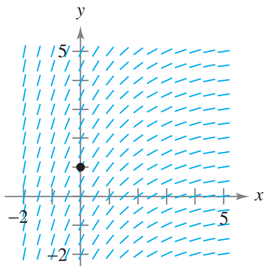
Ecuaciones diferenciales **En los ejercicios 129 y 130, encontrar la solución particular que satisface las condiciones iniciales.**

129. $f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $f(0) = 1, f'(0) = 0$

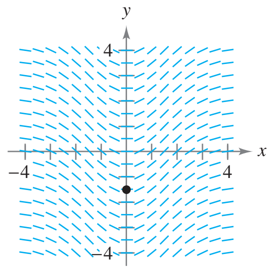
130. $f''(x) = \operatorname{sen} x + e^{2x}$, $f(0) = \frac{1}{4}, f'(0) = \frac{1}{2}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 131 y 132 se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes.** ***a*****) Esbozar dos soluciones de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado.** ***b*****) Por integración encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representarla. Comparar el resultado con los esbozos del apartado** ***a*****).**

131. $\dfrac{dy}{dx} = 2e^{-x/2}, \quad (0, 1)$



132. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-0.2x^2}, \quad \left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$



Área **En los ejercicios 133 a 136, calcular el área de la región delimitada por las gráficas de las ecuaciones. Usar una herramienta de graficación para representar la región y verificar los resultados.**

133. $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 5$

134. $y = e^{-x}, y = 0, x = a, x = b$

135. $y = xe^{-x^2/4}, y = 0, x = 0, x = \sqrt{6}$

136. $y = e^{-2x} + 2, y = 0, x = 0, x = 2$

Integración numérica **En los ejercicios 137 y 138, aproximar la integral usando la regla del punto medio, la de los trapecios y la regla de Simpson con $n = 12$. Usar una herramienta de graficación para verificar los resultados.**

137. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\, e^x \, dx$

138. $\displaystyle\int_0^2 2xe^{-x}\, dx$

139. ***Probabilidad*** Ciertas baterías para automóvil tienen una vida media de 48 meses con una desviación estándar de 6 meses. Las vidas de las baterías siguen una distribución normal. La probabilidad de que una batería dure entre 48 y 60 meses es $0.0665 \int_{48}^{60} e^{-0.0139(t-48)^2}\, dt$. Usar la función de integración de una herramienta de graficación para aproximar la integral. Interpretar los resultados.

140. ***Probabilidad*** El tiempo medio de espera (en minutos) en una tienda está dado por la solución de la ecuación $\int_0^x 0.3e^{-0.3t}\, dt = \frac{1}{2}$. Resolver la ecuación.

141. ***Movimiento horizontal*** La función posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x es $x(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt}$ donde A, B y k son constantes positivas.

a) ¿Durante qué tiempo t la partícula está más cercana al origen?

b) Mostrar que la aceleración de la partícula es proporcional a la posición de la partícula. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

142. ***Modelado matemático*** Una válvula de un depósito se abre durante 4 horas para dejar salir un producto químico en un proceso de manufactura. El ritmo o velocidad de flujo de salida R (en litros por hora) en el instante t (en horas) está dado en la siguiente tabla.

t	0	1	2	3	4
R	425	240	118	71	36

Tabla para 142

a) Usar la función de regresión en la herramienta de graficación para calcular un modelo lineal para los puntos $(t, \ln R)$. Escribir la ecuación resultante de la forma $\ln R = at + b$, de manera exponencial.

b) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo exponencial.

c) Usar la integral definida para aproximar el número de litros del producto químico que han salido durante esas cuatro horas.

Desarrollo de conceptos

143. Con sus propias palabras, enunciar las propiedades de la función exponencial natural.

144. ¿Existe una función f tal que $f(x) = f'(x)$? Si es así, ¿cuál es?

145. Sin integrar, enunciar la fórmula que podría utilizarse para efectuar las integrales siguientes.

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx$ *b*) $\displaystyle\int xe^{x^2}\, dx$

146. Considerar la función $f(x) = \dfrac{2}{1 + e^{1/x}}$.

a) Usar una herramienta de graficación para graficar f.

b) Escribir un párrafo corto explicando por qué la gráfica tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ y por qué la función tiene una discontinuidad no desmontable en $x = 0$.

147. Al ser $e^x \geq 1$ para $x \geq 0$, se tiene que $\displaystyle\int_0^x e^t\, dt \geq \int_0^x 1\, dt$. Efectuar esta integración para deducir la desigualdad $e^x \geq 1 + x$ para $x \geq 0$.

Para discusión

148. Describir la relación entre las gráficas de $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^x$.

149. Encontrar, con tres decimales, el valor de x tal que $e^{-x} = x$. (Usar el método de Newton.)

150. Encontrar el valor de a del área comprendida entre $y = e^{-x}$, el eje x, $x = -a$ y $x = a$ es $\frac{8}{3}$.

151. Verificar que la función

$$y = \frac{L}{1 + ae^{-x/b}}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad L > 0$$

se incrementa a una razón máxima cuando $y = L/2$.

152. Sea $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

a) Representar gráficamente f en $(0, \infty)$ y probar que f es estrictamente decreciente en (e, ∞).

b) Demostrar que si $e \leq A < B$, entonces $A^B > B^A$.

c) Usar el apartado *b*) para demostrar que $e^\pi > \pi^e$.

5.5 Otras bases distintas de *e* y aplicaciones

- **Definir funciones exponenciales con bases distintas de *e*.**
- **Derivar e integrar funciones exponenciales con bases distintas de *e*.**
- **Usar las funciones exponenciales como modelos para el interés compuesto y el crecimiento exponencial.**

Otras bases de e

La **base** de la función exponencial natural es e. Esta base "natural" se puede utilizar para dar el significado de cualquier base general a.

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL BASE *a*

Si a es un número real positivo $(a \neq 1)$ y x es cualquier número real, entonces la **función exponencial base *a*** se denota por a^x y se define como

$$a^x = e^{(\ln a)x}.$$

Si $a = 1$, entonces $y = 1^x = 1$ es una función constante.

Estas funciones obedecen las leyes usuales de los exponentes. Éstas son algunas propiedades familiares.

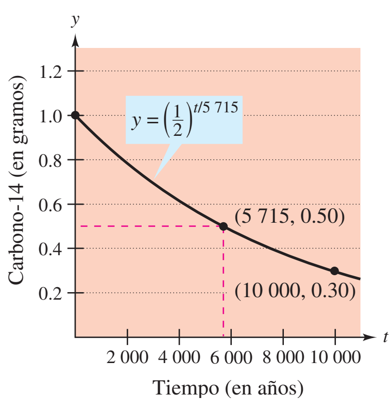
1. $a^0 = 1$ **2.** $a^x a^y = a^{x+y}$

3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ **4.** $(a^x)^y = a^{xy}$

Cuando se desea plantear un modelo exponencial para la semivida o vida media de un elemento radiactivo, por ejemplo, es conveniente usar $\frac{1}{2}$ como base del modelo. (La *vida media* es el número de años requerido para que la mitad de los átomos en una muestra de material radiactivo decaigan.)

EJEMPLO 1 Modelo de la semivida (o vida media) de un elemento radiactivo

La semivida o vida media del carbono-14 es aproximadamente 5 715 años. Si se tiene una muestra de 1 g de carbono-14, ¿qué cantidad existirá dentro de 10 000 años?



La vida media del carbono-14 es de aproximadamente 5 715 años
Figura 5.25

Solución Sean $t = 0$ el momento actual y y la cantidad de carbono-14 (en gramos) en la muestra. Al usar como base $\frac{1}{2}$, se puede plantear el modelo y dado mediante la ecuación

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5\,715}.$$

Notar que cuando $t = 5\,715$, la cantidad se ha reducido a la mitad de la original.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{5\,715/5\,715} = \frac{1}{2} \text{ gramo}$$

Cuando $t = 11\,430$, se ha reducido a un cuarto de la cantidad inicial y así sucesivamente. Para hallar la cantidad de carbono-14 que queda después de 10 000 años, sustituir $t = 10\,000$.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{10\,000/5\,715}$$
$$\approx 0.30 \text{ gramo}$$

La gráfica de y se muestra en la figura 5.25.

Las funciones logarítmicas con base diferente de e se definen de manera muy similar a las funciones exponenciales con otras bases.

NOTA En los cursos previos de cálculo, se ha aprendido que $\log_a x$ es el valor al que hay que elevar a para obtener x. Esto concuerda con la definición dada ya que

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= a^{(1/\ln a)\ln x} \\ &= (e^{\ln a})^{(1/\ln a)\ln x} \\ &= e^{(\ln a/\ln a)\ln x} \\ &= e^{\ln x} \\ &= x. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE BASE *a*

Si a es un número real positivo ($a \neq 1$) y x es cualquier número real positivo, entonces la **función logarítmica base *a*** se denota $\log_a x$ y se define como

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x.$$

Las funciones logarítmicas base a tienen las mismas propiedades que la función logaritmo natural, dadas en el teorema 5.2. (Suponer que x y y son números positivos y n es un racional.)

1. $\log_a 1 = 0$ Logaritmo de 1.

2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ Logaritmo de un producto.

3. $\log_a x^n = n \log_a x$ Logaritmo de una potencia.

4. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ Logaritmo de un cociente.

De las definiciones de funciones exponenciales y logarítmicas base a, se sigue que $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$ son funciones inversas una de otra.

PROPIEDADES DE FUNCIONES INVERSAS

1. $y = a^x$ si y sólo si $x = \log_a y$

2. $a^{\log_a x} = x$, para $x > 0$

3. $\log_a a^x = x$, para todo x

La función logaritmo base 10 se llama **función logarítmica común o decimal**. Así, $y = 10^x$ si y sólo si $x = \log_{10} y$.

EJEMPLO 2 Otras bases distintas de e

Despejar x en las siguientes ecuaciones.

a) $3^x = \dfrac{1}{81}$ ***b***) $\log_2 x = -4$

Solución

a) Resolver la ecuación aplicando la función logaritmo base 3 en ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} 3^x &= \frac{1}{81} \\ \log_3 3^x &= \log_3 \frac{1}{81} \\ x &= \log_3 3^{-4} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

b) Resolver la ecuación aplicando la función exponencial base 2 en ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} \log_2 x &= -4 \\ 2^{\log_2 x} &= 2^{-4} \\ x &= \frac{1}{2^4} \\ x &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Derivación e integración

Para derivar funciones exponenciales y logarítmicas de base arbitraria, existen tres opciones: 1) usar las definiciones de a^x y $\log_a x$ y obtener la derivada mediante las reglas válidas para las funciones exponencial natural y logarítmica, 2) usar derivación logarítmica o 3) usar las siguientes reglas de derivación para bases diferentes de e.

TEOREMA 5.13 DERIVADAS PARA OTRAS BASES DE *e*

Sean a un número real positivo ($a \neq 1$) y u una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[a^x] = (\ln a)a^x$
2. $\dfrac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u \dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}[\log_a x] = \dfrac{1}{(\ln a)x}$
4. $\dfrac{d}{dx}[\log_a u] = \dfrac{1}{(\ln a)u}\dfrac{du}{dx}$

DEMOSTRACIÓN Por definición, $a^x = e^{(\ln a)x}$. Por tanto, se puede demostrar la primera regla si $u = (\ln a)\,x$, y al derivar con base e se obtiene

$$\frac{d}{dx}[a^x] = \frac{d}{dx}[e^{(\ln a)x}] = e^u\frac{du}{dx} = e^{(\ln a)x}(\ln a) = (\ln a)a^x.$$

Para demostrar la tercera regla, se puede escribir

$$\frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\ln a}\ln x\right] = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{(\ln a)x}.$$

La segunda y la cuarta fórmulas simplemente son versiones de la regla de la cadena de la primera y la tercera reglas.

NOTA Estas reglas de derivación son análogas a las de la función exponencial natural y logaritmo natural. De hecho, sólo difieren en los factores constantes $\ln a$ y $1/\ln a$. He aquí una de las razones que hacen de e la base más conveniente para el cálculo.

EJEMPLO 3 Derivación de funciones de base distinta

Encontrar la derivada de cada una de estas funciones.

a) $y = 2^x$
b) $y = 2^{3x}$
c) $y = \log_{10} \cos x$

Solución

a) $y' = \dfrac{d}{dx}[2^x] = (\ln 2)2^x$

b) $y' = \dfrac{d}{dx}[2^{3x}] = (\ln 2)2^{3x}(3) = (3 \ln 2)2^{3x}$

Escribir 2^{3x} como 8^x y derivar para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

c) $y' = \dfrac{d}{dx}[\log_{10} \cos x] = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{(\ln 10)\cos x} = -\dfrac{1}{\ln 10}\tan x$

En ocasiones, un integrando contiene una función exponencial en una base distinta de e. En tal caso, hay dos opciones: 1) pasar a base e usando la fórmula $a^x = e^{(\ln a)x}$ y entonces integrar, o 2) integrar directamente, usando la fórmula de integración

$$\int a^x\, dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^x + C$$

(que se deduce del teorema 5.13).

EJEMPLO 4 Integración de una función exponencial en una base distinta

Hallar $\int 2^x\, dx$.

Solución

$$\int 2^x\, dx = \frac{1}{\ln 2}2^x + C$$

Cuando fue introducida la regla de la potencia $D_x[x^n] = nx^{n-1}$ en el capítulo 2, se exigió que n fuese racional. Ahora la regla se extiende a cualquier valor real de n. Intentar probar este teorema usando derivación logarítmica.

TEOREMA 5.14 REGLA DE LA POTENCIA PARA EXPONENTES REALES

Sea n cualquier número real y sea u una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$

2. $\dfrac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

El siguiente ejemplo compara las derivadas de cuatro tipos de funciones. Cada función requiere una fórmula de derivación diferente para la obtención de la derivada, dependiendo de si la base y el exponente son constantes o variables.

EJEMPLO 5 Comparación de variables y constantes

a) $\dfrac{d}{dx}[e^e] = 0$ Regla de la constante.

b) $\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$ Regla exponencial.

c) $\dfrac{d}{dx}[x^e] = ex^{e-1}$ Regla de la potencia.

d) $y = x^x$ Derivación logarítmica.

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$$

$$y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

NOTA Asegurarse de ver que no existe una regla sencilla de derivación para $y = x^x$. En general, si $y = u(x)^{v(x)}$, se necesita recurrir a la derivación logarítmica.

Aplicaciones de las funciones exponenciales

n	A
1	\$1 080.00
2	\$1 081.60
4	\$1 082.43
12	\$1 083.00
365	\$1 083.28

Si se depositan P dólares en una cuenta a una tasa anual de interés r (en forma decimal) y los intereses se acumulan en la cuenta, ¿cuál es el balance en la cuenta al cabo de 1 año? La respuesta depende del número n de veces que el interés se compone de acuerdo con la fórmula

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

Por ejemplo, el resultado para un depósito de \$1 000 a 8% de interés compuesto n veces al año se muestra en la tabla de la izquierda.

Al crecer n, el balance A tiende a un límite. Para hallarlo, utilizar el siguiente teorema. Para comprobar las razones de su contenido, calcular $[(x + 1)/x]^x$ para varios valores de x, como se puede ver en la tabla inferior izquierda. (Una demostración del teorema se puede consultar en el apéndice A.)

x	$\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$
10	2.59374
100	2.70481
1 000	2.71692
10 000	2.71815
100 000	2.71827
1 000 000	2.71828

TEOREMA 5.15 UN LÍMITE QUE INVOLUCRA AL NÚMERO *e*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e$$

Ahora, regresar a la fórmula del balance A en una cuenta con interés compuesto n veces por año. Al tomar el límite cuando n tiende a infinito, se obtiene

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n && \text{Tomar el límite cuando } n \to \infty.\\
&= P \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r}\right]^r && \text{Reescribir.}\\
&= P\left[\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^r && \text{Hacer } x = n/r. \text{ Entonces } x\to\infty \text{ cuando } n\to\infty.\\
&= Pe^r. && \text{Aplicar el teorema 5.15.}
\end{aligned}$$

Este límite produce el balance después de 1 año de interés **compuesto continuo**. Así, para un depósito inicial de \$1 000 a 8% de interés compuesto continuo, el balance al fin de año sería

$$\begin{aligned}
A &= 1\,000e^{0.08}\\
&\approx \$1\,083.29
\end{aligned}$$

Estos resultados se resumen a continuación.

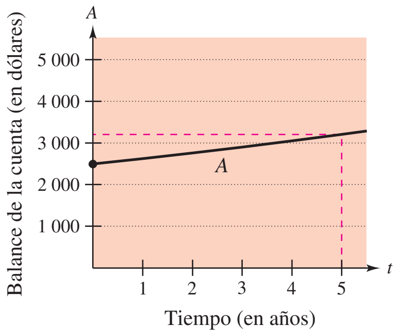
Resumen de las fórmulas de interés compuesto

Sea P = cantidad a depositar, t = número de años, A = balance después de t años, r = tasa de interés anual (forma decimal) y n = número de veces que se compone por año.

1. Compuesto n veces por año: $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
2. Compuesto continuamente: $A = Pe^{rt}$

EJEMPLO 6 Comparación de interés compuesto continuo, mensual y trimestral

Se hace un depósito de \$2 500 en una cuenta que paga un interés anual de 5%. Calcular el balance en la cuenta al final de 5 años si el interés se compone *a*) trimestralmente, *b*) mensualmente y *c*) continuamente.



El balance en una cuenta de ahorros crece exponencialmente
Figura 5.26

Solución

a) $A = P\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt} = 2\,500\left(1 + \dfrac{0.05}{4}\right)^{4(5)}$ Compuesto trimestralmente.

$= 2\,500(1.0125)^{20}$

$\approx \$3\,205.09$

b) $A = P\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt} = 2\,500\left(1 + \dfrac{0.05}{12}\right)^{12(5)}$ Compuesto mensualmente.

$\approx 2\,500(1.0041667)^{60}$

$\approx \$3\,208.40$

c) $A = Pe^{rt} = 2\,500[e^{0.05(5)}]$ Compuesto continuamente.

$= 2\,500e^{0.25} \approx \$3\,210.06$

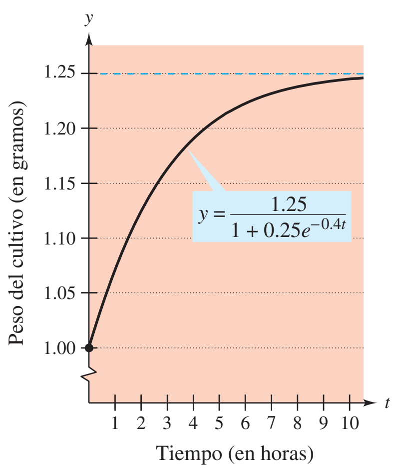
La figura 5.26 muestra cómo se incrementa el balance durante el periodo de 5 años. Notar que se debe hacer constar que la escala de la figura no distingue gráficamente entre los tres tipos de crecimiento exponencial en *a*), *b*) y *c*).

EJEMPLO 7 Crecimiento de un cultivo de bacterias

Un cultivo de bacterias crece según la *función logística de crecimiento*

$$y = \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4t}}, \quad t \geq 0$$

donde y es el peso del cultivo en gramos y t es el tiempo en horas. Calcular el peso del cultivo después de *a*) 0 horas, *b*) 1 hora y *c*) 10 horas. *d*) ¿Cuál es el límite cuando t tiende a infinito?



El límite de peso del cultivo cuando $t \to \infty$ es 1.25 gramos
Figura 5.27

Solución

a) Cuando $t = 0$, $y = \dfrac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4(0)}}$

$= 1$ gramo.

b) Cuando $t = 1$, $y = \dfrac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4(1)}}$

≈ 1.071 gramos.

c) Cuando $t = 10$, $y = \dfrac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4(10)}}$

≈ 1.244 gramos.

d) Por último, al tomar el límite para t tendiendo a infinito, se obtiene

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1.25}{1 + 0.25e^{-0.4t}} = \frac{1.25}{1 + 0} = 1.25 \text{ gramos.}$$

La figura 5.27 muestra la gráfica de la función.

5.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, evaluar la expresión sin usar calculadora.

1. $\log_2 \frac{1}{8}$

2. $\log_{27} 9$

3. $\log_7 1$

4. $\log_a \dfrac{1}{a}$

En los ejercicios 5 a 8, escribir la ecuación exponencial en forma logarítmica o viceversa.

5. *a)* $2^3 = 8$
b) $3^{-1} = \frac{1}{3}$

6. *a)* $27^{2/3} = 9$
b) $16^{3/4} = 8$

7. *a)* $\log_{10} 0.01 = -2$
b) $\log_{0.5} 8 = -3$

8. *a)* $\log_3 \frac{1}{9} = -2$
b) $49^{1/2} = 7$

En los ejercicios 9 a 14, dibujar a mano la gráfica de la función.

9. $y = 3^x$

10. $y = 3^{x-1}$

11. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

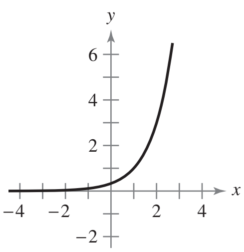
12. $y = 2^{x^2}$

13. $h(x) = 5^{x-2}$

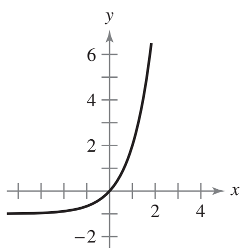
14. $y = 3^{-|x|}$

En los ejercicios 15 a 18, encontrar la función de la gráfica. [Las gráficas son marcadas como *a*), *b*), *c*) y *d*).]

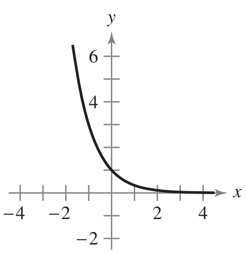
a)



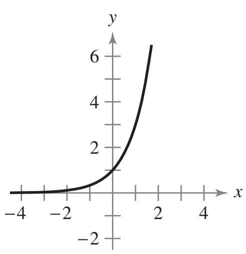
b)



c)



d)



15. $f(x) = 3^x$

16. $f(x) = 3^{-x}$

17. $f(x) = 3^x - 1$

18. $f(x) = 3^{x-1}$

En los ejercicios 19 a 24, despejar *x* o *b*.

19. *a)* $\log_{10} 1\,000 = x$
b) $\log_{10} 0.1 = x$

20. *a)* $\log_3 \frac{1}{81} = x$
b) $\log_6 36 = x$

21. *a)* $\log_3 x = -1$
b) $\log_2 x = -4$

22. *a)* $\log_b 27 = 3$
b) $\log_b 125 = 3$

23. *a)* $x^2 - x = \log_5 25$
b) $3x + 5 = \log_2 64$

24. *a)* $\log_3 x + \log_3(x-2) = 1$
b) $\log_{10}(x+3) - \log_{10} x = 1$

En los ejercicios 25 a 34, resolver la ecuación y aproximarla a tres decimales.

25. $3^{2x} = 75$

26. $5^{6x} = 8\,320$

27. $2^{3-z} = 625$

28. $3(5^{x-1}) = 86$

29. $\left(1 + \dfrac{0.09}{12}\right)^{12t} = 3$

30. $\left(1 + \dfrac{0.10}{365}\right)^{365t} = 2$

31. $\log_2(x-1) = 5$

32. $\log_{10}(t-3) = 2.6$

33. $\log_3 x^2 = 4.5$

34. $\log_5 \sqrt{x-4} = 3.2$

En los ejercicios 35 a 38, usar una herramienta de graficación para representar la función y aproximar su(s) cero(s) hasta tres decimales.

35. $g(x) = 6(2^{1-x}) - 25$

36. $f(t) = 300(1.0075^{12t}) - 735.41$

37. $h(s) = 32\log_{10}(s-2) + 15$

38. $g(x) = 1 - 2\log_{10}[x(x-3)]$

En los ejercicios 39 y 40 ilustrar cuáles de las funciones son inversas una de otra al dibujar sus gráficas en unos mismos ejes de coordenadas.

39. $f(x) = 4^x$
$g(x) = \log_4 x$

40. $f(x) = 3^x$
$g(x) = \log_3 x$

En los ejercicios 41 a 62, encontrar las derivadas de la función. (*Sugerencia*: En algunos ejercicios, puede ser de ayuda aplicar las propiedades de los logaritmos *antes* de derivar.)

41. $f(x) = 4^x$

42. $f(x) = 3^{2x}$

43. $y = 5^{-4x}$

44. $y = 7^{2x-1}$

45. $f(x) = x\,9^x$

46. $y = x(6^{-2x})$

47. $g(t) = t^2 2^t$

48. $f(t) = \dfrac{3^{2t}}{t}$

49. $h(\theta) = 2^{-\theta}\cos \pi\theta$

50. $g(\alpha) = 5^{-\alpha/2}\operatorname{sen} 2\alpha$

51. $y = \log_4(5x+1)$

52. $y = \log_3(x^2 - 3x)$

53. $h(t) = \log_5(4-t)^2$

54. $g(t) = \log_2(t^2+7)^3$

55. $y = \log_5 \sqrt{x^2-1}$

56. $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{2x+1}$

57. $f(x) = \log_2 \dfrac{x^2}{x-1}$

58. $y = \log_{10} \dfrac{x^2-1}{x}$

59. $h(x) = \log_3 \dfrac{x\sqrt{x-1}}{2}$

60. $g(x) = \log_5 \dfrac{4}{x^2\sqrt{1-x}}$

61. $g(t) = \dfrac{10\log_4 t}{t}$

62. $f(t) = t^{3/2}\log_2 \sqrt{t+1}$

En los ejercicios 63 a 66, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en los puntos dados.

63. $y = 2^{-x}, \quad (-1, 2)$

64. $y = 5^{x-2}, \quad (2, 1)$

65. $y = \log_3 x, \quad (27, 3)$

66. $y = \log_{10} 2x, \quad (5, 1)$

En los ejercicios 67 a 70, usar derivación logarítmica para hallar dy/dx.

67. $y = x^{2/x}$

68. $y = x^{x-1}$

69. $y = (x - 2)^{x+1}$

70. $y = (1 + x)^{1/x}$

En los ejercicios 71 a 74, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en los puntos siguientes.

71. $y = x^{\operatorname{sen} x}, \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

72. $y = (\operatorname{sen} x)^{2x}, \quad \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

73. $y = (\ln x)^{\cos x}, \quad (e, 1)$

74. $y = x^{1/x}, \quad (1, 1)$

En los ejercicios 75 a 82, hallar la integral.

75. $\displaystyle\int 3^x\,dx$

76. $\displaystyle\int 5^{-x}\,dx$

77. $\displaystyle\int (x^2 + 2^{-x})\,dx$

78. $\displaystyle\int (x^3 + 3^{-x})\,dx$

79. $\displaystyle\int x(5^{-x^2})\,dx$

80. $\displaystyle\int (3 - x)7^{(3-x)^2}\,dx$

81. $\displaystyle\int \frac{3^{2x}}{1 + 3^{2x}}\,dx$

82. $\displaystyle\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x\,dx$

En los ejercicios 83 a 86, evaluar la integral.

83. $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2^x\,dx$

84. $\displaystyle\int_{-2}^{2} 4^{x/2}\,dx$

85. $\displaystyle\int_{0}^{1} (5^x - 3^x)\,dx$

86. $\displaystyle\int_{1}^{e} (6^x - 2^x)\,dx$

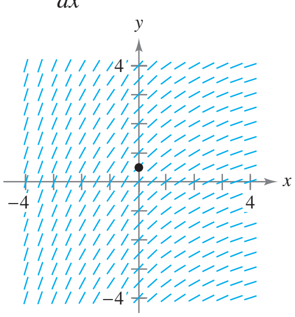
Área **En los ejercicios 87 y 88, calcular el área de la región delimitada por las gráficas de la ecuación.**

87. $y = 3^x, y = 0, x = 0, x = 3$

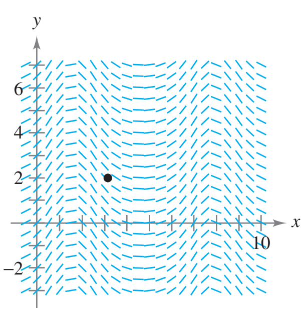
88. $y = 3^{\cos x} \operatorname{sen} x, y = 0, x = 0, x = \pi$

Campos de pendientes **En los ejercicios 89 y 90, se proporcionan una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Esbozar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto indicado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y con una herramienta de graficación representar la solución. Comparar el resultado con los esbozos del apartado *a*).**

89. $\dfrac{dy}{dx} = 0.4^{x/3}, \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)$



90. $\dfrac{dy}{dx} = e^{\operatorname{sen} x} \cos x, \quad (\pi, 2)$



Desarrollo de conceptos

91. Considerar la función $f(x) = \log_{10} x$.

a) ¿Cuál es el dominio de f?

b) Encontrar f^{-1}.

c) Si x es un número real entre 1 000 y 10 000, determinar el intervalo en el cual $f(x)$ puede ser encontrado.

d) Determinar el intervalo en el cual se encuentra x si $f(x)$ es negativo.

e) Si $f(x)$ aumenta en una unidad, ¿por qué factor hay que multiplicar x?

f) Hallar el cociente entre x_1 a x_2 sabiendo que $f(x_1) = 3n$ y $f(x_2) = n$.

92. Ordenar las funciones

$$f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = x^x, \quad h(x) = x^2 \quad \text{y} \quad k(x) = 2^x$$

desde la que tiene mayor ritmo de crecimiento hasta la que tiene el menor, para valores grandes de x.

93. Calcular la derivada de cada función, para a constante.

a) $y = x^a$ *b*) $y = a^x$

c) $y = x^x$ *d*) $y = a^a$

Para discusión

94. La tabla de valores se obtuvo para evaluación de una función. Determinar cuáles de los enunciados pueden ser ciertos o falsos y explicar la razón.

x	1	2	8
y	0	1	3

a) y es una función exponencial de x.

b) y es una función logarítmica de x.

c) x es una función exponencial de y.

d) y es una función lineal de x.

95. ***Inflación*** Si el ritmo o tasa de inflación anual es, en promedio, de 5% para los próximos 10 años, el costo aproximado C de bienes o servicios durante una década es

$$C(t) = P(1.05)^t$$

donde t es el tiempo en años y P es el costo actual.

a) Si el cambio de aceite del automóvil cuesta hoy $24.95, estimar el precio dentro de 10 años.

b) Calcular el ritmo o velocidad de cambio de C respecto a t para $t = 1$ y $t = 8$.

c) Verificar que el ritmo de cambio de C es proporcional a C. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

96. ***Depreciación*** Después de t años, el valor de un automóvil adquirido por \$25 000 es

$$V(t) = 25\,000\left(\tfrac{3}{4}\right)^t.$$

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función y determinar el valor del automóvil 2 años después de su compra.
b) Calcular la razón de cambio de V respecto a t para $t = 1$ y $t = 4$.
c) Usar una herramienta de graficación para representar $V'(t)$ y determinar la asíntota horizontal. Interpretar su significado en el contexto del problema.

Interés compuesto **En los ejercicios 97 a 100, completar la tabla al determinar el balance A para P dólares invertidos a una tasa de interés r, durante t años, n veces al año.**

n	1	2	4	12	365	Intereses continuos
A						

97. $P = \$1\,000$
$r = 3\frac{1}{2}\%$
$t = 10$ años

98. $P = \$2\,500$
$r = 6\%$
$t = 20$ años

99. $P = \$1\,000$
$r = 5\%$
$t = 30$ años

100. $P = \$5\,000$
$r = 7\%$
$t = 25$ años

Interés compuesto **En los ejercicios 101 a 104, completar la tabla al determinar la cantidad de dinero P (valor presente) que debe ser depositada a una tasa r de interés anual para producir un balance de \$100 000 en t años.**

t	1	10	20	30	40	50
P						

101. $r = 5\%$
Interés compuesto continuo

102. $r = 6\%$
Interés compuesto continuo

103. $r = 5\%$
Interés compuesto mensual

104. $r = 7\%$
Interés compuesto diario

105. ***Interés compuesto*** Se tiene una inversión de una renta de 6% compuesto diariamente. ¿Cuál de las siguientes opciones produciría un balance mayor después de 8 años?

a) \$20 000 ahora
b) \$30 000 después de 8 años
c) \$8 000 ahora y \$20 000 después de 4 años
d) \$9 000 ahora, \$9 000 después de 4 años y \$9 000 después de 8 años.

106. ***Interés compuesto*** Considerar un depósito de \$100 a r% de interés compuesto continuo durante 20 años. Usar una herramienta de graficación para representar las funciones exponenciales que describen el crecimiento del capital en los siguientes veinte años para cada una de las tasas de interés que se especifican. Comparar los balances finales de cada una de las tasas.

a) $r = 3\%$
b) $r = 5\%$
c) $r = 6\%$

107. ***Producción de madera*** El rendimiento V (en millones de pies cúbicos por acre) de un bosque de t años de edad es

$$V = 6.7e^{(-48.1)/t}$$

donde t es medido en años.

a) Calcular el volumen límite de madera por acre cuando t tiende a infinito.
b) Encontrar el ritmo o velocidad de cambio de V cuando $t = 20$ años y cuando $t = 60$ años.

108. ***Teoría del aprendizaje*** Un modelo matemático para la proporción P de respuestas correctas tras n ensayos, en un experimento sobre aprendizaje, resultó seguir el modelo

$$P = \frac{0.86}{1 + e^{-0.25n}}.$$

a) Calcular la proporción límite de respuestas correctas cuando n tiende a infinito.
b) Calcular el ritmo de cambio P después de $n = 3$ pruebas y de $n = 10$ pruebas.

109. ***Defoliación forestal*** Para estimar la defoliación producida por las lagartas durante un año, un ingeniero forestal cuenta el número de montones de huevos en $\frac{1}{40}$ de acre en el otoño anterior. El porcentaje de defoliación y está dado aproximadamente por

$$y = \frac{300}{3 + 17e^{-0.0625x}}$$

donde x es el número de montones en miles. (*Fuente: USDA Forest Service*.)

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función.
b) Estimar el porcentaje de defoliación si se cuentan 2 000 montones de huevos.
c) Estimar el número de montones de huevos que existen si se observa que aproximadamente $\frac{2}{3}$ del bosque se han defoliado.
d) Mediante el cálculo, estimar el valor de x para el que y crece más rápidamente.

110. ***Crecimiento poblacional*** Un lago se repuebla con 500 peces, y su población crece de acuerdo con la curva logística

$$p(t) = \frac{10\,000}{1 + 19e^{-t/5}}$$

donde t se mide en meses.

a) Usar la función de regresión de una herramienta de graficación para representar la función.

b) ¿Cuál es el tamaño límite de la población de peces?

c) ¿A qué ritmo o velocidad crece la población de peces al final de 1 mes y al final del décimo mes?

d) ¿Después de cuántos meses crece más de prisa la población?

111. ***Modelado matemático*** La tabla muestra la resistencia B (en toneladas) a la ruptura de un cable de acero de varios diámetros d (en pulgadas).

d	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
B	9.85	21.8	38.3	59.2	84.4	114.0

a) Usar la función de regresión de la herramienta de graficación para ajustar un modelo exponencial a los datos.

b) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.

c) Calcular el retorno o la tasa de crecimiento del modelo cuando $d = 0.8$ y $d = 1.5$.

112. ***Comparación de modelos*** Los números y (en miles) de trasplantes de órganos en Estados Unidos de 2001 a 2006 se muestran en la tabla, con $x = 1$ correspondiendo a 2001. (*Fuente: Organ Procurement and Transplantation Network*)

x	1	2	3	4	5	6
y	24.2	24.9	25.5	27.0	28.1	28.9

a) Usar la habilidad de regresión de una herramienta de graficación para encontrar los siguientes modelos para los datos.

$y_1 = ax + b$ $\qquad y_2 = a + b \ln x$

$y_3 = ab^x$ $\qquad y_4 = ax^b$

b) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y graficar cada uno de los modelos. ¿Qué modelo se ajusta mejor a los datos?

c) Interpretar la pendiente del modelo lineal en el contexto del problema.

d) Encontrar la razón de cambio de cada uno de los modelos para el año 2004. ¿Qué modelo se incrementa a la más grande razón en 2004?

113. ***Conjetura***

a) Usar una herramienta de graficación que aproxime las integrales de las funciones

$$f(t) = 4\left(\frac{3}{8}\right)^{2t/3}, \quad g(t) = 4\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{4}\right)^t \quad \text{y} \quad h(t) = 4e^{-0.653886t}$$

en el intervalo [0, 4].

b) Usar una herramienta de graficación para representar las tres funciones.

c) Usar los resultados de los apartados *a*) y *b*) para formular una conjetura acerca de las tres funciones. ¿Podría haber realizado una conjetura usando sólo el apartado *a*)? Explicar. Demostrar la conjetura analíticamente.

114. Completar la tabla para demostrar que e puede definirse también como $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x}$.

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
$(1 + x)^{1/x}$					

En los ejercicios 115 y 116, encontrar una función exponencial que se ajuste a los datos experimentales tomados en los tiempos *t* indicados.

115.

t	0	1	2	3	4
y	1 200.00	720.00	432.00	259.20	155.52

116.

t	0	1	2	3	4
y	600.00	630.00	661.50	694.58	729.30

En los ejercicios 117 a 120, encontrar el valor exacto de la expresión.

117. $5^{1/\ln 5}$ **118.** $6^{\ln 10/\ln 6}$

119. $9^{1/\ln 3}$ **120.** $32^{1/\ln 2}$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 121 a 126, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.**

121. $e = \dfrac{271\,801}{99\,900}$

122. Si $f(x) = \ln x$, entonces $f(e^{n+1}) - f(e^n) = 1$ para cualquier valor de n.

123. Las funciones $f(x) = 2 + e^x$ y $g(x) = \ln (x - 2)$ son inversas una de otra.

124. La función exponencial $y = Ce^x$ es la solución de la ecuación diferencial $d^ny/dx^n = y$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

125. Las gráficas $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en ángulo recto.

126. Si $f(x) = g(x)\, e^x$, los únicos ceros de f son los ceros de g.

127. *a*) Mostrar que $(2^3)^2 \neq 2^{(3^2)}$.

b) ¿Son $f(x) = (x^x)^x$ y $g(x) = x^{(x^x)}$ la misma función? ¿Por qué sí o por qué no?

c) Encontrar $f'(x)$ y $g'(x)$.

128. Sea $f(x) = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$ para $a > 0$, $a \neq 1$. Mostrar que f tiene una función inversa. Entonces encontrar f^{-1}.

129. Demostrar que al resolver la ecuación diferencial logística

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8}{25}y\left(\frac{5}{4} - y\right), \quad y(0) = 1$$

se obtiene la función de crecimiento logístico del ejemplo 7.

$$\left[\textit{Sugerencia: } \frac{1}{y\left(\frac{5}{4} - y\right)} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{\frac{5}{4} - y}\right)\right]$$

130. Dada la función exponencial $f(x) = a^x$, demostrar que

a) $f(u + v) = f(u) \cdot f(v)$

b) $f(2x) = [f(x)]^2$.

131. *a*) Determinar y' dado $y^x = x^y$.

b) Encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y^x = x^y$ en cada uno de los siguientes puntos.

i) (c, c)

ii) $(2, 4)$

iii) $(4, 2)$

c) En cuáles puntos de la gráfica de $y^x = x^y$ no existe la recta tangente?

132. Considerar la función $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = b^x$, $b > 1$.

a) Sea $b = 2$, usar la herramienta de graficación para representar f y g en la misma pantalla. Identificar los puntos de intersección.

b) Repetir el apartado *a*) usando $b = 3$.

c) Calcular todos los valores de b tales que $g(x) \geq f(x)$ para todo x.

Preparación del examen Putnam

133. ¿Cuál es mayor

$$\left(\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n+1}} \qquad \text{o} \qquad \left(\sqrt{n+1}\right)^{\sqrt{n}}$$

donde $n > 8$?

134. Demostrar que si x es positivo, entonces

$$\log_e\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1 + x}.$$

PROYECTO DE TRABAJO

Estimación gráfica de pendientes

Sea $f(x) = \begin{cases} |x|^x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

a) Usar una herramienta de graficación para representar f en la ventana $-3 \leq x \leq 3$, $-2 \leq y \leq 2$. ¿Cuál es el dominio de f?

b) Usar las funciones *trace* y *zoom* de la herramienta de graficación para estimar

$$\lim_{x \to 0} f(x).$$

c) Explicar brevemente por qué la función f es continua en todos los números reales.

d) Estimar a simple vista la pendiente de f en el punto $(0, 1)$.

e) Explicar por qué la derivada de una función se puede aproximar mediante la fórmula.

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

para valores pequeños de Δx. Usar esta fórmula para aproximar la pendiente de f en el punto $(0, 1)$.

$$f'(0) \approx \frac{f(0 + \Delta x) - f(0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - f(-\Delta x)}{2\Delta x}$$

¿Cuál es la pendiente de f en $(0, 1)$?

f) Hallar una fórmula para la derivada de f y determinar $f'(0)$. Explicar por escrito por qué una herramienta de graficación puede proporcionar un valor incorrecto de la pendiente de una gráfica.

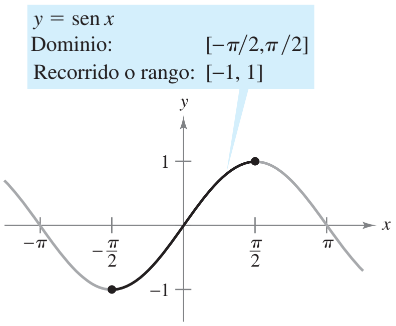
g) Usar esa fórmula para la derivada de f con el fin de encontrar los extremos relativos de f. Verificar su respuesta con la herramienta de graficación.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para saber más sobre el uso de herramientas de graficación para estimar pendientes, ver el artículo "Computer-Aided Delusions", de Richard L. Hall en *The College Mathematics Journal*.

5.6 Funciones trigonométricas inversas: derivación

- **Desarrollar propiedades de las seis funciones trigonométricas inversas.**
- **Derivar las funciones trigonométricas inversas.**
- **Repasar las reglas básicas de derivación de las funciones elementales.**

Funciones trigonométricas inversas



La función seno es inyectiva en $[-\pi/2, \pi/2]$
Figura 5.28

Esta sección comienza con una afirmación sorprendente: *ninguna de las seis funciones trigonométricas tienen inversa*. Y es cierto, ya que las seis funciones trigonométricas son periódicas y, en consecuencia, no son inyectivas. En esta sección se analizan esas seis funciones para ver si es posible redefinir su dominio de manera tal que, en el *dominio restringido*, tengan funciones inversas.

En el ejemplo 4 de la sección 5.3 se vio que la función seno es creciente (y por tanto inyectiva) en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (ver la figura 5.28). En ese intervalo se puede definir la inversa de la función seno *restringida* como

$$y = \operatorname{arcsen} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad \operatorname{sen} y = x$$

donde $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq \operatorname{arcsen} x \leq \pi/2$.

Bajo restricciones adecuadas, cada una de las seis funciones trigonométricas es inyectiva y admite inversa, como se muestra en las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

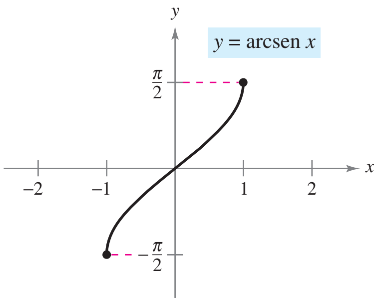
Función	*Dominio*	*Recorrido o rango*
$y = \operatorname{arcsen} x$ si y sólo si $\operatorname{sen} y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$ si y sólo si $\cos y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \arctan x$ si y sólo si $\tan y = x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arccot} x$ si y sólo si $\cot y = x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$
$y = \operatorname{arcsec} x$ si y sólo si $\sec y = x$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$0 \leq y \leq \pi, \quad y \neq \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arccsc} x$ si y sólo si $\csc y = x$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad y \neq 0$

NOTA El término "arcsen x" se lee "el arco seno de x" o algunas veces "el ángulo cuyo seno es x". Una notación alternativa de la función inversa del seno es "$\operatorname{sen}^{-1} x$".

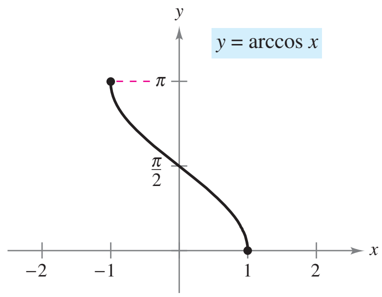
EXPLORACIÓN

La función inversa de la secante En la definición anterior, la función inversa de la secante se ha definido restringiendo el dominio de la función secante a los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. La mayoría de los libros coincide en la restricción elegida, pero algunos discrepan. ¿Qué otros dominios podrían adoptarse? Explicar el razonamiento gráficamente. La mayoría de las calculadoras no dispone de la función inversa de la secante. ¿Cómo se puede evaluar la función inversa de la secante con la calculadora?

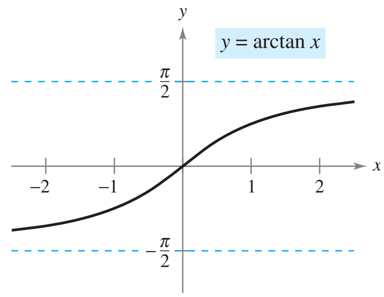
Las gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas se muestran en la figura 5.29.



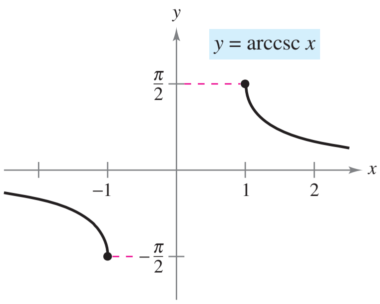
Dominio: $[-1, 1]$
Recorrido o rango: $[-\pi/2, \pi/2]$



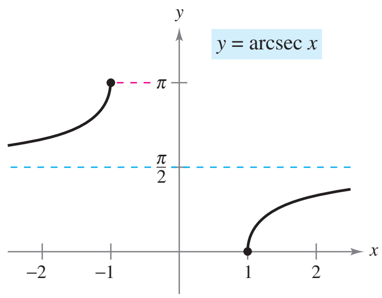
Dominio: $[-1, 1]$
Recorrido o rango: $[0, \pi]$



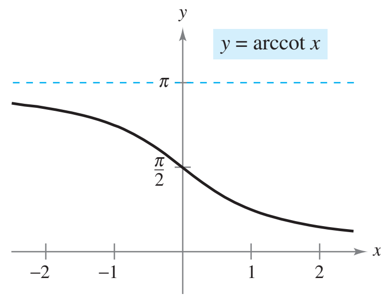
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\pi/2, \pi/2)$



Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Recorrido o rango: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$



Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Recorrido o rango: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(0, \pi)$

Figura 5.29

EJEMPLO 1 Evaluación de las funciones trigonométricas inversas

Evaluar cada una de las funciones.

a) $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ***b)*** $\arccos 0$ ***c)*** $\arctan \sqrt{3}$ ***d)*** $\operatorname{arcsen}(0.3)$

Solución

a) Por definición, $y = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ implica que $\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}$. En el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ el valor correcto de y es $-\pi/6$.

$$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

b) Por definición $y = \arccos 0$ implica que $\cos y = 0$. En el intervalo $[0, \pi]$ se tiene $y = \pi/2$.

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

c) Por definición, $y = \arctan \sqrt{3}$ implica que $\tan y = \sqrt{3}$. En el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, se tiene $y = \pi/3$.

$$\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

d) Al utilizar la calculadora en modo *radianes* se obtiene

$$\operatorname{arcsen}(0.3) \approx 0.305.$$

NOTA Al evaluar funciones trigonométricas inversas es importante recordar que los *ángulos están medidos en radianes.*

EXPLORACIÓN

Graficar $y = \arccos(\cos x)$ para $-4\pi \le x \le 4\pi$. ¿Por qué la gráfica no es la misma que la gráfica de $y = x$?

Las funciones inversas tienen las propiedades

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Cuando se aplican estas relaciones a las funciones trigonométricas inversas, debe tenerse en cuenta que las funciones trigonométricas tienen inversas sólo en dominios restringidos. Para valores de x fuera de esos dominios, esas dos propiedades no son válidas. Por ejemplo, arcsen (sen π) es 0, no π.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, entonces

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \text{ y } \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} y) = y.$$

Si $-\pi/2 < y < \pi/2$, entonces

$$\tan(\arctan x) = x \text{ y } \arctan(\tan y) = y.$$

Si $|x| \ge 1$ y $0 \le y < \pi/2$ o $\pi/2 < y \le \pi$, entonces

$$\sec(\operatorname{arcsec} x) = x \text{ y } \operatorname{arcsec}(\sec y) = y.$$

Propiedades análogas son válidas para otras funciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación

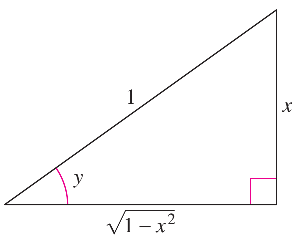
$$\arctan(2x - 3) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{Ecuación original.}$$

$$\tan[\arctan(2x - 3)] = \tan\frac{\pi}{4} \qquad \text{Tomar tangentes en ambos lados.}$$

$$2x - 3 = 1 \qquad \tan(\arctan x) = x.$$

$$x = 2 \qquad \text{Despejar } x.$$

Algunos problemas de cálculo requieren la evaluación de expresiones del tipo cos(arcsen x), como se muestra en el ejemplo 3.



$y = \operatorname{arcsen} x$
Figura 5.30

EJEMPLO 3 Uso de triángulos rectángulos

a) Dado $y = \operatorname{arcsen} x$, donde $0 < y < \pi/2$, encontrar $\cos y$.
b) Dado $y = \operatorname{arcsec}(\sqrt{5}/2)$, encontrar $\tan y$.

Solución

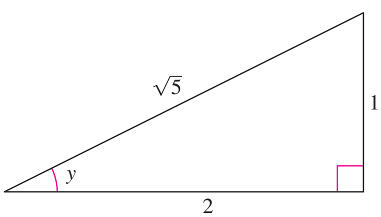
a) Como $y = \operatorname{arcsen} x$, se sabe que $\operatorname{sen} y = x$. Esta relación entre x y y puede representarse en un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 5.30.

$$\cos y = \cos(\operatorname{arcsen} x) = \frac{\text{adj.}}{\text{hip.}} = \sqrt{1 - x^2}$$

(Este resultado es también válido para $-\pi/2 < y < 0$.)

b) Al utilizar el triángulo rectángulo mostrado en la figura 5.31 se obtiene

$$\tan y = \tan\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \frac{\text{op.}}{\text{adj.}} = \frac{1}{2}$$



$y = \operatorname{arcsec}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
Figura 5.31

NOTA No hay acuerdo universal sobre la definición de arcsec x (o de arccsc x) para valores negativos de x. Cuando se definió aquí el recorrido o rango de arco secante, se eligió preservar la identidad recíproca.

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}.$$

Por ejemplo, para evaluar arcsec (-2), se puede escribir

$$\operatorname{arcsec}(-2) = \arccos(-0.5) \approx 2.09.$$

Una de las consecuencias de la definición de la inversa de la función secante dada en este texto es que su gráfica tiene pendiente positiva en todo valor de x de su dominio. (Ver la figura 5.29.) Ello se refleja en el signo de valor absoluto en la fórmula de la derivada de arcsec x. ■

TECNOLOGÍA Si la herramienta de graficación no tiene la función arco secante, se puede obtener la gráfica usando

$$f(x) = \operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}.$$

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

En la sección 5.1 se vio que la derivada de la función *trascendente* $f(x) = \ln x$ es la función *algebraica* $f'(x) = 1/x$. A continuación se verá que las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son también algebraicas (aunque las funciones trigonométricas inversas son trascendentes).

El próximo teorema presenta las derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas. En el apéndice A se presentan las demostraciones para arcsen u y arccos u, y el resto se deja como ejercicio (ver el ejercicio 104). Notar que las derivadas de arccos u, arccot u y arccsc u son las *negativas* de la derivada de arcsen u, arctan u y arcsec u, respectivamente.

TEOREMA 5.16 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si u es una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

EJEMPLO 4 Derivación de funciones trigonométricas inversas

a) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsen}(2x)] = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

b) $\dfrac{d}{dx}[\arctan(3x)] = \dfrac{3}{1+(3x)^2} = \dfrac{3}{1+9x^2}$

c) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsen}\sqrt{x}] = \dfrac{(1/2)\,x^{-1/2}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

d) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} e^{2x}] = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{(e^{2x})^2-1}} = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}}$

El signo de valor absoluto no es necesario, porque $e^{2x} > 0$.

EJEMPLO 5 Una derivada que puede ser simplificada

$$
\begin{aligned}
y &= \operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2} \\
y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x\left(\frac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-1/2} + \sqrt{1-x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \\
&= \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \\
&= 2\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}
$$

NOTA En el ejemplo 5, se aprecia una de las ventajas de las funciones trigonométricas inversas: pueden utilizarse para integrar funciones algebraicas comunes. Por ejemplo, del resultado mostrado en el ejemplo se desprende que

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}\right).$$ ■

EJEMPLO 6 Análisis de la gráfica de una función trigonométrica inversa

Analizar la gráfica de $y = (\arctan x)^2$.

Solución De la derivada

$$y' = 2(\arctan x)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$= \frac{2 \arctan x}{1+x^2}$$

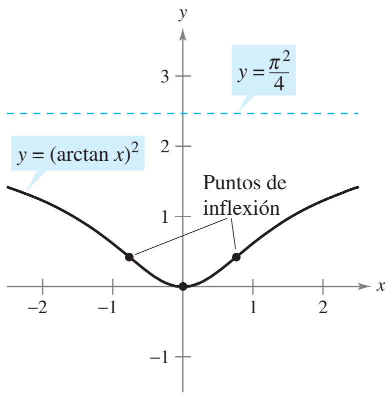
se puede observar que el único punto crítico es $x = 0$. Por el criterio de la primera derivada, este valor corresponde a un mínimo relativo. De la segunda derivada se obtiene

$$y'' = \frac{(1+x^2)\left(\frac{2}{1+x^2}\right) - (2\arctan x)(2x)}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{2(1-2x\arctan x)}{(1+x^2)^2}$$

se concluye que los puntos de inflexión se presentan donde $2x \arctan x = 1$. Al utilizar el método de Newton, esos puntos son $x \approx \pm 0.765$. Por último, como

$$\lim_{x\to\pm\infty} (\arctan x)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

se concluye que la gráfica tiene a $y = \pi^2/4$ como asíntota horizontal. La figura 5.32 muestra la gráfica.



La gráfica de $y = (\arctan x)^2$ tiene una asíntota horizontal a $y = \pi^2/4$
Figura 5.32

EJEMPLO 7 Obtener un ángulo máximo

Un fotógrafo está fotografiando un cuadro de 4 pies de altura colgado en una pared de una galería de arte. La lente de la cámara está a 1 pie bajo el extremo inferior del cuadro como se muestra en la figura 5.33. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse la cámara para conseguir que el ángulo subtendido por la lente de la cámara sea máximo?

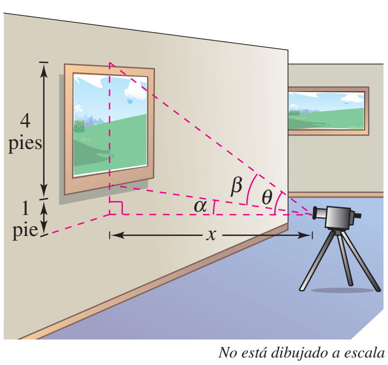
Solución En la figura 5.33, sea β el ángulo que se desea maximizar

$$\beta = \theta - \alpha$$
$$= \operatorname{arccot} \frac{x}{5} - \operatorname{arccot} x$$

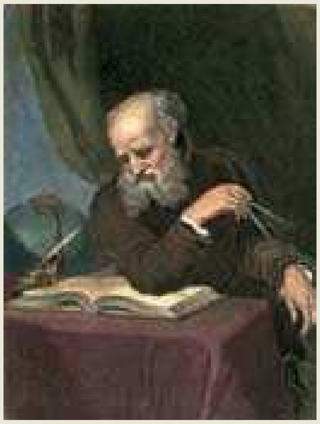
Al derivar se obtiene

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{-1/5}{1+(x^2/25)} - \frac{-1}{1+x^2}$$
$$= \frac{-5}{25+x^2} + \frac{1}{1+x^2}$$
$$= \frac{4(5-x^2)}{(25+x^2)(1+x^2)}.$$

como $d\beta/dx = 0$ cuando $x = \sqrt{5}$, se puede concluir por el criterio de la primera derivada que esta distancia hace maximizar el ángulo β. Así pues, la distancia es $x \approx 2.236$ pies y el ángulo máximo es $\beta \approx 0.7297$ radianes $\approx 41.81°$.



La cámara debe estar a 2.236 pies de la pared para maximizar el ángulo β
Figura 5.33



The Granger Collection

GALILEO GALILEI (1564-1642)

La visión de la ciencia de Galileo difería de la aceptada perspectiva aristotélica de que la Naturaleza tiene magnitudes susceptibles de descripción, tales como "fluidez" o "potencialidad". Él quiso describir el mundo físico en términos de *cantidades medibles*, como el tiempo, la distancia, la fuerza y la masa.

Resumen de las reglas básicas de derivación

A principios del siglo XVII, Europa se vio inmersa en una era científica representada por grandes pensadores como Descartes, Galileo, Huygens, Newton y Kepler. Estos hombres creían en una naturaleza gobernada por leyes básicas, expresables en gran parte en términos matemáticos. Una de las publicaciones más influyentes de la época —el *Dialogo soprai die massimi sistemi del mondo* de Galileo Galilei— se ha convertido en una descripción clásica del pensamiento científico moderno.

Conforme las matemáticas se han ido desarrollando en los siglos posteriores, se ha visto que unas cuantas funciones elementales son suficientes para modelar la mayoría* de los fenómenos de la física, la química, la biología, la ingeniería, la economía y otros campos. Una **función elemental** es una función de la lista siguiente o una que puede obtenerse con éstas mediante sumas, productos, cocientes o composiciones.

Funciones algebraicas	*Funciones trascendentes*
Funciones polinomiales	Funciones logarítmicas
Funciones racionales	Funciones exponenciales
Funciones con radicales	Funciones trigonométricas
	Funciones trigonométricas inversas

Con las reglas de derivación introducidas hasta ahora en el texto es posible derivar *cualquier* función elemental. Por conveniencia, se resumen esas reglas a continuación.

Reglas básicas de derivación de funciones elementales

1. $\dfrac{d}{dx}[cu] = cu'$
2. $\dfrac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$
3. $\dfrac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$
4. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{u}{v}\right] = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$
5. $\dfrac{d}{dx}[c] = 0$
6. $\dfrac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$
7. $\dfrac{d}{dx}[x] = 1$
8. $\dfrac{d}{dx}[|u|] = \dfrac{u}{|u|}(u'), \quad u \neq 0$
9. $\dfrac{d}{dx}[\ln u] = \dfrac{u'}{u}$
10. $\dfrac{d}{dx}[e^u] = e^u\, u'$
11. $\dfrac{d}{dx}[\log_a u] = \dfrac{u'}{(\ln a)u}$
12. $\dfrac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u u'$
13. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = (\cos u)u'$
14. $\dfrac{d}{dx}[\cos u] = -(\operatorname{sen} u)u'$
15. $\dfrac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)u'$
16. $\dfrac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)u'$
17. $\dfrac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)u'$
18. $\dfrac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)u'$
19. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
20. $\dfrac{d}{dx}[\arccos u] = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
21. $\dfrac{d}{dx}[\arctan u] = \dfrac{u'}{1 + u^2}$
22. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$
23. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$
24. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

---

* *Algunas funciones importantes usadas en ingeniería y ciencias (como las funciones de Bessel y la función gamma) no son funciones elementales.*

5.6 Ejercicios

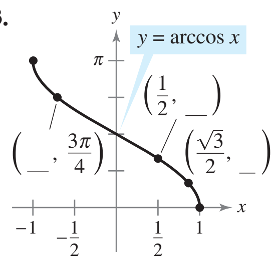
Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 1 y 2, *a*) usar una herramienta de graficación para completar la tabla, *b*) representar a mano los puntos de la tabla y la función, *c*) usar una herramienta de graficación para representar la función y comparar con el dibujo del apartado *b*) y *d*) hallar las intersecciones con los ejes y las simetrías de la gráfica.**

x	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y											

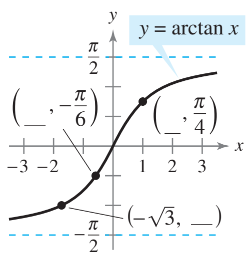
1. $y = \operatorname{arcsen} x$ **2.** $y = \arccos x$

En los ejercicios 3 y 4, determinar las coordenadas faltantes de los puntos sobre la gráfica de la función.

3.



4.



En los ejercicios 5 a 12, evaluar la expresión sin usar calculadora.

5. $\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}$ **6.** $\operatorname{arcsen} 0$

7. $\arccos \frac{1}{2}$ **8.** $\arccos 1$

9. $\arctan \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **10.** $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$

11. $\operatorname{arccsc}(-\sqrt{2})$ **12.** $\operatorname{arcsec}(-\sqrt{2})$

En los ejercicios 13 a 16, usar la calculadora para aproximar el valor. Redondear la respuesta a dos decimales.

13. $\arccos(-0.8)$ **14.** $\operatorname{arcsen}(-0.39)$

15. $\operatorname{arcsec} 1.269$ **16.** $\arctan(-5)$

En los ejercicios 17 a 20, evaluar la expresión sin usar calculadora. (*Sugerencia:* Ver el ejercicio 3.)

17. *a*) $\operatorname{sen}\left(\arctan \dfrac{3}{4}\right)$

b) $\sec\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{4}{5}\right)$

18. *a*) $\tan\left(\arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\cos\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{5}{13}\right)$

19. *a*) $\cot\left[\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]$

b) $\csc\left[\arctan\left(-\dfrac{5}{12}\right)\right]$

20. *a*) $\sec\left[\arctan\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right]$

b) $\tan\left[\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{5}{6}\right)\right]$

En los ejercicios 21 a 26, usar la figura para escribir la expresión en forma algebraica dada $y = \arccos x$, donde $0 < y < \pi/2$.

21. $\cos y$

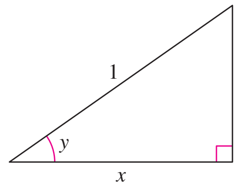
22. $\operatorname{sen} y$

23. $\tan y$

24. $\cot y$

25. $\sec y$

26. $\csc y$



En los ejercicios 27 a 34, escribir la expresión en la forma algebraica. [*Sugerencia:* Trazar un triángulo rectángulo, como se demostró en el ejemplo 3.]

27. $\cos(\operatorname{arcsen} 2x)$ **28.** $\sec(\arctan 4x)$

29. $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsec} x)$ **30.** $\cos(\operatorname{arccot} x)$

31. $\tan\left(\operatorname{arcsec} \dfrac{x}{3}\right)$ **32.** $\sec[\operatorname{arcsen}(x - 1)]$

33. $\csc\left(\arctan \dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$ **34.** $\cos\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{x - h}{r}\right)$

En los ejercicios 35 y 36, *a*) utilizar una herramienta de graficación para representar f y g en la misma pantalla para verificar si son iguales, *b*) usar álgebra para verificar que f y g son iguales y *c*) identificar las asíntotas horizontales de las gráficas.

35. $f(x) = \operatorname{sen}(\arctan 2x), \quad g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$

36. $f(x) = \tan\left(\arccos \dfrac{x}{2}\right), \quad g(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$

En los ejercicios 37 a 40, despejar x.

37. $\operatorname{arcsen}(3x - \pi) = \frac{1}{2}$ **38.** $\arctan(2x - 5) = -1$

39. $\operatorname{arcsen}\sqrt{2x} = \arccos\sqrt{x}$ **40.** $\arccos x = \operatorname{arcsec} x$

En los ejercicios 41 y 42, verificar cada identidad.

41. *a*) $\operatorname{arccsc} x = \operatorname{arcsen} \dfrac{1}{x}, \quad x \geq 1$

b) $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}, \quad x > 0$

42. *a*) $\operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen} x, \quad |x| \leq 1$

b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \leq 1$

En los ejercicios 43 a 62, hallar la derivada de la función.

43. $f(x) = 2 \operatorname{arcsen}(x - 1)$ **44.** $f(t) = \operatorname{arcsen} t^2$

45. $g(x) = 3 \arccos \dfrac{x}{2}$ **46.** $f(x) = \operatorname{arcsec} 2x$

47. $f(x) = \arctan e^x$ **48.** $f(x) = \arctan\sqrt{x}$

49. $g(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen} 3x}{x}$ **50.** $h(x) = x^2 \arctan 5x$

51. $h(t) = \operatorname{sen}(\arccos t)$ **52.** $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$

53. $y = 2x \arccos x - 2\sqrt{1 - x^2}$

54. $y = \ln(t^2 + 4) - \dfrac{1}{2}\arctan \dfrac{t}{2}$

55. $y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\ln \dfrac{x + 1}{x - 1} + \arctan x\right)$

56. $y = \dfrac{1}{2}\left[x\sqrt{4 - x^2} + 4 \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]$

57. $y = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2}$

58. $y = x \arctan 2x - \dfrac{1}{4}\ln(1 + 4x^2)$

59. $y = 8 \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{4} - \dfrac{x\sqrt{16 - x^2}}{2}$

60. $y = 25 \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{5} - x\sqrt{25 - x^2}$

61. $y = \arctan x + \dfrac{x}{1 + x^2}$

62. $y = \arctan \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2(x^2 + 4)}$

En los ejercicios 63 a 68, encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto dado.

63. $y = 2 \operatorname{arcsen} x, \quad \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$

64. $y = \dfrac{1}{2} \arccos x, \quad \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\pi}{8}\right)$

65. $y = \arctan \dfrac{x}{2}, \quad \left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$

66. $y = \operatorname{arcsec} 4x, \quad \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

67. $y = 4x \arccos(x - 1), \quad (1, 2\pi)$

68. $y = 3x \operatorname{arcsen} x, \quad \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

CAS ***Aproximación lineal y cuadrática*** **En los ejercicios 69 a 72, usar un sistema algebraico por computadora para hallar la aproximación lineal $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ y la aproximación cuadrática $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$ de la función f en $x = a$. Dibujar la gráfica de la función y sus aproximaciones lineal y cuadrática.**

69. $f(x) = \arctan x, \quad a = 0$

70. $f(x) = \arccos x, \quad a = 0$

71. $f(x) = \operatorname{arcsen} x, \quad a = \frac{1}{2}$

72. $f(x) = \arctan x, \quad a = 1$

En los ejercicios 73 a 76, encontrar los extremos relativos de la función.

73. $f(x) = \operatorname{arcsec} x - x$

74. $f(x) = \operatorname{arcsen} x - 2x$

75. $f(x) = \arctan x - \arctan(x - 4)$

76. $h(x) = \operatorname{arcsen} x - 2 \arctan x$

En los ejercicios 77 a 80, analizar y bosquejar una gráfica de la función. Identificar algún extremo relativo, puntos de inflexión, y asíntotas. Usar una herramienta de graficación para verificar sus resultados.

77. $f(x) = \operatorname{arcsen}(x - 1)$

78. $f(x) = \arctan x + \dfrac{\pi}{2}$

79. $f(x) = \operatorname{arcsec} 2x$

80. $f(x) = \arccos \dfrac{x}{4}$

Derivación implícita **En los ejercicios 81 a 84, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el punto dado.**

81. $x^2 + x \arctan y = y - 1, \quad \left(-\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

82. $\arctan(xy) = \operatorname{arcsen}(x + y), \quad (0, 0)$

83. $\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arcsen} y = \dfrac{\pi}{2}, \quad \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

84. $\arctan(x + y) = y^2 + \dfrac{\pi}{4}, \quad (1, 0)$

Desarrollo de conceptos

85. Explicar por qué los dominios de las funciones trigonométricas están restringidos cuando se calcula la función trigonométrica inversa.

86. Explicar por qué $\tan \pi = 0$ no implica que $\arctan 0 = \pi$.

87. Explicar cómo dibujar $y = \operatorname{arccot} x$ en una herramienta de graficación que no tiene la función arco cotangente.

88. ¿Son las derivadas de las funciones trigonométricas inversas algebraicas o trascendentales? Mencionar las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

89. *a)* Usar una herramienta de graficación para evaluar arcsen (arcsen 0.5) y arcsen (arcsen 1).

b) Sea $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{arcsen} x)$. Hallar el valor de x en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ tal que $f(x)$ es un número real.

Para discusión

90. El punto $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$ está en la gráfica de $y = \cos x$. ¿$\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ se encuentra en la gráfica de $y = \arccos x$? Si no es así, ¿esto contradice la definición de la función inversa?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 91 a 96, determinar si la expresión es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

91. Dado que $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, se tiene que $\arccos \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\pi}{3}$.

92. $\operatorname{arcsen} \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

93. La pendiente de la gráfica de la función tangente inversa es positiva para todo x.

94. El dominio de $y = \operatorname{arcsen} x$ es $[0, \pi]$.

95. $\dfrac{d}{dx}[\arctan(\tan x)] = 1$ para todo x en su dominio.

96. $\operatorname{arcsen}^2 x + \arccos^2 x = 1$.

97. ***Razón de cambio angular*** Un aeroplano vuela a una altitud de 5 millas hacia un punto directamente sobre un observador. Considerar θ y x como se muestra en la figura siguiente.

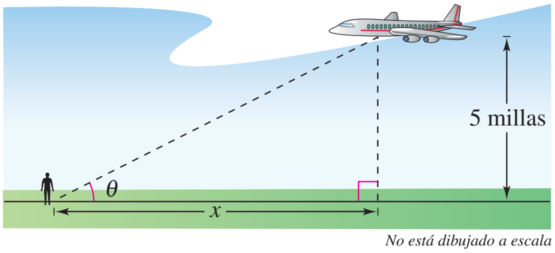


Figura para 97

a) Escribir θ como una función de x.

b) La velocidad del aeroplano es 400 millas por hora. Encontrar $d\theta/dt$ cuando $x = 10$ millas y cuando $x = 3$ millas.

98. ***Redactar*** Repetir el ejercicio 97 si la altitud del aeroplano es 3 millas y describir cómo la altitud afecta la razón de cambio de θ.

99. ***Ritmo o velocidad de cambio angular*** En un experimento sobre caída libre, se deja caer un objeto desde una altura de 256 pies. Una cámara situada en el suelo y distante 500 pies del punto de impacto, toma imágenes de la caída (ver la figura).

a) Hallar la función posición que describe la altura del objeto en cada instante t, suponer que se deja caer en $t = 0$. ¿En qué momento el objeto llega al suelo?

b) Calcular la razón de cambio del ángulo de elevación de la cámara cuando $t = 1$ y $t = 2$.

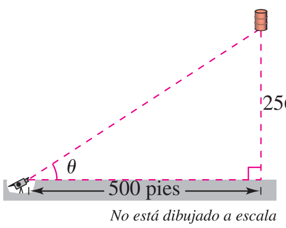


Figura para 99

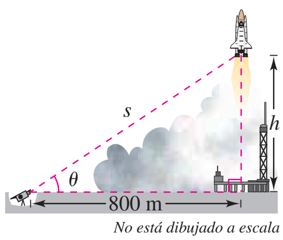


Figura para 100

100. ***Razón de cambio angular*** Una cámara de televisión a nivel del suelo graba el despegue vertical de un cohete desde un punto a 800 metros del punto de lanzamiento. Sea θ el ángulo de elevación del cohete y s la distancia entre la cámara y el cohete (ver la figura). Expresar θ como función de s durante el ascenso del cohete. Diferenciar el resultado para hallar $d\theta/dt$ en términos de s y de ds/dt.

101. ***Maximización de un ángulo*** Una cartelera de 85 pies de distancia de separación es perpendicular a un camino recto y está a 40 pies del camino (ver la figura). Encontrar el punto sobre el camino en el cual el ángulo θ subtendido por la carretera es un máximo.

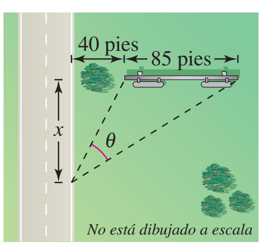


Figura para 101

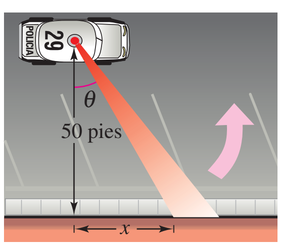


Figura para 102

102. ***Velocidad angular*** Un carro patrulla está estacionado a 50 pies de un almacén grande (ver la figura). La luz giratoria en la parte superior del carro gira a una razón de 30 revoluciones por minuto. Escribir θ como una función de x. ¿Qué tan lejos está el rayo de luz moviéndose a lo largo de la pared cuando el rayo hace un ángulo de $\theta = 45°$ con la línea perpendicular desde la luz hasta la pared?

103. *a*) Demostrar que $\arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$, $xy \neq 1$.

b) Usar la fórmula del apartado *a*) para probar que

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

104. Verificar las siguientes fórmulas de derivación.

a) $\dfrac{d}{dx}[\arctan u] = \dfrac{u'}{1 + u^2}$

b) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$

c) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

d) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

105. ***Existencia de una inversa*** Determinar los valores de k para los que la función $f(x) = kx + \operatorname{sen} x$ tiene función inversa.

106. ***Para pensar*** Usar una herramienta de graficación para representar $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.

a) ¿Por qué la gráfica de g no es la recta $y = x$?

b) Hallar los extremos de g.

107. *a*) Representar la función $f(x) = \arccos x + \operatorname{arcsen} x$ sobre el intervalo $[-1, 1]$.

b) Describir la gráfica de f.

c) Comprobar el resultado del apartado *b*) analíticamente.

108. Comprobar que $\operatorname{arcsen} x = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$, $|x| < 1$.

109. Calcular el valor de c en el intervalo $[0, 4]$ sobre el eje x que maximiza el ángulo θ.

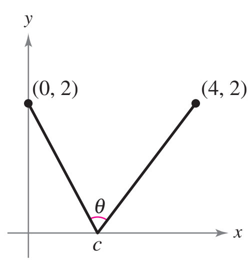


Figura para 109

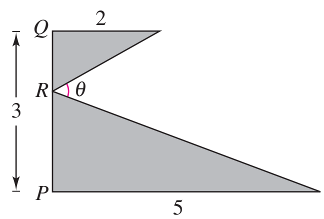


Figura para 110

110. Encontrar PR tal que $0 \leq PR \leq 3$ y $m\angle\theta$ sea un máximo.

111. Algunos textos de cálculo definen la inversa de la función secante usando el dominio $[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$.

a) Hacer un boceto de la gráfica $y = \operatorname{arcsec} x$ usando este rango.

b) Mostrar que $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

5.7 Funciones trigonométricas inversas: integración

- **Integrar funciones cuyas primitivas o antiderivadas contienen funciones trigonométricas inversas.**
- **Integrar funciones completando un cuadrado.**
- **Resumir las reglas básicas de integración de funciones elementales.**

Integrales que contienen funciones trigonométricas inversas

Las derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas se agrupan en tres pares. En cada par, la derivada de una es la negativa de la otra. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}[\text{arcsen}\, x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y

$$\frac{d}{dx}[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cuando se hace una lista de las *antiderivadas* o *primitivas* que corresponden a cada una de las funciones trigonométricas inversas, es suficiente citar una de cada par. Es conveniente usar arcsen x como primitiva de $1/\sqrt{1-x^2}$, en lugar de $-\arccos x$. El siguiente teorema da una fórmula para la primitiva de cada una de las tres parejas. La demostración de estas reglas de integración se deja como ejercicio (ver ejercicios 87 a 89).

PARA MAYOR INFORMACIÓN En el artículo "A Direct Proof of the Integral Formula for Arctangent", de Arnold J. Insel, en *The College Mathematics Journal*, se puede encontrar una detallada demostración de la parte 2 del teorema 5.17.

TEOREMA 5.17 INTEGRALES QUE INVOLUCRAN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Sea u una función derivable de x, y sea $a > 0$.

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arcsen}\,\frac{u}{a} + C$ **2.** $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\,\text{arcsec}\,\frac{|u|}{a} + C$

EJEMPLO 1 Integrales con funciones trigonométricas inversas

a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \text{arcsen}\,\frac{x}{2} + C$$

b) $$\int \frac{dx}{2+9x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{(\sqrt{2})^2+(3x)^2} \qquad u = 3x,\ a = \sqrt{2}$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{3x}{\sqrt{2}} + C$$

c) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{2\,dx}{2x\sqrt{(2x)^2-3^2}} \qquad u = 2x,\ a = 3$$
$$= \frac{1}{3}\,\text{arcsec}\,\frac{|2x|}{3} + C$$

Las integrales del ejemplo 1 son aplicaciones a simple vista de las fórmulas de integración. Desafortunadamente, no es lo frecuente. Las fórmulas de integración que involucran funciones trigonométricas inversas pueden aparecer de muy diversas formas.

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Integrales como la del ejemplo 2 son fáciles con ayuda de programas de integración simbólica en computadora. No obstante, al usarlos hay que recordar que pueden no ser capaces de encontrar una primitiva debido a dos razones. En primer lugar, algunas funciones elementales tienen primitivas no elementales. En segundo lugar, todos esos programas tienen limitaciones, así que puede darse una función para cuya integración no está preparado el programa. Recordar, asimismo, que las primitivas o antiderivadas que involucran funciones trigonométricas o logarítmicas se pueden expresar de maneras muy diversas. Por ejemplo, al utilizar uno de esos programas para la integral del ejemplo 2 se obtiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \arctan \sqrt{e^{2x}-1} + C.$$

Demostrar que esta antiderivada es equivalente a la obtenida en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Integración por sustitución

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Solución Tal como está, la integral no se ajusta a ninguna de las tres fórmulas para las funciones trigonométricas inversas. Pero haciendo la sustitución de $u = e^x$, se obtiene

$$u = e^x \quad \Rightarrow \quad du = e^x\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}.$$

Con esta sustitución, ya se puede integrar como sigue:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(e^x)^2-1}} && \text{Escribir } e^{2x} \text{ como } (e^x)^2.\\
&= \int \frac{du/u}{\sqrt{u^2-1}} && \text{Sustituir.}\\
&= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} && \text{Reescribir para que se ajuste a la regla arcsec.}\\
&= \operatorname{arcsec}\frac{|u|}{1} + C && \text{Aplicar la regla arcsec.}\\
&= \operatorname{arcsec} e^x + C && \text{Sustitución regresiva.}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Reescribir como suma de dos cocientes

Hallar $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

Solución Esta integral tampoco parece ajustarse a las fórmulas. Sin embargo, desdoblando el integrando en dos partes, la primera es integrable por la regla de la potencia y la segunda da una función seno inversa.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\
&= -\frac{1}{2}\int (4-x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{(4-x^2)^{1/2}}{1/2}\right] + 2\operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + C\\
&= -\sqrt{4-x^2} + 2\operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

Completar el cuadrado

Cuando hay funciones cuadráticas en el integrando, completar el cuadrado ayuda a resolver la integral. Por ejemplo, la expresión cuadrática $x^2 + bx + c$ puede escribirse como diferencia de dos cuadrados al sumar y restar $(b/2)^2$.

$$\begin{aligned}
x^2 + bx + c &= x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\\
&= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Completar el cuadrado

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}$.

Solución Se puede escribir el denominador como la suma de dos cuadrados como se muestra.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 7 &= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 7 \\ &= (x - 2)^2 + 3 = u^2 + a^2 \end{aligned}$$

En esta forma de cuadrados completados, al tomar $u = x - 2$ y $a = \sqrt{3}$.

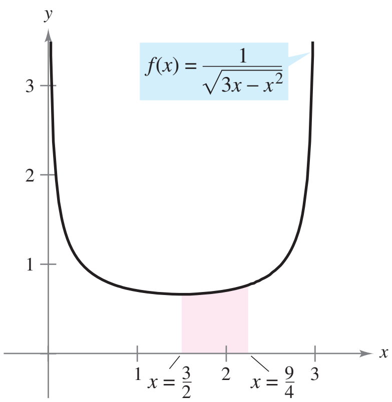
$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C$$

Si el coeficiente dominante no es 1, conviene sacarlo como factor común del cuadrado. Por ejemplo, se puede completar el cuadrado en la expresión $2x^2 - 8x + 10$ factorizando primero.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 10 &= 2(x^2 - 4x + 5) \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4 + 5) \\ &= 2[(x-2)^2 + 1] \end{aligned}$$

Para completar el cuadrado cuando el coeficiente de x^2 es negativo, el mismo proceso de factorización sirve. Por ejemplo, se puede completar el cuadrado en la expresión $3x - x^2$ como se muestra.

$$\begin{aligned} 3x - x^2 &= -(x^2 - 3x) \\ &= -\left[x^2 - 3x + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2\right] \\ &= \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$



El área de la gráfica en la región delimitada por la gráfica de f, el eje x, $x = \frac{3}{2}$, y $x = \frac{9}{4}$ es $\pi/6$
Figura 5.34

EJEMPLO 5 Completar el cuadrado (coeficiente dominante negativo)

Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}$$

el eje x, y las rectas $x = \frac{3}{2}$ y $x = \frac{9}{4}$.

Solución En la figura 5.34 se ve que el área está dada por

$$\text{Área} = \int_{3/2}^{9/4} \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}\, dx.$$

Al utilizar la expresión con el cuadrado completo antes obtenido, se puede integrar como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{3/2}^{9/4} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2}} &= \int_{3/2}^{9/4} \frac{dx}{\sqrt{(3/2)^2 - [x - (3/2)]^2}} \\ &= \arcsen \frac{x - (3/2)}{3/2}\Bigg]_{3/2}^{9/4} \\ &= \arcsen \frac{1}{2} - \arcsen 0 \\ &= \frac{\pi}{6} \\ &\approx 0.524 \end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Ante integrales como la del ejemplo 5 siempre queda el recurso de una solución numérica. Así, aplicando la regla de Simpson (con $n = 12$) a la integral de este ejemplo, se obtiene

$$\int_{3/2}^{9/4} \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}\, dx \approx 0.523599.$$

Este valor difiere del valor exacto de la integral ($\pi/6 \approx 0.5235988$) en menos de una millonésima.

Repaso a las reglas básicas de integración

Ya se ha terminado la introducción a las **reglas básicas de integración**. Si se quiere llegar a un uso eficaz de tales fórmulas, es conveniente practicarlas hasta que se consiga aprenderlas de memoria.

Reglas básicas de integración ($a > 0$)

1. $\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$

2. $\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$

3. $\int du = u + C$

4. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

6. $\int e^u\,du = e^u + C$

7. $\int a^u\,du = \left(\dfrac{1}{\ln a}\right)a^u + C$

8. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

9. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

10. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

11. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

12. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

13. $\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$

14. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

15. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

16. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

17. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \dfrac{u}{a} + C$

19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{u}{a} + C$

20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arcsec} \dfrac{|u|}{a} + C$

Se aprende mucho acerca de la naturaleza de la integración comparando esta lista con la de las reglas de derivación dadas en la sección anterior. Se dispone ya de suficientes reglas de derivación para derivar *cualquier* función elemental. Sin embargo, la situación en la integración no es la misma.

Las reglas recogidas en la lista de arriba son esencialmente las que se han podido deducir de las reglas de derivación. Hasta ahora, no se han desarrollado reglas para integrar un producto o un cociente general, o la función logaritmo natural o las funciones trigonométricas inversas. Lo que es más importante, ninguna de las reglas de la lista es aplicable si no se logra dar el *du* apropiado correspondiente a la *u* de la fórmula. La cuestión es que se necesita trabajar más sobre técnicas de integración, lo cual se hará en el capítulo 8. Los dos ejemplos siguientes dan una idea más clara de lo que *se puede* y de lo que *no se puede* hacer con las técnicas disponibles hasta este momento.

EJEMPLO 6 Comparación de problemas de integración

De las siguientes integrales encontrar tantas como sea posible, al utilizar las fórmulas y técnicas estudiadas hasta ahora en este texto.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ ***c)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

Solución

a) *Se puede* encontrar la integral (se emplea la regla del arco secante).

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}|x| + C$$

b) *Se puede* encontrar la integral (se emplea la regla de la potencia).

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \frac{1}{2}\int (x^2-1)^{-1/2}(2x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2-1)^{1/2}}{1/2}\right] + C \\ &= \sqrt{x^2-1} + C\end{aligned}$$

c) *No se pueden* integrar con las técnicas estudiadas. (Verificar esta conclusión revisando las fórmulas de la lista.)

EJEMPLO 7 Comparación de problemas de integración

Hallar tantas de las integrales siguientes como sea posible mediante las técnicas y fórmulas estudiadas hasta ahora en este texto.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x}$ ***c)*** $\displaystyle\int \ln x\,dx$

Solución

a) *Se puede* calcular la integral (se emplea la regla para el logaritmo).

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\ln x} &= \int \frac{1/x}{\ln x}\,dx \\ &= \ln|\ln x| + C\end{aligned}$$

b) *Se puede* calcular la integral (se emplea la regla de la potencia).

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x\,dx}{x} &= \int \left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^1\,dx \\ &= \frac{(\ln x)^2}{2} + C\end{aligned}$$

c) *No se puede* integrar con las técnicas estudiadas.

NOTA Observar que en los ejemplos 6 y 7 son precisamente las funciones *más simples* las que no se pueden integrar todavía.

5.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 24, hallar la integral.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

3. $\displaystyle\int \frac{7}{16+x^2}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{12}{1+9x^2}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{4+(x-3)^2}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{t}{t^4+16}\,dt$

9. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-4}}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{t}{t^4+25}\,dt$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{4+e^{4x}}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{3+(x-2)^2}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{25-\tan^2 x}}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{7+\cos^2 x}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{3}{2\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+1}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{4x+3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{x+5}{\sqrt{9-(x-3)^2}}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x-2}{(x+1)^2+4}\,dx$

En los ejercicios 25 a 38, evaluar la integral.

25. $\displaystyle\int_0^{1/6} \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

26. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

27. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$

28. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{6}{9+x^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

30. $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

31. $\displaystyle\int_3^{6} \frac{1}{25+(x-3)^2}\,dx$

32. $\displaystyle\int_1^{4} \frac{1}{x\sqrt{16x^2-5}}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

34. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx$

35. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

37. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

38. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

En los ejercicios 39 a 50, calcular o evaluar la integral (completando el cuadrado cuando sea necesario).

39. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{x^2-2x+2}$

40. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4x+13}$

41. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+6x+13}\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2+2x+2}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx$

46. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx$

47. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+2x^2+2}\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9+8x^2-x^4}}\,dx$

En los ejercicios 51 a 54, hallar o evaluar la integral mediante sustitución especificada.

51. $\displaystyle\int \sqrt{e^t-3}\,dt$

$u = \sqrt{e^t-3}$

52. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,dx$

$u = \sqrt{x-2}$

53. $\displaystyle\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

$u = \sqrt{x}$

54. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{2\sqrt{3-x}\sqrt{x+1}}$

$u = \sqrt{x+1}$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 55 a 57, determinar cuáles de las integrales pueden hallarse usando las reglas básicas estudiadas hasta ahora en el texto.

55. *a)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$

56. *a)* $\displaystyle\int e^{x^2}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}e^{1/x}\,dx$

57. *a)* $\displaystyle\int \sqrt{x-1}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

58. Determinar qué valor aproxima mejor el área de la región entre el eje x y la función.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

en el intervalo $[-0.5, 0.5]$. (Basar la elección en un dibujo de la región, *no* en cálculos.)

a) 4 *b)* -3 *c)* 1 *d)* 2 *e)* 3

59. Decidir si se puede calcular la integral

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

al utilizar las fórmulas y técnicas estudiadas. Explicar el razonamiento.

Para discusión

60. Determinar cuál de las integrales puede encontrarse usando las fórmulas de integración básicas que se han estudiado hasta ahora en el texto.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ *c*) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

Ecuación diferencial **En los ejercicios 61 y 62, usar la ecuación diferencial y las condiciones especificadas para encontrar *y*.**

61. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

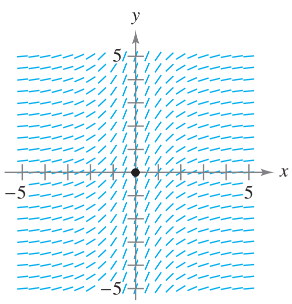
$y(0) = \pi$

62. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{4+x^2}$

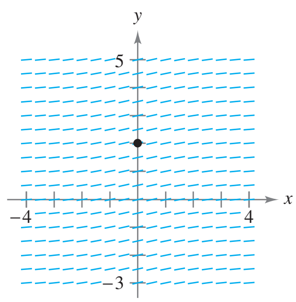
$y(2) = \pi$

Campos de pendientes **En los ejercicios 63 a 66 se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, una de las cuales pase por el punto especificado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representar la solución. Comparar los resultados con los dibujos del apartado *a*).**

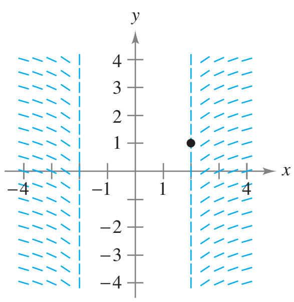
63. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{1+x^2}$, $(0, 0)$



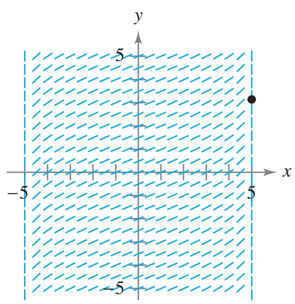
64. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{9+x^2}$, $(0, 2)$



65. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-4}}$, $(2, 1)$



66. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{\sqrt{25-x^2}}$, $(5, \pi)$



CAS ***Campo de pendientes*** **En los ejercicios 67 a 70, usar un sistema algebraico por computadora para graficar el campo de pendientes de la ecuación diferencial y representar la solución que satisface la condición inicial.**

67. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10}{x\sqrt{x^2-1}}$, $y(3) = 0$

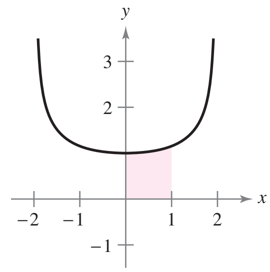
68. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{12+x^2}$, $y(4) = 2$

69. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{\sqrt{16-x^2}}$, $y(0) = 2$

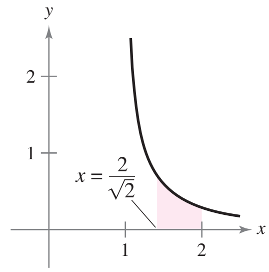
70. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y}}{1+x^2}$, $y(0) = 4$

Área **En los ejercicios 71 a 76, encontrar el área de la región.**

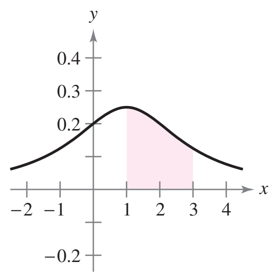
71. $y = \dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}$



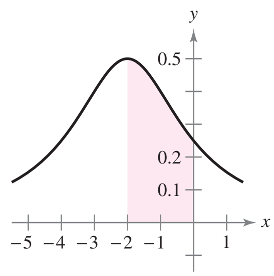
72. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$



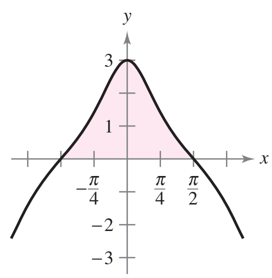
73. $y = \dfrac{1}{x^2-2x+5}$



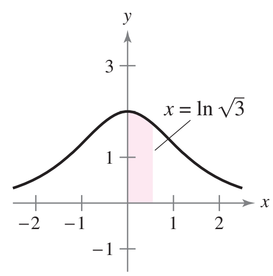
74. $y = \dfrac{2}{x^2+4x+8}$



75. $y = \dfrac{3\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$



76. $y = \dfrac{4e^x}{1+e^{2x}}$



En los ejercicios 77 y 78, *a*) verificar la fórmula de integración, después *b*) usar ésta para encontrar el área de la región.

77. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\arctan x}{x} + C$

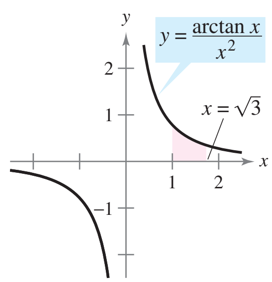


Figura para 77

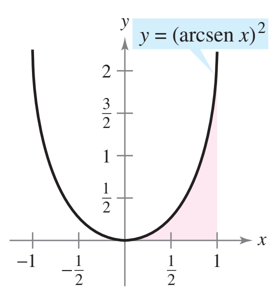


Figura para 78

78. $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$

$= x(\operatorname{arcsen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x + C$

79. *a*) Dibujar la región representada por

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x\, dx.$$

b) Usar la función de integración de una herramienta de graficación para aproximar el área.

c) Encontrar analíticamente el área exacta.

80. *a*) Mostrar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \pi.$

b) Estimar el número π usando la regla de Simpson (con $n = 6$) y la integral en el apartado *a*).

c) Estimar el número π usando la capacidad de integración de una herramienta de graficación.

81. ***Investigación*** Considerar la función $F(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{x+2} \frac{2}{t^2+1}\,dt.$

a) Escribir una breve interpretación geométrica de $F(x)$ con relación a la función $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$. Empleando la explicación, estimar el valor de x donde F es máxima.

b) Efectuar la integración para hallar una forma alternativa de $F(x)$. Usar el cálculo para localizar el valor de x que hace a F máxima y comparar los resultados con lo estimado en el apartado *a*).

82. Considerar la integral $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{6x - x^2}}\,dx.$

a) Hallar la integral completando el cuadrado en el radicando.

b) Hallarla al sustituir $u = \sqrt{x}$.

c) Las primitivas o antiderivadas obtenidas en *a*) y *b*) parecen muy diferentes. Usar una herramienta de graficación para representar cada primitiva en la misma pantalla y determinar la relación entre ellas. Determinar sus dominios.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 83 a 86, determinar si la expresión es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

83. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x\sqrt{9x^2-16}} = \frac{1}{4}\operatorname{arcsec}\frac{3x}{4} + C$

84. $\displaystyle\int \frac{dx}{25+x^2} = \frac{1}{25}\arctan\frac{x}{25} + C$

85. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\arccos\frac{x}{2} + C$

86. Una forma de hallar $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{9-e^{2x}}}\,dx$ es mediante la regla del arcoseno.

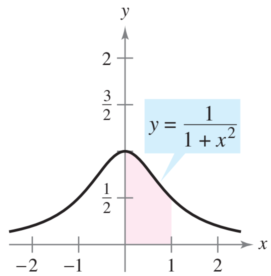
Verificación de las reglas de integración **En los ejercicios 87 a 89, verificar cada regla por diferenciación. Sea $a > 0$.**

87. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$

88. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

89. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

90. ***Integración numérica*** *a*) Escribir una integral que represente el área de la región. *b*) Después usar la regla de los trapecios con $n = 8$ para estimar el área de la región. *c*) Explicar cómo se pueden usar los resultados de los apartados *a*) y *b*) para estimar π.



91. ***Movimiento vertical*** Un objeto es lanzado desde el suelo hacia arriba con velocidad inicial de 500 pies por segundo. En este ejercicio, el objetivo es analizar el movimiento mientras asciende.

a) Despreciando la resistencia al aire, expresar la velocidad en función del tiempo. Representar esta función en la herramienta de graficación.

b) Usando los resultados del apartado *a*) encontrar la función posición y determinar la altura máxima alcanzada por el objeto.

c) Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, la ecuación obtenida es

$$\frac{dv}{dt} = -(32 + kv^2)$$

donde -32 pies/s^2 en la aceleración de la gravedad y k una constante. Hallar la velocidad en función del tiempo al resolver la ecuación.

$$\int \frac{dv}{32+kv^2} = -\int dt.$$

d) Usar una herramienta de graficación para representar la función velocidad $v(t)$ del apartado *c*) si $k = 0.001$. Usar la gráfica para estimar el instante t_0 en el que el objeto alcanza la máxima altura.

e) Usar la función integración de la herramienta de graficación para aproximar el valor de

$$\int_0^{t_0} v(t)\,dt$$

donde $v(t)$ y t_0 son los obtenidos en el apartado *d*). Ésta es la aproximación de la máxima altura del objeto.

f) Explicar la diferencia entre los resultados de los apartados *b*) y *e*).

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este tópico, ver el artículo "What Goes Up Must Come Down; Will Air Resistance Make It Return Sooner, or Later?", de John Lekner, en *Mathematics Magazine*.

92. Representar $y_1 = \dfrac{x}{1+x^2}$, $y_2 = \arctan x$, y $y_3 = x$ sobre $[0, 10]$.

Demostrar que $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ para $x > 0$.

5.8 Funciones hiperbólicas

- Desarrollar las propiedades de las funciones hiperbólicas.
- Derivar e integrar funciones hiperbólicas.
- Desarrollar las propiedades de las funciones hiperbólicas inversas.
- Derivar e integrar funciones que contienen funciones hiperbólicas inversas.

JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777)

La primera persona que publicó un estudio acerca de las funciones hiperbólicas fue Johann Heinrich Lambert, un matemático germano-suizo y colega de Euler.

Funciones hiperbólicas

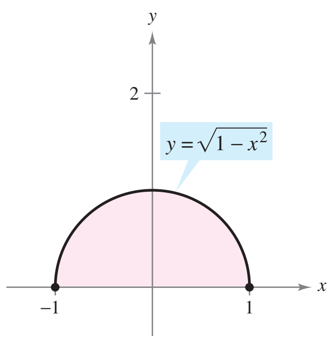
En esta sección se verá brevemente una clase especial de funciones exponenciales llamadas **funciones hiperbólicas**. El nombre de *funciones hiperbólicas* proviene de la comparación entre el área de una región semicircular, como se muestra en la figura 5.35, con el área de una región bajo una hipérbola, como se muestra en la figura 5.36. La integral que da el área del semicírculo emplea una función trigonométrica (circular) inversa:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.571.$$

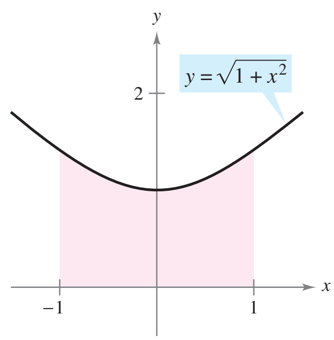
La integral que da el área de la región hiperbólica emplea una función hiperbólica inversa:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{senh}^{-1} x\right]_{-1}^{1} \approx 2.296.$$

Ésta es sólo una de las muchas analogías existentes entre las funciones hiperbólicas y las trigonométricas.



Círculo: $x^2 + y^2 = 1$
Figura 5.35



Hipérbola: $-x^2 + y^2 = 1$
Figura 5.36

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre el desarrollo de funciones hiperbólicas, ver el artículo "An Introduction to Hyperbolic Functions in Elementary Calculus", de Jerome Rosenthal en *Mathematics Teacher*.

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

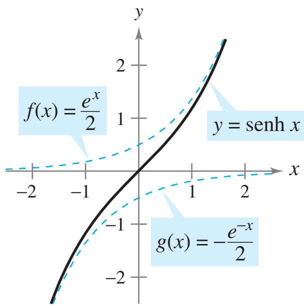
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}, \quad x \neq 0$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

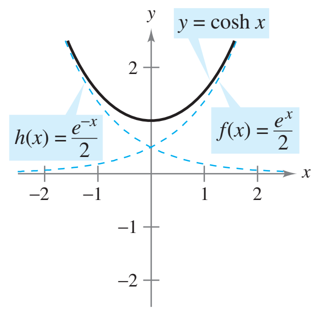
$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x}, \quad x \neq 0$$

NOTA senh x se lee "seno hiperbólico de x", cosh x se lee "coseno hiperbólico de x", etcétera.

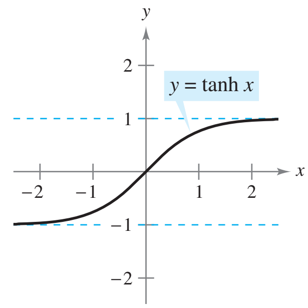
La figura 5.37 muestra las gráficas de las seis funciones hiperbólicas, así como sus dominios y recorridos o rangos. Nótese que la gráfica de senh x se puede obtener al sumar la coordenada y que corresponde a las funciones exponenciales $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ y $g(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$. De manera semejante, la gráfica de cosh x puede ser obtenida al sumar la coordenada y que corresponde a las funciones exponenciales $f(x) = \frac{1}{2}e^x$ y $h(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$.



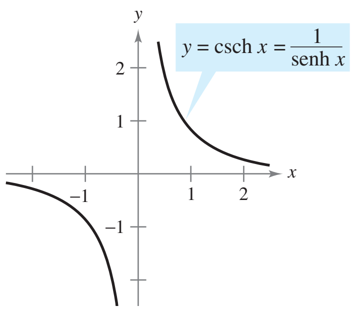
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$



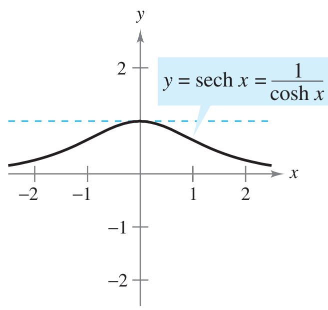
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $[1, \infty)$



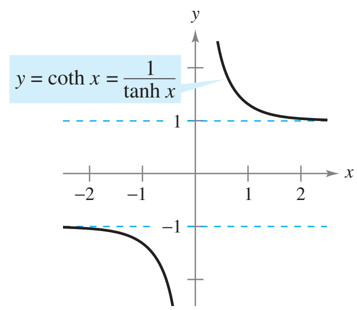
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-1, 1)$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(0, 1]$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Figura 5.37

Muchas identidades trigonométricas tienen sus correspondientes *identidades hiperbólicas*. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{4}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{senh} x \cosh x &= 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\
&= \operatorname{senh} 2x.
\end{aligned}$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para entender geométricamente la relación entre las funciones hiperbólica y exponencial, ver el artículo "A Short Proof. Linking the Hyperbolic and Exponential Functions", de Michael J. Seery en *The AMATYC Review*.

Identidades hiperbólicas

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad \operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$
$$\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1 \qquad \operatorname{senh}(x-y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y$$
$$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1 \qquad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$
$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$
$$\operatorname{senh}^2 x = \frac{-1+\cosh 2x}{2} \qquad \cosh^2 x = \frac{1+\cosh 2x}{2}$$
$$\operatorname{senh} 2x = 2\operatorname{senh} x \cosh x \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

Derivación e integración de funciones hiperbólicas

Debido a que las funciones hiperbólicas se expresan en términos de e^x y e^{-x}, es fácil obtener reglas de derivación para sus derivadas. El siguiente teorema presenta estas derivadas con las reglas de integración correspondientes.

TEOREMA 5.18 DERIVADAS E INTEGRALES DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Sea u una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{senh} u] = (\cosh u)u' \qquad \int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\cosh u] = (\operatorname{senh} u)u' \qquad \int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\tanh u] = (\operatorname{sech}^2 u)u' \qquad \int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\coth u] = -(\operatorname{csch}^2 u)u' \qquad \int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech} u] = -(\operatorname{sech} u \tanh u)u' \qquad \int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$$
$$\frac{d}{dx}[\operatorname{csch} u] = -(\operatorname{csch} u \coth u)u' \qquad \int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\operatorname{senh} x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]\\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x\\ \frac{d}{dx}[\tanh x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right]\\ &= \frac{\cosh x(\cosh x) - \operatorname{senh} x(\operatorname{senh} x)}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{1}{\cosh^2 x}\\ &= \operatorname{sech}^2 x\end{aligned}$$

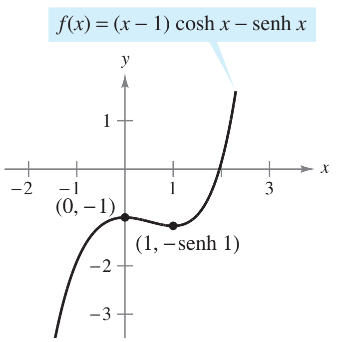
En los ejercicios 122 a 124, se pide la demostración de algunas de las reglas de derivación.

EJEMPLO 1 Derivación de funciones hiperbólicas

a) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{senh}(x^2 - 3)] = 2x\cosh(x^2 - 3)$ ***b)*** $\dfrac{d}{dx}[\ln(\cosh x)] = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \tanh x$

c) $\dfrac{d}{dx}[x\operatorname{senh} x - \cosh x] = x\cosh x + \operatorname{senh} x - \operatorname{senh} x = x\cosh x$

EJEMPLO 2 Localización de los extremos relativos



$f''(0) < 0$, entonces $(0, -1)$ es un máximo relativo. $f''(1) > 0$, para $(1, -\operatorname{senh} 1)$ es un mínimo relativo

Figura 5.38

Localizar los extremos relativos de $f(x) = (x - 1)\cosh x - \operatorname{senh} x$.

Solución Se comienza por igualar a cero la derivada de f.

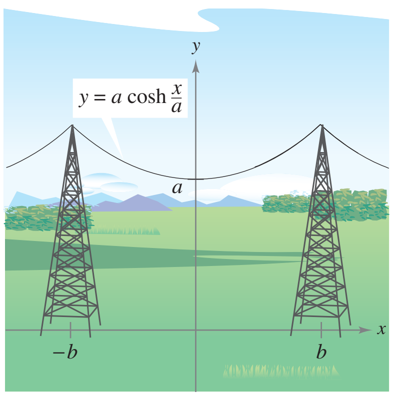
$$\begin{aligned} f'(x) = (x - 1)\operatorname{senh} x + \cosh x - \cosh x &= 0 \\ (x - 1)\operatorname{senh} x &= 0 \end{aligned}$$

Así pues, los puntos críticos son $x = 1$ y $x = 0$. Con el criterio de la segunda derivada es fácil comprobar que el punto $(0, -1)$ da un máximo relativo y el punto $(1, -\operatorname{senh} 1)$ da un mínimo relativo, como muestra la figura 5.38. Confirmar este resultado gráficamente usando una herramienta de graficación. Si no se dispone de las funciones hiperbólicas en la herramienta de graficación, se pueden utilizar funciones exponenciales como a continuación.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 1)\left(\tfrac{1}{2}\right)(e^x + e^{-x}) - \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &= \tfrac{1}{2}(xe^x + xe^{-x} - e^x - e^{-x} - e^x + e^{-x}) \\ &= \tfrac{1}{2}(xe^x + xe^{-x} - 2e^x) \end{aligned}$$

Cuando un cable flexible uniforme, como un cable telefónico, está suspendido entre dos puntos, adopta la forma de una *catenaria*, que se estudia en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Cables colgantes



Catenaria

Figura 5.39

Los cables de un tendido eléctrico están suspendidos entre dos torres, formando la catenaria que se muestra en la figura 5.39. La ecuación de la catenaria es

$$y = a\cosh\frac{x}{a}.$$

La distancia entre las dos torres es $2b$. Calcular la pendiente de la catenaria en el punto de sujeción del cable en la torre de la derecha.

Solución Derivando se obtiene

$$y' = a\left(\frac{1}{a}\right)\operatorname{senh}\frac{x}{a} = \operatorname{senh}\frac{x}{a}.$$

En el punto $(b, a\cosh(b/a))$, la pendiente (desde la izquierda) viene dada por $m = \operatorname{senh}\dfrac{b}{a}$.

PARA MAYOR INFORMACIÓN En el ejemplo 3, el cable es una curva catenaria entre dos soportes de la misma altura. Para aprender acerca de la forma del cable sostenido entre dos soportes de diferente altura, ver el artículo "Reexamining the Catenary", de Paul Cella en *The College Mathematics Journal*.

EJEMPLO 4 Integración de una función hiperbólica

Calcular $\int \cosh 2x \operatorname{senh}^2 2x\, dx$.

Solución

$$\begin{aligned}\int \cosh 2x \operatorname{senh}^2 2x\, dx &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{senh} 2x)^2(2\cosh 2x)\, dx \qquad u = \operatorname{senh} 2x\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\operatorname{senh} 2x)^3}{3}\right] + C\\ &= \frac{\operatorname{senh}^3 2x}{6} + C\end{aligned}$$

Funciones hiperbólicas inversas

A diferencia de las funciones trigonométricas, las funciones hiperbólicas no son periódicas. De hecho, volviendo a la figura 5.37 se ve que cuatro de las seis funciones hiperbólicas son inyectivas (el seno, la tangente, la cosecante y la cotangente hiperbólicos). Así, se puede aplicar el teorema 5.7, el cual afirma que esas cuatro funciones tienen funciones inversas. Las otras dos (las funciones coseno y secante hiperbólicas) son inyectivas si se restringe su dominio a los números reales positivos, y es en este dominio restringido donde tienen función inversa. Debido a que las funciones hiperbólicas se definen en términos de las funciones exponenciales, no es de extrañar que las funciones hiperbólicas inversas puedan expresarse en términos de funciones logarítmicas, como se muestra en el teorema 5.19.

TEOREMA 5.19 FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Función	*Dominio*
$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$	$(-\infty, \infty)$
$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$	$[1, \infty)$
$\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$	$(-1, 1)$
$\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x + 1}{x - 1}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$	$(0, 1]$
$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{\lvert x\rvert}\right)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

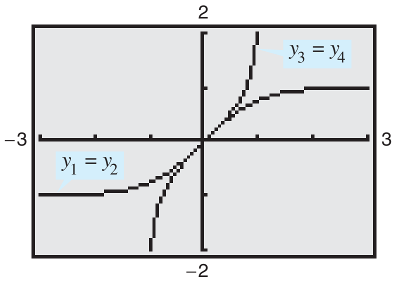
DEMOSTRACIÓN La demostración de este teorema es una aplicación directa de las propiedades de las funciones exponencial y logarítmica. Por ejemplo, si

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

y

$$g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

se puede ver que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, lo cual implica que g es la función inversa de f.



Gráfica de la función tangente hiperbólica y la función tangente hiperbólica inversa
Figura 5.40

TECNOLOGÍA Se puede utilizar una herramienta de graficación para verificar gráficamente los resultados del teorema 5.19. Por ejemplo, dibujando las gráficas de las funciones siguientes.

$$y_1 = \tanh x \qquad \text{Tangente hiperbólica.}$$

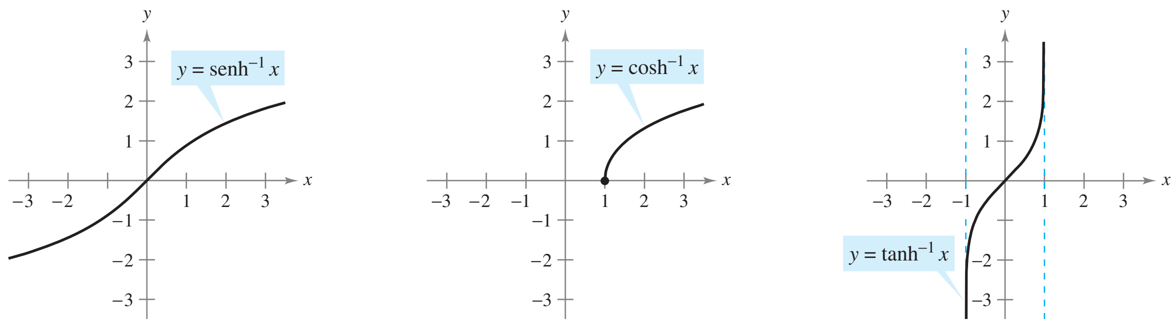
$$y_2 = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{Definición de la tangente hiperbólica.}$$

$$y_3 = \tanh^{-1} x \qquad \text{Tangente hiperbólica inversa.}$$

$$y_4 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \qquad \text{Definición de la tangente hiperbólica inversa.}$$

Los resultados se muestran en la figura 5.40. En ella se aprecia que $y_1 = y_2$ y $y_3 = y_4$. También se puede ver que la gráfica de y_1 es el reflejo de la de y_3 en la recta $y = x$.

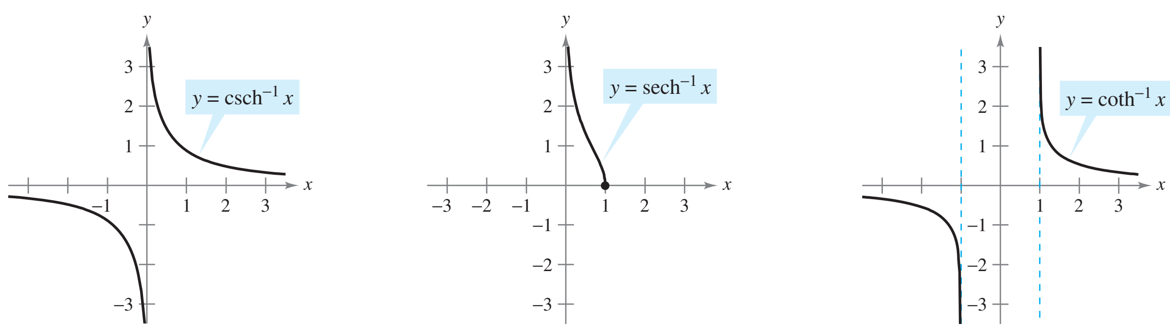
Las gráficas de las funciones hiperbólicas inversas se muestran en la figura 5.41.



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$

Dominio: $[1, \infty)$
Recorrido o rango: $[0, \infty)$

Dominio: $(-1, 1)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Dominio: $(0, 1]$
Recorrido o rango: $[0, \infty)$

Dominio: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Figura 5.41

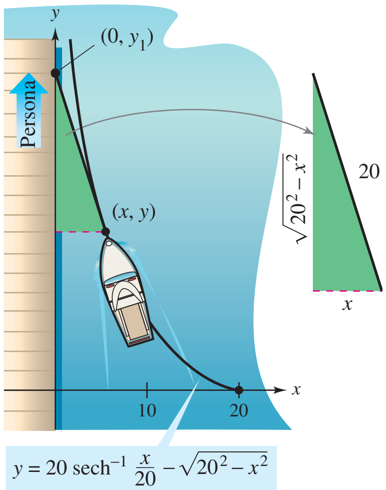
La secante hiperbólica inversa se puede utilizar para definir la curva llamada *tractriz* o *curva de persecución*, que se analiza en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Tractriz

Una persona sostiene una cuerda que está atada a un bote, como se muestra en la figura 5.42. Mientras la persona camina por el muelle, el bote recorre una **tractriz**, dada por la ecuación

$$y = a \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

donde a es la longitud de la cuerda. Si $a = 20$ pies, calcular la distancia que la persona debe caminar para llevar el bote a 5 pies del muelle.



Una persona tiene que caminar 41.27 pies para acercar el bote a 5 pies del muelle
Figura 5.42

Solución En la figura 5.42, notar que la distancia recorrida por la persona se da por

$$\begin{aligned} y_1 = y + \sqrt{20^2 - x^2} &= \left(20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{20} - \sqrt{20^2 - x^2}\right) + \sqrt{20^2 - x^2} \\ &= 20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{x}{20}. \end{aligned}$$

Cuando $x = 5$, esta distancia es

$$\begin{aligned} y_1 = 20 \operatorname{sech}^{-1} \frac{5}{20} &= 20 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (1/4)^2}}{1/4} \\ &= 20 \ln\left(4 + \sqrt{15}\right) \\ &\approx 41.27 \text{ pies.} \end{aligned}$$

Derivación e integración de funciones hiperbólicas inversas

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas, que recuerdan las de las funciones trigonométricas inversas, se enumeran en el teorema 5.20, junto con las correspondientes fórmulas de integración (en forma logarítmica). Se puede comprobar cada una de ellas al aplicar las definiciones logarítmicas de las funciones hiperbólicas inversas. (Ver los ejercicios 119 a 121.)

TEOREMA 5.20 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Sea u una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{senh}^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}} \qquad \frac{d}{dx}[\cosh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2} \qquad \frac{d}{dx}[\coth^{-1} u] = \frac{u'}{1 - u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1} u] = \frac{-u'}{u\sqrt{1 - u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{csch}^{-1} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1 + u^2}}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C$$

EJEMPLO 6 Más sobre la tractriz

Para la tractriz del ejemplo 5, mostrar que el bote apunta siempre hacia la persona que tira de él.

Solución En un punto (x, y) de la tractriz, la pendiente de la gráfica marca la dirección del bote, como se muestra en la figura 5.42.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left[20 \operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{20} - \sqrt{20^2 - x^2}\right]\\
&= -20\left(\frac{1}{20}\right)\left[\frac{1}{(x/20)\sqrt{1-(x/20)^2}}\right] - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-2x}{\sqrt{20^2 - x^2}}\right)\\
&= \frac{-20^2}{x\sqrt{20^2 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{20^2 - x^2}}\\
&= -\frac{\sqrt{20^2 - x^2}}{x}
\end{aligned}$$

Sin embargo, en la figura 5.42 se puede ver que la pendiente del segmento de recta que une el punto $(0, y_1)$ con el punto (x, y) es también

$$m = -\frac{\sqrt{20^2 - x^2}}{x}.$$

Así pues, el bote apunta hacia la persona en todo momento. (Por esta razón se llama *curva de persecución*.)

EJEMPLO 7 Integración usando funciones hiperbólicas inversas

Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9x^2}}$.

Solución Sea $a = 2$ y $u = 3x$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{4-9x^2}} &= \int \frac{3\,dx}{(3x)\sqrt{4-9x^2}} && \int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}}\\
&= -\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{4-9x^2}}{|3x|} + C && -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{|u|} + C
\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Integración usando funciones hiperbólicas inversas

Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 4x^2}$.

Solución Sea $a = \sqrt{5}$ y $u = 2x$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{5-4x^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{(\sqrt{5})^2 - (2x)^2} && \int \frac{du}{a^2-u^2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2x}{\sqrt{5}-2x}\right|\right) + C && \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C\\
&= \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2x}{\sqrt{5}-2x}\right| + C
\end{aligned}$$

5.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, evaluar la función. Si el valor no es un número racional, dar la respuesta con tres decimales.

1. *a*) $\operatorname{senh} 3$ *b*) $\tanh(-2)$

2. *a*) $\cosh 0$ *b*) $\operatorname{sech} 1$

3. *a*) $\operatorname{csch}(\ln 2)$ *b*) $\coth(\ln 5)$

4. *a*) $\operatorname{senh}^{-1} 0$ *b*) $\tanh^{-1} 0$

5. *a*) $\cosh^{-1} 2$ *b*) $\operatorname{sech}^{-1} \frac{2}{3}$

6. *a*) $\operatorname{csch}^{-1} 2$ *b*) $\coth^{-1} 3$

En los ejercicios 7 a 16, verificar la identidad.

7. $e^x = \operatorname{senh} x + \cosh x$

8. $e^{2x} = \operatorname{senh} 2x + \cosh 2x$

9. $\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$

10. $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

11. $\cosh^2 x = \dfrac{1 + \cosh 2x}{2}$

12. $\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{-1 + \cosh 2x}{2}$

13. $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

14. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

15. $\operatorname{senh} 3x = 3 \operatorname{senh} x + 4 \operatorname{senh}^3 x$

16. $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \dfrac{x + y}{2} \cosh \dfrac{x - y}{2}$

En los ejercicios 17 y 18, usar el valor de la función hiperbólica dada para hallar los valores de las otras funciones hiperbólicas en *x*.

17. $\operatorname{senh} x = \dfrac{3}{2}$

18. $\tanh x = \dfrac{1}{2}$

En los ejercicios 19 a 30, encontrar la derivada de la función.

19. $f(x) = \operatorname{senh} 3x$

20. $f(x) = \cosh(x - 2)$

21. $y = \operatorname{sech}(5x^2)$

22. $y = \tanh(3x^2 - 1)$

23. $f(x) = \ln(\operatorname{senh} x)$

24. $g(x) = \ln(\cosh x)$

25. $y = \ln\left(\tanh \dfrac{x}{2}\right)$

26. $y = x \cosh x - \operatorname{senh} x$

27. $h(x) = \dfrac{1}{4} \operatorname{senh} 2x - \dfrac{x}{2}$

28. $h(t) = t - \coth t$

29. $f(t) = \arctan(\operatorname{senh} t)$

30. $g(x) = \operatorname{sech}^2 3x$

En los ejercicios 31 a 34, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

31. $y = \operatorname{senh}(1 - x^2),\ (1, 0)$

32. $y = x^{\cosh x},\ (1, 1)$

33. $y = (\cosh x - \operatorname{senh} x)^2,\ (0, 1)$

34. $y = e^{\operatorname{senh} x},\ (0, 1)$

En los ejercicios 35 a 38, hallar los extremos relativos de la función. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

35. $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x - \cos x \cosh x, \quad -4 \le x \le 4$

36. $f(x) = x \operatorname{senh}(x - 1) - \cosh(x - 1)$

37. $g(x) = x \operatorname{sech} x$

38. $h(x) = 2 \tanh x - x$

En los ejercicios 39 y 40, demostrar que la función satisface la ecuación diferencial.

	Función	*Ecuación diferencial*
39.	$y = a \operatorname{senh} x$	$y''' - y' = 0$
40.	$y = a \cosh x$	$y'' - y = 0$

CAS *Aproximaciones lineal y cuadrática* **En los ejercicios 41 y 42, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la aproximación lineal. $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ y la aproximación cuadrática $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$ de la función *f* en $x = a$. Usar una herramienta de graficación para representar la función y las aproximaciones lineal y cuadrática.**

41. $f(x) = \tanh x, \quad a = 0$

42. $f(x) = \cosh x, \quad a = 0$

Catenarias **En los ejercicios 43 y 44, se proporciona un modelo de cables de alta tensión suspendidos entre dos torres. *a*) Representar gráficamente el modelo, *b*) calcular la altura del cable en los puntos de sujeción y en el punto medio entre las torres y *c*) encontrar la pendiente del modelo en el punto donde el cable está sujeto a la torre de la derecha.**

43. $y = 10 + 15 \cosh \dfrac{x}{15}, \quad -15 \le x \le 15$

44. $y = 18 + 25 \cosh \dfrac{x}{25}, \quad -25 \le x \le 25$

En los ejercicios 45 a 58, hallar la integral.

45. $\displaystyle\int \cosh 2x \, dx$

46. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(-x) \, dx$

47. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(1 - 2x) \, dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

49. $\displaystyle\int \cosh^2(x - 1) \operatorname{senh}(x - 1) \, dx$

50. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh} x}{1 + \operatorname{senh}^2 x} \, dx$

51. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} \, dx$

52. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(2x - 1) \, dx$

53. $\displaystyle\int x \operatorname{csch}^2 \frac{x^2}{2} \, dx$

54. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^3 x \tanh x \, dx$

55. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{csch}(1/x) \coth(1/x)}{x^2} \, dx$

56. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\sqrt{9 - \operatorname{senh}^2 x}} \, dx$

57. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4 + 1} \, dx$

58. $\displaystyle\int \frac{2}{x\sqrt{1 + 4x^2}} \, dx$

En los ejercicios 59 a 64, evaluar la integral.

59. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \tanh x \, dx$

60. $\displaystyle\int_0^1 \cosh^2 x \, dx$

61. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{25 - x^2} \, dx$

62. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} \, dx$

63. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/4} \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} \, dx$

64. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} 2e^{-x} \cosh x \, dx$

En los ejercicios 65 a 74, calcular la derivada de la función.

65. $y = \cosh^{-1}(3x)$

66. $y = \tanh^{-1}\dfrac{x}{2}$

67. $y = \tanh^{-1}\sqrt{x}$

68. $f(x) = \coth^{-1}(x^2)$

69. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$

70. $y = \tanh^{-1}(\operatorname{sen} 2x)$

71. $y = (\operatorname{csch}^{-1} x)^2$

72. $y = \operatorname{sech}^{-1}(\cos 2x), \quad 0 < x < \pi/4$

73. $y = 2x \operatorname{senh}^{-1}(2x) - \sqrt{1 + 4x^2}$

74. $y = x \tanh^{-1} x + \ln\sqrt{1 - x^2}$

Desarrollo de conceptos

75. Discutir en qué son similares las funciones hiperbólicas y las funciones trigonométricas.

76. Dibujar la gráfica de cada una de las funciones hiperbólicas. Después identificar el dominio y el recorrido o rango de cada función.

77. ¿Cuál de las fórmulas de derivadas hiperbólicas difiere de sus contrapartes trigonométricas por un signo menos?

Para discusión

78. ¿Qué función hiperbólica toma sólo valores positivos? ¿Qué funciones hiperbólicas se incrementan en sus dominios?

Límites **En los ejercicios 79 a 86, encontrar los límites.**

79. $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{senh} x$

80. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{senh} x$

81. $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh x$

82. $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x$

83. $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sech} x$

84. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{csch} x$

85. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x}{x}$

86. $\lim\limits_{x\to 0^-} \coth x$

En los ejercicios 87 a 96, calcular la integral indefinida usando las fórmulas del teorema 5.20.

87. $\displaystyle\int \frac{1}{3 - 9x^2}\,dx$

88. $\displaystyle\int \frac{1}{2x\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx$

89. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}}\,dx$

90. $\displaystyle\int \frac{x}{9 - x^4}\,dx$

91. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1 + x}}\,dx$

92. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + x^3}}\,dx$

93. $\displaystyle\int \frac{-1}{4x - x^2}\,dx$

94. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 8}}$

95. $\displaystyle\int \frac{1}{1 - 4x - 2x^2}\,dx$

96. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{2x^2 + 4x + 8}}$

En los ejercicios 97 a 100, evaluar la integral usando las fórmulas del teorema 5.20.

97. $\displaystyle\int_3^7 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$

98. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{4 + x^2}}\,dx$

99. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{16 - 9x^2}\,dx$

100. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{25x^2 + 1}}\,dx$

En los ejercicios 101 a 104, resolver la ecuación diferencial.

101. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{80 + 8x - 16x^2}}$

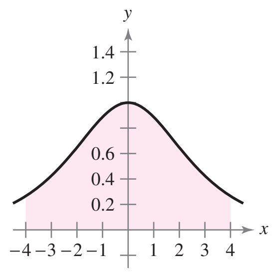
102. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(x - 1)\sqrt{-4x^2 + 8x - 1}}$

103. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 - 21x}{5 + 4x - x^2}$

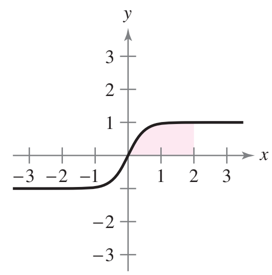
104. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - 2x}{4x - x^2}$

Área **En los ejercicios 105 a 108, encontrar el área de la región.**

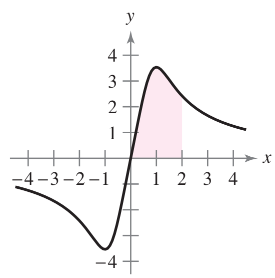
105. $y = \operatorname{sech}\dfrac{x}{2}$



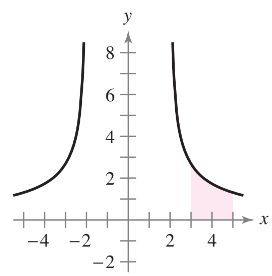
106. $y = \tanh 2x$



107. $y = \dfrac{5x}{\sqrt{x^4 + 1}}$



108. $y = \dfrac{6}{\sqrt{x^2 - 4}}$



En los ejercicios 109 y 110, evaluar la integral en términos de *a*) logaritmos naturales y *b*) funciones hiperbólicas inversas.

109. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

110. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2}$

111. ***Reacciones químicas*** Las sustancias químicas A y B se combinan en razón de 3 a 1 para formar un compuesto. La cantidad x de compuesto producida hasta el instante t es proporcional a las cantidades que quedan sin transformar de A y B en la disolución. Así pues, si se mezclan 3 kilogramos de A con 2 kilogramos de B, se tiene

$$\frac{dx}{dt} = k\left(3 - \frac{3x}{4}\right)\left(2 - \frac{x}{4}\right) = \frac{3k}{16}(x^2 - 12x + 32).$$

Un kilogramo del compuesto se ha formado en 10 minutos. Calcular la cantidad formada en 20 minutos y resolver la ecuación

$$\int \frac{3k}{16}\,dt = \int \frac{dx}{x^2 - 12x + 32}.$$

112. ***Movimiento vertical*** Un objeto es arrojado desde una altura de 400 pies.

a) Expresar la velocidad del objeto en función del tiempo (despreciando la resistencia al aire sobre el objeto).

b) Utilizando el resultado del apartado *a*) encontrar la función posición.

c) Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces $dv/dt = -32 + kv^2$, donde -32 pies/s^2 es la aceleración de la gravedad y k es una constante. Mostrar que la velocidad v es la función del tiempo

$$v(t) = -\sqrt{\frac{32}{k}}\tanh\left(\sqrt{32k}\, t\right)$$

al efectuar la siguiente integración y simplificando el resultado:

$$\int \frac{dv}{(32 - kv^2)} = -\int$$

d) Usando el resultado del apartado *c*) calcular $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$ e interpretarlo.

e) Integrar la función velocidad del apartado *c*) y hallar la posición s del objeto en función de t. Usar una herramienta de graficación para representar la función posición $k = 0.01$ y la función posición del apartado *b*) en la misma pantalla. Estimar el tiempo adicional requerido para que el objeto alcance el suelo, cuando se tiene en cuenta la resistencia al aire.

f) Describir qué sucedería si se aumenta el valor de k. A continuación, comprobar la afirmación con un valor particular de k.

Tractriz **En los ejercicios 113 y 114, usar la ecuación de la tractriz** $y = a \operatorname{sech}^{-1}\dfrac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0.$

113. Encontrar dy/dx.

114. Sea L la recta tangente a la tractriz en el punto P. Si L corta al eje y en el punto Q, probar que la distancia entre P y Q es a.

115. Demostrar que $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), \ -1 < x < 1.$

116. Demostrar que $\operatorname{senh}^{-1} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$.

117. Demostrar que $\arctan(\operatorname{senh} x) = \operatorname{arcsen}(\tanh x)$.

118. Sean $x > 0$ y $b > 0$. Demostrar que $\displaystyle\int_{-b}^{b} e^{xt}\, dt = \frac{2 \operatorname{senh} bx}{x}$.

En los ejercicios 119 a 124, verificar la fórmula de derivación.

119. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1} x] = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

120. $\dfrac{d}{dx}[\cosh^{-1} x] = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

121. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{senh}^{-1} x] = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

122. $\dfrac{d}{dx}[\cosh x] = \operatorname{senh} x$

123. $\dfrac{d}{dx}[\coth x] = -\operatorname{csch}^2 x$

124. $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sech} x] = -\operatorname{sech} x \tanh x$

Preparación del examen Putnam

125. Desde el vértice $(0, c)$ de la catenaria $y = c\cosh(x/c)$, se dibuja una recta L perpendicular a la tangente de la catenaria en el punto P. Demostrar que la longitud de L intersecada por los ejes es igual a la ordenada y del punto P.

126. Aprobar o rechazar que existe al menos una recta normal a la gráfica de $y = \cosh x$ en un punto $(a, \cosh a)$ y también normal a la gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ en un punto $(c, \operatorname{senh} c)$.

[En un punto de la gráfica, una recta normal es la perpendicular a la recta tangente al punto. También, $x = (e^x + e^{-x})/2$ y $\operatorname{senh} x = (e^x - e^{-x})/2$.]

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition.

PROYECTO DE TRABAJO

Arco de San Luis

National Geographic/Getty Images

El arco de entrada a San Luis, Missouri, fue diseñada utilizando la función coseno hiperbólico. La ecuación utilizada para la construcción del arco es

$y = 693.8597 - 68.7672 \cosh 0.0100333x,$

$-299.2239 \le x \le 299.2239$

donde x y y se miden en pies. Las secciones del arco son triángulos equiláteros, y (x, y) describe la trayectoria de los centros de masas de esos triángulos. Para cada valor de x, el área del triángulo de la sección transversal es $A = 125.1406 \cosh 0.0100333x$. (*Fuente: Owner's Manual for the Gateway Arch, Saint Louis, MO, de William Thayer*)

a) ¿A qué altura sobre el suelo está el centro del triángulo más alto? (Al nivel del suelo es $y = 0$.)

b) ¿Cuál es la altura del arco? (*Sugerencia:* En un triángulo equilátero, $A = \sqrt{3}c^2$, donde c es la mitad de la base del triángulo y el centro de masa del triángulo está situado a dos tercios de la altura del triángulo.)

c) ¿Qué anchura tiene el arco en su base?

5 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, esbozar a mano la gráfica de la función. Identificar sus asíntotas.

1. $f(x) = \ln x - 3$

2. $f(x) = \ln(x + 3)$

En los ejercicios 3 y 4, usar las propiedades de los logaritmos para desarrollar la función logarítmica.

3. $\ln \sqrt[5]{\dfrac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}}$

4. $\ln[(x^2 + 1)(x - 1)]$

En los ejercicios 5 y 6, escribir la expresión como el logaritmo de una única cantidad.

5. $\ln 3 + \frac{1}{3}\ln(4 - x^2) - \ln x$

6. $3[\ln x - 2\ln(x^2 + 1)] + 2\ln 5$

En los ejercicios 7 y 8, despejar *x*.

7. $\ln\sqrt{x + 1} = 2$

8. $\ln x + \ln(x - 3) = 0$

En los ejercicios 9 a 14, hallar la derivada de la función.

9. $g(x) = \ln\sqrt{2x}$

10. $h(x) = \ln\dfrac{x(x - 1)}{x - 2}$

11. $f(x) = x\sqrt{\ln x}$

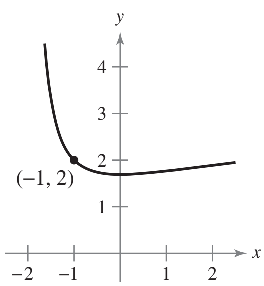
12. $f(x) = \ln[x(x^2 - 2)^{2/3}]$

13. $y = \dfrac{1}{b^2}[a + bx - a\ln(a + bx)]$

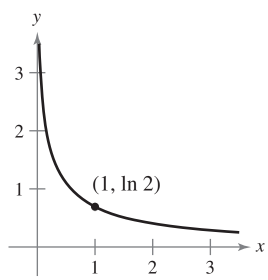
14. $y = -\dfrac{1}{ax} + \dfrac{b}{a^2}\ln\dfrac{a + bx}{x}$

En los ejercicios 15 y 16, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

15. $y = \ln(2 + x) + \dfrac{2}{2 + x}$



16. $y = \ln\dfrac{1 + x}{x}$



En los ejercicios 17 a 24, hallar o evaluar la integral.

17. $\displaystyle\int \frac{1}{7x - 2}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 1}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$

21. $\displaystyle\int_1^4 \frac{2x + 1}{2x}\,dx$

22. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

23. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sec\theta\,d\theta$

24. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx$

En los ejercicios 25 a 30, *a*) hallar la inversa de *f*, *b*) usar una herramienta de graficación para representar *f* y f^{-1} en una misma pantalla, *c*) comprobar que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ y *d*) establecer los dominios y rangos de *f* y f^{-1}.

25. $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$

26. $f(x) = 5x - 7$

27. $f(x) = \sqrt{x + 1}$

28. $f(x) = x^3 + 2$

29. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

30. $f(x) = x^2 - 5, \quad x \geq 0$

En los ejercicios 31 a 34, verificar que *f* tiene una inversa. Entonces usar la función *f* del número real dado *a* para encontrar $(f^{-1})'(a)$. (*Sugerencia:* Usar el teorema 5.9.)

31. $f(x) = x^3 + 2, \quad a = -1$

32. $f(x) = x\sqrt{x - 3}, \quad a = 4$

33. $f(x) = \tan x, \quad -\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}, \quad a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

34. $f(x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad a = 0$

En los ejercicios 35 y 36, *a*) hallar la función inversa de *f*, *b*) usar una herramienta de graficación para representar *f* y f^{-1} en una misma pantalla, *c*) comprobar que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ y *d*) establecer los dominios y rangos de *f* y f^{-1}.

35. $f(x) = \ln\sqrt{x}$

36. $f(x) = e^{1-x}$

En los ejercicios 37 y 38, dibujar sin ayuda de una herramienta de graficación la gráfica de la función.

37. $y = e^{-x/2}$

38. $y = e^{-x^2}$

En los ejercicios 39 a 44, encontrar la derivada de la función.

39. $g(t) = t^2e^t$

40. $g(x) = \ln\dfrac{e^x}{1 + e^x}$

41. $y = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$

42. $h(z) = e^{-z^2/2}$

43. $g(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$

44. $y = 3e^{-3/t}$

En los ejercicios 45 y 46, encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

45. $f(x) = \ln(e^{-x^2}), \quad (2, -4)$

46. $f(\theta) = \dfrac{1}{2}e^{\operatorname{sen} 2\theta}, \quad \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

En los ejercicios 47 y 48, hallar *dy*/*dx* por derivación implícita.

47. $y\ln x + y^2 = 0$

48. $\cos x^2 = xe^y$

En los ejercicios 49 a 56, encontrar o evaluar la integral.

49. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-3x^2}\,dx$

50. $\displaystyle\int_{1/2}^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{e^{4x} - e^{2x} + 1}{e^x}\,dx$

52. $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\,dx$

53. $\int xe^{1-x^2}\,dx$

54. $\int x^2 e^{x^3+1}\,dx$

55. $\int_1^3 \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx$

56. $\int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}\,dx$

57. Demostrar que $y = e^x(a \cos 3x + b \operatorname{sen} 3x)$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 10y = 0$.

58. ***Depreciación*** El valor V de un artículo después de t años es comparado por $V = 9\,000e^{-0.6t}$, $0 \le t \le 5$.

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función.

b) Encontrar la razón de cambio de V respecto de t cuando $t = 1$ y $t = 4$.

c) Usar una herramienta de graficación para representar las líneas tangentes a la función cuando $t = 1$ y $t = 4$.

En los ejercicios 59 y 60, calcular el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones.

59. $y = xe^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$

60. $y = 2e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

En los ejercicios 61 a 64, dibujar a mano la gráfica de la función.

61. $y = 3^{x/2}$

62. $y = 6(2^{-x^2})$

63. $y = \log_2(x - 1)$

64. $y = \log_4 x^2$

En los ejercicios 65 a 70, encontrar la derivada de la función.

65. $f(x) = 3^{x-1}$

66. $f(x) = (4e)^x$

67. $y = x^{2x+1}$

68. $y = x(4^{-x})$

69. $g(x) = \log_3 \sqrt{1 - x}$

70. $h(x) = \log_5 \frac{x}{x - 1}$

En los ejercicios 71 y 72, encontrar la integral indefinida.

71. $\int (x + 1)5^{(x+1)^2}\,dx$

72. $\int \frac{2^{-1/t}}{t^2}\,dt$

73. ***Ritmo o velocidad de ascenso*** El tiempo t (en minutos) que tarda un avión pequeño en subir a una altitud de h pies es

$$t = 50 \log_{10} \frac{18\,000}{18\,000 - h}$$

donde 18 000 pies es el tope de altitud alcanzable por el avión.

a) Determinar el dominio de la función apropiada al contexto del problema.

b) Usar una herramienta de graficación para la función tiempo e identificar las asíntotas.

c) Encontrar el instante en el que la altitud crece a mayor ritmo o velocidad.

74. ***Interés compuesto***

a) ¿Qué capital hay que invertir continuamente a 5% de interés compuesto para que, al cabo de 15 años, el balance final sea $10 000?

b) Un depósito a una tasa de r% de interés compuesto continuo duplica su valor en 10 años. Calcular r.

En los ejercicios 75 y 76, representar la gráfica de la función.

75. $f(x) = 2 \arctan(x + 3)$

76. $h(x) = -3 \operatorname{arcsen} 2x$

En los ejercicios 77 y 78, evaluar la expresión sin usar una calculadora. (*Sugerencia:* Dibujar un triángulo rectángulo.)

77. *a*) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2})$
b) $\cos(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2})$

78. *a*) $\tan(\operatorname{arccot} 2)$
b) $\cos(\operatorname{arcsec} \sqrt{5})$

En los ejercicios 79 a 84, encontrar la derivada de la función.

79. $y = \tan(\operatorname{arcsen} x)$

80. $y = \arctan(x^2 - 1)$

81. $y = x \operatorname{arcsec} x$

82. $y = \frac{1}{2} \arctan e^{2x}$

83. $y = x(\operatorname{arcsen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1 - x^2} \operatorname{arcsen} x$

84. $y = \sqrt{x^2 - 4} - 2 \operatorname{arcsec} \frac{x}{2}, \quad 2 < x < 4$

En los ejercicios 85 a 90, encontrar la integral indefinida.

85. $\int \frac{1}{e^{2x} + e^{-2x}}\,dx$

86. $\int \frac{1}{3 + 25x^2}\,dx$

87. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

88. $\int \frac{1}{16 + x^2}\,dx$

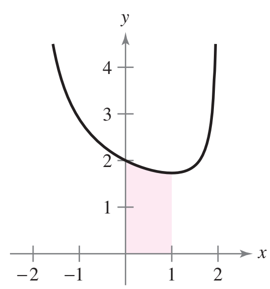
89. $\int \frac{\arctan(x/2)}{4 + x^2}\,dx$

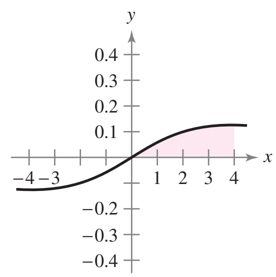
90. $\int \frac{\operatorname{arcsen} 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx$

En los ejercicios 91 y 92, encontrar el área de la región.

91. $y = \frac{4 - x}{\sqrt{4 - x^2}}$

92. $y = \frac{x}{16 + x^2}$





93. ***Movimiento armónico*** Un peso de masa m está sujeto al extremo de un resorte que oscila con movimiento armónico simple. Según la ley de Hooke, se puede determinar que

$$\int \frac{dy}{\sqrt{A^2 - y^2}} = \int \sqrt{\frac{k}{m}}\,dt$$

donde A es el desplazamiento máximo, t el tiempo y k una constante. Expresar y en función de t, teniendo que $y = 0$ cuando $t = 0$.

En los ejercicios 94 y 95, encontrar la derivada de la función.

94. $y = 2x - \cosh \sqrt{x}$

95. $y = x \tanh^{-1} 2x$

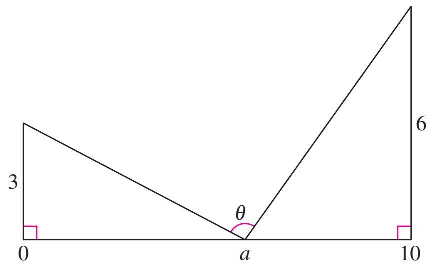
En los ejercicios 96 y 97, encontrar la integral indefinida.

96. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 1}}\,dx$

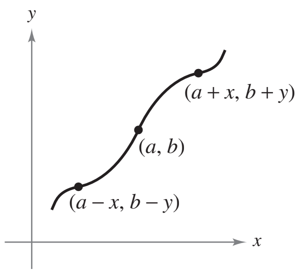
97. $\int x^2 \operatorname{sech}^2 x^3\,dx$

SP Solución de problemas

1. Encontrar el valor de a que maximiza el ángulo θ mostrado en la figura. ¿Cuál es el valor aproximado de este ángulo?



2. Recordar que la gráfica de una función $y = f(x)$ es simétrica respecto al origen si (x, y) es un punto de la gráfica, $(-x, -y)$ lo es también. La gráfica de la función $y = f(x)$ es **simétrica respecto al punto (a, b)** siempre que $(a - x, b - y)$ es un punto de la gráfica, $(a + x, b + y)$ lo es también, como se muestra en la figura.



a) Trazar la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Escribir un párrafo breve explicando cómo la simetría de la gráfica respecto al punto $(0, \pi)$ permite concluir que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 0.$$

b) Trazar la gráfica de $y = \operatorname{sen} x + 2$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Usar la simetría de la gráfica respecto al punto $(\pi, 2)$ para evaluar la integral

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} x + 2)\, dx.$$

c) Trazar la gráfica de $y = \arccos x$ en el intervalo $[-1, 1]$. Usar la simetría de la gráfica para evaluar la integral

$$\int_{-1}^{1} \arccos x\, dx$$

d) Evaluar la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}\, dx.$

3. *a*) Usar una herramienta de graficación para representar $f(x) = \dfrac{\ln(x + 1)}{x}$ sobre el intervalo $[-1, 1]$.

b) Usar la gráfica para estimar $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$.

c) Usar la definición de derivada para justificar la respuesta del apartado *b*).

4. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$.

a) Determinar el dominio de la función f.

b) Encontrar dos valores de x que satisfagan $f(x) = 1$.

c) Encontrar dos valores de x que satisfagan $f(x) = -1$.

d) ¿Cuál es el recorrido o rango de la función f?

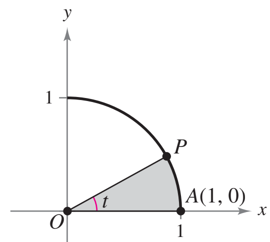
e) Calcular $f'(x)$ y usar el cálculo para encontrar el valor máximo de f en el intervalo $[1, 10]$.

f) Usar una herramienta de graficación para representar f en la pantalla $[0, 5] \times [-2, 2]$ y estimar $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$, si es que existe.

g) Determinar $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$ analíticamente, si es que existe.

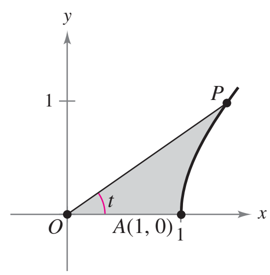
5. Graficar la función exponencial $y = a^x$ para $a = 0.5$, 1.2 y 2.0. ¿Cuál de estas curvas interseca la recta $y = x$? Determinar todos los valores positivos de a para los cuales la curva $y = a^x$ hace intersección con la recta $y = x$.

6. *a*) Sea $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ un punto sobre el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante (ver la figura). Mostrar que t es igual a dos veces el área del sector circular sombreado AOP.



b) Sea $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ un punto sobre la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ en el primer cuadrante (ver la figura). Mostrar que t es igual a dos veces el área de la región sombreada AOP. Empezar por mostrar que el área AOP está dada por la fórmula

$$A(t) = \frac{1}{2} \cosh t \operatorname{senh} t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1}\, dx.$$

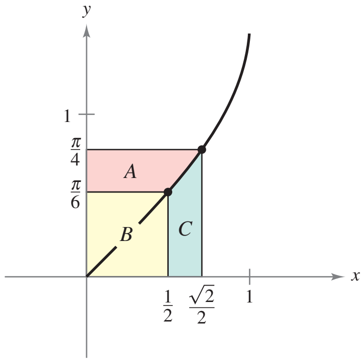


7. Aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = \ln x$ sobre el intervalo cerrado $[1, e]$. Encontrar el valor de c en el intervalo abierto $(1, e)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1}.$$

8. Mostrar que $f(x) = \dfrac{\ln x^n}{x}$ es una función decreciente para $x > e$ y $n > 0$.

9. Considerar las tres regiones A, B y C determinadas por la gráfica de $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, como se muestra en la figura.



a) Calcular las áreas de las regiones A y B.

b) Usar la respuesta del apartado *a*) para evaluar la integral

$$\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \operatorname{arcsen} x \, dx.$$

c) Usar la respuesta del apartado *a*) para evaluar la integral

$$\int_{1}^{3} \ln x \, dx.$$

d) Usar la respuesta del apartado *a*) para evaluar la integral

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx.$$

10. Sea L la recta tangente de la gráfica de la función $y = \ln x$ en el punto (a, b). Demostrar que la distancia entre b y c siempre es igual a uno.

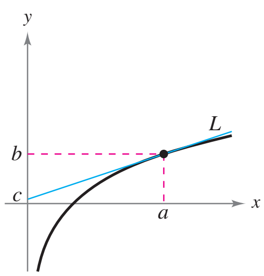


Figura para 10

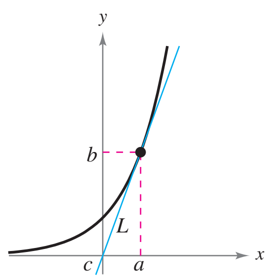


Figura para 11

11. Sea L la línea tangente de la gráfica de la función $y = e^x$ en el punto (a, b). Demostrar que la distancia entre a y c siempre es igual a uno.

12. La **función gudermanniana** de x es $\operatorname{gd}(x) = \arctan(\operatorname{senh} x)$

a) Graficar gd usando una herramienta de graficación.

b) Mostrar que gd es una función impar.

c) Mostrar que gd es monótona y, por tanto, tiene una inversa.

d) Encontrar el punto de inflexión de gd.

e) Verificar que $\operatorname{gd}(x) = \operatorname{arcsen}(\tanh x)$.

f) Verificar que $\operatorname{gd}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\cosh t}$.

13. Usar integración por sustitución para encontrar el área bajo la curva

$$y = \frac{1}{\sqrt{x} + x}$$

entre $x = 1$ y $x = 4$.

14. Usar la integración por sustitución para encontrar el área bajo la curva

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x}$$

entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.

15. *a*) Usar una herramienta de graficación para comparar la gráfica de la función $y = e^x$ con las gráficas de cada una de las funciones dadas.

i) $y_1 = 1 + \dfrac{x}{1!}$

ii) $y_2 = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!}$

iii) $y_3 = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$

b) Identificar el patrón de las funciones polinomiales sucesivas en el apartado *a*), extender el patrón un término más y comparar la gráfica de la función polinomial resultante con la gráfica de $y = e^x$.

c) ¿Qué implica este patrón?

16. Una hipoteca de una casa por \$120 000 por 35 años a un $9\frac{1}{2}\%$ tiene un pago mensual de \$985.93. Parte de este pago mensual va al interés sobre el balance no pagado y el resto del pago se utiliza para reducir el capital principal. La cantidad que va para el interés es

$$u = M - \left(M - \frac{Pr}{12}\right)\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$$

y la cantidad que va directamente hacia la reducción del capital principal es

$$v = \left(M - \frac{Pr}{12}\right)\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}.$$

En esas fórmulas P es la cantidad de la hipoteca, r la tasa de interés, M el pago mensual y t el tiempo en años.

a) Usar una herramienta de graficación para representar cada función en la misma pantalla. (La pantalla debe mostrar los 35 años de pagos de la hipoteca.)

b) En los primeros años, ¿a qué corresponde la mayor parte de la mensualidad? Estimar el momento en que se dedican cantidades iguales a los intereses y a la amortización.

c) Usar las gráficas del apartado *a*) para formular una conjetura acerca de la relación entre las pendientes de las rectas tangentes de las dos curvas para un valor específico de t. Proporcionar un argumento analítico para verificar la conjetura. Encontrar $u'(15)$ y $v'(15)$.

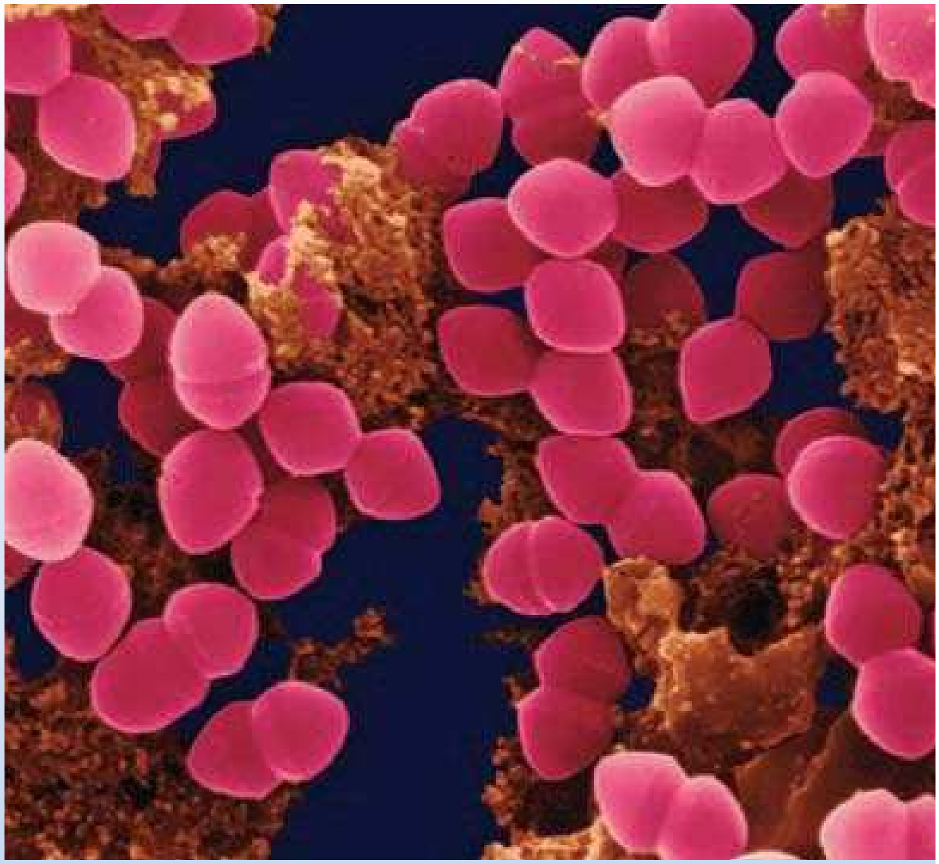
d) Repetir los apartados *a*) y *b*) para un plazo de 20 años ($M = \$1\,118.56$). ¿Qué se puede concluir?

6 Ecuaciones diferenciales

En este capítulo se estudiará una de las más importantes aplicaciones del cálculo: *las ecuaciones diferenciales*. El lector aprenderá varios métodos para resolver diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, como las homogéneas, las lineales de primer orden y las de Bernoulli. Posteriormente aplicará esas reglas para resolver ecuaciones diferenciales en problemas de aplicación.

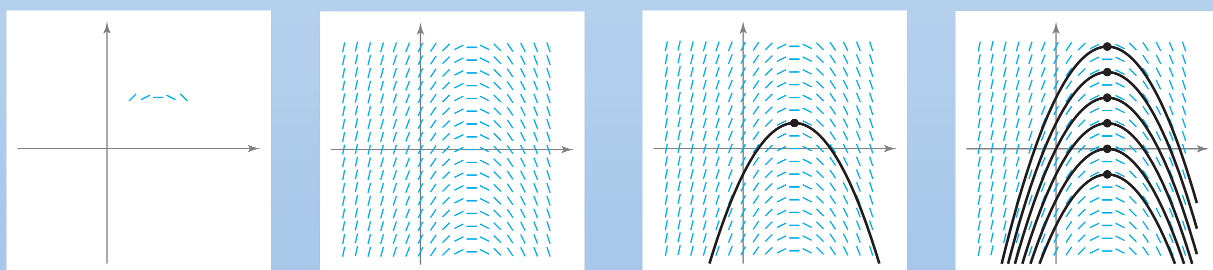
En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo generar un campo de pendientes de una ecuación diferencial y encontrar una solución particular. (**6.1**)
- Cómo usar una función exponencial para modelos de crecimiento y decrecimiento. (**6.2**)
- Cómo usar el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales. (**6.3**)
- Cómo resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y la ecuación diferencial de Bernoulli. (**6.4**)



Dr. Dennis Kunkel/Getty Images

Según el tipo de bacteria, el tiempo que le toma duplicar su peso al cultivo puede variar mucho, desde varios minutos hasta varios días. ¿Cómo se usaría una ecuación diferencial para modelar la tasa de crecimiento del peso del cultivo de una bacteria? (Ver la sección 6.3, ejercicio 84.)



Una función $y = f(x)$ es una solución de una ecuación diferencial, si la ecuación se satisface cuando y y sus derivadas se reemplazan por $f(x)$ y sus derivadas. Una manera de resolver una ecuación diferencial es mediante los campos de pendientes, los cuales muestran la forma de todas las soluciones de una ecuación diferencial. (Ver la sección 6.1.)

6.1 Campos de pendientes y método de Euler

- **Usar condiciones iniciales para encontrar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales.**
- **Usar campos de pendientes para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales.**
- **Usar el método de Euler para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales.**

Soluciones general y particular

En este texto se aprenderá que los fenómenos físicos se pueden describir por medio de ecuaciones diferenciales. Hay que recordar que una **ecuación diferencial** en x y y es una ecuación que incluye x, y y derivadas de y. En la sección 6.2 se observará que los problemas acerca de la descomposición radiactiva, el crecimiento poblacional y las leyes de enfriamiento de Newton se pueden formular en términos de ecuaciones diferenciales.

Una función $y = f(x)$ se denomina **solución** de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface cuando y y sus derivadas se reemplazan por $f(x)$ y sus derivadas. Por ejemplo, la derivación y sustitución demostrarán que $y = e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = 0$. Esto demuestra que cada solución de esta ecuación diferencial es de la forma

$$y = Ce^{-2x} \qquad \text{Solución general de } y' + 2y = 0.$$

donde C es cualquier número real. La solución se llama **solución general**. Algunas ecuaciones diferenciales tienen **soluciones singulares** que no se pueden escribir como casos especiales de la solución general. Sin embargo, tales soluciones no se consideran en este texto. El **orden** de una ecuación diferencial se determina por la derivada de mayor orden en la ecuación. Como ejemplo, $y' = 4y$ es una ecuación diferencial de primer orden. Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se discutirán en la sección 6.4.

En la sección 4.1, ejemplo 8, se observó que la ecuación diferencial de segundo orden $s''(t) = -32$ tiene la solución general

$$s(t) = -16t^2 + C_1t + C_2 \qquad \text{Solución general de } s''(t) = -32.$$

que contiene dos constantes arbitrarias. Se puede mostrar que una ecuación diferencial de orden n tiene una solución general con n constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1 Verificación de soluciones

Determinar si la función es una solución de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$.

a) $y = \operatorname{sen} x$ ***b)*** $y = 4e^{-x}$ ***c)*** $y = Ce^x$

Solución

a) Dado que $y = \operatorname{sen} x$, $y' = \cos x$, y $y'' = -\operatorname{sen} x$, se deduce que

$$y'' - y = -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = -2 \operatorname{sen} x \neq 0.$$

Así, $y = \operatorname{sen} x$ *no* es una solución.

b) Dado que $y = 4e^{-x}$, $y' = -4e^{-x}$, y $y'' = 4e^{-x}$, se deduce que

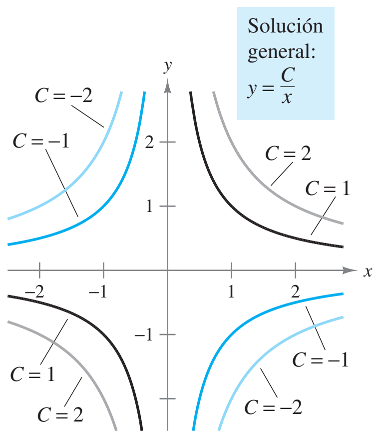
$$y'' - y = 4e^{-x} - 4e^{-x} = 0.$$

Así, $y = 4e^{-x}$ es una solución.

c) Dado que $y = Ce^x$, $y' = Ce^x$, y $y'' = Ce^x$, se deduce que

$$y'' - y = Ce^x - Ce^x = 0.$$

Así, $y = Ce^x$ es una solución para cualquier valor de C.



Curvas solución para $xy' + y = 0$
Figura 6.1

Geométricamente, la solución general de una ecuación diferencial de primer orden representa una familia de curvas conocidas como **curvas solución**, una para cada valor asignado a la constante arbitraria. Por ejemplo, se puede verificar que cada función de la forma

$$y = \frac{C}{x} \qquad \text{Solución general de } xy' + y = 0.$$

es una solución de la ecuación diferencial $xy' + y = 0$. La figura 6.1 muestra cuatro de las curvas solución correspondientes a diferentes valores de C.

Como se discutió en la sección 4.1, las **soluciones particulares** de la ecuación diferencial se obtienen de las **condiciones iniciales** que da el valor de la variable dependiente o una de sus derivadas para un valor particular de la variable independiente. El término "condición inicial" deriva del hecho de que, con frecuencia en problemas que involucran tiempo, el valor de la variable dependiente o una de sus derivadas es conocida en el tiempo *inicial* $t = 0$. Como ejemplo, la ecuación diferencial de segundo orden $s''(t) = -32$ tiene la solución general

$$s(t) = -16t^2 + C_1t + C_2 \qquad \text{Solución general de } s''(t) = -32.$$

podrá tener las siguientes condiciones iniciales.

$$s(0) = 80, \qquad s'(0) = 64 \qquad \text{Condiciones iniciales.}$$

En este caso, las condiciones iniciales llevan a la solución particular

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80. \qquad \text{Solución particular.}$$

EJEMPLO 2 Encontrar una solución particular

Dada la ecuación diferencial $xy' - 3y = 0$, verificar que $y = Cx^3$ es una solución, y encontrar la solución particular determinada por la condición inicial $y = 2$ cuando $x = -3$.

Solución Se sabe que $y = Cx^3$ es una solución dado que $y' = 3Cx^2$ y

$$\begin{aligned} xy' - 3y &= x(3Cx^2) - 3(Cx^3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, la condición inicial $y = 2$ cuando $x = -3$ lleva a

$$y = Cx^3 \qquad \text{Solución general.}$$
$$2 = C(-3)^3 \qquad \text{Sustituye la condición inicial.}$$
$$-\frac{2}{27} = C \qquad \text{Solución para } C.$$

y se puede concluir que la solución particular es

$$y = -\frac{2x^3}{27}. \qquad \text{Solución particular.}$$

Verificar esta solución al sustituir y y y' en la ecuación diferencial original.

NOTA Para determinar una solución particular, el número de condiciones iniciales debe corresponder al número de constantes en la solución general.

Campos de pendientes

Resolver una ecuación diferencial analíticamente puede ser difícil o casi imposible. Sin embargo, existe una aproximación gráfica que se puede usar para aprender mucho acerca de la solución de una ecuación diferencial. Considerar una ecuación diferencial de la forma

$$y' = F(x, y) \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

donde $F(x, y)$ es alguna expresión en x y y. En cada punto (x, y) en el plano xy donde F está definida la ecuación diferencial determina la pendiente $y' = F(x, y)$ de la solución en ese punto. Si se dibuja una recta corta con pendiente $F(x, y)$ en los puntos seleccionados (x, y) en el dominio de F, entonces esos segmentos forman un **campo de pendientes** o un *campo de direcciones* para la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$. Cada segmento tiene la misma pendiente que la curva de solución a través de ese punto. Un campo de pendientes muestra la forma general de todas las soluciones y puede ser útil en la obtención de una perspectiva visual de las direcciones de las soluciones de una ecuación diferencial.

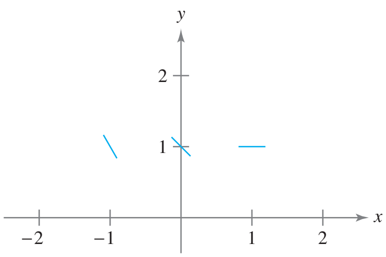


Figura 6.2

EJEMPLO 3 Representación gráfica de un campo de pendientes

Representar un campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = x - y$ para los puntos $(-1, 1)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$.

Solución La pendiente de la curva solución en cualquier punto (x, y) es $F(x, y) = x - y$. Así, la pendiente en el punto $(-1, 1)$ es $y' = -1 - 1 = -2$, la pendiente en $(0, 1)$ es $y' = 0 - 1 = -1$, y la pendiente en $(1, 1)$ es $y' = 1 - 1 = 0$. Dibujar segmentos cortos en los tres puntos con sus respectivas pendientes, como se muestra en la figura 6.2.

EJEMPLO 4 Identificar campos de pendientes para ecuaciones diferenciales

Asociar a cada campo vectorial su ecuación diferencial.

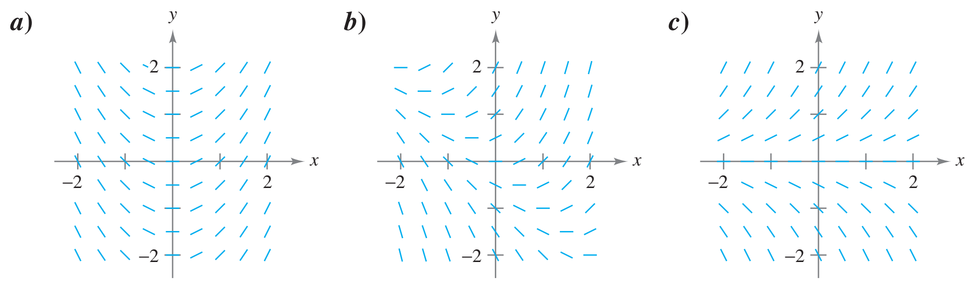


Figura 6.3

i) $y' = x + y$ *ii*) $y' = x$ *iii*) $y' = y$

Solución

a) En la figura 6.3*a* se puede observar que la pendiente de cualquier punto a lo largo del eje y es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = x$. Así, la gráfica corresponde con *ii*).

b) En la figura 6.3*b* se puede observar que la pendiente en el punto $(1, -1)$ es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = x + y$. Así, la gráfica corresponde con *i*).

c) En la figura 6.3*c* se puede observar que la pendiente de algún punto a lo largo del eje x es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = y$. Así, la gráfica corresponde con *iii*).

Una curva solución de una ecuación diferencial $y' = F(x, y)$ es simplemente una curva en el plano xy cuya recta tangente en cada punto (x, y) tiene pendiente igual a $F(x, y)$. Esto se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Trazado de una solución mediante un campo de pendientes

Trazar un campo de pendientes para la ecuación diferencial

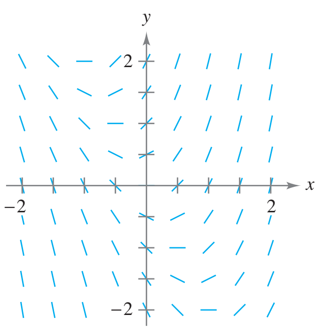
$$y' = 2x + y.$$

Usar un campo de pendientes para representar gráficamente la solución que pasa por el punto (1, 1).

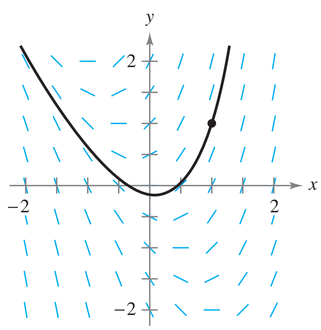
Solución Hacer una tabla que muestre las pendientes en varios puntos. La tabla siguiente es un pequeño ejemplo. Se deben calcular las pendientes de muchos puntos para obtener un campo de pendientes representativo.

x	-2	-2	-1	-1	0	0	1	1	2	2
y	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
$y' = 2x + y$	-5	-3	-3	-1	-1	1	1	3	3	5

A continuación, dibujar segmentos de rectas en los puntos con sus respectivas pendientes, como se muestra en la figura 6.4.



Campo de pendientes para $y' = 2x + y$
Figura 6.4



Solución particular para $y' = 2x + y$ que pasa a través de (1, 1)
Figura 6.5

Después de dibujar el campo de pendientes, se comienza en el punto inicial (1, 1) y se mueve a la derecha en dirección del segmento. A continuación, dibujar la curva solución tal que ésta se mueva paralela al segmento más cercano. Hacer lo mismo para la izquierda de (1, 1). La solución resultante se muestra en la figura 6.5.

Del ejemplo 5, notar que el campo de pendientes muestra que mientras x aumenta, y' lo hace hasta el infinito.

NOTA Dibujar un campo de pendientes a mano es tedioso. En la práctica, los campos de pendientes usualmente se dibujan mediante un método gráfico.

Método de Euler

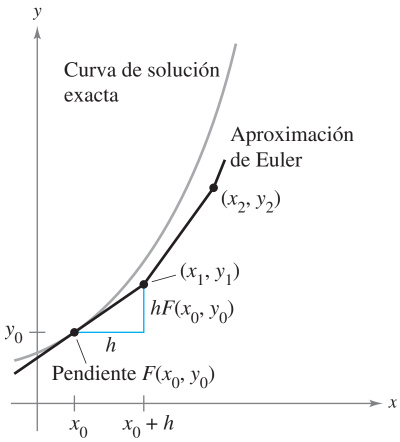


Figura 6.6

El **método de Euler** es un método numérico para aproximar la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = F(x, y)$$

que pasa a través del punto (x_0, y_0). Con esta información se sabe que la gráfica de esa solución pasa a través del punto (x_0, y_0) y tiene una pendiente de $F(x_0, y_0)$ en ese punto. Esto da un "punto inicial" para aproximar la solución.

A partir del punto inicial, se sigue en la dirección indicada por la pendiente. Mediante un pequeño paso h, se mueve a lo largo de la recta tangente hasta llegar al punto (x_1, y_1), donde

$$x_1 = x_0 + h \quad \text{y} \quad y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

como se muestra en la figura 6.6. Si se considera (x_1, y_1) como un nuevo punto inicial, se puede repetir el proceso para obtener un segundo punto (x_2, y_2). Los valores de x_i y y_i son los siguientes.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h & y_1 &= y_0 + hF(x_0, y_0) \\ x_2 &= x_1 + h & y_2 &= y_1 + hF(x_1, y_1) \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + h & y_n &= y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

NOTA Se pueden obtener mejores aproximaciones de la solución exacta si se escogen tamaños de paso cada vez más pequeños. ■

EJEMPLO 6 Aproximar una solución mediante el método de Euler

Usar el método de Euler para aproximar la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = x - y$$

que pasa a través del punto (0, 1). Usar un paso de $h = 0.1$.

Solución Mediante $h = 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $F(x, y) = x - y$, se tiene $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3, \ldots,$ y

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + (0.1)(0 - 1) = 0.9 \\ y_2 &= y_1 + hF(x_1, y_1) = 0.9 + (0.1)(0.1 - 0.9) = 0.82 \\ y_3 &= y_2 + hF(x_2, y_2) = 0.82 + (0.1)(0.2 - 0.82) = 0.758. \end{aligned}$$

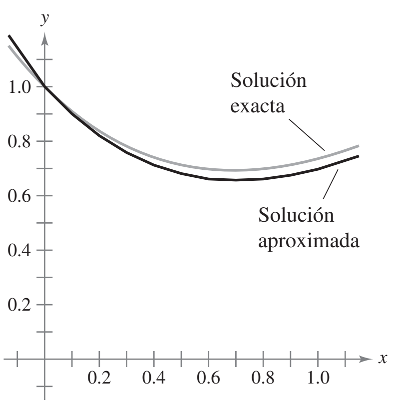


Figura 6.7

Las primeras diez aproximaciones se muestran en la tabla. Se pueden representar esos valores para obtener una gráfica de la solución aproximada, como se muestra en la figura 6.7.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	1	0.900	0.820	0.758	0.712	0.681	0.663	0.657	0.661	0.675	0.697

NOTA Para la ecuación diferencial aplicada en el ejemplo 6, se puede verificar que la solución exacta es $y = x - 1 + 2e^{-x}$. La figura 6.7 compara esta solución exacta con la solución aproximada obtenida en el ejemplo 6. ■

6.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, verificar la solución de la ecuación diferencial.

	Solución	*Ecuación diferencial*
1.	$y = Ce^{4x}$	$y' = 4y$
2.	$y = e^{-2x}$	$3y' + 5y = -e^{-2x}$
3.	$x^2 + y^2 = Cy$	$y' = 2xy/(x^2 - y^2)$
4.	$y^2 - 2\ln y = x^2$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{y^2 - 1}$
5.	$y = C_1 \operatorname{sen} x - C_2 \cos x$	$y'' + y = 0$
6.	$y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\operatorname{sen} x$	$y'' + 2y' + 2y = 0$
7.	$y = -\cos x \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert$	$y'' + y = \tan x$
8.	$y = \frac{2}{5}(e^{-4x} + e^{x})$	$y'' + 4y' = 2e^{x}$

En los ejercicios 9 a 12, verificar la solución particular de la ecuación diferencial.

	Solución	*Ecuación diferencial y condición inicial*
9.	$y = \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x$	$2y + y' = 2\operatorname{sen}(2x) - 1$ $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$
10.	$y = \frac{1}{2}x^2 - 2\cos x - 3$	$y' = x + 2\operatorname{sen} x$ $y(0) = -5$
11.	$y = 4e^{-6x^2}$	$y' = -12xy$ $y(0) = 4$
12.	$y = e^{-\cos x}$	$y' = y\operatorname{sen} x$ $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

En los ejercicios 13 a 20, determinar si la función es una solución de la ecuación diferencial $y^{(4)} - 16y = 0$.

13. $y = 3\cos x$

14. $y = 2\operatorname{sen} x$

15. $y = 3\cos 2x$

16. $y = 3\operatorname{sen} 2x$

17. $y = e^{-2x}$

18. $y = 5\ln x$

19. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\operatorname{sen} 2x + C_4\cos 2x$

20. $y = 3e^{2x} - 4\operatorname{sen} 2x$

En los ejercicios 21 a 28, determinar si la función es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 2y = x^3e^x$.

21. $y = x^2$ **22.** $y = x^3$

23. $y = x^2e^x$ **24.** $y = x^2(2 + e^x)$

25. $y = \operatorname{sen} x$ **26.** $y = \cos x$

27. $y = \ln x$ **28.** $y = x^2e^x - 5x^2$

En los ejercicios 29 a 32 se dan algunas de las curvas correspondientes a los diferentes valores de C en la solución general de la ecuación diferencial. Encontrar la solución particular que pasa a través del punto mostrado en la gráfica.

	Solución	*Ecuación diferencial*
29.	$y = Ce^{-x/2}$	$2y' + y = 0$
30.	$y(x^2 + y) = C$	$2xy + (x^2 + 2y)y' = 0$
31.	$y^2 = Cx^3$	$2xy' - 3y = 0$
32.	$2x^2 - y^2 = C$	$yy' - 2x = 0$

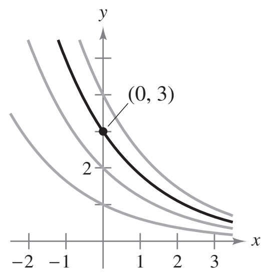


Figura para 29

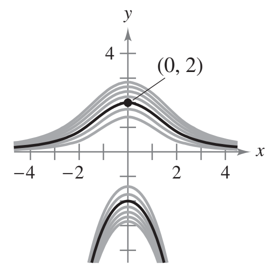


Figura para 30

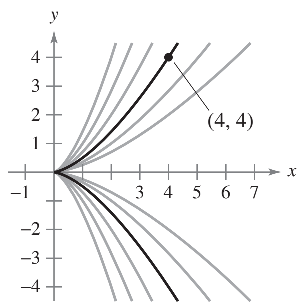


Figura para 31

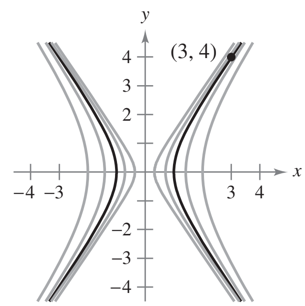


Figura para 32

En los ejercicios 33 y 34, la solución general de la ecuación diferencial está dada. Usar una herramienta de graficación para graficar las soluciones particulares para los valores dados de C.

33. $4yy' - x = 0$
$4y^2 - x^2 = C$
$C = 0, C = \pm 1, C = \pm 4$

34. $yy' + x = 0$
$x^2 + y^2 = C$
$C = 0, C = 1, C = 4$

En los ejercicios 35 a 40, verificar que la solución general satisface la ecuación diferencial. Después encontrar la solución particular que satisface la condición inicial.

35. $y = Ce^{-2x}$
$y' + 2y = 0$
$y = 3$ cuando $x = 0$

36. $3x^2 + 2y^2 = C$
$3x + 2yy' = 0$
$y = 3$ cuando $x = 1$

37. $y = C_1\operatorname{sen} 3x + C_2\cos 3x$
$y'' + 9y = 0$
$y = 2$ cuando $x = \pi/6$
$y' = 1$ cuando $x = \pi/6$

38. $y = C_1 + C_2\ln x$
$xy'' + y' = 0$
$y = 0$ cuando $x = 2$
$y' = \frac{1}{2}$ cuando $x = 2$

39. $y = C_1x + C_2x^3$
$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$
$y = 0$ cuando $x = 2$
$y' = 4$ cuando $x = 2$

40. $y = e^{2x/3}(C_1 + C_2x)$
$9y'' - 12y' + 4y = 0$
$y = 4$ cuando $x = 0$
$y = 0$ cuando $x = 3$

En los ejercicios 41 a 52, encontrar la solución general de la ecuación diferencial por integración.

41. $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2$

42. $\dfrac{dy}{dx} = 2x^3 - 3x$

43. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{1 + x^2}$

44. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{4 + e^x}$

45. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 2}{x}$

46. $\dfrac{dy}{dx} = x \cos x^2$

47. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 2x$

48. $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2 x$

49. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{x - 6}$

50. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{3 - x}$

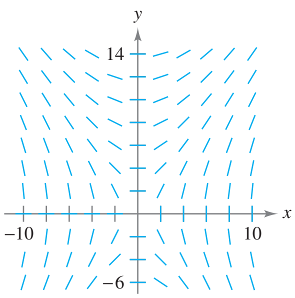
51. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{x^2}$

52. $\dfrac{dy}{dx} = 5e^{-x/2}$

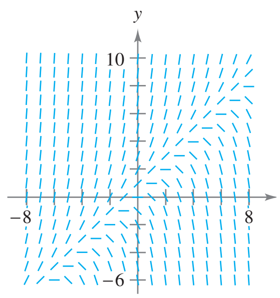
Campos de pendientes **En los ejercicios 53 a 56, se dan una ecuación diferencial y su campo de pendientes. Determinar las pendientes (si es posible) en el campo de pendientes en los puntos dados en la tabla.**

x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx						

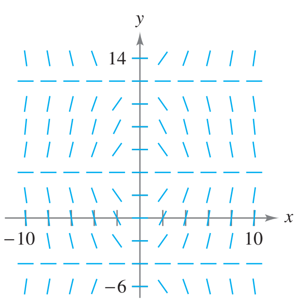
53. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y}$



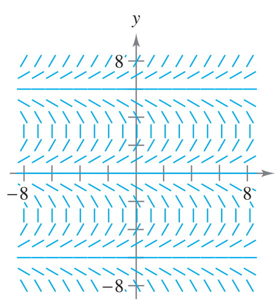
54. $\dfrac{dy}{dx} = y - x$



55. $\dfrac{dy}{dx} = x \cos \dfrac{\pi y}{8}$

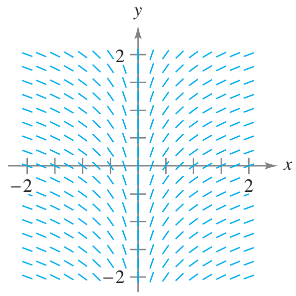


56. $\dfrac{dy}{dx} = \tan\left(\dfrac{\pi y}{6}\right)$

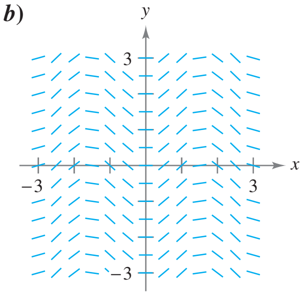


En los ejercicios 57 a 60, ubicar la ecuación diferencial con su respectivo campo de pendientes. [Los campos de pendientes se etiquetaron como *a*), *b*), *c*) y *d*).]

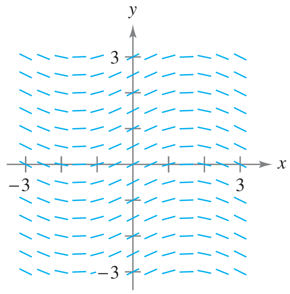
a)



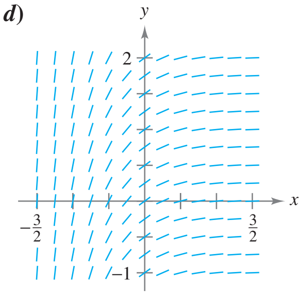
b)



c)



d)



57. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(2x)$

58. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\cos x$

59. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-2x}$

60. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 61 a 64, *a*) trazar la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial, *b*) usar el campo de pendientes para trazar la gráfica de la función que pasa a través del punto dado, y *c*) discutir la gráfica de la solución cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$. Usar una herramienta de graficación para verificar los resultados.**

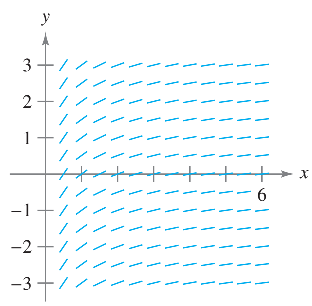
61. $y' = 3 - x, \quad (4, 2)$

62. $y' = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x, \quad (1, 1)$

63. $y' = y - 4x, \quad (2, 2)$

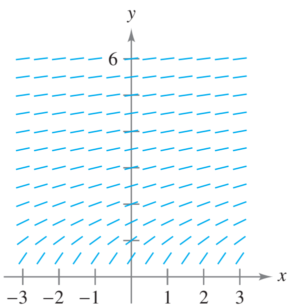
64. $y' = y + xy, \quad (0, -4)$

65. ***Campo de pendientes*** **Usar el campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = 1/x$, donde $x > 0$, para representar la gráfica de la solución que satisface cada condición inicial. Entonces realizar una conjetura acerca del comportamiento de una solución particular de $y' = 1/x$ cuando $x \to \infty$.**



a) $(1, 0)$ *b*) $(2, -1)$

66. ***Campo de pendientes*** **Usar el campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = 1/y$, donde $y > 0$, para esbozar la gráfica de la solución que satisface cada condición inicial. Entonces realizar una conjetura acerca del comportamiento de una solución particular de $y' = 1/y$ cuando $x \to \infty$.**



a) (0, 1) *b)* (1, 1)

CAS ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 67 a 72, usar un sistema algebraico por computadora para *a)* trazar la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y *b)* trazar la gráfica de la solución que satisface la condición inicial especificada.**

67. $\dfrac{dy}{dx} = 0.25y, \quad y(0) = 4$

68. $\dfrac{dy}{dx} = 4 - y, \quad y(0) = 6$

69. $\dfrac{dy}{dx} = 0.02y(10 - y), \quad y(0) = 2$

70. $\dfrac{dy}{dx} = 0.2x(2 - y), \quad y(0) = 9$

71. $\dfrac{dy}{dx} = 0.4y(3 - x), \quad y(0) = 1$

72. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}e^{-x/8} \operatorname{sen} \dfrac{\pi y}{4}, \quad y(0) = 2$

Método de Euler **En los ejercicios 73 a 78, usar el método de Euler para hacer una tabla de valores para la solución aproximada de la ecuación diferencial con un valor inicial específico. Usar n pasos de tamaño h.**

73. $y' = x + y, \quad y(0) = 2, \quad n = 10, \quad h = 0.1$

74. $y' = x + y, \quad y(0) = 2, \quad n = 20, \quad h = 0.05$

75. $y' = 3x - 2y, \quad y(0) = 3, \quad n = 10, \quad h = 0.05$

76. $y' = 0.5x(3 - y), \quad y(0) = 1, \quad n = 5, \quad h = 0.4$

77. $y' = e^{xy}, \quad y(0) = 1, \quad n = 10, \quad h = 0.1$

78. $y' = \cos x + \operatorname{sen} y, \quad y(0) = 5, \quad n = 10, \quad h = 0.1$

En los ejercicios 79 a 81, completar la tabla mediante la solución exacta de la ecuación diferencial y dos aproximaciones obtenidas mediante el método de Euler para aproximar la solución particular de la ecuación diferencial. Usar $h = 0.2$ y $h = 0.1$ y calcular cada aproximación con cuatro decimales.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y(x)$ (exacta)						
$y(x)$ ($h = 0.2$)						
$y(x)$ ($h = 0.1$)						

Tabla para 79 a 81

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*	*Solución exacta*
79.	$\dfrac{dy}{dx} = y$	(0, 3)	$y = 3e^x$
80.	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y}$	(0, 2)	$y = \sqrt{2x^2 + 4}$
81.	$\dfrac{dy}{dx} = y + \cos(x)$	(0, 0)	$y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x + e^x)$

82. Comparar los valores de las aproximaciones en los ejercicios 79 a 81 con los valores dados por la solución exacta. ¿Cómo cambia el error cuando se incrementa h?

83. ***Temperatura*** En el tiempo $t = 0$ minutos, la temperatura de un objeto es 140°F. La temperatura del objeto cambia en un ritmo o velocidad dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}(y - 72).$$

a) Usar una herramienta de graficación y el método de Euler para aproximar las soluciones de esta ecuación diferencial en $t = 1$, 2 y 3. Usar un tamaño de paso de $h = 0.1$.

b) Comparar los resultados con la solución exacta

$y = 72 + 68e^{-t/2}$.

c) Repetir los incisos *a)* y *b)* con un tamaño de paso de $h = 0.05$. Comparar los resultados.

Para discusión

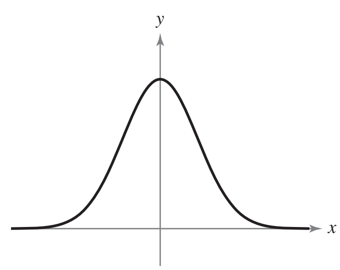
84. La gráfica muestra una solución de una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Determinar la ecuación correcta. Explicar su razonamiento.

a) $y' = xy$

b) $y' = \dfrac{4x}{y}$

c) $y' = -4xy$

d) $y' = 4 - xy$



Desarrollo de conceptos

85. Describir la diferencia entre una solución general de una ecuación diferencial y una solución particular.

86. Explicar cómo interpretar un campo de pendientes.

87. Describir cómo usar el método de Euler para aproximar la solución particular de una ecuación diferencial.

88. Se sabe que $y = Ce^{kx}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = 0.07y$. ¿Es posible determinar C o k con la información dada? Si es posible, encontrar sus valores.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 89 a 92, determinar si los enunciados son verdaderos o falsos. Si son falsos, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

89. Si $y = f(x)$ es una solución de una ecuación diferencial de primer orden, entonces $y = f(x) + C$ es también una solución.

90. La solución general de una ecuación diferencial es $y = -4.9x^2 + C_1x + C_2$. Para encontrar la solución particular se deben tener dos condiciones iniciales.

91. Los campos de pendientes representan las soluciones generales de ecuaciones diferenciales.

92. Un campo de pendientes muestra que la pendiente en el punto $(1, 1)$ es 6. Este campo de pendientes representa la familia de soluciones para la ecuación diferencial $y' = 4x + 2y$.

93. ***Error y método de Euler*** La solución exacta de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

donde $y(0) = 4$, es $y = 4e^{-2x}$.

a) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla, donde y es el valor exacto de la solución, y_1 es la solución aproximada que se tiene mediante el método de Euler con $h = 0.1$, y_2 es la solución aproximada obtenida mediante el método de Euler con $h = 0.2$, e_1 es el error absoluto $|y - y_1|$, e_2 es el error absoluto $|y - y_2|$, y r es la relación e_1/e_2.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y						
y_1						
y_2						
e_1						
e_2						
r						

b) ¿Qué se puede concluir acerca de la razón r a medida que cambia h?

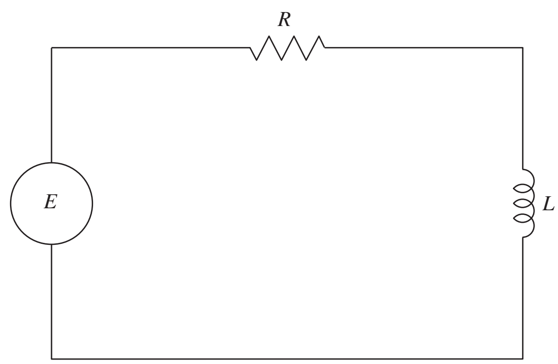
c) Predecir el error absoluto cuando $h = 0.05$.

94. ***Error y método de Euler*** Repetir el ejercicio 93 cuya solución exacta de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x - y$$

donde $y(0) = 1$, es $y = x - 1 + 2e^{-x}$.

95. ***Circuitos eléctricos*** El diagrama muestra un circuito eléctrico simple que consiste de una fuente de potencia, un resistor y un inductor.



Un modelo de la corriente I, en amperes (A), en un tiempo t, está dado por la ecuación diferencial de primer orden

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

donde $E(t)$ es el voltaje (V) producido por la fuente de potencia, R es la resistencia, en ohms (Ω), y L es la inductancia, en henrys (H). Suponer que el circuito eléctrico consiste de una fuente de potencia de 24 V, un resistor de 12 Ω y un inductor de 4 H.

a) Trazar la gráfica para el campo de pendientes de la ecuación diferencial.

b) ¿Cuál es el valor limitante de la corriente? Explicar.

96. ***Para pensar*** Se sabe que $y = e^{kt}$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 16y = 0$. Encontrar los valores de k.

97. ***Para pensar*** Se sabe que $y = A \operatorname{sen} \omega t$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + 16y = 0$. Encontrar los valores de ω.

Preparación del examen Putnam

98. Sea f una función de valor real dos veces derivable que satisfaga

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x)$$

donde $g(x) \geq 0$ para todo x real. Probar que $|f(x)|$ está acotada.

99. Probar si la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \qquad p(x) \cdot q(x) \neq 0$$

es cortada por la recta $x = k$, las tangentes de los puntos de intersección son concurrentes.

6.2 Ecuaciones diferenciales: crecimiento y decrecimiento

- **Usar la separación de variables para resolver una ecuación diferencial simple.**
- **Usar funciones exponenciales para modelar el crecimiento y decrecimiento en problemas de aplicación.**

Ecuaciones diferenciales

En la sección anterior se aprendió a analizar de manera visual las soluciones de ecuaciones diferenciales mediante los campos de pendientes, y la solución aproximada de forma numérica mediante el método de Euler. Analíticamente, se aprendió a resolver sólo dos tipos de ecuaciones diferenciales, las de las formas $y' = f(x)$ y $y'' = f(x)$. En esta sección, se aprenderá a resolver un tipo más general de ecuaciones diferenciales. La estrategia es reescribir la ecuación de manera tal que cada variable ocurre sólo en un lado de la ecuación. La estrategia se denomina *separación de variables*. (Se estudiará esa estrategia más a detalle en la sección 6.3.)

EJEMPLO 1 Resolver una ecuación diferencial

$y' = \dfrac{2x}{y}$	Escribir la ecuación original.
$yy' = 2x$	Multiplicar ambos miembros por y.
$\displaystyle\int yy'\,dx = \int 2x\,dx$	Integrar con respecto a x.
$\displaystyle\int y\,dy = \int 2x\,dx$	$dy = y'\,dx$.
$\dfrac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$	Aplicar la regla de la potencia.
$y^2 - 2x^2 = C$	Reescribir, sea $C = 2C_1$.

Así, la solución general está dada por $y^2 - 2x^2 = C$.

AYUDA DE ESTUDIO Se puede usar derivación implícita para verificar la solución en el ejemplo 1.

EXPLORACIÓN

En el ejemplo 1, la solución general de la ecuación diferencial es

$y^2 - 2x^2 = C.$

Usar una herramienta de graficación para graficar varias soluciones particulares, éstas se dan por $C = \pm 2$, $C = \pm 1$ y $C = 0$. Describir las soluciones gráficamente. ¿Es verdadero o falso el enunciado de cada solución?

La pendiente de la gráfica en el punto (x, y) es igual a dos veces la razón de x y y.

Explicar el razonamiento. ¿Están todas las curvas para las cuales este enunciado es verdadero representadas por la solución general?

Cuando se integran ambos miembros de la ecuación en el ejemplo 1, no se necesita agregar una constante de integración a ambos miembros de la ecuación. Si se hace, se obtendrá el mismo resultado que en el ejemplo 1.

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 + C_2 = x^2 + C_3$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = x^2 + (C_3 - C_2)$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$$

En la práctica, más personas prefieren usar la notación de Leibniz y las diferenciales cuando se aplica separación de variables. La solución del ejemplo 1 se muestra abajo por medio de esta notación.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$
$$y\,dy = 2x\,dx$$
$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$
$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C_1$$
$$y^2 - 2x^2 = C$$

Modelos de crecimiento y decrecimiento

En muchas aplicaciones, el ritmo o velocidad de cambio de una variable y es proporcional al valor de y. Si y es una función del tiempo t, la proporción se puede escribir como se muestra.

Razón de cambio de y — es — proporcional a y.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

La solución general de esta ecuación diferencial se proporciona en el siguiente teorema.

TEOREMA 6.1 MODELO DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO EXPONENCIAL

Si y es una función derivable de t tal que $y > 0$ y $y' = ky$, para alguna constante k, entonces

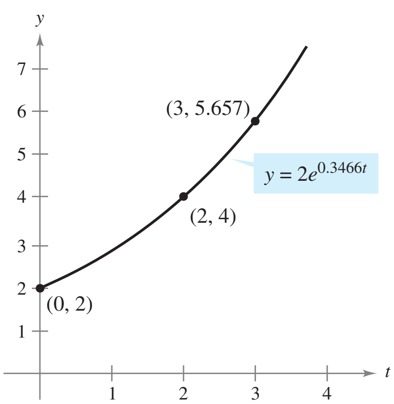
$$y = Ce^{kt}$$

C es el **valor inicial** de y, y k es la **constante de proporcionalidad**. El **crecimiento exponencial** se produce cuando $k > 0$, y el **decrecimiento** cuando $k < 0$.

Demostración

$y' = ky$	Escribir la ecuación original.
$\dfrac{y'}{y} = k$	Separar variables.
$\displaystyle\int \frac{y'}{y}\,dt = \int k\,dt$	Integrar con respecto a t.
$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$	$dy = y'\,dt$.
$\ln y = kt + C_1$	Encontrar la antiderivada de cada miembro.
$y = e^{kt}e^{C_1}$	Despejar y.
$y = Ce^{kt}$	Sea $C = e^{C_1}$.

Así, todas las soluciones de $y' = ky$ son de la forma $y = Ce^{kt}$. Diferenciar la función $y = Ce^{kt}$ con respecto a t, y verificar que $y' = ky$.



Si la razón de cambio de y es proporcional a y, entonces y sigue un modelo exponencial
Figura 6.8

EJEMPLO 2 Uso de un modelo de crecimiento exponencial

La razón de cambio de y es proporcional a y. Cuando $t = 0$, $y = 2$. Cuando $t = 2$, $y = 4$. ¿Cuál es el valor de y cuando $t = 3$?

Solución Dado que $y' = ky$, se sabe que y y t se relacionan con la ecuación $y = Ce^{kt}$. Al aplicar las condiciones iniciales se encuentran los valores de las constantes C y k.

$2 = Ce^0 \Rightarrow$	$C = 2$	Cuando $t = 0$, $y = 2$.
$4 = 2e^{2k} \Rightarrow$	$k = \dfrac{1}{2}\ln 2 \approx 0.3466$	Cuando $t = 2$, $y = 4$.

Así, el modelo es $y \approx 2e^{0.3466t}$. Cuando $t = 3$, el valor de y es $2e^{0.3466(3)} \approx 5.657$. (Ver la figura 6.8.)

AYUDA DE ESTUDIO Mediante propiedades logarítmicas, notar que el valor de k en el ejemplo 2 puede también escribirse como $\ln(\sqrt{2})$. Así, el modelo se convierte en $y = 2e^{(\ln\sqrt{2})t}$, el cual se puede reescribir como $y = 2(\sqrt{2})^t$.

TECNOLOGÍA La mayoría de las herramientas de graficación tiene funciones para ajustar curvas que se pueden usar para encontrar modelos que representen los datos. Usar la función de *regresión exponencial* y la información del ejemplo 2 para encontrar un modelo para los datos. ¿Cómo se podría comparar el modelo obtenido con el modelo dado?

El decrecimiento radiactivo se mide en términos de la *vida media* que es el número de años requeridos para reducir la muestra radiactiva a la mitad. La tasa de desintegración es proporcional a la cantidad presente. Las vidas medias de algunos isótopos radiactivos comunes muestran:

Uranio (^{238}U)	4 470 000 000 años
Plutonio (^{239}Pu)	24 100 años
Carbono (^{14}C)	5 715 años
Radio (^{226}Ra)	1 599 años
Einstenio (^{254}Es)	276 años
Nobelio (^{257}No)	25 segundos

EJEMPLO 3 Desintegración radiactiva

Suponer que 10 gramos del isótopo ^{239}Pu se liberaron en el accidente nuclear de Chernobyl. ¿Cuánto tiempo tomará a los 10 gramos disminuir a 1 gramo?

Solución Considerar que y representa la masa (en gramos) del plutonio. Dado que la tasa de desintegración es proporcional a y, se sabe que

$$y = Ce^{kt}$$

donde t es el tiempo en años. Para encontrar los valores de las constantes C y k, aplicar las condiciones iniciales. Con base en que $y = 10$ cuando $t = 0$, se puede escribir

$$10 = Ce^{k(0)} = Ce^0$$

lo cual implica que $C = 10$. Luego, con base en el hecho de que la vida media de ^{239}Pu es de 24 100 años se puede tener $y = 10/2 = 5$ cuando $t = 24\,100$, se puede escribir

$$\begin{aligned} 5 &= 10e^{k(24\,100)} \\ \frac{1}{2} &= e^{24\,100k} \\ \frac{1}{24\,100}\ln\frac{1}{2} &= k \\ -0.000028761 &\approx k. \end{aligned}$$

Así, el modelo es

$$y = 10e^{-0.000028761t}. \qquad \text{Modelo de vida media.}$$

Para encontrar el tiempo en que 10 gramos decrecen a 1 gramo, se puede despejar para t en la ecuación

$$1 = 10e^{-0.000028761t}.$$

La solución es aproximadamente 80 059 años.

NOTA El modelo de decrecimiento exponencial en el ejemplo 3 se pudo escribir como $y = 10(\frac{1}{2})^{t/24\,100}$. Este modelo es más fácil de derivar, pero para algunas aplicaciones no es conveniente usarlo.

Del ejemplo 3, notar que en un crecimiento o decrecimiento exponencial es fácil obtener el valor de C cuando se da el valor de y para $t = 0$. El siguiente ejemplo demuestra un procedimiento para resolver C y k cuando no se conoce el valor de y en $t = 0$.

EJEMPLO 4 Crecimiento de población

Suponer que una población experimental de moscas se incrementa conforme a la ley de crecimiento exponencial. Había 100 moscas antes del segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día. ¿Cuántas moscas, aproximadamente, había en la población original?

Solución Sea $y = Ce^{kt}$ el número de moscas al momento t, donde t se mide en días. Notar que y es continua donde el número de moscas es discreto. Dado que $y = 100$ cuando $t = 2$ y $y = 300$ cuando $t = 4$, se puede escribir

$$100 = Ce^{2k} \qquad \text{y} \qquad 300 = Ce^{4k}$$

Por la primera ecuación, se sabe que $C = 100e^{-2k}$. Al sustituir este valor en la segunda ecuación, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} 300 &= 100e^{-2k}e^{4k} \\ 300 &= 100e^{2k} \\ \ln 3 &= 2k \\ \frac{1}{2}\ln 3 &= k \\ 0.5493 &\approx k \end{aligned}$$

Así, el modelo de crecimiento exponencial es

$$y = Ce^{0.5493t}.$$

Para resolver C, reaplicar la condición $y = 100$ cuando $t = 2$ y obtener

$$\begin{aligned} 100 &= Ce^{0.5493(2)} \\ C &= 100e^{-1.0986} \approx 33. \end{aligned}$$

Así, la población original (cuando $t = 0$) consistía en aproximadamente $y = C = 33$ moscas, como se muestra en la figura 6.9.

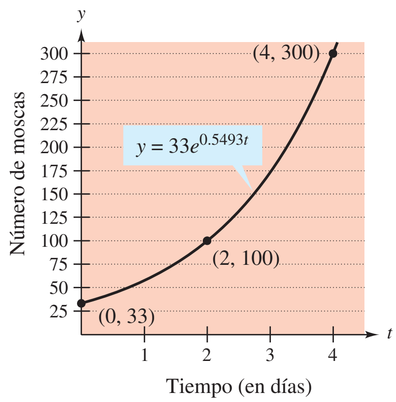


Figura 6.9

EJEMPLO 5 Ventas decrecientes

Cuatro meses después de que se detuviera la publicidad, una compañía fabricante notifica que sus ventas han caído de 100 000 unidades por mes a 80 000. Si las ventas siguen un patrón de decrecimiento exponencial, ¿qué unidades habrá después de los siguientes dos meses?

Solución Usar el modelo de decrecimiento exponencial $y = Ce^{kt}$, donde t se mide en meses. De la condición inicial ($t = 0$), se sabe que $C = 100\,000$. Además, dado que $y = 80\,000$ cuando $t = 4$, se tiene

$$\begin{aligned} 80\,000 &= 100\,000e^{4k} \\ 0.8 &= e^{4k} \\ \ln(0.8) &= 4k \\ -0.0558 &\approx k. \end{aligned}$$

Así, después de 2 meses más ($t = 6$), se puede especular que la tasa de ventas mensuales será

$$\begin{aligned} y &\approx 100\,000e^{-0.0558(6)} \\ &\approx 71\,500 \text{ unidades.} \end{aligned}$$

Ver la figura 6.10.

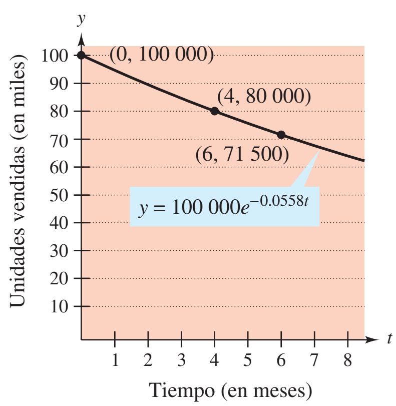


Figura 6.10

En los ejemplos 2 al 5, en realidad no se tuvo que resolver la ecuación diferencial

$$y' = ky.$$

(Esto se hizo una vez en la prueba del teorema 6.1.) El siguiente ejemplo ilustra un problema cuya solución involucra la técnica de separación de variables. El ejemplo concierne a la **ley de enfriamiento de Newton**, la cual establece que la razón de cambio en la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del medio circundante.

EJEMPLO 6 Ley de enfriamiento de Newton

Sea y la temperatura (en °F) de un objeto en una habitación cuya temperatura se conserva constante a 60°. Si la temperatura del objeto baja de 100° a 90° en 10 minutos, ¿cuánto tiempo se requerirá para bajar la temperatura a 80°?

Solución Por la ley de enfriamiento de Newton, se sabe que la razón de cambio en y es proporcional a la diferencia entre y y 60. Esto se puede escribir como

$$y' = k(y - 60), \qquad 80 \le y \le 100.$$

Para resolver esta ecuación diferencial, usar la separación de variables, como se muestra.

$$\frac{dy}{dt} = k(y - 60) \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

$$\left(\frac{1}{y - 60}\right) dy = k\,dt \qquad \text{Separar variables.}$$

$$\int \frac{1}{y - 60}\,dy = \int k\,dt \qquad \text{Integrar cada miembro.}$$

$$\ln|y - 60| = kt + C_1 \qquad \text{Encontrar la antiderivada o primitiva de cada miembro.}$$

Dado que $y > 60$, $|y - 60| = y - 60$, se pueden omitir los signos del valor absoluto. Mediante notación exponencial, se tiene

$$y - 60 = e^{kt + C_1} \quad \Longrightarrow \quad y = 60 + Ce^{kt}. \qquad C = e^{C_1}$$

Mediante $y = 100$ cuando $t = 0$, se obtiene $100 = 60 + Ce^{k(0)} = 60 + C$, lo cual implica que $C = 40$. Dado que $y = 90$ cuando $t = 10$,

$$90 = 60 + 40e^{k(10)}$$
$$30 = 40e^{10k}$$
$$k = \tfrac{1}{10}\ln\tfrac{3}{4} \approx -0.02877.$$

Así, el modelo es

$$y = 60 + 40e^{-0.02877t} \qquad \text{Modelo de enfriamiento.}$$

y finalmente, cuando $y = 80$, se obtiene

$$80 = 60 + 40e^{-0.02877t}$$
$$20 = 40e^{-0.02877t}$$
$$\tfrac{1}{2} = e^{-0.02877t}$$
$$\ln\tfrac{1}{2} = -0.02877t$$
$$t \approx 24.09 \text{ minutos.}$$

Así, se requerirán alrededor de 14.09 minutos *más* para enfriar el objeto a una temperatura de 80° (ver la figura 6.11).

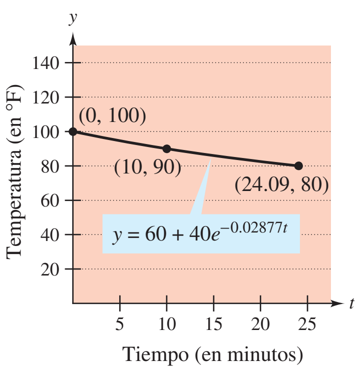


Figura 6.11

6.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, resolver la ecuación diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = x + 3$
2. $\dfrac{dy}{dx} = 6 - x$
3. $\dfrac{dy}{dx} = y + 3$
4. $\dfrac{dy}{dx} = 6 - y$
5. $y' = \dfrac{5x}{y}$
6. $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{7y}$
7. $y' = \sqrt{x}\,y$
8. $y' = x(1 + y)$
9. $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$
10. $xy + y' = 100x$

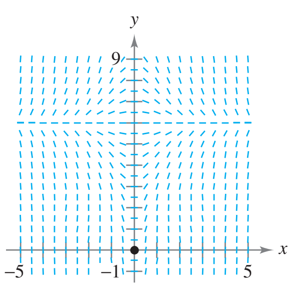
En los ejercicios 11 a 14, escribir y resolver la ecuación diferencial que modela el enunciado verbal.

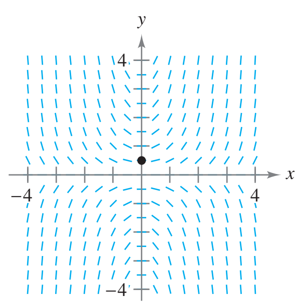
11. La razón de cambio de Q con respecto a t es inversamente proporcional al cuadrado de t.
12. La razón de cambio de P con respecto a t es proporcional a $25 - t$.
13. La razón de cambio de N con respecto a s es proporcional a $500 - s$.
14. La razón de cambio de y con respecto a x varía juntamente con x y $L - y$.

Campos de pendientes **En los ejercicios 15 y 16, una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes son dados. *a*) Trazar la gráfica de dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes, uno de los cuales pasa a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para representar la solución. Comparar el resultado con la gráfica en el apartado *a*).**

15. $\dfrac{dy}{dx} = x(6 - y), \quad (0, 0)$

16. $\dfrac{dy}{dx} = xy, \quad \left(0, \tfrac{1}{2}\right)$





En los ejercicios 17 a 20, encontrar la función $y = f(t)$ que pasa a través del punto (0, 10) con la primera derivada dada. Usar una herramienta de graficación para representar la solución.

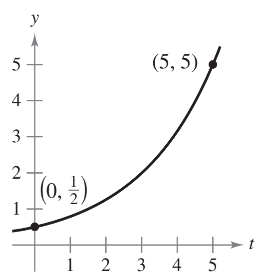
17. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}t$
18. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{3}{4}\sqrt{t}$
19. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{2}y$
20. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{4}y$

En los ejercicios 21 a 24, escribir y resolver la ecuación diferencial que modele el enunciado verbal. Evaluar la solución en los valores específicos de la variable independiente.

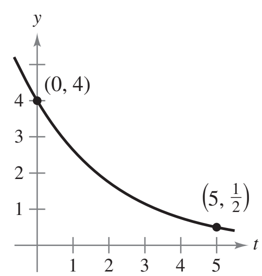
21. La razón de cambio de y es proporcional a y. Cuando $x = 0$, $y = 6$ y cuando $x = 4$, $y = 15$. ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 8$?
22. La razón de cambio de N es proporcional a N. Cuando $t = 0$, $N = 250$ y cuando $t = 1$, $N = 400$. ¿Cuál es el valor de N cuando $t = 4$?
23. La razón de cambio de V es proporcional a V. Cuando $t = 0$, $V = 20\,000$, y cuando $t = 4$, $V = 12\,500$. ¿Cuál es el valor de V cuando $t = 6$?
24. La razón de cambio de P es proporcional a P. Cuando $t = 0$, $P = 5\,000$, y cuando $t = 1$, $P = 4\,750$. ¿Cuál es el valor de P cuando $t = 5$?

En los ejercicios 25 a 28, encontrar la función exponencial $y = Ce^{kt}$ que pase a través de los dos puntos dados.

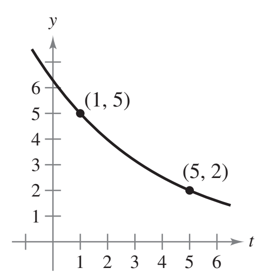
25.



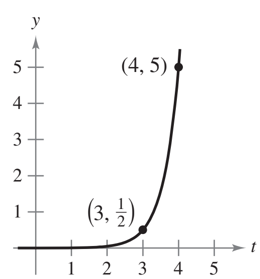
26.



27.



28.



Desarrollo de conceptos

29. Describir qué representan los valores de C y k en el modelo de crecimiento y decrecimiento exponencial, $y = Ce^{kt}$.
30. Proporcionar una ecuación diferencial que modele el crecimiento y decrecimiento exponencial.

En los ejercicios 31 y 32, determinar los cuadrantes en los cuales la solución de la ecuación diferencial es una función creciente. Explicar. (No resolver la ecuación diferencial.)

31. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}xy$
32. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x^2y$

Desintegración radiactiva **En los ejercicios 33 a 40, completar la tabla de los isótopos radiactivos.**

	Isótopo	*Semivida o vida media (en años)*	*Cantidad inicial*	*Cantidad después de 1 000 años*	*Cantidad después de 10 000 años*
33.	^{226}Ra	1 599	20 g		
34.	^{226}Ra	1 599		1.5 g	
35.	^{226}Ra	1 599			0.1 g
36.	^{14}C	5 715			3 g
37.	^{14}C	5 715	5 g		
38.	^{14}C	5 715		1.6 g	
39.	^{239}Pu	24 100		2.1 g	
40.	^{239}Pu	24 100			0.4 g

41. ***Desintegración radiactiva*** El radio radiactivo tiene una semivida o vida media de aproximadamente 1 599 años. ¿Qué porcentaje de una cantidad dada permanece después de 100 años?

42. ***La prueba del carbono 14*** La prueba del carbono 14 supone que el contenido de dióxido de carbono sobre la Tierra hoy tiene el mismo contenido radiactivo que el de hace siglos. Si esto es cierto, la cantidad de ^{14}C absorbido por un árbol que creció hace varios siglos debe tener la misma cantidad de ^{14}C absorbida por un árbol que crece hoy. Una pieza de carbón viejo contiene sólo 15% de la cantidad de carbono de una pieza de carbón actual. ¿Hace cuánto tiempo fue quemado el árbol para formar la pieza antigua de leño? (La vida media del ^{14}C es 5 715 años.)

Interés compuesto **En los ejercicios 43 a 48, completar la tabla para una cuenta de ahorros en la que se tiene un interés continuo.**

	Inversión inicial	*Tasa anual*	*Tiempo para duplicar*	*Cantidad después de 10 años*
43.	\$4 000	6%		
44.	\$18 000	$5\frac{1}{2}\%$		
45.	\$750		$7\frac{3}{4}$ años	
46.	\$12 500		5 años	
47.	\$500			\$1 292.85
48.	\$2 000			\$5 436.56

Interés compuesto **En los ejercicios 49 a 52, encontrar el capital principal *P* que debe invertirse a una tasa *r*, a un interés mensual compuesto, tal que \$1 000 000 garanticen la jubilación en *t* años.**

49. $r = 7\frac{1}{2}\%, \quad t = 20$

50. $r = 6\%, \quad t = 40$

51. $r = 8\%, \quad t = 35$

52. $r = 9\%, \quad t = 25$

Interés compuesto **En los ejercicios 53 a 56, encontrar el tiempo necesario para que \$1 000 se dupliquen si se invierten a una tasa de *r* compuesta *a*) anual, *b*) mensual, *c*) diaria y *d*) continua.**

53. $r = 7\%$

54. $r = 6\%$

55. $r = 8.5\%$

56. $r = 5.5\%$

Población **En los ejercicios 57 a 61, se dan la población (en millones) de un país en 2007 y la razón de cambio continua anual especulada *k* de la población. (*Fuente: U.S. Census Bureau, International Data Base.*)**

***a*)** **Encontrar el modelo de crecimiento exponencial $P = Ce^{kt}$ de la población con $t = 0$ correspondiente a 2000.**

***b*)** **Usar el modelo para predecir la población del país en 2015.**

***c*)** **Discutir la relación entre el signo de *k* y el cambio en la población para el país.**

	País	*Población de 2007*	*k*
57.	Letonia	2.3	-0.006
58.	Egipto	80.3	0.017
59.	Paraguay	6.7	0.024
60.	Hungría	10.0	-0.003
61.	Uganda	30.3	$+0.036$

Para discusión

62. *a*) Suponiendo un incremento en la población de insectos en un número constante cada mes, explicar por qué el número de insectos puede ser representado por función lineal.

b) Suponiendo un incremento en la población de insectos en un porcentaje constante cada mes, explicar por qué el número de insectos puede ser representado por función exponencial.

63. ***Modelo matemático*** Sea un cultivo con una cantidad inicial de cien bacterias y *N* el número de bacterias que se cuentan cada hora durante 5 horas. Los resultados se muestran en la tabla, donde *t* es el tiempo en horas.

t	0	1	2	3	4	5
N	100	126	151	198	243	297

a) Usar la función de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo exponencial para los datos.

b) Usar el modelo para estimar el tiempo requerido para que la población se cuadriplique.

64. ***Crecimiento de bacterias*** El número de bacterias en un cultivo se incrementó de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Después de 2 horas se tienen 125 bacterias en el cultivo y 350 bacterias después de 4 horas.

a) Encontrar la población inicial.

b) Escribir un modelo de crecimiento exponencial de la población bacteriana. Sea *t* el tiempo en horas.

c) Usar el modelo para determinar el número de bacterias después de 8 horas.

d) ¿Después de cuántas horas la cantidad de bacterias será de 25 000?

65. ***Curva de aprendizaje*** El gerente de una fábrica ha calculado que un trabajador puede producir más de 30 unidades en un día. La curva de aprendizaje del número *N* de unidades producidas por día después de que un nuevo empleado haya trabajado *t* días es $N = 30(1 - e^{kt})$. Después de 20 días en el trabajo, un trabajador produce 19 unidades.

a) Encontrar la curva de aprendizaje de este trabajador.
b) ¿Cuántos días pasarían antes de que este trabajador produzca 25 unidades por día?

66. ***Curva de aprendizaje*** Si en el ejercicio 65 el gerente requiere que un nuevo empleado produzca al menos 20 unidades por día después de 30 días en el trabajo, encontrar *a*) la curva de aprendizaje que describe este requisito mínimo y *b*) los días necesarios antes de que un trabajador produzca, como mínimo, 25 unidades por día.

67. ***Análisis de datos*** La tabla muestra la población P (en millones) de Estados Unidos desde 1960 hasta 2000. (*Fuente: U.S. Census Bureau*)

Año	1960	1970	1980	1990	2000
Población, P	181	205	228	250	282

a) Usar los datos de 1960 y 1970 para encontrar un modelo exponencial P_1 para los datos. Considerar $t = 0$ en 1960.
b) Usar una herramienta de graficación para representar un modelo exponencial P_2 para los datos. Considerar $t = 0$ en 1960.
c) Usar una herramienta de graficación para trazar los datos y los modelos P_1 y P_2 en la misma pantalla. Comparar el dato real con las predicciones. ¿Qué modelo se ajusta mejor a los datos?
d) Estimar cuándo la población será de 320 millones.

68. ***Análisis de datos*** La tabla muestra los ingresos netos y las cantidades requeridas para satisfacer la deuda nacional (fondos de garantía de los intereses adecuados por la Tesorería) de Estados Unidos desde 2001 hasta 2010. Los años de 2007 a 2010 son estimados y las cantidades monetarias se dan en miles de millones de dólares. (*Fuente: U.S. Office of Management and Budget*)

Año	2001	2002	2003	2004	2005
Ingresos	1 991.4	1 853.4	1 782.5	1 880.3	2 153.9
Intereses	359.5	332.5	318.1	321.7	352.3

Año	2006	2007	2008	2009	2010
Ingresos	2 407.3	2 540.1	2 662.5	2 798.3	2 954.7
Intereses	405.9	433.0	469.9	498.0	523.2

a) Usar la capacidad de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo exponencial R para los ingresos y un modelo cuártico I para la cantidad necesaria para satisfacer la deuda. Considerar t como el tiempo en años, con $t = 1$ que corresponde a 2001.
b) Usar una herramienta de graficación para trazar los puntos correspondientes a los ingresos, y trazar el correspondiente modelo. Con base en el modelo, ¿cuál es la tasa de crecimiento continuo de los ingresos?
c) Usar una herramienta de graficación para representar los puntos que corresponden a la cantidad necesaria para satisfacer la deuda, y trazar el modelo cuártico.
d) Encontrar una función $P(t)$ que aproxime el porcentaje de los ingresos necesarios para satisfacer la deuda nacional. Usar una herramienta de graficación para representar esta función.

69. ***Intensidad del sonido*** El nivel del sonido β (en decibeles), con una intensidad de I es $\beta(I) = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ donde I_0 es una intensidad de 10^{-16} watts por centímetro cuadrado, que corresponde a la intensidad del sonido más débil que se puede escuchar. Determinar $\beta(I)$ para

a) $I = 10^{-14}$ watts por centímetro cuadrado (susurro)
b) $I = 10^{-9}$ watts por centímetro cuadrado (esquina de calle ruidosa)
c) $I = 10^{-6.5}$ watts por centímetro cuadrado (golpe de martillo)
d) $I = 10^{-4}$ watts por centímetro cuadrado (umbral de dolor)

70. ***Nivel de ruido*** Con la instalación de materiales de aislamiento sonoro, el nivel de ruido en un auditorio se redujo de 93 a 80 decibeles. Usar la función exponencial del ejercicio 69 para encontrar el porcentaje de decrecimiento en el nivel de intensidad del ruido como un resultado de la instalación de esos materiales.

71. ***Silvicultura*** El valor de un terreno de árboles maderables es $V(t) = 100\,000e^{0.8\sqrt{t}}$ donde t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiente a 2008. Si el dinero gana intereses continuamente de 10%, el actual valor del bosque maderero en cualquier tiempo t es $A(t) = V(t)e^{-0.10t}$. Encontrar el año en el cual el bosque se talará para maximizar la presente función valor.

72. ***Intensidad del terremoto*** En la escala de Richter, la magnitud R de un terremoto de intensidad I es

$$R = \frac{\ln I - \ln I_0}{\ln 10}$$

donde I_0 es la intensidad mínima usada como comparación. Suponer que $I_0 = 1$.

a) Encontrar la intensidad del terremoto de San Francisco en 1906 ($R = 8.3$).
b) Encontrar el factor para el cual la intensidad aumente si la medida en la escala Richter es el doble.
c) Encontrar dR/dI.

73. ***Ley de enfriamiento de Newton*** Cuando un objeto se extrae del horno y se coloca en un entorno con una temperatura constante de 80° F, la temperatura en el centro es 1 500° F. Una hora después de extraerlo, la temperatura del centro es 1 120° F. Encontrar la temperatura del centro 5 horas después de extraer el objeto del horno.

74. ***Ley de enfriamiento de Newton*** Un contenedor de líquido caliente se coloca en un congelador que se mantiene a una temperatura constante de 20° F. La temperatura inicial del líquido es 160° F. Después de 5 minutos, la temperatura del líquido es 60° F. ¿Cuánto tiempo se necesitará para que su temperatura disminuya a 30° F?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 75 a 78, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.**

75. En el crecimiento exponencial, la tasa de crecimiento es constante.

76. En el crecimiento lineal, la tasa de crecimiento es constante.

77. Si los precios aumentan a una tasa de 0.5% mensual, entonces éstos aumentan a una tasa de 6% por año.

78. El modelo exponencial de la ecuación diferencial de crecimiento es $dy/dx = ky$, donde k es una constante.

6.3 Separación de variables y la ecuación logística

- Reconocer y resolver las ecuaciones diferenciales que se pueden resolver mediante separación de variables.
- Reconocer y resolver ecuaciones diferenciales homogéneas.
- Usar ecuaciones diferenciales para modelar y resolver problemas de aplicación.
- Resolver y analizar las ecuaciones diferenciales logísticas.

Separación de variables

Considerar una ecuación diferencial que pueda escribirse de la forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

donde M es una función continua sólo de x y N es una función continua sólo de y. Como se observó en la sección anterior, para este tipo de ecuación, todos los términos x se pueden agrupar con dx y todos los de y con dy, y se puede obtener una solución por integración. Tales ecuaciones se dice que son **separables**, y el procedimiento de solución se denomina **separación de variables**. Abajo se muestran algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales que son separables.

Ecuación diferencial original	*Reescrita con variables separables*
$x^2 + 3y\dfrac{dy}{dx} = 0$	$3y\,dy = -x^2\,dx$
$(\operatorname{sen} x)y' = \cos x$	$dy = \cot x\,dx$
$\dfrac{xy'}{e^y + 1} = 2$	$\dfrac{1}{e^y + 1}\,dy = \dfrac{2}{x}\,dx$

EJEMPLO 1 Separación de variables

Encontrar la solución general de $(x^2+4)\dfrac{dy}{dx} = xy$.

Solución Para iniciar, observar que $y = 0$ es una solución. Para encontrar otras soluciones, suponer que $y \neq 0$ y separar las variables como se muestra.

$$(x^2 + 4)\,dy = xy\,dx \qquad \text{Forma diferencial.}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2 + 4}\,dx \qquad \text{Separar variables.}$$

Ahora, integrar para obtener

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx \qquad \text{Integrar.}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + C_1$$

$$\ln|y| = \ln\sqrt{x^2 + 4} + C_1$$

$$|y| = e^{C_1}\sqrt{x^2 + 4}$$

$$y = \pm e^{C_1}\sqrt{x^2 + 4}.$$

Dado que $y = 0$ es también una solución, se puede escribir la solución general como

$$y = C\sqrt{x^2 + 4}. \qquad \text{Solución general } (C = \pm e^{C_1})$$

NOTA Asegurarse de verificar las soluciones de este capítulo. En el ejemplo 1, se debe verificar la solución $y = C\sqrt{x^2 + 4}$ por derivación y sustitución en la ecuación original.

$$(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = xy$$

$$(x^2 + 4)\frac{Cx}{\sqrt{x^2 + 4}} \stackrel{?}{=} x\left(C\sqrt{x^2 + 4}\right)$$

$$Cx\sqrt{x^2 + 4} = Cx\sqrt{x^2 + 4}$$

Así, la solución concuerda. ■

En algunos casos, no es factible escribir la solución general en la forma explícita $y = f(x)$. El siguiente ejemplo ilustra tal situación. La derivación implícita se puede usar para verificar esta solución.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para un ejemplo (de ingeniería) de una ecuación diferencial que es separable, ver el artículo "Designing a Rose Cutter", de J. S. Hartzler en *The College Mathematics Journal*.

EJEMPLO 2 Encontrar una solución particular

Dada la condición inicial $y(0) = 1$, encontrar la solución particular de la ecuación

$$xy\,dx + e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy = 0.$$

Solución Notar que $y = 0$ es una solución de la ecuación diferencial, pero esta solución no satisface la condición inicial. Así, se puede suponer que $y \neq 0$. Para separar variables, se debe despejar el primer término de y y el segundo término de e^{-x^2}. Así, se debe multiplicar por e^{x^2}/y y obtener lo siguiente.

$$\begin{aligned} xy\,dx + e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy &= 0 \\ e^{-x^2}(y^2 - 1)\,dy &= -xy\,dx \\ \int\left(y - \frac{1}{y}\right)dy &= \int -xe^{x^2}\,dx \\ \frac{y^2}{2} - \ln|y| &= -\frac{1}{2}e^{x^2} + C \end{aligned}$$

De la condición inicial $y(0) = 1$, se tiene $\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2} + C$, lo cual implica que $C = 1$. Así, la solución particular tiene la forma implícita

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} - \ln|y| &= -\frac{1}{2}e^{x^2} + 1 \\ y^2 - \ln y^2 + e^{x^2} &= 2. \end{aligned}$$

Se puede verificar esto derivando y reescribiendo para obtener la ecuación original.

EJEMPLO 3 Encontrar la curva de una solución particular

Encontrar la ecuación de la curva que pasa a través del punto $(1, 3)$ y tiene pendiente de y/x^2 en cualquier punto (x, y).

Solución Dado que la pendiente de la curva está dada por y/x^2, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$$

con la condición inicial $y(1) = 3$. Separando las variables e integrándolas se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x^2}, \quad y \quad 0 \\ \ln|y| &= -\frac{1}{x} + C_1 \\ y &= e^{-(1/x) + C_1} = Ce^{-1/x}. \end{aligned}$$

Dado que $y = 3$ cuando $x = 1$, se concluye que $3 = Ce^{-1}$ y $C = 3e$. Así, la ecuación de la curva especificada es

$$y = (3e)e^{-1/x} = 3e^{(x-1)/x}, \quad x > 0.$$

Ya que la solución no se define en $x = 0$ y la condición inicial se da en $x = 1$, x está restringida a valores positivos. Ver la figura 6.12.

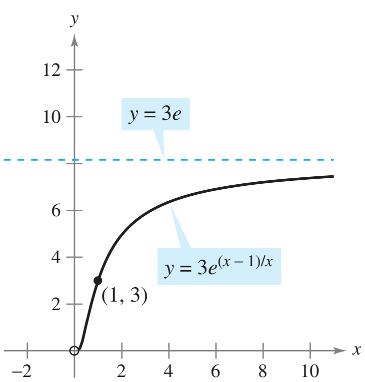


Figura 6.12

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Algunas ecuaciones diferenciales que no son separables en x y y se pueden separar por un cambio de variables. Éste es el caso de ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x, y)$, donde f es una **función homogénea**. La función dada por $f(x, y)$ es **homogénea de grado *n*** si

NOTA La notación $f(x, y)$ se usó para denotar una función de dos variables de la misma forma como $f(x)$ denota una función de una variable. Se estudiarán funciones de dos variables a detalle en el capítulo 13.

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Función homogénea de grado n.

donde n es un número real.

EJEMPLO 4 Verificar funciones homogéneas

a) $f(x, y) = x^2y - 4x^3 + 3xy^2$ es una función homogénea de grado 3 dado que

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2(ty) - 4(tx)^3 + 3(tx)(ty)^2 \\ &= t^3(x^2y) - t^3(4x^3) + t^3(3xy^2) \\ &= t^3(x^2y - 4x^3 + 3xy^2) \\ &= t^3 f(x, y). \end{aligned}$$

b) $f(x, y) = xe^{x/y} + y \operatorname{sen}(y/x)$ es una función homogénea de grado 1 dado que

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= txe^{tx/ty} + ty \operatorname{sen} \frac{ty}{tx} \\ &= t\left(xe^{x/y} + y \operatorname{sen} \frac{y}{x}\right) \\ &= tf(x, y). \end{aligned}$$

c) $f(x, y) = x + y^2$ *no* es una función homogénea dado que

$$f(tx, ty) = tx + t^2y^2 = t(x + ty^2) \neq t^n(x + y^2).$$

d) $f(x, y) = x/y$ es una función homogénea de grado 0 dado que

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{ty} = t^0 \frac{x}{y}.$$

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL HOMOGÉNEA

Una **ecuación diferencial homogénea** es una ecuación de la forma

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

donde M y N son funciones homogéneas del mismo grado.

EJEMPLO 5 Prueba para ecuaciones diferenciales homogéneas

a) $(x^2 + xy)\, dx + y^2\, dy = 0$ es homogénea de grado 2.

b) $x^3\, dx = y^3\, dy$ es homogénea de grado 3.

c) $(x^2 + 1)\, dx + y^2\, dy = 0$ *no* es una ecuación diferencial homogénea.

Para resolver una ecuación diferencial homogénea por el método de separación de variables, usar el siguiente teorema de cambio de variables.

TEOREMA 6.2 CAMBIO DE VARIABLES PARA ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Si $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es homogénea, entonces se puede transformar en una ecuación diferencial cuyas variables son separables por la sustitución

$$y = vx$$

donde v es una función derivable de x.

EJEMPLO 6 Resolver una ecuación diferencial homogénea

Encontrar la solución general de

$$(x^2 - y^2)\,dx + 3xy\,dy = 0.$$

AYUDA DE ESTUDIO La sustitución $y = vx$ llevará a una ecuación diferencial que es separable con respecto a las variables x y v. Se debe escribir su solución final, sin embargo, en términos de x y y.

Solución Dado que $(x^2 - y^2)$ y $3xy$ son homogéneas de grado 2, usar $y = vx$ para obtener $dy = x\,dv + v\,dx$. Entonces, por sustitución, se tiene

$$\begin{aligned}(x^2 - v^2x^2)\,dx + 3x(vx)\overbrace{(x\,dv + v\,dx)}^{dy} &= 0\\ (x^2 + 2v^2x^2)\,dx + 3x^3v\,dv &= 0\\ x^2(1 + 2v^2)\,dx + x^2(3vx)\,dv &= 0.\end{aligned}$$

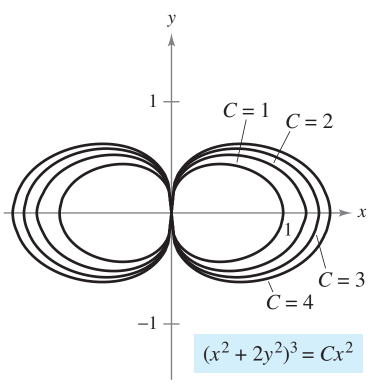
Al dividir entre x^2 y separar variables, se produce

$$\begin{aligned}(1 + 2v^2)\,dx &= -3vx\,dv\\ \int\frac{dx}{x} &= \int\frac{-3v}{1 + 2v^2}\,dv\\ \ln|x| &= -\frac{3}{4}\ln(1 + 2v^2) + C_1\\ 4\ln|x| &= -3\ln(1 + 2v^2) + \ln|C|\\ \ln x^4 &= \ln|C(1 + 2v^2)^{-3}|\\ x^4 &= C(1 + 2v^2)^{-3}.\end{aligned}$$

Al sustituir por v se produce la siguiente solución general.

$$\begin{aligned}x^4 &= C\left[1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{-3}\\ \left(1 + \frac{2y^2}{x^2}\right)^3 x^4 &= C\\ (x^2 + 2y^2)^3 &= Cx^2 \qquad \text{Solución general.}\end{aligned}$$

Se puede verificar esto al derivar y reescribir para obtener la ecuación original.



Solución general de $(x^2 - y^2)\,dx + 3xy\,dy = 0$
Figura 6.13

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a una herramienta de graficación, representar varias soluciones para el ejemplo 6. La figura 6.13 muestra las gráficas de

$$(x^2 + 2y^2)^3 = Cx^2$$

para $C = 1, 2, 3$ y 4.

Aplicaciones

EJEMPLO 7 Población salvaje

La razón de cambio del número de coyotes $N(t)$ en una población es directamente proporcional a $650 - N(t)$, donde t es el tiempo en años. Cuando $t = 0$, la población es 300, y cuando $t = 2$, la población se incrementó a 500. Encontrar la población cuando $t = 3$.

Solución Dado que el ritmo o velocidad de cambio de la población es proporcional a $650 - N(t)$, se puede escribir la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dN}{dt} = k(650 - N)$$

Se puede resolver esta ecuación diferencial por separación de variables.

$$dN = k(650 - N)\,dt \qquad \text{Forma diferencial.}$$

$$\frac{dN}{650 - N} = k\,dt \qquad \text{Variables separables.}$$

$$-\ln|650 - N| = kt + C_1 \qquad \text{Integrar.}$$

$$\ln|650 - N| = -kt - C_1$$

$$650 - N = e^{-kt - C_1} \qquad \text{Suponer } N < 650.$$

$$N = 650 - Ce^{-kt} \qquad \text{Solución general.}$$

Si se usa $N = 300$ cuando $t = 0$, se puede concluir que $C = 350$, lo cual produce

$$N = 650 - 350e^{-kt}.$$

Entonces, mediante el valor de $N = 500$ cuando $t = 2$, se deduce que

$$500 = 650 - 350e^{-2k} \quad \Rightarrow \quad e^{-2k} = \tfrac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad k \approx 0.4236.$$

Así, el modelo para la población de coyotes es

$$N = 650 - 350e^{-0.4236t}. \qquad \text{Modelo para la población.}$$

Cuando $t = 3$, se puede aproximar la población a

$$N = 650 - 350e^{-0.4236(3)} \approx 552 \text{ coyotes.}$$

En la figura 6.14 se muestra el modelo de población. Note que $N = 650$ es la asíntota horizontal de la gráfica y es la *capacidad de carga* del modelo. Es posible aprender más acerca de la capacidad de carga después en esta sección.

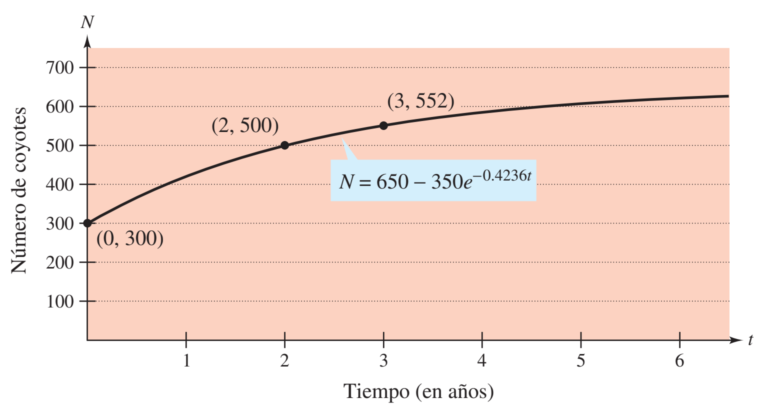
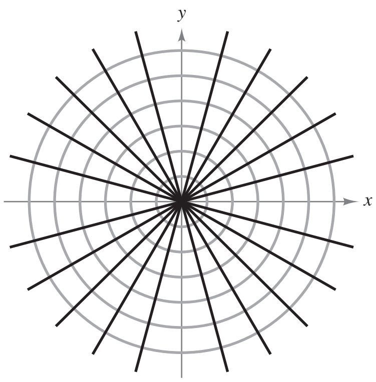


Figura 6.14



Cada recta $y = Kx$ es una trayectoria ortogonal de la familia de circunferencias
Figura 6.15

Un problema común en electrostática, termodinámica e hidrodinámica involucra encontrar una familia de curvas, cada una de las cuales es ortogonal a todos los miembros de una familia de curvas dada. Por ejemplo, la figura 6.15 muestra una familia de circunferencias

$$x^2 + y^2 = C \qquad \text{Familia de circunferencias.}$$

cada una de las cuales interseca las rectas en la familia

$$y = Kx \qquad \text{Familia de rectas.}$$

en ángulos rectos. Esas dos familias de curvas se dice que son **mutuamente ortogonales**, y cada curva en una de las familias se denomina como una **trayectoria ortogonal** de la otra familia. En electrostática, las líneas de fuerzas son ortogonales a las *curvas equipotenciales*. En termodinámica, el flujo de calor que atraviesa una superficie plana es ortogonal a las *curvas isotérmicas*. En hidrodinámica, las líneas de flujo (corriente) son trayectorias ortogonales a las *curvas de potencial de velocidad*.

EJEMPLO 8 Trayectorias ortogonales

Describir las trayectorias ortogonales para la familia de curvas dada por

$$y = \frac{C}{x}$$

para $C \neq 0$. Trazar la gráfica para varios miembros de cada familia.

Solución Primero, resolver la ecuación dada para C y escribir $xy = C$. Entonces, por derivación implícita con respecto a x, se obtiene la ecuación diferencial

$$xy' + y = 0 \qquad \text{Ecuación diferencial.}$$

$$x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \qquad \text{Pendiente de familia dada.}$$

Dado que y' representa la pendiente de la familia de curvas dada en (x, y), se deduce que la familia ortogonal tiene la pendiente recíproca negativa x/y. Así,

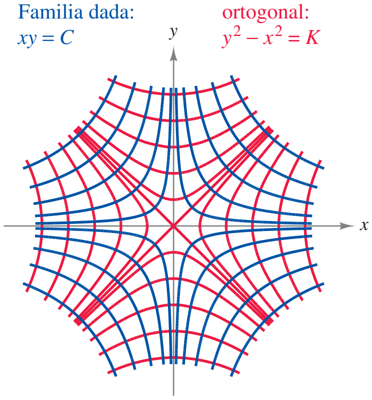
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}. \qquad \text{Pendiente de familia ortogonal.}$$

Ahora se puede encontrar la familia ortogonal por separación de variables e integrando.

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y^2 - x^2 = K$$

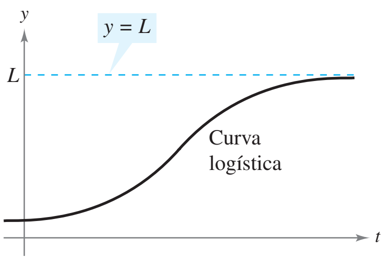


Trayectorias ortogonales
Figura 6.16

Los centros están en el origen y los ejes transversales son verticales para $K > 0$ y horizontales para $K < 0$. Si $K = 0$, las trayectorias ortogonales son las líneas $y = \pm x$. Si $K \neq 0$, las trayectorias ortogonales son hipérbolas. Varias trayectorias se muestran en la figura 6.16.

Ecuación diferencial logística

En la sección 6.2, el modelo de crecimiento exponencial se deriva del hecho de que la razón de cambio de una variable y es proporcional al valor de y. Se observó que la ecuación diferencial $dy/dt = ky$ tiene la solución general $y = Ce^{kt}$. El crecimiento exponencial es ilimitado, pero cuando describe una población, con frecuencia existe algún límite superior L más allá del cual no puede haber crecimiento. El límite superior L se denomina **capacidad límite** o **de soporte**, la cual es la máxima población $y(t)$ que se puede sostener o soportar a medida que se incrementa el tiempo t. Un modelo que con regularidad se usa para este tipo de crecimiento es la **ecuación diferencial logística**



Notar que, como $t \to \infty$, $y \to L$
Figura 6.17

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$$ Ecuación diferencial logística.

donde k y L son constantes positivas. Una población que satisface esta ecuación no crece sin límite, pero se aproxima a la capacidad límite o de soporte L al aumentar t.

De la ecuación se puede observar que si y está entre 0 y la capacidad límite o de soporte L, entonces $dy/dt > 0$, y la población se incrementa. Si y es mayor que L, entonces $dy/dt < 0$, y la población decrece. La gráfica de la función y se denomina *curva logística*, como se muestra en la figura 6.17.

EJEMPLO 9 Obtención de la solución general

Resolver la ecuación diferencial logística $\dfrac{dy}{dt} = ky\left(1 - \dfrac{y}{L}\right)$.

Solución Empezar por separar variables.

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$$ Escribir la ecuación diferencial.

$$\frac{1}{y(1 - y/L)}dy = kdt$$ Variables separables.

$$\int \frac{1}{y(1 - y/L)}dy = \int kdt$$ Integrar cada miembro.

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{L - y}\right)dy = \int kdt$$ Reescribir el primer miembro mediante fracciones parciales.

$$\ln|y| - \ln|L - y| = kt + C$$ Encontrar la antiderivada de cada miembro.

$$\ln\left|\frac{L - y}{y}\right| = -kt - C$$ Multiplicar cada miembro por –1 y simplificar.

$$\left|\frac{L - y}{y}\right| = e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt}$$ Tomar exponenciales en cada miembro.

$$\frac{L - y}{y} = be^{-kt}$$ Sea $\pm e^{-C} = b$.

Al resolver esta ecuación para y se produce $y = \dfrac{L}{1 + be^{-kt}}$.

Del ejemplo 9, se puede concluir que todas las soluciones de la ecuación diferencial logística son de la forma

$$y = \frac{L}{1 + be^{-kt}}.$$

EXPLORACIÓN

Usar una herramienta de graficación para investigar los efectos de los valores de L, b y k sobre la gráfica de

$$y = \frac{L}{1 + be^{-kt}}.$$

Incluir algunos ejemplos para justificar los resultados.

EJEMPLO 10 Solución de una ecuación diferencial logística

Una comisión estatal libera 40 alces en una zona de refugio. Después de 5 años, la población de alces es de 104. La comisión cree que la zona no puede soportar más de 4 000 alces. La tasa de crecimiento de la población de alces p es

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{4\,000}\right), \quad 40 \leq p \leq 4\,000$$

donde t es el número de años.

a) Escribir un modelo para la población de alces en términos de t.
b) Representar el campo de pendientes de la ecuación diferencial y la solución que pasa a través del punto (0, 40).
c) Usar el modelo para estimar la población de alces después de 15 años.
d) Encontrar el límite del modelo cuando $t \to \infty$.

EXPLORACIÓN

Explicar qué sucede si $p(0) = L$.

Solución

a) Se sabe que $L = 4\,000$. Así, la solución de la ecuación diferencial es de la forma

$$p = \frac{4\,000}{1 + be^{-kt}}.$$

Dado que $p(0) = 40$, se puede resolver para b como se muestra.

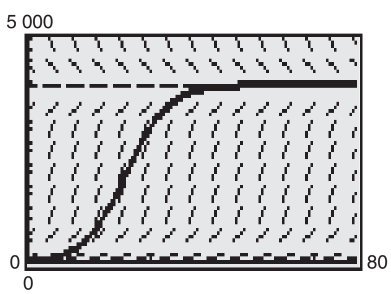
$$40 = \frac{4\,000}{1 + be^{-k(0)}}$$

$$40 = \frac{4\,000}{1 + b} \quad \Longrightarrow \quad b = 99$$

Entonces, dado que $p = 104$ cuando $t = 5$, se puede resolver para k.

$$104 = \frac{4\,000}{1 + 99e^{-k(5)}} \quad \Longrightarrow \quad k \approx 0.194$$

Así, un modelo para la población de alces está dada por $p = \dfrac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194t}}$.



Campo de pendientes para

$$\frac{dp}{dt} = 0.194p\left(1 - \frac{p}{4\,000}\right)$$

Y la solución que pasa a través de (0, 40)
Figura 6.18

b) Utilizando una herramienta de graficación, se puede representar el campo de pendientes de

$$\frac{dp}{dt} = 0.194p\left(1 - \frac{p}{4\,000}\right)$$

y la solución pasa a través de (0, 40), como se muestra en la figura 6.18.

c) Para estimar la población de alces después de 15 años, sustituir 15 para t en el modelo.

$$p = \frac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194(15)}} \qquad \text{Sustituir 15 para } t.$$

$$= \frac{4\,000}{1 + 99e^{-2.91}} \approx 626 \qquad \text{Simplificar.}$$

d) Como t se incrementa sin saltos, el denominador de $\dfrac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194t}}$ se cierra a 1. Así, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{4\,000}{1 + 99e^{-0.194t}} = 4\,000.$

6.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 14, encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{y^2}$

3. $x^2 + 5y\dfrac{dy}{dx} = 0$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 3}{6y^2}$

5. $\dfrac{dr}{ds} = 0.75r$

6. $\dfrac{dr}{ds} = 0.75s$

7. $(2 + x)y' = 3y$

8. $xy' = y$

9. $yy' = 4 \operatorname{sen} x$

10. $yy' = -8 \cos(\pi x)$

11. $\sqrt{1 - 4x^2}\, y' = x$

12. $\sqrt{x^2 - 16}\, y' = 11x$

13. $y \ln x - xy' = 0$

14. $12yy' - 7e^x = 0$

En los ejercicios 15 a 24, encontrar la solución particular que satisface la condición inicial.

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*
15.	$yy' - 2e^x = 0$	$y(0) = 3$
16.	$\sqrt{x} + \sqrt{y}\, y' = 0$	$y(1) = 9$
17.	$y(x + 1) + y' = 0$	$y(-2) = 1$
18.	$2xy' - \ln x^2 = 0$	$y(1) = 2$
19.	$y(1 + x^2)y' - x(1 + y^2) = 0$	$y(0) = \sqrt{3}$
20.	$y\sqrt{1 - x^2}\, y' - x\sqrt{1 - y^2} = 0$	$y(0) = 1$
21.	$\dfrac{du}{dv} = uv \operatorname{sen} v^2$	$u(0) = 1$
22.	$\dfrac{dr}{ds} = e^{r-2s}$	$r(0) = 0$
23.	$dP - kP\, dt = 0$	$P(0) = P_0$
24.	$dT + k(T - 70)\, dt = 0$	$T(0) = 140$

En los ejercicios 25 a 28, encontrar una ecuación para las gráficas que pasen por los puntos y tengan la pendiente dada.

25. $(0, 2), \quad y' = \dfrac{x}{4y}$

26. $(1, 1), \quad y' = -\dfrac{9x}{16y}$

27. $(9, 1), \quad y' = \dfrac{y}{2x}$

28. $(8, 2), \quad y' = \dfrac{2y}{3x}$

En los ejercicios 29 y 30, encontrar todas las funciones *f* que tienen la propiedad indicada.

29. La tangente de la gráfica de f en el punto (x, y) en intersección con el eje x en $(x + 2, 0)$.

30. Todas las tangentes de la gráfica de f que pasan a través del origen.

En los ejercicios 31 a 38, determinar si la función es homogénea y, si lo es, determinar su grado.

31. $f(x, y) = x^3 - 4xy^2 + y^3$

32. $f(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 - 2y^2$

33. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

34. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

35. $f(x, y) = 2 \ln xy$

36. $f(x, y) = \tan(x + y)$

37. $f(x, y) = 2 \ln \dfrac{x}{y}$

38. $f(x, y) = \tan \dfrac{y}{x}$

En los ejercicios 39 a 44, resolver la ecuación diferencial homogénea.

39. $y' = \dfrac{x + y}{2x}$

40. $y' = \dfrac{x^3 + y^3}{xy^2}$

41. $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$

42. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$

43. $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

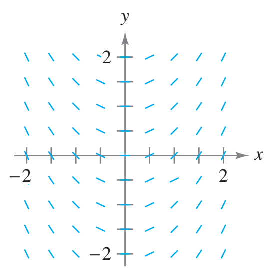
44. $y' = \dfrac{2x + 3y}{x}$

En los ejercicios 45 a 48, encontrar la solución particular que satisface la condición inicial.

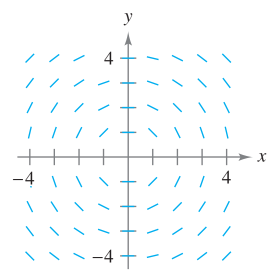
	Ecuación diferencial	*Condición inicial*
45.	$x\, dy - (2xe^{-y/x} + y)\, dx = 0$	$y(1) = 0$
46.	$-y^2\, dx + x(x + y)\, dy = 0$	$y(1) = 1$
47.	$\left(x \sec \dfrac{y}{x} + y\right) dx - x\, dy = 0$	$y(1) = 0$
48.	$(2x^2 + y^2)\, dx + xy\, dy = 0$	$y(1) = 0$

Campos de pendientes **En los ejercicios 49 a 52, representar algunas soluciones de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes y entonces encontrar la solución general analíticamente.**

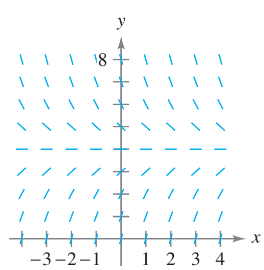
49. $\dfrac{dy}{dx} = x$



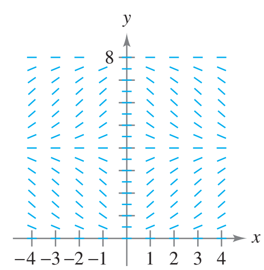
50. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$



51. $\dfrac{dy}{dx} = 4 - y$



52. $\dfrac{dy}{dx} = 0.25x(4 - y)$



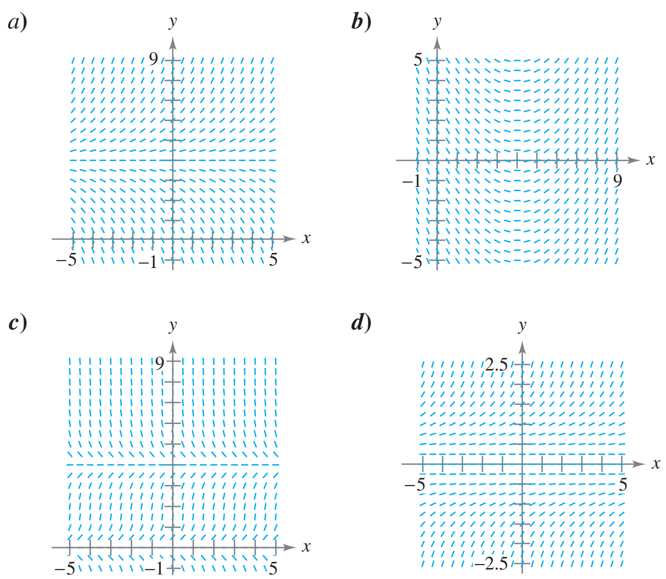
Método de Euler **En los ejercicios 53 a 56, *a*) usar el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 0.1$ para aproximar la solución particular del problema de valor inicial en un valor de x dado, *b*) encontrar analíticamente la solución exacta de la ecuación diferencial y *c*) comparar las soluciones en los valores de x dados.**

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*	*Valor x*
53.	$\frac{dy}{dx} = -6xy$	$(0, 5)$	$x = 1$
54.	$\frac{dy}{dx} + 6xy^2 = 0$	$(0, 3)$	$x = 1$
55.	$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 12}{3y^2 - 4}$	$(1, 2)$	$x = 2$
56.	$\frac{dy}{dx} = 2x(1 + y^2)$	$(1, 0)$	$x = 1.5$

57. ***Desintegración radiactiva*** La tasa de descomposición de radio radiactivo es proporcional a la cantidad presente en cualquier tiempo. La semivida o vida media de radio radiactivo es de 1 599 años. ¿Qué cantidad permanecerá después de 50 años?

58. ***Reacción química*** En una reacción química, un compuesto se transforma en otro a una tasa proporcional a la cantidad no cambiada. Si inicialmente existen 40 gramos del compuesto original, y permanecen 35 gramos después de 1 hora, ¿cuándo se transformará 75% del compuesto?

Campos de pendientes **En los ejercicios 59 a 62, *a*) escribir una ecuación diferencial para el enunciado, *b*) corresponder la ecuación diferencial con un posible campo de pendientes, y *c*) verificar los resultados mediante una herramienta de graficación para trazar un campo de pendientes de la ecuación diferencial. [Los campos de pendientes se marcaron con *a*), *b*), *c*) y *d*).]**



59. La razón de cambio de y con respecto a x es proporcional a la diferencia entre y y 4.

60. La razón de cambio de y con respecto a x es proporcional a la diferencia entre x y 4.

61. La razón de cambio de y con respecto a x es proporcional al producto de y y la diferencia entre y y 4.

62. La razón de cambio de y con respecto a x es proporcional a y^2.

CAS **63.** ***Ganancia de peso*** Un becerro que pesa 60 libras al nacer gana peso a razón de $dw/dt = k(1\,200 - w)$, donde w es el peso en libras y t es el tiempo en años. Resolver la ecuación diferencial.

a) Usar un sistema algebraico por computadora para resolver la ecuación diferencial para $k = 0.8$, 0.9 y 1. Representar las tres soluciones.

b) Si el animal se vende cuando su peso alcanza 800 libras, encontrar el tiempo de venta de cada uno de los modelos en el apartado *a*).

c) ¿Cuál es el peso máximo del animal para cada uno de los modelos?

64. ***Ganancia de peso*** Un becerro que pesa w_0 libras al nacer gana peso a razón de $dw/dt = 1\,200 - w$, donde w es el peso en libras y t es el tiempo en años. Resolver la ecuación diferencial.

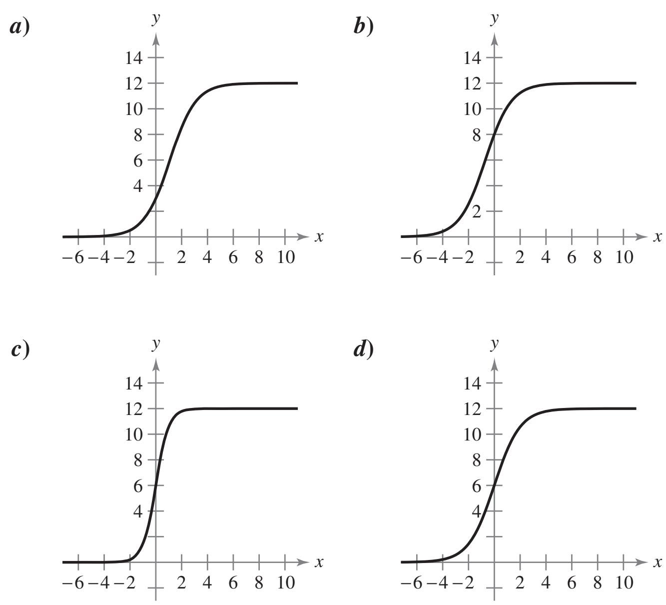
En los ejercicios 65 a 70, encontrar las trayectorias ortogonales de la familia. Usar una herramienta de graficación para obtener varios miembros de cada familia.

65. $x^2 + y^2 = C$ **66.** $x^2 - 2y^2 = C$

67. $x^2 = Cy$ **68.** $y^2 = 2Cx$

69. $y^2 = Cx^3$ **70.** $y = Ce^x$

En los ejercicios 71 a 74, señalar la ecuación logística con su gráfica. [Las gráficas se marcan con *a*), *b*), *c*) y *d*).]



71. $y = \dfrac{12}{1 + e^{-x}}$ **72.** $y = \dfrac{12}{1 + 3e^{-x}}$

73. $y = \dfrac{12}{1 + \frac{1}{2}e^{-x}}$ **74.** $y = \dfrac{12}{1 + e^{-2x}}$

En los ejercicios 75 y 76, la ecuación logística modela el crecimiento de una población. Usar la ecuación para *a*) encontrar el valor de *k*, *b*) encontrar la capacidad límite o de soporte, *c*) encontrar la población inicial, *d*) determinar cuándo la población alcanzará 50% de su capacidad límite o de soporte y *e*) escribir una ecuación diferencial logística que tiene la solución *P*(*t*).

75. $P(t) = \dfrac{2\,100}{1 + 29e^{-0.75t}}$ **76.** $P(t) = \dfrac{5\,000}{1 + 39e^{-0.2t}}$

CAS **En los ejercicios 77 y 78, la ecuación diferencial logística modela la tasa de crecimiento de una población. Usar la ecuación diferencial para *a*) encontrar el valor de *k*, *b*) encontrar la capacidad de soporte, *c*) usar un sistema algebraico por computadora para trazar la gráfica de un campo de pendientes y *d*) determinar el valor de *P* en el cual la tasa del crecimiento de población es el más alto.**

77. $\dfrac{dP}{dt} = 3P\left(1 - \dfrac{P}{100}\right)$ **78.** $\dfrac{dP}{dt} = 0.1P - 0.0004P^2$

En los ejercicios 79 a 82, encontrar la ecuación logística que satisface la condición inicial.

	Ecuación diferencial logística	*Condición inicial*
79.	$\dfrac{dy}{dt} = y\left(1 - \dfrac{y}{36}\right)$	(0, 4)
80.	$\dfrac{dy}{dt} = 2.8y\left(1 - \dfrac{y}{10}\right)$	(0, 7)
81.	$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{4y}{5} - \dfrac{y^2}{150}$	(0, 8)
82.	$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3y}{20} - \dfrac{y^2}{1\,600}$	(0, 15)

83. ***Especies en peligro*** Una organización de conservación libera 25 panteras de Florida en una zona de refugio. Después de 2 años, hay 39 panteras en la zona. El refugio tiene una capacidad límite o de soporte de 200 panteras.

a) Escribir una ecuación logística que modele la población de las panteras en el refugio.

b) Encontrar la población después de 5 años.

c) ¿Cuándo la población será de 100 panteras?

d) Escribir una ecuación diferencial logística que modele la tasa de crecimiento de la población de las panteras. Entonces repetir el apartado *b*) mediante el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 1$. Comparar la aproximación con las respuestas exactas.

e) ¿En qué tiempo la población de las panteras crecerá más rápidamente? Explicar.

84. ***Crecimiento de bacterias*** En el tiempo $t = 0$, un cultivo bacteriano pesa 1 gramo. Dos horas después, el cultivo pesa 4 gramos. El peso máximo del cultivo es de 20 gramos.

a) Escribir una ecuación logística que modele el peso del cultivo bacteriano.

b) Encontrar el peso del cultivo después de 5 horas.

c) ¿Cuándo el peso del cultivo será de 18 gramos?

d) Escribir una ecuación diferencial logística que modele la razón de crecimiento del peso del cultivo. Entonces repetir el inciso *b*) mediante el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 1$. Comparar la aproximación con los resultados exactos.

e) ¿En qué tiempo se incrementará el peso más rápidamente? Explicar.

Desarrollo de conceptos

85. Describir cómo reconocer y resolver ecuaciones diferenciales que se pueden resolver por separación de variables.

86. Establecer la prueba para determinar si una ecuación diferencial es homogénea. Dar un ejemplo.

87. Describir la relación entre dos familias de curvas que son mutuamente ortogonales.

Para discusión

88. Suponer que el crecimiento de una población está modelada por una ecuación logística. Conforme la población se incrementa, su razón de crecimiento decrece. ¿Ocurre esto en situaciones reales, como en poblaciones de animales o humanos?

89. Demostrar que si $y = \dfrac{1}{1+be^{-kt}}$, entonces $\dfrac{dy}{dt} = ky(1-y)$.

90. ***Navegación*** Un bote de navegación, que parte del reposo, acelera (dv/dt) a una tasa proporcional a la diferencia entre las velocidades del viento y el bote. Se ignora la resistencia del aire.

a) El viento sopla a 20 nudos, y después de media hora el bote se mueve a 10 nudos. Escribir la velocidad v como función del tiempo t.

b) Usar el resultado del inciso *a*) para escribir la distancia que se desplazó el bote como función del tiempo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 91 a 94, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o dar un contraejemplo.**

91. La función $y = 0$ es siempre una solución de una ecuación diferencial que puede resolverse por separación de variables.

92. La ecuación diferencial $y' = xy - 2y + x - 2$ se puede escribir en forma de variables separadas.

93. La función $f(x, y) = x^2 - 4xy + 6y^2 + 1$ es homogénea.

94. Las familias $x^2 + y^2 = 2Cy$ y $x^2 + y^2 = 2Kx$ son mutuamente ortogonales.

Preparación del examen Putnam

95. En un error de cálculo muy común, se cree que la regla del producto para derivadas dice que $(fg)' = f'g'$. Si $f(x) = e^{x^2}$, determinar, con prueba, si existe un intervalo abierto (a, b) y una función distinta de cero g definida en (a, b) tal que esta regla errónea del producto sea verdadera para x en (a, b).

6.4 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

- **Resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden.**
- **Usar ecuaciones diferenciales lineales para resolver problemas de aplicación.**
- **Resolver una ecuación diferencial de Bernoulli.**

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

En esta sección se estudiará cómo resolver una clase muy importante de ecuaciones diferenciales de primer orden: las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** es una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones continuas de x. Se dice que esta ecuación diferencial lineal de primer orden es de la **forma normal**.

NOTA Es útil ver por qué el factor integrante ayuda a resolver una ecuación diferencial lineal de la forma $y' + P(x)y = Q(x)$. Cuando ambos miembros de la ecuación se multiplican por el factor integrante $u(x) = e^{\int P(x)dx}$, el primer miembro se convierte en la derivada de un producto.

$$\begin{aligned} y'e^{\int P(x)\,dx} + P(x)ye^{\int P(x)\,dx} &= Q(x)e^{\int P(x)\,dx} \\ \left[ye^{\int P(x)\,dx}\right]' &= Q(x)e^{\int P(x)\,dx} \end{aligned}$$

Al integrar ambos miembros de la segunda ecuación y dividir entre $u(x)$ se produce la solución general.

Para resolver una ecuación diferencial lineal, hay que escribirla en forma normal para identificar las funciones $P(x)$ y $Q(x)$. Después integrar $P(x)$ y formar la expresión

$$u(x) = e^{\int P(x)\,dx} \qquad \text{Factor integrante.}$$

el cual se denomina **factor integrante**. La solución general de la ecuación es

$$y = \frac{1}{u(x)} \int Q(x)u(x)\,dx. \qquad \text{Solución general.}$$

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación diferencial lineal

Encontrar la solución general de

$$y' + y = e^x.$$

Solución Para esta ecuación, $P(x) = 1$ y $Q(x) = e^x$. Así, el factor integrante es

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\int P(x)\,dx} \qquad \text{Factor integrante.} \\ &= e^{\int dx} \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Esto implica que la solución general es

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{u(x)} \int Q(x)u(x)\,dx \\ &= \frac{1}{e^x} \int e^x(e^x)\,dx \\ &= e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right) \\ &= \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}. \qquad \text{Solución general.} \end{aligned}$$

TEOREMA 6.3 SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Un factor integrante para la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

es $u(x) = e^{\int P(x)dx}$. La solución de la ecuación diferencial es

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C.$$

ANNA JOHNSON PELL WHEELER (1883-1966)

Anna Johnson Pell Wheeler obtuvo su maestría en la Universidad de Iowa con su tesis *La extensión de la teoría de Galois a ecuaciones diferenciales* en 1904. Influida por David Hilbert, trabajó en ecuaciones diferenciales mientras estudiaba espacios lineales infinitos.

AYUDA DE ESTUDIO Más que memorizar la fórmula del teorema 6.3, basta con recordar que al multiplicar por el factor integrante $e^{\int P(x)dx}$, se convierte el miembro izquierdo de la ecuación diferencial en la derivada del producto $ye^{\int P(x)dx}$.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

Encontrar la solución de

$$xy' - 2y = x^2.$$

Solución La forma normal de la ecuación dada es

$$y' + P(x)y = Q(x)$$
$$y' - \left(\frac{2}{x}\right)y = x. \qquad \text{Forma normal.}$$

Así, $P(x) = -2/x$, y se tiene

$$\begin{aligned}\int P(x)\,dx &= -\int \frac{2}{x}\,dx\\ &= -\ln x^2\\ e^{\int P(x)\,dx} &= e^{-\ln x^2}\\ &= \frac{1}{e^{\ln x^2}}\\ &= \frac{1}{x^2}. \qquad \text{Factor integrante.}\end{aligned}$$

Así, al multiplicar cada miembro de la forma normal por $1/x^2$ se llega a

$$\begin{aligned}\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} &= \frac{1}{x}\\ \frac{d}{dx}\left[\frac{y}{x^2}\right] &= \frac{1}{x}\\ \frac{y}{x^2} &= \int \frac{1}{x}\,dx\\ \frac{y}{x^2} &= \ln|x| + C\\ y &= x^2(\ln|x| + C). \qquad \text{Solución general.}\end{aligned}$$

En la figura 6.19 se muestran varias curvas solución (para $C = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4) .

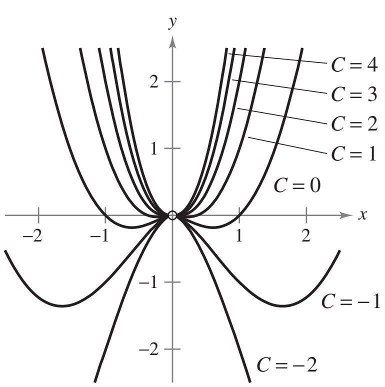


Figura 6.19

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

Encontrar la solución general de $y' - y \tan t = 1, -\pi/2 < t < \pi/2$.

Solución La ecuación ya está en la forma normal $y' + P(t)y = Q(t)$. Así, $P(t) = -\tan t$, y

$$\int P(t)\,dt = -\int \tan t\,dt = \ln|\cos t|$$

Como $-\pi/2 < t < \pi/2$, se pueden dejar los signos de valor absoluto y concluir que el factor integrante es

$$e^{\int P(t)\,dt} = e^{\ln(\cos t)} = \cos t. \qquad \text{Factor integrante.}$$

Así, al multiplicar $y' - y \tan t = 1$ por $\cos t$ se obtiene

$$\frac{d}{dt}[y \cos t] = \cos t$$

$$y \cos t = \int \cos t\,dt$$

$$y \cos t = \operatorname{sen} t + C$$

$$y = \tan t + C \sec t. \qquad \text{Solución general.}$$

Varias curvas solución se muestran en la figura 6.20.

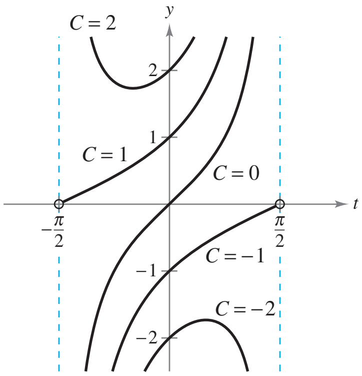


Figura 6.20

Aplicaciones

Un tipo de problema que se puede describir en términos de una ecuación diferencial involucra mezclas químicas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Un problema de mezcla

Un tanque contiene 50 galones de una disolución compuesta por 90% agua y 10% alcohol. Una segunda disolución que contiene 50% agua y 50% alcohol se agrega al tanque a una tasa de 4 galones por minuto. Conforme se añade la segunda, el tanque empieza a drenar a una tasa de 5 galones por minuto, como se muestra en la figura 6.21. Si se supone que la disolución en el tanque se agita constantemente, ¿cuánto alcohol permanecerá en el tanque después de 10 minutos?

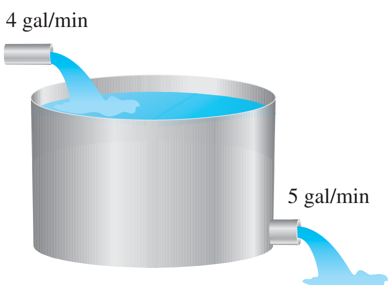


Figura 6.21

Solución Sea y el número de galones de alcohol en el tanque en cualquier instante t. Se sabe que $y = 5$ cuando $t = 0$. Dado que el número de galones en el tanque en cualquier tiempo es $50 - t$, y que el tanque pierde 5 galones por minuto, se debe perder $[5/(50 - t)]y$ galones de alcohol por minuto. Además, ya que el tanque gana 2 galones de alcohol por minuto, el ritmo o velocidad de cambio de alcohol en el tanque está dada por

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \left(\frac{5}{50 - t}\right)y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dt} + \left(\frac{5}{50 - t}\right)y = 2.$$

Para resolver esta ecuación lineal, sea $P(t) = 5/(50 - t)$ y se obtiene

$$\int P(t)\,dt = \int \frac{5}{50 - t}\,dt = -5 \ln|50 - t|.$$

Ya que $t < 50$, se puede eliminar el signo del valor absoluto y concluir que

$$e^{\int P(t)\,dt} = e^{-5 \ln(50 - t)} = \frac{1}{(50 - t)^5}.$$

Así, la solución general es

$$\frac{y}{(50-t)^5} = \int \frac{2}{(50-t)^5}\,dt = \frac{1}{2(50-t)^4} + C$$

$$y = \frac{50-t}{2} + C(50-t)^5.$$

Dado que $y = 5$ cuando $t = 0$, se tiene

$$5 = \frac{50}{2} + C(50)^5 \quad \Rightarrow \quad -\frac{20}{50^5} = C$$

lo cual significa que la solución particular es

$$y = \frac{50-t}{2} - 20\left(\frac{50-t}{50}\right)^5.$$

Por último, cuando $t = 10$, la cantidad de alcohol en el tanque es

$$y = \frac{50-10}{2} - 20\left(\frac{50-10}{50}\right)^5 \approx 13.45 \text{ gal}$$

lo cual representa una solución que contiene 33.6% de alcohol.

Hasta ahora en problemas relacionados con la caída de un cuerpo se ha despreciado la resistencia del aire. El siguiente ejemplo incluye este factor. En el ejemplo, la resistencia del aire sobre el objeto que cae se supone proporcional a su velocidad v. Si g es la constante gravitacional, la fuerza descendente F sobre el objeto que cae de masa m se da por medio de la diferencia $mg - kv$. Pero, por la segunda ley de movimiento de Newton, se sabe que

$$F = ma = m(dv/dt) \qquad a = \text{aceleración.}$$

lo cual lleva a la siguiente ecuación diferencial.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

EJEMPLO 5 Un objeto que cae con resistencia al aire

Un objeto de masa m cae desde un helicóptero. Encontrar su velocidad en función del tiempo t, si se supone que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto.

Solución La velocidad v satisface la ecuación

$$\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g. \qquad \begin{array}{l} g = \text{constante gravitacional.} \\ k = \text{constante de proporcionalidad.} \end{array}$$

Si $b = k/m$, se pueden *separar variables* para obtener

$$dv = (g - bv)\,dt$$

$$\int \frac{dv}{g - bv} = \int dt$$

$$-\frac{1}{b}\ln|g - bv| = t + C_1$$

$$\ln|g - bv| = -bt - bC_1$$

$$g - bv = Ce^{-bt}. \qquad C = e^{-bC_1}$$

Dado que el objeto cayó, $v = 0$ cuando $t = 0$; así $g = C$, y se deduce que

$$-bv = -g + ge^{-bt} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{g - ge^{-bt}}{b} = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}).$$

NOTA Observar en el ejemplo 5 que la velocidad se aproxima al límite mg/k como resultado de la resistencia al aire. Para problemas de objetos que caen y en los que la resistencia al aire es despreciada, la velocidad se incrementa sin límite.

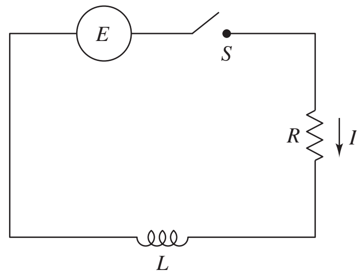


Figura 6.22

Un circuito eléctrico simple consta de una corriente eléctrica I (en amperes), una resistencia R (en ohms), una inductancia L (en henrys), y una fuerza electromotriz E constante (en volts), como se muestra en la figura 6.22. Con base en la segunda ley de Kirchhoff, si el interruptor S se cierra cuando $t = 0$, la fuerza electromotriz aplicada (voltaje) es igual a la suma de la caída de voltaje en el resto del circuito. De hecho, esto significa que la corriente I satisface la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

EJEMPLO 6 Un problema de circuitos eléctricos

Encontrar la corriente I como función del tiempo t (en segundos), dado que I satisface la ecuación diferencial

$$L(dI/dt) + RI = \operatorname{sen} 2t,$$

donde R y L son constantes diferentes de cero.

Solución En forma normal, la ecuación lineal dada es

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{1}{L}\operatorname{sen} 2t.$$

Sea $P(t) = R/L$, tal que $e^{\int P(t)\,dt} = e^{(R/L)t}$, y, por el teorema 6.3,

$$\begin{aligned} Ie^{(R/L)t} &= \frac{1}{L}\int e^{(R/L)t}\operatorname{sen} 2t\,dt \\ &= \frac{1}{4L^2 + R^2}e^{(R/L)t}(R\operatorname{sen} 2t - 2L\cos 2t) + C. \end{aligned}$$

Así, la solución general es

$$I = e^{-(R/L)t}\left[\frac{1}{4L^2 + R^2}e^{(R/L)t}(R\operatorname{sen} 2t - 2L\cos 2t) + C\right]$$

$$I = \frac{1}{4L^2 + R^2}(R\operatorname{sen} 2t - 2L\cos 2t) + Ce^{-(R/L)t}.$$

TECNOLOGÍA La integral del ejemplo 6 se encontró mediante un software de álgebra simbólica. Si se tiene acceso a *Maple*, *Mathematica*, o *TI-89*, tratar de usarlo para integrar

$$\frac{1}{L}\int e^{(R/L)t}\operatorname{sen} 2t\,dt.$$

En el capítulo 8 se estudiará cómo integrar funciones de ese tipo mediante integración por partes.

Ecuación de Bernoulli

La también conocida ecuación no lineal que reduce a una lineal con una apropiada sustitución, es la **ecuación de Bernoulli**, llamada así por James Bernoulli (1654-1705).

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$ Ecuación de Bernoulli.

Esta ecuación es lineal si $n = 0$, y tiene variables separadas si $n = 1$. Así, en el siguiente desarrollo se supone que $n \neq 0$ y $n \neq 1$. Al multiplicar por y^{-n} y $(1 - n)$ se obtiene

$$\begin{aligned} y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} &= Q(x) \\ (1-n)y^{-n}y' + (1-n)P(x)y^{1-n} &= (1-n)Q(x) \\ \frac{d}{dx}[y^{1-n}] + (1-n)P(x)y^{1-n} &= (1-n)Q(x) \end{aligned}$$

la cual es una ecuación lineal en la variable y^{1-n}. Considerar que $z = y^{1-n}$ produce la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Por último, mediante el teorema 6.3, la *solución general de la ecuación de Bernoulli* es

$$y^{1-n}e^{\int(1-n)P(x)\,dx} = \int (1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)\,dx}\,dx + C.$$

EJEMPLO 7 Solución de una ecuación de Bernoulli

Encontrar la solución de $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$.

Solución Para esta ecuación de Bernoulli, sea $n = -3$, y usar la sustitución

$$\begin{aligned} z &= y^4 && \text{Sea } z = y^{1-n} = y^{1-(-3)}. \\ z' &= 4y^3y'. && \text{Derivar.} \end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación original por $4y^3$ se produce

$$\begin{aligned} y' + xy &= xe^{-x^2}y^{-3} && \text{Escribir la ecuación original.} \\ 4y^3y' + 4xy^4 &= 4xe^{-x^2} && \text{Multiplicar cada miembro por } 4y^3. \\ z' + 4xz &= 4xe^{-x^2}. && \text{Ecuación lineal: } z' + P(x)z = Q(x). \end{aligned}$$

Esta ecuación es lineal en z. Mediante $P(x) = 4x$ se produce

$$\begin{aligned} \int P(x)\,dx &= \int 4x\,dx \\ &= 2x^2 \end{aligned}$$

lo cual implica que e^{2x^2} es un factor integrante. Al multiplicar la ecuación lineal por este factor se produce

$$\begin{aligned} z' + 4xz &= 4xe^{-x^2} && \text{Ecuación lineal.} \\ z'e^{2x^2} + 4xze^{2x^2} &= 4xe^{x^2} && \text{Multiplicar por el factor integrante.} \\ \frac{d}{dx}[ze^{2x^2}] &= 4xe^{x^2} && \text{Escribir el miembro izquierdo como una derivada.} \\ ze^{2x^2} &= \int 4xe^{x^2}\,dx && \text{Integrar cada miembro.} \\ ze^{2x^2} &= 2e^{x^2} + C \\ z &= 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}. && \text{Dividir cada miembro entre } e^{2x^2}. \end{aligned}$$

Por último, al sustituir $z = y^4$, la solución general es

$$y^4 = 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}. \qquad \text{Solución general.}$$

Hasta aquí se han estudiado varios tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden. De éstas, el caso de las variables separables es usualmente el más simple, y la solución por factor integrante es ordinariamente usada sólo como último recurso.

Resumen de ecuaciones diferenciales de primer orden

Método	*Forma de ecuación*
1. Variables separables:	$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$
2. Homogéneas:	$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, donde M y N son homogéneas de n-ésimo grado
3. Lineal:	$y' + P(x)y = Q(x)$
4. Ecuación de Bernoulli:	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$

6.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, determinar si la ecuación diferencial es lineal. Explicar las razones.

1. $x^3y' + xy = e^x + 1$ **2.** $2xy - y'\ln x = y$

3. $y' - y\,\text{sen}\,x = xy^2$ **4.** $\dfrac{2 - y'}{y} = 5x$

En los ejercicios 5 a 14, resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden.

5. $\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = 6x + 2$ **6.** $\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{2}{x}\right)y = 3x - 5$

7. $y' - y = 16$ **8.** $y' + 2xy = 10x$

9. $(y + 1)\cos x\,dx - dy = 0$ **10.** $(y - 1)\,\text{sen}\,x\,dx - dy = 0$

11. $(x - 1)y' + y = x^2 - 1$ **12.** $y' + 3y = e^{3x}$

13. $y' - 3x^2y = e^{x^3}$ **14.** $y' + y\tan x = \sec x$

Campos de pendientes **En los ejercicios 15 y 16, *a*) representar manualmente una solución gráfica aproximada de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial sobre el campo de pendientes, *b*) encontrar la solución particular que satisface la condición inicial y *c*) usar una herramienta de graficación para representar la solución particular. Comparar la gráfica con la realizada manualmente en el inciso *a*).**

15. $\dfrac{dy}{dx} = e^x - y$ **16.** $y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = \text{sen}\,x^2$

$(0, 1)$ $(\sqrt{\pi}, 0)$

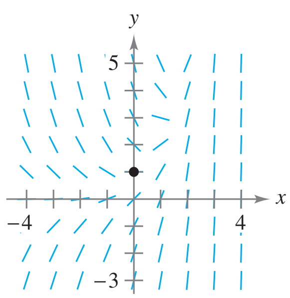


Figura para 15

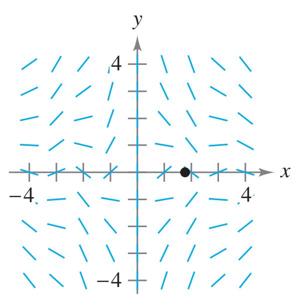


Figura para 16

En los ejercicios 17 a 24, encontrar la solución particular de la ecuación diferencial que satisface las condiciones de frontera iniciales especificadas.

	Ecuación diferencial	*Condición límite o de frontera*
17.	$y'\cos^2 x + y - 1 = 0$	$y(0) = 5$
18.	$x^3y' + 2y = e^{1/x^2}$	$y(1) = e$
19.	$y' + y\tan x = \sec x + \cos x$	$y(0) = 1$
20.	$y' + y\sec x = \sec x$	$y(0) = 4$
21.	$y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = 0$	$y(2) = 2$
22.	$y' + (2x - 1)y = 0$	$y(1) = 2$
23.	$x\,dy = (x + y + 2)\,dx$	$y(1) = 10$
24.	$2x\,y' - y = x^3 - x$	$y(4) = 2$

25. ***Crecimiento de población*** Cuando se predice el crecimiento de una población, los demógrafos deben considerar tasa de natalidad y mortalidad (mortandad) así como el cambio neto causado por la diferencia entre las tasas de inmigración y emigración. Sea P la población en un tiempo t y N el incremento neto por unidad de tiempo resultante de la diferencia entre inmigración y emigración. Así, la tasa de crecimiento de la población está dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP + N, \qquad N \text{ es constante.}$$

Resolver esta ecuación diferencial para encontrar P como función del tiempo si en $t = 0$ el tamaño de la población es P_0.

26. ***Aumento de inversión*** Una gran corporación inicia en $t = 0$ para invertir parte de sus ingresos continuamente a una razón de P dólares por año, en un fondo para una futura expansión corporativa. Suponer que el fondo gana r por ciento de interés compuesto continuo por año. Así, la tasa de crecimiento de la cantidad A en el fondo está dada por

$$\frac{dA}{dt} = rA + P$$

donde $A = 0$ cuando $t = 0$. Resolver esta ecuación diferencial para A como función de t.

Aumento de inversión **En los ejercicios 27 y 28, use el resultado del ejercicio 26.**

27. Encontrar A para los siguientes casos.

a) $P = \$275\,000$, $r = 8\%$ y $t = 10$ años

b) $P = \$550\,000$, $r = 5.9\%$ y $t = 25$ años

28. Encontrar t si la corporación necesita \$1 000 000 y se pueden invertir \$125 000 por año en un fondo que gana 8% de interés compuesto en forma continua.

29. ***Alimentación intravenosa*** La glucosa se agrega por vía intravenosa al flujo sanguíneo a una tasa de q unidades por minuto, y el cuerpo elimina glucosa del flujo sanguíneo a una tasa proporcional a la cantidad presente. Suponer que $Q(t)$ es la cantidad de glucosa en el flujo sanguíneo en un tiempo t.

a) Determinar la ecuación diferencial que describe la razón de cambio de glucosa en el flujo sanguíneo con respecto al tiempo.

b) Resolver la ecuación diferencial del inciso *a*) y considerar $Q = Q_0$ cuando $t = 0$.

c) Encontrar el límite de $Q(t)$ cuando $t \to \infty$.

30. ***Curva de aprendizaje*** El gerente de una empresa ha encontrado que el número máximo de unidades que un trabajador puede producir en un día es 75. La tasa de incremento en el número N de unidades producido con respecto al tiempo t en días por un nuevo empleado es proporcional a $75 - N$.

a) Determinar la ecuación diferencial que describe la razón de cambio con respecto al tiempo.

b) Resolver la ecuación diferencial del inciso *a*).

c) Encontrar la solución particular para un nuevo empleado que produce 20 unidades en el primer día y 35 unidades en el día 20.

Mezcla **En los ejercicios 31 a 35, considerar un tanque que en el tiempo $t = 0$ contiene v_0 galones de una disolución de la cual, por peso, q_0 libras es disolución concentrada. Otra disolución que contiene q_1 libras del concentrado por galón fluye dentro del tanque a una tasa de r_1 galones por minuto. La disolución en el tanque se conserva bien mezclada y está concentrada a una tasa de r_2 galones por minuto.**

31. Si Q es la cantidad de concentrado en la disolución en cualquier tiempo t, demostrar que

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{r_2 Q}{v_0 + (r_1 - r_2)t} = q_1 r_1.$$

32. Si Q es la cantidad de concentración en la disolución en cualquier tiempo t, escribir la ecuación diferencial para la razón de cambio de Q respecto de t si $r_1 = r_2 = r$.

33. Un tanque de 200 galones se llena con una disolución que contiene 25 libras de concentración. Al iniciar en el tiempo $t = 0$, se añade agua destilada en el tanque a una tasa de 10 galones por minuto, y la disolución mezclada se elimina con la misma tasa.

a) Encontrar la cantidad de concentración Q en la disolución como función de t.

b) Encontrar el tiempo en el cual la cantidad de concentración en el tanque alcanza 15 libras.

c) Encontrar la cantidad de concentración en la disolución cuando $t \to \infty$.

34. Repetir el ejercicio 33, si se supone que la disolución entera del tanque contiene 0.04 libras de concentrado por galón.

35. Un tanque de 200 galones está lleno a la mitad de agua destilada. En el tiempo $t = 0$, una solución que contiene 0.5 libras de concentrado por galón entra al tanque a razón de 5 galones por minuto, y la mezcla bien agitada es eliminada a una tasa de 3 galones por minuto.

a) ¿En qué tiempo se llenará el tanque?

b) En el tiempo en que el tanque se llena, ¿cuántas libras de concentrado contendrá?

c) Repetir los incisos *a*) y *b*), suponiendo que la solución entrante al tanque contiene una libra de concentrado por galón.

Para discusión

36. Suponiendo que la expresión $u(x)$ es un factor integrante para $y' + P(x)y = Q(x)$, ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a $u'(x)$? Verificar su respuesta.

a) $P(x)\, u(x)$

b) $P'(x)\, u(x)$

c) $Q(x)\, u(x)$

d) $Q'(x)\, u(x)$

Objeto que cae **En los ejercicios 37 y 38, considerar un objeto de ocho libras que cae desde una altura de 5 000 pies, donde la resistencia al aire es proporcional a la velocidad.**

37. Escribir la velocidad en función del tiempo si su velocidad después de 5 segundos es, aproximadamente, 101 pies por segundo. ¿Cuál es el valor limitante de la función velocidad?

38. Usar el resultado del ejercicio 37 para escribir la posición del objeto como función del tiempo. Aproximar la velocidad del objeto cuando éste alcance el suelo.

Circuitos eléctricos **En los ejercicios 39 y 40, usar la ecuación diferencial para circuitos eléctricos dada por**

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

En esta ecuación, I es la corriente, R es la resistencia, L es la inductancia y E es la fuerza electromotriz (voltaje).

39. Resolver la ecuación diferencial dado un voltaje constante E_0.

40. Usar el resultado del ejercicio 39 para encontrar la ecuación para la corriente si $I(0) = 0$, $E_0 = 120$ volts, $R = 600$ ohms y $L = 4$ henrys. ¿Cuándo alcanzará la corriente 90% de su valor limitante?

Desarrollo de conceptos

41. Se da la forma normal de una ecuación diferencial lineal de primer orden. ¿Cuál es su factor integrante?

42. Se da la forma normal de la ecuación de Bernoulli. Describir cómo ésta se reduce a una ecuación lineal.

En los ejercicios 43 a 46, marcar la ecuación diferencial con su respectiva solución.

	Ecuación diferencial	*Solución*
43.	$y' - 2x = 0$	*a*) $y = Ce^{x^2}$
44.	$y' - 2y = 0$	*b*) $y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$
45.	$y' - 2xy = 0$	*c*) $y = x^2 + C$
46.	$y' - 2xy = x$	*d*) $y = Ce^{2x}$

En los ejercicios 47-54, resolver la ecuación diferencial de Bernoulli.

47. $y' + 3x^2y = x^2y^3$

48. $y' + xy = xy^{-1}$

49. $y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = xy^2$

50. $y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = x\sqrt{y}$

51. $xy' + y = xy^3$

52. $y' - y = y^3$

53. $y' - y = e^x\sqrt[3]{y}$

54. $yy' - 2y^2 = e^x$

Campo de pendientes **En los ejercicios 55 a 58, *a*) usar una herramienta de graficación para representar el campo de pendientes para la ecuación diferencial, *b*) encontrar la solución particular de la ecuación diferencial que pasa a través de los puntos dados y *c*) usar una herramienta de graficación para representar la solución particular sobre el campo de pendientes.**

	Ecuación diferencial	*Puntos*
55.	$\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x}y = x^2$	$(-2, 4),\ (2, 8)$
56.	$\dfrac{dy}{dx} + 4x^3y = x^3$	$\left(0, \frac{7}{2}\right),\ \left(0, -\frac{1}{2}\right)$
57.	$\dfrac{dy}{dx} + (\cot x)y = 2$	$(1, 1),\ (3, -1)$
58.	$\dfrac{dy}{dx} + 2xy = xy^2$	$(0, 3),\ (0, 1)$

En los ejercicios 59 a 70, resolver la ecuación diferencial por el método apropiado.

59. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x+y}}{e^{x-y}}$

60. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 3}{y(y + 4)}$

61. $y \cos x - \cos x + \dfrac{dy}{dx} = 0$

62. $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$

63. $(3y^2 + 4xy)\,dx + (2xy + x^2)\,dy = 0$

64. $(x + y)\,dx - x\,dy = 0$

65. $(2y - e^x)\,dx + x\,dy = 0$

66. $(y^2 + xy)\,dx - x^2\,dy = 0$

67. $(x^2y^4 - 1)\,dx + x^3y^3\,dy = 0$

68. $y\,dx + (3x + 4y)\,dy = 0$

69. $3(y - 4x^2)\,dx + x\,dy = 0$

70. $x\,dx + (y + e^y)(x^2 + 1)\,dy = 0$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 71 y 72, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué, o dar un contraejemplo.**

71. $y' + x\sqrt{y} = x^2$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

72. $y' + xy = e^x y$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

PROYECTO DE TRABAJO

Pérdida de peso

El peso de una persona depende tanto del número de calorías consumidas como de la energía utilizada. Además, la cantidad de energía usada depende del peso de una persona; la cantidad media de energía usada por una persona es 17.5 calorías por libra por día. Así, entre mayor peso pierde una persona, es menor la energía que una persona usa (se supone que la persona mantiene un nivel de actividad constante). Para calcular el peso perdido se puede usar la siguiente ecuación

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) = \frac{C}{3\,500} - \frac{17.5}{3\,500}w$$

donde w es el peso de la persona (en libras), t es el tiempo en días, y C es el consumo diario de calorías, que es constante.

a) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

b) Considerar una persona que pesa 180 libras e inicia una dieta de 2 500 calorías por día. ¿Cuánto tiempo tardará la persona en perder 10 libras? ¿Cuánto tiempo le tomará a la persona en perder 35 libras?

c) Usar una herramienta de graficación para presentar la solución. ¿Cuál es el peso límite de la persona?

d) Repetir los incisos *b*) y *c*) para una persona que pesa 200 libras cuando inició la dieta.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para una mejor información sobre el modelo de pérdida de peso, ver el artículo “Un modelo lineal de dieta”, por Arthur C. Segal en *The College Mathematics Journal*.

6 Ejercicios de repaso

1. Determinar si la función $y = x^3$ es una solución de la ecuación diferencial $2xy' + 4y = 10x^3$.
2. Determinar si la función $y = 2 \operatorname{sen} 2x$ es una solución de la ecuación diferencial $y''' - 8y = 0$.

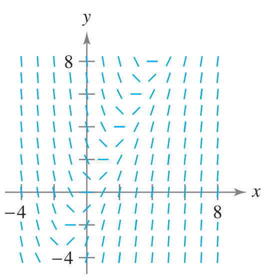
En los ejercicios 3 a 10, usar integración para encontrar una solución general de la ecuación diferencial.

3. $\dfrac{dy}{dx} = 4x^2 + 7$
4. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^3 - 8x$
5. $\dfrac{dy}{dx} = \cos 2x$
6. $\dfrac{dy}{dx} = 2 \operatorname{sen} x$
7. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{x - 5}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{x - 7}$
9. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2-x}$
10. $\dfrac{dy}{dx} = 3e^{-x/3}$

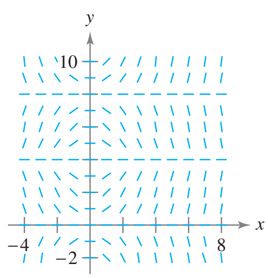
Campos de pendientes **En los ejercicios 11 y 12, una ecuación diferencial y su campo de pendientes son dados. Determinar las pendientes (si es posible) en el campo de pendientes en los puntos dados en la tabla.**

x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx						

11. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - y$



12. $\dfrac{dy}{dx} = x \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi y}{4}\right)$



Campos de pendientes **En los ejercicios 13 a 18, *a*) trazar la gráfica del campo de pendientes dado por la ecuación diferencial y *b*) usar el campo de pendientes para graficar la solución que pasa a través del punto dado. Utilizar una herramienta de graficación para verificar el resultado.**

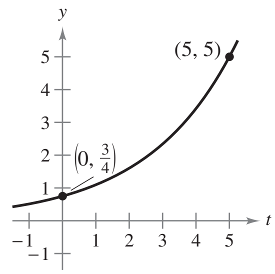
	Ecuación diferencial	*Punto*
13.	$y' = 3 - x$	$(2, 1)$
14.	$y' = 2x^2 - x$	$(0, 2)$
15.	$y' = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{3}x$	$(0, 3)$
16.	$y' = y + 4x$	$(-1, 1)$
17.	$y' = \dfrac{xy}{x^2 + 4}$	$(0, 1)$
18.	$y' = \dfrac{y}{x^2 + 1}$	$(0, -2)$

En los ejercicios 19 a 24, resolver la ecuación diferencial.

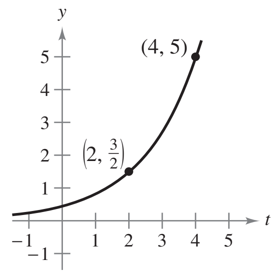
19. $\dfrac{dy}{dx} = 8 - x$
20. $\dfrac{dy}{dx} = y + 8$
21. $\dfrac{dy}{dx} = (3 + y)^2$
22. $\dfrac{dy}{dx} = 10\sqrt{y}$
23. $(2 + x)y' - xy = 0$
24. $xy' - (x + 1)y = 0$

En los ejercicios 25 a 28, encontrar la función exponencial $y = Ce^{kt}$ que pasa a través de los dos puntos.

25.



26.



27. $(0, 5), \left(5, \dfrac{1}{6}\right)$
28. $(1, 9), (6, 2)$

29. ***Presión del aire*** Bajo condiciones ideales, la presión del aire decrece continuamente en relación con la altura sobre el nivel del mar a una tasa proporcional a la presión a esa altura. El barómetro marca 30 pulgadas al nivel del mar y 15 pulgadas a 18 000 pies. Encontrar la presión barométrica a 35 000 pies.

30. ***Desintegración radiactiva*** El radio radiactivo tiene una vida media de aproximadamente 1 599 años. La cantidad inicial es 15 gramos. ¿Qué cantidad permanece después de 750 años?

31. ***Ventas*** Las ventas S (en miles de unidades) de un nuevo producto después de que ha estado en el mercado por t años está dada por

$$S = Ce^{k/t}.$$

a) Encontrar S como una función de t si se han vendido 5 000 unidades después de 1 año y el punto de saturación del mercado es 30 000 unidades (es decir, $\lim\limits_{t\to\infty} S = 30$).

b) ¿Cuántas unidades se han vendido después de 5 años?

c) Usar una herramienta de graficación para presentar esta función de ventas.

32. ***Ventas*** Las ventas S (en miles de unidades) de un nuevo producto después de que ha estado en el mercado durante t años están dadas por

$$S = 25(1 - e^{kt})$$

a) Encontrar S como función de t si se han vendido 4 000 unidades después de 1 año.

b) ¿Cuántas unidades saturarán este mercado?

c) ¿Cuántas unidades se habrán vendido después de 5 años?

d) Usar una herramienta de graficación para presentar esta función de ventas.

33. ***Crecimiento de población*** Una población crece continuamente a una tasa de 1.85%. ¿Cuánto tiempo tardará la población en duplicarse?

34. ***Ahorro de gasolina*** Un automóvil recorre 28 millas por galón de gasolina a velocidades superiores a 50 millas por hora. A más de 50 millas por hora, el número de millas por galones cae a una tasa de 12% por cada 10 millas por hora.

a) s es la velocidad y y es el número de millas por galón. Encontrar y como función de s mediante la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{ds} = -0.012y, \quad s > 50.$$

b) Usar la función del apartado *a*) para completar la tabla.

Velocidad	50	55	60	65	70
Millas por galón					

En los ejercicios 35 a 40, resolver la ecuación diferencial.

35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^5 + 7}{x}$ **36.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

37. $y' - 16xy = 0$ **38.** $y' - e^y \operatorname{sen} x = 0$

39. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ **40.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3(x + y)}{x}$

41. Verificar que la solución general $y = C_1x + C_2x^3$ satisface la ecuación diferencial $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$. Entonces, encontrar la solución particular que satisface la condición inicial $y = 0$ y $y' = 4$ cuando $x = 2$.

42. ***Movimiento vertical*** Un objeto que cae se encuentra con la resistencia al aire que es proporcional a su velocidad. La aceleración debida a la gravedad es -9.8 metros por segundo al cuadrado. El cambio neto en la velocidad es $dv/dt = kv - 9.8$.

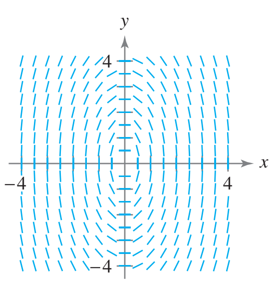
a) Encontrar la velocidad del objeto como función del tiempo si la velocidad inicial es v_0.

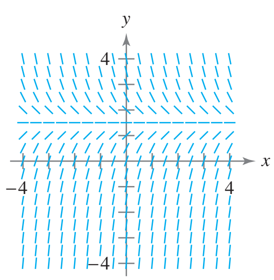
b) Usar el resultado del apartado *a*) para encontrar el límite de la velocidad cuando t se aproxima al infinito.

c) Integrar la función velocidad que se encontró en el inciso *a*) para encontrar la posición s.

Campos de pendientes **En los ejercicios 43 y 44, trazar la gráfica de algunas funciones de la ecuación diferencial sobre el campo de pendientes y encontrar la solución general de forma analítica.**

43. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{y}$ **44.** $\dfrac{dy}{dx} = 3 - 2y$





En los ejercicios 45 y 46, usar la ecuación logística para calcular el crecimiento de una población. Usar la ecuación para *a*) encontrar el valor de *k*, *b*) encontrar la capacidad límite o de soporte, *c*) calcular la población inicial, *d*) determinar cuándo la población alcanzará 50% de su capacidad límite o de soporte y *e*) escribir la ecuación diferencial logística que tiene la solución *P*(*t*).

45. $P(t) = \dfrac{5\,250}{1 + 34e^{-0.55t}}$ **46.** $P(t) = \dfrac{4\,800}{1 + 14e^{-0.15t}}$

En los ejercicios 47 y 48, encontrar la ecuación logística que satisfaga la condición inicial.

	Ecuación diferencial logística	*Condición inicial*
47.	$\dfrac{dy}{dt} = y\left(1 - \dfrac{y}{80}\right)$	(0, 8)
48.	$\dfrac{dy}{dt} = 1.76y\left(1 - \dfrac{y}{8}\right)$	(0, 3)

49. ***Medio ambiente*** Un departamento de conservación libera 1 200 truchas de río en un lago. Se estima que la capacidad límite o de soporte del lago para las especies es 20 400. Después del primer año, existen 2 000 truchas en el lago.

a) Escribir la ecuación logística que calcula el número de truchas en el lago.

b) Encontrar el número de truchas en el lago después de 8 años.

c) ¿Cuándo el número de truchas en el lago será de 10 000?

50. ***Medio ambiente*** Escribir la ecuación diferencial logística que calcula la tasa de crecimiento de la población de las truchas en el ejercicio 49. Entonces repetir el inciso *b*) mediante el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 1$. Comparar la aproximación con la respuesta exacta.

En los ejercicios 51 a 60, resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden.

51. $y^1 - y = 10$ **52.** $e^x y' + 4e^x y = 1$

53. $4y' = e^{x/4} + y$ **54.** $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{5y}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$

55. $(x - 2)y' + y = 1$

56. $(x + 3)y' + 2y = 2(x + 3)^2$

57. $(3y + \operatorname{sen} 2x)\, dx - dy = 0$

58. $dy = (y \tan x + 2e^x)\, dx$

59. $y' + 5y = e^{5x}$

60. $xy' - ay = bx^4$

En los ejercicios 61 a 64, resolver la ecuación diferencial de Bernoulli.

61. $y' + y = xy^2$ $\left[\textit{Sugerencia: } \int xe^{-x}\, dx = (-x - 1)e^{-x}\right]$

62. $y' + 2xy = xy^2$

63. $y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = \dfrac{y^3}{x^2}$

64. $xy' + y = xy^2$

En los ejercicios 65 a 68, escribir un ejemplo de la ecuación diferencial dada. A continuación resolver la ecuación.

65. Ecuación diferencial homogénea.

66. Ecuación diferencial logística.

67. Ecuación diferencial lineal de primer orden.

68. Ecuación diferencial de Bernoulli.

SP Solución de problemas

1. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+\varepsilon}$$

donde k y ε son constantes positivas, se denomina como la **ecuación del día final**.

a) Resolver la ecuación del día final

$$\frac{dy}{dt} = y^{1.01}$$

dado que $y(0) = 1$. Encontrar el tiempo T en el cual

$$\lim_{t \to T^-} y(t) = \infty.$$

b) Resolver la ecuación del día final

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+\varepsilon}$$

dado que $y(0) = y_0$. Explicar por qué esta ecuación se denomina ecuación del día final.

2. Un termómetro se lleva desde una habitación a 72° F hacia el exterior, donde la temperatura es 20° F. La lectura cae a 48° F después de 1 minuto. Determinar la lectura del termómetro después de 5 minutos.

3. Considerar que S representa las ventas de un nuevo producto (en miles de unidades), L es el nivel máximo de ventas (en miles de unidades) y t el tiempo (en meses). La razón de cambio de S con respecto a t varía al mismo tiempo que el producto S y $L - S$.

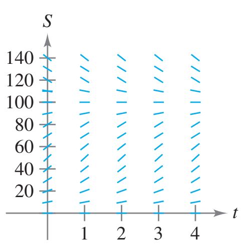
a) Escribir la ecuación diferencial para el modelo de ventas si $L = 100$, $S = 10$ cuando $t = 0$ y $S = 20$ cuando $t = 1$. Verificar que

$$S = \frac{L}{1 + Ce^{-kt}}.$$

b) ¿En qué tiempo se incrementa más rápidamente el crecimiento en ventas?

c) Usar una herramienta de graficación para representar la función de ventas.

d) Representar gráficamente la solución del inciso *a*) sobre el campo de pendiente mostrado en la figura de abajo.



e) Si el nivel máximo de ventas estimado es correcto, usar el campo de pendientes para describir la forma de las curvas solución para ventas si, en algún periodo, las ventas exceden a L.

4. Otro modelo que se puede usar para representar el crecimiento de la población es la **ecuación de Gompertz**, la cual es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = k \ln\left(\frac{L}{y}\right)y$$

donde k es una constante y L es la capacidad límite o de soporte.

a) Resolver la ecuación diferencial.

b) Utilizar una herramienta de graficación para presentar el campo de pendientes para la ecuación diferencial cuando $k = 0.05$ y $L = 1\,000$.

c) Describir el comportamiento de la gráfica cuando $t \to \infty$.

d) Trazar la gráfica de la ecuación diferencial que se encontró en el apartado *a*) para $L = 5\,000$, $y_0 = 500$ y $k = 0.02$. Determinar la concavidad de la gráfica y cómo se compara con la solución general de la ecuación diferencial logística.

5. Demostrar que la ecuación logística $y = L/(1 + be^{-kt})$ se puede escribir como

$$y = \frac{1}{2}L\left[1 + \tanh\left(\frac{1}{2}k\left(t - \frac{\ln b}{k}\right)\right)\right].$$

¿Qué se puede concluir acerca de la gráfica de la ecuación logística?

6. Aunque es verdad para algunas funciones f y g, un error común en el cálculo es creer que la regla del producto en derivadas es $(fg)' = f'g'$.

a) Dado $g(x) = x$, encontrar f tal que $(fg)' = f'g'$.

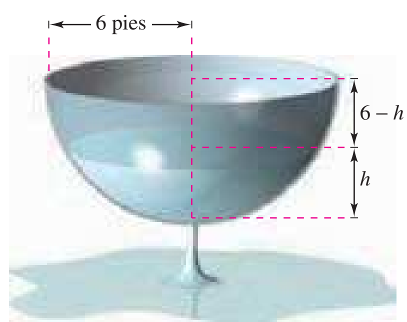
b) Dada una función arbitraria g, encontrar una función f tal que $(fg)' = f'g'$.

c) Describir qué pasa si $g(x) = e^x$.

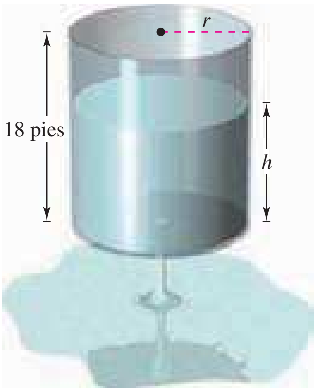
7. **La ley de Torricelli** establece que el agua fluirá desde una abertura en la parte inferior del tanque con la misma velocidad que alcanzaría al caer desde la superficie del agua a la abertura. Una de las formas de la ecuación de Torricelli es

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{2gh}$$

donde h es la altura del agua en el tanque, k es el área de la abertura de la parte inferior del tanque, $A(h)$ es el área de la sección transversal a la altura h, y g es la aceleración debida a la gravedad ($g \approx 32$ pies/s^2). Un tanque de agua hemisférico tiene un radio de 6 pies. Cuando el tanque está lleno, una válvula circular con un radio de 1 pulgada se abre en la parte inferior, como se muestra en la figura. ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?



8. El tanque cilíndrico de agua mostrado en la figura tiene una altura de 18 pies. Cuando el tanque está lleno, una válvula circular se abre en la parte inferior del tanque. Después de 30 minutos, la profundidad del agua es de 12 pies.



a) ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?
b) ¿Cuál es la profundidad del agua en el tanque después de 1 hora?

9. Suponer que el tanque del ejercicio 8 tiene una altura de 20 pies, un radio de 8 pies, y la válvula circular tiene un radio de 2 pulgadas. El tanque está completamente lleno cuando la válvula está abierta. ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?

10. En áreas montañosas, la recepción de la radio puede ser débil. Considerar una situación donde una emisora de FM se localiza en el punto (–1, 1) detrás de un monte representado por la gráfica de

$y = x - x^2$

y el receptor de radio está en el lado opuesto del monte. (Suponer que el eje x representa el nivel de referencia en la base del monte.)

a) ¿Cuál es la posición más cercana de la radio $(x, 0)$ respecto al monte para que no haya interferencias?
b) Escribir la posición de la radio más cercana $(x, 0)$ con x representada como una función de h si la emisora se localiza a $(-1, h)$.
c) Usar una herramienta de graficación para x en el inciso *b*). Determinar la asíntota vertical de la función e interpretar el resultado.

11. La biomasa es una medida de la cantidad de la materia viviente en un ecosistema. Suponer que la biomasa $s(t)$ en un ecosistema dado se incrementa a una tasa aproximada de 3.5 toneladas por año, y decrece, aproximadamente, 1.9% por año. La situación se puede calcular mediante la ecuación diferencial

$$\frac{ds}{dt} = 3.5 - 0.019s.$$

a) Resolver la ecuación diferencial.
b) Usar una herramienta de graficación para presentar el campo de pendientes de la ecuación diferencial. ¿Qué se observa?
c) Explicar qué sucede cuando $t \to \infty$.

En los ejercicios 12 a 14, un investigador médico quiere determinar la concentración C (en moles por litro) de un medicamento marcador inyectado en un fluido en movimiento. Resolver este problema al considerar un modelo de dilución de un compartimento simple (ver la figura). Suponer que el fluido está siendo mezclado y que el volumen de éste en el compartimento es constante.

Figura para 12 a 14

12. Si el marcador es inyectado instantáneamente en el tiempo $t = 0$, entonces la concentración del fluido en el compartimento se empieza a diluir según la ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = \left(-\frac{R}{V}\right)C, \quad C = C_0 \text{ cuando } t = 0.$$

a) Resolver la ecuación diferencial para encontrar la concentración C como función de t.
b) Encontrar el límite de C cuando $t \to \infty$.

13. Usar la solución de la ecuación diferencial en el ejercicio 12 para encontrar la concentración C como función del tiempo t y usar una herramienta de graficación para presentar la función.

a) $V = 2$ litros, $R = 0.5$ litros por minuto y $C_0 = 0.6$ moles por litro.
b) $V = 2$ litros, $R = 1.5$ litros por minuto y $C_0 = 0.6$ moles por litro.

14. En los ejercicios 12 y 13, se supuso que había una inyección simple inicial del medicamento marcador dentro del compartimento. Ahora considerar el caso en el cual el marcador es continuamente inyectado (iniciando en $t = 0$) a una tasa de Q moles por minuto. Si considera Q despreciable comparada con R, usar la ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q}{V} - \left(\frac{R}{V}\right)C, \quad C = 0 \text{ cuando } t = 0.$$

a) Resolver esta ecuación diferencial para encontrar la concentración C como función del tiempo t.
b) Encontrar el límite de C cuando $t \to \infty$.

7 Aplicaciones de la integral

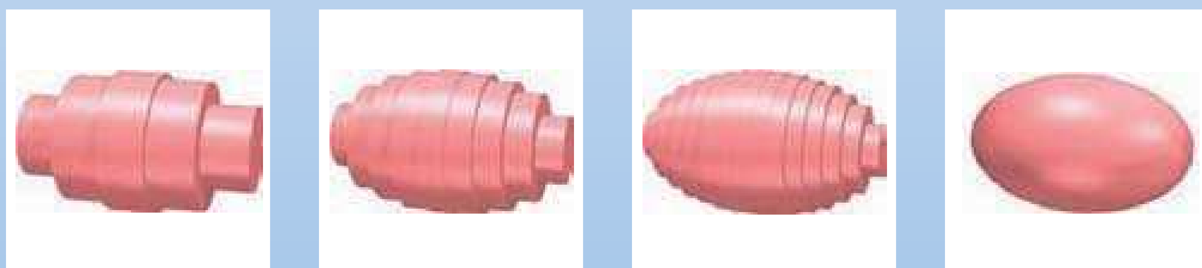
La integral tiene una amplia variedad de aplicaciones. Para cada una de las aplicaciones presentadas en este capítulo, se comenzará con una fórmula conocida, tal como el área de una región rectangular, el volumen de un disco circular o el trabajo realizado por una fuerza constante. Entonces el lector aprenderá cómo el límite de una suma da lugar a nuevas fórmulas que involucran la integral.

En este capítulo se aprenderá:

- Cómo usar una integral definida para encontrar el área de una región acotada por dos curvas. (7.1)
- Cómo encontrar el volumen de un sólido de revolución por el método de los discos y el método de las capas. (7.2 y 7.3)
- Cómo encontrar la longitud de una curva y el área de una superficie de revolución. (7.4)
- Cómo encontrar el trabajo realizado por una fuerza constante y una fuerza variable. (7.5)
- Cómo encontrar centros de masa y centroides. (7.6)
- Cómo encontrar la presión y la fuerza de un fluido. (7.7)

Eddie Hironaka/Getty Images

Un cable eléctrico se cuelga entre dos torres que están a 200 pies de distancia. El cable tiene la forma de catenaria. ¿Cuál es la longitud del cable entre las dos torres? (Ver sección 7.4, ejemplo 5.)



El *método de los discos* es un método que se usa para encontrar el volumen de un sólido. Este método requiere encontrar la suma de los volúmenes de discos representativos para aproximar el volumen del sólido. Cuando se incrementa el número de discos, la aproximación tiende a ser más exacta. En la sección 7.2 se usarán los límites para escribir el volumen exacto del sólido como una integral definida.

7.1 Área de una región entre dos curvas

- **Encontrar el área de una región entre dos curvas usando integración.**
- **Encontrar el área de una región entre curvas que se intersecan usando integración.**
- **Describir la integración como un proceso de acumulación.**

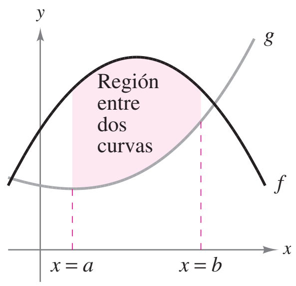
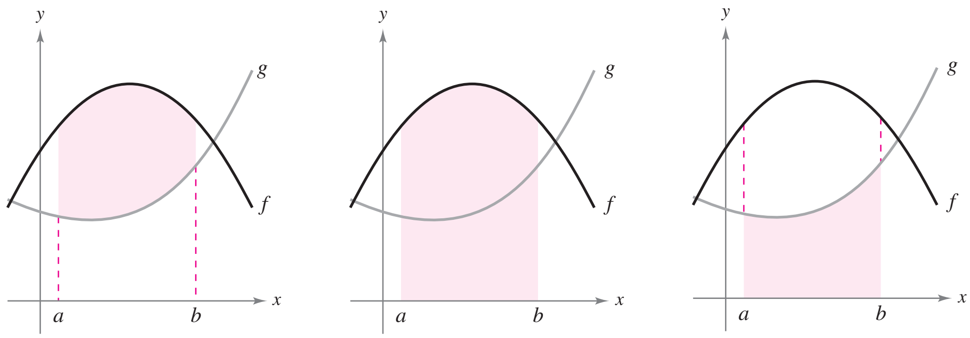


Figura 7.1

Área de una región entre dos curvas

A partir de unas modificaciones se puede extender la aplicación de las integrales definidas para el área de una región *bajo* una curva al área de una región *entre* dos curvas. Considerar dos funciones f y g que son continuas en el intervalo $[a, b]$. Si, como en la figura 7.1, las gráficas de f y g están sobre el eje x y la gráfica de g debajo de la gráfica de f, se puede interpretar geométricamente el área de la región entre las gráficas como el área de la región bajo la gráfica de g sustraída del área de la región bajo la gráfica f, como se muestra en la figura 7.2.



Área de la región entre f y g = Área de la región bajo f − Área de la región bajo g

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Figura 7.2

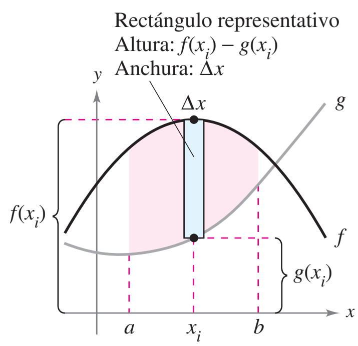


Figura 7.3

Para verificar que el resultado mostrado en la figura 7.2 es razonable, se puede dividir el intervalo $[a, b]$ entre n subintervalos, cada uno de anchura Δx. Entonces, como se muestra en la figura 7.3, se traza un **rectángulo representativo** de anchura Δx y altura $f(x_i) - g(x_i)$, donde x_i es un punto del i-ésimo subintervalo. El área de este rectángulo representativo es

$$\Delta A_i = (\text{altura})(\text{anchura}) = [f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x.$$

Por adición de las áreas de los n rectángulos y tomando el límite cuando $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x.$$

Porque f y g son continuas en $[a, b]$, $f - g$ también es continua en $[a, b]$ y el límite existe. Así que, el área de la región dada es

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.\end{aligned}$$

ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

En la figura 7.1, las gráficas de f y g se muestran sobre el eje x. Esto, sin embargo, no es necesario. El mismo integrando $[f(x) - g(x)]$ puede usarse con tal de que f y g sean continuas y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en el intervalo $[a, b]$. Este resultado se resume en la figura 7.4. Observar en la figura 7.4 que la altura de un rectángulo representativo es $f(x) - g(x)$ con respecto de la posición relativa del eje x.

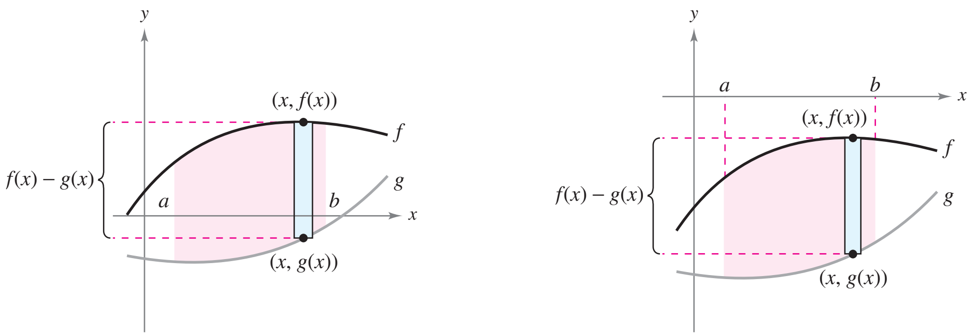


Figura 7.4

Se usan los rectángulos representativos a lo largo de este capítulo en varias aplicaciones de la integral. Un rectángulo vertical (de anchura Δx) implica la integral con respecto a x, mientras que un rectángulo horizontal (de anchura Δy) implica la integral con respecto a y.

EJEMPLO 1 Encontrar el área de una región entre dos curvas

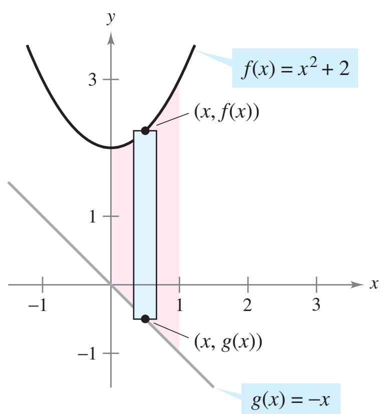
Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución Sean $g(x) = -x$ y $f(x) = x^2 + 2$. Entonces $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[0, 1]$, como se muestra en la figura 7.5. Así, el área del rectángulo representativo es

$$\begin{aligned} \Delta A &= [f(x) - g(x)]\,\Delta x \\ &= [(x^2 + 2) - (-x)]\,\Delta x \end{aligned}$$

y el área de la región es

$$\begin{aligned} A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx &= \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)]\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 \\ &= \frac{17}{6}. \end{aligned}$$



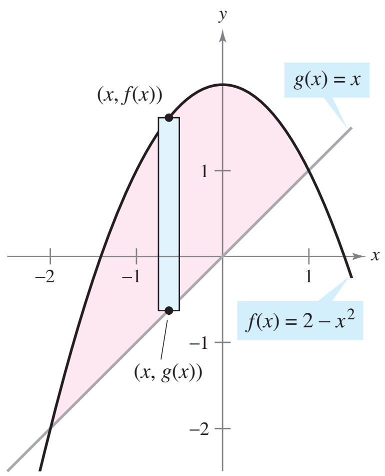
Región comprendida por la gráfica de f, la gráfica de g, $x = 0$ y $x = 1$
Figura 7.5

Área de una región entre curvas que se intersecan

En el ejemplo 1, las gráficas de $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -x$ no se intersecan, y los valores de a y b se dan explícitamente. Un problema más común involucra el área de una región comprendida entre dos gráficas que se *intersecan* donde los valores de a y b deben calcularse.

EJEMPLO 2 Región determinada por dos gráficas que se intersecan

Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x$.



Región comprendida por la gráfica de f y la gráfica de g
Figura 7.6

Solución En la figura 7.6 se observa que las gráficas de f y g tienen dos puntos de intersección. Para encontrar las coordenadas x de estos puntos, se hace $f(x)$ y $g(x)$ iguales y se resuelve para x.

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= x && \text{Igualar } f(x) \text{ con } g(x). \\ -x^2 - x + 2 &= 0 && \text{Escribir en forma general.} \\ -(x + 2)(x - 1) &= 0 && \text{Factorizar.} \\ x &= -2 \text{ o } 1 && \text{Despejar para } x. \end{aligned}$$

Así, $a = -2$ y $b = 1$. Porque $g(x) \leq f(x)$ para todo x en el intervalo $[-2, 1]$, el rectángulo representativo tiene un área de

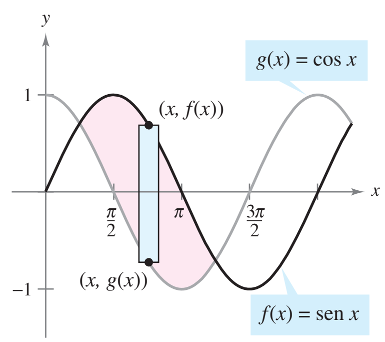
$$\begin{aligned} \Delta A &= [f(x) - g(x)]\,\Delta x \\ &= [(2 - x^2) - x]\,\Delta x \end{aligned}$$

y el área de la región es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Región determinada por dos gráficas que se intersecan

El seno y coseno de las curvas se intersecan infinitas veces, acotando regiones de áreas iguales, como se muestra en la figura 7.7. Encontrar el área de una de estas regiones.



Una de las regiones acotada por las gráficas de las funciones del seno y coseno
Figura 7.7

Solución

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \cos x && \text{Igualar } f(x) \text{ a } g(x). \\ \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} &= 1 && \text{Dividir cada lado por el coseno de } x. \\ \tan x &= 1 && \text{Identidad trigonométrica.} \\ x &= \frac{\pi}{4} \text{ o } \frac{5\pi}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi && \text{Despejar para } x. \end{aligned}$$

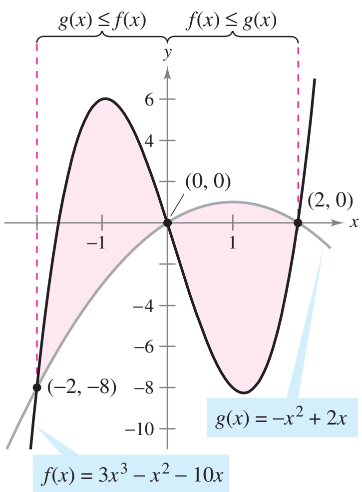
Así, $a = \pi/4$ y $b = 5\pi/4$. Porque $\operatorname{sen} x \geq \cos x$ para todo x en el intervalo $[\pi/4, 5\pi/4]$, el área de la región es

$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} [\operatorname{sen} x - \cos x]\,dx = \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Si dos curvas se intersecan en más de dos puntos, entonces para encontrar el área de la región comprendida entre las curvas, se deben encontrar todos los puntos de intersección y verificar en cada uno de los intervalos determinados por esos puntos, cuál de las gráficas está encima de la otra.

EJEMPLO 4 Curvas que se intersecan en más de dos puntos

Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.



Sobre $[-2, 0]$, $g(x) \le f(x)$, y sobre $[0, 2]$, $f(x) \le g(x)$

Figura 7.8

Solución Empezar igualando $f(x)$ y $g(x)$ y resolviendo para x. Así se obtienen las coordenadas de x en cada punto de intersección de las dos gráficas.

$$
\begin{aligned}
3x^3 - x^2 - 10x &= -x^2 + 2x && \text{Igualar } f(x) \text{ a } g(x).\\
3x^3 - 12x &= 0 && \text{Escribir en forma general.}\\
3x(x-2)(x+2) &= 0 && \text{Factorizar.}\\
x &= -2, 0, 2 && \text{Despejar para } x.
\end{aligned}
$$

Así, las dos gráficas se cortan cuando $x = -2$, 0 y 2. En la figura 7.8 se observa que $g(x) \le f(x)$ en el intervalo $[-2, 0]$. Sin embargo, las dos gráficas cambian en el origen, y $f(x) \le g(x)$ en el intervalo $[0, 2]$. Así, se necesitan dos integrales, una para el intervalo $[-2, 0]$ y otra para el intervalo $[0, 2]$.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx\\
&= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)\,dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)\,dx\\
&= \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-3x^4}{4} + 6x^2\right]_{0}^{2}\\
&= -(12 - 24) + (-12 + 24) = 24
\end{aligned}
$$

NOTA En el ejemplo 4 se observa que se obtiene un resultado incorrecto si se integra de -2 a 2. Tal integral produce

$$\int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-2}^{2} (3x^3 - 12x)\,dx = 0.$$

Si la gráfica de una función de y es una frontera de una región, es a menudo conveniente usar rectángulos representativos *horizontales* y encontrar el área integrando en la variable y. En general, para determinar el área entre dos curvas, se usan

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{[(\text{curva de arriba}) - (\text{curva de abajo})]}_{\text{en la variable } x}\,dx \qquad \text{Rectángulos verticales.}$$

$$A = \int_{y_1}^{y_2} \underbrace{[(\text{curva derecha}) - (\text{curva izquierda})]}_{\text{en la variable } y}\,dy \qquad \text{Rectángulos horizontales.}$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son los puntos adyacentes de intersección de las dos curvas implicadas o puntos sobre las rectas de la frontera especificadas.

EJEMPLO 5 Rectángulos representativos horizontales

Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $x = 3 - y^2$ y $x = y + 1$.

Solución Considerar

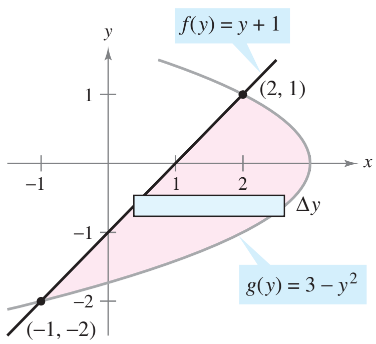
$$g(y) = 3 - y^2 \quad \text{y} \quad f(y) = y + 1.$$

Estas dos curvas se intersecan cuando $y = -2$ y $y = 1$, como se muestra en la figura 7.9. Porque $f(y) \le g(y)$ en este intervalo, se tiene

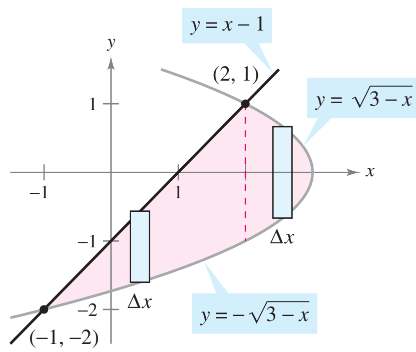
$$\Delta A = [g(y) - f(y)]\,\Delta y = [(3 - y^2) - (y + 1)]\,\Delta y.$$

Así, el área es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} [(3 - y^2) - (y + 1)]\,dy \\ &= \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)\,dy \\ &= \left[\frac{-y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-2}^{1} \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



Rectángulos horizontales (integración con respecto a y)
Figura 7.9



Rectángulos verticales (integración con respecto a x)
Figura 7.10

En el ejemplo 5 se observa que integrando con respecto a y se necesita sólo una integral. Si se integran con respecto a x, se necesitarían dos integrales porque la frontera superior habría cambiado en $x = 2$, como se muestra en la figura 7.10.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} \left[(x - 1) + \sqrt{3 - x}\right] dx + \int_{2}^{3} \left(\sqrt{3 - x} + \sqrt{3 - x}\right) dx \\ &= \int_{-1}^{2} [x - 1 + (3 - x)^{1/2}]\,dx + 2\int_{2}^{3} (3 - x)^{1/2}\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{(3 - x)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^{2} - 2\left[\frac{(3 - x)^{3/2}}{3/2}\right]_{2}^{3} \\ &= \left(2 - 2 - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{16}{3}\right) - 2(0) + 2\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

La integración como un proceso de acumulación

En esta sección, la fórmula de la integral para el área entre dos curvas se desarrolló usando un rectángulo como el *elemento representativo*. Para cada nueva aplicación en las secciones restantes de este capítulo, se construirá un elemento representativo apropiado a partir de las fórmulas previas al cálculo que ya se conocen. Cada fórmula de la integración se obtendrá sumando o acumulando estos elementos representativos.

Fórmula conocida previa al cálculo ⇨ Elemento representativo ⇨ Nueva fórmula de integración

Por ejemplo, en esta sección la fórmula del área se desarrolla como sigue.

$A = (\text{altura})(\text{ancho})$ ⇨ $\Delta A = [f(x) - g(x)]\,\Delta x$ ⇨ $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

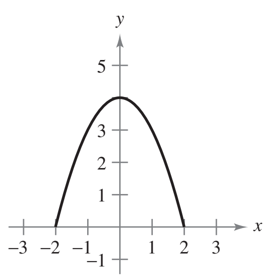
EJEMPLO 6 Descripción de la integración como un proceso de acumulación

Encontrar el área de la región acotada por la gráfica de $y = 4 - x^2$ y el eje x. Describir la integración como un proceso de acumulación.

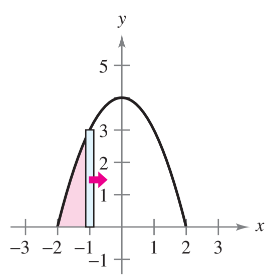
Solución El área de la región está dada por

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx.$$

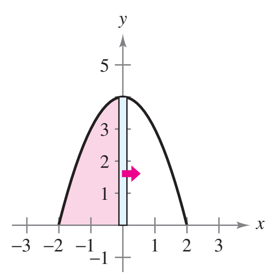
Se piensa en la integración como una acumulación de las áreas de los rectángulos formados al ir desplazando los rectángulos representativos de $x = -2$ a $x = 2$, como se muestra en la figura 7.11.



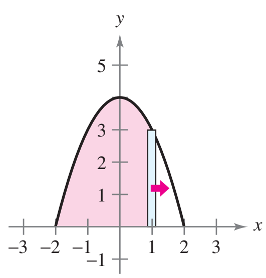
$A = \int_{-2}^{-2} (4 - x^2)\,dx = 0$



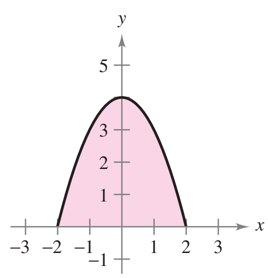
$A = \int_{-2}^{-1} (4 - x^2)\,dx = \frac{5}{3}$



$A = \int_{-2}^{0} (4 - x^2)\,dx = \frac{16}{3}$



$A = \int_{-2}^{1} (4 - x^2)\,dx = 9$



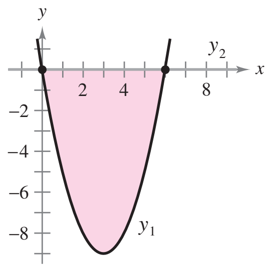
$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \frac{32}{3}$

Figura 7.11

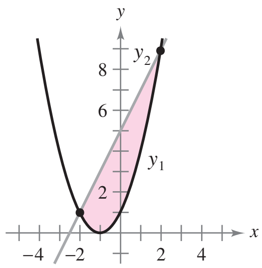
7.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, formular la integral definida que da el área de la región.

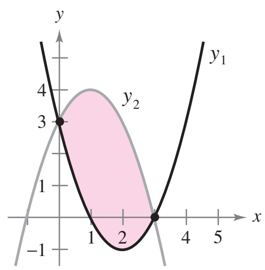
1. $y_1 = x^2 - 6x$
   $y_2 = 0$



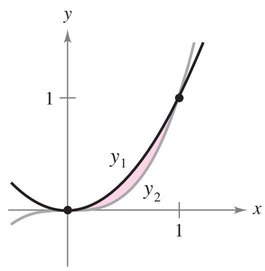
2. $y_1 = x^2 + 2x + 1$
   $y_2 = 2x + 5$



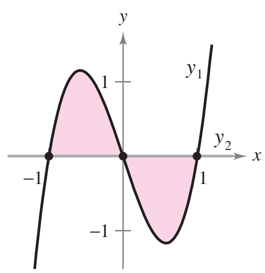
3. $y_1 = x^2 - 4x + 3$
   $y_2 = -x^2 + 2x + 3$



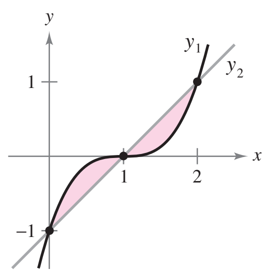
4. $y_1 = x^2$
   $y_2 = x^3$



5. $y_1 = 3(x^3 - x)$
   $y_2 = 0$



6. $y_1 = (x - 1)^3$
   $y_2 = x - 1$



En los ejercicios 7 a 14, el integrando de la integral definida es una diferencia de dos funciones. Dibujar la gráfica de cada función y sombrear la región cuya área está representada por la integral.

7. $\displaystyle\int_0^4 \left[(x+1) - \frac{x}{2}\right] dx$

8. $\displaystyle\int_{-1}^1 [(2 - x^2) - x^2]\, dx$

9. $\displaystyle\int_0^6 \left[4(2^{-x/3}) - \frac{x}{6}\right] dx$

10. $\displaystyle\int_2^3 \left[\left(\frac{x^3}{3} - x\right) - \frac{x}{3}\right] dx$

11. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2 - \sec x)\, dx$

12. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec^2 x - \cos x)\, dx$

13. $\displaystyle\int_{-2}^1 [(2 - y) - y^2]\, dy$

14. $\displaystyle\int_0^4 \left(2\sqrt{y} - y\right) dy$

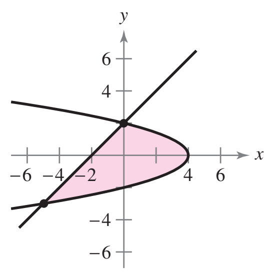
Para pensar **En los ejercicios 15 y 16, determinar qué valor se aproxima mejor al área de la región acotada por las gráficas de *f* y *g*. (Hacer la selección con base en un dibujo de la región sin haber hecho algún cálculo.)**

15. $f(x) = x + 1, \quad g(x) = (x - 1)^2$
    a) -2 *b)* 2 *c)* 10 *d)* 4 *e)* 8

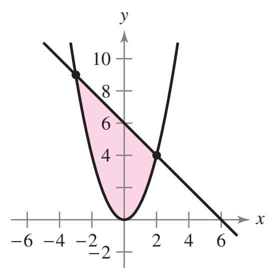
16. $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x, \quad g(x) = 2 - \sqrt{x}$
    a) 1 *b)* 6 *c)* -3 *d)* 3 *e)* 4

En los ejercicios 17 y 18, encontrar el área de la región integrando *a*) con respecto a *x* y *b*) con respecto a *y*. *c*) comparar sus resultados. ¿Cuál método es más simple? En general, este método siempre será más sencillo en uno que en otro. ¿Por qué sí o por qué no?

17. $x = 4 - y^2$
    $x = y - 2$



18. $y = x^2$
    $y = 6 - x$



En los ejercicios 19 a 36, trazar la región acotada por las gráficas de las funciones algebraicas y encontrar el área de la región.

19. $y = x^2 - 1, y = -x + 2, x = 0, x = 1$
20. $y = -x^3 + 3, y = x, x = -1, x = 1$
21. $y = \frac{1}{2}x^3 + 2,\ y = x + 1,\ x = 0,\ x = 2$
22. $y = -\frac{3}{8}x(x - 8),\ y = 10 - \frac{1}{2}x,\ x = 2,\ x = 8$
23. $f(x) = x^2 - 4x,\ \ g(x) = 0$
24. $f(x) = -x^2 + 4x + 1,\ g(x) = x + 1$
25. $f(x) = x^2 + 2x, g(x) = x + 2$
26. $f(x) = -x^2 + \frac{9}{2}x + 1, g(x) = \frac{1}{2}x + 1$
27. $y = x,\ \ y = 2 - x,\ \ y = 0$
28. $y = 1/x^2,\ \ y = 0,\ \ x = 1,\ \ x = 5$
29. $f(x) = \sqrt{x} + 3, g(x) = \frac{1}{2}x + 3$
30. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1},\ g(x) = x - 1$
31. $f(y) = y^2,\ \ g(y) = y + 2$
32. $f(y) = y(2 - y),\ \ g(y) = -y$
33. $f(y) = y^2 + 1,\ \ g(y) = 0,\ \ y = -1,\ \ y = 2$
34. $f(y) = \dfrac{y}{\sqrt{16 - y^2}},\ \ g(y) = 0,\ \ y = 3$
35. $f(x) = \dfrac{10}{x},\ x = 0,\ y = 2,\ y = 10$
36. $g(x) = \dfrac{4}{2 - x},\ \ y = 4,\ \ x = 0$

En los ejercicios 37 a 46, *a*) usar una herramienta de graficación para representar la región comprendida por las gráficas de las ecuaciones, *b*) encontrar el área de la región y *c*) usar las capacidades de integración de una herramienta de graficación para verificar los resultados.

37. $f(x) = x(x^2 - 3x + 3), \quad g(x) = x^2$

38. $f(x) = x^3 - 2x + 1, \quad g(x) = -2x, \quad x = 1$

39. $y = x^2 - 4x + 3, \quad y = 3 + 4x - x^2$

40. $y = x^4 - 2x^2, \quad y = 2x^2$

41. $f(x) = x^4 - 4x^2, \quad g(x) = x^2 - 4$

42. $f(x) = x^4 - 4x^2, \quad g(x) = x^3 - 4x$

43. $f(x) = 1/(1 + x^2), \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2$

44. $f(x) = 6x/(x^2 + 1), \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq 3$

45. $y = \sqrt{1 + x^3}, \quad y = \frac{1}{2}x + 2, \quad x = 0$

46. $y = x\sqrt{\dfrac{4 - x}{4 + x}}, \quad y = 0, \quad x = 4$

En los ejercicios 47 a 52, trazar la región acotada por las gráficas de las funciones, y encontrar el área de la región.

47. $f(x) = \cos x, \quad g(x) = 2 - \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

48. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos 2x, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{6}$

49. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \tan x, \quad -\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$

50. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{4} \tan \dfrac{\pi x}{4}, \quad g(x) = \left(\sqrt{2} - 4\right)x + 4, \quad x = 0$

51. $f(x) = xe^{-x^2}, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$

52. $f(x) = 3^x, \quad g(x) = 2x + 1$

En los ejercicios 53 a 56, *a*) usar una herramienta de graficación para trazar la gráfica de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, *b*) encontrar el área de la región y *c*) usar las funciones de integración de la herramienta de graficación para verificar los resultados.

53. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$

54. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x, \quad y = 0, \quad 0 < x \leq \pi$

55. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{1/x}, \quad y = 0, \quad 1 \leq x \leq 3$

56. $g(x) = \dfrac{4 \ln x}{x}, \quad y = 0, \quad x = 5$

En los ejercicios 57 a 60, *a*) usar una herramienta de graficación para trazar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, *b*) explicar por qué el área de la región es difícil de encontrar a mano y *c*) usar las funciones de integración de la herramienta de graficación para verificar los resultados con cuatro decimales significativos.

57. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{4 - x}}, \quad y = 0, \quad x = 3$

58. $y = \sqrt{x}\, e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

59. $y = x^2, \quad y = 4 \cos x$

60. $y = x^2, \quad y = \sqrt{3 + x}$

En los ejercicios 61 a 64, encontrar la función de acumulación *F*. Entonces evaluar *F* en cada valor de la variable independiente y gráficamente mostrar el área dada por cada valor de *F*.

61. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\tfrac{1}{2}t + 1\right) dt$ *a*) $F(0)$ *b*) $F(2)$ *c*) $F(6)$

62. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\tfrac{1}{2}t^2 + 2\right) dt$ *a*) $F(0)$ *b*) $F(4)$ *c*) $F(6)$

63. $F(\alpha) = \displaystyle\int_{-1}^{\alpha} \cos \frac{\pi\theta}{2}\, d\theta$ *a*) $F(-1)$ *b*) $F(0)$ *c*) $F\left(\tfrac{1}{2}\right)$

64. $F(y) = \displaystyle\int_{-1}^{y} 4e^{x/2}\, dx$ *a*) $F(-1)$ *b*) $F(0)$ *c*) $F(4)$

En los ejercicios 65 a 68, usar la integración para encontrar el área de la figura que tiene los vértices dados.

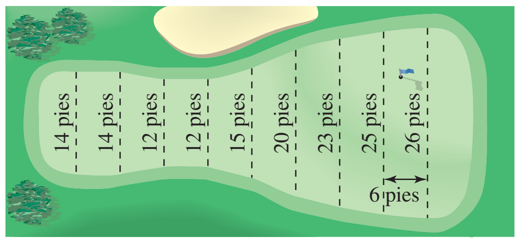
65. $(2, -3), (4, 6), (6, 1)$

66. $(0, 0), (a, 0), (b, c)$

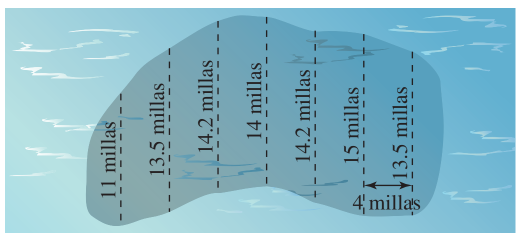
67. $(0, 2), (4, 2), (0, -2), (-4, -2)$

68. $(0, 0), (1, 2), (3, -2), (1, -3)$

69. ***Integración numérica*** Estimar el área de la superficie del *green* de golf usando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.



70. ***Integración numérica*** Estimar el área de la superficie del derrame de petróleo usando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.



En los ejercicios 71 y 72, evaluar la integral e interpretar ésta como el área de la región. Después usar una computadora para graficar la región.

71. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} |\operatorname{sen} 2x - \cos 4x|\, dx$

72. $\displaystyle\int_0^2 \left|\sqrt{x + 3} - 2x\right| dx$

En los ejercicios 73 a 76, formular y evaluar la integral definida que da el área de la región acotada por la gráfica de la función y la recta tangente para la gráfica en el punto dado.

73. $f(x) = x^3, \quad (1, 1)$

74. $y = x^3 - 2x, \quad (-1, 1)$

75. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}, \quad \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

76. $y = \dfrac{2}{1 + 4x^2}, \quad \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$

Desarrollo de conceptos

77. Las gráficas $y = x^4 - 2x^2 + 1$ y $y = 1 - x^2$ se intersecan en tres puntos. Sin embargo, el área entre las curvas *puede* encontrarse por una sola integral. Explicar por qué es así, y escribir una integral para esta área.

78. El área de la región acotada por las gráficas de $y = x^3$ y $y = x$ *no puede* encontrarse por una integral única $\int_{-1}^{1}(x^3 - x)\,dx$. Explicar por qué esto es así. Usar la simetría para escribir una sola integral que representa el área.

79. Un graduado de la universidad tiene dos ofertas de trabajo. El sueldo de arranque para cada una es \$32 000 y después de 8 años de servicio cada una pagará \$54 000. El aumento del sueldo para cada oferta se muestra en la figura. Dar un punto de vista estrictamente monetario de qué oferta es mejor. Explicar.

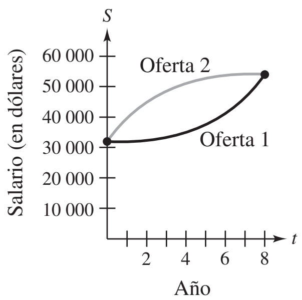


Figura para 79

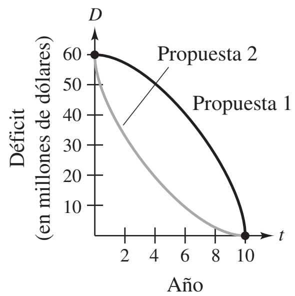


Figura para 80

80. Una legislatura estatal está debatiendo dos propuestas para eliminar el déficit del presupuesto anual para el año 2010. La tasa de disminución del déficit para cada propuesta se muestra en la figura. Desde el punto de vista de minimizar el déficit estatal acumulativo ¿cuál es la mejor propuesta? Explicar.

81. Se prueban dos coches en una pista recta con velocidades v_1 y v_2 (en metros por segundo). Considerar lo siguiente.

$$\int_0^5 [v_1(t) - v_2(t)]\,dt = 10 \qquad \int_0^{10} [v_1(t) - v_2(t)]\,dt = 30$$

$$\int_{20}^{30} [v_1(t) - v_2(t)]\,dt = -5$$

a) Escribir una interpretación verbal de cada integral.

b) ¿Es posible determinar la distancia entre los dos coches cuando $t = 5$ segundos? ¿Por qué sí? o ¿por qué no?

c) Suponiendo que ambos coches arrancan al mismo tiempo y lugar, ¿qué coche va por delante en $t = 10$ segundos? ¿Qué tan adelante está el coche?

d) Suponiendo que el coche 1 tiene una velocidad v_1 y está al frente del coche 2 por 13 metros en $t = 20$ segundos, ¿qué tan adelante o atrás está el coche 1 cuando $t = 30$ segundos?

Para discusión

82. Sean f y g una función continua en $[a, b]$ y $g(x) \le f(x)$ para toda x en $[a, b]$. Escribir el área obtenida para $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$. ¿La interpretación del área de esta integral cambia cuando $f(x) \ge 0$ y $g(x) \le 0$?

En los ejercicios 83 y 84, encontrar b tal que la recta $y = b$ divide la región intersecada por las gráficas de las dos ecuaciones en dos regiones de área igual.

83. $y = 9 - x^2, \quad y = 0$ **84.** $y = 9 - |x|, \quad y = 0$

En los ejercicios 85 y 86, encontrar a tal que la recta $x = a$ divida la región intersecada por las gráficas de las ecuaciones en dos regiones de área igual.

85. $y = x, \quad y = 4, \quad x = 0$ **86.** $y^2 = 4 - x, \quad x = 0$

En los ejercicios 87 y 88, evaluar el límite y dibujar la gráfica de la región cuya área se representa por el límite.

87. $\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^2)\,\Delta x$, donde $x_i = i/n$ y $\Delta x = 1/n$

88. $\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (4 - x_i^2)\,\Delta x$, donde $x_i = -2 + (4i/n)$ y $\Delta x = 4/n$

En los ejercicios 89 y 90, *a*) encontrar los dos puntos de inflexión de la gráfica de f, *b*) determinar la ecuación de la recta que interseca ambos puntos y *c*) calcular el área de las tres regiones acotada por la gráfica de f y la recta. ¿Qué se observa?

89. $f(x) = x^4 + 4x^3 + x + 7$ **90.** $f(x) = 2x^4 - 12x^2 + 3x - 1$

Ingresos **En los ejercicios 91 y 92 se dan dos modelos R_1 y R_2 para el ingreso (en miles de millones de dólares por año) para una corporación grande. El modelo R_1 da los ingresos anuales proyectados de 2008 a 2013, con $t = 8$ que corresponden a 2008, y R_2 da los ingresos proyectados si hay una disminución en la proporción de crecimiento de ventas corporativas sobre el periodo. Aproximar la reducción total en el ingreso si las ventas corporativas son realmente más cercanas al ejemplo R_2.**

91. $R_1 = 7.21 + 0.58t$
$R_2 = 7.21 + 0.45t$

92. $R_1 = 7.21 + 0.26t + 0.02t^2$
$R_2 = 7.21 + 0.1t + 0.01t^2$

93. ***Curva de Lorenz*** Los economistas usan la *curva de Lorenz* para ilustrar la distribución del ingreso en un país. Una curva de Lorenz, $y = f(x)$, representa la distribución del ingreso real en el país. En este modelo, x representa el porcentaje de familias en el país y y representa el porcentaje de ingreso total. El modelo $y = x$ representa un país en que cada familia tiene el mismo ingreso. El área entre estos dos modelos, donde $0 \le x \le 100$, indica la "desigualdad del ingreso" de un país. La tabla muestra el porcentaje de ingreso y para los porcentajes seleccionados de x familias en un país.

x	10	20	30	40	50
y	3.35	6.07	9.17	13.39	19.45

x	60	70	80	90
y	28.03	39.77	55.28	75.12

a) Usar una herramienta de graficación para encontrar un modelo cuadrático para la curva de Lorenz.

b) Trazar una gráfica de los datos y del modelo.

c) Representar el modelo $y = x$. ¿Cómo se compara este modelo con respecto al modelo *a*)?

d) Usar las capacidades de la integración de una calculadora para aproximar la “desigualdad del ingreso”.

94. ***Beneficios*** El departamento de contabilidad de una compañía informa que los beneficios durante el último año fiscal fueron de 15.9 millones de dólares. El departamento predice que los beneficios por crecimiento continuo durante los próximos 5 años generarán una tasa anual continua entre $3\frac{1}{2}$ y 5%. Estimar la diferencia acumulativa en los beneficios durante los 5 años basados en el rango predicho de tasas de crecimiento.

95. ***Área*** La región sombreada en la figura consiste en todos los puntos cuyas distancias del centro del cuadrado es menor que las distancias a los bordes del cuadrado. Encontrar el área de la región.

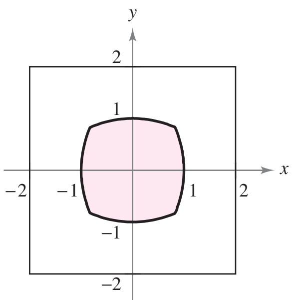


Figura para 95

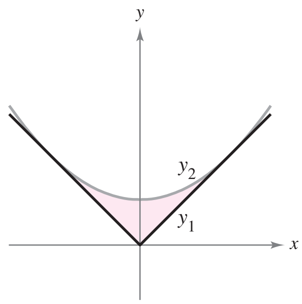


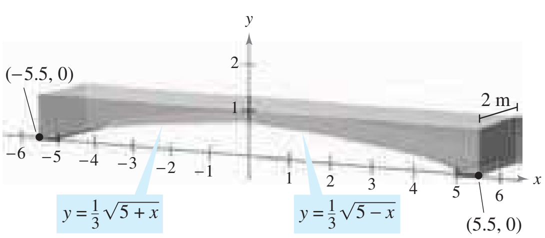
Figura para 96

96. ***Diseño mecánico*** La superficie de una parte de una máquina es la región entre las gráficas de $y_1 = |x|$ y $y_2 = 0.08x^2 + k$ (véase la figura).

a) Encontrar k si la parábola es tangente a la gráfica de y_1.

b) Encontrar el área de la superficie de la parte de la máquina.

97. ***Diseño de construcción*** Las secciones de concreto (hormigón) para un nuevo edificio tienen las dimensiones (en metros) y la forma mostrada en la figura.



a) Encontrar el área de la cara adosada en el sistema de la coordenada rectangular.

b) Encontrar el volumen de concreto en una de las secciones multiplicando el área obtenida en el apartado *a*) por 2 metros.

c) Un metro cúbico de concreto pesa 5 000 libras. Encontrar el peso de la sección.

98. ***Diseño de construcción*** Para disminuir el peso y ayudar en el proceso del endurecimiento, las secciones de concreto en el ejercicio 97 no son a menudo sólidas. Rehacer el ejercicio 97 haciendo orificios cilíndricos como los mostrados en la figura.

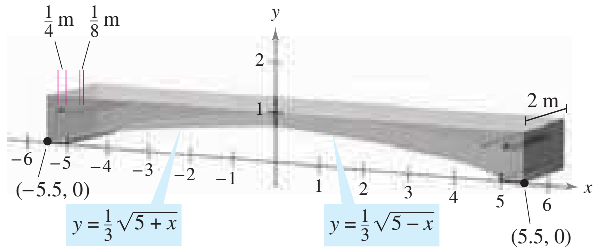


Figura para 98

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 99 a 102, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un contraejemplo.**

99. Si el área de la región limitada por las gráficas de f y g es 1, entonces el área de la región acotada por las gráficas de $h(x) = f(x) + C$ y $k(x) = g(x) + C$ también es 1.

100. Si $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = A$, entonces $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = -A$.

101. Si las gráficas de f y g se intersecan a la mitad del camino entre $x = a$ y $x = b$, entonces, $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = 0$.

102. La recta $y = \left(1 - \sqrt[3]{0.5}\right)x$ divide la región debajo de la curva $f(x) = x(1 - x)$ para $[0, 1]$ en dos regiones de igual área.

103. ***Área*** Encontrar el área entre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y el segmento de recta que une los puntos $(0, 0)$ y $\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$, como se muestra en la figura.

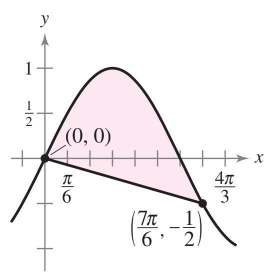


Figura para 103

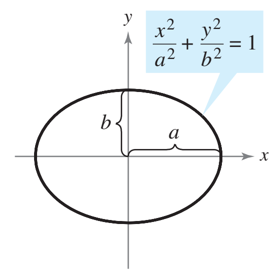
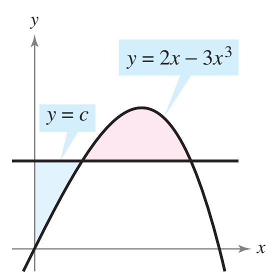


Figura para 104

104. ***Área*** Sea $a > 0$ y $b > 0$. Mostrar que el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es πab (ver la figura).

Preparación del examen Putnam

105. La recta horizontal $y = c$ interseca la curva $y = 2x - 3x^3$ en el primer cuadrante como se muestra en la figura. Encontrar c para que las áreas de las dos regiones sombreadas sean iguales.



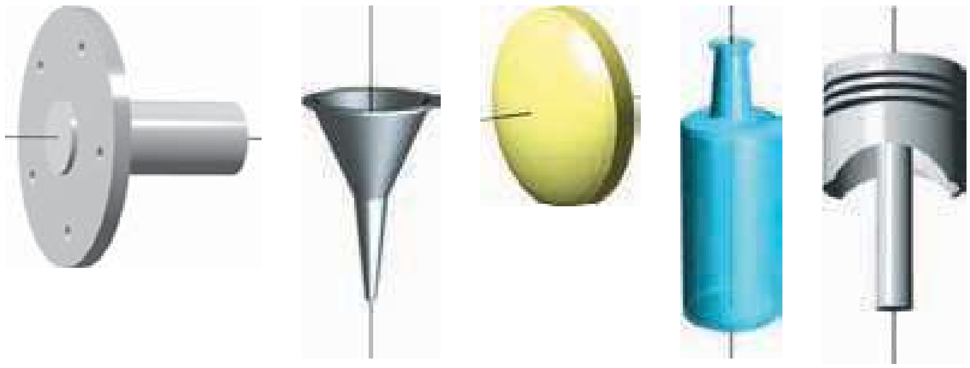
Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.

7.2 Volumen: el método de los discos

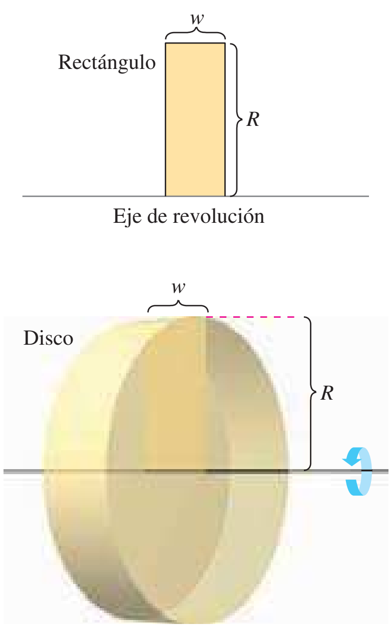
- **Encontrar el volumen de un sólido de revolución usando el método de los discos.**
- **Encontrar el volumen de un sólido de revolución usando el método de las arandelas.**
- **Encontrar el volumen de un sólido con las secciones transversales conocidas.**

Método de los discos

Anteriormente se mencionó que el área es una de las *muchas* aplicaciones de la integral definida. Otra aplicación importante es su uso para encontrar el volumen de un sólido tridimensional. En esta sección se estudiará un tipo particular de un sólido tridimensional cuyas secciones transversales son similares. Por lo común se emplean sólidos de revolución en ingeniería y manufactura. Algunos ejemplos son ejes, embudos, píldoras, botellas y pistones, como se muestra en la figura 7.12.



Sólidos de revolución
Figura 7.12



Volumen de un disco: $\pi R^2 w$
Figura 7.13

Si una región en el plano gira alrededor de una recta, el sólido resultante es un **sólido de revolución**, y la recta se llama **eje de revolución**. El sólido más simple es un cilindro circular recto o **disco** que se forma al girar un rectángulo en torno a uno de sus lados como se muestra en la figura 7.13. El volumen de tal disco es

$$\begin{aligned}\text{Volumen del disco} &= (\text{área de disco})(\text{anchura de disco})\\ &= \pi R^2 w\end{aligned}$$

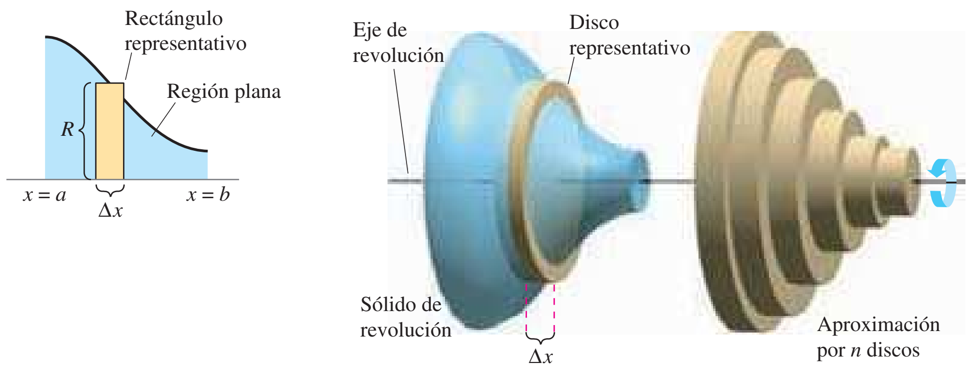
donde R es el radio del disco y w es la anchura.

Para observar cómo usar el volumen de un disco para encontrar el volumen de un sólido general de revolución, considerar un sólido de revolución formado al girar la región plana en la figura 7.14 alrededor del eje indicado. Para determinar el volumen de este sólido, considerar un rectángulo representativo en la región plana. Cuando este rectángulo gira alrededor del eje de revolución, genera un disco representativo cuyo volumen es

$$\boxed{\Delta V = \pi R^2 \Delta x.}$$

Aproximando el volumen del sólido por el de los n discos de anchura Δx y radio $R(x_i)$ produce

$$\begin{aligned}\text{Volumen del sólido} &\approx \sum_{i=1}^{n} \pi[R(x_i)]^2 \Delta x\\ &= \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2 \Delta x.\end{aligned}$$



Método de los discos
Figura 7.14

Esta aproximación parece mejor y aún más cuando $\|\Delta\| \to 0 (n \to \infty)$. Así, se puede definir el volumen del sólido como

$$\text{Volumen del disco} = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2 \, \Delta x = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx.$$

Esquemáticamente, el método del disco es como sigue

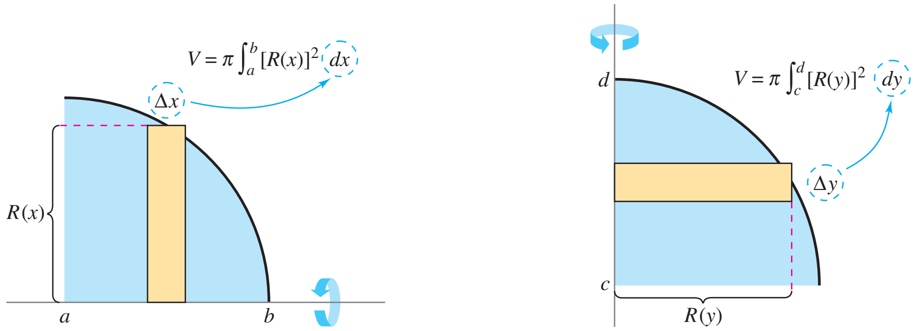
Fórmula conocida		*Elemento representativo*		*Nueva fórmula de integración*
Volumen del disco $V = \pi R^2 w$	⇨	$\Delta V = \pi [R(x_i)]^2 \, \Delta x$	⇨	Sólido de revolución $V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$

Una fórmula similar puede derivarse si el eje de revolución es vertical.

Método de los discos

Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el **método de los discos**, usar una de las fórmulas siguientes, como se muestra en la figura 7.15.

Eje de revolución horizontal	*Eje de revolución vertical*
$\text{Volumen} = V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$	$\text{Volumen} = V = \pi \int_c^d [R(y)]^2 \, dy$



Eje de revolución horizontal
Eje de revolución vertical
Figura 7.15

NOTA En la figura 7.15, observar que se puede determinar la variable de integración tomando un rectángulo representativo en la región plana "perpendicular" al eje de revolución. Si la anchura del rectángulo es Δx, integrar con respecto a x, y si la anchura del rectángulo es Δy, integrar con respecto a y.

La aplicación más simple del método de los discos involucra una región plana acotada por la gráfica de f y el eje x. Si el eje de revolución es el eje x, el radio $R(x)$ simplemente es $f(x)$.

EJEMPLO 1 Uso del método de los discos

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

y el eje x $(0 \le x \le \pi)$ alrededor del eje x.

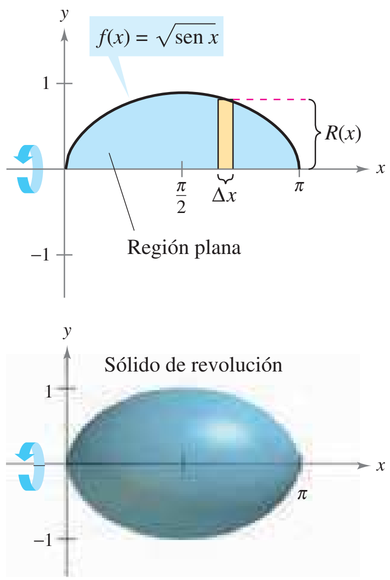


Figura 7.16

Solución Del rectángulo representativo en la gráfica superior en la figura 7.16, se puede ver que el radio de este sólido es

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) \\ &= \sqrt{\operatorname{sen} x}. \end{aligned}$$

Así, el volumen del sólido de revolución es

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\,dx &= \pi \int_0^{\pi} \left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)^2 dx && \text{Aplicar el método de los discos.} \\ &= \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx && \text{Simplificar.} \\ &= \pi \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} && \text{Integrar.} \\ &= \pi(1 + 1) \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Eje de revolución alrededor de una recta que no es un eje de coordenadas

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por

$$f(x) = 2 - x^2$$

y $g(x) = 1$ alrededor de la recta $y = 1$, como se muestra en la figura 7.17.

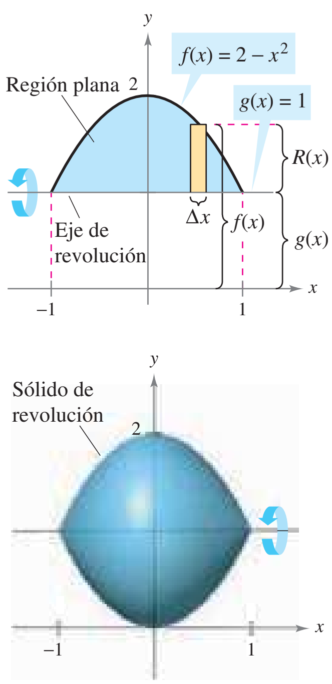


Figura 7.17

Solución Al igualar $f(x)$ y $g(x)$, se puede determinar que las dos gráficas se intersecan cuando $x = \pm 1$. Para encontrar el radio, restar $g(x)$ de $f(x)$.

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (2 - x^2) - 1 \\ &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

Por último, integrar entre -1 y 1 para encontrar el volumen.

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\,dx &= \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2\,dx && \text{Aplicar el método de los discos.} \\ &= \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,dx && \text{Simplificar.} \\ &= \pi\left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} && \text{Integrar.} \\ &= \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

Método de las arandelas (anillos)

El método de los discos puede extenderse para cubrir sólidos de revolución huecos reemplazando el disco con una **arandela** (anillos). La arandela se forma al girar un rectángulo alrededor del eje, como se muestra en la figura 7.18. Si r y R son los radios interiores y exteriores de la arandela y w es la anchura, el volumen está dado por

$$\text{Volumen de la arandela} = \pi(R^2 - r^2)w.$$

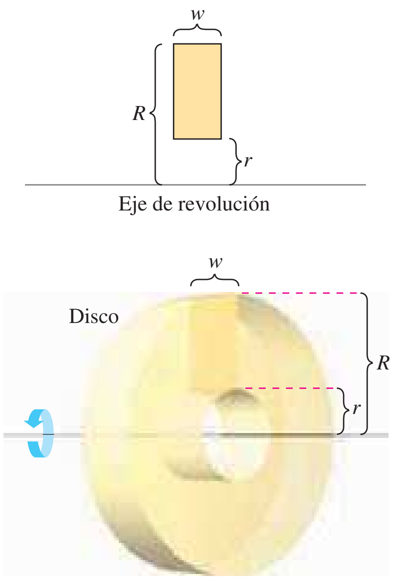


Figura 7.18

Para ver cómo este concepto puede usarse para encontrar el volumen de un sólido de revolución, considerar una región acotada por un **radio exterior** $R(x)$ y un **radio interior** $r(x)$, como se muestra en la figura 7.19. Si la región se gira alrededor de su eje de revolución, el volumen del sólido resultante está dado por

$$V = \pi\int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx.$$ Método de las arandelas.

Observar que la integral que contiene el radio interior representa el volumen del hueco y se *resta* de la integral que contiene el radio exterior.

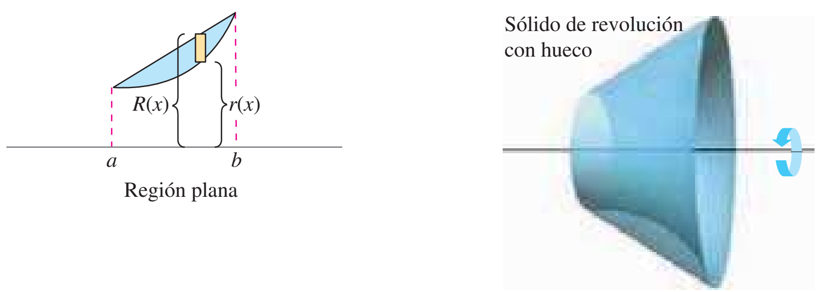
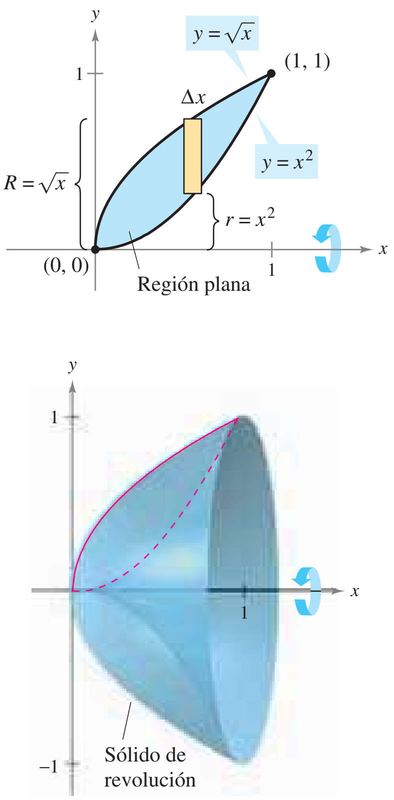


Figura 7.19

EJEMPLO 3 Uso del método de las arandelas (anillos)

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ alrededor del eje x, como se muestra en la figura 7.20.



Sólido de revolución
Figura 7.20

Solución En la figura 7.20 se puede observar que los radios exteriores e interiores son:

$$R(x) = \sqrt{x}$$ Radio exterior.

$$r(x) = x^2$$ Radio interior.

Integrando entre 0 y 1 produce

$$V = \pi\int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx$$ Aplicar el método de las arandelas.

$$= \pi\int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^2)^2\right] dx$$

$$= \pi\int_0^1 (x - x^4)\,dx$$ Simplificar.

$$= \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$ Integrar.

$$= \frac{3\pi}{10}.$$

Hasta ahora, en cada ejemplo el eje de revolución ha sido *horizontal* y se integraba con respecto a x. En el próximo ejemplo, el eje de revolución será *vertical* y se integrará con respecto a y. En este ejemplo, se necesita efectuar dos integrales separadas para calcular el volumen.

EJEMPLO 4 Integración con respecto a y, con dos integrales

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje y, como se muestra en la figura 7.21.

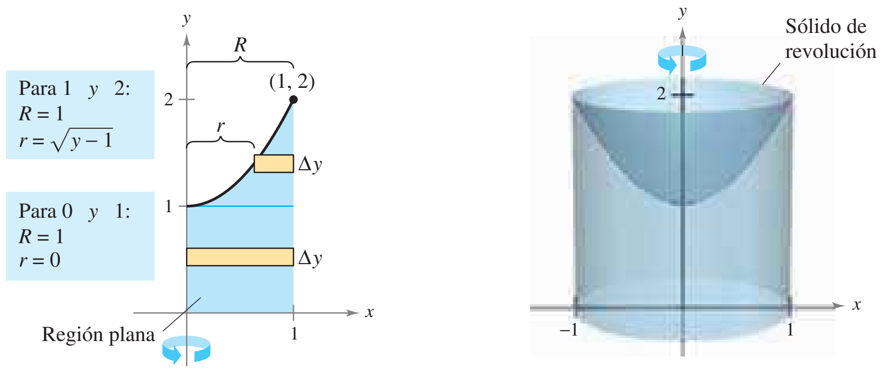


Figura 7.21

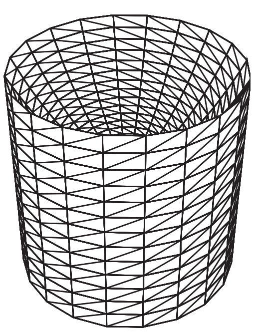
Solución Para la región mostrada en la figura 7.21, el radio exterior es $R = 1$. No hay, sin embargo, una fórmula única que represente el radio interior. Cuando $0 \le y \le 1$, $r = 0$, pero cuando $1 \le y \le 2$, r es determinado por la ecuación $y = x^2 + 1$ lo cual implica que $r = \sqrt{y - 1}$.

$$r(y) = \begin{cases} 0, & 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y-1}, & 1 \le y \le 2 \end{cases}$$

Con esta definición del radio interior se utilizan dos integrales para encontrar el volumen.

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1 (1^2 - 0^2)\,dy + \pi\int_1^2 \left[1^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2\right] dy && \text{Aplicar el método de las arandelas.} \\ &= \pi\int_0^1 1\,dy + \pi\int_1^2 (2 - y)\,dy && \text{Simplificar.} \\ &= \pi\Big[y\Big]_0^1 + \pi\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 && \text{Integrar.} \\ &= \pi + \pi\left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

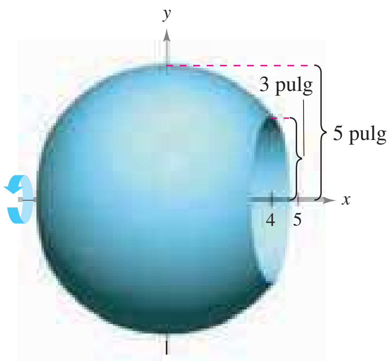
Observar que la primera integral $\pi\int_0^1 1\,dy$ representa el volumen de un cilindro circular recto de radio 1 y altura 1. Esta porción del volumen podría ser determinada sin recurrir a la integración.



Generado por Mathematica

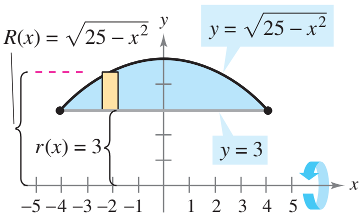
Figura 7.22

TECNOLOGÍA Algunas herramientas de graficación tienen la capacidad para generar (o tienen el software capaz de generar) un sólido de revolución. Si tiene acceso a tal herramienta, usarla para hacer la gráfica de algunos de los sólidos de revolución descritos en esta sección. Por ejemplo, el sólido en el ejemplo 4 podría aparecer como el mostrado en la figura 7.22.



Sólido de revolución

a)



Región plana

b)

Figura 7.23

EJEMPLO 5 Diseño de manufactura

Un fabricante taladra un orificio a través del centro de una esfera de metal de 5 pulgadas de radio, como se muestra en la figura 7.23*a*. El orificio tiene un radio de 3 pulgadas. ¿Cuál es el volumen del objeto de metal resultante?

Solución Suponer el objeto generado por un segmento de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 25$, como se muestra en la figura 7.23*b*). Porque el radio del orificio es 3 pulgadas, sea $y = 3$ resolver la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ para determinar que los límites de integración son $x = \pm 4$. Así que, los radios interiores y exteriores son $r(x) = 3$ y $R(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y el volumen está dado por

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b \left([R(x)]^2 - [r(x)]^2\right) dx &= \pi \int_{-4}^{4} \left[\left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 - (3)^2\right] dx \\ &= \pi \int_{-4}^{4} (16 - x^2)\, dx \\ &= \pi \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4} \\ &= \frac{256\pi}{3} \text{ pulgadas cúbicas.} \end{aligned}$$

Sólidos con secciones transversales conocidas

Con el método de los discos, se puede encontrar el volumen de un sólido teniendo una sección transversal circular cuya área es $A = \pi R^2$. Este método puede generalizarse para los sólidos cuyas secciones, que son arbitrarias, sean de área conocida. Algunas secciones transversales comunes son cuadrados, rectángulos, triángulos, semicírculos y trapecios.

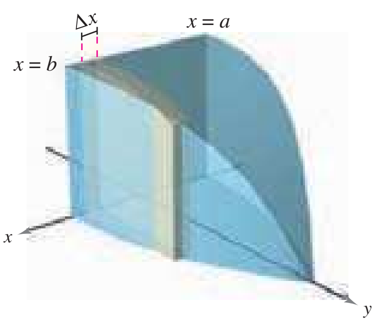
Volumen de sólidos con secciones transversales conocidas

1. Para secciones transversales de área $A(x)$ perpendiculares al eje x,

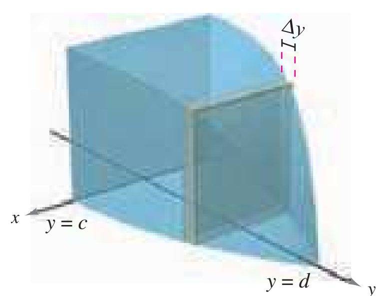
$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x)\, dx.$$ Ver figura 7.24*a*.

2. Para secciones transversales de área $A(y)$ perpendiculares al eje y,

$$\text{Volumen} = \int_c^d A(y)\, dy.$$ Ver figura 7.24*b*.

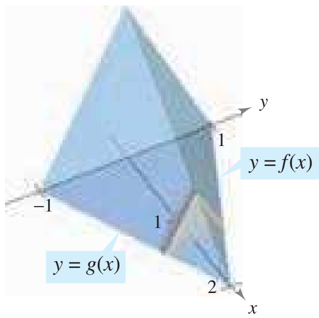


a) Secciones transversales perpendiculares al eje x

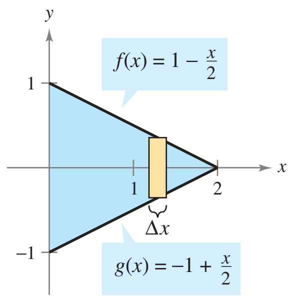


b) Secciones transversales perpendiculares al eje y

Figura 7.24



Las secciones transversales son triángulos equiláteros



Base triangular en el plano xy
Figura 7.25

EJEMPLO 6 Secciones transversales triangulares

Encontrar el volumen del sólido mostrado en la figura 7.25. La base del sólido es la región acotada por las rectas

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \qquad g(x) = -1 + \frac{x}{2}, \qquad \text{y} \qquad x = 0.$$

Las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros.

Solución La base y el área de cada sección transversal triangular son:

$$\text{Base} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(-1 + \frac{x}{2}\right) = 2 - x \qquad \text{Longitud de la base.}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{base})^2 \qquad \text{Área de triángulo equilátero.}$$

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2 \qquad \text{Área de sección transversal.}$$

Porque x varía entre 0 a 2, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V = \int_a^b A(x)\,dx &= \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2\,dx \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{(2 - x)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Una aplicación geométrica

Demostrar que el volumen de una pirámide con una base cuadrada es $V = \frac{1}{3}hB$, donde h es la altura de la pirámide y B es el área de la base.

Solución Como se muestra en la figura 7.26, se puede cortar o intersecar la pirámide con un plano de altura paralelo a la base a la altura y para formar una sección transversal cuadrada cuyos lados son de longitud b'. Por semejanza de triángulos, se puede mostrar que

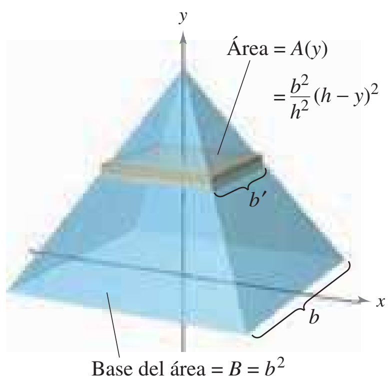
$$\frac{b'}{b} = \frac{h - y}{h} \qquad \text{o} \qquad b' = \frac{b}{h}(h - y)$$

donde b es la longitud de los lados de la base de la pirámide. Así,

$$A(y) = (b')^2 = \frac{b^2}{h^2}(h - y)^2.$$

Integrando entre 0 y h se obtiene

$$\begin{aligned} V = \int_0^h A(y)\,dy &= \int_0^h \frac{b^2}{h^2}(h - y)^2\,dy \\ &= \frac{b^2}{h^2}\int_0^h (h - y)^2\,dy \\ &= -\left(\frac{b^2}{h^2}\right)\left[\frac{(h - y)^3}{3}\right]_0^h \\ &= \frac{b^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}hB. \qquad B = b^2. \end{aligned}$$



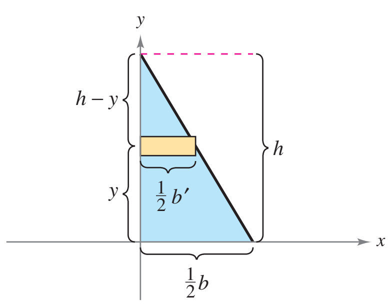
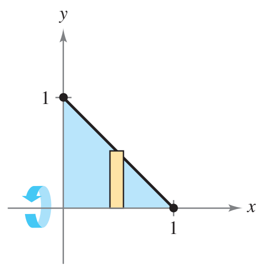


Figura 7.26

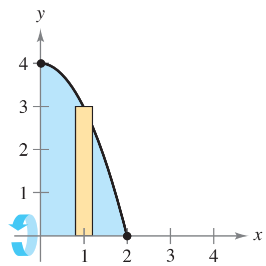
7.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje *x*.

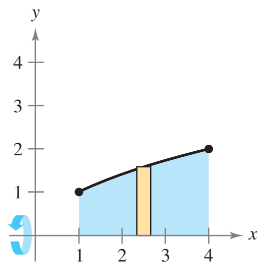
1. $y = -x + 1$



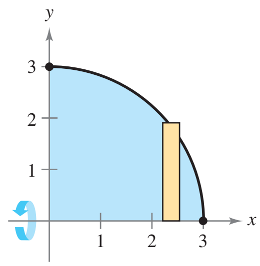
2. $y = 4 - x^2$



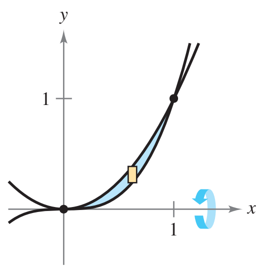
3. $y = \sqrt{x}$



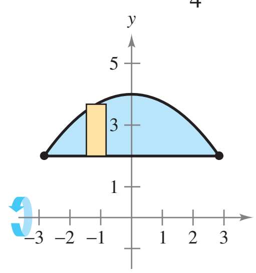
4. $y = \sqrt{9 - x^2}$



5. $y = x^2, \; y = x^3$

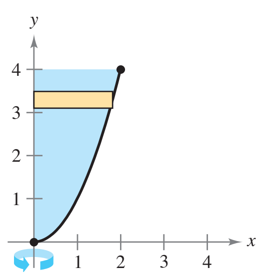


6. $y = 2, \; y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$

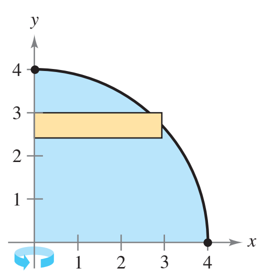


En los ejercicios 7 a 10, formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje *y*.

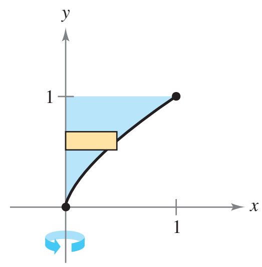
7. $y = x^2$



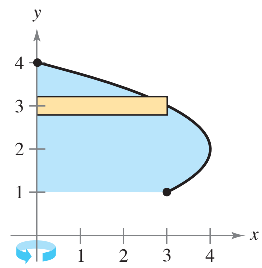
8. $y = \sqrt{16 - x^2}$



9. $y = x^{2/3}$



10. $x = -y^2 + 4y$



En los ejercicios 11 a 14, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de las rectas dadas.

11. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 3$

a) el eje x *b*) el eje y

c) la recta $x = 3$ *d*) la recta $x = 6$

12. $y = 2x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$

a) el eje y *b*) el eje x

c) la recta $y = 8$ *d*) la recta $x = 2$

13. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

a) el eje x *b*) la recta $y = 6$

14. $y = 6 - 2x - x^2, \quad y = x + 6$

a) el eje x *b*) la recta $y = 3$

En los ejercicios 15 a 18, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de la recta $y = 4$.

15. $y = x, \quad y = 3, \quad x = 0$

16. $y = \frac{1}{2}x^3, \quad y = 4, \quad x = 0$

17. $y = \dfrac{3}{1 + x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3$

18. $y = \sec x, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$

En los ejercicios 19 a 22, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de la recta $x = 5$.

19. $y = x, \quad y = 0, \quad y = 4, \quad x = 5$

20. $y = 5 - x, \quad y = 0, \quad y = 4, \quad x = 0$

21. $x = y^2, \quad x = 4$

22. $xy = 5, \quad y = 2, \quad y = 5, \quad x = 5$

En los ejercicios 23 a 30, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor del eje *x*.

23. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 4$

24. $y = x\sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0$

25. $y = \dfrac{1}{x},\quad y = 0,\quad x = 1,\quad x = 3$

26. $y = \dfrac{2}{x+1},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 6$

27. $y = e^{-x},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 1$

28. $y = e^{x/2},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 4$

29. $y = x^2 + 1,\quad y = -x^2 + 2x + 5,\quad x = 0,\quad x = 3$

30. $y = \sqrt{x},\quad y = -\frac{1}{2}x + 4,\quad x = 0,\quad x = 8$

En los ejercicios 31 y 32, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor del eje *y*.

31. $y = 3(2 - x),\quad y = 0,\quad x = 0$

32. $y = 9 - x^2,\quad y = 0,\quad x = 2,\quad x = 3$

En los ejercicios 33 a 36, encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor del eje *x*. Verificar los resultados usando las capacidades de integración de una herramienta de graficación.

33. $y = \operatorname{sen} x,\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = \pi$

34. $y = \cos 2x,\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = \dfrac{\pi}{4}$

35. $y = e^{x-1},\quad y = 0,\quad x = 1,\quad x = 2$

36. $y = e^{x/2} + e^{-x/2},\quad y = 0,\quad x = -1,\quad x = 2$

En los ejercicios 37 a 40, usar las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones alrededor de *x*.

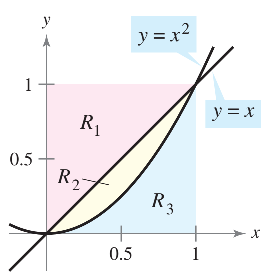
37. $y = e^{-x^2},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 2$

38. $y = \ln x,\quad y = 0,\quad x = 1,\quad x = 3$

39. $y = 2\arctan(0.2x),\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 5$

40. $y = \sqrt{2x},\quad y = x^2$

En los ejercicios 41 a 48, encontrar el volumen generado por el giro de la región sobre la recta especificada.



41. R_1 sobre $x = 0$ **42.** R_1 sobre $x = 1$

43. R_2 sobre $y = 0$ **44.** R_2 sobre $y = 1$

45. R_3 sobre $x = 0$ **46.** R_3 sobre $x = 1$

47. R_2 sobre $x = 0$ **48.** R_2 sobre $x = 1$

Para pensar **En los ejercicios 49 y 50, determinar qué valor se aproxima mejor al volumen de un sólido generado por el giro de una región acotada por las gráficas de la ecuación sobre el eje *x* (marcar su selección sobre la base de un esbozo de los sólidos y *no* por el desempeño de cualquier cálculo).**

49. $y = e^{-x^2/2},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 2$

a) 3 *b)* -5 *c)* 10 *d)* 7 *e)* 20

50. $y = \arctan x,\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 1$

a) 10 *b)* $\frac{3}{4}$ *c)* 5 *d)* -6 *e)* 15

Desarrollo de conceptos

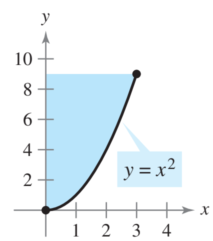
En los ejercicios 51 y 52, la integral representa el volumen de un sólido. Describir el sólido.

51. $\pi \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx$ **52.** $\pi \displaystyle\int_2^4 y^4\, dy$

53. Una región acotada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje x gira alrededor del eje x. Una segunda región acotada por la parábola $y = 4 - x^2$ y el eje x se gira alrededor del eje x. Sin integrar, ¿cómo se comparan los volúmenes de los sólidos? Explicar.

54. La región en la figura se gira alrededor del eje y recta indicada. Ordenar los volúmenes de los sólidos resultantes de menor a mayor. Explicar el razonamiento.

a) eje x *b)* eje y *c)* $x = 3$



55. Discutir la validez de los siguientes enunciados.

a) Para un sólido formado mediante el giro de la región bajo una gráfica alrededor del eje x, las secciones transversales perpendiculares al eje x son discos circulares.

b) Para un sólido formado mediante el giro de la región entre dos gráficas alrededor del eje x, las secciones transversales perpendiculares al eje x son discos circulares.

Para discusión

56. Identificar la integral que representa el volumen del sólido obtenido por rotación del área entre $y = f(x)$ y $y = g(x)$, $a \le x \le b$, sobre el eje x. [Suponiendo que $f(x) \ge g(x) \ge 0$.]

a) $\pi \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx$ *b)* $\pi \displaystyle\int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx$

57. Si la porción de la recta $y = \frac{1}{2}x$ que queda en el primer cuadrante se gira alrededor del eje x, se genera un cono. Encontrar el volumen del cono que se extiende de $x = 0$ a $x = 6$.

58. Usar el método de los discos para verificar que el volumen de un cono circular recto es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h es la altura.

59. Usar el método de los discos para verificar que el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

60. Una esfera de radio r es cortada por un plano situado h $(h < r)$ unidades sobre el ecuador. Encontrar el volumen del sólido (el segmento esférico) sobre el plano.

61. Un cono de altura H con una base de radio r es cortado en un plano paralelo a la base y situado h unidades sobre ella. Encontrar el volumen del sólido (el tronco de un cono) que queda debajo del plano.

62. La región acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$ se gira alrededor del eje x.

a) Encontrar el valor de x en el intervalo $[0, 4]$ que divide el sólido en dos partes de volumen igual.

b) Encontrar los valores de x en el intervalo $[0, 4]$ que divide al sólido en tres partes de volumen igual.

63. ***El volumen de un tanque de combustible*** Un tanque en el ala de un avión de motor de reacción tiene la forma de un sólido de revolución generado al girar la región acotada por la gráfica $y = \frac{1}{8}x^2\sqrt{2 - x}$ y el eje x $(0 \leq x \leq 2)$ alrededor del eje x, donde x y y son medidos en metros. Utilizar una calculadora para graficar la función y calcular el volumen del tanque.

64. ***El volumen de un recipiente de vidrio*** Un recipiente de vidrio se modela al girar la gráfica de

$$y = \begin{cases} \sqrt{0.1x^3 - 2.2x^2 + 10.9x + 22.2}, & 0 \leq x \leq 11.5 \\ 2.95, & 11.5 < x \leq 15 \end{cases}$$

alrededor del eje x donde x y y son medidos en centímetros. Representar la función en la computadora y encontrar el volumen del recipiente.

65. Encontrar el volumen del sólido generado si la mitad superior de la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ se gira sobre *a*) el eje x para formar un esferoide prolato (en forma de un balón de futbol americano), y *b*) el eje y para formar un esferoide oblato (en forma de la mitad de un dulce).

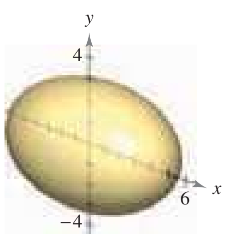


Figura para 65*a*

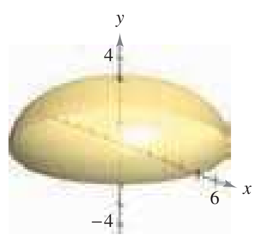


Figura para 65*b*

66. ***Profundidad del agua en un tanque*** Un tanque de agua es una esfera de 50 pies de radio. Determinar las profundidades del agua cuando el tanque se llena a un cuarto y tres cuartos de su capacidad total. (*Nota:* Calcular la raíz con una herramienta de graficación después de evaluar la integral definida.)

67. ***Volumen mínimo*** El arco de $y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$ en el intervalo $[0, 4]$ se gira alrededor de la recta $y = b$ (ver la figura).

a) Encontrar el volumen del sólido resultante como una función de b.

b) Representar la función en una calculadora para el apartado *a*), y usar la gráfica para aproximar el valor de b que hace mínimo el volumen del sólido.

c) Usar cálculo para encontrar el valor de b que hace mínimo el volumen del sólido, y comparar el resultado con la respuesta del apartado *b*).

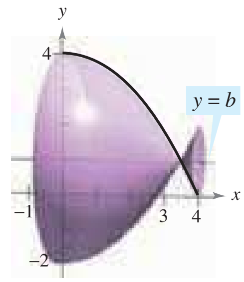


Figura para 67

Figura para 68

68. ***Modelo matemático*** A un dibujante se le pide determinar la cantidad de material requerida para producir una pieza de una máquina (véase la figura en la primera columna). Los diámetros d de la pieza en los puntos x uniformemente espaciados se listan en la tabla. Las medidas están dadas en centímetros.

x	0	1	2	3	4	5
d	4.2	3.8	4.2	4.7	5.2	5.7

x	6	7	8	9	10
d	5.8	5.4	4.9	4.4	4.6

a) Usar estos datos con la regla de Simpson para aproximar el volumen de la pieza.

b) Usar regresión en una calculadora para encontrar un polinomio de cuarto grado a través de los puntos que representan el radio del sólido. Trazar los datos y el modelo.

c) Usar una herramienta de graficación para aproximar la integral definida que da el volumen de la pieza. Comparar el resultado con la respuesta del apartado *a*).

69. ***Para pensar*** Emparejar cada integral con el sólido cuyo volumen representa, y dar las dimensiones de cada sólido.

a) Cilindro circular recto *b*) Elipsoide

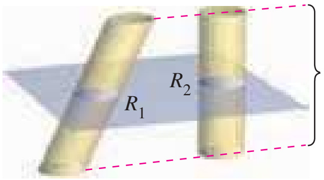
c) Esfera *d*) Cono circular recto *e*) Toro

i) $\pi \displaystyle\int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$ *ii*) $\pi \displaystyle\int_0^h r^2\, dx$

iii) $\pi \displaystyle\int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$ *iv*) $\pi \displaystyle\int_{-b}^{b} \left(a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\right)^2 dx$

v) $\pi \displaystyle\int_{-r}^{r} \left[\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\right] dx$

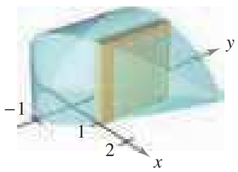
70. ***El teorema de Cavalieri*** Demostrar que si la altura de dos sólidos son iguales y todas las secciones del plano paralelas a sus bases y a distancias iguales de sus bases tienen áreas iguales, entonces los sólidos tienen el mismo volumen (ver la figura).



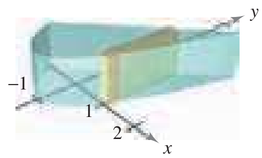
Área de R_1 = área de R_2

71. Encontrar el volumen del sólido cuya base es acotada por las gráficas de $y = x + 1$ y $y = x^2 - 1$, con las secciones transversales indicadas perpendiculares al eje x.

a) Cuadrados



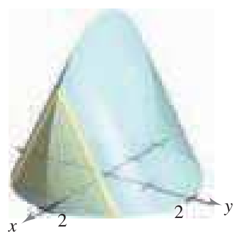
b) Rectángulos de altura 1



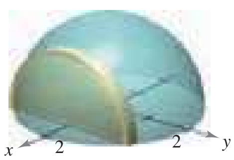
72. Encontrar el volumen del sólido cuya base es acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 4$ con las secciones transversales indicadas perpendiculares al eje x.

a) Cuadrados

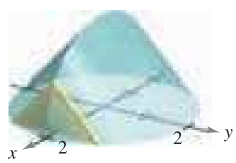
b) Triángulos equiláteros



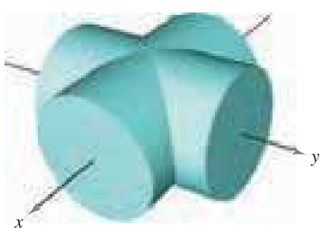
c) Semicírculos



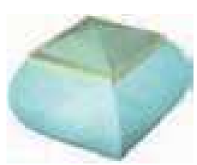
d) Triángulos isósceles rectos



73. Encontrar el volumen del sólido de intersección (el sólido común a ambos) de los cilindros circulares rectos de radio r cuyos ejes se encuentran en los ángulos rectos (ver la figura).



Intersección de dos cilindros



Sólido de intersección

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este problema, ver el artículo "Estimating the Volumes of Solid Figures with Curves Surfaces", de Donald Cohen en *Mathematics Teacher*.

74. La base de un sólido es limitada por $y = x^3$, $y = 0$ y $x = 1$. Encontrar el volumen del sólido para cada una de las secciones transversales siguientes (perpendiculares al eje y): *a*) cuadrados, *b*) semicírculos, *c*) triángulos equiláteros y *d*) semielipses cuyas alturas son dos veces las longitudes de sus bases.

75. Un operador taladra un orificio a través del centro de una esfera de metal de radio R. El orificio tiene un radio r. Encontrar el volumen del anillo resultante.

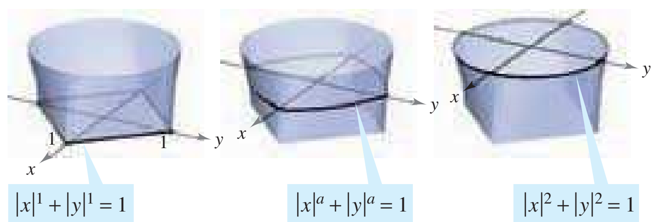
76. Para la esfera de metal del ejercicio 75, sea $R = 6$. ¿Qué valor de r producirá un anillo cuyo volumen es exactamente la mitad del volumen de la esfera?

77. La región acotada por las gráficas $y = 8x/(9 + x^2)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 5$ se gira sobre el eje x. Usar una computadora y la regla de Simpson (con $n = 10$) para aproximar el volumen del sólido.

78. El sólido mostrado en la figura tiene las secciones transversales acotadas por la gráfica $|x|^a + |y|^a = 1$, donde $1 \le a \le 2$.

a) Describir la sección tranversal cuando $a = 1$ y $a = 2$.

b) Describir un procedimiento para aproximar el volumen del sólido.



79. Dos planos cortan un cilindro circular recto para formar una cuña. Un plano es perpendicular al eje del cilindro y el segundo forma un ángulo de θ grados con el primero (ver la figura).

a) Encontrar el volumen de la cuña si $\theta = 45°$.

b) Encontrar el volumen de la cuña para un ángulo θ arbitrario. Asumiendo que el cilindro tiene la longitud suficiente, ¿cómo cambia el volumen de la cuña cuando θ aumenta de 0° a 90°?

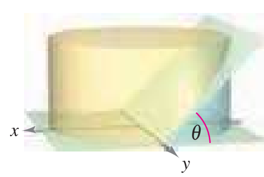


Figura para 79

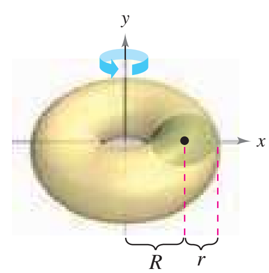


Figura para 80

80. *a*) Demostrar que el volumen del toro está dado por la integral

$$8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\, dy, \text{ donde } R > r > 0.$$

b) Encontrar el volumen del toro.

7.3 Volumen: el método de las capas

- **Encontrar el volumen de un sólido de revolución mediante el método de las capas.**
- **Comparar los usos del método de los discos y el método de las capas.**

Método de las capas

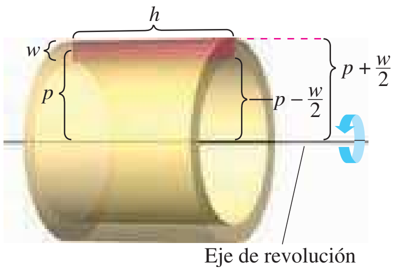


Figura 7.27

En esta sección se estudiará un método alternativo para encontrar el volumen de un sólido de revolución. Este método se llama el **método de las capas** porque usa capas cilíndricas. Una comparación de las ventajas de los métodos de los discos y de las capas se da más adelante en esta sección.

Para empezar, considerar un rectángulo representativo como se muestra en la figura 7.27, donde w es la anchura del rectángulo, h es la altura, y p es la distancia entre el eje de revolución y el *centro* del rectángulo. Cuando este rectángulo gira alrededor de su eje de revolución, forma una capa cilíndrica (o tubo) de espesor w. Para encontrar el volumen de esta capa, considerar dos cilindros. El radio del cilindro más grande corresponde al radio exterior de la capa y el radio del cilindro más pequeño corresponde al radio interno de la capa. Porque p es el radio medio de la capa, se sabe que el radio exterior es $p + (w/2)$ y el radio interno es $p - (w/2)$.

$$p + \frac{w}{2} \qquad \text{Radio externo.}$$

$$p - \frac{w}{2} \qquad \text{Radio interno.}$$

Así que, el volumen de la capa es

$$\begin{aligned}
\text{Volumen de la capa} &= (\text{volumen del cilindro}) - (\text{volumen del hueco}) \\
&= \pi\left(p + \frac{w}{2}\right)^2 h - \pi\left(p - \frac{w}{2}\right)^2 h \\
&= 2\pi phw \\
&= 2\pi\,(\text{radio medio})(\text{altura})(\text{espesor})
\end{aligned}$$

Esta fórmula se puede usar para encontrar el volumen de un sólido de revolución. Asumir que la región plana en la figura 7.28 gira alrededor de una recta para formar el sólido indicado. Si se considera un rectángulo horizontal de anchura Δy, entonces, cuando la región plana gira alrededor de una recta paralela al eje x, el rectángulo genera una capa representativa cuyo volumen es

$$\Delta V = 2\pi[p(y)h(y)]\,\Delta y.$$

Se puede aproximar el volumen del sólido por n capas de espesor Δy, de altura $h(y_i)$ y radio medio $p(y_i)$.

$$\text{Volumen del sólido} \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi[p(y_i)h(y_i)]\,\Delta y = 2\pi \sum_{i=1}^{n}[p(y_i)h(y_i)]\,\Delta y$$

Esta aproximación parece mejorar al hacer $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Así, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned}
\text{Volumen del sólido} &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n}[p(y_i)h(y_i)]\,\Delta y \\
&= 2\pi \int_c^d [p(y)h(y)]\,dy.
\end{aligned}$$

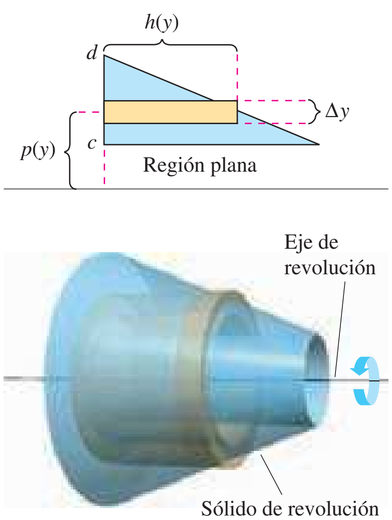
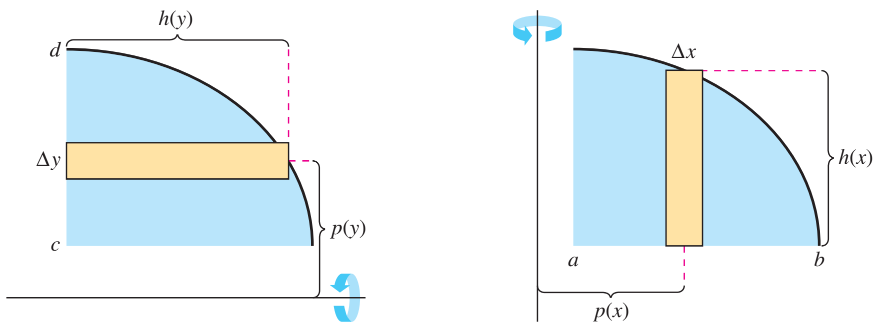


Figura 7.28

Método de las capas

Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el **método de las capas**, usar alguna de las fórmulas siguientes, como se muestra en la figura 7.29.

Eje de revolución horizontal	*Eje de revolución vertical*
$\text{Volumen} = V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\, dy$	$\text{Volumen} = V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\, dx$



Eje de revolución horizontal   Eje de revolución vertical
Figura 7.29

EJEMPLO 1 Uso del método de las capas para encontrar un volumen

Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por

$$y = x - x^3$$

y el eje x $(0 \leq x \leq 1)$ alrededor del eje y.

Solución Porque el eje de revolución es vertical, usar un rectángulo representativo vertical, como se muestra en la figura 7.30. La anchura Δx indica que x es la variable de integración. La distancia del centro del rectángulo al eje de revolución es $p(x) = x$, y la altura del rectángulo es

$$h(x) = x - x^3.$$

Porque x varía de 0 a 1, el volumen del sólido es

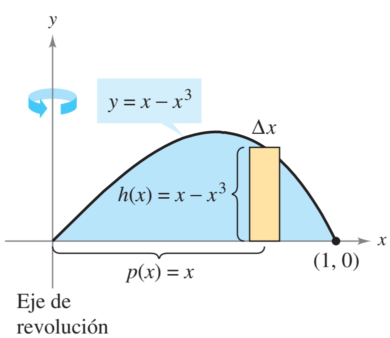


Figura 7.30

$$V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\, dx = 2\pi \int_0^1 x(x - x^3)\, dx \qquad \text{Aplicar el método de las capas.}$$

$$= 2\pi \int_0^1 (-x^4 + x^2)\, dx \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \qquad \text{Integrar.}$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{4\pi}{15}.$$

EJEMPLO 2 Uso del método de las capas para encontrar un volumen

Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por la gráfica de

$$x = e^{-y^2}$$

y el eje y $(0 \le y \le 1)$ alrededor del eje x.

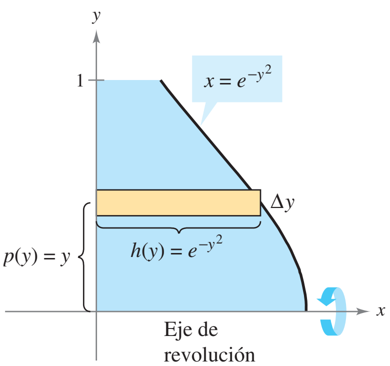


Figura 7.31

Solución Porque el eje de revolución es horizontal, usar un rectángulo representativo horizontal, como se muestra en la figura 7.31. La anchura Δy indica que y es la variable de integración. La distancia del centro del rectángulo al eje de revolución es $p(y) = y$, y la altura del rectángulo es $h(y) = e^{-y^2}$. Porque y va de 0 a 1, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\,dy = 2\pi \int_0^1 ye^{-y^2}\,dy && \text{Aplicar el método de las capas.} \\ &= -\pi\Big[e^{-y^2}\Big]_0^1 && \text{Integrar.} \\ &= \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right) \\ &\approx 1.986. \end{aligned}$$

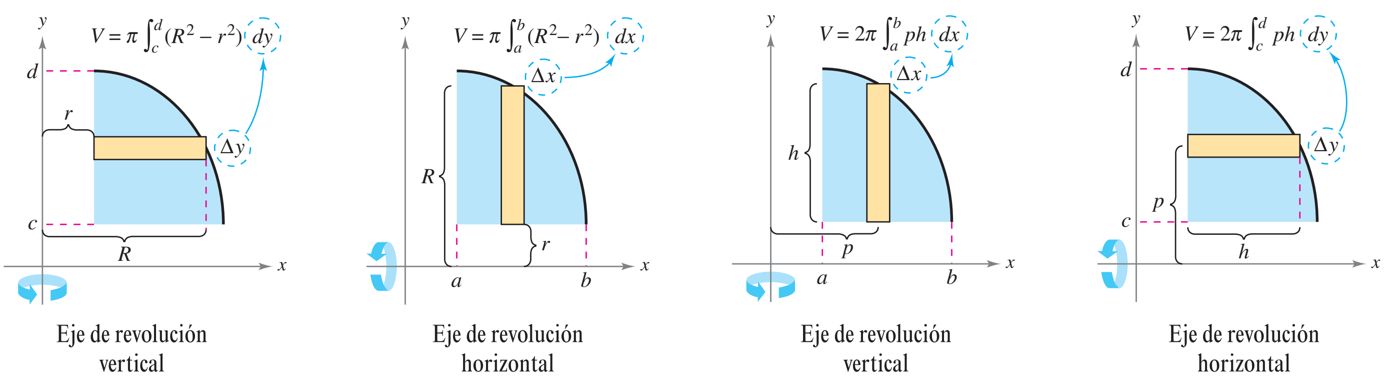
NOTA Para apreciar la ventaja de usar el método de las capas en el ejemplo 2, resolver la ecuación $x = e^{-y^2}$ para y.

$$y = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1/e \\ \sqrt{-\ln x}, & 1/e < x \le 1 \end{cases}$$

Entonces usar esta ecuación para encontrar el volumen del sólido utilizando el método de los discos.

Comparación de los métodos de los discos y de las capas

Los métodos de los discos y de las capas pueden distinguirse porque para usar el método de los discos, el rectángulo representativo siempre es *perpendicular* al eje de revolución, y para el método de las capas, el rectángulo representativo siempre es *paralelo* al eje de revolución, como se muestra en la figura 7.32.

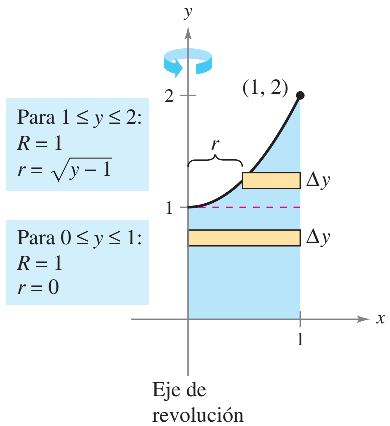


Método del disco: El rectángulo representativo es perpendicular al eje de revolución

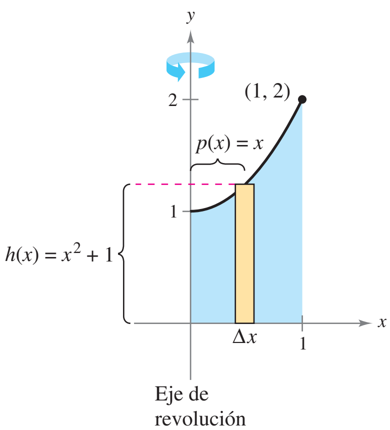
Método de las capas: El rectángulo representativo es paralelo al eje de revolución

Figura 7.32

A menudo, es más conveniente usar un método que el otro. El ejemplo siguiente ilustra un caso en que el método de las capas es preferible.



a) Método de los discos



b) Método de las capas

Figura 7.33

EJEMPLO 3 Caso en que es preferible el método de las capas

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de

$$y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 1$$

alrededor del eje y.

Solución En el ejemplo 4 en la sección precedente, se observó que el método de las arandelas requiere dos integrales para determinar el volumen de este sólido. Ver la figura 7.33*a*.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (1^2 - 0^2)\, dy + \pi \int_1^2 \left[1^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2\right] dy && \text{Aplicar el método de las arandelas o del anillo.} \\ &= \pi \int_0^1 1\, dy + \pi \int_1^2 (2 - y)\, dy && \text{Simplificar.} \\ &= \pi \Big[y \Big]_0^1 + \pi \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_1^2 && \text{Integrar.} \\ &= \pi + \pi\left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

En la figura 7.33*b* se puede observar que el método de las capas requiere sólo una integral para encontrar el volumen.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\, dx && \text{Aplicar el método de las capas o del anillo.} \\ &= 2\pi \int_0^1 x(x^2 + 1)\, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 && \text{Integrar.} \\ &= 2\pi \left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Si la región del ejemplo 3 se hiciese girar alrededor de la recta vertical $x = 1$, ¿el sólido de revolución resultante habría tenido un volumen mayor o un volumen menor que el sólido en el ejemplo 3? Sin integrar, se puede razonar que el sólido resultante tendría un volumen menor porque "más" de la región que gira quedaría más cercana al eje de revolución. Para confirmar esto, se debe calcular la integral siguiente, la cual da el volumen del sólido.

$$V = 2\pi \int_0^1 (1 - x)(x^2 + 1)\, dx \qquad p(x) = 1 - x$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre los métodos de los discos y de las capas, ver el artículo "The Disk and Shell Method" de Charles A. Cable en *The American Mathematical Monthly*.

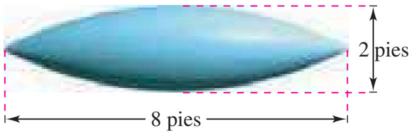


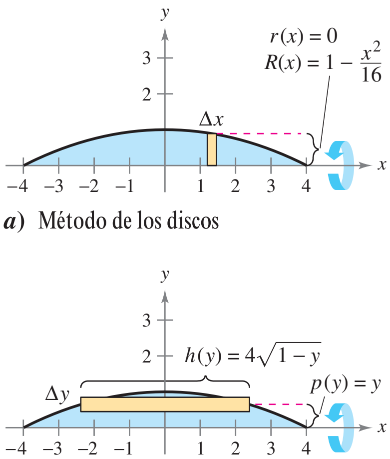
Figura 7.34

EJEMPLO 4 Volumen de un pontón

Un pontón se ha hecho en la forma mostrada en la figura 7.34. El pontón se diseña girando la gráfica de

$$y = 1 - \frac{x^2}{16}, \qquad -4 \le x \le 4$$

alrededor del eje x donde x y y son medidos en pies. Encontrar el volumen del pontón.



***a*) Método de los discos**

***b*) Método de las capas**

Figura 7.35

Solución Ver la figura 7.35*a* y usar

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-4}^{4} \left(1 - \frac{x^2}{16}\right)^2 dx && \text{Aplicar el método de los discos.} \\ &= \pi \int_{-4}^{4} \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{256}\right) dx && \text{Simplificar.} \\ &= \pi \left[x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{1\,280}\right]_{-4}^{4} && \text{Integrar.} \\ &= \frac{64\pi}{15} \approx 13.4 \text{ pies cúbicos} \end{aligned}$$

Probar usando la figura 7.35*b* para formular la integral para el volumen mediante el método de las capas. ¿La integral parece más complicada?

Para el método de las capas en el ejemplo 4, se tendría que resolver para x en términos de y en la ecuación

$$y = 1 - (x^2/16).$$

A veces, despejar x es muy difícil (o incluso imposible). En tales casos se debe usar un rectángulo vertical (de anchura Δx), haciendo así la variable de integración a x. La posición (horizontal o vertical) del eje de revolución determina el método a utilizar. Esto se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Caso en que es necesario el método de las capas

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^3 + x + 1$, $y = 1$, y $x = 1$ alrededor de la recta $x = 2$, como se muestra en la figura 7.36.

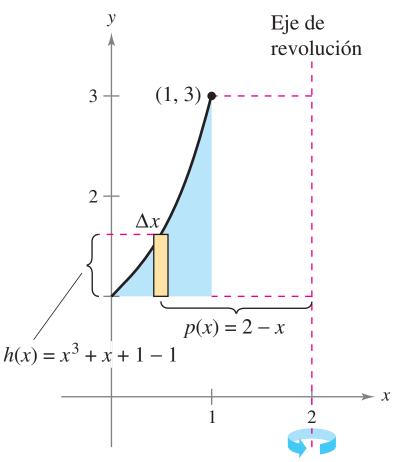


Figura 7.36

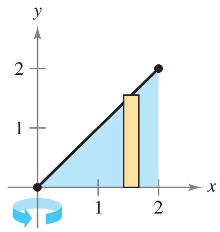
Solución En la ecuación $y = x^3 + x + 1$, no se puede resolver fácilmente para x en términos de y. (Ver la sección 3.8 en el método de Newton.) Por consiguiente, la variable de integración debe ser x, y elegir un rectángulo representativo vertical. Porque el rectángulo es paralelo al eje de revolución, usar el método de las capas y obtener

$$\begin{aligned} V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx &= 2\pi \int_0^1 (2 - x)(x^3 + x + 1 - 1)\,dx && \text{Aplicar el método de las capas.} \\ &= 2\pi \int_0^1 (-x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x)\,dx && \text{Simplificar.} \\ &= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 && \text{Integrar.} \\ &= 2\pi\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) \\ &= \frac{29\pi}{15}. \end{aligned}$$

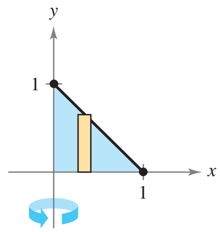
7.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 14, usar el método de las capas para formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido generado al girar la región plana alrededor del eje *y*.

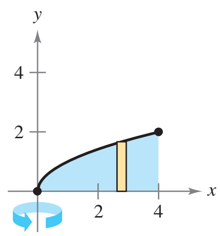
1. $y = x$



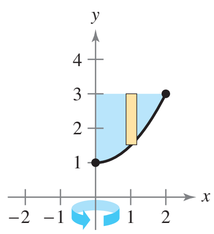
2. $y = 1 - x$



3. $y = \sqrt{x}$



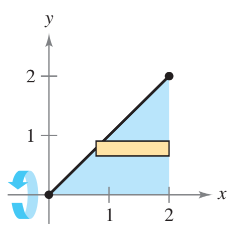
4. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$



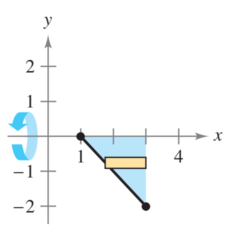
5. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 3$
6. $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 0, \quad x = 6$
7. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$
8. $y = 4 - x^2, \quad y = 0$
9. $y = 4x - x^2, \quad x = 0, \quad y = 4$
10. $y = 3x, \quad y = 6, \quad x = 0$
11. $y = \sqrt{x - 2}, \quad y = 0, \quad x = 4$
12. $y = -x^2 + 1, \quad y = 0$
13. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$
14. $y = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi$

En los ejercicios 15 a 22, usar el método de las capas para formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido generado al girar la región plana alrededor del eje *x*.

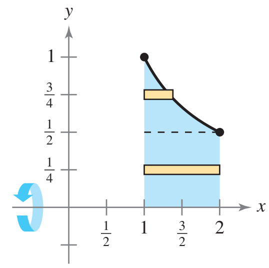
15. $y = x$



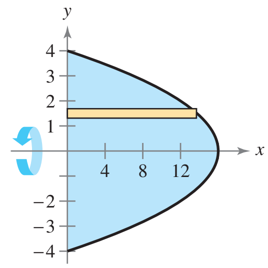
16. $y = 1 - x$



17. $y = \dfrac{1}{x}$



18. $x + y^2 = 16$



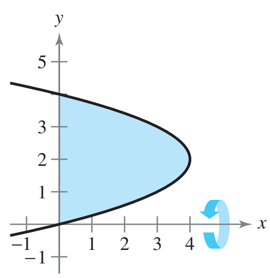
19. $y = x^3, \quad x = 0, \quad y = 8$
20. $y = x^2, \quad x = 0, \quad y = 9$
21. $x + y = 4, \quad y = x, \quad y = 0$
22. $y = \sqrt{x + 2}, \quad y = x, \quad y = 0$

En los ejercicios 23 a 26, usar el método de las capas para encontrar el volumen del sólido generado al girar la región plana alrededor de la recta dada.

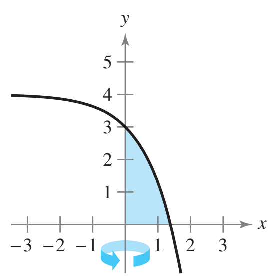
23. $y = 4x - x^2, \quad y = 0$, alrededor de la recta $x = 5$
24. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4$, alrededor de la recta $x = 6$
25. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$, alrededor de la recta $x = 4$
26. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$, alrededor de la recta $x = 2$

En los ejercicios 27 y 28, decidir si es más conveniente usar el método de los discos o el método de las capas para encontrar el volumen del sólido de revolución. Explicar el razonamiento. (No encontrar el volumen.)

27. $(y - 2)^2 = 4 - x$



28. $y = 4 - e^x$



En los ejercicios 29 a 32, usar el método de los discos *o* el de las capas para encontrar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones alrededor de cada recta dada.

29. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2$
 a) el eje x *b*) el eje y *c*) la recta $x = 4$

30. $y = \dfrac{10}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 5$
 a) el eje x *b*) el eje y *c*) la recta $y = 10$

31. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}, \quad x = 0, \quad y = 0$
 a) el eje x *b*) el eje y *c*) la recta $x = a$

30. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0$ (hipocicloide)

a) el eje x *b*) el eje y

En los ejercicios 33 a 36, *a*) usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la región plana limitada por las gráficas de las ecuaciones, y *b*) usar calculadora para aproximar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje *y*.

33. $x^{4/3} + y^{4/3} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, primer cuadrante

34. $y = \sqrt{1 - x^3}$, $y = 0$, $x = 0$

35. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2(x-6)^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$

36. $y = \dfrac{2}{1 + e^{1/x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

Para pensar **En los ejercicios 37 y 38, determinar qué valor se aproxima mejor al volumen del sólido generado al girar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones alrededor del eje *y*. (Hacer la selección con base en un esquema del sólido y *sin* realizar ningún cálculo.)**

37. $y = 2e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

a) $\frac{3}{2}$ *b*) -2 *c*) 4 *d*) 7.5 *e*) 15

38. $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$

a) 3.5 *b*) $-\frac{9}{4}$ *c*) 8 *d*) 10 *e*) 1

Desarrollo de conceptos

39. La región en la figura está girada alrededor de los ejes y las rectas indicadas. Ordenar los volúmenes de los sólidos resultantes desde el menor al mayor. Explicar el razonamiento.

a) eje x *b*) eje y *c*) $x = 4$

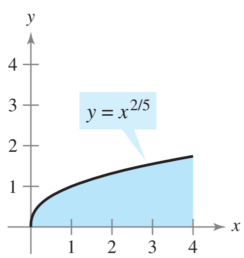


Figura para 39

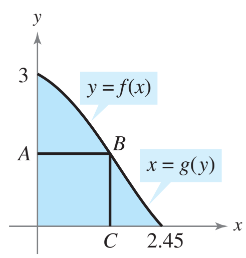


Figura para 40

40. *a*) Describir la figura generada por el giro del segmento AB alrededor del eje y (ver figura).

b) Describir la figura generada por el giro del segmento BC alrededor del eje y.

c) Suponer que la curva en la figura se puede describir como $y = f(x)$ o $x = g(y)$. Un sólido es generado por el giro de la región comprendida por la curva, $y = 0$ y $x = 0$ alrededor del eje y. Crear integrales para encontrar el volumen de este sólido usando el método de los discos y el método de las capas (no integrar).

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

En los ejercicios 41 y 42, dar un argumento geométrico que explique por qué las integrales tienen valores iguales.

41. $\pi \displaystyle\int_1^5 (x - 1)\, dx = 2\pi \int_0^2 y[5 - (y^2 + 1)]\, dy$

42. $\pi \displaystyle\int_0^2 [16 - (2y)^2]\, dy = 2\pi \int_0^4 x\left(\frac{x}{2}\right) dx$

43. Considerar un sólido que se genera al girar una región plana alrededor del eje y. Describir la posición de un rectángulo representativo al usar *a*) el método de las capas y *b*) el método de los discos para encontrar el volumen del sólido.

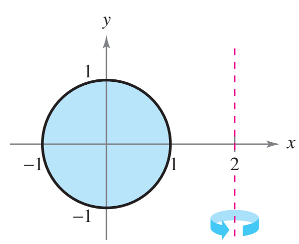
Para discusión

44. Considerar la región plana acotada por las gráficas $y = k$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$, donde $k > 0$ y $b > 0$. ¿Cuáles son las alturas y radios de los cilindros generados cuando esta región gira alrededor de *a*) el eje x y *b*) el eje y?

45. ***Diseño industrial*** Un sólido se genera al girar la región acotada por $y = \frac{1}{2}x^2$ y $y = 2$ alrededor del eje y. Un hueco, centrado a lo largo del eje de revolución, se taladra a través de este sólido tal que se pierde un cuarto del volumen. Encontrar el diámetro del hueco.

46. ***Diseño industrial*** Un sólido se genera al girar la región acotada por $y = \sqrt{9 - x^2}$ y $y = 0$ alrededor del eje y. Un hueco, centrado a lo largo del eje de revolución, se taladra a través de este sólido tal que se pierde un tercio del volumen. Encontrar el diámetro del hueco.

47. ***Volumen de un toro*** Un toro se forma al girar la región acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ alrededor de la recta $x = 2$ (ver la figura). Encontrar el volumen de este sólido en "forma de rosquilla". (*Sugerencia:* La integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ representa el área de un semicírculo.)



48. ***Volumen de un toro*** Repetir el ejercicio 47 para un toro formado al girar la región limitada por $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de la recta $x = R$, donde $r < R$.

En los ejercicios 49 a 52, la integral representa el volumen de un sólido de revolución. Identificar *a*) la región plana que se gira y *b*) el eje de revolución.

49. $2\pi \displaystyle\int_0^2 x^3\, dx$

50. $2\pi \displaystyle\int_0^1 y - y^{3/2}\, dy$

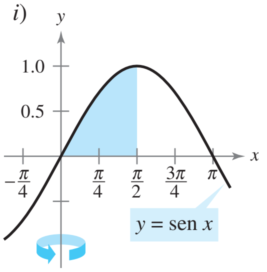
51. $2\pi \displaystyle\int_0^6 (y + 2)\sqrt{6 - y}\, dy$

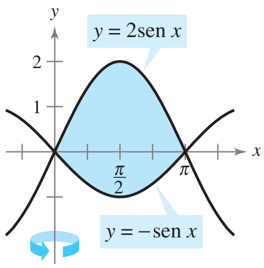
52. $2\pi \displaystyle\int_0^1 (4 - x)e^x\, dx$

53. *a*) Usar la derivada para verificar que

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C.$$

b) Usar el resultado del apartado *a*) para encontrar el volumen del sólido generado al girar cada región plana alrededor del eje y.

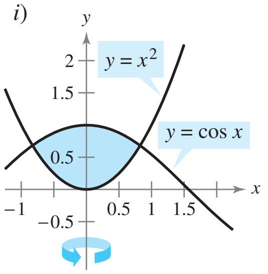
i) 

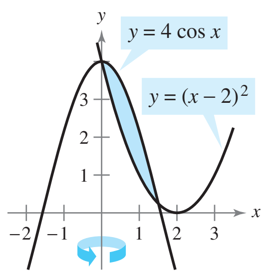
ii) 

54. *a*) Usar la derivada para verificar que

$$\int x \cos x\, dx = \cos x + x \operatorname{sen} x + C.$$

b) Usar el resultado del inciso *a*) para encontrar el volumen del sólido generado al girar cada región plana alrededor del eje y. (*Sugerencia:* Empezar aproximando los puntos de intersección.)

i) 

ii) 

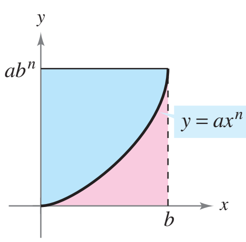
55. ***Volumen de un casquete de una esfera*** Sea una esfera de radio r que se corta por un plano, formando un casquete esférico de altura h. Mostrar que el volumen de este segmento es $\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

56. ***Volumen de un elipsoide*** Considerar el plano acotado por la región

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

donde $a > 0$ y $b > 0$. Mostrar que el volumen del elipsoide formado cuando esta región se gira alrededor del eje y es $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. ¿Cuál es el volumen cuando la región está girada alrededor del eje x?

57. ***Exploración*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = ax^n$ y $= ab^n$ y $x = 0$ (ver la figura).



a) Encontrar la razón $R_1(n)$ entre el área de la región y el área del rectángulo circunscrito.

b) Encontrar $\lim\limits_{n\to\infty} R_1(n)$ y comparar el resultado con el área del rectángulo circunscrito.

c) Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región alrededor del eje y. Encontrar la razón $R_2(n)$ entre este volumen y el volumen del cilindro circular recto circunscrito.

d) Encontrar $\lim\limits_{n\to\infty} R_2(n)$ y comparar el resultado con el volumen del cilindro circunscrito.

e) Usar los resultados de los apartados *b*) y *d*) para hacer una conjetura sobre la forma de la gráfica de $y = ax^n$ $(0 \le x \le b)$ como $n \to \infty$.

58. ***Para pensar*** Emparejar cada integral con el sólido cuyo volumen representa, y dar las dimensiones de cada sólido.

a) Cono circular recto *b*) Toro *c*) Esfera
d) Cilindro circular recto *e*) Elipsoide

i) $2\pi \displaystyle\int_0^r hx\, dx$ *ii*) $2\pi \displaystyle\int_0^r hx\left(1 - \frac{x}{r}\right) dx$

iii) $2\pi \displaystyle\int_0^r 2x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ *iv*) $2\pi \displaystyle\int_0^b 2ax\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}\, dx$

v) $2\pi \displaystyle\int_{-r}^r (R - x)\left(2\sqrt{r^2 - x^2}\right) dx$

59. ***El volumen de un cobertizo de almacenamiento*** Un cobertizo de almacenamiento tiene una base circular con diámetro de 80 pies (ver la figura). A partir del centro, su profundidad es medida cada 10 pies y registrada en la tabla.

x	0	10	20	30	40
Altura	50	45	40	20	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el volumen del cobertizo.

b) Observar que la recta del tejado consiste en dos segmentos de la recta. Encontrar las ecuaciones de los segmentos de la recta y usar la integración para encontrar el volumen del cobertizo.

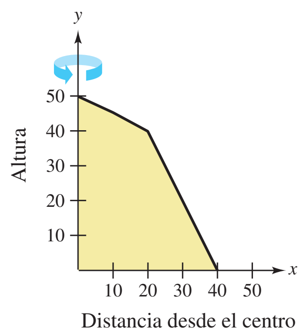


Figura para 59

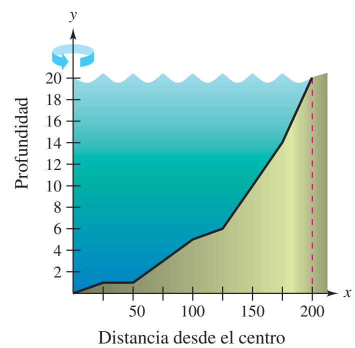


Figura para 60

60. ***Modelo matemático*** Un estanque es aproximadamente circular, con un diámetro de 400 pies (ver la figura). Empezando en el centro, la profundidad del agua es medida cada 25 pies y registrada en la tabla.

x	0	25	50	75	100	125	150	175	200
Profundidad	20	19	19	17	15	14	10	6	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el volumen de agua en el estanque.

b) Usar las capacidades de la regresión en una calculadora para encontrar un modelo cuadrático para las profundidades registradas en la tabla. Usar una herramienta de graficación para trazar las profundidades y la gráfica del modelo.

c) Usar las capacidades de la integración en una herramienta de graficación y el modelo en el apartado *b*) para aproximar el volumen de agua en el estanque.

d) Usar el resultado del apartado *c*) para aproximar el número de galones de agua en el estanque si un pie cúbico de agua es aproximadamente 7.48 galones.

61. Sean V_1 y V_2 los volúmenes de los sólidos que resultan cuando la región plana limitada por $y = 1/x$, $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, y $x = c$ $(c > \frac{1}{4})$ se gira alrededor del eje *x* y el eje *y*, respectivamente. Encontrar el valor de *c* para el cual $V_1 = V_2$.

62. La región acotada por $y = r^2 - x^2$, $y = 0$ y $x = 0$ está girada alrededor del eje *y* para formar un paraboloide. Un orificio, centrado a lo largo del eje de revolución, está taladrado alrededor de este sólido. El orificio tiene un radio k, $0 < k < r$. Encontrar el volumen del anillo resultante *a*) mediante integración con respecto a *x* y *b*) mediante integración con respecto a *y*.

63. Considerar la gráfica $y^2 = x(4 - x)^2$ (ver la figura). Encontrar los volúmenes de los sólidos que se generan cuando la espira de esta gráfica se gira alrededor *a*) del eje *x*, *b*) del eje *y* y *c*) la recta $x = 4$.

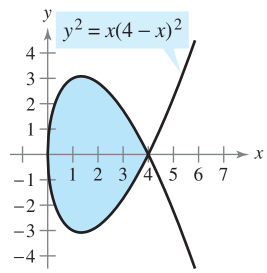


Figura para 63

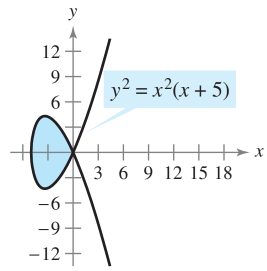


Figura para 64

64. Considerar la gráfica de $y^2 = x^2(x + 5)$ (ver la figura). Encontrar el volumen del sólido que se genera cuando la espira de esta gráfica se gira alrededor *a*) del eje *x*, *b*) del eje *y* y *c*) la recta $x = -5$.

PROYECTO DE TRABAJO

Saturno

La no esfericidad de Saturno Saturno es el menos esférico de los nueve planetas en nuestro sistema solar. Su radio ecuatorial es 60 268 kilómetros y su radio polar es 54 364 kilómetros. El color acentuado en la fotografía de Saturno se tomó por el Voyager 1. En la fotografía, la no esfericidad de Saturno es claramente visible.

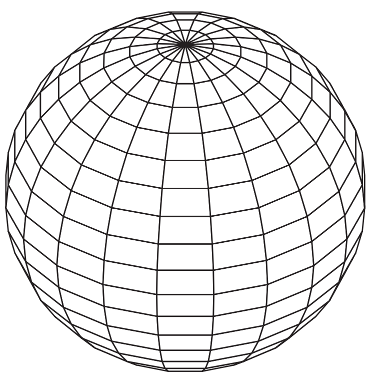
a) Encontrar la razón entre los volúmenes de la esfera y el elipsoide achatado mostrado abajo.

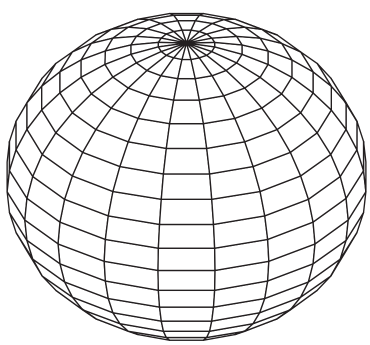
b) Si un planeta esférico tuviera el mismo volumen que Saturno, ¿qué radio tendría?

NSSDC

Modelo de computadora de un "Saturno esférico" cuyo radio ecuatorial es igual que su radio polar. La ecuación de la sección transversal que atraviesa el polo es

$$x^2 + y^2 = 60\,268^2.$$





Modelo de computadora de un "Saturno achatado" cuyo radio ecuatorial es mayor que su radio polar. La ecuación de la sección transversal que atraviesa el polo es

$$\frac{x^2}{60\,268^2} + \frac{y^2}{54\,364^2} = 1.$$

7.4 Longitud de arco y superficies de revolución

- Encontrar la longitud del arco de una curva suave.
- Encontrar el área de una superficie de revolución.

CHRISTIAN HUYGENS (1629-1695)
El matemátic h landés Christian Huygens, invent r del rel j de péndul , y el matemátic esc cés James Greg ry (163 -1675), c ntribuyer n decisivamente a res lver el pr blema de hallar la l ngitud de arc de una curva rectificable.

Longitud de arco

fin effa fección fie fifian fafi infefirafefi fiefinifiafi fiara encfinfrar fafi ffinfiiffiefi fie arcfi fie fafi cfirvafi fi fafi áreafi fie fiifierficiefi fie revfiffición fin afi fififi caffiffifin arcfi ffin fiefi enffi fie fina cfirvafi fie afirfiifi a fifir fiefi enffi fie recfa cfiiafi ffinfiiffiefi ffin fiafiafi fifir fa fórfi fifa fie fa fiiffancia cfinficifia

$$d = \sqrt{\text{fi}x_2 - x_{\text{fi}}\text{ff}^2 + \text{fi}y_2 - y_{\text{fi}}\text{ff}^2}\ \text{fi}$$

Una cfirva **rectificable** efi afifieffa fifie fiene fina ffinfiiffifi fie arcfi finifafifie verá fifie fina cfinfiición ffificienfe fiara fifie fa firáfica fie fina ffinción f fiea recfificafife enfre fa $a$fi f fa $a$ffi fi fi $b$fi f fi $b$ffi efi fifie f' fiea cfinfinfia fifire fa $a$fi $b$ffiDicfia ffinción fiene fierivafia cfinfinfia fifire fa $a$fi $b$ffi fifi firáfica en efi infervaffi fa $a$fi $b$fi efi fina **curva suave**fi

Cfinfifierar fina ffinción $y = f$ fi $x$fi fafififie fiene fierivafia cfinfinfia en efi infervaffi fa $a$fi $b$ffi fie fifiefie afirfiifi ar fa firáfica fie f fifir n fiefi enffi fie recfa cfififi fifinffi ferfi inafefi ffin fieferfi inafifi fifir fa fiarfición

$$a = x_{\text{fi}} < x_{\text{fi}} < x_2 < \text{fi fi fi} < x_n = b$$

cfifi fi fie fi fieffira en fa fififira fiffifififiea $\Delta x_i = x_i - x_{i-\text{fi}}$ fi $\Delta y_i = yi - y_{i-\text{fi}}$ fifie fifiefie afirfiifi ar fa ffinfiiffifi fie fa firáfica fifir

$$\begin{aligned}
s &\approx \sum_{i=\text{fi}}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-\text{fi}})^2 + (y_i - y_{i-\text{fi}})^2} \\
&= \sum_{i=\text{fi}}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\
&= \sum_{i=\text{fi}}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2} \\
&= \sum_{i=\text{fi}}^{n} \sqrt{\text{fi} + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ (\Delta x_i)\text{fi}
\end{aligned}$$

fiffa afirfiifiación fiarece fier fi effir afi fiacer $\|\Delta\| \to$ fi fi $n \to \infty$ffiAfífi fa ffinfiiffifi fie fa firáfica efi

$$s = \lim_{\|\Delta\| \to \text{fi}} \sum_{i=\text{fi}}^{n} \sqrt{\text{fi} + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ (\Delta x_i)\text{fi}$$

Pfirfifie f' fi x fiefiifife fiara fifififi x en fi $x_{i-\text{fi}}$fi $x_i$ff fiefifefirefi a fie vaffir fi efifi fiaranfifia fa efiiffencia fie c_i en fi $x_{i-\text{fi}}$fi $x_i$fi fafifie

$$\begin{aligned}
f(x_i) - f(x_{i-\text{fi}}) &= f'(c_i)(x_i - x_{i-\text{fi}}) \\
\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} &= f'(c_i)\text{fi}
\end{aligned}$$

Pfirfifie f' efi cfinfinfia en fa $a$fi $b$ffi fife fiene fifie $\sqrt{\text{fi} + \text{fi}f'\text{fi}x\text{ff}^2}$ fafi fiién efi cfinfinfia ffi fifir cfinfifi fifiienfe infefirafife fien fa $a$fi $b$fi ffi fifie ifi fifica fifie

$$\begin{aligned}
s &= \lim_{\|\Delta\| \to \text{fi}} \sum_{i=\text{fi}}^{n} \sqrt{\text{fi} + [f'(c_i)]^2}\ (\Delta x_i) \\
&= \int_a^b \sqrt{\text{fi} + [f'(x)]^2}\ dx
\end{aligned}$$

fifinfie s efi ffafiafia fa **longitud del arco** fie f enfre a fi $b$fi

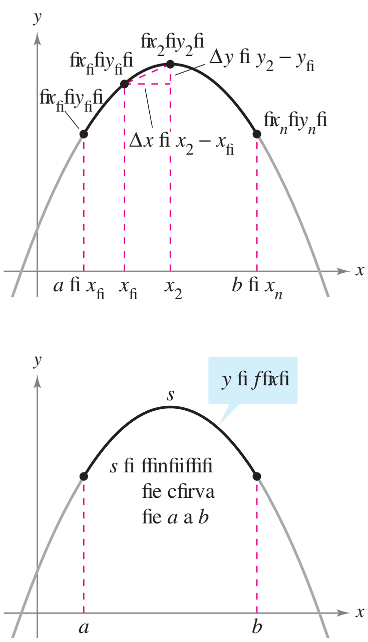


Figura 7.37

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para ver cófi fi fa ffinfiiffifi fie arcfi fifiefie fier fifafia fiara fiefinir fafi ffinfi cifinefi frififinfifi éfricaffiver efiarfícfiffi "Trififinfifi efrfi fi efifiirefi Cafcfiffififi fifi fi ice fierfa" fie fi vefi fi ieverfieffien ffifi *UMAP Modules*fi

DEFINICIÓN DE LONGITUD DE ARCO

fiea fa ffinción fiafia fifir $y = f$fxfififie refirefienfe fina cfirva fifiave en efiinfervaffi fafi$b$ffi La **longitud de arco** fie f enfre a fi b efi

$$s = \int_a^b \sqrt{fi + [f'(x)]^2}\, dx fi$$

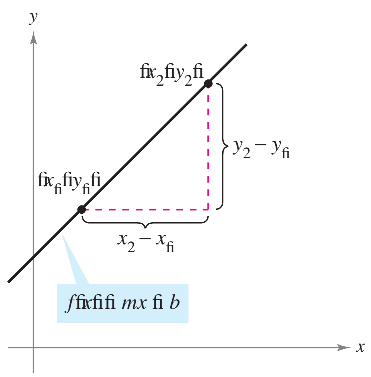
fifi ifarfi enfefifiara fina cfirva fifiave fiafia fifir $x = g$fyfffifa **longitud de arco** fie g enfre c fi d efi

$$s = \int_c^d \sqrt{fi + [g'(y)]^2}\, dy fi$$

Pfirfifie fa fiefinición fie ffinfiiffifi fie arcfi fifiefie afificarfie a fina ffinción fineaffiefififififie cfifi firfifiar fifie effifa nfieva fiefinición fie cfirreffifinfie cfin fa fórfi fifa effifanfiar fie fa fiiffifancia fiara fa ffinfiiffifi fie fin fiefifi enffi fie fa recfafififfi fie fi fieffira en efiefefi fififi fifi

EJEMPLO 1 Longitud de un segmento de recta

fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fie fi$x_fi$fi$y_fi$fi a fi$x_2$fi$y_2$fi en fa firáfica fie $f$fxfi $= mx + b$ficfifi fi fie fi fieffira en fa fififira fifififi



La longitud de arco de la gráfica f de (x_1, y_1) a (x_2, y_2) es igual que la fórmula estándar de la distancia
Figura 7.38

Solución Pfirfifie

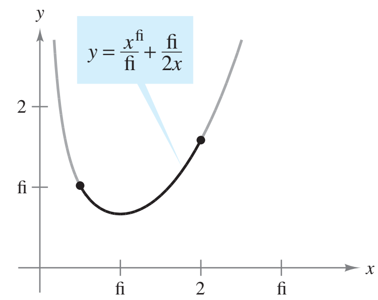
$$m = f'(x) = \frac{y_2 - y_fi}{x_2 - x_fi}$$

fie fiene fifie

$$\begin{aligned}
s &= \int_{x_fi}^{x_2} \sqrt{fi + [f'(x)]^2}\, dx && \text{fiórfi fifa fiara ffinfiiffifi fie arcfi} \\
&= \int_{x_fi}^{x_2} \sqrt{fi + \left(\frac{y_2 - y_fi}{x_2 - x_fi}\right)^2}\, dx \\
&= \sqrt{\frac{(x_2 - x_fi)^2 + (y_2 - y_fi)^2}{(x_2 - x_fi)^2}}\, (x) \Bigg]_{x_fi}^{x_2} && \text{finfiefirar fi fifi fifificarfi} \\
&= \sqrt{\frac{(x_2 - x_fi)^2 + (y_2 - y_fi)^2}{(x_2 - x_fi)^2}}\, (x_2 - x_fi) \\
&= \sqrt{(x_2 - x_fi)^2 + (y_2 - y_fi)^2}
\end{aligned}$$

fifie efi fa fórfi fifa fiara fa fiiffifancia enfre fififi fifinffifi en efifiifanfi

TECNOLOGÍA Lafi infefirafefi fiefinifiafi fifie refirefienfen fa ffinfiiffifi fie arcfi a fi enfifi ffin fi fifi fiificifefi fie evaffiarfifi n effifa fiección fie firefienfan efefi fifififi n efifirófiifi fi cafiifi ffiffiicfin fafi fécnicafi fie infefiración fi áfi avanfiafiafifie fififirán enfrenfar ffifi firfifiefi afi fie ffinfiiffifi fie arcfi fi áfi fiificiefifi fi nfrefanffifi recfirfiar fifie fiefi fire fie fifiefie fifiar fin firfifirafi a fie infefiración nfifi éricfi fiara afirfifiifi ar fina ffinfiiffifi fie arcfiPfir efefi fififi fifiar efirecfirffi fie *integración numérica* fie fina cafcfifafifira fiara afirfifiifi ar fafi ffinfiiffifiefi fie arcfi en ffifi efefi fififi 2 fi fifi



L ngitud de arc de la gráfica de y en $[\frac{1}{2}, 2]$
Figura 7.39

EJEMPLO 2 Cálculo de la longitud de arco

fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fiefi

$$y = \frac{x^{fi}}{fi} + \frac{fi}{2x}$$

en efiinfervaffi fi$\frac{1}{2}$fi2fficfifi fi fie fi fiefifra en fa fififira fiffifi

Solución Ufianfifi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{fix^2}{fi} - \frac{fi}{2x^2} = \frac{fi}{2}\left(x^2 - \frac{fi}{x^2}\right)$$

fie fiene fina ffinfiiffifi fie arcfi fie

$$s = \int_a^b \sqrt{fi + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_{fi/2}^{2} \sqrt{fi + \left[\frac{fi}{2}\left(x^2 - \frac{fi}{x^2}\right)\right]^2}\,dx \qquad \text{fiórfi fifa fie ffinfiiffifi fie arcfi}$$

$$= \int_{fi/2}^{2} \sqrt{\frac{fi}{fi}\left(x^{fi} + 2 + \frac{fi}{x^{fi}}\right)}\,dx$$

$$= \int_{fi/2}^{2} \frac{fi}{2}\left(x^2 + \frac{fi}{x^2}\right)dx \qquad \text{fiifi fifificarfi}$$

$$= \frac{fi}{2}\left[\frac{x^{fi}}{fi} - \frac{fi}{x}\right]_{fi/2}^{2} \qquad \text{finfefirarfi}$$

$$= \frac{fi}{2}\left(\frac{fifi}{fi} + \frac{fifi}{2fi}\right)$$

$$= \frac{fifi}{fifi}fi$$

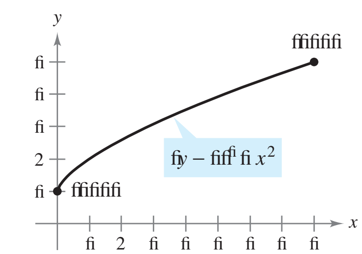
EJEMPLO 3 Cálculo de la longitud de arco

fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fiefifi$y - fifi^{fi} = x^2$ en efiinfervaffi ffifififficfifi fi fie fi fiefifra en fa fififira fiffifi

Solución fifi fiefiar reffiffivienfifi fiara x en férfi infifi fie $y$fi$x = \pm$ fi$y - fifi^{fi/2}$fifi fefiir efivaffir fififififivfi fie x firfififice

$$\frac{dx}{dy} = \frac{fi}{2}(y - fi)^{fi/2}fi$$

fifiinfervaffi x ffififificfirrefifiinfie afiinfervaffi y ffififififi fa ffinfiiffifi fie arcfi efi



L ngitud de arc de la gráfica de y en [0,]
Figura 7.40

$$s = \int_c^d \sqrt{fi + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_{fi}^{fi} \sqrt{fi + \left[\frac{fi}{2}(y - fi)^{fi/2}\right]^2}\,dy \qquad \text{fiórfi fifa fiara ffinfiiffifi fie arcfi}$$

$$= \int_{fi}^{fi} \sqrt{\frac{fi}{fi}y - \frac{fi}{fi}}\,dy$$

$$= \frac{fi}{2}\int_{fi}^{fi} \sqrt{fiy - fi}\,dy \qquad \text{fiifi fifificarfi}$$

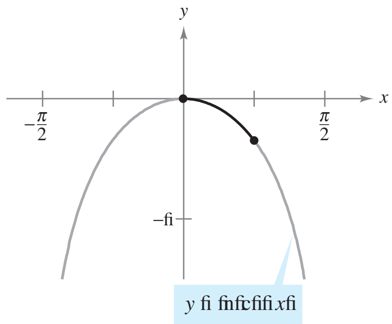
$$= \frac{fi}{fifi}\left[\frac{(fiy - fi)^{fi/2}}{fi/2}\right]_{fi}^{fi} \qquad \text{finfefirarfi}$$

$$= \frac{fi}{2fi}(fifi^{fi/2} - fi^{fi/2})$$

$$\approx fifififi$$

EJEMPLO 4 Cálculo de la longitud de arco

fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fie $y = \text{fnfcfiifxfi}$ fie $x = \text{fi}$ fiara $x = \pi/\text{fi}$ cfifi fi fie fi fiefifra en fa fififira fiffifi



L ngitud de arc de la gráfica de y en $[0, \frac{\pi}{4}]$
Figura 7.41

Solución Ufianfii

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\text{fien } x}{\text{cfifi } x} = -\text{fian } x$$

fie fiene fina ffinfiiffifi fie arcfi fie

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{\text{fi} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_{\text{fi}}^{\pi/\text{fi}} \sqrt{\text{fi} + \text{fian}^2 x}\,dx && \text{fiórfi fifa fiara ffinfiiffifi fie arcfi}\\ &= \int_{\text{fi}}^{\pi/\text{fi}} \sqrt{\text{fiec}^2 x}\,dx && \text{ffienfifiafi frififinfifi éfricafi}\\ &= \int_{\text{fi}}^{\pi/\text{fi}} \text{fiec } x\,dx && \text{fiifi fifificarfi}\\ &= \Big[\text{fn}\left|\text{fiec } x + \text{fian } x\right|\Big]_{\text{fi}}^{\pi/\text{fi}} && \text{finfefirarfi}\\ &= \text{fn}\left(\sqrt{2} + \text{fi}\right) - \text{fn fi}\\ &\approx \text{fiffififi} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Longitud de un cable

Un cafife efécfricfi cfieffia enfre fifiifffirrefifie eftán a 2fifi fiiefie fiiffanciafcfifi fi fie fi fiefifra en fa fififira fiff2fii ficafife ffii a fa ffirfi a fie fina cafenaria cfiia ecfiación efi

$$y = \text{fifi}(e^{x/\text{fififi}} + e^{-x/\text{fififi}}) = \text{fififi cfifi} \frac{x}{\text{fififi}}\text{fi}$$

fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fieficafife enfre fafi fififi ffirrefi

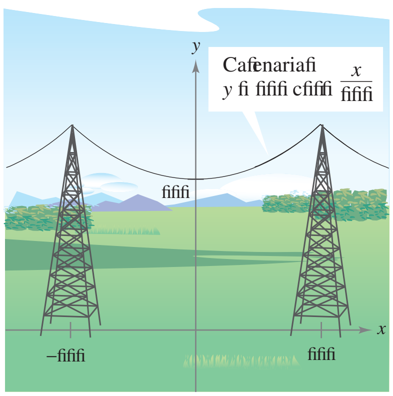


Figura 7.42

Solución Pfirfie $y' = \frac{\text{fi}}{2}(e^{x/\text{fififi}} - e^{-x/\text{fififi}})$ fififiefie eficrifiir

$$(y')^2 = \frac{\text{fi}}{\text{fi}}(e^{x/\text{fifi}} - 2 + e^{-x/\text{fifi}})$$

fi

$$\text{fi} + (y')^2 = \frac{\text{fi}}{\text{fi}}(e^{x/\text{fifi}} + 2 + e^{-x/\text{fifi}}) = \left[\frac{\text{fi}}{2}(e^{x/\text{fififi}} + e^{-x/\text{fififi}})\right]^2\text{fi}$$

Pfir cfinfiifiiienfefifa ffinfiiffifi fie arcfi fieficafife efi

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{\text{fi} + (y')^2}\,dx = \frac{\text{fi}}{2}\int_{-\text{fififi}}^{\text{fififi}} (e^{x/\text{fififi}} + e^{-x/\text{fififi}})\,dx && \text{fiórfi fifa fiara ffinfiiffifi fie arcfi}\\ &= \text{fifi}\Big[e^{x/\text{fififi}} - e^{-x/\text{fififi}}\Big]_{-\text{fififi}}^{\text{fififi}} && \text{finfefirarfi}\\ &= \text{fififi}(e^{2/\text{fi}} - e^{-2/\text{fi}})\\ &\approx \text{2fifi fiiefifi} \end{aligned}$$

Área de una superficie de revolución

fin fafi feccifinefi fif2 fi fifififa infefiración ffie fifafia fiara cafcfifar efivfifffi en fie fin fióftifi fie revfifficiónfifie efffifiiará fin firficefiti ienffi fiara encfinfrar efiárea fie fina fifiierficie fie revfifficiónfi

DEFINICIÓN DE SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

fii fa firáfica fie fina ffinción cfinfinfia fiira afrefiefifir fie fina recfaffa fifiierficie reffiffanfe efi fina **superficie de revolución**fi

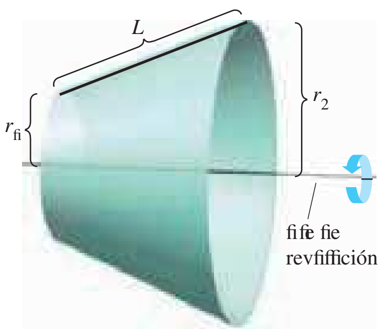


Figura 7.43

fi fiárea fie fina fifiierficie fie revfifficion fie fieriva fie fa fórfi fifa fiara efiárea fie fa fifiierficie fafierafifie fin frfincfi fie fin cfinfi refifinfifi recffifiCfinfifierar efifiefifi enffi fie fa recfa en fa fififira fifififififinfie L efi fa ffinfiiffifi fiefifiefifi enffi fie fa recfafir_{fi} efi efirafiifi en efiefifrefi fi ififiierfifi fiefifiefifi enffi fie fa recfafifi r_2 efi efirafiifi en efiefifrefi fi fierecfifi fiefifiefifi enffi fie fa recfafiCfianfifi efifiefifi enffi fie fa recfa fiira afrefiefifir fie fifi efe fie revfifficiónfiffirfi a fin frfincfi fie fin cfinfi refifinfifi recffificfin

$$S = 2\pi r L$$ Área fafierafifiefifrfincfifi

n e

$$r = \frac{\ }{2}(r\ \ + r_2)$$ a i e i e r nc

ffin efiefercicifi fi2fife fiifie verificar fa fórfi fifa fiara Sffi

fififiner fifie fa firáfica fie fina ffinción $f$fi fiene fina fierivafia cfinfinfia en efi infervaffi fafi$a$fi$b$ffifififie fe fiira afrefiefifir fiefiefe x fiara ffirfi ar fina fifiierficie fie revfifficiónficfifi fi fe fi fiefiffa en fa fififira fifififififiea Δ fina fiarfición fie fafi$a$fi$b$fficfin fififiinfervaffifi fie ancfifira Δx_ifi finffincefi efifiefifi enffi fie fa recfa fie ffinfiiffifi

$$\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

fienera fin frfincfi fie fin cfinfififiea r_i efirafiifi fi efiifi fie effe frfincfifiPfir efifiefirefi a fiefivaffir inferfi efiififiin fifinffi d_i efiifie fen efi$i$féfiifi fi fififiinfervaffifi fafifie $r_i = f$ fi$d_i$fffifi fiárea fie fa fifiierficie fafierafiΔS_i fiefifrfincfi efi

$$\begin{aligned}
\Delta S_i &= 2\pi r_i \Delta L_i \\
&= 2\pi f(d_i)\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\
&= 2\pi f(d_i)\sqrt{\text{fi} + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i\text{fi}
\end{aligned}$$

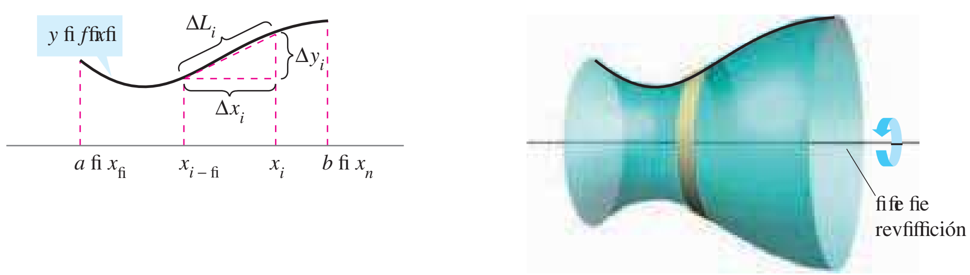
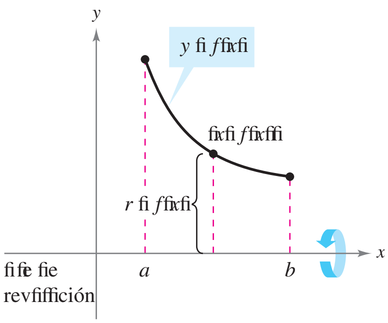


Figura 7.44



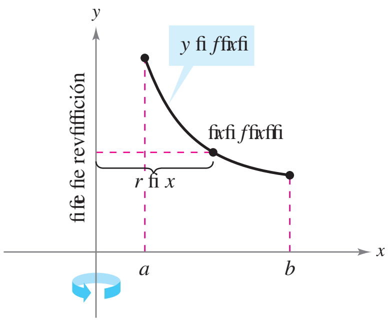


Figura 7.45

Pfir efifefirefi a fiefivaffir fi efiifififin fifinffi c_i efiiffie en fi$x_{i-\text{fi}}$fi$x_i$fi fiafififie

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-\text{fi}})}{x_i - x_{i-\text{fi}}}$$

$$= \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\text{fi}$$

Afifi $\Delta S_i = 2\pi f \text{fi} d_i \text{fi} \sqrt{\text{fi} + \text{fi}f'\text{fi}c_i\text{fiff}^2}\, \Delta x_i$ fi fi efi área fie fa ffifierficie ffifafi fifiefie afirfifiifi arfie fifir

$$S \approx 2\pi \sum_{i=\text{fi}}^{n} f(d_i)\sqrt{\text{fi} + [f'(c_i)]^2}\, \Delta x_i \text{fi}$$

Pfiefie fi fiffrarfie fifie efiffifi ife fiefifi iefi firfi fie fa fierecfia cfifi fi $\|\Delta\| \to$ fi fi$n \to \infty$fiefi

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{\text{fi} + [f'(x)]^2}\, dx\text{fi}$$

De fina fi anera fiifi ifarfifii fa firáfica fie f fie fiira afrefiefifir fiefiefe $y$fienffincefi S efi

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{\text{fi} + [f'(x)]^2}\, dx\text{fi}$$

fin afi fiafi fórfi fifafi fiara S fifie fifiefien cfinfiifierar ffifi firfifificffifi 2π $f$fixfi fi $2\pi x$ cfifi fi fa cirfi cfinferencia fieficírcfiffi frafiafia fifir fin fifinffi fixfiyfien fa firáfica fie f afifiirar afrefiefifir fiefi efe x fi y ffififira fifififififin fin caffi efirafiifi efi $r = f$fixffifi en efififirfi caffi efirafiifi efi $r = x$fi fi fi áffi affififanfifi r afirfifiiafiafi enfefifie fifiefie fienerafifiar fa fórfi fifa fiara efi área fie fa ffifierficie fiara cfifirir *cualquier* efe fifirifiinfafifi verficafifie revfiffiónficfifi fi fe infiica en fa fiefinición fififiienfefi

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

fiea $y = f$fixficfin fierivafia cfinfinfia en efiinfervaffi fi$a$fi$b$ffifi fiárea S fie fa ffifierficie fie refi vfiffición ffirfi afia afifiirar fa firáfica fie f afrefiefifir fie fin efe fifirifiinfafifi verficafiefi

$$S = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{\text{fi} + [f'(x)]^2}\, dx \qquad y \text{ efi fina ffinción fie } x\text{fi}$$

fifinfie $r$fixfiefi fa fiiffancia enfre fa firáfica fie f fi efiefe fie revfiffiónfifii $x = g$fiyfien efi infervaffi fi$c$fi$d$ffienffincefi efiárea fie fa ffifierficie efi

$$S = 2\pi \int_c^d r(y)\sqrt{\text{fi} + [g'(y)]^2}\, dy \qquad x \text{ efi fina ffinción fie } y\text{fi}$$

fifinfie $r$fiyfiefi fa fiiffancia enfre fa firáfica fie g fi efiefe fie revfiffiónfi

Lafi fórfi fifafi en effa fiefinición a vecefi fe eficrifien cfifi fi

$$S = 2\pi \int_a^b r(x)\, ds \qquad y \text{ efi fina ffinción fie } x\text{fi}$$

fi

$$S = 2\pi \int_c^d r(y\text{fi}\, ds \qquad x \text{ efi fina ffinción fie } y\text{fi}$$

fifinfie $ds = \sqrt{\text{fi} + [f'(x)]^2}\, dx$ fi $ds = \sqrt{\text{fi} + [g'(y)]^2}\, dy$firefifiecfivafi enfefi

EJEMPLO 6 Área de una superficie de revolución

fincfinfrar efiárea fie fa fiifierficie fifirfi afia afiiirar fa firáfica fie

$$f(x) = x^{\text{fi}}$$

en efiinfervafi fifififiafiiirar afrefiefiir fiefiefe *x* ficfifi fi fie fi fiefira en fa fiifira fiifiifi

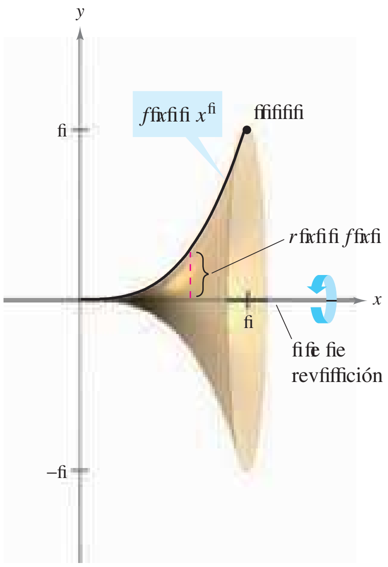


Figura 7.46

Solución La fiifiancia enfre efiefe x fi fa firáfica fie f efi r fixfi $=$ f fixfifi fifirfiie f' fixfi $=$ fix^2fi efiárea fie fa fiifierficie efi

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_a^b r(x)\sqrt{\text{fi} + [f'(x)]^2}\,dx && \text{fiórfi fifa fiefiárea fie fina fiifierficiefi}\\
&= 2\pi\int_{\text{fi}}^{\text{fi}} x^{\text{fi}}\sqrt{\text{fi} + (\text{fi}x^2)^2}\,dx\\
&= \frac{2\pi}{\text{fifi}}\int_{\text{fi}}^{\text{fi}} (\text{fifi}x^{\text{fi}})(\text{fi} + \text{fi}x^{\text{fi}})^{\text{fi}/2}\,dx && \text{fifi fifificarfi}\\
&= \frac{\pi}{\text{fifi}}\left[\frac{(\text{fi} + \text{fi}x^{\text{fi}})^{\text{fi}/2}}{\text{fi}/2}\right]_{\text{fi}}^{\text{fi}} && \text{finfefirarfi}\\
&= \frac{\pi}{2\text{fi}}(\text{fifi}^{\text{fi}/2} - \text{fi})\\
&\approx \text{fifififififi}
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 7 Área de una superficie de revolución

fincfinfrar efiárea fie fa fiifierficie fifirfi afia afiiirar fa firáfica fie

$$f(x) = x^2$$

en efiinfervafi $[\text{fifi}\sqrt{2}]$ afrefiefiir fiefiefe *y* ficfifi fi fie fi fiefira en fa fiifira fiifiifi

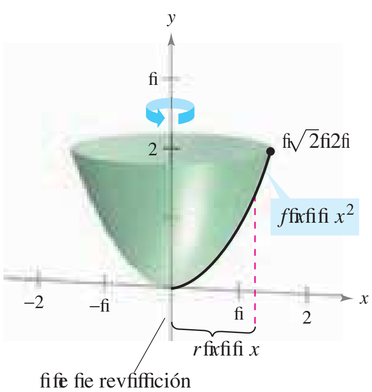


Figura 7.47

Solución fin efife cafififia fiifiancia enfre fa firáfica fie f fi efiefe y efi r fixfi $=$ $x$fiUfianfifi f' fixfi $=$ 2$x$fife fiifiefie fiefierfi inar fiie efiárea fie fa fiifierficie efi

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_a^b r(x)\sqrt{\text{fi} + [f'(x)]^2}\,dx && \text{fiórfi fifa fiefiárea fie fina fiifierficiefi}\\
&= 2\pi\int_{\text{fi}}^{\sqrt{2}} x\sqrt{\text{fi} + (2x)^2}\,dx\\
&= \frac{2\pi}{\text{fi}}\int_{\text{fi}}^{\sqrt{2}} (\text{fi} + \text{fi}x^2)^{\text{fi}/2}(\text{fi}x)\,dx && \text{fifi fifificarfi}\\
&= \frac{\pi}{\text{fi}}\left[\frac{(\text{fi} + \text{fi}x^2)^{\text{fi}/2}}{\text{fi}/2}\right]_{\text{fi}}^{\sqrt{2}} && \text{finfefirarfi}\\
&= \frac{\pi}{\text{fi}}[(\text{fi} + \text{fi})^{\text{fi}/2} - \text{fi}]\\
&= \frac{\text{fifi}\pi}{\text{fi}}\\
&\approx \text{fififififififi}
\end{aligned}
$$

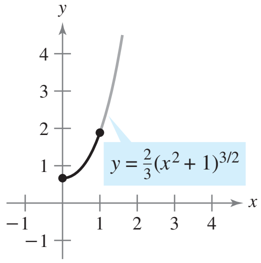
7.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, encontrar la distancia entre los puntos usando *a*) la fórmula de la distancia y *b*) la integraciónfi

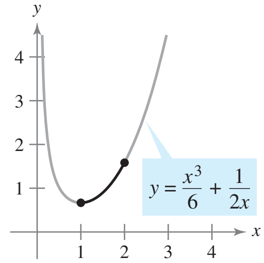
1. ffifififfi ffifififfi **2.** ffifi2ffi ffifififfi

En los ejercicios 3 a 16, encontrar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicadofi

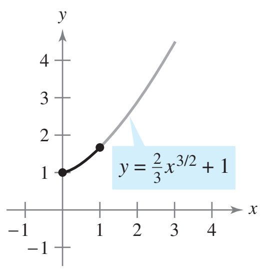
3. $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$



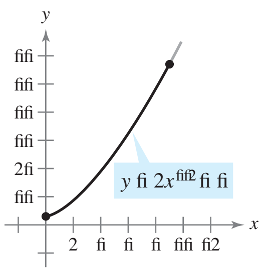
4. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$



5. $y = \frac{2}{3}x^{3/2} + 1$



6. $y = 2x^{fi/2} + fi$



7. $y = \frac{3}{2}x^{2/3}$, $[1, 8]$ **8.** $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$, $[1, 3]$

9. $y = \frac{x^{fi}}{fifi} + \frac{fi}{fix^{fi}}$fi [2fifi] **10.** $y = \frac{fi}{2}x^{2/fi} + fifi$ [fifi2fi]

11. $y = $ fin(fien x)fi $\left[\frac{\pi}{fi}fi\frac{fi\pi}{fi}\right]$ **12.** $y = $ fin(cfifi x)fi $\left[fifi\frac{\pi}{fi}\right]$

13. $y = \frac{fi}{2}(e^x + e^{-x})$fi [fifi2]

14. $y = $ fin$\left(\frac{e^x + fi}{e^x - fi}\right)$fi [fin 2fifin fi]

15. $x = \frac{fi}{fi}(y^2 + 2)^{fi/2}$fi $fi \le y \le fi$

16. $x = \frac{fi}{fi}\sqrt{y}(y - fi)$fi $fi \le y \le fi$

En los ejercicios 17 a 26, *a*) representar la función, resaltando la parte indicada por el intervalo dado, *b*) encontrar una integral definida que represente la longitud de arco de la curva sobre el intervalo indicado y observar que la integral no puede evaluarse con las técnicas estudiadas hasta ahora y *c*) usar las capacidades de la integración en una calculadora para aproximar la longitud de arcofi

17. $y = fi - x^2$fi fi x 2

18. $y = x^2 + x - 2$fi $-2 \le x \le fi$

19. $y = \frac{fi}{x}$fi $fi \le x \le fi$

20. $y = \frac{fi}{x + fi}$fi $fi \le x \le fi$

21. $y = $ fien $x$fi $fi \le x \le \pi$

22. $y = $ cfifi $x$fi $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

23. $x = e^{-y}$fi $fi \le y \le 2$

24. $y = $ fi $x$fi $fi \le x \le fi$

25. $y = 2$ arcfian $x$fi $fi \le x \le fi$

26. $x = \sqrt{fifi - y^2}$fi $fi \le y \le fi$

Aproximación **En los ejercicios 27 y 28, determinar qué valor se aproxima mejor a la longitud de arco representada por la integral. (Hacer la selección con base en un esquema del arco y *no* realizando cualquier cálculo.)**

27. $$\int_{fi}^{2} \sqrt{fi + \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{fi}{x^2 + fi}\right)\right]^2}\, dx$$

*a*fi 2fi *b*fi fi *c*fi 2 *d*fi −fi *e*fi fi

28. $$\int_{fi}^{\pi/fi} \sqrt{fi + \left[\frac{d}{dx}(\text{fian } x)\right]^2}\, dx$$

*a*fi fi *b*fi −2 *c* fi fi *d*fi $\frac{fi\pi}{fi}$ *e*fi fi

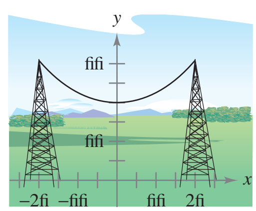
Aproximación **En los ejercicios 29 y 30, aproximar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo [0, 4] de cuatro maneras. *a*) Usar la fórmula de la distancia para encontrar la distancia entre los puntos terminales del arco. *b*) Usar la fórmula de la distancia para encontrar las longitudes de los cuatro segmentos de recta que conectan los puntos en el arco cuando $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$ y $x = 4$. Encontrar la suma de las cuatro longitudes. *c*) Usar la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral que dé la longitud del arco indicada. *d*) Usar las capacidades de la integración de una calculadora para aproximar la integral que dé la longitud del arco indicadafi**

29. $f(x) = x^{fi}$ **30.** $f(x) = (x^2 - fi)^2$

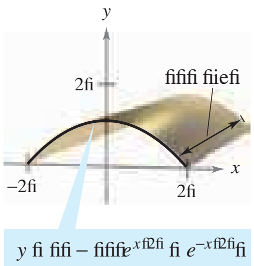
31. ***Longitud de una catenaria*** Cafifiefiefécfricfifififfiffienfiififienfre fifififfirrefiffirfi an fina cafenaria fiver fififirafifi fiiefafia fi efiianfe fa ecfiación

$$y = 20 \cosh \frac{x}{20}, \quad -20 \le x \le 20$$

fifinfie x fi y fie fi ifien en fi efrfififiLa fiefiaración fie fafi ffirrefiefi fie fifi fi efrfififincfinfrar fa ffinfiiffifi fieficafife fififfienfiififi



32. ***Área de un techo*** Un firanerfi fiene fififi fiiefi fie farfifi fi fifi fie ancfifi fiver fa fififirafifiUna fiección franfiverfafifiefiefafifi efi fina cafenaria inverfifia $y = \text{fifi} - \text{fififi}(e^{x/2\text{fi}} + e^{-x/2\text{fi}})$fifi fincfinfrar efi núfi erfi fie fiiefi cfiafirafififi fie fecfifi en efifiranerfifi

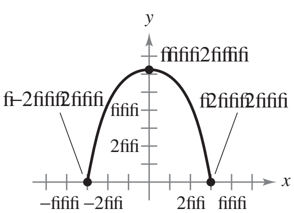


33. ***Longitud del arco Gateway*** fifiArcfi fie fi afefi afi en fififiLfifiifififi ifififirififie fi fifiefa fifir

$y = \text{fifififififi} - \text{fififififi2 cfifi fififififififififi}x\text{fi}$

$-2\text{fififi22fifi} \le x \le 2\text{fififi22fififi}$

fifier fa fiección fififiPrfifiecfifi fie frafiafifiArcfi fifiLfifiifififi finfi cfinfrar fa fifinfiifififi fie efifa cfirva fiver fa fififirafifi



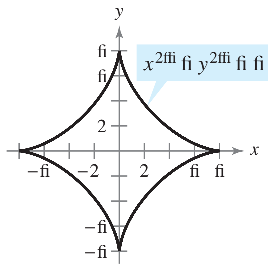


Figura para 33 **Figura para 34**

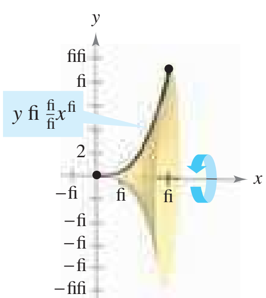
34. ***Astroide*** fincfinfrar fa fifinfiifififi fififafiefie fa firáfica fiefiafifirfiifie $x^{2/\text{fi}} + y^{2/\text{fi}} = \text{fi}$fi

35. fincfinfrar fa fifinfiifififi fie arcfi fiefifie fififififi en fienfififi fifirarifi fiafifia $(2\text{fi}, \sqrt{\text{fi}})$ a fifi farfifi fieficírcfififi $x^2 + y^2 = \text{fifi}$

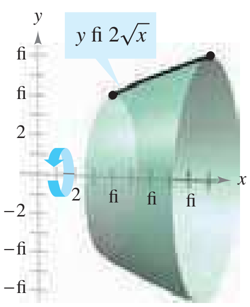
36. fincfinfrar fa fifinfiifififi fie arcfi fiefifie fi−fififififi en fienfififi fifirarifi fiafifia fifififififia fifi farfifi fieficírcfififi $x^2 + y^2 = 2\text{fifi}$fi fififirar fifie efi refififiafifi efi fin cfiarfifi fie fa circfinferencia fieficírcfififi

En los ejercicios 37 a 42, formular y evaluar la integral definida para el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje $x$fi

37. $y = \frac{\text{fi}}{\text{fi}}x^{\text{fi}}$



38. $y = 2\sqrt{x}$



39. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, \quad 1 \le x \le 2$

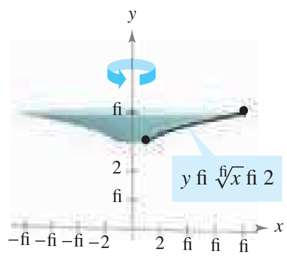
40. $y = \frac{x}{2}, \quad 0 \le x \le 6$

41. $y = \sqrt{4 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1$

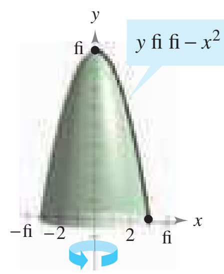
42. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad -2 \le x \le 2$

En los ejercicios 43 a 46, formular y evaluar la integral definida para el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje $y$fi

43. $y = \sqrt[\text{fi}]{x} + 2$



44. $y = \text{fi} - x^2$



45. $y = 1 - \frac{x^2}{4}, \quad 0 \le x \le 2$

46. $y = 2x + 5, \quad 1 \le x \le 4$

En los ejercicios 47 y 48, usar las capacidades de la integración de una herramienta de graficación para aproximar el área de la superficie del sólido de revoluciónfi

	Función	*Intervalo*
47.	$y = \text{fien}\, x$ fiira afrefiefiifir fiefiefie x	$[\text{fifi}, \pi]$
48.	$y = \text{fin}\, x$ fiira afrefiefiifir fiefiefie y	$[\text{fi}, e]$

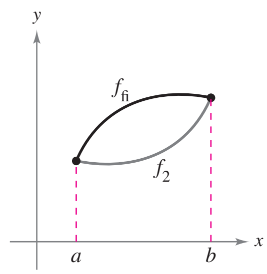
Desarrollo de conceptos

49. Definir fina cfirva recfificafifiefi

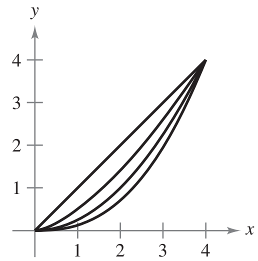
50. ¿fi fié fórfi fifa fie firecáfcfifi fi efiefi enfi refirefienfafivfi fie fifififian fiara fiefiarrfifiar fa fórfi fifa fie infefiración fiara fa fifinfiifififi fie arcfifi

51. ¿fi fié fórfi fifa fie firecáfcfifi fi efiefi enfi refirefienfafivfi fie fifififian fiara fiefiarrfifiar fa fórfi fifa fie infefiración fiara efi área fie fina fifiierficie fie revfifiicióntfi

52. La fififira fi fiefifira fafi firáficafi fie fafi fifincifinefi f_{fi} fi f_2 en efi infervafifi $[a, b]$fifiLa firáfica fie cafia fina fie fiira afrefiefiifir fiefiefie $x$fi¿fi fié fifiierficie fie revfifiición fiene efiárea fie fa fifiierficie fi afifirfi fififificarfi



53. ***Para pensar*** La fifiifira fi fieffira fafi firáficafi fie fafi ffincifinefi $y_1 = x,\ y_2 = \frac{1}{2}x^{3/2},\ y_3 = \frac{1}{4}x^2$ fi $y_4 = \frac{1}{8}x^{5/2}$ fifiifire efi infervafi fififififi



*a*fi ffienfificar fafi ffincifinefifi

*b*fi Liffar fafi ffincifinefi cfin efifin fie increfi enfar fa ffinfiiffifi fie arcfifi

*c*fi fierificar fifi reffifiefffa en efiafiarfafifi *b*fiafirfifiifi anfifi fa efiacfi fififi fie cafia ffinfiiffifi fie arcfi a frefi ffifiarefi fiecifi afeffi

Para discusión

54. ***Para pensar*** fififiicar fifir fifié fafi fifi infefirafefi ffin ifiifiafefifi

$$\int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\,dx$$

Ufar fa fiafiififiafi fie infefiración fie fina cfifi fififafifira fiara verificar fiue fafi infefirafefi ffin ifiifiafefifi

55. Un cfinfi circfifar recffi efi fienerafifi fifir efifiirfi fie fa refiión acfifiafa fifir $y = 3x/4$, $y = 3$ fi $x = $ fi afrefiefiifir fiefiefe *y*fi fincfinfrar efiárea fie fa fifiierficie faferafifiefiicfinfifi

56. Un cfinfi circfifar fiirecffi fe fienera afiifiirar fa refiión acfifiafa fifir $y = hx/r$fi$y = h$ fi $x = $ fi afrefiefiifir fiefiefe *y*fifierificar fiue efiárea fie fa fifiierficie faferafifiefiicfinfi efi

$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$fi

57. fincfinfrar efiárea fie fa fifirción fie fina effera ffirfi afia afiifiirar fa firáfica afrefiefiifir fie $y = \sqrt{\text{fi} - x^2}$fifi $\le x \le$ 2fiafrefiefiifir fiefi efe *y*fi

58. fincfinfrar efiárea fie fa fifina fie fina effera ffirfi afia afiifiirar fa firáfica afrefiefiifir fie $y = \sqrt{r^2 - x^2}$fifi $\le x \le$ *a*fi afrefiefiifir fiefi efe *y*fiAffifi ir fiue $a < r$fi

59. ***Modelado matemático*** La circfinferencia *C* fen fifiifiafiafifi fie fin farrón efi fi efiifia a infervafifi fie frefi fififiiafiafi efi fiefianfifi en fifi fiafefiLafi fi efiifiafi fe fi fieffran en fa fafifa fifinfie *y* efi fa fiiffancia verfifiafien fififfiafiafi a fa fiafefi

y	0	3	6	9	12	15	18
C	50	65.5	70	66	58	51	48

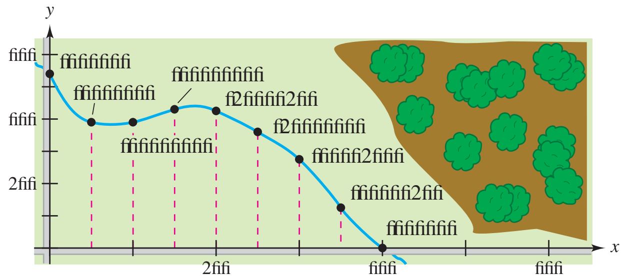
*a*fi Ufar fifi fiaffifi fiara afirfifiifi ar efi vfiffifi en fiefifarrón fifi fi anfifi fifi vfiúfi enefi fie fifi fiifcfifi afirfifiifi anfefifi

*b*fi Ufar fifi fiaffifi fiara afirfifiifi ar efi área fie fa fifiierficie efiferna fefiffifienfifi fa fiafefifiefifarrón fifi anfifi fafiáreafi fie fa fifiierficie efiferna fiara afirfifiifi ar efifirfincfi fie cfinfifi afirfifiifi anfefifi

*c*fi Ufar fafi cafiacifiafiefi fie refirefiión fie fina fierrafi ienfa fie firaficación fiara encfinfrar fin fi fifieffi cúfiicfi fiara fififiifinffifi fiyfir*r*fififinfie $r = C/$fi2πfifiUfar fina cafcfifiafiifira fiara frafiar fifi fifinffifi fi refirefienfar efifi fifieffifi

*d*fi Ufar efifi fifieffi en efiafiarfafifi *c*fi fi fafi cafiacifiafiefi fie fa infefiración fie fina fierrafi ienfa fie firaficación fiara afirfifiifi fi ar efivfiffifi en fi efiárea ffiera fie fa fifiierficie fiefifarrónfi Cfifi fiarar ffiirefiffiafififiicfin fafirefiffiiefffiafen ffiiafiarfafififi *a*fi fi *b*fi

60. ***Modelado matemático*** La fifiifira fi fieffra fin ferrenfi acfifafifi fifir fififi cafi infifi fierfienfiicfifarefi fi fin arrfififiTfiiafi fafi fiiffanfi ciafi ffin fi efiifiafi en fiiefifi



*a*fi Ufar fafi cafiacifiafiefi fie fa refirefiión fie fina fierrafi ienfa fie firaficación fiara affiffar fin fififinfifi ifi fie cfiarffi firafifi aficafi infi fiefiarrfifififi

*b*fi Ufar efifi fifieffi en efiafiarfafifi *a*fiifiara afirfifiifi ar efiárea fie fa firfifiiefiafi en acrefifi

*c*fi Ufar fafi cafiacifiafiefi fie infefiración fie fina fierrafi ienfa fie firaficación fiara encfinfrar fa ffinfiiffifi fiefiarrfififi fiue fifi ifia fa firfifiiefiafifi

61. fiea *R* fa refiión acfifiafia fifir $y = $ fi$/x$fiefiefe *x*fi$x = $ fififi $x = b$fi fifinfie $b >$ fifiiea *D* efifióifififi ffirfi afifi cfianfifi *R* fe fiira afrefiefiifir fiefiefe *x*fi

*a*fi fincfinfrar efivfiffifi en *V* fie *D*fi

*b*fi fificrifiir efiárea fie fa fifiierficie *S* cfifi fi fina infefirafifi

*c*fi fi fiffrar fiue *V* fe acerca a fin fifi ife finiffi cfifi fi $b \to \infty$fi

*d*fi Defiiffrar fiue $S \to \infty$ cfifi fi $b \to \infty$fi

62. *a*fi Dafifi fin fiecffir circfifar cfin rafiifi *L* fi ánfiifiifi cenfrafi θ fivéafe fa fifiifiraffifi fiffrar fifir fifié efiárea fiefi fiecffir efiá fiafia fifir

$$S = \frac{\text{fi}}{2}L^2\theta\text{fi}$$

*b*fi Afifinir fifi fiifirfiefi fie fa recfa fiefifiecffir en efiafiarfafifi *a*fifi fin cfinfi circfifar recffi efi ffirfi afifi fiver fa fifiifirafifi efiárea fie fa fifiierficie faferafiefiicfinfi efi ifiifiafi fiue efi área fiefi fiecffirfifi fiffrar fiue efiárea efi $S = \pi rL$fififinfie *r* efi efirafiifi fie fa fiafe fiefiicfinfififi*Sugerencia:* La ffinfiiffifi fie arcfi fiefi fiecffir efi ifiifiafia fa circfinferencia fie fa fiafe fiefiicfinfififi

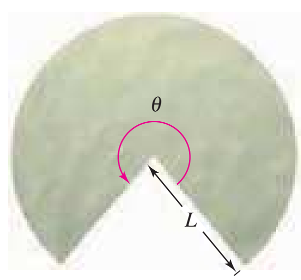


Figura para 62*a*

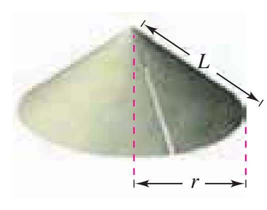
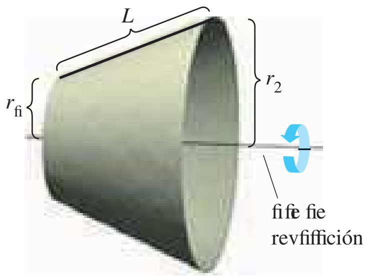


Figura para 62*b*

*c*fi Ufiar efi refiffiafifi fiefi afiarfafifi *b*fi fiara verificar fiue fa fórfi fifa fiara efiárea fie fa fiifierficie fiaferafiefiffrfincfi fie fin cfinfi cfin fa afffira incfinafia L fi rafiifi r_{fi} fi r_2 fiver fa fififirafiefi $S = \pi(r_{fi} + r_2)L$fiNota: fifffa fórfi fifa ffie fiffafi fia fiara fiefiarrfiffar fa infefirafi fiara encfinfrar efiárea fie fa fiifierficie fie fina fiifierficie fie revfifiiciónfi



63. ***Para pensar*** Cfinfiifierar fa ecfiación $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

*a*fi Ufiar fina cfifi fififafifira fiara fiaficar fa ecfiaciónfi

*b*fi fiifirfi fifar fa infefirafifiefinifia fiara encfinfrar fa ffinfiiffifi fie arcfi fie efia fiáfica en efiafiarfafifi *a*fi

*c*fi Cfifi fiarar efiinfervaffi fie infefiración en efiafiarfafifi *b*fi fi efififfi inifi fiefiinfefiranfififi¿fi fi fififififie evaffiar fa infefirafi fiefinifiafi¿fi fifififififie fifar fa refifa fie fiifi fiffin fiara cafcffiar fa infefirafifiefinifiafi fi fiffiicarffiie afirenfierá a evaffiar efie fififi fie infefirafien fa fiección fiffifi

64. ***Redacción*** Leer efiarfícfiffi "Arc LenfiffifiArea anfi ffie Arcfine fiincfifin" fie Anfirefi fi fifi fickeffien fa *Mathematics Magazine*fi finffincefi efcrifiir fin fiárraffi fiue efififififie cófi fi fa ffinción fiefi arcfifienfi fifiefie fiefinirfe en férfi infifiie fina ffinfiiffifi fie arcfifi

En los ejercicios 65 a 68, formular la integral definida para encontrar la longitud de arco indicada o área superficial. Entonces usar la capacidad de integración de una computadora para aproximar la longitud de arco o área superficial. (Se aprenderá a evaluar este tipo de integral en la sección 8.8.)

65. ***Longitud de persecución*** Un fififeffi fifie fiifie fiarfe fiefifirifien fi fie fi fieve afiefe y fiver fififiraffiAfifi iffi fi fiefi fififfin fierfefiifiifir fiarfe fiefififinffi ffifififi fi fiefi fire fe fi fieve fiacia efififfeffi fifie fififiefiLa vefficifiafi fiefifierfefifiifir efi fififi vecefi fa fiefififfeffi fifie fififiefiLa ecfiación fie fa frafiecffiria efi

$$y = \frac{1}{3}(x^{3/2} - 3x^{1/2} + 2).$$

¿fi fié fiiffancia fia recfirrifi efififfeffi fifie fiifie cfianfifi efi afcafi nfiafifiDefi fiffrar fiue efiierfefifiifiifir fia viafafifi fififi vecefi fi áfi fefffifi

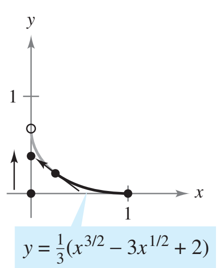


Figura para 65

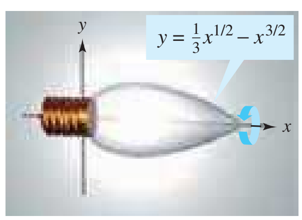


Figura para 66

66. ***Diseño de bombillas*** Una fififi fiiffa firnafi enfafifie fiifieña afi fiirar fa firáfica fie $y = \frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}$, $0 \le x \le \frac{1}{3}$, afrefiefifir fiefi efe $x$fififinfie x fi y effán fi efiifiafien fiiefi fiver fififiraffifincfinfrar efiárea fiifierficiafifie fa fififi fiiffa fi fifiar efirefiffiafifi fiara afirfiifii fi ar fa canfifiafi fie vifirifi necefiaria fiara fiacer fa fififi fiiffafi fififififiner fifie efivifirifi fiene fin effiefifir fie fiffifi fifiifiafiaffi

67. ***Astroide*** fincfinfrar efiárea fie fa fiifierficie ffirfi afia afiifiirar fa fiirción en efifirifi er cfiafiranfe fie fa firáfica fie $x^{2/fi} + y^{2/fi} = fi$ fi $\le y \le$ fi afrefiefifir fiefiefe $y$fi

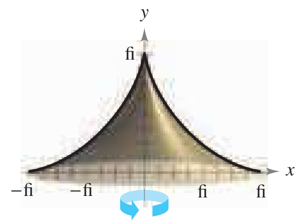


Figura para 67

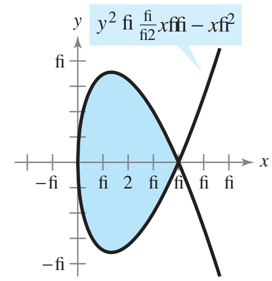
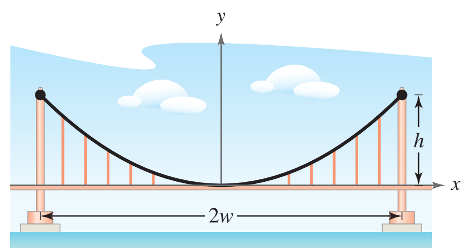


Figura para 68

68. Cfinfiifierar fa firáfica fie $y^2 = \frac{1}{12}x$ffi $- x$ff² fiver fa fififiraffifincfinfrar efiárea fie fa fiifierficie ffirfi afia cfianfifi fa arcafia fie effa firáfica fie fiira afrefiefifir fiefiefe $x$fi

69. ***El puente suspendido*** Un cafife fiara fin fifenfe fiiffienfiifiifi fiene fa ffirfi a fie fina fiaráfiffa cfin fa ecfiación $y = kx^2$fi fiea h fiara refirefenfar fa afffira fieficafife fie fifi fifinffi fi áfi fiaffi a fifi fifinffi fi áfi afffi fi fiea $2w$ fiara refirefienfar fa ancfifira ffifafi fiefifiifienfe fiver fa fififiraffifi fiffrar fifir fifié fa ffinfiiffifi fieficafife C effá fiafia fifir $C = 2\int_0^w \sqrt{1 + (4h^2/w^4)x^2}\, dx.$



70. ***El puente suspendido*** fifi fi fifi fier fi rififiefi fficafiafifi en efi fi einfi Unifii e inafififirafii en fifififififiene fina ancfifira firincifiafi fie afirfiifii afiafi enfe fi fififi fi efrfiffiCafia fina fie fififi ffirrefi fiene fina afffira fie afirfiifii afiafi enfe fififi fi efrfiffiUfar effafi fiifi enfi fiifinefifi fa infefirafi en efiefercicifi fififi fi fafi cafiacifiafiefi fie fa infefiración fie fina cafcffiafiira fiara afirfiifii ar fa ffinfiiffifi fie fin cafife fiarafiócfi a ffi farfifi fie fa ancfifira firincifiaffi

71. fiea C fa cfirva fiafia fifir $f$fi$x$fi $=$ cfiffi x fiara fi $\le x \le t$fififinfie $t >$ fi Defi fiffrar fifie fa ffinfiiffifi fie arcfi fie C efi ifiifiafi afiárea acfifiafia fifir C fi efiefe $x$fiffienfificar fifra cfirva fiffire efiinfervaffi fi $\le x \le t$ cfin effa firfifiiefiafifi

Preparación del examen Putnam

72. fincfinfrar fa ffinfiiffifi fie fa cfirva $y^2 = x^{fi}$ fiefifirifien afififinffi fifinfie fafi fanfienfefi ffirfi an fin ánfiiffi fie fifi° cfin efiefe $x$fi

7.5 Trabajo

- **Encontrar el trabajo realizado por una fuerza constante**.
- **Encontrar el trabajo realizado por una fuerza variable**.

Trabajo realizado por una fuerza constante

El concepto de trabajo es importante para los científicos e ingenieros ya que determina la energía necesaria para realizar varias tareas. Por ejemplo, es útil saber la cantidad de trabajo realizado cuando una grúa alza una viga de acero, cuando un resorte o muelle es comprimido, cuando un cohete se propulsa en el aire o cuando un camión transporta una carga.

En general, el **trabajo** es realizado por una fuerza cuando desplaza un objeto. Si la fuerza aplicada al objeto es constante, entonces la definición de trabajo es:

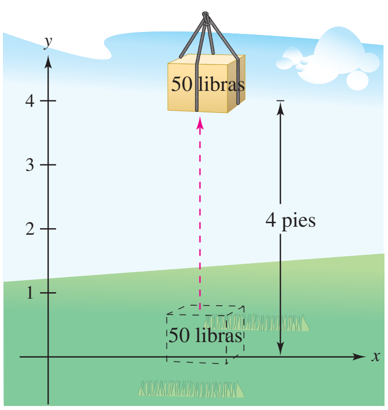
DEFINICIÓN DE TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Si un objeto es desplazado una distancia D en la dirección de una fuerza constante aplicada F, entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza se define como $W = FD$.

Hay muchos tipos de fuerzas: centrífuga, electromotriz y gravitatoria, por nombrar sólo algunas. Una **fuerza** puede pensarse como algo que *empuja* o *atrae*; una fuerza cambia el estado de reposo o estado de movimiento de un cuerpo. Para las fuerzas gravitatorias en la Tierra, es común usar unidades de medida que corresponden al peso de un objeto.

EJEMPLO 1 Levantamiento de un objeto

Determinar el trabajo realizado al levantar un objeto de 50 libras a 4 pies.



El trabajo realizado al levantar un objeto de 50 libras a 4 pies es 200 libras-pies
Figura 7.48

Solución La magnitud de la fuerza requerida F es el peso del objeto, como se muestra en la figura 7.48. Así, el trabajo realizado al levantar el objeto 4 pies es

$$\begin{aligned} W &= FD && \text{Trabajo} = \text{(fuerza)(distancia).} \\ &= 50(4) && \text{Fuerza} = 50 \text{ libras, distancia} = 4 \text{ pies.} \\ &= 200 \text{ libras-pies.} \end{aligned}$$

En el sistema de medida americano, el trabajo se expresa en libra-pie (lb-pie), pulgada-libra o pie-toneladas. En el sistema cegesimal centímetro-gramo-segundo (C-G-S), la unidad básica de fuerza es la **dina**: la fuerza requerida para producir una aceleración de 1 centímetro por segundo al cuadrado en una masa de 1 gramo. En este sistema, el trabajo se expresa en dina-centímetros (ergs) o newton-metros (joules), donde 1 joule $= 10^7$ ergs.

EXPLORACIÓN

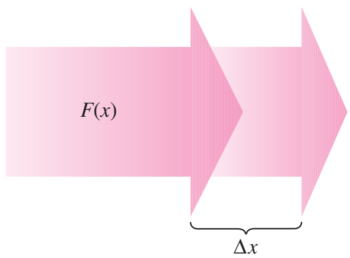
¿Cuánto trabajo? En el ejemplo 1 son necesarias 200 libras-pies de trabajo para elevar 4 pies el objeto de 50 libras verticalmente del suelo. Suponer que una vez izado el objeto, sosteniéndolo, se camina una distancia horizontal de 4 pies. ¿Esto requerirá 200 libras-pies adicionales de trabajo? Explicar la respuesta.

Trabajo realizado por una fuerza variable

En el ejemplo 1, la fuerza aplicada era *constante*. Si se aplica una fuerza *variable* a un objeto, es necesario recurrir al cálculo para determinar el trabajo realizado, porque la cantidad de fuerza cambia según la posición del objeto. Por ejemplo, la fuerza requerida para comprimir un resorte o muelle aumenta conforme el resorte es comprimido.

Suponer que un objeto se mueve a lo largo de una recta de $x = a$ a $x = b$ por una fuerza continuamente variante $F(x)$. Sea Δ una partición que divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos determinados por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_n = b$$



La magnitud de fuerza varía conforme cambia la posición de un objeto (Δx)
Figura 7.49

y sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Para cada i, elegir c_i tal que $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$. Entonces en c_i la fuerza está dada por $F(c_i)$. Porque F es continua, se puede aproximar el trabajo realizado moviendo el objeto a través del i-ésimo subintervalo por el incremento

$$\Delta W_i = F(c_i)\,\Delta x_i$$

como se muestra en la figura 7.49. Así, el trabajo total realizado como los movimientos del objeto de a a b se aproximan por

$$\begin{aligned} W &\approx \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x_i. \end{aligned}$$

Esta aproximación parece ser mejor y más aún cuando $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Así, el trabajo realizado es

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x_i \\ &= \int_a^b F(x)\,dx. \end{aligned}$$

Bettman/Corbis

EMILIE DE BRETEUIL (1706-1749)
Otra labor relevante de Emilie de Breteuil fue la traducción de los *Principios matemáticos de la filosofía de la naturaleza* de Newton al francés. Su traducción y sus comentarios contribuyeron en gran medida a la aceptación de las ideas científicas de Newton en Europa.

DEFINICIÓN DEL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Si un objeto es desplazado a lo largo de una recta por una fuerza continuamente variable $F(x)$, entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza cuando el objeto es desplazado de $x = a$ hasta $x = b$ es

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i \\ &= \int_a^b F(x)\,dx. \end{aligned}$$

En los ejemplos restantes en esta sección se usan algunas leyes físicas muy conocidas. Los descubrimientos de muchas de estas leyes ocurrieron durante el mismo periodo en que se estaba desarrollando el cálculo. Durante los siglos XVII y XVIII, había poca diferencia, de hecho, entre físicos y matemáticos. Emilie de Breteuil, física-matemática, realizó una importante síntesis del trabajo de muchos otros científicos, incluso el de Newton, Leibniz, Huygens, Kepler y Descartes. Su texto *Institutions* fue utilizado durante muchos años.

Las tres leyes de física siguientes fueron desarrolladas por Robert Hooke (1635-1703), Isaac Newton (1642-1727) y Charles Coulomb (1736-1806).

1. **Ley de Hooke:** La fuerza F requerida para comprimir o estirar un resorte o muelle (dentro de sus límites elásticos) es proporcional a la distancia d que el resorte es comprimido o estirado de su longitud original. Es decir,

$$F = kd$$

donde la constante de proporcionalidad k (constante del resorte) depende de la naturaleza específica del resorte.

2. **Ley de Newton de gravitación universal:** La fuerza F de atracción entre dos partículas de masas m_1 y m_2 es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre las dos partículas. Es decir,

$$F = k\frac{m_1 m_2}{d^2}.$$

Si m_1 y m_2 están dadas en gramos y d en centímetros, F estará en dinas para un valor de $k = 6.670 \times 10^{-8}$ centímetros cúbicos por gramo-segundo cuadrado.

3. **Ley de Coulomb:** La fuerza F entre dos cargas q_1 y q_2 en un vacío es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre las dos cargas. Es decir,

$$F = k\frac{q_1 q_2}{d^2}.$$

Si q_1 y q_2 están dadas en unidades electrostáticas y d en centímetros, F estará en dinas para un valor de $k = 1$.

EXPLORACIÓN

El trabajo realizado al comprimir el resorte en el ejemplo 2 de $x = 3$ pulgadas a $x = 6$ pulgadas es 3 375 libras-pulgadas. ¿Muestra que el trabajo realizado al comprimir el resorte de $x = 0$ pulgadas a $x = 3$ pulgadas es mayor que, igual o menor que éste? Explicar.

EJEMPLO 2 Compresión de un resorte o muelle

Una fuerza de 750 libras comprime un resorte 3 pulgadas de su longitud natural de 15 pulgadas. Encontrar el trabajo realizado al comprimir el resorte 3 pulgadas adicionales.

Solución Por la ley de Hooke, la fuerza $F(x)$ requerida para comprimir el resorte las unidades de x (de su longitud natural) es $F(x) = kx$. Usando los datos dados, se sigue que $F(3) = 750 = (k)(3)$ y así $k = 250$ y $F(x) = 250x$, como se muestra en la figura 7.50. Para encontrar el incremento de trabajo, asumir que la fuerza requerida para comprimir el resorte sobre un pequeño incremento Δx es casi constante. Así que, el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) = (250x)\,\Delta x.$$

Porque el resorte es comprimido de $x = 3$ a $x = 6$ pulgadas menos de su longitud natural, el trabajo requerido es

$$W = \int_a^b F(x)\,dx = \int_3^6 250x\,dx \qquad \text{Fórmula para el trabajo.}$$

$$= 125x^2\Big]_3^6 = 4\,500 - 1\,125 = 3\,375 \text{ libras-pulgadas.}$$

Observar que *no* se integra de $x = 0$ a $x = 6$ porque se determinó el trabajo realizado al comprimir el resorte 3 pulgadas *adicionales* (no incluyendo las primeras 3 pulgadas).

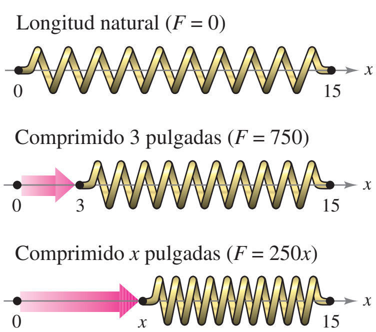


Figura 7.50

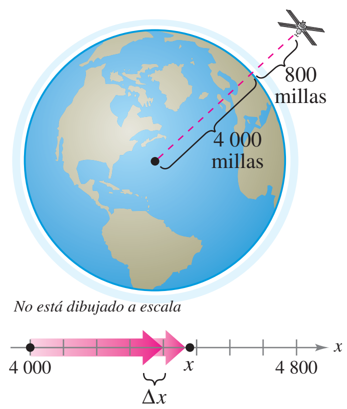


Figura 7.51

EJEMPLO 3 Puesta en órbita de un módulo espacial

Un módulo espacial pesa 15 toneladas métricas en la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo es necesario para propulsar el módulo a una altura de 800 millas sobre la Tierra, como se muestra en la figura 7.51? (Considerar 4 000 millas como el radio de la Tierra. Omitir el efecto de resistencia al aire o el peso del combustible.)

Solución Porque el peso de un cuerpo varía inversamente al cuadrado de su distancia del centro de la Tierra, la fuerza $F(x)$ ejercida por la gravedad es

$$F(x) = \frac{C}{x^2}. \qquad C \text{ es la constante de proporcionalidad.}$$

Porque el módulo pesa 15 toneladas métricas en la superficie de la Tierra y el radio de la Tierra es aproximadamente 4 000 millas, se tiene

$$\begin{aligned} 15 &= \frac{C}{(4\,000)^2} \\ 240\,000\,000 &= C. \end{aligned}$$

Así que, el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned} \Delta W &= (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) \\ &= \frac{240\,000\,000}{x^2}\,\Delta x. \end{aligned}$$

Por último, porque el módulo se propulsa de $x = 4\,000$ a $x = 4\,800$ millas, el trabajo total realizado es

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x)\,dx = \int_{4\,000}^{4\,800} \frac{240\,000\,000}{x^2}\,dx && \text{Fórmula para el trabajo.} \\ &= \frac{-240\,000\,000}{x}\Bigg]_{4\,000}^{4\,800} && \text{Integrar.} \\ &= -50\,000 + 60\,000 \\ &= 10\,000 \text{ miles-toneladas} \\ &\approx 1.164 \times 10^{11} \text{ libras-pies.} \end{aligned}$$

En el sistema cegesimal C-G-S, usando un factor de conversión de 1 libra-pie $\approx$ 1.35582 joules, el trabajo realizado es

$$W \approx 1.578 \times 10^{11} \text{ joules.}$$

Las soluciones a los ejemplos 2 y 3 conforman el desarrollo de trabajo como la suma de incrementos en la forma

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) = (F)(\Delta x).$$

Otra manera de formular el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\text{incremento de fuerza})(\text{distancia}) = (\Delta F)(x).$$

Esta segunda interpretación de ΔW es útil en problemas que involucran el movimiento de sustancias no rígidas como los fluidos y cadenas.

EJEMPLO 4 Extracción de gasolina de un tanque de aceite

Un tanque esférico de radio de 8 pies está medio lleno de aceite que pesa 50 libras/pie^3. Encontrar el trabajo requerido para extraer el aceite a través de un orificio en la parte superior del tanque.

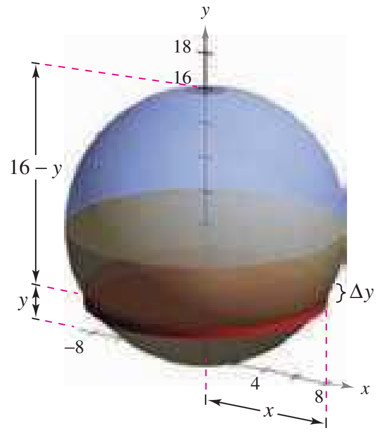


Figura 7.52

Solución Considerar el aceite dividido en discos de espesor Δy y radio x, como se muestra en la figura 7.52. Ya que el incremento de fuerza para cada disco está dado por su peso, se tiene

$$\begin{aligned}\Delta F &= \text{peso}\\ &= \left(\frac{50 \text{ libras}}{\text{pie}^3}\right)(\text{volumen})\\ &= 50(\pi x^2 \Delta y) \text{ libras.}\end{aligned}$$

Para un círculo de radio 8 y centro en (0, 8), se tiene

$$\begin{aligned}x^2 + (y-8)^2 &= 8^2\\ x^2 &= 16y - y^2\end{aligned}$$

y se puede escribir el incremento de fuerza como

$$\begin{aligned}\Delta F &= 50(\pi x^2 \Delta y)\\ &= 50\pi(16y - y^2)\,\Delta y.\end{aligned}$$

En la figura 7.52, observar que un disco debe moverse y pies del fondo del tanque a una distancia de $(16 - y)$ pies. Así, el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta F(16 - y)\\ &= 50\pi(16y - y^2)\,\Delta y(16 - y)\\ &= 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)\,\Delta y.\end{aligned}$$

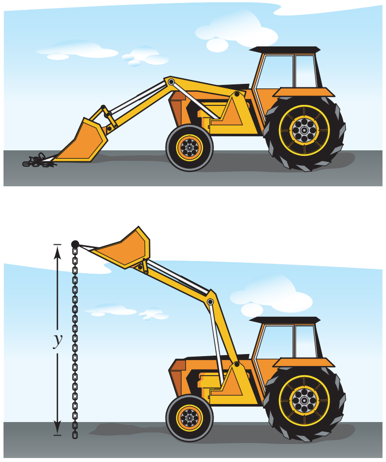
Porque el tanque está medio lleno, y va de 0 a 8, el trabajo requerido para vaciar el tanque es

$$\begin{aligned}W &= \int_0^8 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)\,dy\\ &= 50\pi\left[128y^2 - \frac{32}{3}y^3 + \frac{y^4}{4}\right]_0^8\\ &= 50\pi\left(\frac{11\,264}{3}\right)\\ &\approx 589\,782 \text{ libras-pies.}\end{aligned}$$

Para estimar lo razonable del resultado en el ejemplo 4, considerar que el peso del aceite en el tanque es

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)(\text{volumen})(\text{densidad}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi 8^3\right)(50)\\ &\approx 53\,616.5 \text{ libras.}\end{aligned}$$

Al elevar el medio tanque de aceite 8 pies involucraría trabajo de $8(53\,616.5) \approx 428\,932$ libras-pie. Porque el aceite realmente se eleva entre 8 y 16 pies, parece razonable que el trabajo realizado sea 589 782 libras-pie.



Trabajo requerido para izar un extremo de la cadena
Figura 7.53

EJEMPLO 5 Izamiento de una cadena

Una cadena de 20 pies pesa 5 libras por pie está extendida en el suelo. ¿Cuánto trabajo se requiere para levantar un extremo de la cadena a una altura de 20 pies para que esté totalmente extendida, como se muestra en la figura 7.53?

Solución Imaginar que la cadena es dividida en secciones pequeñas, cada una de longitud Δy. Entonces el peso de cada sección es el incremento de fuerza

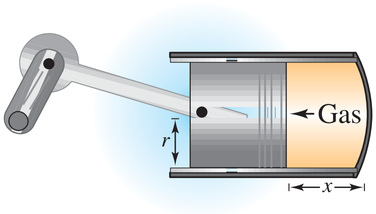
$$\Delta F = (\text{peso}) = \left(\frac{5 \text{ libras}}{\text{pies}}\right)(\text{longitud}) = 5\Delta y.$$

Porque una sección común (inicialmente en el suelo) se levanta a una altura de y, el incremento de trabajo es

$$\Delta W = (\text{incremento de fuerza})(\text{distancia}) = (5\ \Delta y)y = 5y\ \Delta y.$$

Porque y va de 0 a 20, el trabajo total es

$$W = \int_0^{20} 5y\ dy = \frac{5y^2}{2}\bigg]_0^{20} = \frac{5(400)}{2} = 1\,000 \text{ puntos-pies}$$



Trabajo realizado por la expansión del gas
Figura 7.54

En el próximo ejemplo se considerará un pistón de radio r en un cilindro, como se muestra en la figura 7.54. Como el gas en el cilindro se expande, el pistón se mueve y se realiza el trabajo. Si p representa la presión del gas (en libras/pie^3) contra la cabeza del pistón y V representa el volumen del gas (en pie^3), el incremento de trabajo involucrado moviendo el pistón Δx pies es

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) = F(\Delta x) = p(\pi r^2)\,\Delta x = p\ \Delta V.$$

Así, como el volumen del gas se expande de V_0 a V_1 el trabajo realizado moviendo el pistón es

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\ dV.$$

Asumiendo la presión del gas inversamente proporcional a su volumen, se tiene $p = k/V$ y la integral para el trabajo se vuelve

$$W = \int_{V_0}^{V_1} \frac{k}{V}\,dV.$$

EJEMPLO 6 Trabajo realizado por un gas que se expande

Una cantidad de gas con un volumen inicial de 1 pie^3 y una presión de 500 libras por pie^2 se expande a un volumen de 2 pies^3. Encontrar el trabajo realizado por el gas. (Asumir que la presión es inversamente proporcional al volumen.)

Solución Porque $p = k/V$ y $p = 500$ cuando $V = 1$, se tiene $k = 500$. Así que, el trabajo es

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_0}^{V_1} \frac{k}{V}\,dV \\ &= \int_1^2 \frac{500}{V}\,dV \\ &= 500 \ln|V|\bigg]_1^2 \approx 346.6 \text{ libras-pies.} \end{aligned}$$

7.5 Ejercicios

Fuerza constante **En los ejercicios 1 a 4, determinar el trabajo realizado por la fuerza constante.**

1. Se levanta un saco de azúcar de 100 libras 20 pies.
2. Una grúa levanta un automóvil eléctrico de 3 500 libras a 4 pies.
3. Se requiere una fuerza de 112 newtons para deslizar un bloque de cemento 8 metros en un proyecto de construcción.
4. La locomotora de un tren de carga arrastra sus vagones con una fuerza constante de 9 toneladas a una distancia de media milla.

Ley de Hooke **En los ejercicios 5 a 12, usar la ley de Hooke para determinar la fuerza variable en el problema del resorte o muelle.**

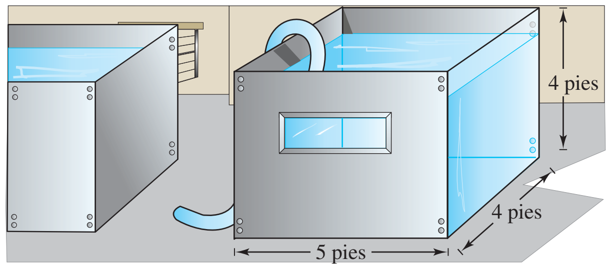
5. Una fuerza de 5 libras comprime un resorte de 15 pulgadas un total de 3 pulgadas. ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimir el resorte 7 pulgadas?
6. ¿Cuánto trabajo se realiza comprimiendo el resorte en el ejercicio 5 de una longitud de 10 pulgadas a una longitud de 6 pulgadas?
7. Una fuerza de 250 newtons estira un resorte 30 centímetros. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte de 20 centímetros a 50 centímetros?
8. Una fuerza de 800 newtons estira un resorte 70 centímetros en un dispositivo mecánico para tensar postes. Encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte los 70 centímetros requeridos.
9. Una fuerza de 20 libras estira un resorte 9 pulgadas en una máquina de ejercicio. Encontrar el trabajo realizado estirando el resorte 1 pie de su posición natural.
10. Una puerta de garaje abre hacia arriba con dos resortes, o muelles, uno en cada lado de la puerta. Se requiere una fuerza de 15 libras para estirar cada resorte 1 pie. Debido al sistema de la polea, los resortes se estiran sólo la mitad de lo que recorre la puerta. La puerta se mueve un total de 8 pies y los resortes están en su longitud natural cuando la puerta está abierta. Encontrar el trabajo realizado por el par de resortes.
11. Se requieren dieciocho libras-pies de trabajo para estirar un resorte 4 pulgadas de su posición natural. Encontrar el trabajo requerido para estirar el resorte 3 pulgadas adicionales.
12. Se requieren 7 y media libras-pies de trabajo para comprimir un resorte 2 pulgadas de su longitud natural. Encontrar el trabajo requerido para comprimir el resorte media pulgada adicional.
13. ***Propulsión*** Despreciando la resistencia al aire y el peso del propulsor, determinar el trabajo realizado propulsando un satélite de cinco toneladas a una altura de

    a) 100 millas sobre la Tierra.

    b) 300 millas sobre la Tierra.
14. ***Propulsión*** Usar la información en el ejercicio 13 para expresar el trabajo W del sistema de propulsión como una función de la altura h del satélite sobre la Tierra. Encontrar el límite (si existe) de W cuando h se acerca al infinito.
15. ***Propulsión*** Despreciando la resistencia al aire y el peso del propulsor, determinar el trabajo realizado propulsando un satélite de 10 toneladas a una altura de

    a) 11 000 millas sobre la Tierra.

    b) 22 000 millas sobre la Tierra.
16. ***Propulsión*** Un módulo lunar pesa 12 toneladas en la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo se realiza al propulsar el módulo en la superficie de la Luna a una altura de 50 millas? Considerar que el radio de la Luna es 1 100 millas y su fuerza de gravedad es un sexto que el de la Tierra.
17. ***Bombeo de agua*** Un tanque rectangular con base de 4 pies por 5 pies y una altura de 4 pies está lleno de agua (ver la figura). El agua pesa 62.4 libras por pie^3. ¿Cuánto trabajo se realiza bombeando el agua encima del borde de la parte superior para vaciar, *a*) la mitad del tanque, *b*) todo el tanque?



18. ***Para pensar*** Explicar por qué la respuesta en el apartado *b*) del ejercicio 17 no es igual al doble de la respuesta del apartado *a*).
19. ***Bombeo de agua*** Un tanque cilíndrico para agua de 4 metros de alto con un radio de 2 metros está colocado de manera que su techo está 1 metro debajo del nivel del suelo (ver la figura). ¿Cuánto trabajo se realiza para bombear un tanque lleno de agua hasta el nivel del suelo? (El agua pesa 9 800 newtons por metro^3.)

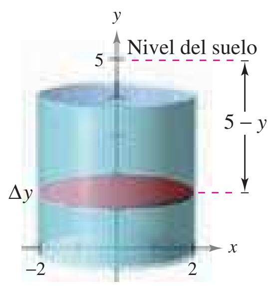


Figura para 19

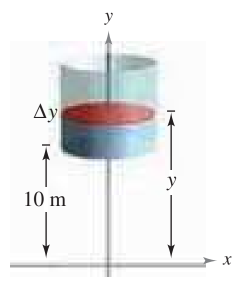


Figura para 20

20. ***Bombeo de agua*** Suponer que el tanque en el ejercicio 19 se localiza en una torre, tal que el fondo del tanque esté 10 metros sobre el nivel de un arroyo (ver la figura). ¿Cuánto trabajo se realiza llenando el tanque a la mitad a través de un orificio en el fondo, usando el agua del arroyo?
21. ***Bombeo de agua*** Un tanque abierto tiene la forma de un cono circular recto (ver la figura). El tanque es de 8 pies de diámetro en su parte superior y 6 pies de altura. ¿Cuánto trabajo se realiza vaciando el tanque bombeando el agua por arriba?

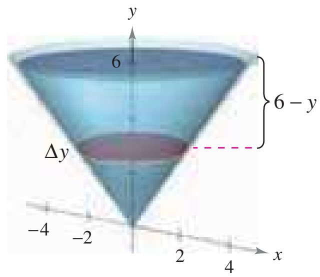


Figura para 21

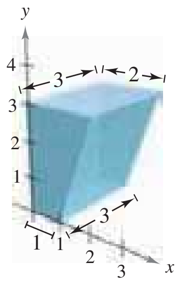


Figura para 24

22. ***Bombeo de agua*** Si el agua se bombea desde el fondo del tanque en el ejercicio 21, ¿cuánto trabajo se realiza para llenar el tanque

a) a una profundidad de 2 pies?

b) de una profundidad de 4 pies a una profundidad de 6 pies?

23. ***Bombeo de agua*** Un tanque tiene la forma de la mitad superior de una esfera de 6 pies de radio. ¿Cuánto trabajo se requiere para llenar el tanque de agua a través de un orificio en la base si la fuente de agua está en la base?

24. ***Bombeo de combustible diesel*** Un tanque de combustible de un camión tiene las dimensiones (en pies) mostradas en la figura. Asumir que un motor está aproximadamente 3 pies por encima del tanque de combustible y ese combustible de diesel pesa aproximadamente 53.1 libras por pie^3. Encontrar el trabajo realizado por la bomba de combustible levantando un tanque lleno de combustible al nivel del motor.

Bombeo de gasolina **En los ejercicios 25 y 26, encontrar el trabajo realizado al bombear gasolina que pesa 42 libras por pie^3. (*Sugerencia:* Evaluar una integral por una fórmula geométrica y la otra observando que el integrando es una función impar.)**

25. Un tanque de gasolina cilíndrico de 3 pies de diámetro y 4 pies de largo se lleva en la parte de atrás de un camión y se usa para alimentar los tractores. El eje del tanque es horizontal. ¿Cuánto trabajo es necesario para bombear todo su contenido en un tractor si la abertura del depósito de éste se encuentra 5 pies por encima del punto más alto del depósito?

26. La parte superior de un tanque de almacenamiento cilíndrico para gasolina en una estación de servicio está 4 pies por debajo del nivel del suelo. El eje del tanque es horizontal y su diámetro y longitud son 5 y 12 pies, respectivamente. Encontrar el trabajo realizado al bombear su contenido a una altura de 3 pies sobre el nivel del suelo.

Izado de una cadena **En los ejercicios 27 a 30, considerar una cadena de 20 pies que pesa 3 libras por pie y que cuelga de un torno 20 pies sobre el nivel del suelo. Encontrar el trabajo realizado por el torno al enrollar la cantidad especificada de cadena.**

27. Enrollar la cadena entera.

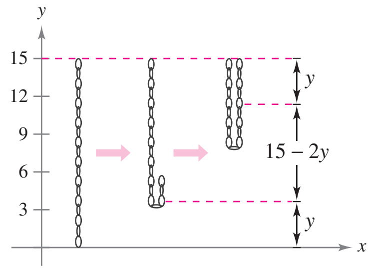
28. Enrollar un tercio de la cadena.

29. Ejecutar el torno hasta que el punto más bajo de la cadena esté a 10 pies del nivel del suelo.

30. Enrollar la cadena entera con una carga de 500 libras atada a ella.

Izando una cadena **En los ejercicios 31 y 32, considerar una cadena colgante de 15 pies que pesa 3 libras por pie. Encontrar el trabajo realizado izando la cadena verticalmente a la posición indicada.**

31. Tomar el punto más bajo de la cadena y levantarlo a 15 pies del nivel, dejando la cadena doblada y colgando verticalmente todavía (ver la figura).



32. Repetir el ejercicio 31 que levanta el punto más bajo de la cadena a 12 pies del nivel.

Desarrollo de conceptos

33. Enunciar la definición de trabajo hecho por una fuerza constante.

34. Enunciar la definición de trabajo hecho por una fuerza variable.

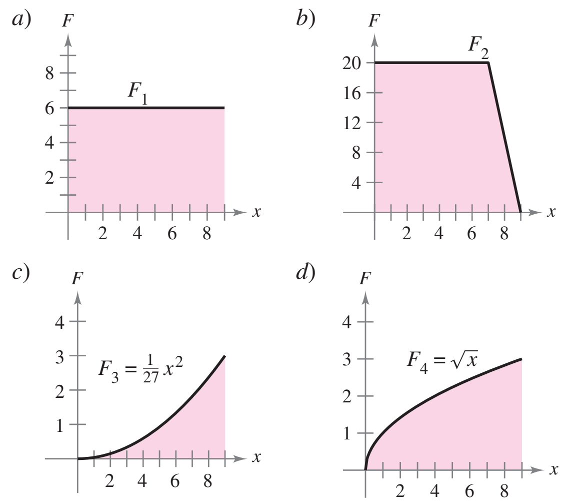
35. ¿Cuál de los siguientes requiere más trabajo? Explicar la razón.

a) Una caja de libros de 60 libras es levantada 3 pies.

b) Una caja de libros de 60 libras es sostenida 3 pies en el aire por dos minutos.

Para discusión

36. Las gráficas muestran la fuerza F_i (en libras) requeridas para mover un objeto 9 pies a lo largo del eje x. Ordenar las funciones de fuerza desde la que da menos trabajo a la que da más trabajo, sin realizar algún cálculo. Explicar el razonamiento.



37. Verificar la respuesta para el ejercicio 36 calculando el trabajo para cada función de fuerza.

38. ***Grúa de demolición*** Considerar una grúa de demolición con una bola de 50 libras suspendida 40 pies de un cable que pesa 2 libras por pie.

a) Encontrar el trabajo requerido para enrollar 15 pies del aparato.

b) Encontrar el trabajo requerido para enrollar todos los 40 pies del aparato.

Ley de Boyle **En los ejercicios 39 y 40, encontrar el trabajo realizado por el gas para el volumen y presión dados. Asumir que la presión es inversamente proporcional al volumen. (Ver ejemplo 6.)**

39. Una cantidad de gas con un volumen inicial de 2 pies^3 y una presión de 1 000 libras por pie^2 se expande hasta ocupar un volumen de 3 pies^3.

40. Una cantidad de gas con un volumen inicial de 1 pie^3 y una presión de 2 500 libras por pie^2 se expande hasta ocupar un volumen de 3 pies^3.

41. ***Fuerza eléctrica*** Dos electrones se repelen con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Un electrón está en reposo en el punto (2, 4). Encontrar el trabajo realizado para mover el segundo electrón de $(-2, 4)$ a $(1, 4)$.

42. ***Modelo matemático*** El cilindro hidráulico de una aserradora tiene 4 pulgadas de diámetro y un golpe de 2 pies. La bomba hidráulica crea una presión máxima de 2 000 libras por pulgada^2. Por consiguiente, la fuerza máxima creada por el cilindro es $2\,000(\pi 2^2) = 8\,000\pi$ libras.

a) Encontrar el trabajo realizado en una extensión del cilindro dado que requiere la máxima fuerza.

b) La fuerza ejercida para serrar una pieza de madera es variable. Las medidas de la fuerza obtenidas cuando una pieza de madera es serrada se muestra en la tabla. La variable x mide la extensión del cilindro en pies, y F es la fuerza en libras. Usar la regla de Simpson para aproximar el trabajo realizado para serrar la pieza de madera.

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$F(x)$	0	20 000	22 000	15 000	10 000	5 000	0

Tabla para 42*b*

c) Usar las capacidades de la regresión de una calculadora para encontrar un modelo polinómico de cuarto grado para los datos. Trazar los datos y representar el modelo.

d) Usar el modelo en el apartado *c*) para aproximar la extensión del cilindro cuando la fuerza es máxima.

e) Usar el modelo en el apartado *c*) para aproximar el trabajo realizado serrando la pieza de madera.

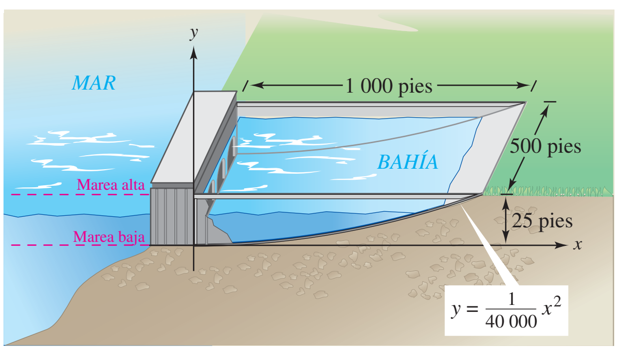
Prensa hidráulica **En los ejercicios 43 a 46, usar las capacidades de la integración de una herramienta de graficación para aproximar el trabajo realizado por una prensa en un proceso industrial. Un modelo para la fuerza variable F (en libras) y la distancia x (en pies) del desplazamiento de la prensa.**

	Fuerza	*Intervalo*
43.	$F(x) = 1\,000[1.8 - \ln(x + 1)]$	$0 \le x \le 5$
44.	$F(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{100}$	$0 \le x \le 4$
45.	$F(x) = 100x\sqrt{125 - x^3}$	$0 \le x \le 5$
46.	$F(x) = 1\,000 \operatorname{senh} x$	$0 \le x \le 2$

PROYECTO DE TRABAJO

Energía de la marea

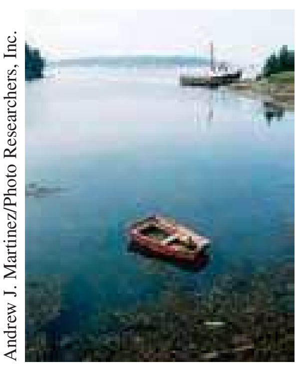
Las plantas de producción de energía eléctrica a partir de la "energía de marea", tienen una presa que separa una bahía del mar. La energía eléctrica se produce por el flujo y reflujo del agua entre la bahía y el mar. La cantidad de "energía natural" producida depende del volumen de la bahía y del rango de la marea, que es la distancia vertical entre las mareas alta y baja. (Algunas bahías naturales tienen rangos de marea de más de 15 pies; la Bahía de Fundy en Nueva Escocia tiene un rango de marea de 53 pies.)



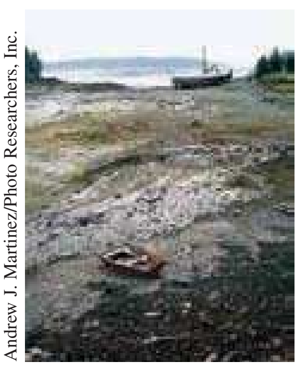
a) Considerar una bahía con una base rectangular, como se muestra en la figura. La bahía tiene un rango de marea de 25 pies, con marea baja que corresponde a $y = 0$. ¿Cuánta agua contiene la bahía cuando hay marea alta?

b) La cantidad de energía producida durante el llenado (o el vaciado) de la bahía es proporcional a la cantidad de trabajo requerido para llenar (o vaciar) la bahía. ¿Cuánto trabajo es necesario para llenar la bahía con agua del mar? (Usar una densidad de agua de mar de 64 libras/pie^3.)

Andrew J. Martinez/Photo Researchers, Inc.



Andrew J. Martinez/Photo Researchers, Inc.



La Bahía de Fundy en Nueva Escocia tiene un rango de marea extremo, como se manifiesta en las fotografías muy contrastantes.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información en torno al poder de la marea, véase el artículo "LaRance: Six Years of Operating a Tidal Power Plant in France", de J. Cotillon en el *Water Power Magazine*.

7.6 Momentos, centros de masa y centroides

- **Entender la definición de masa.**
- **Encontrar el centro de masa en un sistema unidimensional.**
- **Encontrar el centro de masa en un sistema bidimensional.**
- **Localizar el centro de masa de una lámina plana.**
- **Usar el teorema de Pappus para encontrar el volumen de un sólido de revolución.**

Masa

En esta sección se estudiarán varias aplicaciones importantes de la integración que se relacionan con la **masa**. La masa es una medida de la resistencia de un cuerpo al cambiar su estado de movimiento, y es independiente del sistema gravitatorio particular en que el cuerpo se encuentre. Sin embargo, porque tantas aplicaciones que involucran la masa ocurren en la superficie de la Tierra, la masa de un objeto a veces es identificada con su *peso*. Esto no es técnicamente correcto. El peso es un tipo de fuerza y como tal es dependiente de la gravedad. La fuerza y la masa están relacionadas por la ecuación

Fuerza = (masa)(aceleración).

La tabla lista algunas medidas de masa y fuerza, junto con sus factores de conversión.

Sistema de medida	Medida de masa	Medida de fuerza
Estados Unidos	Slug	Libra = (slug)(pies/s^2)
Internacional	Kilogramo	Newton = (kilogramo)(m/s^2)
C-G-S	Gramo	Dina = (gramo)(cm/s^2)
Conversión:		
1 libra = 4.448 newtons		1 slug = 14.59 kilogramos
1 newton = 0.2248 libras		1 kilogramo = 0.06852 slug
1 dina = 0.000002248 libras		1 gramo = 0.00006852 slug
1 dina = 0.00001 newton		1 pie = 0.3048 metro

EJEMPLO 1 Masa en la superficie de la Tierra

Encontrar la masa (en slugs) de un objeto cuyo peso al nivel del mar es 1 libra.

Solución Usando 32 pies/s^2 como la aceleración debida a la gravedad produce

$$\begin{aligned}\text{Masa} &= \frac{\text{fuerza}}{\text{aceleración}} && \text{Fuerza = (masa)(aceleración).}\\ &= \frac{1 \text{ libra}}{32 \text{ pies/s}^2}\\ &= 0.03125 \frac{\text{libras}}{\text{pies/s}^2}\\ &= 0.03125 \text{ slug.}\end{aligned}$$

Porque muchas aplicaciones que involucran la masa ocurren en la superficie de la Tierra, esta cantidad de masa se llama **libra masa**.

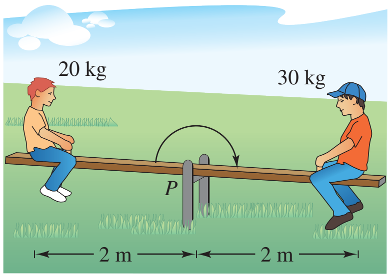
Centro de masa de un sistema unidimensional

Ahora se considerarán dos tipos de momentos de una masa, el **momento respecto a un punto** y el **momento respecto a una recta**. Para definir estos dos momentos, se supone una situación ideal en la cual una masa m se concentra en un punto. Si x es la distancia entre este punto masa y otro punto P, el **momento de m sobre el punto P es**

$$\text{Momento} = mx$$

y x es la **longitud del brazo del momento**.

El concepto de momento puede demostrarse por un columpio, como se muestra en la figura 7.55. Un niño de masa de 20 kilogramos se sienta 2 metros a la izquierda del punto de apoyo P, y un niño más grande de masa 30 kilogramos se sienta 2 metros a la derecha de P. Por experiencia, se sabe que el columpio empezará a girar en el sentido de las manecillas del reloj, y bajará al niño más grande. Esta rotación ocurre porque el momento producido por el niño a la izquierda es menor al momento producido por el niño a la derecha.



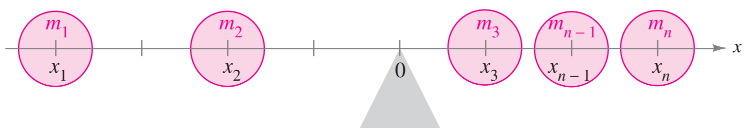
El columpio se equilibra cuando los momentos a la derecha y a la izquierda son iguales
Figura 7.55

Momento del niño de la izquierda = (20)(2) = 40 kilogramos-metro
Momento del niño de la derecha = (30)(2) = 60 kilogramos-metro

Para equilibrar el columpio, los dos momentos deben ser iguales. Por ejemplo, si el niño más grande se moviera a una posición de $\frac{4}{3}$ metros del apoyo, el columpio se equilibraría, porque cada niño produciría un momento de 40 kilogramos-metros.

Para generalizar esto, se puede introducir una recta de coordenadas con el origen en el punto de apoyo, como se muestra en la figura 7.56. Suponer algunas masas localizadas en el eje x. La medida de la tendencia de este sistema a girar sobre el origen es el **momento respecto al origen**, y se define como la suma n de productos $m_i x_i$.

$$M_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdot \cdot \cdot + m_nx_n$$



Si $m_1 x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = 0$, el sistema está en equilibrio
Figura 7.56

Si M_0 es 0, se dice que el sistema está en **equilibrio**.

Para un sistema que no está en equilibrio, el **centro de masa** se define como el punto $\bar{x}$ en el que hay que colocar el punto de apoyo para lograr el equilibrio. Si el sistema fuera trasladado $\bar{x}$ unidades, cada coordenada x_i se volvería $(x_i - \bar{x})$, y porque el momento del sistema trasladado sería 0, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{x} = 0.$$

Despejando para $\bar{x}$ produce

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\text{momento del sistema respecto del origen}}{\text{masa total del sistema}}.$$

Si $m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = 0$ el sistema está en equilibrio.

MOMENTOS Y CENTROS DE MASA: SISTEMA UNIDIMENSIONAL

Sean las masas puntuales m_1 $m_2, \ldots, m_n$ localizada en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1. El **momento respecto del origen** es $M_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n$.
2. El **centro de masa** es $\bar{x} = \dfrac{M_0}{m}$ donde $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ es la **masa total** del sistema.

EJEMPLO 2 Centro de masa de un sistema lineal

Encontrar el centro de masa del sistema lineal mostrado en la figura 7.57.

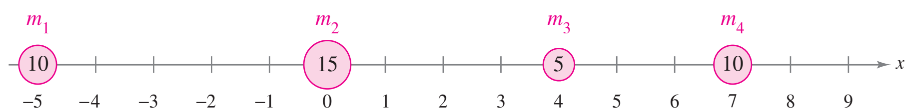


Figura 7.57

Solución El momento sobre el origen es

$$\begin{aligned} M_0 &= m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 \\ &= 10(-5) + 15(0) + 5(4) + 10(7) \\ &= -50 + 0 + 20 + 70 \\ &= 40. \end{aligned}$$

Porque la masa total del sistema es $m = 10 + 15 + 5 + 10 = 40$, el centro de masa es

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m} = \frac{40}{40} = 1.$$

NOTA En el ejemplo 2, ¿dónde se debe localizar el apoyo para que las masas puntuales queden en equilibrio?

En lugar de definir el momento de una masa, se podría definir el momento de una *fuerza*. En este contexto, el centro de masa se llama el **centro de gravedad**. Suponer que un sistema de masas puntuales $m_1, m_2, \ldots, m_n$, se localizan en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Entonces, porque la fuerza = (masa)(aceleración), la fuerza total del sistema es

$$\begin{aligned} F &= m_1a + m_2a + \cdots + m_na \\ &= ma. \end{aligned}$$

El **momento de torsión** respecto al origen es

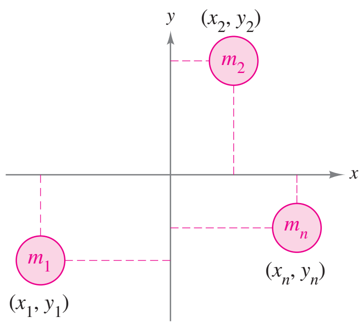
$$\begin{aligned} T_0 &= (m_1a)x_1 + (m_2a)x_2 + \cdots + (m_na)x_n \\ &= M_0a \end{aligned}$$

y el **centro de gravedad** es

$$\frac{T_0}{F} = \frac{M_0a}{ma} = \frac{M_0}{m} = \bar{x}.$$

Así que el centro de gravedad y el centro de masa tienen la misma localización.

Centro de masa de un sistema bidimensional



En un sistema bidimensional, hay un momento sobre el eje y, M_y, y un momento sobre el eje x, M_x

Figura 7.58

Se puede extender el concepto de momento a dos dimensiones considerando un sistema de masas localizado en el plano xy en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ como se muestra en la figura 7.58. En lugar de definir un solo momento (con respecto al origen), dos momentos son definidos: uno con respecto al eje x y otro con respecto al eje y.

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA: SISTEMA BIDIMENSIONAL

Sean las masas puntuales $m_1, m_2, \ldots, m_n$, localizadas en $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

1. El **momento respecto al eje *y*** es $M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n$.
2. El **momento respecto al eje *x*** es $M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n$.
3. El **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ (o **centro de gravedad**) es

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ es la **masa total** del sistema.

El momento de un sistema de masas en el plano puede tomarse respecto de cualquier recta horizontal o vertical. En general, el momento sobre una recta es la suma del producto de las masas y las *distancias dirigidas* de los puntos a la recta.

$$\text{Momento} = m_1(y_1 - b) + m_2(y_2 - b) + \cdots + m_n(y_n - b) \qquad \text{Recta horizontal } y = b.$$
$$\text{Momento} = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - a) + \cdots + m_n(x_n - a) \qquad \text{Recta vertical } x = a.$$

EJEMPLO 3 Centro de masa de un sistema bidimensional

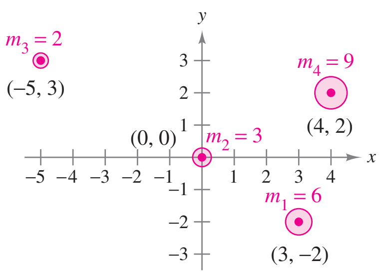


Figura 7.59

Encontrar el centro de masa de un sistema de masas puntuales $m_1 = 6$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$ y $m_4 = 9$, localizados en

$$(3, -2), (0, 0), (-5, 3) \text{ y } (4, 2)$$

como se muestra en la figura 7.59.

Solución

$$m = 6 + 3 + 2 + 9 = 20 \qquad \text{Masa.}$$
$$M_y = 6(3) + 3(0) + 2(-5) + 9(4) = 44 \qquad \text{Momento sobre el eje } y.$$
$$M_x = 6(-2) + 3(0) + 2(3) + 9(2) = 12 \qquad \text{Momento sobre el eje } x.$$

Así,

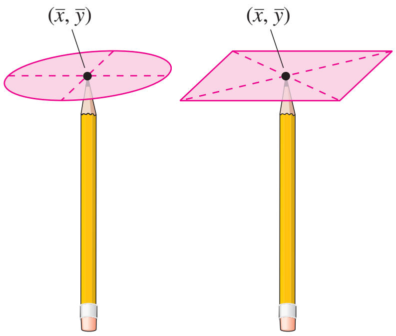
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{44}{20} = \frac{11}{5}$$

y

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

y así el centro de masa es $\left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Centro de masa de una lámina plana



Se puede pensar en el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de una lámina como su punto de equilibrio. Para una lámina circular, el centro de masa es el centro del círculo. Para una lámina rectangular, el centro de masa es el centro del rectángulo
Figura 7.60

Hasta ahora en esta sección se ha asumido que la masa total de un sistema está distribuida en puntos discretos en un plano o en una recta. Ahora se considera una lámina plana delgada, de material con densidad constante llamada **lámina plana** (ver la figura 7.60). La **densidad** es una medida de masa por unidad de volumen, como g/cm^3. Sin embargo, se considera que la densidad es una medida de masa por unidad de área para las láminas planas. La densidad es denotada por ρ, escrita en letra minúscula griega rho.

Considerar una lámina plana irregularmente formada de densidad uniforme ρ, limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$ y $a \leq x \leq b$, como se muestra en la figura 7.61. La masa de esta región está dada por

$$\begin{aligned} m &= (\text{densidad})(\text{área}) \\ &= \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \rho A \end{aligned}$$

donde A es el área de la región. Para encontrar el centro de masa de esta lámina, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de anchura igual Δx. Sea x_i el centro del i-ésimo subintervalo. Se puede aproximar la porción de la lámina que queda en el i-ésimo subintervalo por un rectángulo cuya altura es $h = f(x_i) - g(x_i)$. Porque la densidad del rectángulo es ρ, su masa es

$$\begin{aligned} m_i &= (\text{densidad})(\text{área}) \\ &= \underbrace{\rho}_{\text{Dencidad}}\, \underbrace{[f(x_i) - g(x_i)]}_{\text{Altura}}\, \underbrace{\Delta x}_{\text{Ancho}}. \end{aligned}$$

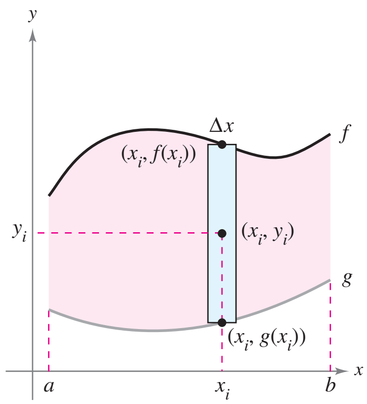


Lámina plana de densidad uniforme ρ
Figura 7.61

Ahora, considerando esta masa localizada en el centro (x_i, y_i) del rectángulo, la distancia dirigida del eje x a (x_i, y_i) es $y_i = [f(x_i) + g(x_i)]/2$. Así, el momento de m_i respecto del eje x es

$$\begin{aligned} \text{Momento} &= (\text{masa})(\text{distancia}) \\ &= m_i y_i \\ &= \rho[f(x_i) - g(x_i)]\, \Delta x \left[\frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}\right]. \end{aligned}$$

Al sumar los momentos y tomar el límite cuando $n \to \infty$ hace pensar en las definiciones siguientes.

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA

Sea f y g funciones continuas tal que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, y considerar la lámina plana de densidad uniforme ρ limitada por las gráficas

$y = f(x)$, $y = g(x)$ y $a \leq x \leq b$.

1. Los **momentos respecto al eje x y y** son

$$M_x = \rho \int_a^b \left[\frac{f(x) + g(x)}{2}\right][f(x) - g(x)]\, dx$$

$$M_y = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx.$$

2. El **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ está dado por $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m}$ y $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m}$, donde $m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$ es la masa de la lámina.

EJEMPLO 4 Centro de masa de una lámina plana

Encontrar el centro de masa de la lámina de densidad uniforme ρ acotada por la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ y el eje x.

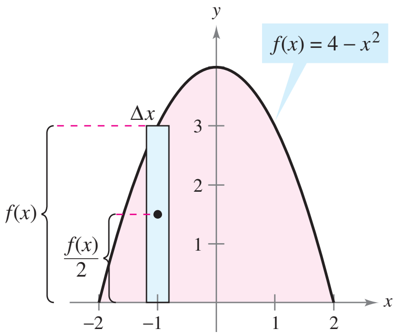


Figura 7.62

Solución Porque el centro de masa está situado en el eje de simetría, se sabe que $\bar{x} = 0$. Es más, la masa de la lámina es

$$m = \rho \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx$$
$$= \rho \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2}$$
$$= \frac{32\rho}{3}.$$

Para encontrar el momento respecto del eje x, poner un rectángulo representativo en la región, como se muestra en la figura 7.62. La distancia del eje x al centro de este rectángulo es

$$y_i = \frac{f(x)}{2} = \frac{4 - x^2}{2}.$$

Porque la masa del rectángulo representativo es

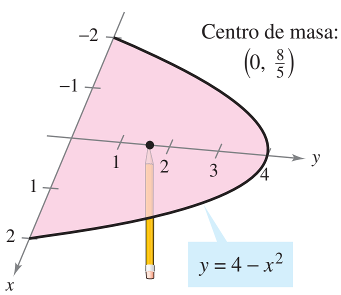
$$\rho f(x)\, \Delta x = \rho(4 - x^2)\, \Delta x$$

se tiene

$$M_x = \rho \int_{-2}^{2} \frac{4 - x^2}{2} (4 - x^2)\, dx$$
$$= \frac{\rho}{2} \int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\, dx$$
$$= \frac{\rho}{2} \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^{2}$$
$$= \frac{256\rho}{15}$$

y $\bar{y}$ está dada por

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{256\rho/15}{32\rho/3} = \frac{8}{5}.$$



El centro de masa es el punto de equilibrio
Figura 7.63

Así, el centro de masa (o punto de equilibrio) de la lámina es $(0, \frac{8}{5})$, como se muestra en la figura 7.63.

La densidad ρ en el ejemplo 4 es un factor común a los momentos y a la masa, por lo que se cancela y no aparecen las coordenadas del centro de masa. Así que, el centro de masa de una lámina de densidad *uniforme* sólo depende de la forma de la lámina y no de su densidad. Por esta razón, el punto

$$(\bar{x}, \bar{y})$$ Centro de masa o centroide.

a veces se llama el centro de masa de una *región* en el plano, o **centroide** de la región. En otros términos, para encontrar el centroide de una región en el plano, se asume simplemente que la región tiene una densidad constante de $\rho = 1$ y se calcula el centro correspondiente de masa.

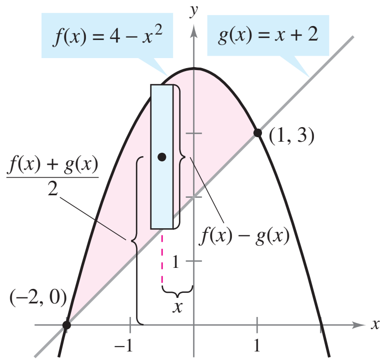


Figura 7.64

EXPLORACIÓN

Cortar una forma irregular de una pieza de cartón.

a) Sostener un lápiz verticalmente y mover el objeto sobre el punto del lápiz hasta localizar el centroide.

b) Dividir el objeto en elementos representativos. Hacer las medidas necesarias y aproximar numéricamente el centroide. Comparar sus resultados con el resultado del apartado *a*).

EJEMPLO 5 Centroide de una región plana

Encontrar el centroide de la región limitada por las gráficas de $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$.

Solución Las dos gráficas se cortan en los puntos $(-2, 0)$ y $(1, 3)$, como se muestra en la figura 7.64. Así, el área de la región es

$$A = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx = \frac{9}{2}.$$

El centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de la región tiene las coordenadas siguientes.

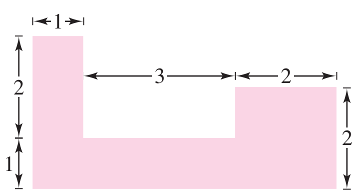
$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{A}\int_{-2}^{1} x[(4 - x^2) - (x + 2)]\, dx = \frac{2}{9}\int_{-2}^{1} (-x^3 - x^2 + 2x)\, dx \\
&= \frac{2}{9}\left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{2} \\
\bar{y} &= \frac{1}{A}\int_{-2}^{1} \left[\frac{(4 - x^2) + (x + 2)}{2}\right][(4 - x^2) - (x + 2)]\, dx \\
&= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\right)\int_{-2}^{1} (-x^2 + x + 6)(-x^2 - x + 2)\, dx \\
&= \frac{1}{9}\int_{-2}^{1} (x^4 - 9x^2 - 4x + 12)\, dx \\
&= \frac{1}{9}\left[\frac{x^5}{5} - 3x^3 - 2x^2 + 12x\right]_{-2}^{1} = \frac{12}{5}.
\end{aligned}$$

Así, el centroide de la región es $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{12}{5}\right)$.

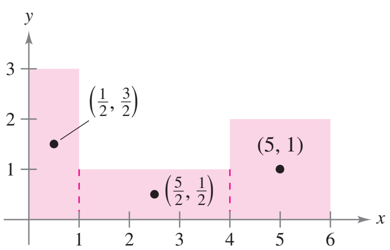
Para las regiones planas simples, se pueden encontrar los centroides sin recurrir a la integración.

EJEMPLO 6 Centroide de una región plana simple

Encontrar el centroide de la región mostrada en la figura 7.65*a*).



a) Región original



b) El centroide de tres rectángulos

Figura 7.65

Solución Sobreponiendo un sistema de coordenadas en la región, como se muestra en la figura 7.65*b*), se pueden localizar los centroides de los tres rectángulos en

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad (5, 1).$$

Usando estos tres puntos, se puede encontrar el centroide de la región.

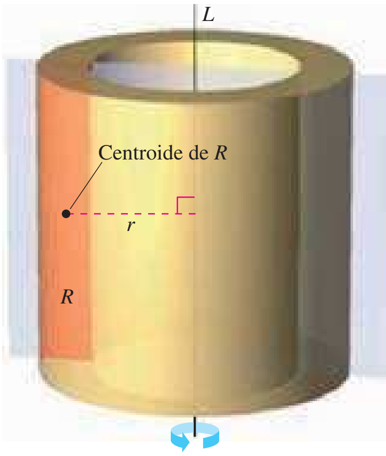
$$\begin{aligned}
A &= \text{región del área} = 3 + 3 + 4 = 10 \\
\bar{x} &= \frac{(1/2)(3) + (5/2)(3) + (5)(4)}{10} = \frac{29}{10} = 2.9 \\
\bar{y} &= \frac{(3/2)(3) + (1/2)(3) + (1)(4)}{10} = \frac{10}{10} = 1
\end{aligned}$$

Así, el centroide de la región es (2.9, 1).

NOTA En el ejemplo 6, notar que (2.9, 1) no es promedio de $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y (5, 1).

Teorema de Pappus

El último tema en esta sección es un teorema útil acreditado a Pappus de Alejandría (ca. 300 d.C.), matemático griego, cuya *Mathematical Collection* en ocho volúmenes es un registro de la matemática griega clásica. La prueba de este teorema se da en la sección 14.4.



El volumen V es $2\pi\, rA$, donde A es el área de la región R
Figura 7.66

TEOREMA 7.1 EL TEOREMA DE PAPPUS

Sea R una región en un plano y sea L una recta en el mismo plano tal que L no interseca el interior de R, como se muestra en la figura 7.66. Si r es la distancia entre el centroide de R y la recta, entonces el volumen V del sólido de revolución formado al girar R sobre la recta es

$$V = 2\pi\, rA$$

donde A es el área de R. (Observar que $2\pi r$ es la distancia recorrida por el centroide cuando la región gira en torno a la recta.)

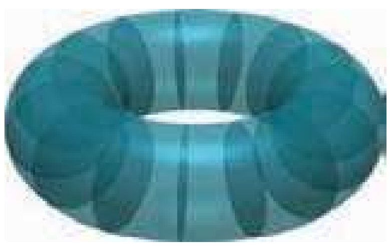
El teorema de Pappus puede usarse para encontrar el volumen de un toro, como se muestra en el ejemplo siguiente. Recordar que un toro es un sólido en forma de rosquilla formado al girar una región circular alrededor una recta que queda en el mismo plano como el círculo (pero no corta el círculo).

EJEMPLO 7 Encontrar el volumen por el teorema de Pappus

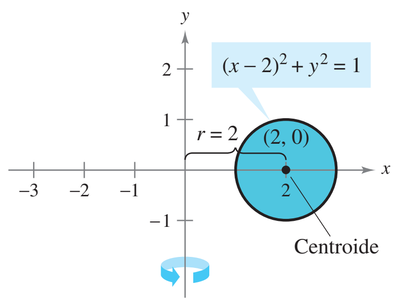
Encontrar el volumen del toro que se muestra en la figura 7.67*a* que es formado al girar la región circular limitada por

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

alrededor del eje y, como se muestra en la figura 7.67*b*.



a)



b)

Figura 7.67

Solución En la figura 7.67*b* se puede ver que el centroide de la región circular es (2, 0). Así, la distancia entre el centroide y el eje de revolución es $r = 2$. Dado que el área de la región circular es $A = \pi$, el volumen del toro es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\, rA \\ &= 2\pi(2)(\pi) \\ &= 4\pi^2 \\ &\approx 39.5. \end{aligned}$$

EXPLORACIÓN

Usar el método de las capas para mostrar que el volumen del toro está dado por

$$V = \int_1^3 4\pi x\sqrt{1-(x-2)^2}\, dx.$$

Evaluar esta integral usando calculadora. ¿Coincide la respuesta con la del ejemplo 7?

7.6 Ejercicios

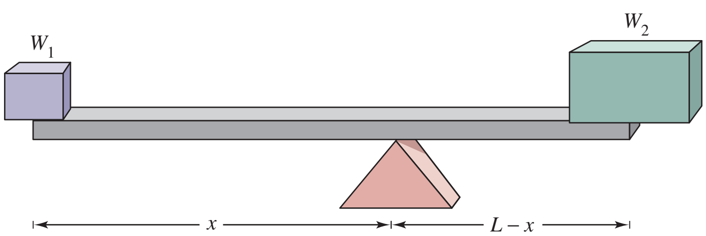
En los ejercicios 1 a 4, encontrar el centro de masa de la masa puntual situado en el eje x.

1. $m_1 = 7, m_2 = 3, m_3 = 5$
   $x_1 = -5, x_2 = 1, x_3 = 3$
2. $m_1 = 7, m_2 = 4, m_3 = 3, m_4 = 8$
   $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 5, x_4 = 4$
3. $m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, m_5 = 1$
   $x_1 = 7, x_2 = 8, x_3 = 12, x_4 = 15, x_5 = 18$
4. $m_1 = 12, m_2 = 1, m_3 = 6, m_4 = 3, m_5 = 11$
   $x_1 = -6, x_2 = -4, x_3 = -2, x_4 = 0, x_5 = 8$

5. ***Razonamiento gráfico***
   a) Trasladar cada masa del punto en el ejercicio 3 a las cinco unidades a la derecha y determinar el centro resultante de masa.
   b) Trasladar a la izquierda tres unidades cada masa del punto en el ejercicio 4 y determinar el centro de masa resultante.

6. ***Conjetura*** Usar el resultado del ejercicio 5 para hacer una conjetura sobre el cambio en el centro de masa que resulta cuando cada masa del punto se traslada k unidades horizontalmente.

Problemas de estática **En los ejercicios 7 y 8, considerar una viga de longitud L con un apoyo a x pies de un extremo (ver la figura). Se colocan los objetos con pesos W_1 y W_2 en los extremos opuestos de la viga. Encontrar x tal que el sistema esté en equilibrio.**



7. Dos niños que pesan 48 libras y 72 libras van a jugar en un columpio que tiene 10 pies de largo.
8. Para mover una roca de 600 libras, una persona que pesa 200 libras quiere balancearla con una viga que tiene 5 pies de longitud.

En los ejercicios 9 a 12, encontrar el centro de masa del sistema de las masas puntuales dado.

9.

m_i	5	1	3
(x_1, y_1)	$(2, 2)$	$(-3, 1)$	$(1, -4)$

10.

m_i	10	2	5
(x_1, y_1)	$(1, -1)$	$(5, 5)$	$(-4, 0)$

11.

m_i	12	6	4.5	5
(x_1, y_1)	$(2, 3)$	$(-1, 5)$	$(6, 8)$	$(2, -2)$

12.

m_i	3	4
(x_1, y_1)	$(-2, -3)$	$(5, 5)$

m_i	2	1	6
(x_1, y_1)	$(7, 1)$	$(0, 0)$	$(-3, 0)$

En los ejercicios 13 a 26, encontrar M_x, M_y y $(\bar{x}, \bar{y})$ para las láminas de densidad uniforme ρ acotadas por las gráficas de las ecuaciones.

13. $y = \frac{1}{2}x, y = 0, x = 2$
14. $y = -x + 3, y = 0, x = 0$
15. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$
16. $y = \frac{1}{3}x^2, y = 0, x = 3$
17. $y = x^2, y = x^3$
18. $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{2}x$
19. $y = -x^2 + 4x + 2, y = x + 2$
20. $y = \sqrt{x} + 1, y = \frac{1}{3}x + 1$
21. $y = x^{2/3}, y = 0, x = 8$
22. $y = x^{2/3}, y = 4$
23. $x = 4 - y^2, x = 0$
24. $x = 2y - y^2, x = 0$
25. $x = -y, x = 2y - y^2$
26. $x = y + 2, x = y^2$

En los ejercicios 27 a 30, formular y evaluar las integrales para encontrar el área y los momentos sobre los ejes x y y para la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. (Asumir $\rho = 1$.)

27. $y = x^2, y = 2x$
28. $y = \dfrac{1}{x}, y = 0, 1 \leq x \leq 4$
29. $y = 2x + 4, y = 0, 0 \leq x \leq 3$
30. $y = x^2 - 4, y = 0$

En los ejercicios 31 a 34, usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Usar las capacidades de integración de una herramienta de graficación para aproximar el centroide de la región.

31. $y = 10x\sqrt{125 - x^3}, y = 0$
32. $y = xe^{-x/2}, y = 0, x = 0, \ x = 4$
33. ***Sección prefabricada de un edificio.***
    $y = 5\sqrt[3]{400 - x^2}, y = 0$
34. ***Bruja de Agnesi.***
    $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}, y = 0, x = -2, x = 2$

En los ejercicios 35 a 40, encontrar y/o verificar el centroide de la región común usada en ingeniería.

35. ***Triángulo*** Mostrar que el centroide del triángulo con vértices $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y (b, c) es el punto de intersección de las medianas (ver la figura).

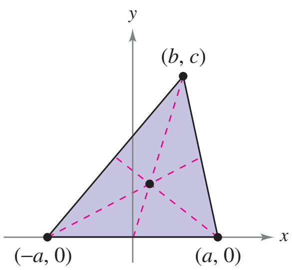


Figura para 35

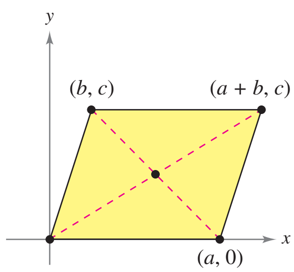


Figura para 36

36. ***Paralelogramo*** Mostrar que el centroide del paralelogramo con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, (b, c) y $(a + b, c)$ es el punto de intersección de las diagonales (ver la figura).

37. ***Trapecio*** Encontrar el centroide del trapecio con vértices $(0, 0)$, $(0, a)$, (c, b) y $(c, 0)$. Mostrar que es la intersección de la recta que conecta los puntos medios de los lados paralelos y la recta que conecta los lados paralelos extendidos, como se muestra en la figura.

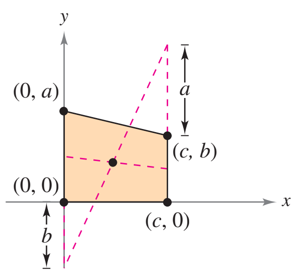


Figura para 37

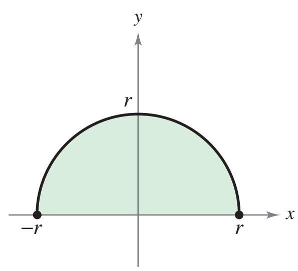


Figura para 38

38. ***Semicírculo*** Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $y = 0$ (ver la figura).

39. ***Semielipse*** Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = 0$ (ver la figura).

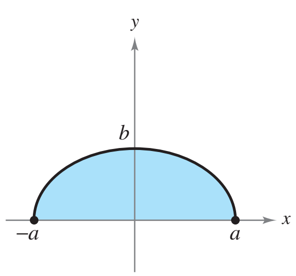


Figura para 39

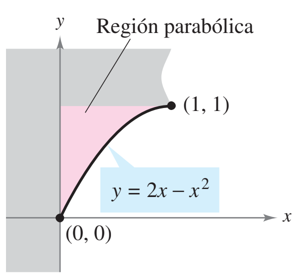


Figura para 40

40. ***Región parabólica*** Encontrar el centroide de la **región parabólica** mostrada en la figura.

41. ***Razonamiento gráfico*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = b$, donde $b > 0$.

a) Dibujar una gráfica de la región.

b) Usar la gráfica del apartado *a*) para determinar $\bar{x}$. Explicar.

c) Formular la integral para encontrar M_y. Debido a la forma del integrando, el valor de la integral puede obtenerse sin integrar. ¿Cuál es la forma del integrando y cuál es el valor de la integral? Comparar con el resultado del apartado *b*).

d) Usar la gráfica del apartado *a*) para determinar si $\bar{y} > \dfrac{b}{2}$ o $\bar{y} < \dfrac{b}{2}$. Explicar.

e) Usar la integración para verificar la respuesta en el apartado *d*).

42. ***Razonamiento gráfico y numérico*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = x^{2n}$ $y = b$, donde $b > 0$ y n es un entero positivo.

a) Formular la integral para encontrar M_y. Debido a la forma del integrando, el valor de la integral puede obtenerse sin integrar. ¿Cuál es la forma del integrando y cuál es el valor de la integral? Comparar con el resultado *b*).

b) ¿Es $\bar{y} > \dfrac{b}{2}$ o $\bar{y} < \dfrac{b}{2}$? Explicar.

c) Usar integración para encontrar $\bar{y}$ como una función de n.

d) Usar el resultado del apartado *c*) para completar la tabla.

n	1	2	3	4
$\bar{y}$				

e) Encontrar $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{y}$.

f) Dar una explicación geométrica del resultado en el apartado *e*).

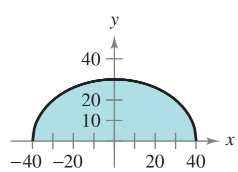
43. ***Modelado matemático*** Un fabricante de ventanas para camionetas modificadas necesita calcular el centro de masa. Para lo cual sobrepone un sistema de coordenadas en un prototipo del vidrio (ver la figura). Las medidas (en centímetros) para la mitad derecha del pedazo simétrico de vidrio se muestran en la tabla.

x	0	10	20	30	40
y	30	29	26	20	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el centro de masa del vidrio.

b) Usar las capacidades de regresión de una calculadora para encontrar un modelo polinómico de cuarto grado para los datos.

c) Usar las capacidades de integración de una calculadora y el modelo para aproximar el centro de masa del vidrio. Comparar con el resultado del apartado *a*).



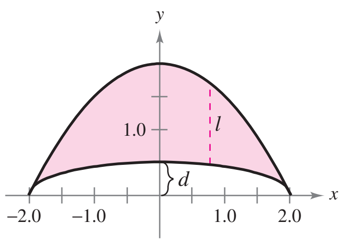
44. ***Modelado matemático*** El fabricante de un barco necesita aproximar el centro de masa de una sección del casco. Un sistema de coordenadas se sobrepone en un prototipo (ver la figura). Las medidas (en pies) para la mitad derecha del prototipo simétrico se listan en la tabla.

x	0	0.5	1.0	1.5	2
l	1.50	1.45	1.30	0.99	0
d	0.50	0.48	0.43	0.33	0

a) Usar la regla de Simpson para aproximar el centro de masa de la sección del cascarón.

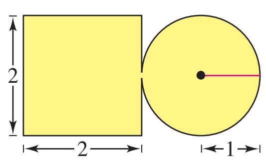
b) Usar las capacidades de la regresión en una calculadora para encontrar los modelos polinómicos de cuarto grado para ambas curvas mostradas en la figura. Trazar los datos y trazar la gráfica de los modelos.

c) Usar las capacidades de la integración en una herramienta de graficación y el modelo para aproximar el centro de masa de la sección del cascarón. Comparar el resultado con el apartado *a*).

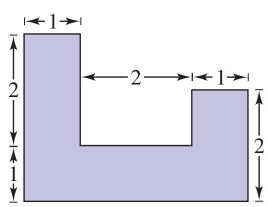


En los ejercicios 45 a 48, introducir un sistema de coordenadas apropiado y encontrar las coordenadas del centro de masa de la lámina plana. (La respuesta depende de la posición del sistema de coordenadas elegido.)

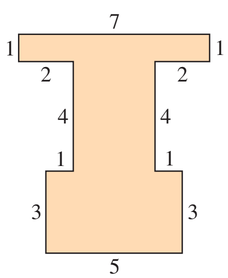
45.



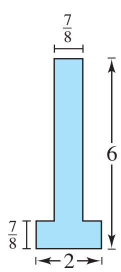
46.



47.



48.



49. Encontrar el centro de masa de la lámina, del ejercicio 45 si la sección circular tuviera el doble de la densidad de la cuadrada.

50. Encontrar el centro de masa de la lámina del ejercicio 45 si la sección cuadrada tuviera el doble de la densidad de la circular.

En los ejercicios 51 a 54, usar el teorema de Pappus para encontrar el volumen del sólido de revolución.

51. El toro formado al girar el círculo $(x-5)^2 + y^2 = 16$ alrededor del eje y.

52. El toro formado al girar el círculo $x^2 + (y-3)^2 = 4$ alrededor del eje x.

53. El sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x$, $y = 4$ y $x = 0$ alrededor del eje x.

54. El sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = 2\sqrt{x-2}$, $y = 0$ y $x = 6$ alrededor del eje y.

Desarrollo de conceptos

55. Sea la masa puntual $m_1, m_2, \ldots, m_n$, localizada en (x_1, y_1) $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Definir el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$.

56. ¿Qué es una lámina plana? Describir lo que significa el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de una lámina plana.

57. Enumerar el teorema de Pappus.

Para discusión

58. El centroide de la región plana acotado por las gráficas de $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ es $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{18}\right)$. ¿Es posible encontrar el centroide de cada una de las regiones acotadas por las gráficas de los siguientes conjuntos de ecuaciones? En ese caso, identificar el centroide y explicar la respuesta.

a) $y = f(x) + 2,\ y = 2,\ x = 0$ y $x = 1$

b) $y = f(x-2),\ y = 0,\ x = 2$ y $x = 3$

c) $y = -f(x),\ y = 0,\ x = 0$ y $x = 1$

d) $y = f(x),\ y = 0,\ x = -1$ y $x = 1$

En los ejercicios 59 y 60, usar el *segundo teorema de Pappus* el cual se enuncia a continuación. Si un segmento de una curva plana *C* se gira alrededor de un eje que no corta la curva (posiblemente excepto a sus puntos finales), el área *S* de la superficie de revolución resultante está dada por el producto de la longitud de *C* por la distancia *d* recorrida por el centroide de *C*.

59. Una esfera se forma al girar la gráfica de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ alrededor del eje x. Usar la fórmula para el área de la superficie, $S = 4\pi r^2$, para encontrar el centroide del semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

60. Un toro se forma al girar la gráfica de $(x-1)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje y. Encontrar el área de la superficie del toro.

61. Sea $n \geq 1$ constante, y considerar la región acotada por $f(x) = x^n$, el eje x y $x = 1$. Encontrar el centroide de esta región. Cuando $n \to \infty$ ¿qué aspecto tiene la región y dónde está su centroide?

Preparación del examen Putnam

62. Sea V la región en el plano cartesiano que consiste en todos los puntos (x, y) satisfaciendo las condiciones simultáneas $|x| \leq y \leq |x| + 3$ y $y \leq 4$. Encontrar el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de V.

7.7 Presión y fuerza de un fluido

- **Encontrar la presión y la fuerza de un fluido.**

Presión y fuerza de un fluido

Los buceadores saben que mientras más profundo se sumerge un objeto en un fluido, es mayor la presión sobre el objeto. La **presión** se define como la fuerza ejercida por unidad de área en la superficie de un cuerpo. Por ejemplo, para una columna de agua que tiene 10 pies de altura y 1 pulg^2 pesa 4.3 libras, la *presión del fluido* ejercida a una profundidad de 10 pies de agua es 4.3/pulg^2.* A 20 pies, ésta aumentaría a 8.6 libras/pulg^2 y en general la presión será proporcional a la profundidad a la que esté el objeto en el fluido.

The Granger Collection

BLAISE PASCAL (1623-1662)

Pascal es conocido por sus contribuciones a diversas áreas de las matemáticas y de la física, así como por su influencia en Leibniz. Aunque buena parte de su obra en cálculo fue intuitiva y carente del rigor exigible en las matemáticas modernas, Pascal anticipó muchos resultados relevantes.

DEFINICIÓN DE PRESIÓN DE FLUIDO

La presión en un objeto a la profundidad h en un líquido es

$$\text{Presión} = P = wh$$

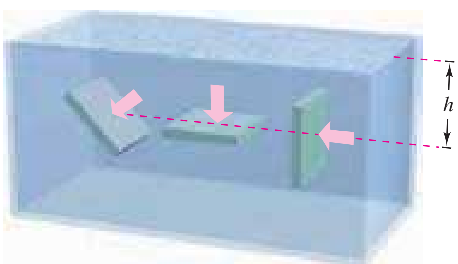
donde w es la densidad de peso del líquido por unidad de volumen.

A continuación se muestran varias densidades de peso de fluidos comunes en libras/pie^3.

Alcohol etílico	49.4
Gasolina	41.0-43.0
Glicerina	78.6
Keroseno	51.2
Mercurio	849.0
Agua de mar	64.0
Agua	62.4

Cuando se calcula la presión del fluido, se puede usar una importante (y sorprendente) ley física llamada el **principio de Pascal** en honor del matemático francés Blaise Pascal. El principio de Pascal establece que la presión ejercida por un fluido a una profundidad h es exactamente igual *en todas direcciones*. Por ejemplo, en la figura 7.68, la presión a la profundidad indicada es la misma para los tres objetos. Como se da la presión del fluido en términos de la fuerza por unidad de área ($P = F/A$), la fuerza del fluido en una superficie de área *A sumergida horizontalmente* es

$$\text{Fuerza del fluido} = F = PA = (\text{presión})(\text{área}).$$

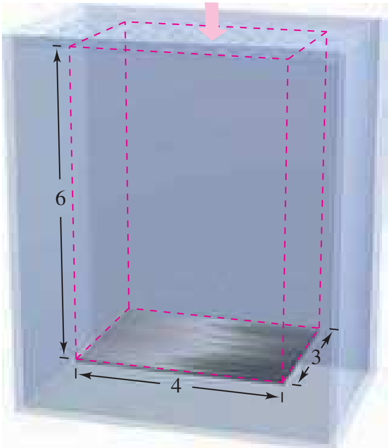


La presión en h es la misma para los tres objetos
Figura 7.68

**La presión total en un objeto sumergido a 10 pies de agua también incluiría la presión debida a la atmósfera de la Tierra. Al nivel del mar, la presión atmosférica es aproximadamente 14.7 libras/pulg^2.*

EJEMPLO 1 Fuerza de un fluido sobre una lámina sumergida

Encontrar la fuerza de un fluido sobre una lámina de metal rectangular que mide 3 pies por 4 pies que es sumergida a 6 pies en el agua, como se muestra en la figura 7.69.



La fuerza del fluido sobre una lámina de metal horizontal es igual a la presión del fluido por el área de la lámina
Figura 7.69

Solución Porque el peso por unidad de agua es 62.4 libras por pie^3 y la lámina se sumerge a 6 pies en el agua, la presión del fluido es

$$\begin{aligned} P &= (62.4)(6) \qquad P = wh \\ &= 374.4 \text{ libras por pie}^2 \end{aligned}$$

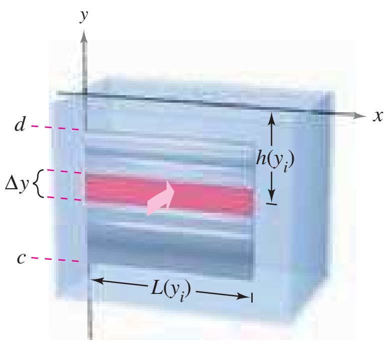
Porque el área total de la lámina es $A = (3)(4) = 12$ pies^2, la fuerza del fluido es

$$\begin{aligned} F = PA &= \left(374.4 \frac{\text{libras}}{\text{pie}^2}\right)(12 \text{ pies}^2) \\ &= 4\,492.8 \text{ libras} \end{aligned}$$

Este resultado es independiente del recipiente del agua. La fuerza del fluido sería la misma en una piscina que en un lago.

En el ejemplo 1, debido a que la lámina es rectangular y horizontal no son necesarios los métodos de cálculo para resolver el problema. Considerar una superficie que se sumerge verticalmente en un fluido. Este problema es más difícil porque la presión no es constante sobre la superficie.

Suponer que una lámina vertical se sumerge en un fluido de peso w (por unidad de volumen), como se muestra en la figura 7.70. Para determinar la fuerza total ejercida sobre *una cara* entre la profundidad c y la profundidad d, se puede subdividir el intervalo $[c, d]$ en n subintervalos, cada uno de anchura Δy. Luego, considerar el rectángulo representativo de anchura Δy y longitud $L(y_i)$, donde y_i está en el i-ésimo subintervalo. La fuerza ejercida contra este rectángulo representativo es



Los métodos de cálculo serán usados para encontrar la fuerza del fluido sobre una placa de metal vertical
Figura 7.70

$$\begin{aligned} \Delta F_i &= w(\text{profundidad})(\text{área}) \\ &= wh(y_i)L(y_i)\,\Delta y. \end{aligned}$$

La fuerza sobre los n rectángulos es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = w \sum_{i=1}^{n} h(y_i)L(y_i)\,\Delta y.$$

Observar que se considera que w es constante y se factoriza fuera de la suma. Por consiguiente, si el límite es $\|\Delta\| \to 0$ ($n \to \infty$), sugiere la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE FUERZA EJERCIDA POR UN FLUIDO

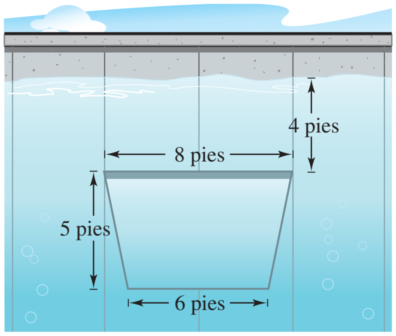
La **fuerza F ejercida por un fluido** de peso-densidad constante w (por unidad de volumen) sobre una región plana vertical sumergida desde $y = c$ hasta $y = d$ es

$$\begin{aligned} F &= w \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(y_i)L(y_i)\,\Delta y \\ &= w \int_c^d h(y)L(y)\,dy \end{aligned}$$

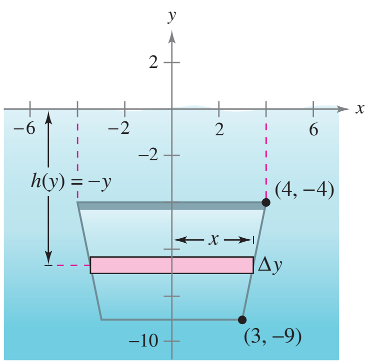
donde $h(y)$ es la profundidad del fluido en y y $L(y)$ es la longitud horizontal de la región en y.

EJEMPLO 2 Fuerza de un fluido en una superficie vertical

Una compuerta de una presa vertical en un dique tiene la forma de un trapecio, con 8 pies en la parte superior y 6 pies en el fondo, con una altura de 5 pies, como se muestra en la figura 7.71*a*. ¿Cuál es la fuerza del fluido en la compuerta cuando la parte superior está 4 pies debajo de la superficie del agua?



***a*)** Compuerta de una presa



***b*)** La fuerza del fluido sobre la compuerta
Figura 7.71

Solución Formular un modelo matemático para este problema, tiene libertad para localizar los ejes x y y de maneras diferentes. Una sugerencia conveniente es tomar el eje y, bisecar la compuerta y poner el eje x en la superficie del agua, como se muestra en la figura 7.71*b*. Así, la profundidad del agua en y, en pies, es

$$\text{Profundidad} = h(y) = -y.$$

Para encontrar la longitud $L(y)$ de la región en y, localizar la ecuación de la recta que forma el lado derecho de la compuerta. Porque esta recta atraviesa los puntos $(3, -9)$ y $(4, -4)$, su ecuación es

$$\begin{aligned} y - (-9) &= \frac{-4 - (-9)}{4 - 3}(x - 3) \\ y + 9 &= 5(x - 3) \\ y &= 5x - 24 \\ x &= \frac{y + 24}{5}. \end{aligned}$$

En la figura 7.71*b* se puede observar que la longitud de la región en y es

$$\begin{aligned} \text{Longitud} &= 2x \\ &= \frac{2}{5}(y + 24) \\ &= L(y). \end{aligned}$$

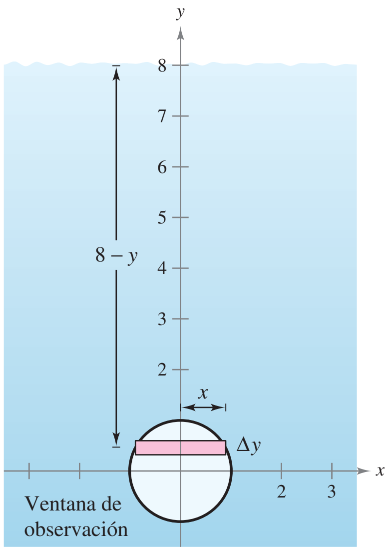
Por último, integrando de $y = -9$ a $y = -4$ se puede calcular la fuerza del fluido para ser

$$\begin{aligned} F &= w\int_c^d h(y)L(y)\,dy \\ &= 62.4\int_{-9}^{-4}(-y)\left(\frac{2}{5}\right)(y + 24)\,dy \\ &= -62.4\left(\frac{2}{5}\right)\int_{-9}^{-4}(y^2 + 24y)\,dy \\ &= -62.4\left(\frac{2}{5}\right)\left[\frac{y^3}{3} + 12y^2\right]_{-9}^{-4} \\ &= -62.4\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{-1\,675}{3}\right) \\ &= 13\,936 \text{ libras.} \end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 2, el eje x coincidió con la superficie del agua. Esto es conveniente, pero arbitrario. Al elegir un sistema de coordenadas para representar una situación física, se deben considerar varias posibilidades. A menudo puede simplificar los cálculos en un problema si localiza el sistema de coordenadas aprovechando las características especiales del problema, como la simetría.

EJEMPLO 3 Fuerza de un fluido sobre una superficie vertical

Una ventana circular para observación en un buque de investigación marina tiene un radio de 1 pie, y el centro de la ventana está a 8 pies de distancia del nivel del agua, como se muestra en la figura 7.72. ¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la ventana?



La fuerza del fluido en la ventana
Figura 7.72

Solución Para aprovechar la simetría, localizar un sistema de coordenadas tal que el origen coincida con el centro de la ventana, como se muestra en la figura 7.72. La profundidad en y es, entonces

$$\text{Profundidad} = h(y) = 8 - y.$$

La longitud horizontal de la ventana es $2x$, y se puede usar la ecuación para el círculo, $x^2 + y^2 = 1$, y resolver para x como sigue.

$$\begin{aligned}\text{Longitud} &= 2x\\ &= 2\sqrt{1-y^2} = L(y)\end{aligned}$$

Por último, dado que el rango de y va de -1 a 1, y la densidad del agua de mar es de 64 libras por pie^3, se tiene

$$\begin{aligned}F &= w\int_c^d h(y)L(y)\,dy\\ &= 64\int_{-1}^{1}(8-y)(2)\sqrt{1-y^2}\,dy.\end{aligned}$$

Inicialmente parece como si esta integral fuera difícil de resolver. Sin embargo, si se divide la integral en dos partes y se aplica la simetría, la solución es simple.

$$F = 64(16)\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy - 64(2)\int_{-1}^{1}y\sqrt{1-y^2}\,dy$$

La segunda integral es 0 (porque el integrando es impar y los límites de integración son simétricos al origen). Es más, reconociendo que la primera integral representa el área de un semicírculo de radio 1, se obtiene

$$\begin{aligned}F &= 64(16)\left(\frac{\pi}{2}\right) - 64(2)(0)\\ &= 512\pi\\ &\approx 1\,608.5 \text{ libras}\end{aligned}$$

Así, la fuerza del fluido en la ventana es 1 608.5 libras.

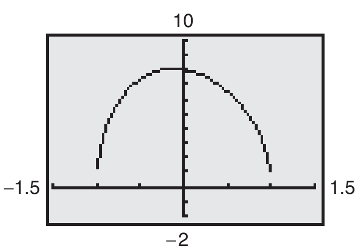
TECNOLOGÍA Para confirmar el resultado obtenido en el ejemplo 3, se podría considerar la regla de Simpson para aproximar el valor de

$$128\int_{-1}^{1}(8-x)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

De la gráfica de

$$f(x) = (8-x)\sqrt{1-x^2}$$

sin embargo, se puede observar que f no es derivable cuando $x = \pm 1$ (ver la figura 7.73). Esto significa que no se puede aplicar el teorema 4.19 de la sección 4.6 para determinar el error potencial en la regla de Simpson. Sin conocer el error potencial, la aproximación es de poca utilidad. Usar una calculadora para aproximar la integral.



f no es derivable en $x = \pm 1$
Figura 7.73

7.7 Ejercicios

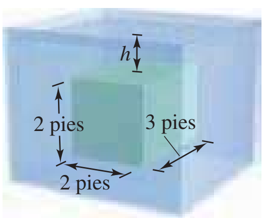
Fuerza ejercida sobre una lámina sumergida **En los ejercicios 1 a 4, se da el área del lado superior de una lámina de metal. La lámina se sumerge horizontalmente a 5 pies del agua. Encontrar la fuerza del fluido en el lado de la parte superior.**

1. 3 pies^2 **2.** 16 pies^2

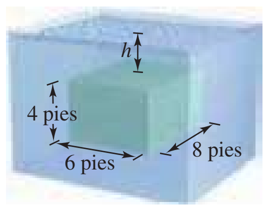
3. 10 pies^2 **4.** 22 pies^2

Fuerza de flotación **En los ejercicios 5 y 6, encontrar la fuerza de flotación de un sólido rectangular de las dimensiones dadas sumergido en el agua con su cara superior paralela a la superficie del agua. La fuerza de flotación es la diferencia entre las fuerzas del fluido en la parte superior y los lados del fondo del sólido.**

5.

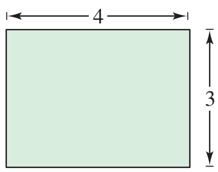


6.

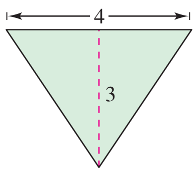


Fuerza de un fluido sobre la pared de un tanque **En los ejercicios 7 a 12, encontrar la fuerza del fluido en el lado vertical del tanque donde las dimensiones se dan en pies. Asumir que el tanque está lleno de agua.**

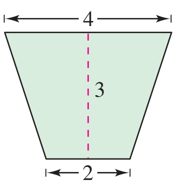
7. Rectángulo



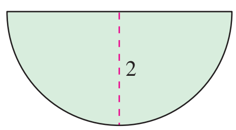
8. Triángulo



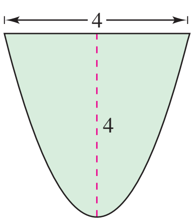
9. Trapezoide



10. Semicírculo

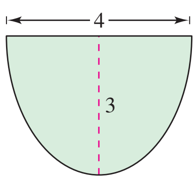


11. Parábola, $y = x^2$



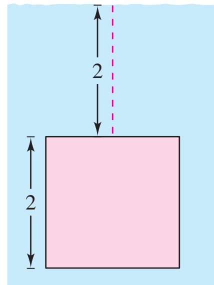
12. Semielipse

$y = -\frac{1}{2}\sqrt{36 - 9x^2}$

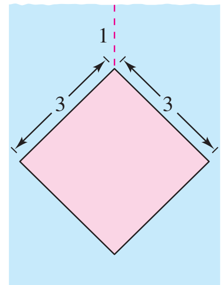


Fuerza de un fluido de agua **En los ejercicios 13 a 16, encontrar la fuerza de un fluido en la placa vertical sumergida en agua donde las dimensiones se dan en metros y la densidad de peso del agua es 9 800 newtons por metro^3.**

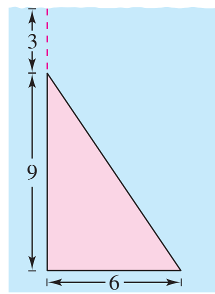
13. Cuadrado



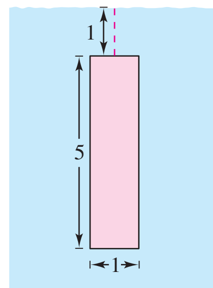
14. Cuadrado



15. Triángulo

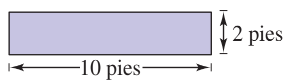


16. Rectángulo



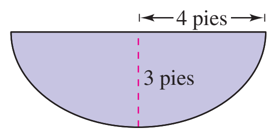
Fuerza ejercida en una estructura de concreto (hormigón) **En los ejercicios 17 a 20, la figura es el lado vertical de una estructura de concreto vertido que pesa 140.7 libras/pie^3. Determinar la fuerza en esta parte de la estructura de concreto.**

17. Rectángulo

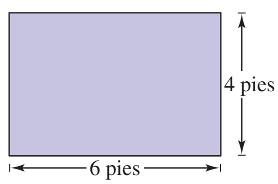


18. Semielipse

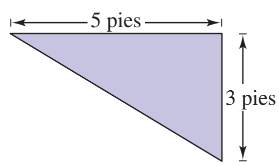
$y = -\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$



19. Rectángulo



20. Triángulo



21. ***Fuerza ejercida por la gasolina*** Un tanque de gasolina cilíndrico está colocado con su eje en posición horizontal. Encontrar la fuerza del fluido sobre una de las paredes del tanque si éste está medio lleno, asumiendo que su diámetro es de 3 pies y la gasolina pesa 42 libras/pie^3.

22. ***Fuerza de fluido de la gasolina*** Repetir el ejercicio 21 para un tanque que está lleno. (Evaluar una integral por una fórmula geométrica y el otro observando que el integrando es una función impar.)

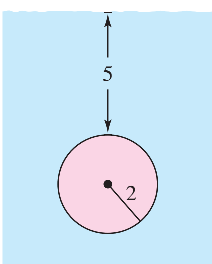
23. ***Fuerza de un fluido en una placa circular*** Una placa circular r pies es sumergida verticalmente en un tanque de un fluido que pesa w libras/pie^3. El centro del círculo es k ($k > r$) pies debajo de la superficie del fluido. Mostrar que la fuerza del fluido en la superficie de la placa es

$$F = wk(\pi r^2).$$

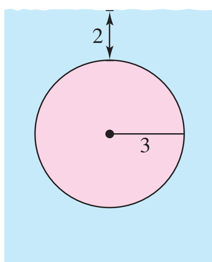
(Evaluar una integral por una fórmula geométrica y el otro observando que el integrando es una función impar.)

24. ***Fuerza de un fluido en una placa circular*** Usar el resultado del ejercicio 23 para encontrar la fuerza de un fluido en una placa circular como se muestra en cada figura. Asumir que las placas están en la pared de un tanque lleno de agua y las medidas están dadas en pies.

a)



b)

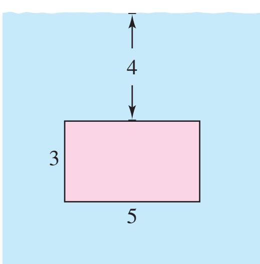


25. ***Fuerza de un fluido en una placa rectangular*** Una placa rectangular de altura h pies y base b se sumerge verticalmente en un tanque de fluido que pesa w libras por pie cúbico. El centro está k debajo de la superficie del fluido donde $k > h/2$. Mostrar que la fuerza del fluido en la superficie de la placa es

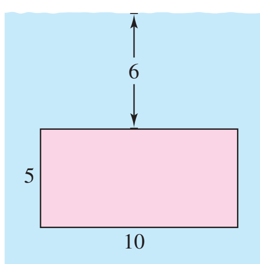
$$F = wkhb.$$

26. ***Fuerza de un fluido en una placa rectangular*** Usar el resultado del ejercicio 25 para encontrar la fuerza de un fluido en una placa rectangular como se muestra en cada figura. Asumir que las placas están en la pared de un tanque lleno de agua y las medidas están dadas en pies.

a)



b)

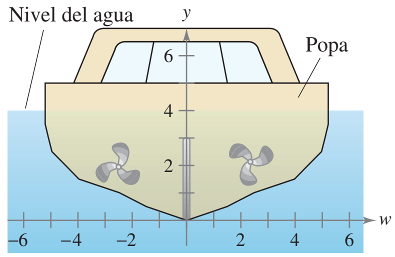


27. ***Portilla de un submarino*** Una portilla en un lado vertical de un submarino (sumergido en agua de mar) es un cuadrado de un pie de lado. Encontrar la fuerza del fluido en la portilla, asumiendo que el centro del cuadrado está 15 pies debajo de la superficie.

28. ***Portilla de un submarino*** Repetir el ejercicio 27 para una portilla circular que tiene un diámetro de un pie. El centro está 15 pies debajo de la superficie.

29. ***Modelo matemático*** La popa vertical de un barco con un sistema de coordenadas sobrepuesto se ilustra en la figura. La tabla muestra la anchura w de la popa en los valores indicados de y. Encontrar la fuerza del fluido contra la popa si las medidas se dan en pies.

y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
w	0	3	5	8	9	10	10.25	10.5	10.5



30. ***Compuerta de un canal de irrigación*** La sección transversal vertical de una compuerta de un canal de irrigación es diseñado por $f(x) = 5x^2/(x^2 + 4)$, donde x se mide en pies y $x = 0$ corresponden al centro del canal. Usar las capacidades de integración de una calculadora para aproximar la fuerza del fluido contra una compuerta vertical que detiene el flujo de agua si el agua está a 3 pies de profundidad.

En los ejercicios 31 y 32, usar las capacidades de integración en una calculadora para aproximar la fuerza de un fluido en la placa vertical acotada por el eje *x* y la mitad superior de la gráfica de la ecuación. Asumir que la base de la placa está 15 pies debajo de la superficie del agua.

31. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$

32. $\dfrac{x^2}{28} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Desarrollo de conceptos

33. ***Para pensar*** Aproximar la profundidad del agua en el tanque en el ejercicio 7, si la fuerza del fluido es una mitad más grande que cuando el tanque está lleno. Explicar por qué la respuesta no es $\frac{3}{2}$.

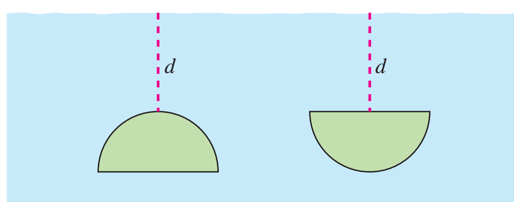
34. *a*) Definir la presión del fluido.

b) Definir la fuerza del fluido contra una región del plano vertical sumergida.

35. Explicar por qué la presión del fluido sobre una superficie se calcula usando rectángulos representativos horizontales en lugar de rectángulos representativos verticales.

Para discusión

36. Se colocan dos ventanas semicirculares idénticas a la misma profundidad en la pared vertical de un acuario (ver la figura). ¿Cuál tiene la fuerza del fluido mayor? Explicar.



7 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 a 10, esquematizar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, y determinar el área de la región.

1. $y = \dfrac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 5$

2. $y = \dfrac{1}{x^2},\ y = 4,\ x = 5$

3. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$

4. $x = y^2 - 2y,\ x = -1,\ y = 0$

5. $y = x,\ y = x^3$

6. $x = y^2 + 1,\ x = y + 3$

7. $y = e^x,\ y = e^2,\ x = 0$

8. $y = \csc x,\ y = 2$ (una región)

9. $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ \dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{4}$

10. $x = \cos y,\ x = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\pi}{3} \leq y \leq \dfrac{7\pi}{3}$

En los ejercicios 11 a 14, usar una herramienta de graficación para representar la región acotada por las gráficas de las funciones, y usar las capacidades de integración en una herramienta de graficación para encontrar el área de la región.

11. $y = x^2 - 8x + 3,\ y = 3 + 8x - x^2$

12. $y = x^2 - 4x + 3,\ y = x^3,\ x = 0$

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,\ y = 0,\ x = 0$

14. $y = x^4 - 2x^2,\ y = 2x^2$

En los ejercicios 15 a 18, usar los rectángulos representativos verticales y horizontales para formular las integrales para encontrar el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Encontrar el área de la región evaluando la más fácil de las dos integrales.

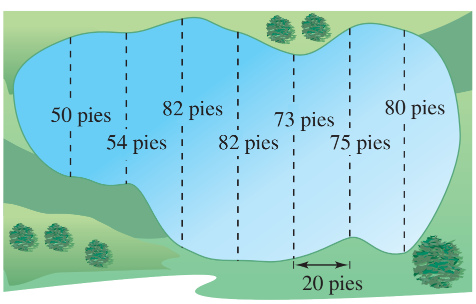
15. $x = y^2 - 2y,\ x = 0$

16. $y = \sqrt{x - 1},\ y = \dfrac{x - 1}{2}$

17. $y = 1 - \dfrac{x}{2},\ y = x - 2,\ y = 1$

18. $y = \sqrt{x - 1},\ y = 2,\ y = 0,\ x = 0$

19. Estimar el área de la superficie del estanque usando *a*) la regla de los trapecios y *b*) la regla de Simpson.



20. ***Modelo matemático*** La tabla muestra el ingreso R_1 de servicio anual en miles de millones de dólares para la industria del teléfono celular durante los años 2000 a 2006. (*Fuente: Asociación de Telecomunicaciones Celulares e Internet*)

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
R_1	52.5	65.3	76.5	87.5	102.1	113.5	125.5

a) Usar las capacidades de regresión de una calculadora para encontrar un modelo exponencial para los datos. Sea t que represente el año, con $t = 10$ que corresponden a 2000. Usar una herramienta de graficación para trazar los datos y el modelo en la misma ventana.

b) Un consultor financiero considera que un modelo de ingreso de servicio para los años 2010 hasta 2015 es de $R_2 = 6 + 13.9e^{0.14t}$. ¿Cuál es la diferencia en el total de ingresos de servicios entre los dos modelos para los años 2010 hasta 2015?

En los ejercicios 21 a 28, encontrar el volumen del sólido generado al girar la región plana acotada por las ecuaciones alrededor de la(s) recta(s) indicada(s).

21. $y = x,\ y = 0,\ x = 3$

a) eje x *b*) eje y
c) recta $x = 3$ *d*) recta $x = 6$

22. $y = \sqrt{x},\ y = 2,\ x = 0$

a) eje x *b*) recta $y = 2$
c) eje y *d*) recta $x = -1$

23. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ *a*) eje y (esferoide oblongo) *b*) eje x (esferoide prolato)

24. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *a*) eje y (esferoide oblongo) *b*) eje x (esferoide prolato)

25. $y = \dfrac{1}{x^4 + 1},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$
gira alrededor del eje y

26. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$
gira alrededor del eje x

27. $y = 1/(1 + \sqrt{x - 2}),\ y = 0,\ x = 2,\ x = 6$
gira alrededor del eje y

28. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$
gira alrededor del eje x

29. ***Área y volumen*** Considerar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x\sqrt{x + 1}$ y $y = 0$.

a) Encontrar el área de la región.

b) Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x.

c) Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje y.

30. ***Para pensar*** Un sólido es generado al girar una región acotada por $y = x^2 + 4$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$ alrededor del eje x. Crear la integral que obtiene el volumen del sólido usando *a*) el método de los discos y *b*) el método de las capas (no integrar). *c*) ¿Cada método da lugar a una integral con respecto a x?

31. ***Gasolina en un tanque*** Un tanque de gasolina es un esferoide de oblato generado al girar la región acotada por la gráfica de $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ alrededor del eje y donde x y y son medidos en pies. ¿A qué altura llega la gasolina en el tanque cuando se llena a un cuarto de su capacidad?

32. ***Tamaño de una base*** La base de un sólido es un círculo de radio a y sus secciones transversales verticales son triángulos equiláteros. El volumen del sólido es 10 metros cúbicos. Encontrar el radio del círculo.

En los ejercicios 33 y 34, encontrar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo dado.

33. $f(x) = \dfrac{4}{5}x^{5/4}, \quad [0, 4]$ **34.** $y = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2x}, \quad [1, 3]$

35. ***Longitud de una catenaria*** Un cable de suspensión de un puente forma una catenaria modelada por la ecuación

$$y = 300 \cosh\left(\frac{x}{2\,000}\right) - 280, \quad -2\,000 \le x \le 2\,000$$

donde x y y son medidos en pies. Usar una computadora para aproximar la longitud del cable.

36. ***Aproximación*** Determinar qué valor aproxima mejor la longitud de arco representada por la integral

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (\sec^2 x)^2}\, dx.$$

(Hacer la selección con base en un esquema de arco y *sin* hacer algún cálculo.)

a) -2 *b*) 1 *c*) π *d*) 4 *e*) 3

37. ***Área de una superficie*** Usar la integración para encontrar el área de la superficie lateral de un cono circular recto de altura 4 y radio 3.

38. ***Área de una superficie*** La región acotada por las gráficas de $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$ y $x = 8$ gira alrededor del eje x. Encontrar el área de la superficie del sólido generada.

39. ***Trabajo*** Se necesita una fuerza de 5 libras para estirar un resorte 1 pulgada de su posición natural. Encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural de 10 pulgadas a una longitud de 15 pulgadas.

40. ***Trabajo*** La fuerza requerida para estirar un resorte es 50 libras. Encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural de 10 pulgadas al doble de esa longitud.

41. ***Trabajo*** Un pozo de agua tiene ocho pulgadas de diámetro y 190 pies de profundidad. El agua llega a 25 pies de la parte superior del pozo. Determinar la cantidad de trabajo realizado al vaciar el pozo, asumiendo que el agua no entra en él mientras está bombeándose.

42. ***Trabajo*** Repetir el ejercicio 41, asumiendo que el agua entra al pozo a una velocidad de 4 galones por minuto y la bomba trabaja a una velocidad de 12 galones por minuto. ¿Cuántos galones se bombean en este caso?

43. ***Trabajo*** Una cadena de 10 pies de largo pesa 4 libras por pie y está colgada de una plataforma situada 20 pies sobre el nivel del suelo. ¿Cuánto trabajo se requiere para levantar toda la cadena al nivel de 20 pies?

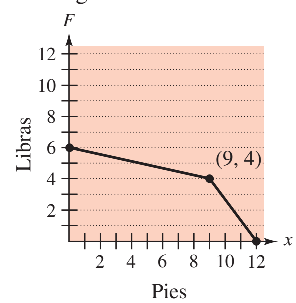
44. ***Trabajo*** Una grúa está a 200 pies sobre el nivel del suelo en la parte superior de un edificio, usa un cable que pesa 5 libras por pie. Encontrar el trabajo realizado para enrollar el cable si

a) un extremo está al nivel del suelo.

b) hay una carga de 300 libras atada al extremo del cable.

45. ***Trabajo*** El trabajo realizado por una fuerza variable en una prensa es 80 libras-pie. La prensa mueve una distancia de 4 pies y la fuerza es una ecuación cuadrática de la forma $F = ax^2$. Encontrar a.

46. ***Trabajo*** Encontrar el trabajo realizado por la fuerza F mostrada en la figura.



En los ejercicios 47 a 50, encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

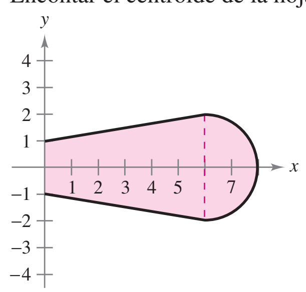
47. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \ x = 0, \ y = 0$

48. $y = x^2, \ y = 2x + 3$

49. $y = a^2 - x^2, \ y = 0$

50. $y = x^{2/3}, \ y = \frac{1}{2}x$

51. ***Centroide*** Un aspa de un ventilador industrial tiene la configuración de un semicírculo adosado a un trapecio (ver la figura). Encontar el centroide de la hoja.



52. ***Fuerza de un fluido*** Una piscina tiene 5 pies de profundidad en un extremo y 10 pies de profundidad en el otro, y el fondo es un plano inclinado. La longitud y anchura de la piscina son 40 y 20 pies. Si la piscina está llena de agua, ¿cuál es la fuerza del fluido en cada una de las paredes verticales?

53. ***Fuerza de un fluido*** Mostrar que la fuerza de un fluido contra cualquier región vertical es el producto del peso por el volumen cúbico del líquido, el área de la región y la profundidad del centroide de la región.

54. ***Fuerza de un fluido*** Usar el resultado del ejercicio 53 para encontrar la fuerza del fluido en un lado de una placa circular de radio 4 pies que se sumerge verticalmente en el agua para que su centro esté 10 pies debajo de la superficie.

SP Solución de problemas

1. Sea R el área de la región en el primer cuadrante acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = cx$, $c > 0$. Sea T el área del triángulo AOB. Calcular el límite

$$\lim_{c \to 0^+} \frac{T}{R}.$$

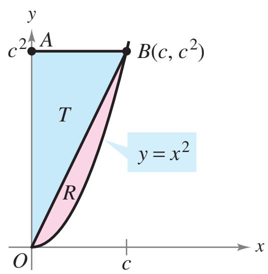


Figura para 1

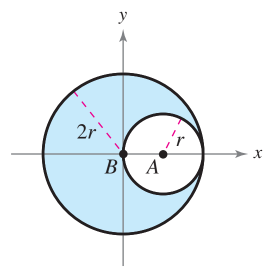


Figura para 2

2. Sea L una lámina de densidad uniforme $\rho = 1$ obtenida por el giro del círculo A de radio r desde el círculo B de radio $2r$ (ver figura).

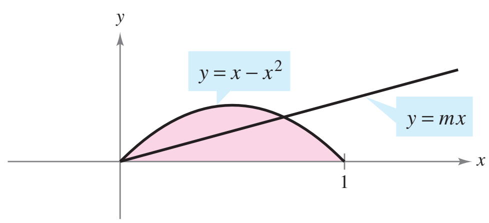
a) Demostrar que $M_x = 0$ para L.

b) Demostrar que M_y para L es igual a (M_y para B) − (M_y para A).

c) Encontrar M_y para B y M_y para A. Entonces usar el apartado *b*) para calcular M_y para L.

d) ¿Cuál es el centro de masa de L?

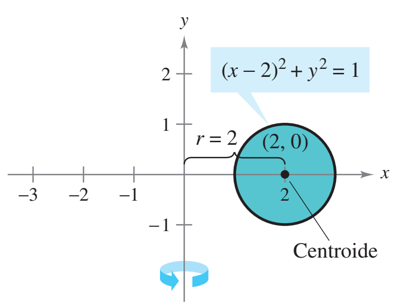
3. Sea R la región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x. Encontrar la ecuación de la recta $y = mx$ que divide esta región en dos regiones de área igual.



4. *a*) Un toro se forma al girar la región acotada por el círculo

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1$$

alrededor del eje y (véase la figura). Usar el método de los discos para calcular el volumen del toro.



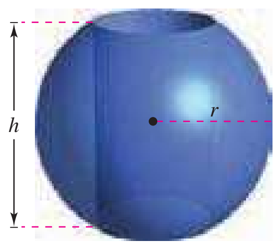
b) Usar el método de los discos para encontrar el volumen del toro si el círculo tiene radio r y su centro está R unidades del eje de rotación.

CAS **5.** Trazar la curva

$$8y^2 = x^2(1 - x^2).$$

Usar un sistema algebraico por computadora para encontrar el área de la superficie del sólido de revolución obtenida al girar la curva alrededor del eje y.

6. Un orificio perforado en el centro de una esfera de radio r (ver la figura). La altura del anillo esférico restante es h. Encontrar el volumen del anillo y mostrar que es independiente del radio de la esfera.



7. Un rectángulo R de longitud l y anchura w se gira alrededor de la recta L (ver la figura). Encontrar el volumen del sólido resultante de revolución.

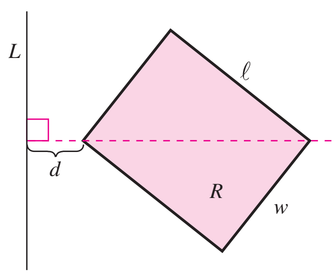


Figura para 7

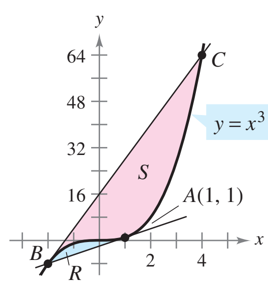


Figura para 8

8. *a*) La recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto $A(1, 1)$ corta la curva en otro punto B. Sea R el área de la región acotada por la curva y la recta tangente. La recta tangente a B corta la curva en otro punto C (ver la figura). Sea S el área de la región limitada por la curva y esta segunda recta tangente. ¿Cómo se relacionan las áreas R y S?

b) Repetir la construcción en el apartado *a*) seleccionando un punto arbitrario A en la curva $y = x^3$. Mostrar que las dos áreas, R y S, siempre están relacionadas de la misma manera.

9. La gráfica de $y = f(x)$ pasa a través del origen. La longitud de arco de la curva de $(0, 0)$ a $(x, f(x))$ se da por

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + e^t}\, dt.$$

Identificar la función f.

10. Sea f rectificable en el intervalo $[a, b]$, y sea

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt.$$

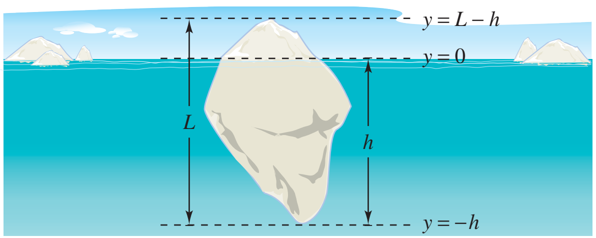
a) Encontrar $\dfrac{ds}{dx}$.

b) Encontrar ds y $(ds)^2$.

c) Si $f(x) = t^{3/2}$, encontrar $s(x)$ en $[1, 3]$.

d) Calcular $s(2)$ y describir qué significa.

11. El **principio de Arquímedes** establece que la fuerza ascendente o de flotación de un objeto dentro de un fluido es igual al peso del fluido que el objeto desplaza. Para un objeto parcialmente sumergido, se puede obtener información sobre las densidades relativas del objeto flotante y el fluido observando cuánto del objeto está sobre y debajo de la superficie. También se puede determinar el tamaño de un objeto flotante si se sabe la cantidad que está sobre la superficie y las densidades relativas. Puede verse la parte superior de un iceberg flotante (ver la figura). La densidad del agua de océano es 1.03×10^3 kilogramos por metro cúbico, y la del hielo es 0.92×10^3 kilogramos por metro cúbico. ¿Qué porcentaje del iceberg está debajo de la superficie?



12. Esquematizar la región acotada a la izquierda por $x = 1$, acotada por arriba por $y = 1/x^3$, y acotada por debajo por $y = -1/x^3$.

a) Encontrar el centroide de la región para $1 \le x \le 6$.

b) Encontrar el centroide de la región para $1 \le x \le b$.

c) ¿Dónde esta el centroide cuando $b \to \infty$?

13. Esquematizar la región a la derecha del eje y, acotada por arriba por $y = 1/x^4$ y acotada por debajo por $y = -1/x^4$.

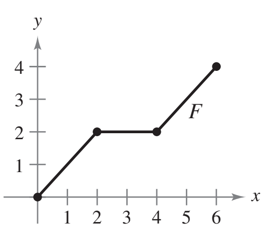
a) Encontrar el centroide de la región para $1 \le x \le 6$.

b) Encontrar el centroide de la región para $1 \le x \le b$.

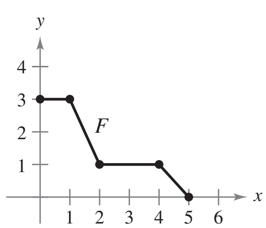
c) ¿Dónde está el centroide cuando $b \to \infty$?

14. Encontrar el trabajo realizado por cada fuerza F.

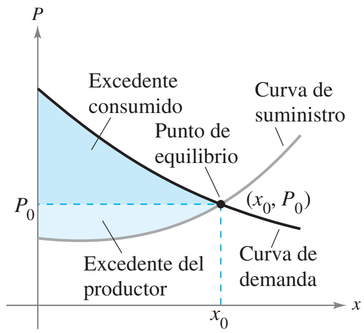
a)



b)



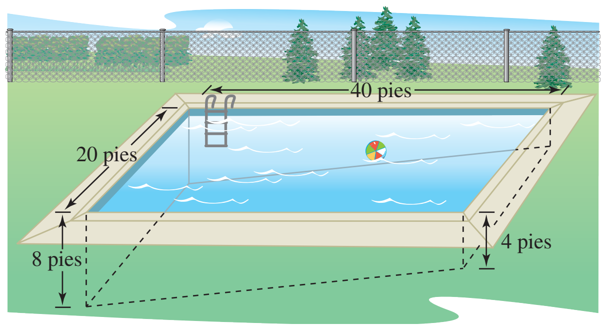
En los ejercicios 15 y 16, encontrar los excedentes de consumos para las curvas de oferta y demanda $[p_1(x)]$ dadas. El excedente del consumidor y excedente del productor son representados por las áreas mostradas en la figura.

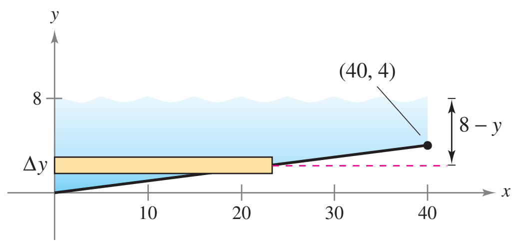


15. $p_1(x) = 50 - 0.5x, \quad p_2(x) = 0.125x$

16. $p_1(x) = 1\,000 - 0.4x^2, \quad p_2(x) = 42x$

17. Una piscina tiene 20 pies de ancho, 40 pies de largo y 4 pies de profundidad en un extremo y 8 pies de profundidad en el otro (ver la figura). El fondo es un plano inclinado. Encontrar la fuerza del fluido en cada pared vertical.





18. *a*) Encontrar por lo menos dos funciones continuas f que satisfagan cada condición.

i) $f(x) \ge 0$ en $[0, 1]$ *ii*) $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$

iii) El área acotada por la gráfica de f y el eje x para $0 \le x \le 1$ es igual a 1.

b) Para cada función encontrada en el apartado *a*), aproximar la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo $[0, 1]$. (Usar una calculadora si es necesario.)

c) ¿Se puede encontrar una función f que satisfaga las condiciones dadas en el apartado *a*) donde la gráfica tiene una longitud de arco menor que 3 en el intervalo $[0, 1]$?

8 Técnicas de integración, regla de L'Hôpital e integrales impropias

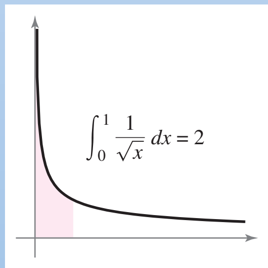
En los capítulos anteriores se estudiaron varias técnicas básicas para evaluar integrales simples. En este capítulo se analizarán otras técnicas de integración, como la integración por partes, que se usan para evaluar integrales más complejas. También se enseñará una regla importante para evaluar límites, denominada regla de L'Hôpital, la cual también ayuda en la evaluación de integrales impropias

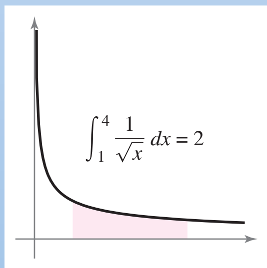
En este capítulo, se aprenderá:

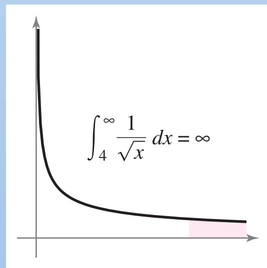
- Cómo relacionar un integrando con una de las reglas básicas de integración. (8.1)
- Cómo encontrar una antiderivada utilizando integración por partes. (8.2)
- Cómo evaluar integrales trigonométricas. (8.3)
- Cómo usar la sustitución trigonométrica para evaluar una integral. (8.4)
- Cómo utilizar la descomposición en fracciones parciales para integrar funciones racionales. (8.5)
- Cómo evaluar una integral indefinida usando tabla de integrales y fórmulas de reducción. (8.6)
- Cómo aplicar la regla de L'Hôpital para evaluar un límite. (8.7)
- Cómo evaluar una integral impropia. (8.8)

AP Photo/Topeka Capital-Journal, Anthony S. Bush/Wide World

La descomposición en fracciones parciales es una técnica de integración que puede utilizarse para evaluar integrales que incluyan funciones racionales. ¿Cómo puede usarse la descomposición en fracciones parciales para evaluar una integral que da el costo promedio de extraer un porcentaje específico de un compuesto químico del agua residual de una compañía? (Ver la sección 8.5, ejercicio 63.)







De los estudios de cálculo realizados hasta ahora, se sabe que una integral definida tiene límites de integración finitos y un integrando continuo. En la sección 8.8 se estudiarán las *integrales impropias*, las cuales tienen por lo menos un límite de integración infinito o un integrando con discontinuidad infinita. Se verá que las integrales impropias convergen o divergen.

8.1 Reglas básicas de integración

- **Revisión de procedimientos para adaptar un integrando a una de las reglas básicas de integración.**

Adaptación de integrandos a las reglas básicas

En este capítulo se estudiarán varias técnicas de integración que extienden el conjunto de integrales en que las reglas básicas de integración pueden aplicarse. Estas reglas se repasan en la página 522. Un paso importante para resolver cualquier problema de la integración consiste en reconocer qué regla básica de integración usar. Como se muestra en el ejemplo 1, las diferencias ligeras en el integrando pueden llevar a técnicas de solución muy diferentes.

EXPLORACIÓN

Comparación de tres integrales similares ¿Cuáles de las siguientes integrales pueden evaluarse usando las 20 reglas básicas de integración? Para las que sea posible, hacerlo así. Para las que no, explicar por qué.

a) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

EJEMPLO 1 Una comparación de tres integrales similares

Encontrar cada integral.

a) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+9}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2+9}\,dx$ ***c)*** $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^2+9}\,dx$

Solución

a) Usar la regla del arcotangente y sea $u = x$ y $a = 3$.

$$\int \frac{4}{x^2+9}\,dx = 4\int \frac{1}{x^2+3^2}\,dx \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= 4\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right) + C \qquad \text{Regla del arcotangente.}$$

$$= \frac{4}{3}\arctan\frac{x}{3} + C \qquad \text{Simplificar.}$$

b) Aquí la regla del arcotangente no aplica porque el numerador contiene un factor de x. Considerar la regla log y sea $u = x^2 + 9$. Entonces $du = 2x\,dx$, y se tiene

$$\int \frac{4x}{x^2+9}\,dx = 2\int \frac{2x\,dx}{x^2+9} \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= 2\int \frac{du}{u} \qquad \text{Sustitución: } u = x^2+9.$$

$$= 2\ln|u| + C = 2\ln(x^2+9) + C. \qquad \text{Regla log.}$$

c) Ya que el grado del numerador es igual al grado del denominador, se debe usar la división primero para volver a escribir la función racional impropia como la suma de un polinomio y una función racional propia.

$$\int \frac{4x^2}{x^2+9}\,dx = \int \left(4 - \frac{36}{x^2+9}\right)dx \qquad \text{Reescribir usando la división grande.}$$

$$= \int 4\,dx - 36\int \frac{1}{x^2+9}\,dx \qquad \text{Escribir como dos integrales.}$$

$$= 4x - 36\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right) + C \qquad \text{Integrar.}$$

$$= 4x - 12\arctan\frac{x}{3} + C \qquad \text{Simplificar.}$$

NOTA En el ejemplo 1*c*) se señala que se requieren algunas simplificaciones algebraicas preliminares antes de aplicar las reglas para la integración, y que como consecuencia más que una regla, se necesita evaluar la integral resultante.

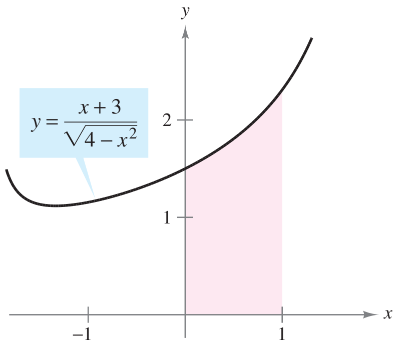
EJEMPLO 2 Uso de dos reglas básicas para resolver una sola integral

Evaluar $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$

Solución Escribir la integral como la suma de dos integrales. Entonces aplicar la regla de la potencia y la regla del arcoseno como sigue.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 (4-x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx + 3\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx \\
&= \left[-(4-x^2)^{1/2} + 3\,\text{arcsen}\,\frac{x}{2}\right]_0^1 \\
&= \left(-\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}\right) - (-2+0) \\
&\approx 1.839
\end{aligned}$$

Ver figura 8.1.



El área de la región es aproximadamente 1.839

Figura 8.1

TECNOLOGÍA La regla de Simpson puede usarse para dar una buena aproximación del valor de la integral en el ejemplo 2 (para $n = 10$, la aproximación es 1.839). Al usar la integración numérica, sin embargo, se debe estar consciente de que la regla de Simpson no siempre da buenas aproximaciones cuando algunos de los límites de integración están cercanos a una asíntota vertical. Por ejemplo, usando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene

$$\int_0^{1.99} \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \approx 6.213.$$

Aplicando la regla de Simpson (con $n = 10$) para esta integral se produce una aproximación de 6.889.

EJEMPLO 3 Una sustitución del tipo $a^2 - u^2$

Encontrar $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx.$

Solución Porque el radical en el denominador puede escribirse en la forma

$$\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{4^2-(x^3)^2}$$

se puede probar la sustitución $u = x^3$. Entonces $du = 3x^2\,dx$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{16-(x^3)^2}} && \text{Reescribir la integral.} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4^2-u^2}} && \text{Sustitución: } u = x^3. \\
&= \frac{1}{3}\,\text{arcsen}\,\frac{u}{4} + C && \text{Regla del arcoseno.} \\
&= \frac{1}{3}\,\text{arcsen}\,\frac{x^3}{4} + C. && \text{Reescribir como una función de } x.
\end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO Las reglas 18, 19 y 20 de la integración básica en la página siguiente tienen expresiones que implican la suma o diferencia de dos cuadrados:

$a^2 - u^2$

$a^2 + u^2$

$u^2 - a^2$

Estas expresiones suelen notarse después de sustituir u, como se muestra en el ejemplo 3.

Sorprendente, dos de las reglas de la integración normalmente pasadas por alto son la regla log y la regla de la potencia. Notar en los próximos dos ejemplos cómo estas dos reglas de la integración pueden ocultarse.

Repaso de las reglas básicas de integración ($a > 0$)

1. $\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$
2. $\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$
3. $\int du = u + C$
4. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int e^u\,du = e^u + C$
7. $\int a^u\,du = \left(\dfrac{1}{\ln a}\right)a^u + C$
8. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
10. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
11. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
12. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
13. $\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$
14. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
15. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
16. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
17. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \dfrac{u}{a} + C$
19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{u}{a} + C$
20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arcsec} \dfrac{|u|}{a} + C$

EJEMPLO 4 Una forma disfrazada de la regla log

Encontrar $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx.$

Solución La integral no parece adaptarse a ninguna de las reglas básicas. Sin embargo, la forma del cociente hace pensar en la regla log. Si se expresa $u = 1 + e^x$, entonces $du = e^x\,dx$. Obtener el du requerido sumando y restando e^x en el numerador, como sigue.

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx \qquad \text{Sumar y restar } e^x \text{ en el numerador.}$$

$$= \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx \qquad \text{Reescribir como dos fracciones.}$$

$$= \int dx - \int \frac{e^x\,dx}{1+e^x} \qquad \text{Reescribir como dos integrales.}$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C \qquad \text{Integrar.}$$

NOTA Hay más de una manera de resolver un problema de integración. Así, el ejemplo 4 demuestra que multiplicando el numerador y denominador por e^{-x} se obtiene una integral de la forma $-\int du/u$. Ver si se puede conseguir la misma respuesta por este procedimiento. (Tener cuidado: la respuesta aparecerá en una forma diferente.)

EJEMPLO 5 Una forma disfrazada de la regla de la potencia

Encontrar $\displaystyle\int (\cot x)[\ln(\operatorname{sen} x)]\,dx$

Solución De nuevo, la integral no parece adaptarse a ninguna de las reglas básicas. Sin embargo, considerando las dos opciones primarias para u[$u = \cot x$ y $u = \ln(\operatorname{sen} x)$], se puede ver que la segunda opción es la apropiada porque

$$u = \ln(\operatorname{sen} x) \qquad \text{y} \qquad du = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \cot x\,dx.$$

Así,

$$\int (\cot x)[\ln(\operatorname{sen} x)]\,dx = \int u\,du \qquad \text{Sustitución: } u = \ln(\operatorname{sen} x).$$

$$= \frac{u^2}{2} + C \qquad \text{Integrar.}$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(\operatorname{sen} x)]^2 + C. \qquad \text{Reescribir como una función de } x.$$

NOTA En el ejemplo 5, *verificar* que la derivada de

$$\frac{1}{2}[\ln(\operatorname{sen} x)]^2 + C$$

es el integrando de la integral original.

Pueden usarse a menudo las identidades trigonométricas para adaptar integrandos a una de las reglas básicas de la integración.

EJEMPLO 6 Uso de identidades trigonométricas

Encontrar $\displaystyle\int \tan^2 2x\, dx$.

Solución Notar que la $\tan^2 u$ no está en la lista de reglas básicas de integración. Sin embargo, $\sec^2 u$ está en la lista. Esto hace pensar en la identidad trigonométrica $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$. Si se hace $u = 2x$, entonces $du = 2\,dx$ y

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 2x\, dx &= \frac{1}{2}\int \tan^2 u\, du && \text{Sustitución: } u = 2x.\\
&= \frac{1}{2}\int (\sec^2 u - 1)\, du && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\, du - \frac{1}{2}\int du && \text{Reescribir como dos integrales.}\\
&= \frac{1}{2}\tan u - \frac{u}{2} + C && \text{Integrar.}\\
&= \frac{1}{2}\tan 2x - x + C. && \text{Reescribir como una función de } x.
\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un sistema de cálculo algebraico, usarlo para evaluar las integrales en esta sección. Comparar la *forma* de la antiderivada dada por el software con la forma obtenida a mano. A veces las formas serán las mismas, pero a menudo diferirán. Por ejemplo, ¿por qué la antiderivada $\ln 2x + C$ es equivalente a la antiderivada $\ln x + C$?

Esta sección concluye con un resumen de los procedimientos comunes para adaptar los integrandos a las reglas básicas de integración.

Procedimientos para adaptar los integrandos a las reglas básicas

Técnica	*Ejemplo*
Desarrollar (el numerador).	$(1 + e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$
Separar el numerador.	$\dfrac{1 + x}{x^2 + 1} = \dfrac{1}{x^2 + 1} + \dfrac{x}{x^2 + 1}$
Completar el cuadrado.	$\dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}}$
Dividir la función racional impropia.	$\dfrac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \dfrac{1}{x^2 + 1}$
Sumar y restar términos en el numerador.	$\dfrac{2x}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{2x + 2}{x^2 + 2x + 1} - \dfrac{2}{(x + 1)^2}$
Usar identidades trigonométricas.	$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$
Multiplicar y dividir por el conjugado pitagórico.	$\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x}\right)\left(\dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\right) = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

NOTA Recordar que se pueden separar los numeradores pero no los denominadores. Se debe tener cuidado con este error común cuando se adapten los integrandos a las reglas básicas.

$$\frac{1}{x^2 + 1} \neq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1} \qquad \text{No separar el denominador.}$$

8.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, seleccionar la antiderivada correcta.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

a) $2\sqrt{x^2+1} + C$ *b)* $\sqrt{x^2+1} + C$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + C$ *d)* $\ln(x^2+1) + C$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) $\ln\sqrt{x^2+1} + C$ *b)* $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} + C$

c) $\arctan x + C$ *d)* $\ln(x^2+1) + C$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2+1}$

a) $\ln\sqrt{x^2+1} + C$ *b)* $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} + C$

c) $\arctan x + C$ *d)* $\ln(x^2+1) + C$

4. $\dfrac{dy}{dx} = x\cos(x^2+1)$

a) $2x\,\mathrm{sen}(x^2+1) + C$ *b)* $-\frac{1}{2}\mathrm{sen}(x^2+1) + C$

c) $\frac{1}{2}\mathrm{sen}(x^2+1) + C$ *d)* $-2x\,\mathrm{sen}(x^2+1) + C$

En los ejercicios 5 a 14, seleccionar la fórmula de integración básica que puede usarse para encontrar la integral, e identificar *u* y *a* cuando sea apropiado.

5. $\displaystyle\int (5x-3)^4\,dx$ **6.** $\displaystyle\int \frac{2t+1}{t^2+t-4}\,dt$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-2\sqrt{x})}\,dx$ **8.** $\displaystyle\int \frac{2}{(2t-1)^2+4}\,dt$

9. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ **10.** $\displaystyle\int \frac{-2x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

11. $\displaystyle\int t\,\mathrm{sen}\,t^2\,dt$ **12.** $\displaystyle\int \sec 5x\tan 5x\,dx$

13. $\displaystyle\int (\cos x)e^{\mathrm{sen}\,x}\,dx$ **14.** $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$

En los ejercicios 15 a 52, encontrar la integral indefinida.

15. $\displaystyle\int 14(x-5)^6\,dx$ **16.** $\displaystyle\int \frac{9}{(t-8)^2}\,dt$

17. $\displaystyle\int \frac{7}{(z-10)^7}\,dz$ **18.** $\displaystyle\int t^2\sqrt[3]{t^3-1}\,dt$

19. $\displaystyle\int \left[v + \frac{1}{(3v-1)^3}\right]dv$ **20.** $\displaystyle\int \left[x - \frac{5}{(3x+5)^2}\right]dx$

21. $\displaystyle\int \frac{t^2-3}{-t^3+9t+1}\,dt$ **22.** $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$ **24.** $\displaystyle\int \frac{4x}{x-8}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \left(\frac{1}{7x-2} - \frac{1}{7x+2}\right)dx$

27. $\displaystyle\int (5+4x^2)^2\,dx$ **28.** $\displaystyle\int x\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 dx$

29. $\displaystyle\int x\cos 2\pi x^2\,dx$ **30.** $\displaystyle\int \sec 4x\,dx$

31. $\displaystyle\int \csc \pi x\cot \pi x\,dx$ **32.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

33. $\displaystyle\int e^{11x}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int \csc^2 x e^{\cot x}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{2}{e^{-x}+1}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int \frac{5}{3e^x-2}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx$ **38.** $\displaystyle\int (\tan x)[\ln(\cos x)]\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{1+\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\,dx$ **40.** $\displaystyle\int \frac{1+\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha}\,d\alpha$

41. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta-1}\,d\theta$ **42.** $\displaystyle\int \frac{2}{3(\sec x-1)}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-(4t+1)^2}}\,dt$ **44.** $\displaystyle\int \frac{1}{9+5x^2}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{\tan(2/t)}{t^2}\,dt$ **46.** $\displaystyle\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,dt$

47. $\displaystyle\int \frac{6}{\sqrt{10x-x^2}}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{4x^2-8x+3}}\,dx$

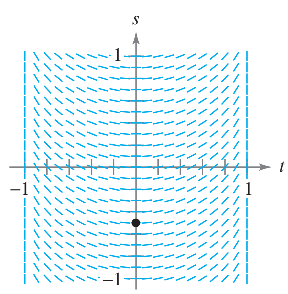
49. $\displaystyle\int \frac{4}{4x^2+4x+65}\,dx$ **50.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+9}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx$ **52.** $\displaystyle\int \frac{12}{\sqrt{3-8x-x^2}}\,dx$

Campos de pendientes **En los ejercicios 53 a 56, se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la solución. Comparar el resultado con los dibujos en el apartado *a*).**

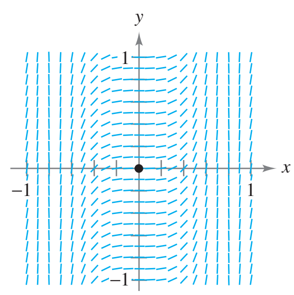
53. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^4}}$

$\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$



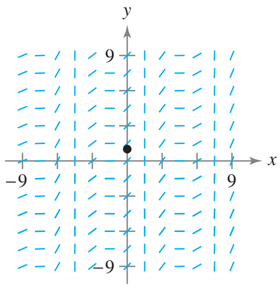
54. $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2(2x)$

$(0, 0)$



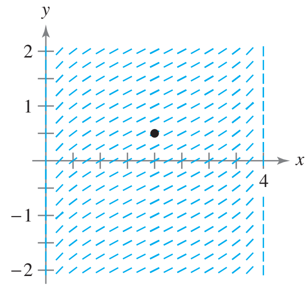
55. $\dfrac{dy}{dx} = (\sec x + \tan x)^2$

$(0, 1)$



56. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$

$\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$



CAS ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 57 y 58, usar un sistema algebraico por computadora para hacer la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y presentar la solución a través de la condición inicial especificada.**

57. $\dfrac{dy}{dx} = 0.8y,\ \ y(0) = 4$

58. $\dfrac{dy}{dx} = 5 - y,\ \ y(0) = 1$

En los ejercicios 59 a 64, resolver la ecuación diferencial.

59. $\dfrac{dy}{dx} = (e^x + 5)^2$

60. $\dfrac{dy}{dx} = (3 - e^x)^2$

61. $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{10e^t}{\sqrt{1 - e^{2t}}}$

62. $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{(1 + e^t)^2}{e^t}$

63. $(4 + \tan^2 x)y' = \sec^2 x$

64. $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$

En los ejercicios 65 a 72, evaluar la integral definida. Para verificar los resultados puede usarse integración en la herramienta de graficación.

65. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx$

66. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt$

67. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\, dx$

68. $\displaystyle\int_1^e \frac{1 - \ln x}{x}\, dx$

69. $\displaystyle\int_0^8 \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}}\, dx$

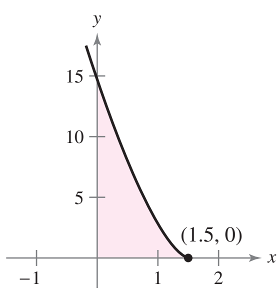
70. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x - 2}{x}\, dx$

71. $\displaystyle\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4 + 9x^2}\, dx$

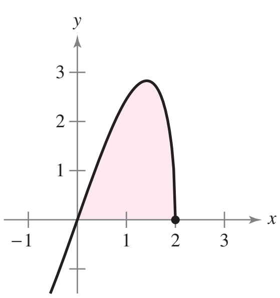
72. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{100 - x^2}}\, dx$

Área **En los ejercicios 73 a 78, encontrar el área de la región.**

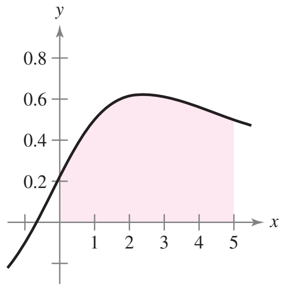
73. $y = (-4x + 6)^{3/2}$



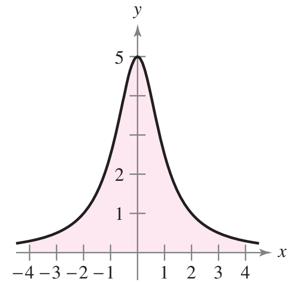
74. $y = x\sqrt{8 - 2x^2}$



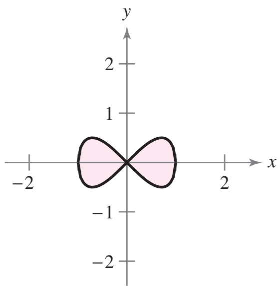
75. $y = \dfrac{3x + 2}{x^2 + 9}$



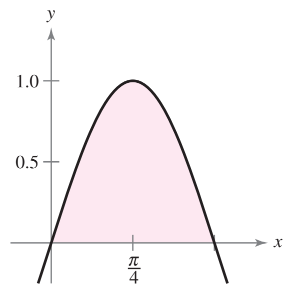
76. $y = \dfrac{5}{x^2 + 1}$



77. $y^2 = x^2(1 - x^2)$



78. $y = \operatorname{sen} 2x$



CAS **En los ejercicios 79 a 82, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la integral. Usar el sistema algebraico por computadora para hacer la gráfica de dos antiderivadas. Describir la relación entre las gráficas de las dos antiderivadas.**

79. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 4x + 13}\, dx$

80. $\displaystyle\int \frac{x - 2}{x^2 + 4x + 13}\, dx$

81. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta}\, d\theta$

82. $\displaystyle\int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 dx$

Desarrollo de conceptos

En los ejercicios 83 a 86, enunciar la fórmula de integración que se usaría para cada integral. Explicar por qué se eligió esa fórmula. No integrar.

83. $\displaystyle\int x(x^2 + 1)^3\, dx$

84. $\displaystyle\int x \sec(x^2 + 1)\tan(x^2 + 1)\, dx$

85. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$

86. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx$

87. Determinar las constantes a y b tal que

$\operatorname{sen} x + \cos x = a \operatorname{sen}(x + b)$.

Usar este resultado para integrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

88. Demostrar que $\sec x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$. Usar después esta identidad para derivar la regla básica de integración

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

89. ***Área*** Las gráficas de $f(x) = x$ y $g(x) = ax^2$ se intersecan en los puntos $(0, 0)$ y $(1/a, 1/a)$. Encontrar a $(a > 0)$ tal que el área de la región acotada por las gráficas de estas dos funciones sea $\frac{2}{3}$.

Para discusión

90. *a*) Explicar por qué la antiderivada $y_1 = e^{x + C_1}$ es equivalente a la antiderivada $y_2 = Ce^x$.

b) Explicar por qué la antiderivada $y_1 = \sec^2 x + C_1$ es equivalente a la antiderivada $y_2 = \tan^2 x + C$.

91. ***Para pensar*** Usar una herramienta de graficación para representar la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 7x^2 + 10x)$. Usar la gráfica para determinar si el valor de $\int_0^5 f(x)\,dx$ es positivo o negativo. Explicar.

92. ***Para pensar*** Al evaluar $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$, ¿es apropiado sustituir $u = x^2$, $x = \sqrt{u}$ y $dx = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$ para obtener $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^1 \sqrt{u}\,du = 0$?

Explicar.

Aproximación **En los ejercicios 93 y 94, determinar qué valor aproxima mejor el área de la región entre el eje *x* y la función en el intervalo dado. (Hacer la selección con base en un dibujo de la región y *no* integrando.)**

93. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$, $[0, 2]$

a) 3 *b*) 1 *c*) −8 *d*) 8 *e*) 10

94. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$, $[0, 2]$

a) 3 *b*) 1 *c*) −4 *d*) 4 *e*) 10

Interpretación de integrales **En los ejercicios 95 y 96, *a*) dibujar la región cuya área está dada por la integral, *b*) dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral si se usa el método de los discos y *c*) dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral si se usa el método de las capas. (Hay más de una respuesta correcta para cada inciso.)**

95. $\displaystyle\int_0^2 2\pi x^2\,dx$ **96.** $\displaystyle\int_0^4 \pi y\,dy$

97. ***Volumen*** La región acotada por $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$ $(b > 0)$ gira alrededor del eje y.

a) Encontrar el volumen del sólido generado si $b = 1$.

b) Encontrar b tal que el volumen del sólido generado es $\frac{4}{3}$ unidades cúbicas.

98. ***Volumen*** Considerar la región acotada por las gráficas de $x = 0$, $y = \cos x^2$, $y = \operatorname{sen} x^2$ y $x = \sqrt{\pi}/2$. Encontrar el volumen de un sólido generado al girar la región alrededor del eje y.

99. ***Longitud de arco*** Encontrar la longitud de arco de la gráfica de $y = \ln(\operatorname{sen} x)$ de $x = \pi/4$ a $x = \pi/2$.

100. ***Longitud de arco*** Encontrar la longitud de arco de la gráfica de $y = \ln(\cos x)$ desde $x = 0$ a $x = \pi/3$.

101. ***Área de una superficie*** Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 9]$ alrededor del eje x.

102. ***Centroide*** Encontrar la coordenada x del centroide de la región acotada por las gráficas de

$$y = \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}}, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 4.$$

En los ejercicios 103 y 104, encontrar el valor medio de la función sobre el intervalo dado.

103. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $\quad -3 \quad x \quad 3$

104. $f(x) = \operatorname{sen} nx$, $0 \leq x \leq \pi/n$, n es un entero positivo.

Longitud de arco **En los ejercicios 105 y 106, usar la capacidad de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.**

105. $y = \tan \pi x$, $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ **106.** $y = x^{2/3}$, $[1, 8]$

107. ***Encontrando un patrón***

a) Encontrar $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$. *b*) Encontrar $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$.

c) Encontrar $\displaystyle\int \cos^7 x\,dx$.

d) Explicar cómo encontrar $\int \cos^{15} x\,dx$ sin realmente integrar.

108. ***Encontrando un patrón***

a) Escribir $\int \tan^3 x\,dx$ en términos de $\int \tan x\,dx$. Entonces encontrar $\int \tan^3 x\,dx$.

b) Escribir $\int \tan^5 x\,dx$ en términos de $\int \tan^3 x\,dx$.

c) Escribir $\int \tan^{2k+1} x\,dx$ donde k es un entero positivo, en términos de $\int \tan^{2k-1} x\,dx$.

d) Explicar cómo encontrar $\int \tan^{15} x\,dx$ sin realmente integrar.

109. ***Métodos de integración*** Mostrar que los resultados siguientes son equivalentes.

Integración por las tablas:

$$\int \sqrt{x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + 1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right|\right) + C$$

Integración por el sistema algebraico por computadora:

$$\int \sqrt{x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + 1} + \operatorname{arcsenh}(x)\right] + C$$

Preparación del examen Putnam

110. Evaluar

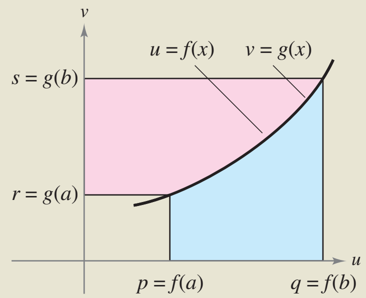
$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9 - x)}\,dx}{\sqrt{\ln(9 - x)} + \sqrt{\ln(x + 3)}}.$$

8.2 Integración por partes

- **Encontrar una antiderivada o primitiva usando la integración por partes.**
- **Usar un método tabular para realizar la integración por partes.**

EXPLORACIÓN

Demostración sin palabras He aquí una vía diferente para demostrar la fórmula de integración por partes, tomada con permiso del autor de "Proof Without Words: Integration by Parts", por Roger B. Nelsen, *Mathematics Magazine*, 64, núm. 2, abril 1991, p. 130.



Área + Área $= qs - pr$

$$\int_r^s u\,dv + \int_q^p v\,du = \Big[uv\Big]_{(p,r)}^{(q,s)}$$

$$\int_r^s u\,dv = \Big[uv\Big]_{(p,r)}^{(q,s)} - \int_q^p v\,du$$

Explicar cómo esta gráfica demuestra el teorema. ¿Qué notación usada en esta demostración no es familiar? ¿Cuál se cree que es su significado?

Integración por partes

En esta sección se estudiará una técnica importante de integración llamada **integración por partes**. Esta técnica puede aplicarse a una amplia variedad de funciones y es particularmente útil para integrandos que contengan *productos* de funciones algebraicas y trascendentes. Por ejemplo, la integración por partes funciona bien con integrales como

$$\int x \ln x\,dx, \quad \int x^2 e^x\,dx \quad \text{y} \quad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx.$$

La integración por partes está basada en la fórmula para la derivada de un producto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[uv] &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\\ &= uv' + vu'\end{aligned}$$

donde u y v son funciones derivables de x. Si u' y v' son continuas, se pueden integrar ambos lados de esta ecuación para obtener

$$\begin{aligned}uv &= \int uv'\,dx + \int vu'\,dx\\ &= \int u\,dv + \int v\,du.\end{aligned}$$

Volviendo a escribir esta ecuación, se obtiene el teorema siguiente.

TEOREMA 8.1 INTEGRACIÓN POR PARTES

Si u y v son funciones de x y tienen derivadas continuas, entonces

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Esta fórmula expresa la integral original en términos de otra integral. Dependiendo de la elección de u y dv, puede ser más fácil evaluar la segunda integral que la original. Porque la elección de u y dv es importante en la integración por el proceso de partes, se proporcionan las pautas siguientes.

Estrategia para integrar por partes

1. Intentar tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.
2. Intentar tomar como u la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que u, y como dv el factor restante del integrando.

Observe que dv siempre incluye dx del integrando original.

EJEMPLO 1 Integración por partes

Encontrar $\displaystyle\int xe^x\,dx$.

Solución Para aplicar la integración por partes, es necesario escribir la integral en la forma $\int u\,dv$. Hay varias maneras de hacer esto.

$$\int \underbrace{(x)}_{u}\,\underbrace{(e^x\,dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(e^x)}_{u}\underbrace{(x\,dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(1)}_{u}\,\underbrace{(xe^x\,dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(xe^x)}_{u}\underbrace{(dx)}_{dv}$$

Las estrategias de la página anterior hacen pensar en la elección de la primera opción porque la derivada de $u = x$ es más simple que x, y $dv = e^x\,dx$ es la porción más complicada del integrando que se adapta a una fórmula básica de la integración.

$$dv = e^x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$= xe^x - e^x + C. \qquad \text{Integrar.}$$

Para verificar esto, derivar $xe^x - e^x + C$ para ver que se obtiene el integrando original.

NOTA El ejemplo 1 muestra que no es necesario incluir una constante de integración al resolver

$$v = \int e^x\,dx = e^x + C_1.$$

Para ilustrar esto, reemplazar $v = e^x$ por $v = e^x + C_1$ y aplicar la integración por partes para ver que se obtiene el mismo resultado.

EJEMPLO 2 Integración por partes

Encontrar $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$.

Solución En este caso, x^2 se integra más fácil que $\ln x$. Además, la derivada de $\ln x$ es más simple que $\ln x$. Así, se debe hacer $dv = x^2\,dx$.

$$dv = x^2\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx$$

La integración por partes produce

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C. \qquad \text{Integrar.}$$

Verificar este resultado derivando.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right] = \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(x^2) - \frac{x^2}{3} = x^2 \ln x$$

TECNOLOGÍA Intentar hacer la gráfica de

$$\int x^2 \ln x\,dx \quad \text{y} \quad \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$$

en la herramienta de graficación. ¿Se obtiene la misma gráfica? (Este ejercicio requiere algo de tiempo, así que se debe tener paciencia.)

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para ver cómo se utiliza la integración por partes para comprobar la aproximación de Stirling

$$\ln(n!) = n \ln n - n$$

ver el artículo "The Validity of Stirling's Approximation: A Physical Chemistry Project" de A. S. Wallner y K. A. Brandt en *Journal of Chemical Education.*

Una aplicación sorprendente de la integración por partes involucra integrandos que constan de un solo factor, tales como $\int \ln x\, dx$ o $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$. En estos casos, hay que tomar $dv = dx$, como se muestra en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 3 Un integrando con un solo factor

Evaluar $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arcsen} x\, dx$.

Solución Sea $dv = dx$.

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dx = x$$

$$u = \operatorname{arcsen} x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

La integración por partes produce ahora

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int \operatorname{arcsen} x\, dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$= x \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}(-2x)\, dx \qquad \text{Reescribir.}$$

$$= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C. \qquad \text{Integrar.}$$

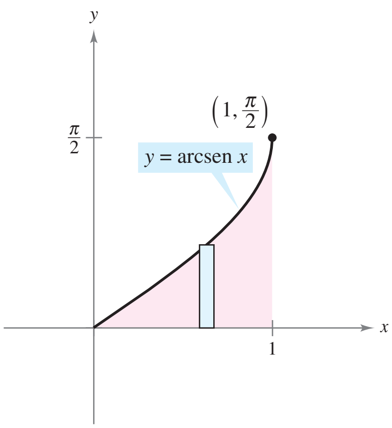
Usando esta antiderivada, evaluar la integral definida como sigue

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x\, dx = \Big[x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}\Big]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\approx 0.571$$

El área representada por esta integral definida se muestra en la figura 8.2.



El área de la región es aproximadamente 0.571
Figura 8.2

TECNOLOGÍA Recordar que hay dos maneras de usar la tecnología para evaluar una integral definida: 1) usar una aproximación numérica como la regla de los trapecios o la regla de Simpson, o 2) usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la antiderivada y entonces aplicar el teorema fundamental de cálculo. Ambos métodos tienen limitaciones. Para encontrar el posible error al usar un método numérico, los integrandos deben tener una segunda derivada (la regla de los trapecios) o una cuarta derivada (la regla de Simpson) en el intervalo de integración: el integrando en el ejemplo 3 no tiene estos requisitos. Para aplicar el teorema fundamental de cálculo, la herramienta de integración simbólica debe poder encontrar la antiderivada.

¿Qué método se usaría para evaluar

$$\int_0^1 \arctan x\, dx?$$

¿Qué método se usaría para evaluar

$$\int_0^1 \arctan x^2\, dx?$$

Algunas integrales requieren integrarse por partes más de una vez.

EJEMPLO 4 Integraciones sucesivas por partes

Encontrar $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$.

Solución Los factores x^2 y sen x son igualmente fáciles para integrar. Sin embargo, la derivada de x^2 se vuelve más simple, considerando que la derivada de sen x no lo es. Así que se debe elegir la opción $u = x^2$.

$$dv = \operatorname{sen} x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$$
$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\, dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx.$$

Primer uso de la integración por partes.

Este primer uso de la integración por partes ha tenido éxito simplificando la integral original, pero la integral de la derecha todavía no se adapta a una regla básica de integración. Para evaluar esa integral, aplicar de nuevo la integración por partes. Esta vez, sea $u = 2x$.

$$dv = \cos x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$$
$$u = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2\, dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\begin{aligned}\int 2x \cos x\, dx &= 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x\, dx\\ &= 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C.\end{aligned}$$

Segundo uso de la integración por partes.

Combinando estos dos resultados, se puede escribir

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C.$$

Al hacer aplicaciones repetidas de la integración por partes, tener cuidado de no intercambiar las sustituciones en las aplicaciones sucesivas. Así, en el ejemplo 4, la primera sustitución era $u = x^2$ y $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Si en la segunda aplicación se hubiera cambiado la sustitución a $u = \cos x$ y $dv = 2x$, se habría obtenido

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx\\ &= -x^2 \cos x + x^2 \cos x + \int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = \int x^2 \operatorname{sen} x\, dx\end{aligned}$$

deshaciendo como consecuencia la integración anterior y volviendo a la integral *original*. Al hacer aplicaciones repetidas de integración por partes, también debe percatarse de la aparición de un *múltiplo constante* de la integral original. Por ejemplo, esto ocurre cuando se usa la integración por partes para evaluar $\int e^x \cos 2x\, dx$, y también ocurre en el ejemplo 5.

La integral en el ejemplo 5 es muy importante. En la sección 8.4 (ejemplo 5) se utiliza para hallar la longitud de arco de un segmento parabólico.

EXPLORACIÓN

Intentar encontrar

$$\int e^x \cos 2x\, dx$$

haciendo $u = \cos 2x$ y $dv = e^x\, dx$ en la primera sustitución. Para la segunda sustitución, sea $u = \operatorname{sen} 2x$ y $dv = e^x\, dx$.

EJEMPLO 5 Integración por partes

Encontrar $\int \sec^3 x\, dx$.

Solución La porción más complicada del integrando que puede integrarse fácilmente es $\sec^2 x$, para hacer $dv = \sec^2 x\, dx$ y $u = \sec x$.

$$dv = \sec^2 x\, dx \Rightarrow v = \int \sec^2 x\, dx = \tan x$$

$$u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x\, dx$$

La integración por partes produce

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$ Fórmula de integración por partes.

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx$$ Sustituir.

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\, dx$$ Identidad trigonométrica.

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$ Reescribir.

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$$ Reunir por integrales.

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C$$ Integrar.

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$ Integrar y dividir entre 2.

AYUDA DE ESTUDIO Las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

juegan un papel importante en este capítulo.

EJEMPLO 6 Localización de un centroide

Una parte de la máquina es modelada por la región acotada por la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x, $0 \le x \le \pi/2$, como se muestra en la figura 8.3. Encontrar el centroide de esta región.

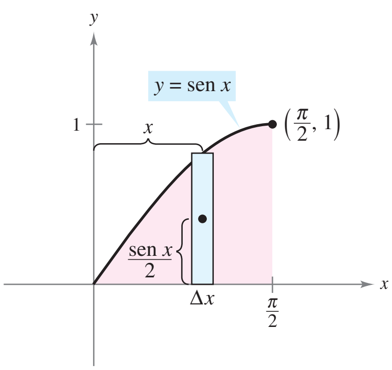


Figura 8.3

Solución Empezar encontrando el área de la región.

$$A = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

Ahora, encontrar las coordenadas del centroide como sigue.

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{2}(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

Evaluar la integral para $\bar{x}$, $(1/A)\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx$, con la integración por partes. Para hacer esto, sea $dv = \operatorname{sen} x\, dx$ y $u = x$. Esto produce $v = -\cos x$ y $du = dx$, y escribir

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Por último, determinar $\bar{x}$ para ser

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx = \Big[-x\cos x + \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

Así, el centroide de la región es $(1, \pi/8)$.

Al obtener experiencia usando la integración por partes, la habilidad para determinar u y dv aumentará. El resumen siguiente recoge varias integrales comunes con las sugerencias para la elección de u y dv.

AYUDA DE ESTUDIO Puede usarse el acrónimo LIATE como una pauta para escoger u en la integración por partes. En orden, verificar el integrando para lo siguiente.

¿Hay una parte Logarítmica?

¿Hay una parte trigonométrica Inversa?

¿Hay una parte Algebraica?

¿Hay una parte Trigonométrica?

¿Hay una parte Exponencial?

Resumen de integrales comunes utilizando integración por partes

1. Para integrales de la forma

$$\int x^n e^{ax}\,dx, \qquad \int x^n \operatorname{sen} ax\,dx, \qquad \text{o} \qquad \int x^n \cos ax\,dx$$

sea $u = x^n$ y sea $dv = e^{ax}\,dx$, $\operatorname{sen} ax\,dx$, o $\cos ax\,dx$.

2. Para integrales de la forma

$$\int x^n \ln x\,dx, \qquad \int x^n \operatorname{arcsen} ax\,dx, \qquad \text{o} \qquad \int x^n \arctan ax\,dx$$

sea $u = \ln x$, $\operatorname{arcsen} ax$, o $\arctan ax$ y sea $dv = x^n\,dx$.

3. Para integrales de la forma

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx \qquad \text{o} \qquad \int e^{ax} \cos bx\,dx$$

sea $u = \operatorname{sen} bx$ o $\cos bx$ y sea $dv = e^{ax}\,dx$.

Método tabular

En problemas que contienen aplicaciones repetidas de la integración por partes, un método tabular, ilustrado en el ejemplo 7, puede ayudar para organizar el trabajo. Este método funciona bien para las integrales del tipo $\int x^n \operatorname{sen} ax\,dx$, $\int x^n \cos ax\,dx$ y $\int x^n e^{ax}\,dx$.

EJEMPLO 7 Uso del método tabular

Encontrar $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} 4x\,dx$.

Solución Empezar como de costumbre haciendo $u = x^2$ y $dv = v'\,dx = \operatorname{sen} 4x\,dx$. Luego, crear una tabla de tres columnas, como se muestra.

Signos alternados	*u y sus derivadas*	*v′ y sus antiderivadas*
$+$	x^2	$\operatorname{sen} 4x$
$-$	$2x$	$-\frac{1}{4}\cos 4x$
$+$	2	$-\frac{1}{16}\operatorname{sen} 4x$
$-$	0	$\frac{1}{64}\cos 4x$

Derivar hasta obtener una derivada nula.

La solución se obtiene sumando los productos con signo de las entradas diagonales:

$$\int x^2 \operatorname{sen} 4x\,dx = -\frac{1}{4}x^2\cos 4x + \frac{1}{8}x\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{32}\cos 4x + C.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre el método tabular, ver el artículo "Tabular Integration by Parts", de David Horowitz en *The College Mathematics Journal*, y el artículo "More on Tabular Integration by Parts", de Leonard Gillman, en *The College Mathematics Journal*.

8.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, identificar u y dv para encontrar la integral usando la integración por partes. (No evaluar la integral.)

1. $\int xe^{2x}\,dx$
2. $\int x^2 e^{2x}\,dx$
3. $\int (\ln x)^2\,dx$
4. $\int \ln 5x\,dx$
5. $\int x \sec^2 x\,dx$
6. $\int x^2 \cos x\,dx$

En los ejercicios 7 a 10, evaluar la integral utilizando integración por partes con las elecciones dadas para u y dv.

7. $\displaystyle\int x^3 \ln x\,dx;\; u = \ln x,\; dv = x^3\,dx$
8. $\displaystyle\int (4x + 7)e^x\,dx;\; u = 4x + 7,\; dv = e^x\,dx$
9. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} 3x\,dx;\; u = x,\; dv = \operatorname{sen} 3x\,dx$
10. $\displaystyle\int x \cos 4x\,dx;\; u = x,\; dv = \cos 4x\,dx$

En los ejercicios 11 a 38, encontrar la integral. (*Nota*: Resolver por el método más simple, no todas requieren la integración por partes.)

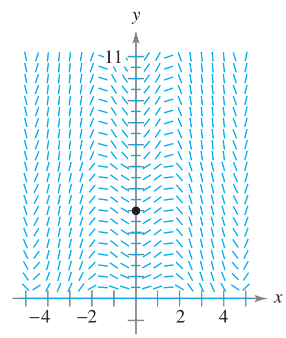
11. $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{2x}{e^x}\,dx$
13. $\displaystyle\int x^3 e^x\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,dt$
15. $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$
16. $\displaystyle\int x^4 \ln x\,dx$
17. $\displaystyle\int t \ln(t + 1)\,dt$
18. $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{xe^{2x}}{(2x + 1)^2}\,dx$
22. $\displaystyle\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2}\,dx$
23. $\displaystyle\int (x^2 - 1)e^x\,dx$
24. $\displaystyle\int \frac{\ln 2x}{x^2}\,dx$
25. $\displaystyle\int x\sqrt{x - 5}\,dx$
26. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5 + 4x}}\,dx$
27. $\displaystyle\int x \cos x\,dx$
28. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\,dx$
29. $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$
30. $\displaystyle\int x^2 \cos x\,dx$
31. $\displaystyle\int t \csc t \cot t\,dt$
32. $\displaystyle\int \theta \sec \theta \tan \theta\,d\theta$
33. $\displaystyle\int \arctan x\,dx$
34. $\displaystyle\int 4 \arccos x\,dx$
35. $\displaystyle\int e^{2x} \operatorname{sen} x\,dx$
36. $\displaystyle\int e^{-3x} \operatorname{sen} 5x\,dx$
37. $\displaystyle\int e^{-x} \cos 2x\,dx$
38. $\displaystyle\int e^{3x} \cos 4x\,dx$

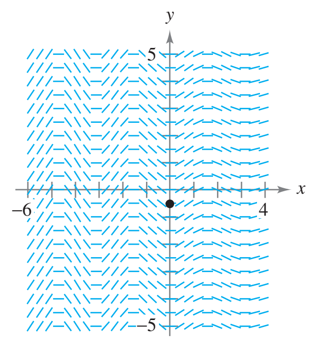
En los ejercicios 39 a 44, resolver la ecuación diferencial.

39. $y' = xe^{x^2}$
40. $y' = \ln x$
41. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t^2}{\sqrt{2 + 3t}}$
42. $\dfrac{dy}{dx} = x^2\sqrt{x - 3}$
43. $(\cos y)y' = 2x$
44. $y' = \arctan \dfrac{x}{2}$

Campos de pendientes **En los ejercicios 45 y 46, se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de direcciones o pendientes, una de las cuales pase a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la solución. Comparar el resultado con los dibujos del inciso *a*).**

45. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{y}\cos x, \quad (0, 4)$
46. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x/3} \operatorname{sen} 2x, \quad \left(0, -\frac{18}{37}\right)$





CAS ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 47 y 48, usar una herramienta de graficación para representar la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y hacer la gráfica de la solución a través de una herramienta de graficación.**

47. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}e^{x/8}$
    $y(0) = 2$
48. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} \operatorname{sen} x$
    $y(0) = 4$

En los ejercicios 49 a 60, evaluar la integral definida. Usar una herramienta de graficación para confirmar el resultado.

49. $\displaystyle\int_0^3 xe^{x/2}\,dx$
50. $\displaystyle\int_0^2 x^2 e^{-2x}\,dx$
51. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x \cos 2x\,dx$
52. $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} 2x\,dx$
53. $\displaystyle\int_0^{1/2} \arccos x\,dx$
54. $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{arcsen} x^2\,dx$
55. $\displaystyle\int_0^1 e^x \operatorname{sen} x\,dx$
56. $\displaystyle\int_0^2 e^{-x} \cos x\,dx$
57. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\ln x\,dx$
58. $\displaystyle\int_0^1 \ln(4 + x^2)\,dx$
59. $\displaystyle\int_2^4 x \operatorname{arcsec} x\,dx$
60. $\displaystyle\int_0^{\pi/8} x \sec^2 2x\,dx$

En los ejercicios 61 a 66, usar el método tabular para encontrar la integral.

61. $\int x^2e^{2x}\,dx$
62. $\int x^3e^{-2x}\,dx$
63. $\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$
64. $\int x^3 \cos 2x\,dx$
65. $\int x \sec^2 x\,dx$
66. $\int x^2(x-2)^{3/2}\,dx$

En los ejercicios 67 a 74, encontrar o evaluar la integral usando primero sustitución y después la integración por partes.

67. $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$
68. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$
69. $\int_0^4 x\sqrt{4-x}\,dx$
70. $\int 2x^3 \cos x^2\,dx$
71. $\int x^5e^{x^2}\,dx$
72. $\int_0^2 e^{\sqrt{2x}}\,dx$
73. $\int \cos(\ln x)\,dx$
74. $\int \ln(x^2+1)\,dx$

Desarrollo de conceptos

75. ¿En qué regla de derivación está basada la integración por partes? Explicar.
76. En sus propias palabras, establecer la manera de determinar qué partes del integrando deberían ser u y dv.
77. Al evaluar $\int x \operatorname{sen} x\,dx$, explicar por qué dejar $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = x\,dx$ hace que la solución sea más difícil de encontrar.

Para discusión

78. Indicar si se usaría la integración por partes para evaluar cada integral. Si es así, identificar qué se usaría para u y dv. Explicar el razonamiento.

a) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ *b)* $\int x \ln x\,dx$ *c)* $\int x^2e^{-3x}\,dx$

d) $\int 2x\,e^{x^2}\,dx$ *e)* $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ *f)* $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

CAS En los ejercicios 79 a 82, usar un sistema algebraico por computadora para *a*) encontrar o evaluar la integral y *b*) hacer la gráfica de dos antiderivadas. *c*) Describir la relación entre las gráficas de la antiderivada.

79. $\int t^3\,e^{-4t}\,dt$
80. $\int \alpha^4 \operatorname{sen} \pi\alpha\,d\alpha$
81. $\int_0^{\pi/2} e^{-2x} \operatorname{sen} 3x\,dx$
82. $\int_0^5 x^4(25-x^2)^{3/2}\,dx$

83. Integrar $\int 2x\sqrt{2x-3}\,dx$
   a) por partes, con $dv = \sqrt{2x-3}\,dx$.
   b) por sustitución, con $u = 2x - 3$.

84. Integrar $\int x\sqrt{9+x}\,dx$
   a) por partes, con $dv = \sqrt{9+x}\,dx$.
   b) por sustitución, con $u = 9 + x$.

85. Integrar $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$
   a) por partes, con $dv = \left(x/\sqrt{4+x^2}\right)dx$.
   b) por sustitución, con $u = 4 + x^2$.

86. Integrar $\int x\sqrt{4-x}\,dx$
   a) por partes, con $dv = \sqrt{4-x}\,dx$.
   b) por sustitución, con $u = 4 - x$.

CAS En los ejercicios 87 y 88, usar una herramienta de graficación para encontrar la integral para $n = 0, 1, 2$ y 3. Usar el resultado para obtener una regla general para la integral para cualquier entero n positivo y probar sus resultados para $n = 4$.

87. $\int x^n \ln x\,dx$
88. $\int x^ne^x\,dx$

En los ejercicios 89 a 94, usar la integración por partes para verificar la fórmula. (Para los ejercicios 89 a 92, asumir que n es un entero positivo.)

89. $\int x^n \operatorname{sen} x\,dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x\,dx$
90. $\int x^n \cos x\,dx = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1} \operatorname{sen} x\,dx$
91. $\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[-1 + (n+1)\ln x] + C$
92. $\int x^n\,e^{ax}\,dx = \frac{x^ne^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\,e^{ax}\,dx$
93. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$
94. $\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b \operatorname{sen} bx)}{a^2+b^2} + C$

En los ejercicios 95 a 98, encontrar la integral usando la fórmula apropiada de entre las mostradas en los ejercicios 89 a 94.

95. $\int x^5 \ln x\,dx$
96. $\int x^2 \cos x\,dx$
97. $\int e^{2x} \cos 3x\,dx$
98. $\int x^3e^{2x}\,dx$

Área **En los ejercicios 99 a 102, usar una herramienta de graficación para representar la gráfica de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, y encontrar su área.**

99. $y = 2xe^{-x},\ y = 0,\ x = 3$
100. $y = \frac{1}{16}xe^{-x/4},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4$
101. $y = e^{-x} \operatorname{sen} \pi x,\ y = 0,\ x = 1$
102. $y = x \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ x = \pi$

103. ***Área, volumen y centroide*** Dada la región acotada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$, encontrar

a) el área de la región.
b) el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x.
c) el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje y.
d) el centroide de la región.

104. ***Volumen y centroide*** Dada la región acotada por las gráficas de $y = x \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$, encontrar

a) el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x.
b) el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje y.
c) el centroide de la región.

105. ***Centroide*** Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{arcsen} x$, $x = 0$ y $y = \pi/2$. ¿Cómo se relaciona este problema con el ejemplo 6 de esta sección?

106. ***Centroide*** Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, $x = 2$ y $x = 4$.

107. ***Desplazamiento medio*** Una fuerza amortiguadora afecta la vibración de un muelle de manera que su desplazamiento se dé por $y = e^{-4t}(\cos 2t + 5 \operatorname{sen} 2t)$. Encontrar el valor medio de y en el intervalo de $t = 0$ a $t = \pi$.

108. ***Modelo para la memoria*** El modelo para la capacidad M de un niño para memorizar, medido en una escala de 0 a 10, está dado por $M = 1 + 1.6t \ln t$, $0 < t \leq 4$, donde t es la edad del niño en años. Encontrar el valor medio de esa función

a) entre el primero y segundo cumpleaños del niño.
b) entre el tercer y cuarto cumpleaños del niño.

Valor actual **En los ejercicios 109 y 110, encontrar el valor presente P de un flujo de ingreso continuo de dólares por año $c(t)$ si**

$$P = \int_0^{t_1} c(t)e^{-rt}\,dt$$

donde t_1 es el tiempo en años y r es la tasa de interés anual compuesto continuo.

109. $c(t) = 100\,000 + 4\,000t$, $r = 5\%$, $t_1 = 10$

110. $c(t) = 30\,000 + 500t$, $r = 7\%$, $t_1 = 5$

Integrales usadas para encontrar los coeficientes de Fourier **En los ejercicios 111 y 112, verificar el valor de la integral definida donde n es un entero positivo.**

111. $$\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\,dx = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{n}, & n \text{ es impar} \\ -\dfrac{2\pi}{n}, & n \text{ es par} \end{cases}$$

112. $$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{(-1)^n 4\pi}{n^2}$$

113. ***Cuerda vibrante*** Una cuerda tensada entre los dos puntos (0, 0) y (2, 0) se tensa desplazando su punto medio h unidades. El movimiento de la cuerda es modelado por una **serie senoidal de Fourier** para la cual se dan los coeficientes por

$$b_n = h\int_0^1 x \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\,dx + h\int_1^2 (-x + 2)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\,dx.$$

Encontrar b_n.

114. Encontrar la falacia en la siguiente demostración de que $0 = 1$.

$$dv = dx \quad \Longrightarrow \quad v = \int dx = x$$

$$u = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad du = -\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$0 + \int \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)(x) - \int \left(-\frac{1}{x^2}\right)(x)\,dx = 1 + \int \frac{dx}{x}$$

Así, $0 = 1$.

115. Sea $y = f(x)$ positiva y estrictamente creciente en el intervalo $0 < a \leq x \leq b$. Considerar la región R acotada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$. Si R se gira alrededor del eje y, demostrar que el método de los discos y el método de las capas dan el mismo volumen.

116. ***El método de Euler*** Considerar la ecuación diferencial $f'(x) = xe^{-x}$ con la condición inicial $f(0) = 0$.

a) Usar la integración para resolver la ecuación diferencial.
b) Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la solución de la ecuación diferencial.
c) Usar el método de Euler con $h = 0.05$, y una herramienta de graficación para generar los primeros 80 puntos de la gráfica de la solución aproximada. Usar una herramienta de graficación para trazar los puntos. Comparar el resultado con la gráfica en el inciso *b*).
d) Repetir el inciso *c*) usando $h = 0.1$ y generar los primeros 40 puntos.
e) ¿Por qué el resultado es en el apartado *c*) una mejor aproximación de la solución que el resultado en el apartado *d*)?

Método de Euler **En los ejercicios 117 y 118, considerar la ecuación diferencial y repetir los apartados *a*) a *d*) del ejercicio 116.**

117. $f'(x) = 3x \operatorname{sen}(2x)$, $f(0) = 0$

118. $f'(x) = \cos\sqrt{x}$, $f(0) = 1$

119. ***Para pensar*** Dar una explicación geométrica para explicar

$$\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\,dx \leq \int_0^{\pi/2} x\,dx.$$

Verificar la desigualdad evaluando las integrales.

120. ***Encontrando un modelo*** Encontrar el área acotada por las gráficas de $y = x \operatorname{sen} x$ y $y = 0$ sobre cada intervalo.

a) $[0, \pi]$ *b*) $[\pi, 2\pi]$ *c*) $[2\pi, 3\pi]$

Describir cualquier patrón que se note. ¿Cuál es el área entre las gráficas de $y = x \operatorname{sen} x$ y $y = 0$ en el intervalo $[n\pi, (n + 1)\pi]$, donde n es cualquier entero no negativo? Explicar la respuesta.

8.3 Integrales trigonométricas

- **Resolver integrales trigonométricas que contienen potencias de seno y coseno.**
- **Resolver integrales trigonométricas que contienen potencias de secante y tangente.**
- **Resolver integrales trigonométricas que contienen los productos de seno-coseno con ángulos diferentes.**

SHEILA SCOTT MACINTYRE (1910-1960)
Sheila Scott Macintyre publicó su primer trabajo sobre los periodos asintóticos de las funciones integrales en 1935. Recibió el doctorado en la Universidad de Aberdeen, donde fue profesora. En 1958 aceptó un puesto como investigadora invitada en la Universidad de Cincinnati.

Integrales que contienen potencias de seno y coseno

En esta sección se estudiarán las técnicas para evaluar integrales de los tipos

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx \qquad \text{y} \qquad \int \sec^m x \tan^n x\, dx$$

donde m o n es cualquier entero positivo. Para encontrar la antiderivada o primitiva para estas expresiones, intentar separarlas en combinaciones de integrales trigonométricas a las que puede aplicarse la regla de la potencia.

Por ejemplo, evaluar $\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\, dx$ con la regla de la potencia haciendo $u = \operatorname{sen} x$. Entonces, $du = \cos x\, dx$ y tiene

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\, dx = \int u^5\, du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C.$$

Para separar $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ en formas a las que se puede aplicar la regla de la potencia, usar las identidades siguientes.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$ Identidad pitagórica.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$ Identidad del ángulo medio para $\operatorname{sen}^2 x$.

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$ Identidad del ángulo medio para $\cos^2 x$.

Estrategia para evaluar integrales que contienen senos y cosenos

1. Si la potencia del seno es impar y positiva, conservar un factor seno y pasar los factores restantes a cosenos. Entonces, desarrollar e integrar.

$$\int \operatorname{sen}^{\overbrace{2k+1}^{\text{Impar}}} x \cos^n x\, dx = \int \overbrace{(\operatorname{sen}^2 x)^k}^{\text{Convertir a senos}} \cos^n x \overbrace{\operatorname{sen} x\, dx}^{\text{Conservar para } du} = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx$$

2. Si la potencia del coseno es impar y positiva, conservar un factor coseno y pasar los factores restantes a senos. Entonces, desarrollar e integrar.

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{\overbrace{2k+1}^{\text{Impar}}} x\, dx = \int \operatorname{sen}^m x \overbrace{(\cos^2 x)^k}^{\text{Convertir a senos}} \overbrace{\cos x\, dx}^{\text{Conservar para } du} = \int \operatorname{sen}^m x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\, dx$$

3. Si las potencias de ambos son pares y no negativas, usar repetidamente las identidades.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

para convertir el integrando a potencias impares del coseno. Entonces procédase como en la estrategia 2.

TECNOLOGÍA Usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la integral en el ejemplo 1. Obtener

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx =$$

$$-\cos^5 x\left(\frac{1}{7}\operatorname{sen}^2 x + \frac{2}{35}\right) + C.$$

¿Es equivalente este resultado al obtenido en el ejemplo 1?

EJEMPLO 1 La potencia del seno es impar y positiva

Encontrar $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx$.

Solución Ya que se espera usar la regla de la potencia con $u = \cos x$, *conservar un factor* para formar du y convertir los factores del seno restantes a cosenos.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x(\operatorname{sen} x)\, dx && \text{Reescribir.}\\
&= \int (1 - \cos^2 x)\cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \int (\cos^4 x - \cos^6 x)\operatorname{sen} x\, dx && \text{Multiplicar.}\\
&= \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x\, dx && \text{Reescribir.}\\
&= -\int \cos^4 x(-\operatorname{sen} x)\, dx + \int \cos^6 x(-\operatorname{sen} x)\, dx\\
&= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C && \text{Integrar.}
\end{aligned}$$

En el ejemplo 1, las *dos* potencias m y n pasaron a ser enteros positivos. Sin embargo, la misma estrategia funcionará siempre que m o n sean impares y positivos. Así, en el próximo ejemplo la potencia del coseno es 3, pero la potencia del seno es $-\frac{1}{2}$.

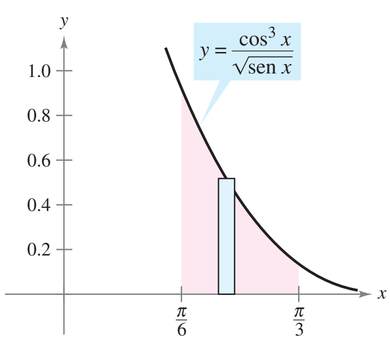
EJEMPLO 2 La potencia del coseno es impar y positiva

Evaluar $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx$.

Solución Ya que se espera usar la regla de la potencia con $u = \operatorname{sen} x$, *conservar un factor del coseno* para formar du y convertir los factores del coseno restantes a senos.

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x \cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx\\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x)(\cos x)}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx\\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} [(\operatorname{sen} x)^{-1/2}\cos x - (\operatorname{sen} x)^{3/2}\cos x]\, dx\\
&= \left[\frac{(\operatorname{sen} x)^{1/2}}{1/2} - \frac{(\operatorname{sen} x)^{5/2}}{5/2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3}\\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} - \frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{5/2} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{32}}{80}\\
&\approx 0.239
\end{aligned}$$

La figura 8.4 muestra la región cuya área es representada por esta integral.



El área de la región es aproximadamente 0.239
Figura 8.4

EJEMPLO 3 La potencia del coseno es par y no negativa

Encontrar $\int \cos^4 x\, dx$.

Solución Porque m y n son pares y no negativos ($m = 0$), se puede reemplazar $\cos^4 x$ por $[(1 + \cos 2x)/2]^2$.

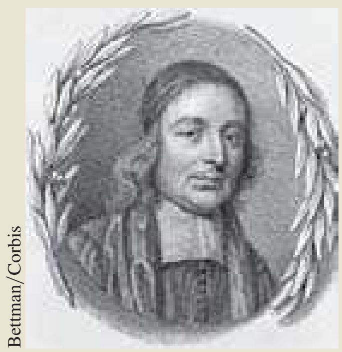
$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx && \text{Identidad del ángulo mitad.}\\
&= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}\right) dx && \text{Expandir.}\\
&= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)\right] dx && \text{Identidad del ángulo mitad.}\\
&= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{32}\int 4\cos 4x\, dx && \text{Reescribir.}\\
&= \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C && \text{Integrar.}
\end{aligned}$$

Usar un sistema de derivación simbólica para verificar esto. ¿Se puede simplificar la derivada para obtener el integrando original?

En el ejemplo 3, si se evaluara la integral definida de 0 a $\pi/2$, se obtendría

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx &= \left[\frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32}\right]_0^{\pi/2}\\
&= \left(\frac{3\pi}{16} + 0 + 0\right) - (0 + 0 + 0)\\
&= \frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Notar que el único término que contribuye a la solución es $3x/8$. Esta observación se generaliza en las fórmulas siguientes desarrolladas por John Wallis.



JOHN WALLIS (1616-1703)
Wallis hizo mucho de su trabajo en cálculo antes que Newton y Leibniz e influyó en el pensamiento de ambos. Wallis es también creador de la introducción del símbolo (∞) para denotar infinito.

LAS FÓRMULAS DE WALLIS

1. Si n es impar ($n \geq 3$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

2. Si n es par ($n \geq 2$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Estas fórmulas también son válidas si el $\cos^n x$ se reemplaza por el $\operatorname{sen}^n x$. (Demostrar ambas fórmulas en el ejercicio 108.)

Integrales que contienen potencias de secante y tangente

Las estrategias siguientes pueden ayudar a evaluar integrales de la forma

$$\int \sec^m x \tan^n x\, dx.$$

Estrategia para evaluar integrales que contienen secante y tangente

1. Si la potencia de la secante es par y positiva, conservar un factor secante cuadrado y convertir los factores restantes a tangentes. Entonces desarrollar e integrar.

$$\int \overbrace{\sec^{2k}}^{\text{Par}} x \tan^n x\, dx = \int \overbrace{(\sec^2 x)^{k-1}}^{\text{Convertir a tangentes}} \tan^n x \overbrace{\sec^2 x}^{\text{Conservar para } du}\, dx = \int (1 + \tan^2 x)^{k-1} \tan^n x \sec^2 x\, dx$$

2. Si la potencia de la secante es impar y positiva, conservar un factor secante tangente y convertir los factores restantes a secantes. Entonces desarrollar e integrar.

$$\int \sec^m x \overbrace{\tan^{2k+1}}^{\text{Impar}} x\, dx = \int \sec^{m-1} x \overbrace{(\tan^2 x)^k}^{\text{Convertir a secantes}} \overbrace{\sec x \tan x\, dx}^{\text{Conservar para } du} = \int \sec^{m-1} x (\sec^2 x - 1)^k \sec x \tan x\, dx$$

3. Si no hay factores secantes y la potencia de la tangente es par y positiva, convertir un factor tangente cuadrado a secante cuadrado. Entonces desarrollar y repetir si es necesario.

$$\int \tan^n x\, dx = \int \tan^{n-2} x \overbrace{(\tan^2 x)}^{\text{Convertir a secantes}}\, dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1)\, dx$$

4. Si la integral es de la forma $\int \sec^m x\, dx$ donde m es impar y positiva, usar la integración por partes, como se ilustra en el ejemplo 5 de la sección anterior.

5. Si ninguna de las primeras cuatro guías aplica, intentar convertir el integrando en senos y cosenos.

EJEMPLO 4 La potencia de la tangente es impar y positiva

Encontrar $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}}\, dx.$

Solución Debido a que se espera usar la regla de la potencia con $u = \sec x$, *conservar un factor de* $(\sec x \tan x)$ para formar du y convertir los factores tangentes restantes a secantes.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}}\, dx &= \int (\sec x)^{-1/2} \tan^3 x\, dx \\
&= \int (\sec x)^{-3/2}(\tan^2 x)(\sec x \tan x)\, dx \\
&= \int (\sec x)^{-3/2}(\sec^2 x - 1)(\sec x \tan x)\, dx \\
&= \int [(\sec x)^{1/2} - (\sec x)^{-3/2}](\sec x \tan x)\, dx \\
&= \frac{2}{3}(\sec x)^{3/2} + 2(\sec x)^{-1/2} + C
\end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 5, la potencia de la tangente es impar y positiva. Así que también se podría encontrar la integral usando el procedimiento descrito en la guía de estrategias 2 de la página 539. Demostrar en el ejercicio 89 que los resultados obtenidos por estos dos procedimientos sólo difieren por una constante.

EJEMPLO 5 La potencia de la secante es par y positiva

Encontrar $\int \sec^4 3x \tan^3 3x\, dx$.

Solución Sea $u = \tan 3x$, entonces $du = 3 \sec^2 3x\, dx$ y se pueden escribir

$$\begin{aligned}\int \sec^4 3x \tan^3 3x\, dx &= \int \sec^2 3x \tan^3 3x(\sec^2 3x)\, dx\\ &= \int (1 + \tan^2 3x) \tan^3 3x(\sec^2 3x)\, dx\\ &= \frac{1}{3}\int (\tan^3 3x + \tan^5 3x)(3 \sec^2 3x)\, dx\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\tan^4 3x}{4} + \frac{\tan^6 3x}{6}\right) + C\\ &= \frac{\tan^4 3x}{12} + \frac{\tan^6 3x}{18} + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 La potencia de la tangente es par

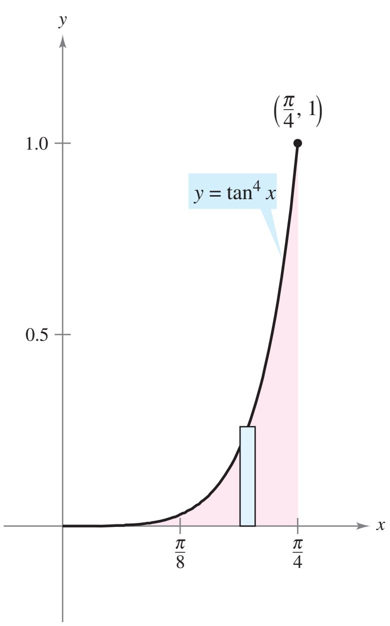
Evaluar $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x\, dx$.

Solución Debido a que no hay factor secante, se puede empezar convirtiendo un factor tangente cuadrado en un factor secante cuadrado.

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\, dx &= \int \tan^2 x(\tan^2 x)\, dx\\ &= \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)\, dx\\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx\\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx\\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C\end{aligned}$$

Evaluar la integral definida como sigue.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \tan^4 x\, dx &= \left[\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x\right]_0^{\pi/4}\\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\\ &\approx 0.119\end{aligned}$$



El área de la región es aproximadamente 0.119
Figura 8.5

El área representada por la integral definida se muestra en la figura 8.5. Probar usando la regla de Simpson para aproximar el valor de esta integral. Con $n = 18$, se debe obtener una aproximación con un error menor que 0.00001.

Para integrales que contienen potencias de cotangentes y cosecantes, seguir una estrategia similar a aquella usada para las potencias de tangentes y secantes. También, al integrar las funciones trigonométricas, recordar que a veces ayuda convertir el integrando entero en las potencias de senos y cosenos.

EJEMPLO 7 Conversión de senos y cosenos

Encontrar $\int \frac{\sec x}{\tan^2 x}\, dx$.

Solución Debido a que las primeras cuatro estrategias de la página 539 no aplican, intentar convertir el integrando en senos y cosenos. En este caso, se pueden integrar las potencias resultantes de seno y coseno como sigue.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec x}{\tan^2 x}\, dx &= \int \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 dx\\ &= \int (\operatorname{sen} x)^{-2}(\cos x)\, dx\\ &= -(\operatorname{sen} x)^{-1} + C\\ &= -\csc x + C\end{aligned}$$

Integrales que contienen los productos seno-coseno de ángulos diferentes

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para aprender más sobre integrales que contienen los productos del seno-coseno con ángulos diferentes, ver el artículo "Integrals of Products of Sine and Cosine with Different Arguments", de Sherrie J. Nicol, en *The College Mathematics Journal*.

Las integrales que contienen los productos de senos-cosenos de dos ángulos *diferentes* ocurren en muchas aplicaciones. En tales casos usar las identidades de producto suma.

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x])$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}[(m-n)x] + \operatorname{sen}[(m+n)x])$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x])$$

EJEMPLO 8 Uso de identidades de producto y suma

Encontrar $\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\, dx$

Solución Considerando la segunda identidad del producto suma, escribir

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x\, dx &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\, dx\\ &= \frac{1}{2}\left(-\cos x - \frac{\cos 9x}{9}\right) + C\\ &= -\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + C.\end{aligned}$$

8.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, usar la derivación para adaptar la antiderivada con la integral correcta. [Se etiquetan las integrales *a*), *b*), *c*) y *d*).]

a) $\int \operatorname{sen} x \tan^2 x\, dx$ *b*) $8\int \cos^4 x\, dx$

c) $\int \operatorname{sen} x \sec^2 x\, dx$ *d*) $\int \tan^4 x\, dx$

1. $y = \sec x$
2. $y = \cos x + \sec x$
3. $y = x - \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$
4. $y = 3x + 2\operatorname{sen} x \cos^3 x + 3\operatorname{sen} x \cos x$

En los ejercicios 5 a 18, encontrar la integral.

5. $\int \cos^5 x \operatorname{sen} x\, dx$
6. $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^4 x\, dx$
7. $\int \operatorname{sen}^7 2x \cos 2x\, dx$
8. $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$
9. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$
10. $\int \cos^3 \frac{x}{3}\, dx$
11. $\int \operatorname{sen}^3 2\theta \sqrt{\cos 2\theta}\, d$
12. $\int \frac{\cos^5 t}{\sqrt{\operatorname{sen} t}}\, dt$
13. $\int \cos^2 3x\, dx$
14. $\int \operatorname{sen}^2 5x\, dx$
15. $\int \cos^4 3\alpha\, d\alpha$
16. $\int \operatorname{sen}^4 6\theta\, d\theta$
17. $\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx$
18. $\int x^2 \operatorname{sen}^2\ x\, dx$

En los ejercicios 19 a 24, usar las fórmulas de Wallis para evaluar la integral.

19. $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x\, dx$
20. $\int_0^{\pi/2} \cos^9 x\, dx$
21. $\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x\, dx$
22. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\, dx$
23. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\, dx$
24. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^8 x\, dx$

En los ejercicios 25 a 42, encontrar la integral conteniendo secante y tangente.

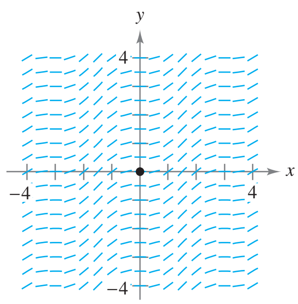
25. $\int \sec 7x\, dx$
26. $\int \sec^2(2x - 1)\, dx$
27. $\int \sec^4 5x\, dx$
28. $\int \sec^6 3x\, dx$
29. $\int \sec^3 \pi x\, dx$
30. $\int \tan^5 x\, dx$
31. $\int \tan^5 \frac{x}{2}\, dx$
32. $\int \tan^3 \frac{\pi x}{2} \sec^2 \frac{\pi x}{2}\, dx$
33. $\int \sec^2 x \tan x\, dx$
34. $\int \tan^3 2t \sec^3 2t\, dt$
35. $\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx$
36. $\int \tan^5 2x \sec^4 2x\, dx$
37. $\int \sec^6 4x \tan 4x\, dx$
38. $\int \sec^2 \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2}\, dx$
39. $\int \sec^5 x \tan^3 x\, dx$
40. $\int \tan^3 3x\, dx$
41. $\int \frac{\tan^2 x}{\sec x}\, dx$
42. $\int \frac{\tan^2 x}{\sec^5 x}\, dx$

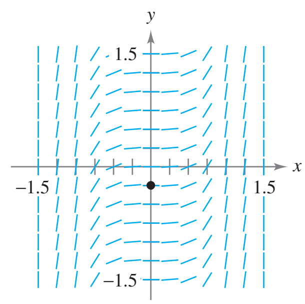
En los ejercicios 43 a 46, resolver la ecuación diferencial.

43. $\frac{dr}{d\theta} = \operatorname{sen}^4 \pi\theta$
44. $\frac{ds}{d\alpha} = \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$
45. $y' = \tan^3 3x \sec 3x$
46. $y' = \sqrt{\tan x} \sec^4 x$

Campos de pendientes **En los ejercicios 47 y 48 se da una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pase a través del punto dado. *b*) Usar la integración para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la solución. Comparar el resultado con los dibujos del inciso *a*).**

47. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^2 x,\ (0, 0)$
48. $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \tan^2 x,\ \left(0, -\frac{1}{4}\right)$





CAS ***Campos de pendientes*** **En los ejercicios 49 y 50, usar un sistema algebraico por computadora para hacer la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y presentar la solución a través de la condición inicial especificada.**

49. $\frac{dy}{dx} = \frac{3\operatorname{sen} x}{y},\ y(0) = 2$
50. $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{y} \tan^2 x,\ y(0) = 3$

En los ejercicios 51 a 56, encontrar la integral.

51. $\int \cos 2x \cos 6x\, dx$
52. $\int \cos 4\theta \cos(-3\theta)\, d\theta$
53. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 4x\, dx$
54. $\int \operatorname{sen}(-4x) \cos 3x\, dx$
55. $\int \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 3\theta\, d\theta$
56. $\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 4x\, dx$

En los ejercicios 57 a 66, encontrar la integral. Usar un sistema algebraico por computadora para confirmar el resultado.

57. $\int \cot^3 2x\,dx$

58. $\int \tan^4 \frac{x}{2} \sec^4 \frac{x}{2}\,dx$

59. $\int \csc^4 2x\,dx$

60. $\int \cot^3 x \csc^3 x\,dx$

61. $\int \frac{\cot^2 t}{\csc t}\,dt$

62. $\int \frac{\cot^3 t}{\csc t}\,dt$

63. $\int \frac{1}{\sec x \tan x}\,dx$

64. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos x}\,dx$

65. $\int (\tan^4 t - \sec^4 t)\,dt$

66. $\int \frac{1 - \sec t}{\cos t - 1}\,dt$

En los ejercicios 67 a 74, evaluar la integral definida.

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx$

68. $\int_0^{\pi/3} \tan^2 x\,dx$

69. $\int_0^{\pi/4} 6 \tan^3 x\,dx$

70. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t \sqrt{\tan t}\,dt$

71. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \operatorname{sen} t}\,dt$

72. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 5x \cos 3x\,dx$

73. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \cos^3 x\,dx$

74. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 x + 1)\,dx$

CAS **En los ejercicios 75 a 80, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la integral. Hacer la gráfica de la antiderivada para dos valores diferentes de la constante de integración.**

75. $\int \cos^4 \frac{x}{2}\,dx$

76. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$

77. $\int \sec^5 \pi x\,dx$

78. $\int \tan^3(1 - x)\,dx$

79. $\int \sec^5 \pi x \tan \pi x\,dx$

80. $\int \sec^4(1 - x) \tan(1 - x)\,dx$

CAS **En los ejercicios 81 a 84, usar un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral definida.**

81. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} 3\theta \operatorname{sen} 4\theta\,d\theta$

82. $\int_0^{\pi/2} (1 - \cos\theta)^2\,d\theta$

83. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,dx$

84. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{12} x\,dx$

Desarrollo de conceptos

85. Describir cómo integrar $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ para cada condición.

a) m es positivo e impar. *b*) n es positivo e impar.
c) m y n son positivos y pares.

86. Describir cómo integrar $\int \sec^m x \tan^n x\,dx$ para cada condición.

a) m es positivo y par. *b*) n es positivo e impar.
c) n es positivo y par y no hay factor secante.
d) m es positivo e impar y no hay factor tangente.

87. Evaluar $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx$ utilizando el método indicado. Explicar cómo difieren sus respuestas en cada método.

a) Sustitución donde $u = \operatorname{sen} x$
b) Sustitución donde $u = \cos x$
c) Integración por partes
d) Utilizando la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

Para discusión

88. Para cada par de integrales, determinar cuál es más difícil evaluar. Explicar el razonamiento.

a) $\int \operatorname{sen}^{372} x \cos x\,dx$, $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\,dx$
b) $\int \tan^{400} x \sec^2 x\,dx$, $\int \tan^{400} x \sec x\,dx$

En los ejercicios 89 y 90, *a*) encontrar la integral indefinida de dos maneras diferentes, *b*) usar una herramienta de graficación para representar la gráfica de la antiderivada (sin la constante de integración) obtenida por cada método para demostrar que los resultados sólo difieren por una constante, y *c*) verificar analíticamente que los resultados sólo difieren por una constante.

89. $\int \sec^4 3x \tan^3 3x\,dx$

90. $\int \sec^2 x \tan x\,dx$

Área **En los ejercicios 91 a 94, encontrar el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.**

91. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{sen}^3 x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

92. $y = \operatorname{sen}^2 \pi x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

93. $y = \cos^2 x, \quad y = \operatorname{sen}^2 x, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$

94. $y = \cos^2 x, \quad y = \operatorname{sen} x \cos x, \quad x = -\pi/2, \quad x = \pi/4$

Volumen **En los ejercicios 95 y 96, encontrar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de las ecuaciones alrededor del eje *x*.**

95. $y = \tan x, \quad y = 0, \quad x = -\pi/4 \quad x = \pi/4$

96. $y = \cos \frac{x}{2}, \quad y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

Volumen y centroide **En los ejercicios 97 y 98, para la región acotada por las gráficas de las ecuaciones, encontrar *a*) el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje *x*, y *b*) el centroide de la región.**

97. $y = \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi$

98. $y = \cos x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi/2$

En los ejercicios 99 a 102, usar la integración por partes para verificar la fórmula de la reducción.

99. $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

100. $\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\,dx$

101. $\int \cos^m x \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\cos^{m+1} x \operatorname{sen}^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

102. $\displaystyle\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$

En los ejercicios 103 a 106, usar los resultados de los ejercicios 99 a 102 para encontrar la integral.

103. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$

104. $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$

105. $\displaystyle\int \sec^4 \frac{2\pi x}{5}\,dx$

106. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\,dx$

107. ***Modelo matemático*** La tabla muestra las temperaturas máximas (alto) y mínimas (bajo) medias (en grados Fahrenheit) en Erie, Pennsylvania, durante cada mes del año. (*Fuente: NOAA*)

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Máx	33.5	35.4	44.7	55.6	67.4	76.2
Mín	20.3	20.9	28.2	37.9	48.7	58.5

Mes	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Máx	80.4	79.0	72.0	61.0	49.3	38.6
Mín	63.7	62.7	55.9	45.5	36.4	26.8

Las temperaturas máximas y mínimas admiten el modelo $f(t) = a_0 + a_1 \cos(\pi t/6) + b_1 \operatorname{sen}(\pi t/6)$ donde $t = 0$ corresponden a enero y a_0, a_1 y b_1 son como sigue.

$$a_0 = \frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)\,dt \qquad a_1 = \frac{1}{6}\int_0^{12} f(t)\cos\frac{\pi t}{6}\,dt$$

$$b_1 = \frac{1}{6}\int_0^{12} f(t)\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}\,dt$$

a) Aproximar el modelo $H(t)$ para las temperaturas máximas. (*Sugerencia:* Usar la regla de Simpson para aproximar las integrales y usar los datos de enero dos veces.)

b) Repetir el inciso *a*) para un modelo $L(t)$ para los datos de temperatura mínimos.

c) Usar una herramienta de graficación para comparar cada modelo con los datos reales. ¿Durante qué parte del año la diferencia es más grande entre las temperaturas máximas y mínimas?

108. ***Fórmulas de Wallis*** Usar el resultado del ejercicio 100 para demostrar las versiones siguientes de las fórmulas de Wallis.

a) Si n es impar ($n \geq 3$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

b) Si n es par ($n \geq 2$), entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

109. El **producto escalar** de dos funciones f y g sobre $[a, b]$ está dado por $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$. Se dice que dos funciones distintas f y g son **ortogonales** si $\langle f, g\rangle = 0$. Mostrar que el conjunto siguiente de funciones es ortogonal en $[-\pi, \pi]$.

$\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x, \ldots, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots\}$

110. ***Serie de Fourier*** La suma siguiente es una *serie de Fourier finita*.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \operatorname{sen} ix$$
$$= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + a_3 \operatorname{sen} 3x + \cdots + a_N \operatorname{sen} N$$

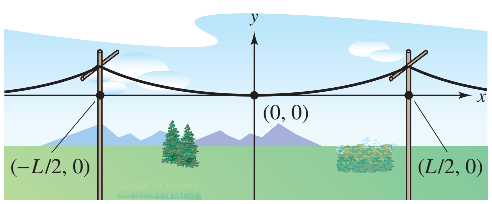
a) Usar el ejercicio 109 para demostrar que el coeficiente de a_n está dado por $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$

b) Sea $f(x) = x$. Encontrar a_1, a_2 y a_3.

PROYECTO DE TRABAJO

Líneas de potencia

Las líneas de potencia son construidas atando cables entre los soportes fijos y ajustando la tensión en cada tramo. El cable cuelga entre los apoyos en la forma de una catenaria, como se muestra en la figura.



Sea T la tensión (en libras) en un tramo de cable, u la densidad (en libras por pie), sea $g \approx 32.2$ la aceleración debida a la gravedad (en pies/s^2), y sea L la distancia (en pies) entre dos soportes consecutivos. Entonces la ecuación de la catenaria es $y = \dfrac{T}{ug}\left(\cosh\dfrac{ugx}{T} - 1\right)$, donde x y y son medidos en pies.

a) Encontrar la longitud de la porción del cable entre dos soportes contiguos.

b) Para medir la tensión en un tramo de la línea de potencia, los especialistas usan el *método de la onda de retorno*. Se golpea el cable en un soporte, creando una onda en la línea, y es medido el tiempo t (en segundos) que tarda la onda en hacer un viaje redondo. La velocidad v (en pies por segundo) se da por $v = \sqrt{T/u}$. ¿Cuánto tiempo toma a la onda hacer un viaje redondo entre los soportes?

c) El pandeo s (en pulgadas) puede obtenerse evaluando y cuando $x = L/2$ en la ecuación para la catenaria (y multiplicando por 12). En la práctica, sin embargo, los especialistas de línea de potencia usan la "ecuación del instalador de líneas" dada por $s \approx 12.075t^2$. Usar el hecho que $[\cosh(ugL/2T) + 1] \approx 2$ para derivar esta ecuación.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender más sobre la matemática de líneas de potencia, ver el artículo "Constructing Power Lines", de Thomas O'Neil en *The UMAP Journal*.

8.4 Sustituciones trigonométricas

- Usar sustituciones trigonométricas para resolver una integral.
- Usar las integrales para formular y resolver las aplicaciones de la vida real.

EXPLORACIÓN

Integración de una función radical Hasta este punto del texto, no se ha evaluado la siguiente integral

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Por argumentos geométricos se puede encontrar el valor exacto de esta integral. ¿Cuál es? Utilizando la integración simbólica con la regla de Simpson o de los trapecios, no se tiene la seguridad de la precisión de la aproximación. ¿Por qué?

Intentar calcular el valor exacto mediante la sustitución

$$x = \operatorname{sen} \theta \text{ y } dx = \cos \theta\, d\theta$$

¿Coincide la respuesta con el valor obtenido usando el razonamiento geométrico?

Sustituciones trigonométricas

Conociendo cómo evaluar las integrales que contienen potencias de funciones trigonométricas, usar **sustituciones trigonométricas** para evaluar integrales que contienen radicales

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \qquad \sqrt{a^2 + u^2} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{u^2 - a^2}.$$

El objetivo de las sustituciones trigonométricas es eliminar al radical en el integrando. Hacer esto con las identidades pitagóricas.

$$\cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta, \quad \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta \quad \text{y} \quad \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1.$$

Por ejemplo, si $a > 0$, sea $u = a \operatorname{sen} \theta$, donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \\ &= a \cos \theta. \end{aligned}$$

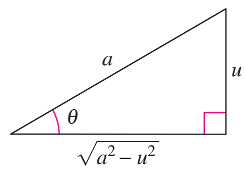
Notar que $\cos \theta \geq 0$, porque $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS ($a > 0$)

1. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$, sea

   $u = a \operatorname{sen} \theta.$

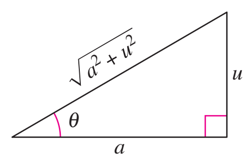
   Entonces $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$, donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.



2. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 + u^2}$, sea

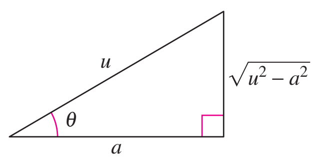
   $u = a \tan \theta.$

   Entonces $\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.



3. Para integrales que contienen $\sqrt{u^2 - a^2}$, sea

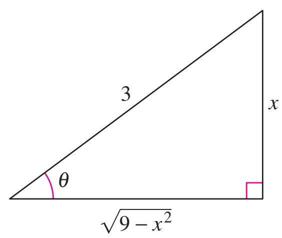
   $u = a \sec \theta.$



   Entonces

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \begin{cases} a \tan \theta, \text{ si } u > a, \text{ donde } 0 \leq \theta < \pi/2 \\ -a \tan \theta \text{ si } u < -a, \text{ donde } \pi/2 < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

NOTA Las restricciones sobre θ aseguran que la función que define la sustitución es inyectiva. De hecho, éstos son los mismos intervalos sobre los que se definen el arcseno, arctangente y arcsecante.



$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

Figura 8.6

EJEMPLO 1 Sustitución trigonométrica: $u = a \operatorname{sen}\theta$

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$.

Solución Primero, notar que ninguna de las reglas básicas de la integración aplica. Para usar la sustitución trigonométrica, observar que $\sqrt{9-x^2}$ es de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$. Así que se puede utilizar la sustitución

$$x = a \operatorname{sen}\theta = 3 \operatorname{sen}\theta.$$

Usando la derivación y el triángulo mostrados en la figura 8.6, se obtiene

$$dx = 3\cos\theta\,d\theta, \qquad \sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta \qquad \text{y} \qquad x^2 = 9\operatorname{sen}^2\theta.$$

Así, la sustitución trigonométrica lleva a

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3\cos\theta\,d\theta}{(9\operatorname{sen}^2\theta)(3\cos\theta)} && \text{Sustituir.}\\
&= \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} && \text{Simplificar.}\\
&= \frac{1}{9}\int \csc^2\theta\,d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= -\frac{1}{9}\cot\theta + C && \text{Aplicar la regla del cosecante.}\\
&= -\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right) + C && \text{Sustituir para } \cot\theta.\\
&= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C.
\end{aligned}$$

Notar que el triángulo en la figura 8.6 puede usarse para convertir los θ anteriores a x como sigue.

$$\begin{aligned}
\cot\theta &= \frac{\text{cateto ady.}}{\text{cateto op.}}\\
&= \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}
\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Usar un sistema algebraico por computadora para encontrar cada integral definida.

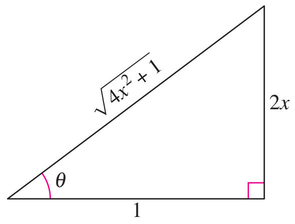
$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} \qquad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{9-x^2}}$$

Entonces usar la sustitución trigonométrica para reproducir los resultados obtenidos con el sistema algebraico por computadora.

En un capítulo anterior se vio cómo pueden usarse las funciones hiperbólicas inversas para evaluar las integrales

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}, \qquad \int \frac{du}{a^2-u^2} \qquad \text{y} \qquad \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}}.$$

También se pueden evaluar estas integrales por cambios de variable trigonométricos. Esto se muestra en el siguiente ejemplo.



$\tan\theta = 2x$, $\sec\theta = \sqrt{4x^2+1}$

Figura 8.7

EJEMPLO 2 Sustitución trigonométrica: $u = a\tan\theta$

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$.

Solución Sea $u = 2x$, $a = 1$ y $2x = \tan\theta$, como se muestra en la figura 8.7. Entonces,

$$dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4x^2+1} = \sec\theta.$$

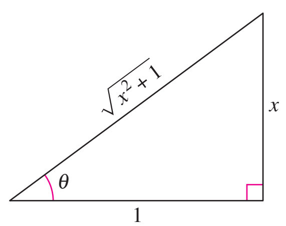
La sustitución trigonométrica produce

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec\theta} && \text{Sustituir.}\\
&= \frac{1}{2}\int \sec\theta\,d\theta && \text{Simplificar.}\\
&= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C && \text{Aplicar la regla de la secante.}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+1} + 2x\right| + C. && \text{Deshacer el cambio.}
\end{aligned}$$

Intentar verificar este resultado con un sistema algebraico por computadora. El resultado, ¿se da en esta forma o en la forma de una función hiperbólica inversa?

Extender el uso de la sustitución trigonométrica para cubrir las integrales conteniendo expresiones como $(a^2 - u^2)^{n/2}$ escribiendo la expresión como

$$(a^2 - u^2)^{n/2} = \left(\sqrt{a^2 - u^2}\right)^n.$$



$\tan\theta = x$, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Figura 8.8

EJEMPLO 3 Sustitución trigonométrica: potencias racionales

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

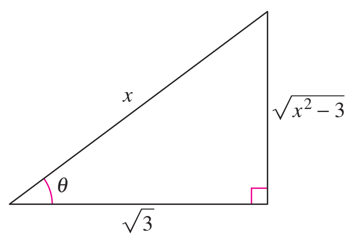
Solución Empezar escribiendo $(x^2+1)^{3/2}$ como $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3$. Entonces, sea $a = 1$ y $u = x\tan\theta$, como se muestra en la figura 8.8. Usando

$$dx = \sec^2\theta\,d\theta \qquad \text{y} \qquad \sqrt{x^2+1} = \sec\theta$$

aplicar la sustitución trigonométrica como sigue

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} &= \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} && \text{Reescribir el denominador.}\\
&= \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^3\theta} && \text{Sustituir.}\\
&= \int \frac{d\theta}{\sec\theta} && \text{Simplificar.}\\
&= \int \cos\theta\,d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \operatorname{sen}\theta + C && \text{Aplicar la regla del coseno.}\\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C && \text{Sustitución hacia atrás.}
\end{aligned}$$

Para las integrales definidas, a menudo es conveniente determinar los límites de la integración para θ, eso evita volver a convertir a x. Repasar este procedimiento en la sección 4.5, ejemplos 8 y 9.



$\sec\theta = \dfrac{x}{\sqrt{3}}, \tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}}$

Figura 8.9

EJEMPLO 4 Transformación de los límites de integración

Evaluar $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx.$

Solución Debido a que $\sqrt{x^2-3}$ tiene la forma $\sqrt{u^2-a^2}$, considerar

$$u = x, \quad a = \sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad x = \sqrt{3}\sec\theta$$

como se muestra en la figura 8.9. Entonces,

$$dx = \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\,d\theta \qquad \text{y} \qquad \sqrt{x^2-3} = \sqrt{3}\tan\theta.$$

Para determinar los límites superiores e inferiores de la integración, usar la sustitución $x = \sqrt{3}\sec\theta$ como sigue

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = \sqrt{3}$, $\sec\theta = 1$ y $\theta = 0$.	Cuando $x = 2$, $\sec\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Así, se tiene

Límites de integración para x

Límites de integración para θ

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{(\sqrt{3}\tan\theta)(\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta)\,d\theta}{\sqrt{3}\sec\theta} \\
&= \int_0^{\pi/6} \sqrt{3}\tan^2\theta\,d\theta \\
&= \sqrt{3}\int_0^{\pi/6} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta \\
&= \sqrt{3}\Big[\tan\theta - \theta\Big]_0^{\pi/6} \\
&= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \\
&\approx 0.0931.
\end{aligned}$$

En el ejemplo 4, intentar volver a convertir a la variable x y evaluar la antiderivada en los límites originales de integración. Obtener

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx = \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}} - \operatorname{arcsec}\frac{x}{\sqrt{3}}\Bigg]_{\sqrt{3}}^{2}.$$

Al calcular integrales definidas por cambios de variables trigonométricos, verificar que los valores de θ están en los intervalos discutidos al principio de esta sección. Es decir, si se hubiera pedido evaluar la integral definida en el ejemplo 4

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx$$

entonces usando $u = x$ y $a = \sqrt{3}$ en el intervalo $[-2, -\sqrt{3}]$ implicaría que $u < -a$. Así, al determinar los límites superiores e inferiores de integración, se tendría que escoger θ tal que $\pi/2 < \theta \leq \pi$. En este caso la integral sería resuelta como sigue.

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx &= \int_{5\pi/6}^{\pi} \frac{\left(-\sqrt{3}\tan\theta\right)\left(\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\right)d\theta}{\sqrt{3}\sec\theta} \\
&= \int_{5\pi/6}^{\pi} -\sqrt{3}\tan^2\theta\,d\theta \\
&= -\sqrt{3}\int_{5\pi/6}^{\pi} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta \\
&= -\sqrt{3}\Big[\tan\theta - \theta\Big]_{5\pi/6}^{\pi} \\
&= -\sqrt{3}\left[(0-\pi) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5\pi}{6}\right)\right] \\
&= -1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \\
&\approx -0.0931
\end{aligned}$$

Las sustituciones trigonométricas pueden usarse completando el cuadrado. Por ejemplo, evaluar la integral siguiente.

$$\int \sqrt{x^2 - 2x}\,dx$$

Para empezar, completar el cuadrado y escribir la integral como

$$\int \sqrt{(x-1)^2 - 1^2}\,dx.$$

Las sustituciones trigonométricas pueden usarse para evaluar las tres integrales listadas en el teorema siguiente. Estas integrales se encontrarán varias veces en el resto del texto. Cuando esto pase, simplemente se citará este teorema. (En el ejercicio 85 verificar las fórmulas contenidas en el teorema.)

TEOREMA 8.2 FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN ESPECIALES ($a > 0$)

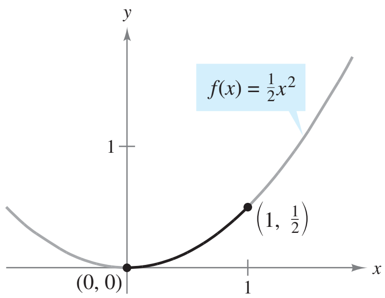
1. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + u\sqrt{a^2-u^2}\right) + C$

2. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2-a^2} - a^2\ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right|\right) + C, \quad u > a$

3. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 + a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2+a^2} + a^2\ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right|\right) + C$

Aplicaciones

EJEMPLO 5 Cálculo de la longitud de arco



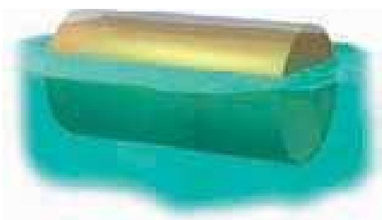
La longitud de arco de la curva para (0, 0) a $(1, \frac{1}{2})$
Figura 8.10

Encontrar la longitud de arco de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ entre $x = 0$ a $x = 1$ (ver figura 8.10).

Solución Referirse a la fórmula de longitud de arco en la sección 7.4.

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx && \text{Fórmula para su longitud de arco.}\\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx && f'(x) = x.\\
&= \int_0^{\pi/4} \sec^3\theta\,d\theta && \text{Sea } a = 1 \text{ y } x = \tan\theta.\\
&= \frac{1}{2}\Big[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big]_0^{\pi/4} && \text{Ejemplo 5, sección 8.2.}\\
&= \frac{1}{2}\big[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)\big] \approx 1.148
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 6 Comparación de las fuerzas de dos fluidos



El barril no está completamente lleno de petróleo; la parte superior del barril está vacía 0.2 pies
Figura 8.11

Un barril de petróleo sellado (que pesa 48 libras por pie^3) está flotando en el agua de mar (que pesa 64 libras por pie^3), como se muestra en las figuras 8.11 y 8.12. (El barril no está completamente lleno de petróleo. Con el barril recargado de lado, la parte superior, 0.2 pies del barril, está vacía.) Comparar las fuerzas del fluido del interior y del exterior contra un extremo del barril.

Solución En la figura 8.12, localizar el sistema de coordenadas con el origen al centro del círculo dado por $x^2 + y^2 = 1$. Para encontrar la fuerza del fluido contra un extremo *interior* del barril, integrar entre -1 y 0.8 (usando un peso de $w = 48$).

$$
\begin{aligned}
F &= w\int_c^d h(y)L(y)\,dy && \text{Ecuación general (ver sección 7.7).}\\
F_{\text{interior}} &= 48\int_{-1}^{0.8} (0.8 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\,dy\\
&= 76.8\int_{-1}^{0.8} \sqrt{1 - y^2}\,dy - 96\int_{-1}^{0.8} y\sqrt{1 - y^2}\,dy
\end{aligned}
$$

Para encontrar la fuerza *exterior* del fluido, integrar entre -1 y 0.4 (usando un peso de $w = 64$).

$$
\begin{aligned}
F_{\text{exterior}} &= 64\int_{-1}^{0.4} (0.4 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\,dy\\
&= 51.2\int_{-1}^{0.4} \sqrt{1 - y^2}\,dy - 128\int_{-1}^{0.4} y\sqrt{1 - y^2}\,dy
\end{aligned}
$$

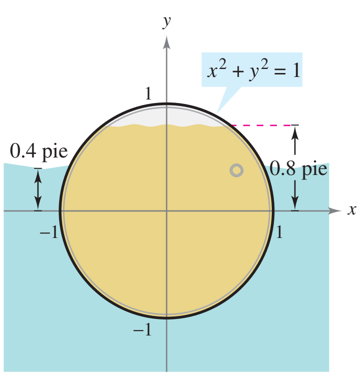


Figura 8.12

Los detalles de integración se dejan para completarse en el ejercicio 84. Intuitivamente, ¿se diría que la fuerza del petróleo (interior) o la fuerza del agua de mar (exterior) es mayor? Evaluando estas dos integrales, determinar que

$$F_{\text{interior}} \approx 121.3 \text{ libras} \qquad \text{y} \qquad F_{\text{exterior}} \approx 93.0 \text{ libras}$$

8.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, indicar la sustitución trigonométrica que se usaría para encontrar la integral. No efectuar la integración.

1. $\int (9 + x^2)^{-2}\, dx$
2. $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$
3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$
4. $\int x^2(x^2 - 25)^{3/2}\, dx$

En los ejercicios 5 a 8, encontrar la integral indefinida usando la sustitución $x = 4$ sen θ.

5. $\int \frac{1}{(16 - x^2)^{3/2}}\, dx$
6. $\int \frac{4}{x^2\sqrt{16 - x^2}}\, dx$
7. $\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}\, dx$
8. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$

En los ejercicios 9 a 12, encontrar la integral indefinida usando la sustitución $x = 5 \sec \theta$.

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 25}}\, dx$
10. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}\, dx$
11. $\int x^3\sqrt{x^2 - 25}\, dx$
12. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 25}}\, dx$

En los ejercicios 13 a 16, encontrar la integral indefinida usando la sustitución $x = \tan \theta$.

13. $\int x\sqrt{1 + x^2}\, dx$
14. $\int \frac{9x^3}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$
15. $\int \frac{1}{(1 + x^2)^2}\, dx$
16. $\int \frac{x^2}{(1 + x^2)^2}\, dx$

En los ejercicios 17 a 20, usar las fórmulas de integración especial (teorema 8.2) para encontrar la integral.

17. $\int \sqrt{9 + 16x^2}\, dx$
18. $\int \sqrt{4 + x^2}\, dx$
19. $\int \sqrt{25 - 4x^2}\, dx$
20. $\int \sqrt{5x^2 - 1}\, dx$

En los ejercicios 21 a 42, encontrar la integral.

21. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 36}}\, dx$
22. $\int \frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\, dx$
23. $\int \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$
24. $\int \frac{1}{\sqrt{49 - x^2}}\, dx$
25. $\int \sqrt{16 - 4x^2}\, dx$
26. $\int x\sqrt{16 - 4x^2}\, dx$
27. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$
28. $\int \frac{t}{(4 - t^2)^{3/2}}\, dt$
29. $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^4}\, dx$
30. $\int \frac{\sqrt{4x^2 + 9}}{x^4}\, dx$
31. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 + 9}}\, dx$
32. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 + 16}}\, dx$
33. $\int \frac{-3x}{(x^2 + 3)^{3/2}}\, dx$
34. $\int \frac{1}{(x^2 + 5)^{3/2}}\, dx$
35. $\int e^{2x}\sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$
36. $\int (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}\, dx$
37. $\int e^x\sqrt{1 - e^{2x}}\, dx$
38. $\int \frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x}}\, dx$
39. $\int \frac{1}{4 + 4x^2 + x^4}\, dx$
40. $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}\, dx$
41. $\int \operatorname{arcsec} 2x\, dx, \quad x > \frac{1}{2}$
42. $\int x \operatorname{arcsen} x\, dx$

En los ejercicios 43 a 46, completar el cuadrado y encontrar la integral.

43. $\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}\, dx$
44. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}}\, dx$
45. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 6x + 12}}\, dx$
46. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}\, dx$

En los ejercicios 47 a 52, evaluar, usando la integral, *a*) los límites de integración dados y *b*) los límites obtenidos por la sustitución trigonométrica.

47. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{t^2}{(1 - t^2)^{3/2}}\, dt$
48. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1 - t^2)^{5/2}}\, dt$
49. $\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}}\, dx$
50. $\int_0^{3/5} \sqrt{9 - 25x^2}\, dx$
51. $\int_4^6 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}}\, dx$
52. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2}\, dx$

En los ejercicios 53 y 54, encontrar la solución simbólica de la ecuación diferencial.

53. $x\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 9}, \quad x \geq 3, \quad y(3) = 1$
54. $\sqrt{x^2 + 4}\,\frac{dy}{dx} = 1, \quad x \geq -2, \quad y(0) = 4$

CAS **En los ejercicios 55 a 58, utilizar un sistema algebraico de computadora para encontrar la integral. Verificar el resultado por derivación.**

55. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 10x + 9}}\, dx$
56. $\int (x^2 + 2x + 11)^{3/2}\, dx$
57. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$
58. $\int x^2\sqrt{x^2 - 4}\, dx$

Desarrollo de conceptos

59. Indicar la sustitución que haría si se usara sustitución trigonométrica y la integral con el radical dado, donde $a > 0$. Explicar el razonamiento.

a) $\sqrt{a^2 - u^2}$ *b*) $\sqrt{a^2 + u^2}$ *c*) $\sqrt{u^2 - a^2}$

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

En los ejercicios 60 y 61, indicar el método de integración que se usaría para realizar cada integración. Explicar por qué se eligió tal método. No efectuar la integración.

60. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

61. $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$

Para discusión

62. *a*) Evaluar la integral $\int \frac{x}{x^2+9}\,dx$ utilizando la sustitución de u. Evaluar después usando sustitución trigonométrica. Discutir los resultados.

b) Evaluar la integral $\int \frac{x^2}{x^2+9}\,dx$ de manera algebraica utilizando $x^2 = (x^2+9) - 9$. Después, evaluar mediante sustitución trigonométrica. Discutir los resultados.

c) Evaluar la integral $\int \frac{4}{4-x^2}\,dx$ utilizando sustitución trigonométrica. Evaluar después usando la identidad $\frac{4}{4-x^2} = \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}\right)$. Discutir los resultados.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 63 a 66, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.**

63. Si $x = \operatorname{sen}\theta$, entonces $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int d\theta.$

64. Si $x = \sec\theta$, entonces $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int \sec\theta\tan\theta\,d\theta.$

65. Si $x = \tan\theta$, entonces $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_0^{4\pi/3} \cos\theta\,d\theta.$

66. Si $x = \operatorname{sen}\theta$, entonces $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta.$

67. ***Área*** Encontrar el área interior de la elipse mostrada en la figura.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

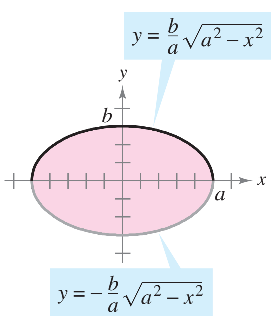


Figura para 67

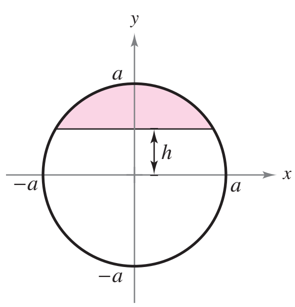


Figura para 68

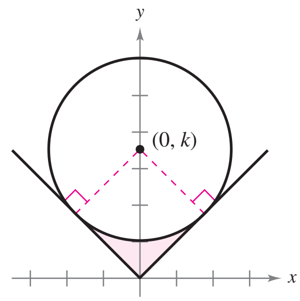
68. ***Área*** Encontrar el área de la región sombreada del círculo de radio a, si la cuerda está h unidades de $(0 < h < a)$ del centro del círculo (ver la figura).

69. ***Diseño mecánico*** La superficie de una parte de la máquina es la región entre las gráficas de $y = |x|$ y $x^2 + (y-k)^2 = 25$ (ver la figura).

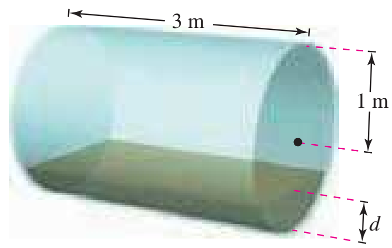
a) Encontrar k si el círculo es tangente a la gráfica de $y = |x|$.

b) Encontrar el área de la superficie de la parte de la máquina.

c) Encontrar el área de la superficie de la parte de la máquina como una función del radio r del círculo.



70. ***Volumen*** El eje de un tanque de almacenamiento cilíndrico horizontal (ver la figura). El radio y longitud del tanque son 1 y 3 metros, respectivamente.



a) Determinar el volumen del fluido en el tanque como una función de la profundidad d.

b) Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la función en el inciso *a*).

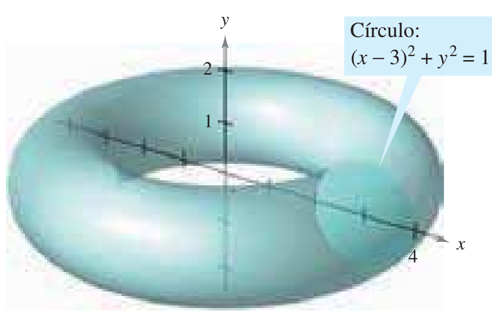
c) Diseñar una varilla de control para el tanque con las marcas de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.

d) El fluido está entrando en el tanque a una velocidad de $\frac{1}{4}$ m^3/min. Determinar la proporción de cambio de la profundidad del fluido como una función de su profundidad d.

e) Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la función en el inciso *d*). ¿Cuándo es mínima la proporción de cambio de la profundidad? ¿Esto está de acuerdo con la intuición? Explicar.

Volumen de un toro **En los ejercicios 71 y 72, encontrar el volumen del toro generado al girar la región acotada por la gráfica del círculo alrededor del eje *y*.**

71. $(x-3)^2 + y^2 = 1$ (ver la figura)



72. $(x-h)^2 + y^2 = r^2,\ h > r$

Longitud de arco **En los ejercicios 73 y 74, encontrar la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.**

73. $y = \ln x, \quad [1, 5]$ **74.** $y = \frac{1}{2}x^2, \quad [0, 4]$

75. ***Longitud de arco*** Mostrar que la longitud de un arco de la curva del seno es igual a la longitud de un arco de la curva del coseno.

76. ***Conjetura***

a) Encontrar las fórmulas para la distancia entre $(0, 0)$ y (a, a^2) a lo largo de la recta entre estos puntos y a lo largo de la parábola $y = x^2$.

b) Usar las fórmulas del inciso *a*) para encontrar las distancias para $a = 1$ y $a = 10$.

c) Hacer una conjetura sobre la diferencia entre las dos distancias cuando a crece.

Movimiento del proyectil **En los ejercicios 77 y 78, *a*) usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la trayectoria de un proyectil que sigue el camino dado por la gráfica de la ecuación, *b*) determinar el rango del proyectil y *c*) usar integración en una herramienta de graficación para determinar la distancia de las trayectorias del proyectil.**

77. $y = x - 0.005x^2$ **78.** $y = x - \dfrac{x^2}{72}$

Centroide **En los ejercicios 79 y 80, encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de las desigualdades.**

79. $y \le 3/\sqrt{x^2 + 9}, y \ge 0, x \ge -4, x \le 4$

80. $y \le \frac{1}{4}x^2, (x - 4)^2 + y^2 \le 16, y \ge 0$

81. ***Área de una superficie*** Encontrar el área de la superficie del sólido generada al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2, y = 0, x = 0$ y $x = \sqrt{2}$ alrededor del eje x.

82. ***Intensidad de campo*** La intensidad de campo H de un imán de longitud $2L$ sobre una partícula a r unidades del centro del imán es

$$H = \frac{2mL}{(r^2 + L^2)^{3/2}}$$

donde $\pm m$ son los polos del imán (ver la figura). Encontrar la intensidad de campo media cuando la partícula se mueve de 0 a R unidades del centro evaluando la integral

$$\frac{1}{R}\int_0^R \frac{2mL}{(r^2 + L^2)^{3/2}}\,dr.$$

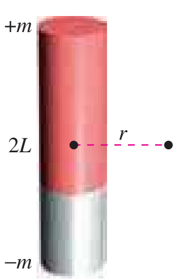


Figura para 82

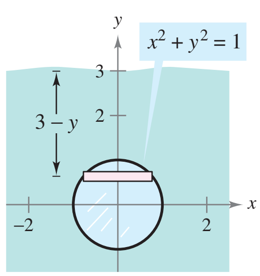


Figura para 83

83. ***Fuerza de un fluido*** Encontrar la fuerza de un fluido sobre una ventana vertical de observación circular de 1 pie de radio dentro de un tanque lleno de agua de un centro piscícola cuando el centro de la ventana es *a*) 3 pies y *b*) d pies ($d > 1$) debajo de la superficie de agua (ver la figura). Usar la sustitución trigonométrica para evaluar la integral. (Recordar que en la sección 7.7, en un problema similar, se evaluó una integral por una fórmula geométrica y la otra observando que el integrando era impar.)

84. ***Fuerza de un fluido*** Evaluar las siguientes dos integrales que proporcionan las fuerzas del fluido en el ejemplo 6.

a) $F_{\text{interior}} = 48\int_{-1}^{0.8} (0.8 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\,dy$

b) $F_{\text{exterior}} = 64\int_{-1}^{0.4} (0.4 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\,dy$

85. Usar la sustitución trigonométrica para verificar las fórmulas de la integración dadas en el teorema 8.2.

86. ***Longitud de arco*** Mostrar que la longitud de arco de la gráfica $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ es igual a la circunferencia de la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$ (ver la figura).

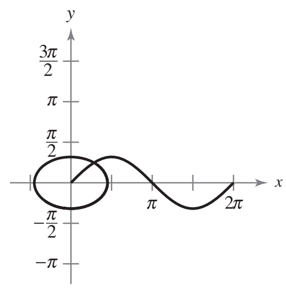


Figura para 86

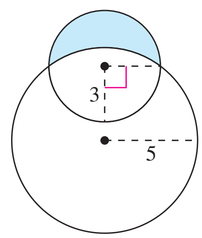
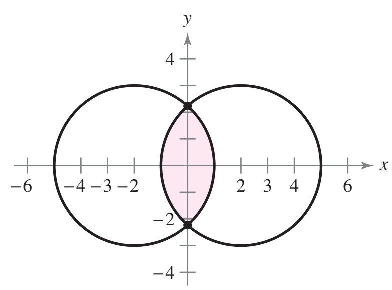


Figura para 87

87. ***Área de un lune*** La región creciente acotada por dos círculos forman un *lune* (ver la figura). Encontrar el área del lune dado que el radio del círculo más pequeño es 3 y el radio del círculo más grande es 5.

88. ***Área*** Dos círculos de radio 3, con centros en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ se intersecan como se muestra en la figura. Encontrar el área de la región sombreada.



Preparación del examen Putnam

89. Evaluar

$$\int_0^1 \frac{\ln(x + 1)}{x^2 + 1}\,dx.$$

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.

8.5 Fracciones simples o parciales

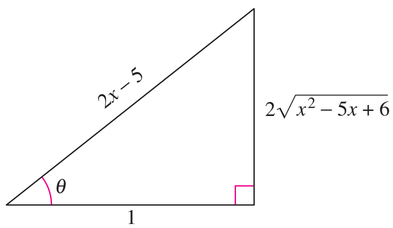
- **Entender el concepto de una descomposición en fracciones simples o parciales.**
- **Usar la descomposición de fracciones simples con los factores lineales para integrar las funciones racionales.**
- **Usar la descomposición de fracciones simples con los factores cuadráticos para integrar las funciones racionales.**

Fracciones simples o parciales

En esta sección se examina un procedimiento para descomponer una función racional en funciones racionales más simples para poder aplicar las fórmulas básicas de la integración. Este procedimiento se llama **método de las fracciones simples o parciales**. Para ver el beneficio del método de las fracciones simples, considerar la integral

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx.$$

Para evaluar esta integral *sin* las fracciones parciales, completar el cuadrado y hacer un cambio de variable trigonométrica (ver la figura 8.13) para obtener



$\sec\theta = 2x - 5$
Figura 8.13

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx &= \int \frac{dx}{(x - 5/2)^2 - (1/2)^2} && a = \tfrac{1}{2},\ x - \tfrac{5}{2} = \tfrac{1}{2}\sec\theta. \\
&= \int \frac{(1/2)\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{(1/4)\tan^2\theta} && dx = \tfrac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta. \\
&= 2\int \csc\theta\,d\theta \\
&= 2\ln|\csc\theta - \cot\theta| + C \\
&= 2\ln\left|\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}} - \frac{1}{2\sqrt{x^2-5x+6}}\right| + C \\
&= 2\ln\left|\frac{x-3}{\sqrt{x^2-5x+6}}\right| + C \\
&= 2\ln\left|\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C \\
&= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C.
\end{aligned}$$

Ahora, suponer que se ha observado que

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$ Descomposición en fracciones parciales.

Entonces, evaluar la integral fácilmente, como sigue.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx \\
&= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C
\end{aligned}$$

Este método es preferible a los cambios de variable trigonométricas. Sin embargo, su uso depende de la habilidad para factorizar el denominador, $x^2 - 5x + 6$, y para encontrar las **fracciones parciales**

$$\frac{1}{x-3} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{x-2}.$$

En esta sección se estudiarán las técnicas para encontrar las descomposiciones de las fracciones parciales.

Mary Evans Picture Library

JOHN BERNOULLI (1667-1748)
El método de descomposición de las fracciones simples o parciales fue introducido por John Bernoulli, matemático suizo cuyas investigaciones fueron fundamentales en el desarrollo temprano del cálculo. John Bernoulli fue profesor en la Universidad de Basilea donde contó con ilustres discípulos, el más famoso fue Leonhard Euler.

AYUDA DE ESTUDIO En cursos previos se vio cómo combinar funciones tales como

$$\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x+3}=\frac{5}{(x-2)(x+3)}.$$

El método de las fracciones parciales muestra cómo invertir este proceso.

$$\frac{5}{(x-2)(x+3)}=\frac{?}{x-2}+\frac{?}{x+3}$$

Recordar del álgebra que cada polinomio con coeficientes reales puede factorizarse en factores lineales y cuadráticos irreducibles.* Por ejemplo, el polinomio

$$x^5+x^4-x-1$$

puede escribirse como

$$\begin{aligned}x^5+x^4-x-1&=x^4(x+1)-(x+1)\\&=(x^4-1)(x+1)\\&=(x^2+1)(x^2-1)(x+1)\\&=(x^2+1)(x+1)(x-1)(x+1)\\&=(x-1)(x+1)^2(x^2+1)\end{aligned}$$

donde $(x-1)$ es un factor lineal, $(x+1)^2$ es un factor lineal repetido y (x^2+1) es un factor cuadrático irreducible. Usando esta factorización, escribir la descomposición de la fracción parcial de la expresión racional

$$\frac{N(x)}{x^5+x^4-x-1}$$

donde $N(x)$ es un polinomio de grado menor que 5, como sigue.

$$\frac{N(x)}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

DESCOMPOSICIÓN DE $N(x)/D(x)$ EN FRACCIONES SIMPLES

1. **Dividir en caso impropio:** Si $N(x)/D(x)$ es una fracción impropia (es decir, si el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador), dividir el denominador en el numerador para obtener

$$\frac{N(x)}{D(x)}=(\text{a polinomio})+\frac{N_1(x)}{D(x)}$$

donde el grado de $N_1(x)$ es menor del grado de $D(x)$. Entonces aplicar los pasos 2, 3 y 4 a la expresión racional propia $N_1(x)/D(x)$.

2. **Factorizar el denominador:** Factorizar completamente el denominador en factores de los tipos

$$(px+q)^m \qquad \text{y} \qquad (ax^2+bx+c)^n$$

donde ax^2+bx+c es irreducible.

3. **Factores lineales:** Para cada factor lineal $(px+q)^m$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la suma siguiente de m fracciones.

$$\frac{A_1}{(px+q)}+\frac{A_2}{(px+q)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(px+q)^m}$$

4. **Factores cuadráticos:** Para cada factor cuadrático $(ax^2+bx+c)^n$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la suma siguiente de n fracciones.

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

---

* *Para una revisión de técnicas de factorización, ver* Precalculus, *7a. edición, por Larson y Hostetler o* Precalculus: A Graphing Approach, *5a. edición, por Larson, Hostetler y Edwards (Boston, Massachusetts: Houghton Mifflin, 2007 y 2008, respectivamente).*

Factores lineales

Las técnicas algebraicas para determinar las constantes en los numeradores de una descomposición en fracciones parciales con factores lineales se muestran en los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Escribir la descomposición de la fracción parcial para $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

Solución Porque $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, incluir una fracción parcial para cada factor y escribir

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}$$

donde A y B serán determinados. Multiplicando esta ecuación por el mínimo común denominador $(x - 3)(x - 2)$ da la **ecuación básica**

$$1 = A(x - 2) + B(x - 3). \qquad \text{Ecuación básica.}$$

Porque esta ecuación es cierta para todo x, se puede sustituir cualquier valor *conveniente* para x para obtener las ecuaciones en A y B. Los valores más convenientes son los que hacen los factores particulares igual a 0.

NOTA Notar que las sustituciones para x en el ejemplo 1 son escogidas por su conveniencia determinando los valores para A y B; $x = 2$ se elige para eliminar el término $A(x - 2)$, y $x = 3$ se elige para eliminar el término $B(x - 3)$. La meta es hacer las sustituciones *convenientes* siempre que sea posible.

Para resolver para A, sea $x = 3$ y obtener

$$\begin{aligned} 1 &= A(3 - 2) + B(3 - 3) && \text{Sea } x = 3 \text{ en la ecuación básica.}\\ 1 &= A(1) + B(0)\\ A &= 1. \end{aligned}$$

Para resolver para B, sea $x = 2$ y obtener

$$\begin{aligned} 1 &= A(2 - 2) + B(2 - 3) && \text{Sea } x = 2 \text{ en la ecuación básica.}\\ 1 &= A(0) + B(-1)\\ B &= -1. \end{aligned}$$

Así, la descomposición es

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2}$$

como se muestra al principio de esta sección.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender un método diferente para encontrar la descomposición de las fracciones parciales, llamado Método de Heavyside, ver el artículo "Calculus to Algebra Connections in Partial Fraction Decomposition", de Joseph Wiener y Will Watkins, en *The AMATYC Review*.

Asegurarse de que el método de fracciones parciales sólo es práctico para las integrales de funciones racionales cuyos denominadores factorizan "muy bien". Por ejemplo, si el denominador en el ejemplo 1 se cambiara a $x^2 - 5x + 5$, su factorización como

$$x^2 - 5x + 5 = \left[x + \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right]\left[x - \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right]$$

sería demasiado complicada como para usar con las fracciones simples parciales. En casos así, es preferible completar el cuadrado o recurrir a integración simbólica en un sistema algebraico por computadora para realizar la integración. Al hacer esto, se obtiene

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 5}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|2x - \sqrt{5} - 5\right| - \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|2x + \sqrt{5} - 5\right| + C.$$

EJEMPLO 2 Factores lineales repetidos

Encontrar $\displaystyle\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx.$

Solución Porque

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + x &= x(x^2 + 2x + 1) \\ &= x(x + 1)^2 \end{aligned}$$

incluir una fracción para *cada potencia* de x y $(x + 1)$ y escribir

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para un enfoque alternativo de usar las fracciones simples, ver el artículo "A Short-cut in Partial Fractions", por Xun-Chen y Huang, en *The College Mathematics Journal*.

Multiplicando por el mínimo común denominador $x(x + 1)^2$ da la *ecuación básica*

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx. \qquad \text{Ecuación básica.}$$

Para resolver para A, sea $x = 0$. Esto elimina los términos B y C y da

$$\begin{aligned} 6 &= A(1) + 0 + 0 \\ A &= 6. \end{aligned}$$

Para resolver para C, sea $x = -1$. Esto elimina los términos A y B y da

$$\begin{aligned} 5 - 20 + 6 &= 0 + 0 - C \\ C &= 9. \end{aligned}$$

Se han usado las opciones más convenientes para x, para encontrar el valor de B, usar cualquier *otro valor* de x junto con los valores calculados de A y C. Usando $x = 1$, $A = 6$ y $C = 9$ producen

$$\begin{aligned} 5 + 20 + 6 &= A(4) + B(2) + C \\ 31 &= 6(4) + 2B + 9 \\ -2 &= 2B \\ B &= -1. \end{aligned}$$

Así, sigue que

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x + 1} + \frac{9}{(x + 1)^2}\right) dx \\ &= 6 \ln|x| - \ln|x + 1| + 9\frac{(x + 1)^{-1}}{-1} + C \\ &= \ln\left|\frac{x^6}{x + 1}\right| - \frac{9}{x + 1} + C. \end{aligned}$$

Intentar verificar este resultado derivando. Incluir álgebra en la verficación, simplificando la derivada hasta que haya obtenido el integrando original.

TECNOLOGÍA Pueden usarse más sistemas algebraicos tales como *Maple*, *Mathematica* y *TI-89*, para descomponer una función racional en fracciones parciales. Por ejemplo, usando el *Maple*, se obtiene lo siguiente.

$$\text{convertir}\left(\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}, \text{fracsimp}, x\right)$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{(x + 1)^2} - \frac{1}{x + 1}$$

NOTA Es necesario hacer tantas sustituciones para x como coeficientes desconocidos (A, B, C, . . .) para ser determinados. Así, en el ejemplo 2, se hicieron tres sustituciones ($x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$) para resolver para A, B y C.

Factores cuadráticos

Al usar el método de fracciones simples con los factores *lineales*, una opción conveniente de x da un valor inmediatamente por uno de los coeficientes. Con los factores *cuadráticos*, un sistema de ecuaciones lineales tiene que ser resuelto, sin tener en cuenta la opción de x.

EJEMPLO 3 Factores cuadráticos y lineales distintos

Encontrar $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)}\,dx$.

Solución Porque

$$(x^2 - x)(x^2 + 4) = x(x - 1)(x^2 + 4)$$

debe incluir una fracción simple para cada factor y escribir

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $x(x - 1)(x^2 + 4)$ da la *ecuación básica*

$$2x^3 - 4x - 8 = A(x - 1)(x^2 + 4) + Bx(x^2 + 4) + (Cx + D)(x)(x - 1).$$

Para resolver para A, sea $x = 0$ y obtener

$$-8 = A(-1)(4) + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = A.$$

Para resolver para B, sea $x = 1$ y obtener

$$-10 = 0 + B(5) + 0 \quad \Rightarrow \quad -2 = B.$$

En este punto, C y D serán determinados todavía. Encontrar estas constantes restantes eligiendo otros dos valores para x y resolviendo el sistema resultante de ecuaciones lineales. Si $x = -1$, entonces, usando $A = 2$ y $B = -2$, escribir

$$\begin{aligned} -6 &= (2)(-2)(5) + (-2)(-1)(5) + (-C + D)(-1)(-2) \\ 2 &= -C + D. \end{aligned}$$

Si $x = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (2)(1)(8) + (-2)(2)(8) + (2C + D)(2)(1) \\ 8 &= 2C + D. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema lineal sustrayendo la primera ecuación de la segunda

$$\begin{aligned} -C + D &= 2 \\ 2C + D &= 8 \end{aligned}$$

da $C = 2$. Por consiguiente, $D = 4$, y sigue que

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x - 1)(x^2 + 4)}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x - 1} + \frac{2x}{x^2 + 4} + \frac{4}{x^2 + 4}\right) dx \\ &= 2\ln|x| - 2\ln|x - 1| + \ln(x^2 + 4) + 2\arctan\frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

En los ejemplos 1, 2 y 3 la solución de la ecuación básica empezó con la sustitución de valores de x haciendo que factores lineales fueran igual a 0. Este método funciona bien cuando la descomposición de fracciones parciales contiene los factores lineales. Sin embargo, si la descomposición contiene sólo factores cuadráticos, es a menudo más conveniente un procedimiento alternativo.

EJEMPLO 4 Factores cuadráticos repetidos

Encontrar $\displaystyle\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}\,dx.$

Solución Incluyen una fracción parcial para cada potencia de $(x^2 + 2)$ y escribir

$$\frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $(x^2 + 2)^2$ da la *ecuación básica*.

$$8x^3 + 13x = (Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D.$$

Desarrollando la ecuación básica y agrupando como términos semejantes produce

$$8x^3 + 13x = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D$$
$$8x^3 + 13x = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D).$$

Ahora, igualar los coeficientes de términos semejantes en ambos lados de la ecuación.

$8 = A$ $\qquad$ $0 = 2B + D$

$$8x^3 + 0x^2 + 13x + 0 = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D)$$

$0 = B$

$13 = 2A + C$

Usando los valores conocidos $A = 8$ y $B = 0$, escribir

$$13 = 2A + C = 2(8) + C \quad \Rightarrow \quad C = -3$$
$$0 = 2B + D = 2(0) + D \quad \Rightarrow \quad D = 0.$$

Por último, concluir que

$$\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}\,dx = \int \left(\frac{8x}{x^2 + 2} + \frac{-3x}{(x^2 + 2)^2}\right) dx$$
$$= 4\ln(x^2 + 2) + \frac{3}{2(x^2 + 2)} + C.$$

TECNOLOGÍA Usando un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral en el ejemplo 4 podría encontrarse que la forma de la antiderivada es diferente. Por ejemplo, cuando se usa un sistema algebraico por computadora para trabajar el ejemplo 4, se obtiene

$$\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2}\,dx = \ln(x^8 + 8x^6 + 24x^4 + 32x^2 + 16) + \frac{3}{2(x^2 + 2)} + C.$$

¿Este resultado es equivalente al obtenido en el ejemplo 4?

Cuando se integren expresiones racionales, tener presente que para las expresiones racionales impropias como

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2x^3 + x^2 - 7x + 7}{x^2 + x - 2}$$

primero dividir para obtener

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 2x - 1 + \frac{-2x + 5}{x^2 + x - 2}.$$

La expresión racional propia se descompone entonces en sus fracciones parciales por los métodos usuales. Aquí están algunas estrategias para resolver la ecuación básica que se obtiene en una descomposición de fracciones parciales.

Estrategias para resolver la ecuación básica

Factores lineales

1. Sustituir en la ecuación básica las raíces de los distintos factores lineales.
2. Para factores lineales repetidos, usar los coeficientes lineales determinados en la estrategia 1 para reescribir la ecuación básica. Entonces sustituir otros valores convenientes de x y resolver para los coeficientes restantes.

Factores cuadráticos

1. Desarrollar la ecuación básica.
2. Agrupar términos atendiendo a las potencias de x.
3. Igualar los coeficientes de cada potencia para obtener un sistema de ecuaciones lineales conteniendo A, B, C, etcétera.
4. Resolver el sistema de ecuaciones lineales.

Antes de concluir se debe recordar lo siguiente. Primero, no es necesario usar siempre la técnica de las fracciones parciales en las funciones racionales. Por ejemplo, la integral siguiente se evalúa más fácil por la regla log.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x - 4}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x - 4}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\ln\left|x^3 + 3x - 4\right| + C\end{aligned}$$

Segundo, si el integrando no está en la forma reducida, reduciéndolo se puede eliminar la necesidad de las fracciones parciales, como se muestra en la integral siguiente.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x - 4}\,dx &= \int \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 2)}\,dx \\ &= \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 2x + 2\right| + C\end{aligned}$$

Por último, pueden usarse las fracciones parciales con algunos cocientes que contienen funciones trascendentes. Por ejemplo, la sustitución $u = \operatorname{sen} x$ permite escribir

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 1)}\,dx = \int \frac{du}{u(u - 1)}. \qquad u = \operatorname{sen} x,\ du = \cos x\,dx.$$

8.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, escribir la forma de la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. No resolver sus coeficientes.

1. $\dfrac{4}{x^2 - 8x}$

2. $\dfrac{2x^2 + 1}{(x - 3)^3}$

3. $\dfrac{2x - 3}{x^3 + 10x}$

4. $\dfrac{x - 4}{x^2 + 6x + 5}$

5. $\dfrac{x - 9}{x^2 - 6x}$

6. $\dfrac{2x - 1}{x(x^2 + 1)^2}$

En los ejercicios 7 a 28, usar las fracciones parciales para encontrar la integral.

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 9}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2 - 1}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{5}{x^2 + 3x - 4}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{x^2 + 11x + 18}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{5 - x}{2x^2 + x - 1}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 12x - 12}{x^3 - 4x}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 12x + 12}{x^3 - 4x}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x^3 - x + 3}{x^2 + x - 2}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{x^2 - 4x}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{4x^2 + 2x - 1}{x^3 + x^2}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{3x - 4}{(x - 1)^2}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^3 + x^2 - x - 1}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{6x}{x^3 - 8}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4 - 2x^2 - 8}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x}{16x^4 - 1}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 4x + 7}{x^3 - x^2 + x + 3}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 5}{x^3 - x^2 + x + 3}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 3}{x^4 + 6x^2 + 9}\,dx$

En los ejercicios 29 a 32, evaluar la integral definida. Usar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

29. $\displaystyle\int_0^2 \frac{3}{4x^2 + 5x + 1}\,dx$

30. $\displaystyle\int_1^5 \frac{x - 1}{x^2(x + 1)}\,dx$

31. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x + 1}{x(x^2 + 1)}\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1}\,dx$

CAS **En los ejercicios 33 a 40, usar un sistema algebraico por computadora para determinar la primitiva que atraviesa el punto dado. Usar el sistema para hacer la gráfica de la antiderivada resultante.**

33. $\displaystyle\int \frac{5x}{x^2 - 10x + 25}\,dx,\ (6, 0)$

34. $\displaystyle\int \frac{6x^2 + 1}{x^2(x - 1)^3}\,dx,\quad (2, 1)$

35. $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 2}{(x^2 + 2)^2}\,dx,\quad (0, 1)$

36. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2 - 4)^2}\,dx,\quad (3, 4)$

37. $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x - 2}\,dx,\quad (3, 10)$

38. $\displaystyle\int \frac{x(2x - 9)}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\,dx,\quad (3, 2)$

39. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 25}\,dx,\quad (7, 2)$

40. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx,\quad (2, 6)$

En los ejercicios 41 a 50, usar una sustitución adecuada para encontrar la integral.

41. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(\cos x - 1)}\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{5 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 4}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5 \tan x + 6}\,dx$

46. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan x(\tan x + 1)}\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x - 1)(e^x + 4)}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)(e^x - 1)}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x - 4}\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\,dx$

En los ejercicios 51 a 54, usar el método de fracciones parciales para verificar la fórmula de la integración.

51. $\displaystyle\int \frac{1}{x(a + bx)}\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a + bx}\right| + C$

52. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$

53. $\displaystyle\int \frac{x}{(a + bx)^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a + bx} + \ln|a + bx|\right) + C$

54. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(a + bx)}\,dx = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{x}{a + bx}\right| + C$

CAS *Campos de pendientes* **En los ejercicios 55 y 56, usar un sistema algebraico por computadora para hacer la gráfica del campo de pendientes para la ecuación diferencial y hacer la gráfica de la solución a través de la condición inicial dada.**

55. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6}{4 - x^2}$

$y(0) = 3$

56. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{x^2 - 2x - 3}$

$y(0) = 5$

Desarrollo de conceptos

57. ¿Cuál es el primer paso cuando se integra $\displaystyle\int \frac{x^3}{x - 5}\,dx$? Explicar.

58. Describir la descomposición de la función racional propia $N(x)/D(x)$ *a)* si $D(x) = (px + q)^m$ y *b)* si $D(x) = (ax^2 + bx + c)^n$, donde $ax^2 + bx + c$ es irreducible. Explicar por qué se eligió ese método.

59. ***Área*** Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $y = 12/(x^2 + 5x + 6)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

60. ***Área*** Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $y = 15/(x^2 + 7x + 12)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2$.

61. ***Área*** Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $y = 7\,(16 - x^2)$ y $y = 1$.

Para discusión

62. Indicar el método que se utilizaría para evaluar cada integral. Explicar por qué se escogió tal método. No efectuar la integración.

a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x-8}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{7x+4}{x^2+2x-8}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+2x+5}\,dx$

63. ***Modelo matemático*** El costo previsto de una compañía C (en cientos de miles de dólares) para quitar $p\%$ de un químico de su agua residual se muestra en la tabla.

p	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
C	0	0.7	1.0	1.3	1.7	2.0	2.7	3.6	5.5	11.2

Un modelo para los datos está dado por

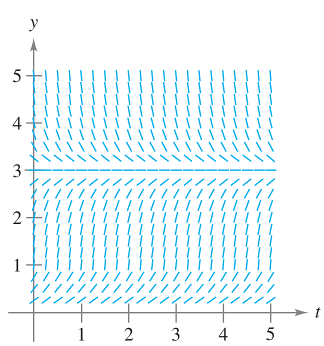
$$C = \frac{124p}{(10+p)(100-p)}, \quad 0 \le p < 100.$$

Usar el modelo para encontrar el costo medio para quitar entre 75 y 80% del químico.

64. ***Crecimiento logístico*** En el capítulo 6, la ecuación de crecimiento exponencial se derivó de la suposición de que la proporción de crecimiento era proporcional a la cantidad existente. En la práctica, a menudo existe una cota superior L por la cual el crecimiento no puede ocurrir. En la práctica, se debe asumir que la proporción de crecimiento no sólo es proporcional a la cantidad existente, sino también a la diferencia entre la cantidad existente y y la cota superior L. Que es, $dy/dt = ky(L - y)$. En la forma integral, escribir esta relación como

$$\int \frac{dy}{y(L-y)} = \int k\,dt.$$

a) Se muestra un campo de pendientes para $dy/dt = y(3 - y)$ de la ecuación diferencial. Dibujar una posible solución a la ecuación diferencial si $y(0) = 5$, y otro si $y(0) = \frac{1}{2}$.



b) Donde $y(0)$ es mayor que 3, ¿cuál es el signo de la pendiente de la solución?

c) Para $y > 0$, encontrar $\displaystyle\lim_{t\to\infty} y(t)$.

d) Evaluar las dos integrales dadas y resolver para y como una función de t donde y_0 es la cantidad inicial.

e) Usar el resultado del inciso *d)* para encontrar y hacer la gráfica de las soluciones en el apartado *a)*. Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de las soluciones y comparar los resultados con las soluciones en el inciso *a)*.

f) La gráfica de la función y es una **curva logística**. Mostrar que la proporción de crecimiento es máxima en el punto de inflexión y que esto ocurre cuando $y = L/2$.

65. ***Volumen y centroide*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = 2x/(x^2 + 1)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$. Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x. Encontrar el centroide de la región.

66. ***Volumen*** Considerar la región acotada por la gráfica de $y^2 = (2 - x)^2/(1 + x)^2$ en el intervalo $[0, 1]$. Encontrar el volumen del sólido generado al girar esta región alrededor del eje x.

67. ***Modelo de epidemias*** Un solo individuo infectado entra en una comunidad de n individuos susceptibles. Sea x el número de individuos recientemente infectados en el momento t. El modelo de epidemias común asume que la enfermedad se extiende a un ritmo proporcional al producto del número total infectado y al número no infectado todavía. Así, $dx/dt = k(x + 1)(n - x)$ y se obtiene

$$\int \frac{1}{(x+1)(n-x)}\,dx = \int k\,dt.$$

Resolver para x como una función de t.

68. ***Reacciones químicas*** En una reacción química, una unidad de compuesto Y y una unidad de compuesto Z se convierte en una sola unidad de X. El compuesto x es la cantidad de compuesto X formada, y la proporción de formación de X es proporcional al producto de las cantidades de compuestos no convertidos Y y Z. Entonces, $dx/dt = k(y_0 - x)(z_0 - x)$, donde el y_0 y z_0 son las cantidades iniciales de compuestos Y y Z. De esta ecuación se obtiene

$$\int \frac{1}{(y_0-x)(z_0-x)}\,dx = \int k\,dt.$$

a) Realizar las dos integraciones y resolver para x en términos de t.

b) Usar el resultado del inciso *a)* para encontrar x como $t \to \infty$ si 1) $y_0 < z_0$, 2) $y_0 > z_0$ y 3) $y_0 = z_0$.

69. Evaluar

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$$

de dos maneras diferentes, una de las cuales por descomposición en fracciones parciales.

Preparación del examen Putnam

70. Demostrar $\displaystyle\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx.$

8.6 Integración por tablas y otras técnicas de integración

- **Evaluar una integral indefinida usando una tabla de integrales.**
- **Evaluar una integral indefinida usando las fórmulas de reducción.**
- **Evaluar una integral indefinida que involucra funciones racionales de seno y coseno.**

Integración por tablas

Ya se han estudiado en este capítulo algunas técnicas de integración utilizables con ayuda de las reglas básicas de integración. Pero el saber *cómo* usar varias técnicas no es suficiente. Se necesita saber *cuándo* usarlas. La integración es, por encima de todo, un problema de reconocimiento. Es decir, reconocer qué regla o técnica aplicar para obtener una antiderivada. Con frecuencia, una ligera alteración del integrando requerirá una técnica de integración diferente (o produce una función cuya antiderivada no es una función elemental), como se muestra abajo.

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \qquad \text{Integración por partes.}$$

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C \qquad \text{Regla de las potencias.}$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} \, dx = \ln|\ln x| + C \qquad \text{Regla log.}$$

$$\int \frac{x}{\ln x} \, dx = ? \qquad \text{Función no elemental.}$$

TECNOLOGÍA Un sistema algebraico por computadora consiste, en parte, en una base de datos de fórmulas de integración. La diferencia principal entre usar un sistema algebraico y usar tablas de integrales es que con un sistema algebraico por computadora busca en la base de datos una región adecuada. Con las tablas de integración, uno debe hacer la búsqueda.

Muchas personas encuentran las tablas de integrales como un valioso suplemento a las técnicas de integración discutidas en este capítulo. Pueden encontrarse tablas de integrales comunes en el apéndice B. Pero la **integración por tablas** no es una "solución total" para todas las dificultades que pueden acompañar a la integración; usar tablas de integrales requiere razonamiento considerable y visión, y a menudo involucra sustitución.

Cada fórmula de la integración en el apéndice B puede desarrollarse usando una o más de las técnicas de este capítulo. Intentar verificar algunas de las fórmulas. Por ejemplo, la fórmula 4

$$\int \frac{u}{(a + bu)^2} \, du = \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{a + bu} + \ln|a + bu| \right) + C \qquad \text{Fórmula 4.}$$

puede verificarse usando el método de fracciones simples, y la fórmula 19

$$\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u} \, du = 2\sqrt{a + bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}} \qquad \text{Fórmula 19.}$$

puede verificarse integrando por partes. Notar que las integrales en el apéndice B son clasificadas de acuerdo con formas que contienen lo siguiente.

u^n	$(a + bu)$
$(a + bu + cu^2)$	$\sqrt{a + bu}$
$(a^2 \pm u^2)$	$\sqrt{u^2 \pm a^2}$
$\sqrt{a^2 - u^2}$	Funciones trigonométricas
Funciones trigonométricas inversas	Función exponencial
Funciones logarítmicas	

EXPLORACIÓN

Usar las tablas de integrales en el apéndice B y la sustitución

$$u = \sqrt{x-1}$$

para evaluar la integral en el ejemplo 1. Si se hace esto, se obtendrá

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int \frac{2\,du}{u^2+1}.$$

¿Hacerlo produce el mismo resultado que en el ejemplo 1?

EJEMPLO 1 Integración por tablas

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

Solución Puesto que la expresión dentro del radical es lineal, considerar las integrales que contienen $\sqrt{a+bu}$.

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C \qquad \text{Fórmula 17 } (a < 0).$$

Sea $a = -1$, $b = 1$ y $u = x$. Entonces $du = dx$ y puede escribirse

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = 2 \arctan \sqrt{x-1} + C.$$

EJEMPLO 2 Integración por tablas

Encontrar $\displaystyle\int x\sqrt{x^4-9}\,dx$.

Solución Porque el radical tiene la forma $\sqrt{u^2-a^2}$, debe considerarse la fórmula 26.

$$\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2-a^2} - a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right|\right) + C$$

Sea $u = x^2$ y $a = 3$. Entonces $du = 2x\,dx$, y se tiene

$$\int x\sqrt{x^4-9}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{(x^2)^2-3^2}\,(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^2\sqrt{x^4-9} - 9\ln\left|x^2 + \sqrt{x^4-9}\right|\right) + C.$$

EJEMPLO 3 Integración por tablas

Encontrar $\displaystyle\int \frac{x}{1+e^{-x^2}}\,dx$.

Solución De las formas que contienen e^u, considerar la fórmula siguiente.

$$\int \frac{du}{1+e^u} = u - \ln(1+e^u) + C \qquad \text{Fórmula 84.}$$

Sea $u = -x^2$. Entonces $du = -2x\,dx$, y se tiene

$$\int \frac{x}{1+e^{-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{1+e^{-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-x^2 - \ln(1+e^{-x^2})\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 + \ln(1+e^{-x^2})\right] + C.$$

TECNOLOGÍA El ejemplo 3 muestra la importancia de tener varias técnicas de solución a disposición. Esta integral no es difícil de resolver con una tabla, pero cuando se ha intentado resolverla con un programa de integración simbólica muy conocido, la herramienta de graficación ha sido incapaz de encontrar la antiderivada.

Fórmulas de reducción

Algunas integrales de las tablas tienen la forma $\int f(x)\,dx = g(x) + \int h(x)\,dx$. Tales fórmulas de integración se llaman **fórmulas de reducción** porque reducen una integral dada a la suma de una función y una integral más simple.

EJEMPLO 4 Aplicación de una fórmula de reducción

Encontrar $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$.

Solución Considerar las tres fórmulas siguientes.

$$\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C \qquad \text{Fórmula 52.}$$

$$\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du \qquad \text{Fórmula 54.}$$

$$\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du \qquad \text{Fórmula 55.}$$

Usando la fórmula 54, la 55 y entonces la 52 produce

$$\begin{aligned}\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx &= -x^3\cos x + 3\int x^2\cos x\,dx\\ &= -x^3\cos x + 3\left(x^2\operatorname{sen} x - 2\int x\operatorname{sen} x\,dx\right)\\ &= -x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen} x + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Aplicación de una fórmula de reducción

Encontrar $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3-5x}}{2x}\,dx$.

Solución Considerar las dos fórmulas siguientes

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C \qquad \text{Fórmula 17 } (a > 0).$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} \qquad \text{Fórmula 19.}$$

Usando la fórmula 19, con $a = 3$, $b = -5$ y $u = x$, se produce

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{3-5x}}{x}\,dx &= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{3-5x} + 3\int \frac{dx}{x\sqrt{3-5x}}\right)\\ &= \sqrt{3-5x} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{3-5x}}.\end{aligned}$$

Usando la fórmula 17, con $a = 3$, $b = -5$ y $u = x$, se produce

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{3-5x}}{2x}\,dx &= \sqrt{3-5x} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3-5x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3-5x}+\sqrt{3}}\right|\right) + C\\ &= \sqrt{3-5x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3-5x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3-5x}+\sqrt{3}}\right| + C.\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA A veces, cuando se usa integración simbólica, se obtienen resultados que parecen muy diferentes, pero son realmente equivalentes. Aquí se muestra cómo varios sistemas diferentes evaluaron la integral en el ejemplo 5.

Maple

$\sqrt{3-5x} -$
$\sqrt{3}\,\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3-5x}\sqrt{3}\right)$

Mathematica

Sqrt[3 − 5x] −
Sqrt[3] ArcTanh$\left[\dfrac{\text{Sqrt}[3-5x]}{\text{Sqrt}[3]}\right]$

Notar que estos programas no incluyen una constante de integración.

Funciones racionales de seno y coseno

EJEMPLO 6 Integración por tablas

Encontrar $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2 + \cos x}\, dx.$

Solución Sustituir 2 sen x cos x para sen $2x$ produce

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2 + \cos x}\, dx = 2 \int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2 + \cos x}\, dx.$$

Una verificación de las formas que contienen el sen u o cos u en el apéndice B muestra que ninguno de aquellos listados aplica. Así, considerar formas que contienen $a + bu$. Por ejemplo,

$$\int \frac{u\, du}{a + bu} = \frac{1}{b^2}(bu - a \ln|a + bu|) + C. \qquad \text{Fórmula 3.}$$

Sea $a = 2$, $b = 1$ y $u = \cos x$. Entonces $du = -\operatorname{sen} x\, dx$, y se tiene

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2 + \cos x}\, dx &= -2 \int \frac{\cos x(-\operatorname{sen} x\, dx)}{2 + \cos x} \\ &= -2(\cos x - 2 \ln|2 + \cos x|) + C \\ &= -2 \cos x + 4 \ln|2 + \cos x| + C. \end{aligned}$$

El ejemplo 6 contiene una expresión racional de sen x y cos x. Si no se consigue encontrar una integral de esta forma en la integración por tablas, intentarlo usando la sustitución especial siguiente para convertir la expresión trigonométrica a una expresión racional normal.

SUSTITUCIÓN PARA FUNCIONES RACIONALES DE SENO Y COSENO

Para integrales que contienen funciones racionales de seno y coseno, la sustitución

$$u = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$$

hace que

$$\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2u}{1 + u^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2\, du}{1 + u^2}.$$

Demostración De la sustitución para u, se sigue que

$$u^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

Resolviendo para cos x produce $\cos x = (1 - u^2)/(1 + u^2)$. Para encontrar sen x, escribir $u = \operatorname{sen} x/(1 + \cos x)$ como

$$\operatorname{sen} x = u(1 + \cos x) = u\left(1 + \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right) = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

Por último, para encontrar dx, considerar $u = \tan (x/2)$. Entonces se tiene el arctan $u = x/2$ y $dx = (2\, du)/(1 + u^2)$.

8.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, usar una tabla de integrales con formas que contienen $a + bu$ para encontrar la integral.

1. $\displaystyle\int \frac{x^2}{5 + x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{2}{3x^2(2x - 5)^2}\,dx$

En los ejercicios 3 y 4, usar una tabla de integrales con formas que contienen $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ para encontrar la integral.

3. $\displaystyle\int e^x\sqrt{1 + e^{2x}}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 36}}{6x}\,dx$

En los ejercicios 5 y 6, usar una tabla de integrales con formas que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$ para encontrar la integral.

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{100 - x^4}}\,dx$

En los ejercicios 7 a 10, usar una tabla de integrales con formas que contienen las funciones trigonométricas para encontrar la integral.

7. $\displaystyle\int \cos^4 3x\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1 - \cos\sqrt{x}\right)}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{1 - \tan 5x}\,dx$

En los ejercicios 11 y 12, usar una tabla de integrales con formas que contienen e^u para encontrar la integral.

11. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + e^{2x}}\,dx$

12. $\displaystyle\int e^{-x/2}\operatorname{sen} 2x\,dx$

En los ejercicios 13 y 14, usar una tabla de integrales con formas que contienen u para encontrar la integral.

13. $\displaystyle\int x^7 \ln x\,dx$

14. $\displaystyle\int (\ln x)^3\,dx$

En los ejercicios 15 a 18, encontrar la integral indefinida *a*) usando las tablas de integración y *b*) usando el método dado.

	Integral	*Método*
15.	$\displaystyle\int x^2 e^{3x}\,dx$	Integración por partes
16.	$\displaystyle\int x^6 \ln x\,dx$	Integración por partes
17.	$\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x + 1)}\,dx$	Fracciones parciales
18.	$\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 48}\,dx$	Fracciones parciales

En los ejercicios 19 a 42, usar la integración por tablas para encontrar la integral.

19. $\displaystyle\int x\,\operatorname{arcsec}(x^2 + 1)\,dx$

20. $\displaystyle\int \operatorname{arcsec} 2x\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 4x + 8}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{4x}{(2 - 5x)^2}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{\theta^2}{1 - \operatorname{sen}\theta^3}\,d\theta$

25. $\displaystyle\int e^x \arccos e^x\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 - \tan e^x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x}{1 - \sec x^2}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{t[1 + (\ln t)^2]}\,dt$

29. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{3 + 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$

30. $\displaystyle\int x^2\sqrt{2 + 9x^2}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{2 + 9x^2}}\,dx$

32. $\displaystyle\int \sqrt{x}\arctan x^{3/2}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(3 + 2\ln x)}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(1 - e^{2x})^{3/2}}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2 - 6x + 10)^2}\,dx$

36. $\displaystyle\int (2x - 3)^2\sqrt{(2x - 3)^2 + 4}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 6x^2 + 5}}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 1}}\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$

40. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{5 - x}{5 + x}}\,dx$

41. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{(1 + e^x)^3}\,dx$

42. $\displaystyle\int \cot^4\theta\,d\theta$

En los ejercicios 43 a 50, usar la integración por tablas para evaluar la integral.

43. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

44. $\displaystyle\int_0^7 \frac{x}{\sqrt{9 + x}}\,dx$

45. $\displaystyle\int_1^2 x^4 \ln x\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$

47. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

48. $\displaystyle\int_4^6 \frac{x^2}{(2x - 7)^2}\,dx$

49. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^3\cos t\,dt$

50. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{3 + x^2}\,dx$

En los ejercicios 51 a 56, verificar la fórmula de integración.

51. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a + bu)^2}\,du = \frac{1}{b^3}\left(bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a\ln|a + bu|\right) + C$

52. $\displaystyle\int \frac{u^n}{\sqrt{a + bu}}\,du = \frac{2}{(2n + 1)b}\left(u^n\sqrt{a + bu} - na\int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a + bu}}\,du\right)$

53. $\displaystyle\int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}}\,du = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$

54. $\displaystyle\int u^n\cos u\,du = u^n\operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$

55. $\displaystyle\int \arctan u\,du = u\arctan u - \ln\sqrt{1 + u^2} + C$

56. $\displaystyle\int (\ln u)^n\,du = u(\ln u)^n - n\int (\ln u)^{n-1}\,du$

CAS En los ejercicios 57 a 62, usar integración simbólica en el sistema algebraico por computadora para determinar la antiderivada que atraviesa el punto dado. Usar el sistema para hacer la gráfica de la antiderivada resultante.

57. $\displaystyle\int \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{1-x}}\,dx,\ \left(\tfrac{1}{2}, 5\right)$

58. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+2x}\,dx,\ (0, 0)$

59. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-6x+10)^2}\,dx,\ (3, 0)$

60. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2-2x-x^2}}{x+1}\,dx,\ \left(0, \sqrt{2}\right)$

61. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}\theta\tan\theta}\,d\theta,\ \left(\tfrac{\pi}{4}, 2\right)$

62. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{(\cos\theta)(1+\operatorname{sen}\theta)}\,d\theta,\ (0, 1)$

En los ejercicios 63 a 70, encontrar o evaluar la integral.

63. $\displaystyle\int \frac{1}{2-3\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

64. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos^2\theta}\,d\theta$

65. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}\,d\theta$

66. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3-2\cos\theta}\,d\theta$

67. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{3-2\cos\theta}\,d\theta$

68. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\,d\theta$

69. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\,d\theta$

70. $\displaystyle\int \frac{4}{\csc\theta-\cot\theta}\,d\theta$

Área **En los ejercicios 71 y 72, encontrar el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.**

71. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+3}},\ y = 0,\ x = 6$

72. $y = \dfrac{x}{1+e^{x^2}},\ y = 0,\ x = 2$

Desarrollo de conceptos

73. *a*) Evaluar $\int x^n \ln x\,dx$ para $n = 1, 2$ y 3. Describir cualquier modelo que se pueda observar.

b) Escribir una regla general para evaluar la integral en el apartado *a*), para un entero $n \geq 1$.

74. Describir lo que significa una fórmula de reducción. Dar un ejemplo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 75 y 76, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.**

75. Para usar una tabla de integrales, la integral que se está evaluando debe aparecer en la tabla.

76. Al usar una tabla de integrales, puede que se tenga que hacer la sustitución para volver a escribir la integral en la forma en que aparece en la tabla.

77. ***Volumen*** Considerar la región acotada por las gráficas de $y = x\sqrt{16-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 4$. Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje y.

Para discusión

78. Indicar (si es posible) el método o la fórmula de integración que se utilizaría para encontrar la antiderivada. Explicar por qué se eligió tal método o fórmula. No integrar.

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

c) $\displaystyle\int x\,e^{x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int x\,e^x\,dx$

e) $\displaystyle\int e^{x^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int e^{2x}\sqrt{e^{2x}+1}\,dx$

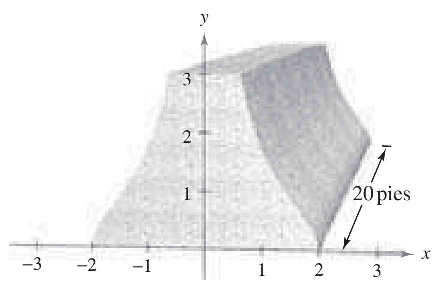
79. ***Trabajo*** Un cilindro hidráulico de una máquina industrial empuja un bloque de hierro a una distancia de x pies $(0 \leq x \leq 5)$, donde la fuerza variable requerida es $F(x) = 2000xe^{-x}$ libras. Encontrar el trabajo realizado al empujar el bloque 5 pies.

80. ***Trabajo*** Repetir el ejercicio 79, usando una fuerza $F(x) = \dfrac{500x}{\sqrt{26-x^2}}$ libras.

81. ***Diseño arquitectónico*** La sección transversal de una viga de concreto para un edificio está acotada por las gráficas de las ecuaciones

$$x = \frac{2}{\sqrt{1+y^2}},\ x = \frac{-2}{\sqrt{1+y^2}},\ y = 0 \ \text{ y } \ y = 3$$

donde x y y son medidos en pies. La longitud de la viga es de 20 pies (ver la figura). *a*) Encontrar el volumen V y el peso W de la viga. Asumir que el concreto pesa 148 libras por pie cúbico. *b*) Entonces encontrar el centroide de una sección transversal de la viga.



82. ***Población*** Una población está creciendo de acuerdo con el modelo logístico $N = \dfrac{5\,000}{1+e^{4.8-1.9t}}$ donde t es el tiempo en días. Encontrar la población media en el intervalo [0, 2].

En los ejercicios 83 y 84, usar una herramienta de graficación para *a*) resolver la ecuación integral para la constante *k*, y *b*) hacer la gráfica de la región cuya área está dada por la integral.

83. $\displaystyle\int_0^4 \frac{k}{2+3x}\,dx = 10$

84. $\displaystyle\int_0^k 6x^2 e^{-x/2}\,dx = 50$

Preparación del examen Putnam

85. Evaluar $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$.

8.7 Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital

- **Reconocer los límites que producen las formas indeterminadas.**
- **Aplicar la regla de L'Hôpital para evaluar un límite.**

Formas indeterminadas

Recordar que las formas $0/0$ e ∞/∞ son llamadas *indeterminadas* porque no garantizan que un límite existe, ni indican lo que el límite es, si existe. Cuando se encontró una de estas formas indeterminadas al principio del texto, se intentó volver a escribir la expresión usando varias técnicas algebraicas.

Forma indeterminada	*Límite*	*Técnica algebraica*
$\frac{0}{0}$	$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-2}{x+1} = \lim_{x\to -1} 2(x-1) = -4$	Dividir numerador y denominador por $(x+1)$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-(1/x^2)}{2+(1/x^2)} = \frac{3}{2}$	Dividir numerador y denominador por x^2

Ocasionalmente, se pueden desarrollar estas técnicas algebraicas para encontrar los límites de las funciones trascendentes. Por ejemplo, el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}$$

produce la forma indeterminada $0/0$. Factorizando y dividiendo se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} (e^x+1) = 2.$$

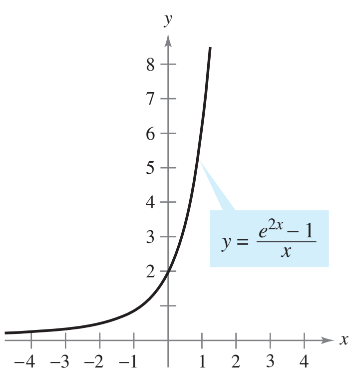
Sin embargo, no todas las formas indeterminadas pueden ser evaluadas por la manipulación algebraica. Esto a menudo es verdad cuando las funciones algebraicas y trascendentes están mezcladas. Por ejemplo, el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$$

produce la forma indeterminada $0/0$. Volviendo a escribir la expresión para obtener

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x}\right)$$

simplemente produce otra forma indeterminada, $\infty - \infty$. Obviamente, se podría usar la tecnología para estimar el límite, como se muestra en la tabla y en la figura 8.14. De la tabla y la gráfica, el límite parece ser 2. (Este límite se verificará en el ejemplo 1.)



El límite cuando x tiende a 0 parece ser 2
Figura 8.14

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1	1
$\frac{e^{2x}-1}{x}$	0.865	1.813	1.980	1.998	?	2.002	2.020	2.214	6.389

The Granger Collection

GUILLAUME L'HÔPITAL (1661-1704)
La regla L'Hôpital debe su nombre al matemático francés Guillaume François Antoine de L'Hôpital, quien escribió el primer libro sobre cálculo diferencial (en 1696), en el que aparece la citada regla. Se ha descubierto recientemente que tanto la regla como su demostración estaban contenidos en una carta de John Bernoulli a L'Hôpital. "… Reconozco que debo mucho a las mentes brillantes de los hermanos Bernoulli… He hecho libre uso de sus hallazgos…", escribió L'Hôpital.

Regla de L'Hôpital

Para encontrar el límite ilustrado en la figura 8.14, se puede usar el teorema llamado la **regla de L'Hôpital**. Este teorema establece que bajo ciertas condiciones el límite del cociente $f(x)/g(x)$ es determinado por el límite del cociente de las derivadas

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Para demostrar este teorema, se puede usar un resultado más general llamado **teorema general del valor medio**.

TEOREMA 8.3 TEOREMA GENERAL DEL VALOR MEDIO

Si f y g son derivables en un intervalo abierto (a, b) y continuo en $[a, b]$ tal que $g'(x) \neq 0$ para cualquier x en (a, b), entonces allí existe un punto c en (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

NOTA Para ver por qué éste se llama teorema general del valor medio, considerar el caso especial en que $g(x) = x$. Para este caso, se obtiene el teorema del valor medio "estándar" como se presenta en la sección 3.2. ■

El teorema general del valor medio y la regla de L'Hôpital se demuestran en el apéndice A.

TEOREMA 8.4 LA REGLA DE L'HÔPITAL

Sea f y g funciones que son derivables en un intervalo abierto (a, b) conteniendo c, excepto posiblemente el propio c. Asumir que $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b), excepto posiblemente el propio c. Si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a c produce la forma indeterminada $0/0$, entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

suponiendo que el límite en la derecha existe (o es infinito). Este resultado también aplica si el límite de $f(x)/g(x)$ como x tiende a c produce cualquiera de las formas indeterminadas ∞/∞, $(-\infty)/\infty$, $\infty/(-\infty)$, o $(-\infty)/(-\infty)$.

NOTA Hay quienes en ocasiones usan incorrectamente la regla de L'Hôpital aplicando la regla del cociente a $f(x)/g(x)$. Asegurarse de que la regla involucra $f'(x)/g'(x)$, no la derivada de $f(x)/g(x)$. ■

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para reforzar la comprensión de la necesidad de la restricción que $g'(x)$ sea no cero para todo x en (a, b), excepto posiblemente c, ver el artículo "Counterexamples to L'Hôpital's Rule", por R.P. Boas, en *The American Mathematical Monthly*.

La regla de L'Hôpital también puede aplicarse a los límites unilaterales. Por ejemplo, si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a c *por la derecha* produce la forma indeterminada $0/0$, entonces

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

suponiendo que el límite existe (o es infinito).

TECNOLOGÍA *Métodos numéricos y gráficos* Usar un método numérico o gráfico para aproximar cada límite.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{2x}-1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{2x}-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^{2x}-1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^{2x}-1}{x}$

¿Qué patrón se observa? ¿Presenta una ventaja un método analítico para estos límites? En ese caso, explicar el razonamiento.

EJEMPLO 1 Forma indeterminada 0/0

Evaluar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$.

Solución Ya que la sustitución directa resulta en la forma indeterminada 0/0

$$\lim_{x\to 0} (e^{2x}-1) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} x = 0$$

se puede aplicar la regla de L'Hôpital como se muestra abajo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{d}{dx}[e^{2x}-1]}{\dfrac{d}{dx}[x]} \qquad \text{Aplicar la regla de L'Hôpital.}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{1} \qquad \text{Derivar numerador y denominador.}$$

$$= 2 \qquad \text{Evaluar el límite.}$$

NOTA Al escribir la cadena de ecuaciones en el ejemplo 1, no se sabe que el primer límite es igual al segundo hasta que se haya demostrado que el segundo límite existe. En otras palabras, si el segundo límite no hubiera existido, no habría sido permisible aplicar la regla de L'Hôpital.

Otra forma de establecer la regla de L'Hôpital si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a ∞ (o $-\infty$) produce la forma indeterminada 0/0 si ∞/∞, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

suponiendo que el límite de la derecha existe.

EJEMPLO 2 Forma indeterminada ∞/∞

Evaluar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

Solución Por sustitución directa llegamos a una forma indeterminada ∞/∞, así que se puede aplicar la regla de L'Hôpital para obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}[\ln x]}{\dfrac{d}{dx}[x]} \qquad \text{Aplicar la regla de L'Hôpital.}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \qquad \text{Derivar numerador y denominador.}$$

$$= 0. \qquad \text{Evaluar el límite.}$$

NOTA Intentar representar gráficamente $y_1 = \ln x$ y $y_2 = x$ en la misma pantalla. ¿Qué función crece más rápido cuando x tiende a ∞? ¿Cómo se relaciona esta observación con el ejemplo 2?

En ocasiones es necesario aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez para quitar una forma indeterminada, como se muestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez

Evaluar $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$.

Solución Ya que los resultados de la sustitución directa en la forma indeterminada ∞/∞, se puede aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}[x^2]}{\dfrac{d}{dx}[e^{-x}]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}$$

Este límite da la forma indeterminada $(-\infty)/(-\infty)$ para poder aplicar la regla de L'Hôpital de nuevo y obtener

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}[2x]}{\dfrac{d}{dx}[-e^{-x}]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

Además de las formas $0/0$ y ∞/∞, hay otras formas indeterminadas como $0 \cdot \infty$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0 y $\infty - \infty$. Por ejemplo, considerar los cuatro límites siguientes que llevan a la forma indeterminada $0 \cdot \infty$.

$$\underbrace{\lim_{x\to0}(x)\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{El límite es 1}}, \quad \underbrace{\lim_{x\to0}(x)\left(\frac{2}{x}\right)}_{\text{El límite es 2}}, \quad \underbrace{\lim_{x\to\infty}(x)\left(\frac{1}{e^x}\right)}_{\text{El límite es 0}}, \quad \underbrace{\lim_{x\to\infty}(e^x)\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{El límite es }\infty}$$

Puesto que cada límite es diferente, está claro que la forma $0 \cdot \infty$ es indeterminada en el sentido que no determina el valor del límite (o incluso la existencia) del límite. Los ejemplos siguientes indican los métodos para evaluar estas formas. Básicamente, se intenta convertir cada una de estas formas a $0/0$ o ∞/∞ para que la regla de L'Hôpital pueda aplicarse.

EJEMPLO 4 Forma indeterminada $0 \cdot \infty$

Evaluar $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x}$.

Solución Como la sustitución directa produce la forma indeterminada $0 \cdot \infty$, intentar reescribir el límite para adaptar a la forma $0/0$ o ∞/∞. En este caso, volver a escribir el límite para adaptar a la segunda forma.

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

Por consiguiente, la regla de L'Hôpital permite concluir que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/\left(2\sqrt{x}\right)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}\,e^x} = 0.$$

Si la estrategia de reducir un límite a los tipos $0/0$ o ∞/∞ no parece funcionar, intentar otro tipo. Así, en el ejemplo 4 se puede escribir el límite como

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1/2}}$$

que da la forma indeterminada $0/0$. De hecho, aplicando la regla de L'Hôpital a este límite se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}}{-1/(2x^{3/2})}$$

que también da la forma indeterminada $0/0$.

Las formas indeterminadas 1^{∞}, ∞^{0} y 0^{0} provienen de los límites de funciones que tienen bases variables y exponentes variables. Cuando se vio este tipo de función previamente, se usó la derivación logarítmica para encontrar la derivada. Puede usarse un procedimiento similar al tomar los límites, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Forma indeterminada 1^{∞}

Evaluar $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Solución Como la sustitución directa da la forma indeterminada 1^{∞}, proceder como sigue. Para empezar, asumir que el límite existe y es igual a y.

$$y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

Tomando logaritmos naturales en esa ecuación se obtiene

$$\ln y = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right].$$

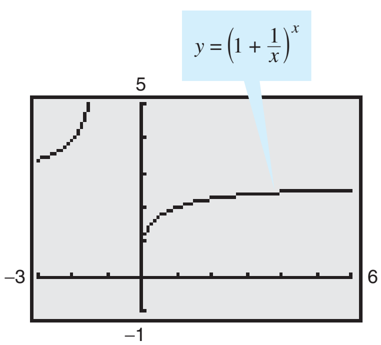
Ya que la función logarítmica natural es continua, se puede escribir

$$\begin{aligned}
\ln y &= \lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] && \text{Forma indeterminada } \infty\cdot 0.\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln[1+(1/x)]}{1/x}\right) && \text{Forma indeterminada } 0/0.\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(-1/x^2)\{1/[1+(1/x)]\}}{-1/x^2}\right) && \text{Regla de L'Hôpital.}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+(1/x)}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ahora, ya que se ha demostrado que $\ln y = 1$, concluir que $y = e$ y obtener

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Utilizar una herramienta de graficación para confirmar este resultado, como se muestra en la figura 8.15.



El límite de $[1 + (1/x)]^x$ cuando x tiende a infinito es e
Figura 8.15

La regla de L'Hôpital también puede aplicarse a los límites unilaterales, como se demuestra en los ejemplos 6 y 7.

EJEMPLO 6 Forma indeterminada 0^0

Encontrar $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$.

Solución Ya que la sustitución directa produce la forma indeterminada 0^0, proceder como se muestra abajo. Para empezar, asumir que el límite existe y es igual a y.

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x && \text{Forma indeterminada } 0^0.\\
\ln y &= \ln\Big[\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x\Big] && \text{Tomar un logaritmo natural de cada lado.}\\
&= \lim_{x\to 0^+} [\ln(\operatorname{sen} x)^x] && \text{Continuidad.}\\
&= \lim_{x\to 0^+} [x \ln(\operatorname{sen} x)] && \text{Forma indeterminada } 0\cdot(-\infty).\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{1/x} && \text{Forma indeterminada } -\infty/\infty.\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{-1/x^2} && \text{Regla de L'Hôpital.}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{\tan x} && \text{Forma indeterminada } 0/0.\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{\sec^2 x} = 0 && \text{Regla de L'Hôpital.}
\end{aligned}$$

Ahora, como $\ln y = 0$, concluir que $y = e^0 = 1$, y se sigue que

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x = 1.$$

TECNOLOGÍA Al evaluar límites complicados como en el ejemplo 6, es útil verificar la racionalidad de la solución con una herramienta de graficación. Por ejemplo, los cálculos en la tabla siguiente y la gráfica en la figura 8.16 son consistentes con la conclusión de que $(\operatorname{sen} x)^x$ tiende a 1 cuando x tiende a 0 por la derecha.

x	1.0	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$(\operatorname{sen} x)^x$	0.8415	0.7942	0.9550	0.9931	0.9991	0.9999

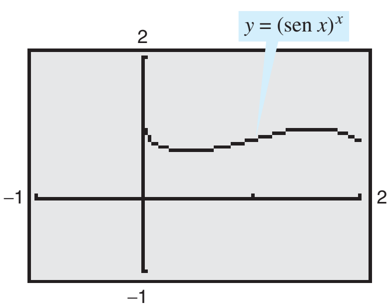
Usar un sistema algebraico por computadora para estimar los límites siguientes:

$$\lim_{x\to 0} (1 - \cos x)^x$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^x.$$

Entonces verificar los resultados analíticamente.



El límite de $(\operatorname{sen} x)^x$ es 1 cuando x tiende a 0 por la derecha
Figura 8.16

AYUDA DE ESTUDIO En cada uno de los ejemplos presentados en esta sección, la regla de L'Hôpital se usa para encontrar un límite que existe. También puede usarse para concluir que un límite es infinito. Por ejemplo, intentar con la regla de L'Hôpital para mostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

EJEMPLO 7 Forma indeterminada $\infty - \infty$

Evaluar $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$.

Solución Ya que la sustitución directa da la forma indeterminada $\infty - \infty$, intentar volver a escribir la expresión para producir una forma a la que se pueda aplicar la regla de L'Hôpital. En este caso, se pueden combinar las dos fracciones para obtener

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right].$$

Ahora, como la sustitución directa produce la forma indeterminada $0/0$, aplicar la regla de L'Hôpital para obtener

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{d}{dx}[x-1-\ln x]}{\dfrac{d}{dx}[(x-1)\ln x]}\\
&= \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1-(1/x)}{(x-1)(1/x)+\ln x}\right]\\
&= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{x-1+x\ln x}\right).
\end{aligned}$$

Este límite también da la forma indeterminada $0/0$, para poder aplicar la regla de L'Hôpital de nuevo para obtener

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{1+x(1/x)+\ln x}\right]\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Las formas $0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, 1^∞ y ∞^0 se han identificado como *indeterminadas*. Hay formas similares que deben reconocerse como "determinadas".

$\infty + \infty \to \infty$ — El límite es infinito positivo.

$-\infty - \infty \to -\infty$ — El límite es infinito negativo.

$0^\infty \to 0$ — El límite es cero.

$0^{-\infty} \to \infty$ — El límite es infinito positivo.

(Se pide verificar dos de estas afirmaciones en los ejercicios 116 y 117.)

Como comentario final, recordar que la regla de L'Hôpital sólo puede aplicarse a cocientes que llevan a las formas indeterminadas $0/0$ y ∞/∞. Por ejemplo, la aplicación siguiente de la regla de L'Hôpital es *incorrecta*.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1$$ Uso incorrecto de la regla de L'Hôpital.

La razón de que esta aplicación es incorrecta es que, aunque el límite del denominador es 0, el límite del numerador es 1, lo cual no satisface las hipótesis de la regla de L'Hôpital.

8.7 Ejercicios

Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 1 a 4, completar la tabla y usar el resultado para estimar el límite. Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la función y apoyar el resultado.**

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - e^x}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x^5 e^{-x/100}$

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$f(x)$						

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x}{\sqrt{3x^2 - 2x}}$

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$f(x)$						

En los ejercicios 5 a 10, evaluar el límite *a*) usando las técnicas de los capítulos 1 y 3 y *b*) usando la regla de L'Hôpital.

5. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3(x-4)}{x^2 - 16}$

6. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2 + x - 6}{x + 2}$

7. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x+10} - 4}{x - 6}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 6x}{4x}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 5}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x + 1}{4x^2 + x}$

En los ejercicios 11 a 44, evaluar el límite, usando la regla de L'Hôpital si es necesario. (En el ejercicio 18, *n* es un entero positivo.)

11. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

12. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{25 - x^2} - 5}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 5}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - (1 - x)}{x}$

16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x^2}{x^2 - 1}$

17. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - (1 + x)}{x^3}$

18. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - (1 + x)}{x^n}$

19. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{11} - 1}{x^4 - 1}$

20. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$, donde $a, b \neq 0$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$, donde $a, b \neq 0$

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}$

24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan x - (\pi/4)}{x - 1}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 + 3x - 1}{4x^2 + 5}$

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - 6}{x^2 + 4x + 7}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 4x + 7}{x - 6}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x + 2}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^{x/2}}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^{x^2}}$

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

32. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

33. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x}$

34. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$

35. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

36. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^4}{x^3}$

37. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^4}$

38. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x/2}}{x}$

39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\tan 9x}$

40. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$

41. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{\operatorname{sen} x}$

42. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arctan 2x}$

43. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_1^x \ln(e^{4t-1})\, dt}{x}$

44. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\int_1^x \cos \theta\, d\theta}{x - 1}$

En los ejercicios 45 a 62, *a*) describir el tipo de forma indeterminada (si hay) que se obtiene por sustitución directa, *b*) evaluar el límite, usando la regla de L'Hôpital si es necesario, *c*) usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la función y verificar el resultado en el inciso *b*).

45. $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln x$

46. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \cot x$

47. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right)$

48. $\lim\limits_{x\to\infty} x \tan \dfrac{1}{x}$

49. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x}$

50. $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x + x)^{2/x}$

51. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

52. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

53. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + x)^{1/x}$

54. $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + x)^{1/x}$

55. $\lim\limits_{x\to 0^+} [3(x)^{x/2}]$

56. $\lim\limits_{x\to 4^+} [3(x - 4)]^{x-4}$

57. $\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x)^{x-1}$

58. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right]^x$

59. $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{8}{x^2 - 4} - \dfrac{x}{x - 2}\right)$

60. $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{1}{x^2 - 4} - \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x^2 - 4}\right)$

61. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{3}{\ln x} - \dfrac{2}{x - 1}\right)$

62. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{10}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)$

En los ejercicios 63 a 66, usar una herramienta de graficación para *a*) hacer la gráfica de la función y *b*) encontrar el límite requerido (si existe).

63. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\ln(2x-5)}$

64. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$

65. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+5x+2}-x\right)$

66. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$

Desarrollo de conceptos

67. Listar seis formas indeterminadas diferentes.

68. Establecer la regla de L'Hôpital.

69. Encontrar las funciones derivables f y g que satisfacen la condición especificada tal que

$$\lim_{x\to 5} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x\to 5} g(x) = 0.$$

Explicar cómo se obtuvieron las respuestas. (*Nota*: hay muchas respuestas correctas.)

a) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{f(x)}{g(x)} = 10$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

70. Encontrar las funciones derivables f y g tal que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \quad \text{y}$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 25.$$

Explicar cómo se obtuvieron las respuestas. (*Nota*: hay muchas respuestas correctas.)

71. ***Estimación numérica*** Completar la tabla para mostrar que x eventualmente "domina" a $(\ln x)^4$.

x	10	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}
$\dfrac{(\ln x)^4}{x}$						

72. ***Estimación numérica*** Completar la tabla para mostrar que e^x eventualmente "domina" a x^5.

x	1	5	10	20	30	40	50	100
$\dfrac{e^x}{x^5}$								

Comparación de funciones **En los ejercicios 73 a 78, usar la regla de L'Hôpital para determinar las proporciones comparativas del incremento de las funciones $f(x) = x^m$, $g(x) = e^{nx}$ y $h(x) = (\ln x)^n$ donde $n > 0$, $m > 0$ y $x \to \infty$.**

73. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{5x}}$

74. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$

75. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$

76. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^3}$

77. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^m}$

78. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{e^{nx}}$

En los ejercicios 79 a 82, encontrar cualquier asíntota y extremo relativo que pueden existir y usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la función. (*Sugerencia:* Algunos de los límites requeridos para encontrar las asíntotas se han visto en los ejercicios precedentes.)

79. $y = x^{1/x}, \quad x > 0$

80. $y = x^x, \quad x > 0$

81. $y = 2xe^{-x}$

82. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

Para pensar **En los ejercicios 83 a 87, la regla de L'Hôpital se usa incorrectamente. Describir el error.**

83. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+4x+1}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{6x+4}{2x-1} = \lim_{x\to 2} \frac{6}{2} = 3$

84. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{e^x} = \lim_{x\to 0} 2e^x = 2$

85. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\pi x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi\cos\pi x}{1} = \pi$

86. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(1/x)}{1/x}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{[-\operatorname{sen}(1/x)](1/x^2)}{-1/x^2}$$

$$= 0$$

87. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}}{-e^{-x}}$

$$= \lim_{x\to\infty} 1$$

$$= 1$$

Para discusión

88. Determinar cuáles de los siguientes límites se pueden evaluar utilizando la regla de L'Hôpital. Explicar la respuesta. No evaluar el límite.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^3-x-6}$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-4x}{2x-1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x}$ *d*) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{e^{x^2}-e^9}{x-3}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos\pi x}{\ln x}$ *f*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1+x(\ln x - 1)}{\ln x(x-1)}$

Estimación analítica **En los ejercicios 89 y 90, *a*) explicar por qué la regla de L'Hôpital no puede usarse para encontrar el límite, *b*) encontrar el límite analíticamente y *c*) usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la función y aproximar el límite de la gráfica. Comparar el resultado con el del inciso *b*).**

89. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

90. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\tan x}{\sec x}$

Análisis gráfico **En los ejercicios 91 y 92, representar la gráfica de $f(x)/g(x)$ y $f'(x)/g'(x)$ cerca de $x = 0$. ¿Qué se nota sobre estas proporciones cuando $x \to 0$? ¿Cómo ilustra esto la regla de L'Hôpital?**

91. $f(x) = \operatorname{sen} 3x, \quad g(x) = \operatorname{sen} 4x$

92. $f(x) = e^{3x} - 1, \quad g(x) = x$

93. ***Velocidad en un medio resistente*** La velocidad v de un objeto que cae a través de un medio resistente como el aire o el agua está dada por

$$v = \frac{32}{k}\left(1 - e^{-kt} + \frac{v_0 k e^{-kt}}{32}\right)$$

donde v_0 es la velocidad inicial, t es el tiempo en segundos y k es la resistencia constante del medio. Usar la regla de L'Hôpital para encontrar la fórmula para la velocidad de un cuerpo cayendo en un vacío haciendo v_0 y t fijos y k tendiendo a cero. (Asumir que la dirección descendente es positiva.)

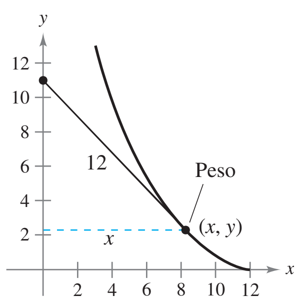
94. ***Interés compuesto*** La fórmula para la cantidad A en una cuenta de ahorro compuesto n veces por año durante t años a una tasa de interés r y un depósito inicial P está dada por

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Usar la regla de L'Hôpital para demostrar que la fórmula del límite cuando el número de compuestos por año tiende a infinito está dada por $A = Pe^{rt}$.

95. ***Función gamma*** La función gamma $\Gamma(n)$ se define en términos de la integral de la función dada por $f(x) = x^{n-1}e^{-x}$, $n > 0$. Mostrar que para cualquier valor fijo de n, el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito es cero.

96. ***Tractriz*** Una persona se mueve del origen a lo largo del eje y positivo arrastrando un peso al final de una cuerda de 12 metros (ver la figura). Inicialmente, el peso se localiza en el punto (12, 0).



a) Mostrar que la pendiente de la recta tangente de la trayectoria del peso es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{144 - x^2}}{x}.$$

b) Usar el resultado del apartado *a*) para encontrar la ecuación de la trayectoria del peso. Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la trayectoria y compararla con la figura.

c) Encontrar cualquier asíntota vertical de la gráfica en el apartado *b*).

d) Cuando la persona ha alcanzado el punto (0, 12), ¿qué tanto se ha movido el peso?

En los ejercicios 97 a 100, aplicar el teorema general del valor medio a las funciones f y g en el intervalo dado. Encontrar todos los valores de c en el intervalo (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

	Funciones	*Intervalo*
97.	$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^2 + 1$	$[0, 1]$
98.	$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^2 - 4$	$[1, 2]$
99.	$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
100.	$f(x) = \ln x, \quad g(x) = x^3$	$[1, 4]$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 101 a 104, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.**

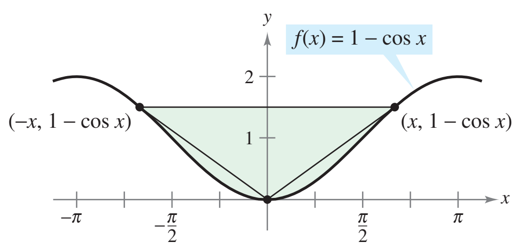
101. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x^2 + x + 1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2x + 1}{1}\right] = 1$

102. Si $y = e^x/x^2$, entonces $y' = e^x/2x$.

103. Si $p(x)$ es un polinomio, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}[p(x)/e^x] = 0$.

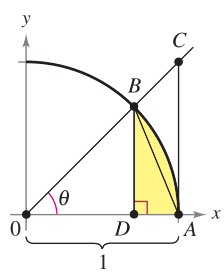
104. Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - g(x)] = 0$.

105. ***Área*** Encontrar el límite cuando x tiende a 0, de la proporción del área del triángulo al área sombreada total en la figura.



106. En la sección 1.3, un argumento geométrico (ver la figura) fue usado para demostrar que

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$$



a) Escribir el área de ΔABD en términos de θ.

b) Escribir el área de la región sombreada en términos de θ.

c) Escribir la proporción R del área de ΔABD para la región sombreada.

d) Encontrar $\lim\limits_{\theta\to 0} R$.

Funciones continuas **En los ejercicios 107 y 108, encontrar el valor de c que hace a la función continua en $x = 0$.**

107. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x - 2 \operatorname{sen} 2x}{2x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$

108. $f(x) = \begin{cases} (e^x + x)^{1/x}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$

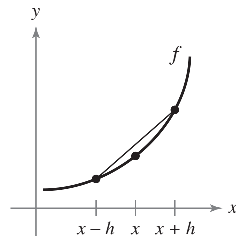
109. Encontrar los valores de a y b tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a - \cos bx}{x^2} = 2$.

110. Mostrar que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ para cualquier entero $n > 0$.

111. *a*) Sea $f'(x)$ continuo. Mostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

b) Explicar el resultado del inciso *a*) gráficamente.



112. Sea $f''(x)$ continuo. Mostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

113. Dibujar la gráfica de

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

y determinar $g'(0)$.

114. Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica

$$f(x) = \frac{x^k - 1}{k}$$

para $k = 1$, 0.1 y 0.01. Entonces evaluar el límite

$$\lim_{k\to 0^+} \frac{x^k - 1}{k}.$$

115. Considerar los límites $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (-x \ln x)$.

a) Describir el tipo de forma indeterminada que se obtiene por la sustitución directa.

b) Evaluar el límite. Usar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para un enfoque geométrico de este ejercicio, ver el artículo "A Geometric Proof of $\displaystyle\lim_{d\to 0^+} (-d \ln d) = 0$" de John H. Mathews, en el *College Mathematics Journal*.

116. Demostrar que si $f(x) \geq 0$, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0$.

117. Demostrar que si $f(x) \geq 0$, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \infty$.

118. Demostrar la generalización siguiente del teorema del valor medio. Si f es dos veces derivable en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b - a) - \int_a^b f''(t)(t - b)\, dt.$$

119. ***Formas indeterminadas*** Mostrar que las formas indeterminadas 0^0, ∞^0 y 1^∞ no siempre tienen un valor de 1 evaluando cada límite.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\ln 2/(1 + \ln x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\ln 2/(1 + \ln x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (x + 1)^{(\ln 2)/x}$

120. ***Historia del cálculo*** En 1696 el libro de texto de cálculo de L'Hôpital, ilustró su regla que usa el límite de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

cuando x tiende a a, $a > 0$. Encontrar este límite.

121. Considerar la función

$$h(x) = \frac{x + \operatorname{sen} x}{x}.$$

a) Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la función. Entonces usar el *zoom* y rasgos del *trace* para investigar $\displaystyle\lim_{x\to\infty} h(x)$.

b) Encontrar $\displaystyle\lim_{x\to\infty} h(x)$ analíticamente escribiendo

$$h(x) = \frac{x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

c) ¿Puede usarse la regla de L'Hôpital para encontrar $\displaystyle\lim_{x\to\infty} h(x)$? Explicar el razonamiento.

122. Sea $f(x) = x + x \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x^2 - 4$.

a) Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

b) Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

c) Evaluar el límite $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. ¿Qué se puede notar?

d) ¿Las respuestas a los incisos *a*) a *c*) contradicen la regla de L'Hôpital? Explicar el razonamiento.

Preparación del examen Putnam

123. Evaluar

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{a^x - 1}{a - 1}\right]^{1/x}$$

donde $a > 0$, $a \neq 1$.

8.8 Integrales impropias

- Evaluar una integral impropia que tiene un límite de integración infinito.
- Evaluar una integral impropia que tiene una discontinuidad infinita.

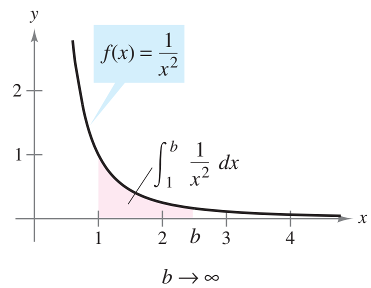
Integrales impropias con límites de integración infinitos

La definición de una integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

requiere que el intervalo $[a, b]$ sea finito. Además, el teorema fundamental del cálculo por el que se han estado evaluando las integrales definidas, requiere que f sea continuo en $[a, b]$. En esta sección se estudiará un procedimiento para evaluar integrales que normalmente no satisfacen estos requisitos porque cualquiera de los dos límites de integración son infinitos, o f tiene un número finito de discontinuidades infinitas en el intervalo $[a, b]$. Las integrales que poseen estas características son las **integrales impropias**. Notar que en una función se dice que f tiene una **discontinuidad infinita** en c si, por *la derecha o izquierda*,

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to c} f(x) = -\infty.$$



La región n ac tada tiene un área de 1
Figura 8.17

Para obtener una idea de cómo evaluar una integral impropia, considerar la integral

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big]_1^b = -\frac{1}{b} + 1 = 1 - \frac{1}{b}$$

la cual puede interpretarse como el área de la región sombreada mostrada en la figura 8.17. Tomando el límite como $b \to \infty$ produce

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{dx}{x^2}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Esta integral impropia se interpreta como el área de la región *no acotada* entre la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ y el eje x (a la derecha de $x = 1$).

DEFINICIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS CON LÍMITES DE INTEGRACIÓN INFINITOS

1. Si f es continuo en el intervalo $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Si f es continuo en el intervalo $(-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Si f es continuo en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

donde c es cualquier número real (ver ejercicio 120).

En los primeros dos casos, la integral impropia **converge** si el límite existe, en caso contrario, la integral impropia **diverge**. En el tercer caso, la integral impropia a la izquierda diverge si cualquiera de las integrales impropias a la derecha divergen.

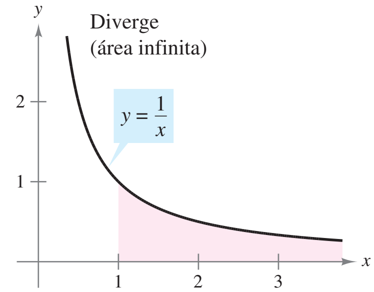
EJEMPLO 1 Una integral impropia divergente

Evaluar $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

Solución

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} && \text{Tomar el límite como } b \to \infty. \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln x\Big]_1^b && \text{Aplicar la regla log.} \\
&= \lim_{b\to\infty} (\ln b - 0) && \text{Aplicar el teorema fundamental del cálculo.} \\
&= \infty && \text{Evaluar el límite.}
\end{aligned}$$

Ver figura 8.18.



Esta región n ac tada tiene un área infinita
Figura 8.18

NOTA Intentar comparar las regiones mostradas en las figuras 8.17 y 8.18. Ellas parecen similares; sin embargo, la región en la figura 8.17 tiene un área finita de 1 y la región en la figura 8.18 tiene un área infinita. ■

EJEMPLO 2 Integrales impropias convergentes

Evaluar cada integral impropia.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

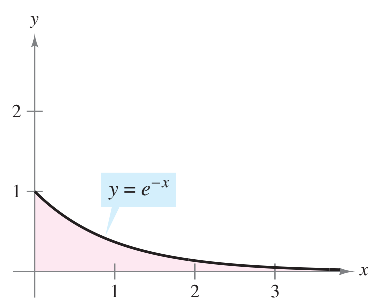
Solución

a)
$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big[-e^{-x}\Big]_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} (-e^{-b} + 1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

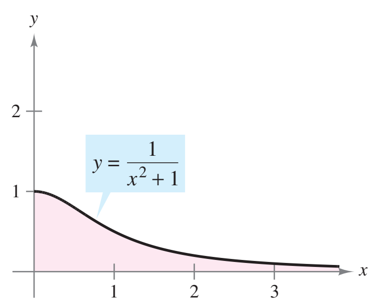
Ver figura 8.19.

b)
$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big[\arctan x\Big]_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \arctan b \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Ver figura 8.20.



El área de la región n ac tada es 1
Figura 8.19



El área de la región n ac tada es $\pi/2$
Figura 8.20

En el ejemplo siguiente, notar cómo la regla de L'Hôpital puede usarse para evaluar una integral impropia.

EJEMPLO 3 Usando la regla de L'Hôpital con una integral impropia

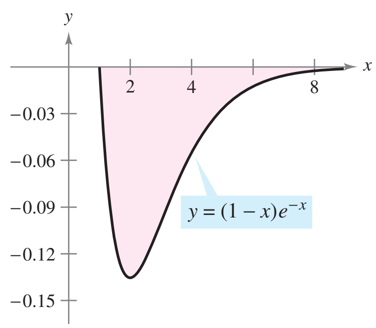
Evaluar $\displaystyle\int_1^{\infty} (1-x)e^{-x}\,dx.$

Solución Usar la integración por partes, con $dv = e^{-x}\,dx$ y $u = (1-x)$.

$$\begin{aligned}\int (1-x)e^{-x}\,dx &= -e^{-x}(1-x) - \int e^{-x}\,dx\\ &= -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + C\\ &= xe^{-x} + C\end{aligned}$$

Ahora, aplicar la definición de una integral impropia.

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} (1-x)e^{-x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\Big[xe^{-x}\Big]_1^b\\ &= \left(\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^b}\right) - \frac{1}{e}\end{aligned}$$



El área de la región n ac tada es $|-1/e|$
Figura 8.21

Por último, usando la regla de L'Hôpital en el límite derecho produce

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b} = 0$$

de lo que es posible concluir que

$$\int_1^{\infty} (1-x)e^{-x}\,dx = -\frac{1}{e}.$$

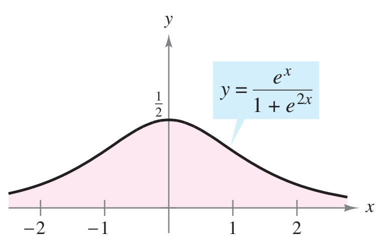
Ver figura 8.21.

EJEMPLO 4 Límites superior e inferior de integración infinitos

Evaluar $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx.$

Solución Notar que el integrando es continuo en $(-\infty, \infty)$. Para evaluar la integral, se puede descomponer en dos partes, eligiendo $c = 0$ como un valor conveniente.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx\\ &= \lim_{b\to-\infty}\Big[\arctan e^x\Big]_b^0 + \lim_{b\to\infty}\Big[\arctan e^x\Big]_0^b\\ &= \lim_{b\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \arctan e^b\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\arctan e^b - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$



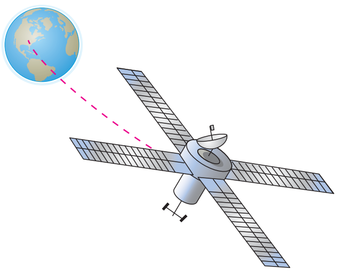
El área de la región n ac tada es $\pi / 2$
Figura 8.22

Ver figura 8.22.

EJEMPLO 5 Envío de un módulo espacial a órbita

En el ejemplo 3 de la sección 7.5, se requerían 10 000 toneladas por milla de trabajo para propulsar un módulo espacial de 15 toneladas métricas a una altura de 800 millas sobre la Tierra. ¿Cuánto trabajo se requiere para propulsar el módulo a una distancia infinita fuera de la superficie de la Tierra?

Solución Al principio podría pensarse que se requeriría una cantidad infinita de trabajo. Pero si éste fuera el caso, sería imposible enviar los cohetes al espacio exterior. Ya que esto se ha hecho, el trabajo requerido debe ser finito. Se puede determinar el trabajo de la manera siguiente. Usando la integral del ejemplo 3, sección 7.5, reemplazar el límite superior de 4 800 millas por ∞ y escribir



El trabaj requerid para m ver un módul espacial a una distancia n ac tada fuera de la Tierra es apr ximadamente 6.9 4 = 10^{11} libras/pie
Figura 8.23

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{4\,000}^{\infty} \frac{240\,000\,000}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{240\,000\,000}{x}\right]_{4\,000}^{b} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{240\,000\,000}{b} + \frac{240\,000\,000}{4\,000}\right) \\
&= 60\,000 \text{ millas-toneladas} \\
&\approx 6.984 \times 10^{11} \text{ pies-libra.}
\end{aligned}
$$

Ver figura 8.23.

Integrales impropias con discontinuidades infinitas

El segundo tipo básico de integral impropia es uno que tiene una discontinuidad infinita *en o entre* los límites de integración.

DEFINICIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS CON DISCONTINUIDADES INFINITAS

1. Si f es continuo en el intervalo $[a, b)$ y tiene una discontinuidad infinita en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

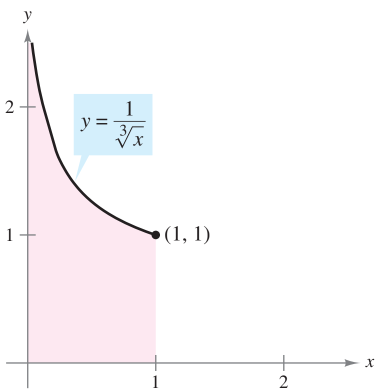
2. Si f es continuo en el intervalo $(a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

3. Si f es continuo en el intervalo $[a, b]$, excepto para algún c en (a, b) en que f tiene una discontinuidad infinita, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

En los primeros dos casos, la integral impropia **converge** si el límite existe, de otra forma, la integral impropia **diverge**. En el tercer caso, la integral impropia en la izquierda diverge si alguna de las integrales impropias a la derecha diverge.



Disc ntinuidad infinita en $x = 0$
Figura 8.24

EJEMPLO 6 Una integral impropia con una discontinuidad infinita

Evaluar $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Solución El integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, como se muestra en la figura 8.24. Se puede evaluar esta integral como se muestra abajo.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-1/3}\,dx &= \lim_{b\to 0^+}\left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_b^1 \\ &= \lim_{b\to 0^+}\frac{3}{2}(1 - b^{2/3}) \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Una integral impropia divergente

Evaluar $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$.

Solución Como el integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, se puede escribir

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{x^3} &= \lim_{b\to 0^+}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_b^2 \\ &= \lim_{b\to 0^+}\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2b^2}\right) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Así pues, se puede concluir que la integral impropia diverge.

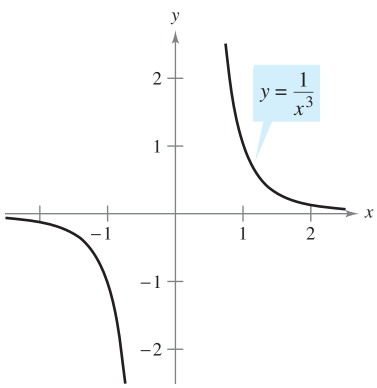
EJEMPLO 8 Una integral impropia con una discontinuidad interior

Evaluar $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3}$.

Solución Esta integral es impropia porque el integrando tiene una discontinuidad infinita en el punto interior $x = 0$, como se muestra en la figura 8.25. Así, se puede escribir

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int_0^2 \frac{dx}{x^3}.$$

Del ejemplo 7 se sabe que la segunda integral diverge. Así, la integral impropia original también diverge.



La integral impr pia $\displaystyle\int_{-1}^2 1/x^3\,dx$ diverge
Figura 8.25

NOTA Cuando se investiga si una integral es impropia o no, hay que averiguar si tiene discontinuidad infinita en un punto terminal o en un punto interior del intervalo de integración. Por ejemplo, si no se hubiera reconocido que la integral en el ejemplo 8 era impropia, se habría obtenido el resultado *incorrecto*.

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} = \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_{-1}^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Evaluación incorrecta.

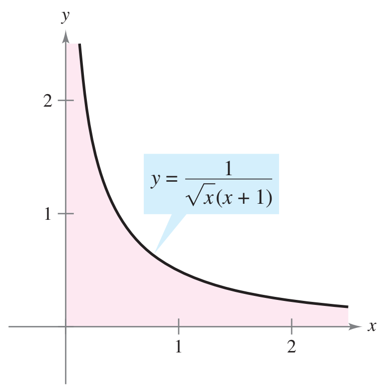
La integral en el próximo ejemplo es impropia por dos razones. Un límite de integración es infinito, y el integrando tiene una discontinuidad infinita en el límite exterior de integración.

EJEMPLO 9 Una integral doblemente impropia

Evaluar $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$.

Solución Para evaluar esta integral, elegir un punto conveniente (por ejemplo, $x = 1$) y escribir

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\
&= \lim_{b\to 0^+}\Big[2\arctan\sqrt{x}\Big]_b^1 + \lim_{c\to\infty}\Big[2\arctan\sqrt{x}\Big]_1^c \\
&= 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$



El área de la región infinita es π
Figura 8.26

Ver figura 8.26.

EJEMPLO 10 Una aplicación que involucra longitud de arco

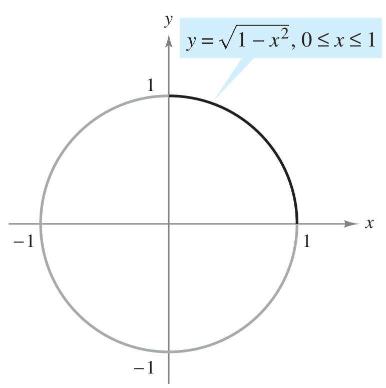
Usar la fórmula de la longitud de arco para demostrar que la circunferencia del círculo $x^2 + y^2 = 1$ es 2π.

Solución Para simplificar el trabajo, considerar el cuarto de círculo dado por $y = \sqrt{1-x^2}$, donde $0 \le x \le 1$. La función y es derivable para cualquier x en este intervalo, excepto $x = 1$. Por consiguiente, la longitud de arco del cuarto de círculo está dada por la integral impropia

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Esta integral es impropia porque tiene una discontinuidad infinita en $x = 1$. Así, se puede escribir

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \lim_{b\to 1^-}\Big[\operatorname{arcsen} x\Big]_0^b \\
&= \frac{\pi}{2} - 0 \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$



La circunferencia del círcul es 2π
Figura 8.27

Por último, multiplicando por 4, concluir que la circunferencia del círculo es $4s = 2\pi$, como se muestra en la figura 8.27.

Esta sección concluye con un teorema útil que describe la convergencia o divergencia de un tipo común de integral impropia. La prueba de este teorema se deja como ejercicio (ver ejercicio 55).

TEOREMA 8.5 UN TIPO ESPECIAL DE INTEGRAL IMPROPIA

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge}, & \text{si } p \leq 1 \end{cases}$$

EJEMPLO 11 Aplicación a un sólido de revolución

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para la investigación extensa de sólidos que tienen volúmenes finitos y áreas de superficie infinitas, ver el artículo "Supersolids: Solids Having Finite Volume and Infinite Surfaces", de William P. Love, en *Mathematics Teacher*.

El sólido formado al girar (alrededor del eje x) la región *no acotada* que queda entre la gráfica de $f(x) = 1/x$ y el eje x ($x \geq 1$) se llama la **trompeta de Gabriel**. (Ver figura 8.28.) Mostrar que este sólido tiene un volumen finito y un área de superficie infinita.

Solución Usando el método de los discos y el teorema 8.5, determinar el volumen para ser

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx && \text{Teorema 8.5, } p = 2 > 1. \\ &= \pi\left(\frac{1}{2-1}\right) = \pi. \end{aligned}$$

El área de la superficie está dada por

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx.$$

Porque

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > 1$$

en el intervalo $[1, \infty)$, y la integral impropia

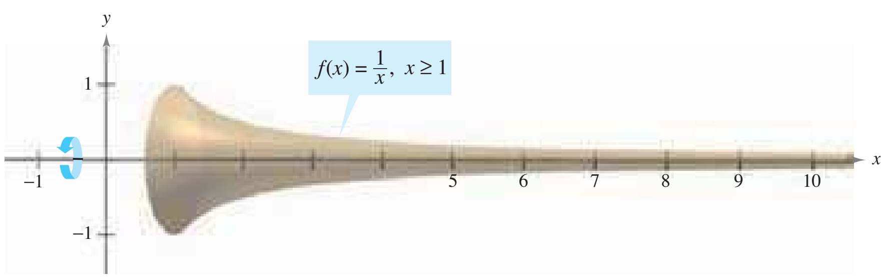
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

diverge, se puede concluir que la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

también diverge. (Ver ejercicio 58.) Así, el área de la superficie es infinita.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para aprender sobre otra función que tiene un volumen finito y un área de superficie infinita, ver el artículo "Gabriel's Wedding Cake", de Julian F. Fleron, en *The College Mathematics Journal*.



La tr mpeta de Gabriel tiene un v lumen finit y un área de superficie infinita
Figura 8.28

8.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, decidir si la integral es impropia. Explicar el razonamiento.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{5x-3}$

2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,dx$

4. $\displaystyle\int_1^\infty \ln(x^2)\,dx$

5. $\displaystyle\int_0^2 e^{-x}\,dx$

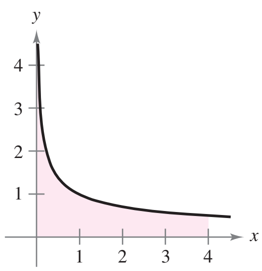
6. $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\,dx$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{4+x^2}\,dx$

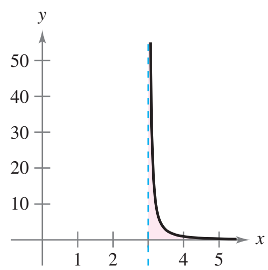
8. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \csc x\,dx$

En los ejercicios 9 a 14, explicar por qué la integral es impropia y determinar si es divergente o convergente. Evaluar las que sean convergentes.

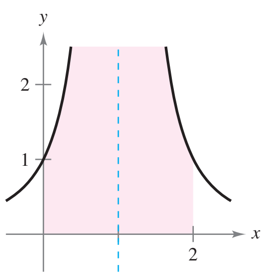
9. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$



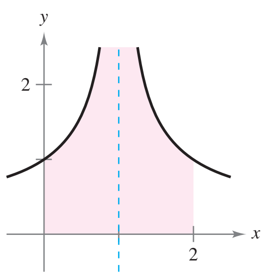
10. $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^{3/2}}\,dx$



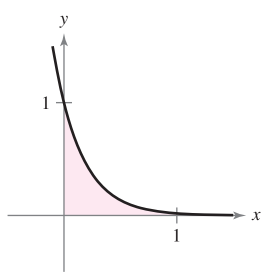
11. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$



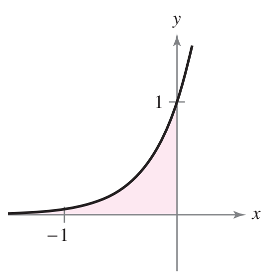
12. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$



13. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$



14. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{3x}\,dx$



Redacción **En los ejercicios 15 a 18, explicar por qué la evaluación de la integral es *incorrecta*. Usar la integración en una herramienta de graficación para intentar evaluar la integral. Determinar si la herramienta de graficación da la respuesta correcta.**

15. $\cancel{\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = -2}$

16. $\cancel{\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{-2}{(x-1)^3}\,dx = \frac{8}{9}}$

17. $\cancel{\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 0}$

18. $\cancel{\displaystyle\int_0^\pi \sec x\,dx = 0}$

En los ejercicios 19 a 36, determinar si la integral impropia es divergente o convergente. Evaluar la integral si es convergente.

19. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$

20. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3}{x^5}\,dx$

21. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

22. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{4}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{-4x}\,dx$

24. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x/4}\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$

26. $\displaystyle\int_0^\infty (x-1)e^{-x}\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx, \quad a>0$

29. $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

30. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

31. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{4}{16+x^2}\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

34. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

35. $\displaystyle\int_0^\infty \cos \pi x\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx$

En los ejercicios 37 a 54, determinar si la integral impropia es divergente o convergente. Evaluar la integral si converge, y verificar los resultados con los obtenidos usando una herramienta de graficación para hacer la gráfica.

37. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

38. $\displaystyle\int_0^5 \frac{10}{x}\,dx$

39. $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}\,dx$

40. $\displaystyle\int_0^{12} \frac{9}{\sqrt{12-x}}\,dx$

41. $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$

42. $\displaystyle\int_0^e \ln x^2\,dx$

43. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan\theta\,d\theta$

44. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec\theta\,d\theta$

45. $\displaystyle\int_2^4 \frac{2}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$

47. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

48. $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{25-x^2}\,dx$

49. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

50. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2}{(x-2)^{8/3}}\,dx$

51. $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx$

52. $\displaystyle\int_5^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-25}}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{4}{\sqrt{x}(x+6)}\,dx$

54. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

En los ejercicios 55 y 56, determinar todos los valores de p para los que la integral impropia es convergente.

55. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

56. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx$

57. Usar la inducción matemática para verificar que la integral siguiente converge para todo entero positivo n.

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$$

58. ***Prueba de comparación de integrales impropias*** En algunos casos, es imposible encontrar el valor preciso de una integral impropia, aunque es importante determinar si la integral converge o diverge. Suponer que las funciones f y g son continuas y que $0 \le f(x) \le g(x)$ en el intervalo $[a, \infty)$. Se puede mostrar que si $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ igualmente lo hace, y si $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ también diverge. Esto se conoce como la prueba de comparación de integrales impropias.

a) Utilizar la prueba de comparación para determinar si $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge o diverge. (*Sugerencia:* Utilizar el hecho de que $e^{-x^2} \le e^{-x}$ para $x \ge 1$.)

b) Usar la prueba de comparación para determinar si $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5+1}\,dx$ converge o diverge. (*Sugerencia:* Utilizar el hecho de que $\frac{1}{x^5+1} \le \frac{1}{x^5}$ para $x \ge 1$.)

En los ejercicios 59 a 70, usar los resultados de los ejercicios 55 a 58 para determinar si la integral impropia converge o diverge.

59. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^5}\,dx$

60. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,dx$

61. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5}\,dx$

62. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^4 e^{-x}\,dx$

63. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+5}\,dx$

64. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

65. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}\,dx$

66. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$

67. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x}\,dx$

68. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+x}\,dx$

69. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1-\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$

70. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\,dx$

Desarrollo de conceptos

71. Describir los diferentes tipos de integrales impropias.

72. Definir las condiciones de *convergencia* o *divergencia* al trabajar con integrales impropias.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

73. Explicar por qué $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx \neq 0$.

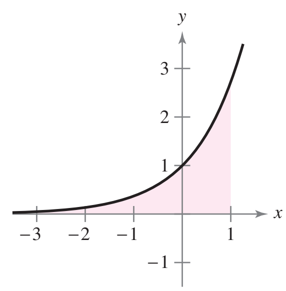
74. Considerar la integral

$$\int_0^3 \frac{10}{x^2-2x}\,dx.$$

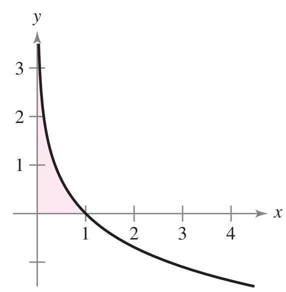
Para determinar la convergencia o divergencia de la integral, ¿cuántas integrales impropias deben analizarse? ¿Qué debe ser verdadero en cada integral para que la integral dada converja?

Área **En los ejercicios 75 a 78, encontrar el área no acotada de la región sombreada.**

75. $y = e^x, \quad -\infty < x \le 1$

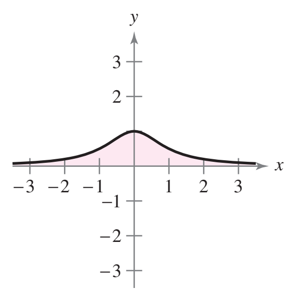


76. $y = -\ln x$



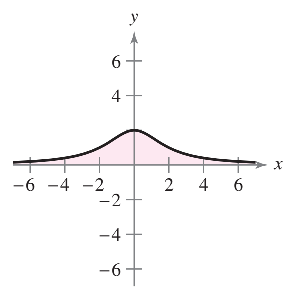
77. La bruja de Agnesi:

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$



78. La bruja de Agnesi:

$$y = \frac{8}{x^2+4}$$



Área y volumen **En los ejercicios 79 y 80, considerar la región que satisface las desigualdades. *a*) Encontrar el área de la región. *b*) Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje x. *c*) Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje y.**

79. $y \le e^{-x},\ y \ge 0,\ x \ge 0$

80. $y \le \dfrac{1}{x^2},\ y \ge 0,\ x \ge 1$

81. ***Longitud de arco*** Dibujar la gráfica del hipocicloide de cuatro cúspides $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ y encontrar su perímetro.

82. ***Longitud de arco*** Encontrar la longitud de arco de la gráfica de $y = \sqrt{16-x^2}$ sobre el intervalo $[0, 4]$.

83. ***Área de una superficie*** La región acotada por $(x-2)^2 + y^2 = 1$ se gira alrededor del eje y para formar un toro. Encontrar el área de la superficie del toro.

84. ***Área de una superficie*** Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de $y = 2e^{-x}$ en el intervalo $[0, \infty)$ alrededor del eje x.

Propulsión **En los ejercicios 85 y 86, usar el peso del cohete para contestar cada pregunta. (Usar 4 000 millas como el radio de la Tierra y no considerar el efecto de la resistencia al aire.)**

a) **¿Cuánto trabajo se requiere para propulsar el cohete a una distancia infinita fuera de la superficie de la Tierra?**

b) **¿Qué tan lejos ha viajado el cohete cuando la mitad del trabajo total ha ocurrido?**

85. Cohete de 5 toneladas **86.** Cohete de 10 toneladas

Probabilidad **Una función no negativa *f* se llama *función de densidad de probabilidad* si**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1.$$

La probabilidad de que *x* quede entre *a* y *b* está dada por

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

El valor esperado de *x* está dado por

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\, dt.$$

En los ejercicios 87 y 88, *a*) mostrar que la función no negativa es una función de densidad de probabilidad, *b*) encontrar $P(0 \le x \le 4)$ y *c*) encontrar $E(x)$.

87. $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{7}e^{-t/7}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ **88.** $f(t) = \begin{cases} \frac{2}{5}e^{-2t/5}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

Costo capitalizado **En los ejercicios 89 y 90, encontrar el costo capitalizado *C* de un recurso *a*) para $n = 5$ años, *b*) para $n = 10$ años y *c*) para siempre. El costo capitalizado está dado por**

$$C = C_0 + \int_0^n c(t)e^{-rt}\, dt$$

donde C_0 es la inversión original, *t* es el tiempo en años, *r* es el interés compuesto continuo del interés anual y $c(t)$ es el costo anual de mantenimiento.

89. $C_0 = \$650\,000$
$c(t) = \$25\,000$
$r = 0.06$

90. $C_0 = \$650\,000$
$c(t) = \$25\,000(1 + 0.08t)$
$r = 0.06$

91. ***Teoría electromagnética*** El potencial magnético P en un punto en el eje de un circuito circular está dado por

$$P = \frac{2\pi NIr}{k}\int_c^{\infty} \frac{1}{(r^2 + x^2)^{3/2}}\, dx$$

donde N, I, r, k y c son las constantes. Encontrar P.

92. ***Fuerza gravitacional*** Una varilla uniforme "semiinfinita" ocupa el eje x no negativo. La varilla tiene una densidad lineal δ la cual mide un segmento de longitud dx que tiene una masa de $\delta\, dx$. Una partícula de masa M se localiza en el punto $(-a, 0)$. La fuerza gravitatoria F que la varilla ejerce en la masa está dada por $F = \int_0^{\infty} \frac{GM\delta}{(a + x)^2}\, dx$, donde G es la constante gravitatoria. Encontrar F.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 93 a 96, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falso.**

93. Si f es continua en $[0, \infty)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ converge.

94. Si f es continua en $[0, \infty)$ y $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ diverge, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \ne 0$.

95. Si f' es continua en $[0, \infty)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces, $\int_0^{\infty} f'(x)\, dx = -f(0)$.

96. Si la gráfica de f es simétrica con respecto al origen o al eje y, entonces $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ converge si y sólo si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ converge.

97. *a*) Demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x\, dx$ diverge.

b) Demostrar que $\lim\limits_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \operatorname{sen} x\, dx = 0$.

c) ¿Qué indican los incisos *a*) y *b*) acerca de la definición de integrales impropias?

Para discusión

98. Para cada integral, encontrar el número real no negativo b que haga que la integral sea impropia. Explicar el razonamiento.

a) $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^2 - 9}\, dx$ *b*) $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{\sqrt{4 - x}}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^b \frac{x}{x^2 - 7x + 12}\, dx$ *d*) $\displaystyle\int_b^{10} \ln x\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^b \tan 2x\, dx$ *f*) $\displaystyle\int_0^b \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}\, dx$

99. ***Redacción***

a) Las integrales impropias

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

divergen y convergen, respectivamente. Describir las diferencias esenciales entre los integrandos que son causa del distinto comportamiento.

b) Dibujar una gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x/x$ sobre el intervalo $(1, \infty)$. Usar el conocimiento de la integral definida para inferir si la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

converge o no. Dar las razones de la respuesta.

c) Usar una iteración de integración por partes en la integral en el inciso *b*) para determinar su divergencia o convergencia.

100. ***Exploración*** Considerar la integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4}{1 + (\tan x)^n}\, dx$$

donde n es un entero positivo.

a) ¿La integral es impropia? Explicar.
b) Usar una para hacer la gráfica del integrando para $n = 2$, 4, 8 y 12.
c) Usar las gráficas para aproximar la integral como $n \to \infty$.
CAS *d*) Usar un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral para los valores de n en el apartado *b*). Hacer una conjetura sobre el valor de la integral para cualquier entero positivo n. Comparar los resultados con la respuesta en el apartado *c*).

101. ***Función gamma*** La función gamma $\Gamma(n)$ se define por

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\, dx, \quad n > 0.$$

a) Encontrar $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$ y $\Gamma(3)$.
b) Usar la integración por partes para mostrar que $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$.
c) Escribir $\Gamma(n)$ usando notación factorial donde n es un entero positivo.

102. Demostrar que $I_n = \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)I_{n-1}$, donde

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}}\, dx, \quad n \geq 1.$$

Entonces evaluar cada integral.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^4}\, dx$ *b*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)^5}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^5}{(x^2+1)^6}\, dx$

Transformada de Laplace **Sea $f(t)$ una función definida para todos los valores positivos de t. La transformada de Laplace de $f(t)$ se define por**

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

si la integral impropia existe. Se usa la transformada de Laplace para resolver las ecuaciones diferenciales. En los ejercicios 103 a 110, encontrar la transformada de Laplace de la función.

103. $f(t) = 1$
104. $f(t) = t$
105. $f(t) = t^2$
106. $f(t) = e^{at}$
107. $f(t) = \cos at$
108. $f(t) = \text{sen}\, at$
109. $f(t) = \cosh at$
110. $f(t) = \text{senh}\, at$

111. ***Probabilidad normal*** La altura media de hombres estadounidenses entre 20 y 29 años de edad es 70 pulgadas, y la desviación estándar es 3 pulgadas. Un hombre de 20 a 29 años de edad es elegido al azar de entre la población. La probabilidad de que sea de 6 pies de alto o más es

$$P(72 \leq x < \infty) = \int_{72}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-70)^2/18}\, dx.$$

(*Fuente: National Center for Health Statistics*)

a) Usar una herramienta de graficación para representar gráficamente el integrando. Usar la herramienta de graficación para verificar que el área entre el eje x y el integrando es 1.
b) Usar una herramienta de graficación para aproximar $P(72 \leq x < \infty)$.
c) Aproximar $0.5 - P(70 \leq x \leq 72)$ usando una herramienta de graficación. Usar la gráfica en el inciso *a*) para explicar por qué este resultado es igual a la respuesta del inciso *b*).

112. *a*) Dibujar el semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$.

b) Explicar por qué

$$\int_{-2}^{2} \frac{2\, dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

sin evaluar cualquier integral.

113. ¿Para qué valor de c la integral converge?

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{c}{x+1}\right) dx$$

Evaluar la integral para este valor de c.

114. ¿Para qué valor de c la integral converge?

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{cx}{x^2+2} - \frac{1}{3x}\right) dx$$

Evaluar la integral para este valor de c.

115. ***Volumen*** Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por la gráfica de f alrededor del eje x.

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x, & 0 < x \leq 2 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

116. ***Volumen*** Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región no acotada que queda entre $y = -\ln x$ y el eje y $(y \geq 0)$ alrededor del eje x.

u-Sustitución **En los ejercicios 117 y 118, volver a escribir la integral impropia como una integral propia usando la sustitución de u dada. Entonces usar la regla de los trapecios con $n = 5$ para aproximar la integral.**

117. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{sen}\, x}{\sqrt{x}}\, dx, \quad u = \sqrt{x}$

118. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}\, dx, \quad u = \sqrt{1-x}$

119. *a*) Usar una herramienta de graficación para representar gráficamente la función $y = e^{-x^2}$.

b) Mostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\, dy.$

120. Sea $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ convergente y sean a y b los números reales donde $a \neq b$. Mostrar que

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\, dx.$$

8 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 a 8, usar las reglas básicas de integración para encontrar o evaluar la integral.

1. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-36}\,dx$
2. $\displaystyle\int xe^{x^2-1}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-49}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$
5. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(2x)}{x}\,dx$
6. $\displaystyle\int_{3/2}^{2} 2x\sqrt{2x-3}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{100}{\sqrt{100-x^2}}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

En los ejercicios 9 a 18, usar la integración por partes para encontrar la integral.

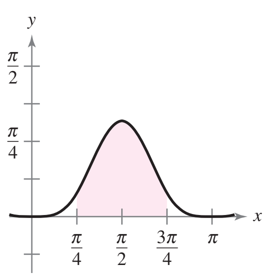
9. $\displaystyle\int xe^{3x}\,dx$
10. $\displaystyle\int x^3 e^x\,dx$
11. $\displaystyle\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\,dx$
12. $\displaystyle\int (x^2-3x)e^x\,dx$
13. $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$
14. $\displaystyle\int \arctan 2x\,dx$
15. $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen} 2x\,dx$
16. $\displaystyle\int \ln\sqrt{x^2-4}\,dx$
17. $\displaystyle\int x\operatorname{arcsen} 2x\,dx$
18. $\displaystyle\int e^x\arctan e^x\,dx$

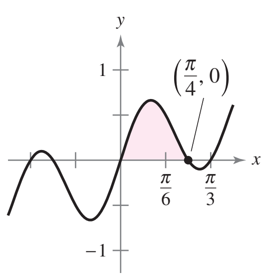
En los ejercicios 19 a 24, encontrar la integral trigonométrica.

19. $\displaystyle\int \cos^3(\pi x-1)\,dx$
20. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2}\,dx$
21. $\displaystyle\int \sec^4\frac{x}{2}\,dx$
22. $\displaystyle\int \tan\theta\sec^4\theta\,d\theta$
23. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$
24. $\displaystyle\int \cos 2\theta(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^2\,d\theta$

Área **En los ejercicios 25 y 26, encontrar el área de la región.**

25. $y=\operatorname{sen}^4 x$
26. $y=\operatorname{sen} 3x\cos 2x$





En los ejercicios 27 a 32, usar la sustitución trigonométrica para encontrar o evaluar la integral.

27. $\displaystyle\int \frac{-12}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$
28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx,\quad x>3$
29. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$
30. $\displaystyle\int \sqrt{25-9x^2}\,dx$
31. $\displaystyle\int_{-2}^{0}\sqrt{4-x^2}\,dx$
32. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+2\cos^2\theta}\,d\theta$

En los ejercicios 33 y 34, encontrar la integral usando cada método.

33. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$
   a) Sustitución trigonométrica
   b) Sustitución: $u^2=4+x^2$
   c) Integración por partes: $dv=(x/\sqrt{4+x^2})\,dx$

34. $\displaystyle\int x\sqrt{4+x}\,dx$
   a) Sustitución trigonométrica
   b) Sustitución: $u^2=4+x$
   c) Sustitución: $u=4+x$
   d) Integración por partes: $dv=\sqrt{4+x}\,dx$

En los ejercicios 35 a 40, usar las fracciones parciales para encontrar la integral.

35. $\displaystyle\int \frac{x-39}{x^2-x-12}\,dx$
36. $\displaystyle\int \frac{2x^3-5x^2+4x-4}{x^2-x}\,dx$
37. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{x^3-x^2+x-1}\,dx$
38. $\displaystyle\int \frac{4x-2}{3(x-1)^2}\,dx$
39. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+5x-24}\,dx$
40. $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta(\tan\theta-1)}\,d\theta$

En los ejercicios 41 a 48, usar la integración por tablas para encontrar o evaluar la integral.

41. $\displaystyle\int \frac{x}{(4+5x)^2}\,dx$
42. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4+5x}}\,dx$
43. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}/2}\frac{x}{1+\operatorname{sen}x^2}\,dx$
44. $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1+e^{x^2}}\,dx$
45. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+8}\,dx$
46. $\displaystyle\int \frac{3}{2x\sqrt{9x^2-1}}\,dx,\quad x>\frac{1}{3}$
47. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}\pi x\cos\pi x}\,dx$
48. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\tan\pi x}\,dx$

49. Verificar la fórmula de la reducción

$$\int(\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int(\ln x)^{n-1}\,dx.$$

50. Verificar la fórmula de la reducción

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - \int\tan^{n-2}x\,dx.$$

En los ejercicios 51 a 58, encontrar la integral usando cualquier método.

51. $\int \theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta \, d\theta$

52. $\int \frac{\csc \sqrt{2x}}{\sqrt{x}} \, dx$

53. $\int \frac{x^{1/4}}{1 + x^{1/2}} \, dx$

54. $\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} \, dx$

55. $\int \sqrt{1 + \cos x} \, dx$

56. $\int \frac{3x^3 + 4x}{(x^2 + 1)^2} \, dx$

57. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x) \, dx$

58. $\int (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2 \, d\theta$

En los ejercicios 59 a 62, resolver la ecuación diferencial usando cualquier método.

59. $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{x^2 - 25}$

60. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2x}$

61. $y' = \ln(x^2 + x)$

62. $y' = \sqrt{1 - \cos \theta}$

En los ejercicios 63 a 68, evaluar la integral definida usando cualquier método. Usar una herramienta de graficación para verificar el resultado.

63. $\int_2^{\sqrt{5}} x(x^2 - 4)^{3/2} \, dx$

64. $\int_0^1 \frac{x}{(x - 2)(x - 4)} \, dx$

65. $\int_1^4 \frac{\ln x}{x} \, dx$

66. $\int_0^2 xe^{3x} \, dx$

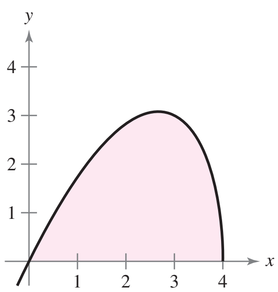
67. $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$

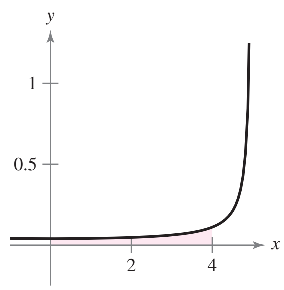
68. $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1 + x}} \, dx$

Área **En los ejercicios 69 y 70, encontrar el área de la región.**

69. $y = x\sqrt{4 - x}$

70. $y = \frac{1}{25 - x^2}$





Centroide **En los ejercicios 71 y 72, encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.**

71. $y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = 0$

72. $(x - 1)^2 + y^2 = 1, \quad (x - 4)^2 + y^2 = 4$

Longitud de arco **En los ejercicios 73 y 74, aproximar a dos posiciones decimales la longitud de arco de la curva sobre el intervalo dado.**

	Función	*Intervalo*
73.	$y = \operatorname{sen} x$	$[0, \pi]$
74.	$y = \operatorname{sen}^2 x$	$[0, \pi]$

En los ejercicios 75 a 82, usar la regla de L'Hôpital para evaluar el límite.

75. $\lim_{x \to 1} \frac{(\ln x)^2}{x - 1}$

76. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\operatorname{sen} 5\pi x}$

77. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$

78. $\lim_{x \to \infty} xe^{-x^2}$

79. $\lim_{x \to \infty} (\ln x)^{2/x}$

80. $\lim_{x \to 1^+} (x - 1)^{\ln x}$

81. $\lim_{n \to \infty} 1\,000\left(1 + \frac{0.09}{n}\right)^n$

82. $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{2}{\ln x} - \frac{2}{x - 1}\right)$

En los ejercicios 83 a 90, determinar si la integral impropia es divergente o convergente. Evaluar la integral si converge.

83. $\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \, dx$

84. $\int_0^2 \frac{7}{x - 2} \, dx$

85. $\int_1^{\infty} x^2 \ln x \, dx$

86. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} \, dx$

87. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

88. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \, dx$

89. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}} \, dx$

90. $\int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{x}(x + 4)} \, dx$

91. ***Valor presente*** La junta directiva de una corporación está calculando el precio a pagar por un negocio que se prevé rendirá un flujo continuo de ganancia de \$500 000 por año. Si el dinero ganará una tasa nominal de 5% por año compuesto continuamente, ¿cuál es el valor presente del negocio

   a) durante 20 años?

   b) para siempre (a perpetuidad)?

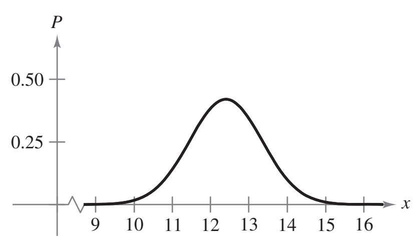
   (*Nota*: El valor presente para t_0 años es, $\int_0^{t_0} 500\,000e^{-0.05t} \, dt$.)

92. ***Volumen*** Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = xe^{-x}$, $y = 0$ y $x = 0$ alrededor del eje x.

93. ***Probabilidad*** La longitud media (del pico a la cola) de especies diferentes de pájaros orientales en Estados Unidos se distribuye aproximadamente con una media de 12.9 centímetros y una desviación normal de 0.95 centímetros (ver la figura). La probabilidad de que un pájaro seleccionado al azar tenga una longitud entre a y b centímetros es

$$P(a \quad x \quad b) = \frac{1}{0.95\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-(x-12.9)^2/2(0.95)^2} \, dx.$$

Usar una herramienta de graficación para aproximar la probabilidad de que un pájaro seleccionado al azar tenga una longitud de *a*) 13 centímetros o mayor y *b*) 15 centímetros o mayor. (*Fuente: Peterson's Field Guide: Eastern Birds*)



SP Solución de problemas

1. *a*) Evaluar las integrales

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2\, dx.$$

b) Usar las fórmulas de Wallis para demostrar que

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\, dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

para todos los n enteros positivos.

2. *a*) Evaluar las integrales $\int_0^1 \ln x\, dx$ y $\int_0^1 (\ln x)^2\, dx$.

b) Demostrar que

$$\int_0^1 (\ln x)^n\, dx = (-1)^n n!$$

para todos los n enteros positivos.

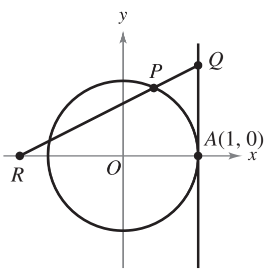
3. Encontrar el valor de la constante positiva c tal que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x + c}{x - c}\right)^x = 9.$$

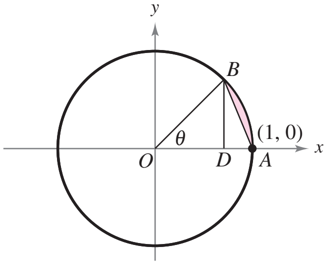
4. Encontrar el valor de la constante positiva c tal que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x - c}{x + c}\right)^x = \frac{1}{4}.$$

5. La recta $x = 1$ es tangente a la circunferencia unitaria en A. La longitud del segmento QA es igual a la longitud del arco circular $\overset{\frown}{PA}$ (ver la figura). Mostrar que la longitud del segmento OR tiende a 2 cuando P tiende a A.



6. El segmento BD es la altura de $\triangle OAB$. Sea R el cociente entre el área de $\triangle DAB$ y de la región sombreada formada al suprimir $\triangle OAB$ en el sector circular subtendido por el ángulo θ (ver la figura). Encontrar $\lim_{\theta\to 0^+} R$.



7. Encontrar el área de la región acotada por el eje x, la recta $x = 4$ y la curva

$$y = \frac{x^2}{(x^2 + 9)^{3/2}}.$$

a) Usar una herramienta de graficación para hacer la gráfica de la región y aproximar su área.

b) Usar una sustitución trigonométrica apropiada para encontrar el área exacta.

c) Usar la sustitución $x = 3$ senh u para encontrar el área exacta y verificar que se obtiene la misma respuesta que en el inciso *b*).

8. Usar la sustitución $u = \tan \dfrac{x}{2}$ para encontrar el área de la región sombreada bajo la gráfica de $y = \dfrac{1}{2 + \cos x}$, $0 \le x \le \pi/2$ (ver la figura).

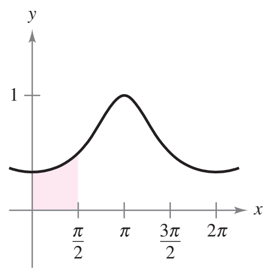


Figura para 8

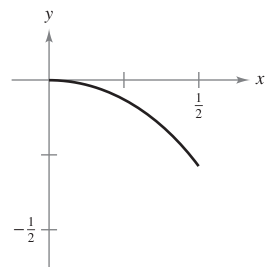
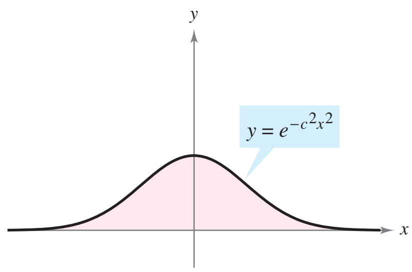


Figura para 9

9. Encontrar la longitud de arco de la gráfica de la función $y = \ln(1 - x^2)$ en el intervalo $0 \le x \le \frac{1}{2}$ (ver la figura).

10. Encontrar el centroide de la región sobre el eje x y acotada anteriormente por la curva $y = e^{-c^2x^2}$ donde c es una constante positiva (ver la figura).

$\left(\textit{Sugerencia:}\ \text{Mostrar que } \displaystyle\int_0^\infty e^{-c^2x^2}\, dx = \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.\right)$



11. Algunas funciones elementales, tales como $f(x) = \text{sen}(x^2)$, no tienen antiderivadas que son funciones elementales. Joseph Liouville comprobó que

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx$$

no tiene una antiderivada elemental. Utilizar este hecho para demostrar que

$$\int \frac{1}{\ln x}\, dx$$

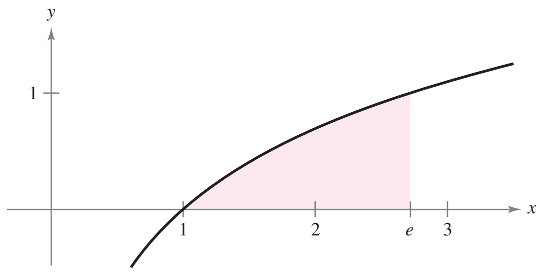
no es elemental.

12. *a*) Sea $y = f^{-1}(x)$ la función inversa de f. Usar la integración por partes para derivar la fórmula

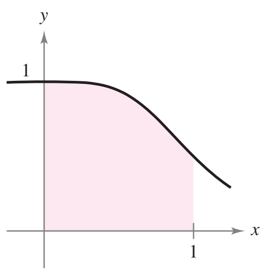
$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)\,dy.$$

b) Usar la fórmula del inciso *a*) para encontrar la integral $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$.

c) Usar la fórmula del inciso *a*) para encontrar el área bajo la gráfica de $y = \ln x$, $1 \le x \le e$ (ver la figura).



13. Factorizar el polinomio $p(x) = x^4 + 1$ y entonces encontrar el área bajo la gráfica de $y = \dfrac{1}{x^4 + 1}$, $0 \le x \le 1$ (ver la figura).



14. *a*) Usar la sustitución $u = \dfrac{\pi}{2} - x$ para evaluar la integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx.$$

b) Sea n un entero positivo. Evaluar la integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^n x + \operatorname{sen}^n x}\,dx.$$

15. Usar una herramienta de graficación para estimar cada límite. Entonces calcular cada límite usando la regla de L'Hôpital. ¿Qué se puede concluir sobre la forma indeterminada $0 \cdot \infty$?

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\cot x + \frac{1}{x}\right)$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\cot x + \frac{1}{x}\right)\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)\right]$

16. Suponer que el denominador de una fracción se descompone en productos de factores lineales distintos

$$D(x) = (x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

para un n entero positivo y un número real distinto $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Si N es un polinomio de grado menor de n, mostrar que

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{P_1}{x - c_1} + \frac{P_2}{x - c_2} + \cdots + \frac{P_n}{x - c_n}$$

donde $P_k = N(c_k)/D'(c_k)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Notar que esto es la descomposición de las fracciones simples de $N(x)/D(x)$.

17. Usar los resultados del ejercicio 16 para encontrar la descomposición de las fracciones parciales de

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^4 - 13x^2 + 12x}.$$

18. La velocidad v (en pies por segundo) de un cohete cuya masa inicial (incluido el combustible) es m, está dada por

$$v = gt + u \ln \frac{m}{m - rt}, \quad t < \frac{m}{r}$$

donde u es la velocidad de la expulsión del combustible, r es la proporción en que el combustible se consume, y $g = -32$ pies/s^2 son la aceleración debida a la gravedad. Encontrar la ecuación de la posición para un cohete para el cual $m = 50\,000$ libras, $u = 12\,000$ pies por segundo y $r = 400$ libras por segundo. ¿Cuál es la altura del cohete cuando $t = 100$ segundos? (Asumir que el cohete despegó al nivel del suelo y se desplaza verticalmente.)

19. Suponer que $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$ y las segundas derivadas de f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Demostrar que

$$\int_a^b f(x)g''(x)\,dx = \int_a^b f''(x)g(x)\,dx.$$

20. Suponer que $f(a) = f(b) = 0$ y las segundas derivadas de f existen en el intervalo cerrado $[a, b]$. Demostrar que

$$\int_a^b (x - a)(x - b)f''(x)\,dx = 2\int_a^b f(x)\,dx.$$

21. Usando la desigualdad

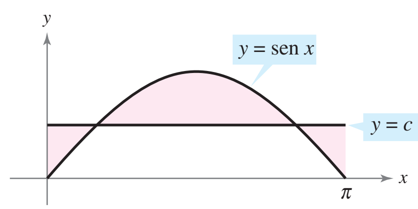
$$\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^{10}} + \frac{1}{x^{15}} < \frac{1}{x^5 - 1} < \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^{10}} + \frac{2}{x^{15}}$$

para $x \ge 2$, aproximar $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^5 - 1}\,dx$.

22. Considerar la región sombreada entre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, donde $0 \le x \le \pi$, y la línea $y = c$, donde $0 \le c \le 1$ (ver la figura). Se forma un sólido al girar la región alrededor de la recta $y = c$.

a) ¿Para qué valor de c el sólido tiene un volumen mínimo?

b) ¿Para qué valor de c el sólido tiene un volumen máximo?



9 Series infinitas

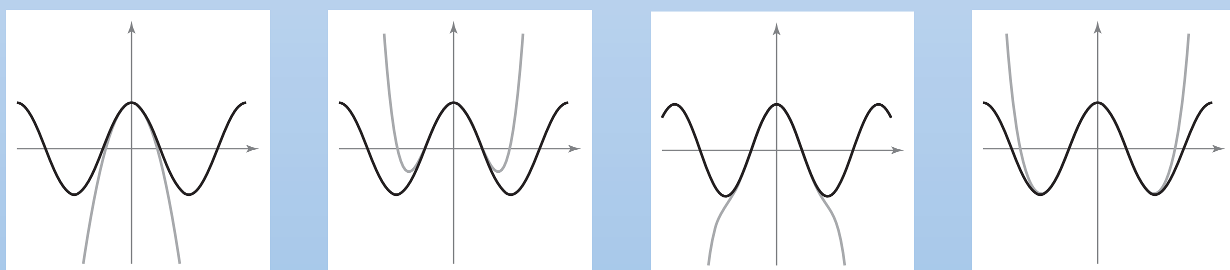
Este capítulo se divide en dos partes. Las primeras seis secciones describen sucesiones infinitas y series infinitas. Las últimas cuatro estudian polinomios de Taylor y Maclaurin y series de potencias.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo determinar si una sucesión converge o diverge. (**9.1**)
- Cómo determinar si una serie infinita converge o diverge. (**9.2 a 9.6**)
- Cómo encontrar las aproximaciones polinomiales de Taylor o Maclaurin de funciones elementales. (**9.7**)
- Cómo encontrar el radio y el intervalo de convergencia de una serie de potencias y cómo diferenciar e integrar la serie de potencias. (**9.8**)
- Cómo representar funciones mediante series de potencia. (**9.9**)
- Cómo encontrar una serie de Taylor o de Maclaurin para una función. (**9.10**)

Eric Haines

El copo esférico que se muestra arriba es un fractal generado por computadora que creó Eric Haines. El radio de la esfera grande es de 1. A la esfera grande se unen nueve esferas que tienen $\frac{1}{3}$ de radio. A cada una de éstas, se añaden nueve esferas que tienen $\frac{1}{9}$ de radio. Este proceso continúa de manera infinita. ¿El área superficial del copo esférico es finita o infinita? (Ver la sección 9.2, ejercicio 114.)



Los *polinomios* de Maclaurin aproximan una función dada en un intervalo cerca de $x = 0$. A medida que se agregan términos al polinomio de Maclaurin, éste se convierte en una aproximación cada vez mejor de la función dada cerca de $x = 0$. En la sección 9.10 se verá que la *serie* de Maclaurin equivale a la función dada (bajo condiciones adecuadas).

9.1 Sucesiones

- Enunciar los términos de una sucesión.
- Determinar si una sucesión converge o diverge.
- Escribir una fórmula para el término *n*-ésimo de una sucesión.
- Usar las propiedades de las sucesiones monótonas y de las sucesiones acotadas.

Sucesiones

En matemáticas, la palabra "sucesión" se usa en un sentido muy parecido al lenguaje usual. Se dice que una colección de objetos o eventos está en *sucesión* significa generalmente que la colección está ordenada de manera que tiene un primer miembro, un segundo miembro, un tercer miembro, y así sucesivamente.

Matemáticamente, una **sucesión** se define como una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. Aunque una sucesión es una función, es común representar las sucesiones empleando subíndices en lugar de la notación habitual de la función. Por ejemplo, en la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots, & a_n, & \ldots \end{array}$$

Sucesión.

al 1 se le asigna a_1, al 2 se le asigna a_2, y así sucesivamente. Los números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$ son los **términos** de la sucesión. El número a_n es el **término *n*-ésimo** de la sucesión, y la sucesión completa se denota por $\{a_n\}$.

EXPLORACIÓN

Búsqueda de patrones Describir un patrón para cada una de las sucesiones siguientes. Después usar la descripción para escribir una fórmula para el término *n*-ésimo de cada sucesión. A medida que *n* se incrementa, ¿los términos parecen acercarse a algún límite? Explique su razonamiento.

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots$

c) $10, \frac{10}{3}, \frac{10}{6}, \frac{10}{10}, \frac{10}{15}, \ldots$

d) $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}, \frac{25}{36}, \ldots$

e) $\frac{3}{7}, \frac{5}{10}, \frac{7}{13}, \frac{9}{16}, \frac{11}{19}, \ldots$

NOTA De vez en cuando, es conveniente empezar una sucesión con a_0, para que los términos de la sucesión sean $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ■

EJEMPLO 1 Dar los términos de una sucesión

a) Los términos de la sucesión $\{a_n\} = \{3 + (-1)^n\}$ son

$$\begin{array}{ccccc} 3 + (-1)^1, & 3 + (-1)^2, & 3 + (-1)^3, & 3 + (-1)^4, & \ldots \\ 2, & 4, & 2, & 4, & \ldots \end{array}$$

b) Los términos de la sucesión $\{b_n\} = \left\{\dfrac{n}{1-2n}\right\}$ son

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{1}{1-2\cdot 1}, & \dfrac{2}{1-2\cdot 2}, & \dfrac{3}{1-2\cdot 3}, & \dfrac{4}{1-2\cdot 4}, & \ldots \\ -1, & -\dfrac{2}{3}, & -\dfrac{3}{5}, & -\dfrac{4}{7}, & \ldots \end{array}$$

c) Los términos de la sucesión $\{c_n\} = \left\{\dfrac{n^2}{2^n - 1}\right\}$ son

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{1^2}{2^1-1}, & \dfrac{2^2}{2^2-1}, & \dfrac{3^2}{2^3-1}, & \dfrac{4^2}{2^4-1}, & \ldots \\ \dfrac{1}{1}, & \dfrac{4}{3}, & \dfrac{9}{7}, & \dfrac{16}{15}, & \ldots \end{array}$$

d) Los términos de la sucesión definida en forma **recursiva o recurrente** $\{d_n\}$, donde $d_1 = 25$ y $d_{n+1} = d_n - 5$, son

$$25, \quad 25 - 5 = 20, \quad 20 - 5 = 15, \quad 15 - 5 = 10, \ldots$$

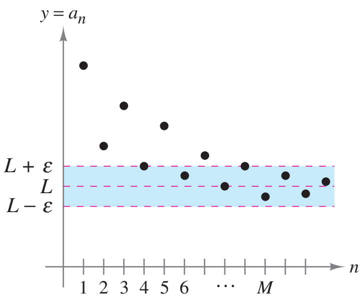
AYUDA DE ESTUDIO Algunas sucesiones se definen en forma recursiva o recurrente. Para definir una sucesión en forma recursiva se necesita dar uno o más de los primeros términos. Todos los otros términos de la sucesión son definidos usando los términos anteriores, como se muestra en el ejemplo 1*d*.

Límite de una sucesión

El punto principal de este capítulo son las sucesiones cuyos términos tienden a valores límite. Tales sucesiones se llaman **convergentes**. Por ejemplo, la sucesión $\{1/2^n\}$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

converge a 0, como se indica en la definición siguiente.



Para $n > M$, todos los términos de la sucesión distan de L menos de ε unidades
Figura 9.1

DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Sea L un número real. El **límite** de una sucesión $\{a_n\}$ es L, escrito como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n > M$. Si el límite L de una sucesión existe, entonces la sucesión **converge** a L. Si el límite de una sucesión no existe, entonces la sucesión **diverge**.

Gráficamente, esta definición dice que finalmente (para $n > M$ y $\varepsilon > 0$) los términos de una sucesión que converge a L quedarán dentro de la franja entre las rectas $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$, como se muestra en la figura 9.1.

Si una sucesión $\{a_n\}$ coincide con una función f en cada entero positivo, y si $f(x)$ tiende a un límite L a medida que $x \to \infty$, la sucesión debe converger al mismo límite L.

TEOREMA 9.1 LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Sea L un número real. Sea f una función de una variable real tal que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que $f(n) = a_n$ para cada entero positivo n, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

NOTA El inverso del teorema 9.1 no es cierto (ver el ejercicio 138). ■

EJEMPLO 2 Encuentre el límite de una sucesión

Hallar el límite de la sucesión cuyo término n-ésimo es

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Solución A partir del teorema 5.15

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Por tanto, puede aplicar el teorema 9.1 para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

NOTA Hay diferentes situaciones en las que una sucesión puede no tener un límite. Una situación así es cuando los términos de la sucesión crecen sin límite o decrecen sin límite. Estos casos son escritos simbólicamente como sigue.

Los términos crecen sin límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Los términos decrecen sin límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad ■$$

Las siguientes propiedades de límites de sucesiones corresponden a aquellas dadas para los límites de funciones en una variable real en la sección 1.3.

TEOREMA 9.2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE SUCESIONES

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = K$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L \pm K$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = cL$, c es cualquier número real

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = LK$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L}{K}$, $b_n \neq 0$ y $K \neq 0$

EJEMPLO 3 Análisis de convergencia o divergencia

a) Como la sucesión $\{a_n\} = \{3 + (-1)^n\}$ tiene los términos

$$2, 4, 2, 4, \ldots$$

Vea el ejemplo 1*a*, página 596.

que alternan entre 2 y 4, el límite

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

no existe. Por tanto, la sucesión diverge.

b) Para $\{b_n\} = \left\{\dfrac{n}{1-2n}\right\}$, divida el numerador y denominador entre n para obtener

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/n)-2} = -\frac{1}{2}$$

Vea el ejemplo 1*b*, página 596.

lo cual implica que la sucesión converge a $-\frac{1}{2}$.

EJEMPLO 4 Uso de la regla de L'Hôpital para determinar la convergencia

Mostrar que la sucesión cuyo término n-ésimo es $a_n = \dfrac{n^2}{2^n - 1}$ converge.

Solución Considere la función en una variable real

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x - 1}.$$

Aplicando la regla de L'Hôpital dos veces se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{(\ln 2)2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{(\ln 2)^2 2^x} = 0.$$

Como $f(n) = a_n$ para todo entero positivo, puede aplicarse el teorema 9.1 para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n - 1} = 0.$$

Vea el ejemplo 1*c*, página 596.

Así, la sucesión converge a 0.

TECNOLOGÍA Representar en una herramienta de graficación la función del ejemplo 4. Nótese que cuando x tiende a infinito, el valor de la función se acerca a 0. Si se tiene acceso a una herramienta de graficación que pueda generar los términos de una sucesión, úsese para generar los primeros 20 términos de la sucesión del ejemplo 4. Después examinar los términos para observar numéricamente que la sucesión converge a 0.

El símbolo $n!$ (se lee "n factorial" o "factorial de n") se usa para simplificar algunas de las fórmulas desarrolladas en este capítulo. Sea n un entero positivo; entonces ***n* factorial** se define como

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n.$$

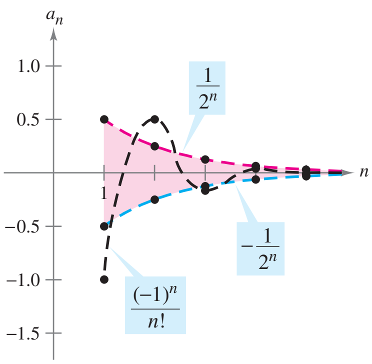
Como un caso especial, el **cero factorial** se define como $0! = 1$. De esta definición, se puede ver que $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, y así sucesivamente. Los factoriales siguen las mismas convenciones respecto al orden de las operaciones que los exponentes. Es decir, así como $2x^3$ y $(2x)^3$ implican un orden diferente de las operaciones, $2n!$ y $(2n)!$ implica los órdenes siguientes.

$$2n! = 2(n!) = 2(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n)$$

y

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n \cdot (n+1) \cdots 2n$$

Otro teorema útil para límites que puede reescribirse para sucesiones es el teorema del encaje o del emparedado de la sección 1.3.



Para $n \geq 4$, $(-1)^n/n!$ queda confirmado entre $-1/2^n$ y $1/2^n$
Figura 9.2

TEOREMA 9.3 TEOREMA DEL ENCAJE O DEL EMPAREDADO PARA SUCESIONES

Si

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L = \lim_{n \to \infty} b_n$$

y existe un entero N tal que $a_n \leq c_n \leq b_n$ para todo $n > N$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} c_n = L.$$

EJEMPLO 5 Aplicación del teorema del encaje

Pruebe que la sucesión $\{c_n\} = \left\{(-1)^n \frac{1}{n!}\right\}$ converge, y encuentre su límite.

Solución Para aplicar el teorema del encaje, debe encontrar dos sucesiones convergentes que puedan relacionarse a la sucesión dada. Dos posibilidades son $a_n = -1/2^n$ y $b_n = 1/2^n$, ambas convergen en 0. Comparando el término $n!$ con 2^n, se puede ver que

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots n = 24 \cdot \underbrace{5 \cdot 6 \cdots n}_{n-4 \text{ factores}} \qquad (n \geq 4)$$

y

$$2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 16 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n-4 \text{ factores}}. \qquad (n \geq 4)$$

Esto implica que para $n \geq 4$, $2^n < n!$, y tiene

$$\frac{-1}{2^n} \leq (-1)^n \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 4$$

como se muestra en la figura 9.2. Por tanto, el teorema del encaje o del emparedado implica que

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n \frac{1}{n!} = 0.$$

NOTA El ejemplo 5 sugiere algo acerca del ritmo o velocidad a la que $n!$ aumenta cuando $n \to \infty$. Como la figura 9.2 sugiere, ambos $1/2^n$ y $1/n!$ tienden a 0 a medida que $n \to \infty$. Si bien $1/n!$ se aproxima a 0 mucho más rápido que $1/2^n$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1/n!}{1/2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

De hecho, puede demostrarse que para cualquier número fijo k,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{k^n}{n!} = 0.$$

Esto significa que *la función factorial crece más rápido que cualquier función exponencial.* ■

En el ejemplo 5, la sucesión $\{c_n\}$ tiene tanto términos positivos como negativos. Para esta sucesión, sucede que la sucesión de valores absolutos, $\{|c_n|\}$, también converge a 0. Esto se puede demostrar por medio del teorema del encaje o del emparedado usando la desigualdad

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 4.$$

En tales casos, es a menudo conveniente considerar la sucesión de los valores absolutos y entonces aplicar el teorema 9.4 que establece que si la sucesión de los valores absolutos converge a 0, la sucesión original también converge a 0.

TEOREMA 9.4 TEOREMA DE VALOR ABSOLUTO

Dada la sucesión $\{a_n\}$, si

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \qquad \text{entonces} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

DEMOSTRACIÓN Considere las dos sucesiones $\{|a_n|\}$ y $\{-|a_n|\}$. Como ambas sucesiones convergen a 0 y

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

se puede usar el teorema del encaje o del emparedado para concluir que $\{a_n\}$ converge a 0.

Reconocimiento de patrones en las sucesiones

A veces los términos de una sucesión se generan mediante alguna regla que no identifica explícitamente el término n-ésimo de la sucesión. En tales casos, puede ser necesario descubrir el *patrón* en la sucesión y describir el término n-ésimo. Una vez que el término n-ésimo se ha especificado, se puede investigar la convergencia o divergencia de la sucesión.

EJEMPLO 6 El término *n*-ésimo de una sucesión

Hallar una sucesión $\{a_n\}$ cuyos cinco primeros términos son

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{16}{7}, \frac{32}{9}, \ldots$$

y después determine si la sucesión particular que se ha elegido converge o diverge.

Solución Primero, note que los numeradores son potencias sucesivas de 2, y los denominadores forman la sucesión de enteros impares positivos. Comparando a_n con n, se tiene el esquema siguiente.

$$\frac{2^1}{1}, \frac{2^2}{3}, \frac{2^3}{5}, \frac{2^4}{7}, \frac{2^5}{9}, \ldots, \frac{2^n}{2n-1}$$

Usando la regla de L'Hôpital para evaluar el límite de $f(x) = 2^x/(2x-1)$, se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x(\ln 2)}{2} = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2n-1} = \infty.$$

Por tanto, la sucesión diverge.

Sin una regla específica para la generación de los términos de una sucesión o algún conocimiento del contexto en que se obtienen los términos de la sucesión, no es posible determinar la convergencia o divergencia de la sucesión meramente a partir de sus primeros términos. Por ejemplo, aunque los primeros tres términos de las siguientes cuatro sucesiones son idénticos, las primeras dos sucesiones convergen a 0, la tercera sucesión converge a $\frac{1}{9}$, y la cuarta sucesión diverge.

$$\{a_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

$$\{b_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \ldots, \frac{6}{(n+1)(n^2-n+6)}, \ldots$$

$$\{c_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{62}, \ldots, \frac{n^2-3n+3}{9n^2-25n+18}, \ldots$$

$$\{d_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, \ldots, \frac{-n(n+1)(n-4)}{6(n^2+3n-2)}, \ldots$$

El proceso de determinar un término n-ésimo a partir del patrón observado en los primeros términos de una sucesión es un ejemplo de *razonamiento inductivo*.

EJEMPLO 7 Cálculo del término *n*-ésimo de una sucesión

Determine un término n-ésimo de una sucesión cuyos primeros cinco términos son

$$-\frac{2}{1}, \frac{8}{2}, -\frac{26}{6}, \frac{80}{24}, -\frac{242}{120}, \ldots$$

y después decida si la sucesión converge o diverge.

Solución Note que los numeradores son de la forma 3^n menos 1. Por tanto, se puede razonar que los numeradores están dados por la regla $3^n - 1$. Factorizando los denominadores se obtiene

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
2 &= 1 \cdot 2\\
6 &= 1 \cdot 2 \cdot 3\\
24 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\\
120 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots
\end{aligned}$$

Esto sugiere que los denominadores son de la forma $n!$ Finalmente, como los signos son alternados, se puede escribir el término n-ésimo como

$$a_n = (-1)^n\left(\frac{3^n - 1}{n!}\right).$$

De la discusión sobre el crecimiento de $n!$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 1}{n!} = 0.$$

Aplicando el teorema 9.4, puede concluirse que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Así, la sucesión $\{a_n\}$ converge a 0.

Sucesiones monótonas y sucesiones acotadas

Hasta ahora se ha determinado la convergencia de una sucesión encontrando su límite. Aun cuando no pueda determinarse el límite de una sucesión particular, puede ser útil saber si la sucesión converge. El teorema 9.5 proporciona un criterio de convergencia para sucesiones sin determinar el límite. Primero, se dan algunas definiciones preliminares.

DEFINICIÓN DE UNA SUCESIÓN MONÓTONA

Una sucesión $\{a_n\}$ es **monótona** si sus términos son no decrecientes

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots$$

o si sus términos son no crecientes

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots.$$

EJEMPLO 8 Determinar si una sucesión es monótona

Determinar si la sucesión que tiene el término n-ésimo dado es monótona.

a) $a_n = 3 + (-1)^n$ ***b)*** $b_n = \dfrac{2n}{1+n}$ ***c)*** $c_n = \dfrac{n^2}{2^n - 1}$

Solución

a) Esta sucesión alterna entre 2 y 4. Por tanto, no es monótona.

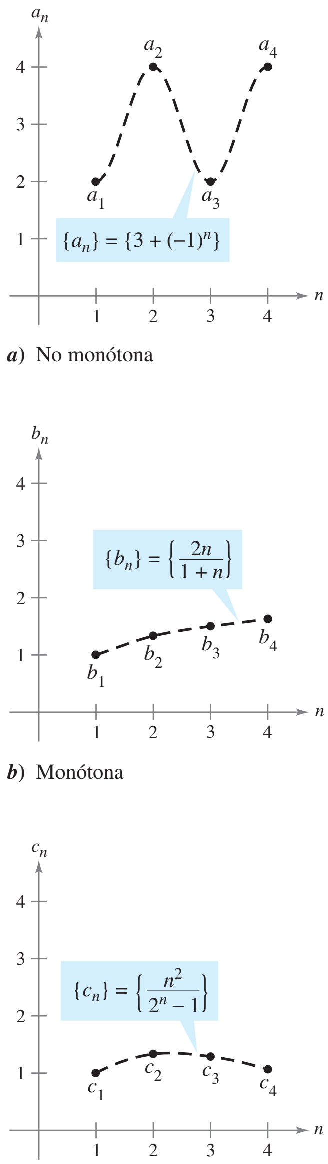
b) Esta sucesión es monótona porque cada término sucesivo es mayor que su predecesor. Para ver esto, comparar los términos b_n y b_{n+1}. [Nótese que, como n es positivo, se puede multiplicar cada lado de la desigualdad por $(1 + n)$ y $(2 + n)$ sin invertir el signo de la desigualdad.]

$$\begin{aligned} b_n = \frac{2n}{1+n} &\overset{?}{<} \frac{2(n+1)}{1+(n+1)} = b_{n+1} \\ 2n(2+n) &\overset{?}{<} (1+n)(2n+2) \\ 4n + 2n^2 &\overset{?}{<} 2 + 4n + 2n^2 \\ 0 &< 2 \end{aligned}$$

Empezando con la última desigualdad, que es válida, se pueden invertir los pasos para concluir que la desigualdad original también es válida.

c) Esta sucesión no es monótona, porque el segundo término es mayor que el primer término, y mayor que el tercero. (Nótese que si se suprime el primer término, la sucesión resultante $c_2, c_3, c_4, \ldots$ es monótona.)

La figura 9.3 ilustra gráficamente estas tres sucesiones.



a) No monótona

b) Monótona

c) No monótona

Figura 9.3

NOTA En el ejemplo 8b, otra manera de ver que la sucesión es monótona es argumentar que la derivada de la función derivable correspondiente $f(x) = 2x/(1 + x)$ es positiva para toda x. Esto implica que f es creciente, lo cual a su vez implica que $\{a_n\}$ es creciente. ■

NOTA Todas las sucesiones mostradas en la figura 9.3 son acotadas. Para ver esto, considerar lo siguiente.

$$2 \leq a_n \leq 4$$
$$1 \leq b_n \leq 2$$
$$0 \leq c_n \leq \frac{4}{3}$$

DEFINICIÓN DE UNA SUCESIÓN ACOTADA

1. Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada superiormente** o por arriba si existe un número real M tal que $a_n \leq M$ para todo n. El número M es llamado una **cota superior** de la sucesión.
2. Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada inferiormente** o por abajo si hay un número real N tal que $N \leq a_n$ para todo n. El número N es llamado una **cota inferior** de la sucesión.
3. Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada** si lo está superior e inferiormente.

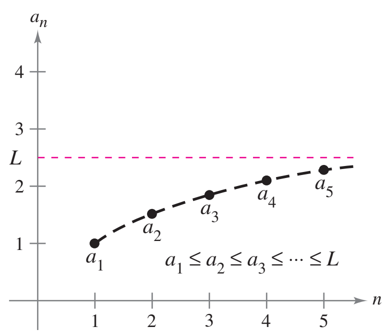
Una propiedad importante de los números reales es que son **completos**. Informalmente, esto significa que no hay huecos en la recta del número real. (El conjunto de números racionales no tiene la propiedad de ser completo.) El axioma de completitud para los números reales puede usarse para concluir que si una sucesión tiene una cota superior, debe tener una **mínima cota superior** (una cota superior que es menor que cualquier otra cota superior de la sucesión). Por ejemplo, el límite superior de la sucesión $\{a_n\} = \{n/(n+1)\}$,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

es 1. El teorema de completitud se usa en la demostración del teorema 9.5.

TEOREMA 9.5 SUCESIONES MONÓTONAS ACOTADAS

Si una sucesión $\{a_n\}$ es acotada y monótona, entonces converge.



Toda sucesión acotada no decreciente converge
Figura 9.4

DEMOSTRACIÓN Suponer que la sucesión es no decreciente, como se muestra en la figura 9.4. Para simplificar, también suponer que todo término de la sucesión es positivo. Como la sucesión es acotada, debe existir una cota superior M tal que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq M.$$

Del axioma de completitud, se sigue que existe una mínima cota superior L tal que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq L.$$

Para $\varepsilon > 0$, se sigue que $L - \varepsilon < L$, y por consiguiente $L - \varepsilon$ no puede ser una cota superior de la sucesión. Por consiguiente, por lo menos un término de $\{a_n\}$ es mayor que $L - \varepsilon$. Es decir, $L - \varepsilon < a_N$ para algún entero positivo N. Como los términos de $\{a_n\}$ son no decrecientes, se sigue que $a_N \leq a_n$ para todo $n > N$. Ahora se sabe que $L - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq L < L + \varepsilon$, para todo $n > N$. Se sigue que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n > N$, lo cual por definición significa que $\{a_n\}$ converge a L. La demostración para una sucesión no creciente es similar (ver ejercicio 139).

EJEMPLO 9 Sucesiones acotadas y monótonas

a) La sucesión $\{a_n\} = \{1/n\}$ es acotada y monótona, y por tanto, por el teorema 9.5, debe converger.

b) La sucesión divergente $\{b_n\} = \{n^2/(n+1)\}$ es monótona, pero no acotada. (Es acotada inferiormente.)

c) La sucesión divergente $\{c_n\} = \{(-1)^n\}$ es acotada, pero no monótona.

9.1 Ejercicios

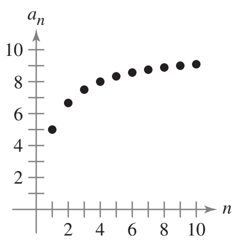
En los ejercicios 1 a 10, escribir los primeros cinco términos de la sucesión.

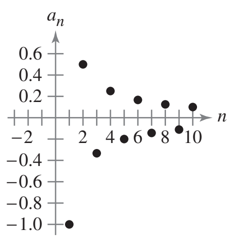
1. $a^n = 3^n$
2. $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$
3. $a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$
4. $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$
5. $a_n = \operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}$
6. $a_n = \dfrac{2n}{n+3}$
7. $a_n = \dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n^2}$
8. $a_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{2}{n}\right)$
9. $a_n = 5 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$
10. $a_n = 10 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{6}{n^2}$

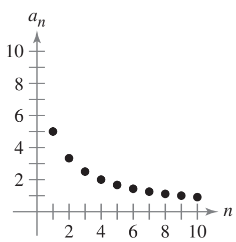
En los ejercicios 11 a 14, escribir los primeros cinco términos de la sucesión definida por recurrencia.

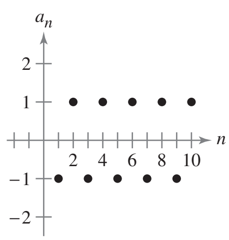
11. $a_1 = 3,\ a_{k+1} = 2(a_k - 1)$
12. $a_1 = 4,\ a_{k+1} = \left(\dfrac{k+1}{2}\right)a_k$
13. $a_1 = 32,\ a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k$
14. $a_1 = 6,\ a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k^2$

En los ejercicios 15 a 18, asociar la sucesión con su gráfica. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*) y *d*).]

a)


b)


c)


d)


15. $a_n = \dfrac{10}{n+1}$
16. $a_n = \dfrac{10n}{n+1}$
17. $a_n = (-1)^n$
18. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

En los ejercicios 19 a 22, relacionar la sucesión con la expresión correcta para su término *n*-ésimo. [Los términos *n*-ésimos se indican mediante *a*), *b*), *c*) y *d*).]

a) $a_n = \dfrac{2}{3}n$

b) $a_n = 2 - \dfrac{4}{n}$

c) $a_n = 16(-0.5)^{n-1}$

d) $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$

19. $-2, 0, \frac{2}{3}, 1, \ldots$
20. $16, -8, 4, -2, \ldots$
21. $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \ldots$
22. $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \ldots$

En los ejercicios 23 a 28, escribir los siguientes dos términos de la sucesión. Describir el patrón que se utilizó para encontrar estos términos.

23. $2, 5, 8, 11, \ldots$
24. $\frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \ldots$
25. $5, 10, 20, 40, \ldots$
26. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$
27. $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \ldots$
28. $1, -\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, \ldots$

En los ejercicios 29 a 34, simplificar el cociente de factoriales.

29. $\dfrac{11!}{8!}$
30. $\dfrac{25!}{20!}$
31. $\dfrac{(n+1)!}{n!}$
32. $\dfrac{(n+2)!}{n!}$
33. $\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$
34. $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}$

En los ejercicios 35 a 40, encontrar el límite (si es posible) de la sucesión.

35. $a_n = \dfrac{5n^2}{n^2+2}$
36. $a_n = 5 - \dfrac{1}{n^2}$
37. $a_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$
38. $a_n = \dfrac{5n}{\sqrt{n^2+4}}$
39. $a_n = \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$
40. $a_n = \cos\dfrac{2}{n}$

En los ejercicios 41 a 44, usar una herramienta de graficación para representar los primeros 10 términos de la sucesión. Usar la gráfica para hacer una conjetura acerca de la convergencia o divergencia de la sucesión. Verificar su conjetura analíticamente y, si la sucesión converge, encontrar su límite.

41. $a_n = \dfrac{n+1}{n}$
42. $a_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$
43. $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{2}$
44. $a_n = 3 - \dfrac{1}{2^n}$

En los ejercicios 45 a 72, determinar la convergencia o divergencia de la sucesión con el término *n*-ésimo dado. Si la sucesión converge, encontrar su límite.

45. $a_n = (0.3)^n - 1$
46. $a_n = 4 - \dfrac{3}{n}$
47. $a_n = \dfrac{5}{n+2}$
48. $a_n = \dfrac{2}{n!}$
49. $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$
50. $a_n = 1 + (-1)^n$
51. $a_n = \dfrac{3n^2 - n + 4}{2n^2 + 1}$
52. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}+1}$
53. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n)^n}$
54. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}$
55. $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$
56. $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n^2}$

57. $a_n = \dfrac{\ln(n^3)}{2n}$

58. $a_n = \dfrac{\ln \sqrt{n}}{n}$

59. $a_n = \dfrac{3^n}{4^n}$

60. $a_n = (0.5)^n$

61. $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

62. $a_n = \dfrac{(n-2)!}{n!}$

63. $a_n = \dfrac{n-1}{n} - \dfrac{n}{n-1}, \quad n \geq 2$

64. $a_n = \dfrac{n^2}{2n+1} - \dfrac{n^2}{2n-1}$

65. $a_n = \dfrac{n^p}{e^n}, \ p > 0$

66. $a_n = n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}$

67. $a_n = 2^{1/n}$

68. $a_n = -3^{-n}$

69. $a_n = \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n$

70. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

71. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$

72. $a_n = \dfrac{\cos \pi n}{n^2}$

En los ejercicios 73 a 86, escribir una expresión para el término *n*-ésimo de la sucesión. (Hay más de una respuesta correcta.)

73. $1, 4, 7, 10, \ldots$

74. $3, 7, 11, 15, \ldots$

75. $-1, 2, 7, 14, 23, \ldots$

76. $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \ldots$

77. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

78. $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

79. $2, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{5}, \ldots$

80. $1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{4}, 1 + \frac{7}{8}, 1 + \frac{15}{16}, 1 + \frac{31}{32}, \ldots$

81. $\dfrac{1}{2 \cdot 3}, \dfrac{2}{3 \cdot 4}, \dfrac{3}{4 \cdot 5}, \dfrac{4}{5 \cdot 6}, \ldots$

82. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots$

83. $1, -\dfrac{1}{1 \cdot 3}, \dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5}, -\dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}, \ldots$

84. $1, x, \dfrac{x^2}{2}, \dfrac{x^3}{6}, \dfrac{x^4}{24}, \dfrac{x^5}{120}, \ldots$

85. $2, 24, 720, 40\,320, 3\,628\,800, \ldots$

86. $1, 6, 120, 5\,040, 362\,880, \ldots$

En los ejercicios 87 a 98, determinar si la sucesión con el término *n*-ésimo dado es monótona. Discutir la existencia de cotas de la sucesión. Usar una herramienta de graficación para confirmar sus resultados.

87. $a_n = 4 - \dfrac{1}{n}$

88. $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$

89. $a_n = \dfrac{n}{2^{n+2}}$

90. $a_n = ne^{-n/2}$

91. $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{1}{n}\right)$

92. $a_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

93. $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

94. $a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

95. $a_n = \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{6}$

96. $a_n = \cos \dfrac{n\pi}{2}$

97. $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$

98. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} \sqrt{n}}{n}$

En los ejercicios 99 a 102, *a*) usar el teorema 9.5 para mostrar que la sucesión con el término *n*-ésimo dado converge y *b*) usar una herramienta de graficación para representar los primeros 10 términos de la sucesión y encontrar su límite.

99. $a_n = 5 + \dfrac{1}{n}$

100. $a_n = 4 - \dfrac{3}{n}$

101. $a_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)$

102. $a_n = 4 + \dfrac{1}{2^n}$

103. Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente tal que $2 \leq a_n \leq 4$. Explicar por qué $\{a_n\}$ tiene un límite. ¿Qué puede concluir sobre el límite?

104. Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona tal que $a_n \leq 1$. Discutir la convergencia de $\{a_n\}$. Si $\{a_n\}$ converge, ¿qué se puede concluir acerca del límite?

105. ***Interés compuesto*** Considerar la sucesión $\{A_n\}$ de la cual el término *n*-ésimo está dado por

$$A_n = P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^n$$

donde P es el capital invertido, A_n es el balance de la cuenta después de n meses y r es la proporción de interés compuesto anualmente.

a) ¿Es $\{A_n\}$ una sucesión convergente? Explicar.

b) Hallar los primeros 10 términos de la sucesión si $P = \$10\,000$ y $r = 0.055$.

106. ***Interés compuesto*** Se hace un depósito de \$100 al principio de cada mes en una cuenta a una tasa de interés anual compuesto mensualmente de 3%. El balance en la cuenta después de n meses es $A_n = 100(401)(1.0025^n - 1)$.

a) Calcular los primeros seis términos de la sucesión $\{A_n\}$.

b) Hallar el balance en la cuenta después de 5 años calculando el término 60 de la sucesión.

c) Hallar el balance en la cuenta después de 20 años calculando el término 240 de la sucesión.

Desarrollo de conceptos

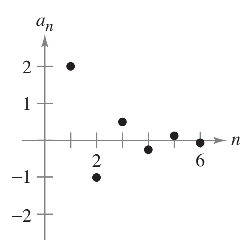
107. ¿Es posible que una sucesión converja a dos números diferentes? Si lo es, dar un ejemplo. Si no, explicar por qué.

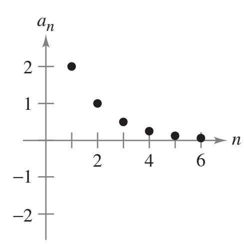
108. En sus propias palabras, definir.

a) Sucesión *b*) Convergencia de una sucesión

c) Sucesión monótona *d*) Sucesión acotada

109. Las gráficas de dos sucesiones se muestran en las figuras. ¿Qué gráfica representa la sucesión con signos alternos? Explicar su razonamiento.





Para discusión

110. Dar un ejemplo de una sucesión que satisfaga la condición o explicar por qué no existe tal sucesión. (Los ejemplos no son únicos.)

a) Una sucesión monotónicamente creciente que converge a 10.

b) Una sucesión acotada monotónicamente creciente que no converge.

c) Una sucesión que converge a $\frac{3}{4}$.

d) Una sucesión no acotada que converge a 100.

111. ***Los gastos gubernamentales*** Un programa gubernamental que actualmente cuesta a los contribuyentes \$4.5 mil millones por año, se va a reducir 20% por año.

a) Escribir una expresión para la cantidad presupuestada para este programa después de n años.

b) Calcular los presupuestos durante los primeros 4 años.

c) Determinar la convergencia o divergencia de la sucesión de presupuestos reducidos. Si la sucesión converge, encontrar su límite.

112. ***Inflación*** Si la proporción de inflación es $4\frac{1}{2}\%$ por año y el precio medio de un automóvil es actualmente \$25 000, el precio medio después de n años será

$$P_n = \$25\,000(1.045)^n.$$

Calcular los precios medios durante los próximos 5 años.

113. ***Modelo matemático*** En la tabla se muestran las deudas federales a_n (en miles de millones de dólares) de Estados Unidos de 2002 hasta 2006, donde n representa el año y $n = 2$ corresponde al año 2002. (*Fuente: U.S. Office of Management and Budget*)

n	2	3	4	5	6
a_n	6 198.4	6 760.0	7 354.7	7 905.3	8 451.4

a) Utilizar la función de regresión de una herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma

$$a_n = bn^2 + cn + d, \quad n = 2, 3, 4, 5, 6$$

para los datos. Utilizar una herramienta de graficación para colocar los puntos y graficar el modelo.

b) Usar el modelo para predecir la cantidad de la deuda federal en el año 2012.

114. ***Modelo matemático*** Los ingresos per cápita a_n en Estados Unidos de 1996 hasta 2006 se indican enseguida como pares ordenadas de la forma (n, a_n), donde n representa el año y $n = 6$ corresponde al año 1996. (*Fuente: U.S. Bureau of Economic Analysis*)

(6, 24 176), (7, 25 334), (8, 26 880), (9, 27 933),

(10, 29 855), (11, 30 572), (12, 30 805), (13, 31 469),

(14, 33 102), (15, 34 493), (16, 36 313)

a) Usar la función de regresión de una herramienta de graficación para encontrar el modelo de la forma

$$a_n = bn + c, \quad n = 6, 7, \ldots, 16$$

para los datos. Comparar gráficamente los puntos y el modelo.

b) Usar el modelo para predecir los ingresos per cápita en el año 2012.

115. ***Comparación del crecimiento exponencial y factorial*** Considerar la sucesión $a_n = 10^n/n!$.

a) Hallar dos términos consecutivos que sean iguales en magnitud.

b) ¿Son los términos que siguen a los encontrados en el apartado *a*) crecientes o decrecientes?

c) En la sección 8.7, ejercicios 73 a 78, se mostró que para valores "grandes" de la variable independiente, una función exponencial crece más rápidamente que una función polinomial. Del resultado del inciso *b*), ¿qué inferencia puede obtenerse acerca del crecimiento de una función exponencial en comparación con una función factorial, para valores enteros "grandes" de n?

116. Calcular los primeros seis términos de la sucesión

$$\{a_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Si la sucesión converge, encontrar su límite.

117. Calcular los primeros seis términos de la sucesión $\{a_n\} = \{\sqrt[n]{n}\}$. Si la sucesión converge, encontrar su límite.

118. Demostrar que si $\{s_n\}$ converge en L y $L > 0$, entonces existe un número N tal que $s_n > 0$ para $n > N$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 119 a 124, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

119. Si $\{a_n\}$ converge a 3 y $\{b_n\}$ converge a 2, entonces $\{a_n + b_n\}$ converge a 5.

120. Si $\{a_n\}$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_{n+1}) = 0$.

121. Si $n > 1$, entonces $n! = n(n - 1)!$

122. Si $\{a_n\}$ converge, entonces $\{a_n/n\}$ converge a 0.

123. Si $\{a_n\}$ converge a 0 y $\{b_n\}$ está acotada, entonces $\{a_n b_n\}$ converge a 0.

124. Si $\{a_n\}$ diverge y $\{b_n\}$ diverge, entonces $\{a_n + b_n\}$ diverge.

125. ***Sucesión de Fibonacci*** En un estudio de la reproducción de conejos, Fibonacci (hacia 1170-1240) encontró la sucesión que lleva ahora su nombre. La sucesión se define recursivamente por

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \quad \text{donde} \quad a_1 = 1 \text{ y } a_2 = 1.$$

a) Escribir los primeros 12 términos de la sucesión.

b) Escribir los primeros 10 términos de la sucesión definida por

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad n \geq 1.$$

c) Usando la definición en el apartado *b*), mostrar que

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}.$$

d) La **razón áurea** ρ puede definirse por $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \rho$. Mostrar que $\rho = 1 + 1/\rho$ y resolver esta ecuación para ρ.

126. ***Conjetura*** Sea $x_0 = 1$ considerar la sucesión x_n dada por la fórmula

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Usar una herramienta de graficación para calcular los primeros 10 términos de la sucesión y hacer una conjetura sobre el límite de la sucesión.

127. Considerar la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

a) Calcular los primeros cinco términos de esta sucesión.

b) Escribir una fórmula de recurrencia para a_n, para $n \geq 2$.

c) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

128. Considerar la sucesión

$$\sqrt{6}, \sqrt{6+\sqrt{6}}, \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}, \ldots$$

a) Calcular los primeros cinco términos de esta sucesión.

b) Escribir una fórmula de recurrencia para a_n, para $n \geq 2$.

c) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

129. Considerar la sucesión $\{a_n\}$ donde $a_1 = \sqrt{k}$, $a_{n+1} = \sqrt{k + a_n}$, y $k > 0$.

a) Mostrar que $\{a_n\}$ es creciente y acotada.

b) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe.

c) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

130. ***Media aritmética-geométrica*** Sea $a_0 > b_0 > 0$. Sea a_1 la media aritmética de a_0 y b_0 y sea b_1 la media geométrica de a_0 y b_0.

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} \qquad \text{Media aritmética}$$

$$b_1 = \sqrt{a_0 b_0} \qquad \text{Media geométrica}$$

Ahora definir las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ como sigue.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \qquad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$$

a) Sea $a_0 = 10$ y $b_0 = 3$. Escribir los primeros cinco términos de $\{a_n\}$ y de $\{b_n\}$. Comparar los términos de $\{b_n\}$. Comparar a_n y b_n. ¿Qué se puede notar?

b) Usar la inducción para mostrar que $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$, para $a_0 > b_0 > 0$.

c) Explicar por qué $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son ambos convergentes.

d) Mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

131. *a*) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $a_n = n \operatorname{sen} 1/n$. Mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = f'(0) = 1.$$

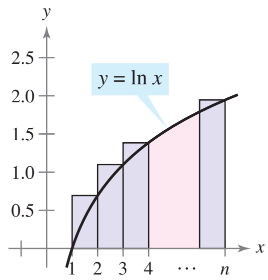
b) Sea $f(x)$ derivable en el intervalo $[0, 1]$ y $f(0) = 0$. Considerar la sucesión $\{a_n\}$, donde $a_n = n f(1/n)$. Mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = f'(0)$.

132. Considerar la sucesión $\{a_n\} = \{nr^n\}$. Decidir si $\{a_n\}$ converge para todo valor r.

a) $r = \frac{1}{2}$ *b*) $r = 1$ *c*) $r = \frac{3}{2}$

d) ¿Para qué valores de r converge la sucesión $\{nr^n\}$?

133. *a*) Mostrar que $\int_1^n \ln x\,dx < \ln(n!)$ para $n \geq 2$.



b) Dibujar una gráfica similar a la que se muestra $\ln(n!) < \int_1^{n+1} \ln x\,dx$.

c) Usar los resultados de los apartados *a*) y *b*) para mostrar que

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}, \text{ para } n > 1.$$

d) Usar el teorema del encaje o del emparedado para sucesiones y el resultado del apartado *c*) para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n!}/n\right) = 1/e.$$

e) Probar el resultado del apartado *d*) para $n = 20$, 50 y 100.

134. Considerar la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + (k/n)}\right\}$.

a) Escribir los primeros cinco términos de $\{a_n\}$.

b) Mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$ interpretando a_n como una suma Riemann de una integral definida.

135. Demostrar, mediante la definición del límite de una sucesión, que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$.

136. Demostrar, usando la definición del límite de una sucesión, que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ para $-1 < r < 1$.

137. Encontrar la sucesión divergente $\{a_n\}$ de manera que $\{a_{2n}\}$ converja.

138. Demostrar que el inverso del teorema 9.1 no es cierto. [*Sugerencia:* Encontrar una función $f(x)$ de manera que $f(n) = a_n$ converge pero $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ no existe.]

139. Terminar la demostración del teorema 9.5.

Preparación del examen Putman

140. Sea $\{x_n\}$, $n \geq 0$, una sucesión de números reales distintos de cero tal que $x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1} = 1$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Demostrar que existe un número real a tal que $x_{n+1} = ax_n - x_{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

141. Sea $T_0 = 2$, $T_1 = 3$, $T_2 = 6$, y, para $n \geq 3$,

$T_n = (n + 4)T_{n-1} - 4nT_{n-2} + (4n - 8)T_{n-3}$.

Los primeros 10 términos de la sucesión son

2, 3, 6, 14, 40, 152, 784, 5 168, 40 576, 363 392.

Encontrar, con demostración, una fórmula para T_n de la forma $T_n = A_n + B_n$, donde $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ sean sucesiones muy conocidas.

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.

9.2 Series y convergencia

- **Entender la definición de una serie infinita convergente.**
- **Usar propiedades de las series infinitas geométricas.**
- **Usar el criterio del término *n*-ésimo para la divergencia de una serie infinita.**

Series infinitas

Una aplicación importante de las sucesiones infinitas es la representación de "sumas infinitas". Informalmente, si $\{a_n\}$ es una sucesión infinita, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdot \cdot \cdot + a_n + \cdot \cdot \cdot \qquad \text{Series infinitas.}$$

es una **serie infinita** (o simplemente una **serie**). Los números a_1, a_2, a_3 son los **términos** de la serie. En algunas series es conveniente empezar con el índice $n = 0$ (o algún otro entero). Como convenio de escritura, es común representar una serie infinita simplemente como $\Sigma\, a_n$. En tales casos, el valor inicial para el índice debe deducirse del contexto establecido.

Para encontrar la suma de una serie infinita, considerar la siguiente **sucesión de sumas parciales**.

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdot \cdot \cdot + a_n \end{aligned}$$

Si esta sucesión de sumas parciales converge, se dice que la serie converge y tiene la suma indicada en la definición siguiente.

Series infinitas

El estudio de las series infinitas fue considerado toda una novedad en el siglo XIV. El lógico Richard Suiseth, cuyo apodo era el Calculador, resolvió este problema.

Si durante la primera mitad de un intervalo de tiempo una variación tiene cierta intensidad, durante el siguiente cuarto la intensidad es el doble, en el siguiente octavo la intensidad es el triple, y así de forma infinita*, entonces, la intensidad media durante todo el intervalo será la intensidad de la variación durante el segundo subintervalo.*

Esto es lo mismo que decir que la suma de las series infinitas

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdot \cdot \cdot + \frac{n}{2^n} + \cdot \cdot \cdot$$

es 2.

DEFINICIÓN DE SERIE CONVERGENTE Y DIVERGENTE

Dada una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, la ***n*-ésima suma parcial** está dada por

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdot \cdot \cdot + a_n.$$

Si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a S, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**. El límite S se llama **suma de la serie**.

$$S = a_1 + a_2 + \cdot \cdot \cdot + a_n + \cdot \cdot \cdot , \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Si $\{S_n\}$ diverge, entonces la serie **diverge**.

AYUDA DE ESTUDIO A medida que se estudie este capítulo, se verá que hay dos preguntas básicas relacionadas con series infinitas. ¿Una serie converge o diverge? Si una serie converge, ¿cuál es su suma? Estas preguntas no siempre son fáciles de contestar, sobre todo la segunda.

EXPLORACIÓN

Encontrar la suma de una serie infinita Hallar la suma de cada serie infinita. Explicar su razonamiento.

a) $0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdot \cdot \cdot$

b) $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \cdot \cdot \cdot$

c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdot \cdot \cdot$

d) $\frac{15}{100} + \frac{15}{10\,000} + \frac{15}{1\,000\,000} + \cdot \cdot \cdot$

TECNOLOGÍA La figura 9.5 muestra las primeras 15 sumas parciales de la serie infinita en el ejemplo 1*a*. Observar cómo los valores parecen tender hacia la recta $y = 1$.

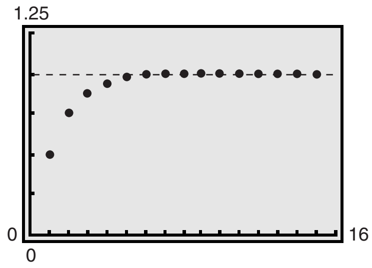


Figura 9.5

EJEMPLO 1 Series convergente y divergente

a) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdot \cdot \cdot$$

tiene las sumas parciales siguientes.

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$$

se sigue que la serie converge y su suma es 1.

NOTA Puede determinar geométricamente las sumas parciales de la serie del ejemplo 1*a* usando la figura 9.6. ■

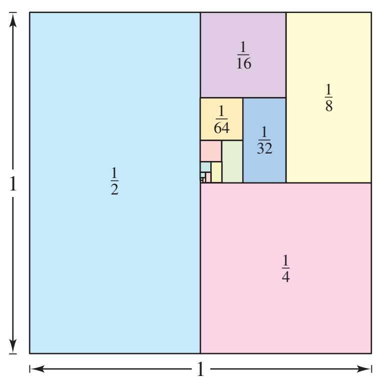


Figura 9.6

b) La n-ésima suma parcial de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdot \cdot \cdot$$

está dada por

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Como el límite de S_n es 1, la serie converge y su suma es 1.

c) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdot \cdot \cdot$$

diverge porque $S_n = n$ y la sucesión de sumas parciales divergen.

La serie en el ejemplo 1*b* es una **serie telescópica** de la forma

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + (b_4 - b_5) + \cdot \cdot \cdot.$$ Serie telescópica.

Nótese que b_2 es cancelada por el segundo término, b_3 es cancelada por el tercer término, y así sucesivamente. Como la suma parcial n-ésima de esta serie es

$$S_n = b_1 - b_{n+1}$$

se sigue que una serie telescópica convergerá si y sólo si b_n tiende a un número finito cuando $n \to \infty$. Es más, si la serie converge, su suma es

$$S = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para saber más sobre las sumas parciales de series infinitas, ver el artículo "Six Ways to Sum a Series" de Dan Kalman en *The College Mathematics Journal*.

EJEMPLO 2 Expresar una serie en forma telescópica

Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1}$.

Solución

Usando fracciones parciales, puede escribirse

$$a_n = \frac{2}{4n^2 - 1} = \frac{2}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1}.$$

En esta forma telescópica, puede verse que la n-ésima suma parcial es

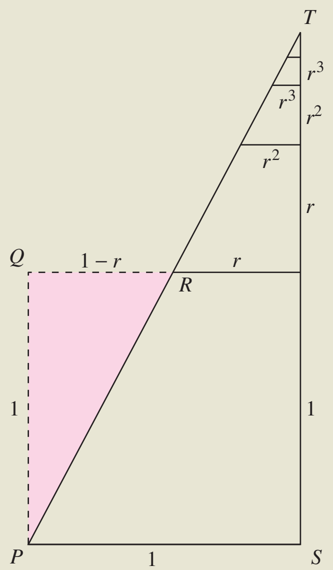
$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdot \cdot \cdot + \left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1}\right) = 1 - \frac{1}{2n + 1}.$$

Así pues, la serie converge y su suma es 1. Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1} = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2n + 1}\right) = 1.$$

EXPLORACIÓN

En “Proof Without Words” de Benjamin G. Klein e Irl C. Bivens, los autores presentan el diagrama siguiente. Explicar por qué la última afirmación bajo el diagrama es válida. ¿Cómo está relacionado este resultado con el teorema 9.6?



$$\Delta PQR \approx \Delta TSP$$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdot \cdot \cdot = \frac{1}{1 - r}$$

Ejercicio tomado de “Proof Without Words” de Benjamin G. Klein e Irl C. Bivens, *Mathematics Magazine*, octubre de 1988, con permiso de los autores.

Series geométricas

La serie dada en el ejemplo 1a es una **serie geométrica**. En general, la serie dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdot \cdot \cdot + ar^n + \cdot \cdot \cdot, \quad a \neq 0$$

Serie geométrica.

es una **serie geométrica** de razón r.

TEOREMA 9.6 CONVERGENCIA DE UNA SERIE GEOMÉTRICA

Una serie geométrica de razón r diverge si $|r| \geq 1$. Si $0 < |r| < 1$, entonces la serie converge a la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r}, \quad 0 < |r| < 1.$$

DEMOSTRACIÓN Es fácil ver que la serie diverge si $r = \pm 1$. Si $r \neq \pm 1$, entonces $S_n = a + ar + ar^2 + \cdot \cdot \cdot + ar^{n-1}$. Multiplicando por r se obtiene

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdot \cdot \cdot + ar^n.$$

Restando la segunda ecuación de la primera resulta $S_n - rS_n = a - ar^n$. Por consiguiente, $S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$, y la n-ésima suma parcial es

$$S_n = \frac{a}{1 - r}(1 - r^n).$$

Si $0 < |r| < 1$, se sigue que $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y se obtiene

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{a}{1 - r}(1 - r^n)\right] = \frac{a}{1 - r}\left[\lim_{n \to \infty} (1 - r^n)\right] = \frac{a}{1 - r}$$

lo cual significa que la serie es *convergente* y que su suma es $a/(1 - r)$. Se deja al lector la demostración de que la serie diverge cuando $|r| > 1$.

TECNOLOGÍA Usar una herramienta de graficación o escribiendo un programa de computadora para calcular la suma de los primeros 20 términos de la sucesión en el ejemplo 3*a*. Se debe obtener una suma de aproximadamente 5.999994.

EJEMPLO 3 Series geométricas convergentes y divergentes

a) La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= 3(1) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

tiene razón $r = \frac{1}{2}$ con $a = 3$. Como $0 < |r| < 1$, la serie converge y su suma es

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-(1/2)} = 6.$$

b) La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \cdots$$

tiene razón de $r = \frac{3}{2}$. Como $|r| \geq 1$, la serie diverge.

La fórmula para la suma de una serie geométrica puede usarse para escribir un decimal periódico como el cociente de dos enteros, como muestra el próximo ejemplo.

EJEMPLO 4 Series geométricas para un decimal periódico

Usar una serie geométrica para expresar $0.\overline{08}$ como cociente de dos enteros.

Solución El decimal $0.\overline{08}$ periódico se puede escribir

$$0.080808\ldots = \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^4} + \frac{8}{10^6} + \frac{8}{10^8} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{10^2}\right)\left(\frac{1}{10^2}\right)^n.$$

En esta serie, se tiene $a = 8/10^2$ y $r = 1/10^2$. Así que,

$$0.080808\ldots = \frac{a}{1-r} = \frac{8/10^2}{1-(1/10^2)} = \frac{8}{99}.$$

Probar dividiendo 8 entre 99 en una herramienta de graficación para ver que resulta $0.\overline{08}$.

La convergencia de una serie no es afectada por la eliminación de un número finito de términos iniciales de la serie. Por ejemplo, las series geométricas

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ambas convergen. Además, como la suma de la segunda serie es $a/(1-r) = 2$, se puede concluir que la suma de la primera serie es

$$S = 2 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right]$$
$$= 2 - \frac{15}{8} = \frac{1}{8}.$$

Las propiedades siguientes son consecuencias directas de las propiedades correspondientes de límites de sucesiones.

AYUDA DE ESTUDIO Al estudiar este capítulo es importante distinguir entre una serie infinita y una sucesión. Una sucesión es una colección ordenada de números

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

mientras que una serie es una suma infinita de los términos de una sucesión

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots.$$

TEOREMA 9.7 PROPIEDADES DE SERIES INFINITAS

Sea $\sum a_n$ y $\sum b_n$ una serie convergente y sea A, B y c números reales. Si $\sum a_n = A$ y $\sum b_n = B$, entonces la serie siguiente converge a las sumas indicadas.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$

Criterio del término *n*-ésimo para la divergencia

El siguiente teorema establece que si una serie converge, el límite de su término n-ésimo debe ser 0.

NOTA Asegurarse de ver que el recíproco del teorema 9.8 generalmente no es verdad. Es decir, si la sucesión $\{a_n\}$ converge a 0, entonces la serie $\sum a_n$ puede converger o puede divergir. ■

TEOREMA 9.8 LÍMITE DEL TÉRMINO *N*-ÉSIMO DE UNA SERIE CONVERGENTE

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMOSTRACIÓN Suponga que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = L.$$

Entonces, como $S_n = S_{n-1} + a_n$ y

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L$$

se sigue que

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} (S_{n-1} + a_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to\infty} a_n \\ &= L + \lim_{n\to\infty} a_n \end{aligned}$$

lo cual implica que $\{a_n\}$ converge a 0.

El contrarrecíproco del teorema 9.8 proporciona un criterio útil para demostrar la divergencia. Este **criterio del término *n*-ésimo para la divergencia** establece que si el límite del término n-ésimo de una serie *no* converge a 0, la serie debe divergir.

TEOREMA 9.9 CRITERIO DEL TÉRMINO *N*-ÉSIMO PARA LA DIVERGENCIA

Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

EJEMPLO 5 Aplicación del criterio del término *n*-ésimo para la divergencia

***a*)** En la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

Así pues, el límite del término n-ésimo no es 0, y la serie diverge.

***b*)** En la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n! + 1}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2n! + 1} = \frac{1}{2}.$$

Así pues, el límite del término n-ésimo no es 0, y la serie diverge.

***c*)** En la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Como el límite del término n-ésimo es 0, el criterio del término n-ésimo para la divergencia no es aplicable y no se puede obtener alguna conclusión sobre convergencia o divergencia. (En la próxima sección se verá que esta serie particular diverge.)

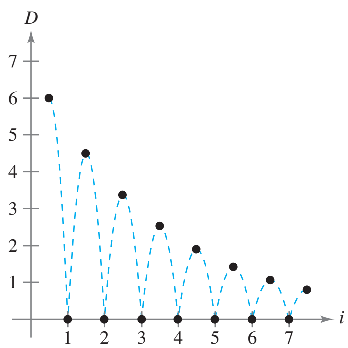
AYUDA DE ESTUDIO La serie del ejemplo 5*c* jugará un papel importante en este capítulo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Se verá que esta serie diverge aunque el término n-ésimo tienda a 0 cuando n tiende a ∞.

EJEMPLO 6 Problema de la pelota que bota

Una pelota se deja caer de una altura de 6 pies y empieza a botar, como se muestra en la figura 9.7. La altura de cada salto es de tres cuartos la altura del salto anterior. Encontrar la distancia vertical total recorrida por la pelota.



La altura de cada salto es tres cuartos la altura del salto anterior
Figura 9.7

Solución Cuando la pelota toca por primera vez el suelo, ha recorrido una distancia de $D_1 = 6$ pies. Para los saltos subsecuentes, sea D_i la distancia recorrida al subir y bajar. Por ejemplo, D_2 y D_3 son como sigue.

$$D_2 = \underbrace{6\left(\tfrac{3}{4}\right)}_{\text{Subida}} + \underbrace{6\left(\tfrac{3}{4}\right)}_{\text{Bajada}} = 12\left(\tfrac{3}{4}\right)$$

$$D_3 = \underbrace{6\left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)}_{\text{Subida}} + \underbrace{6\left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)}_{\text{Bajada}} = 12\left(\tfrac{3}{4}\right)^2$$

Continuando este proceso, puede determinarse que la distancia total vertical recorrida es

$$\begin{aligned} D &= 6 + 12\left(\tfrac{3}{4}\right) + 12\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + 12\left(\tfrac{3}{4}\right)^3 + \cdots \\ &= 6 + 12\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n+1} \\ &= 6 + 12\left(\tfrac{3}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n} \\ &= 6 + 9\left(\frac{1}{1 - \frac{3}{4}}\right) \\ &= 6 + 9(4) \\ &= 42 \text{ pies.} \end{aligned}$$

9.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, encontrar los primeros cinco términos de la sucesión de las sumas parciales S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5.

1. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$

2. $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 7} + \cdots$

3. $3 - \frac{9}{2} + \frac{27}{4} - \frac{81}{8} + \frac{243}{16} - \cdots$

4. $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

En los ejercicios 7 y 8, determinar si $\{a_n\}$ y $\sum a_n$ son convergentes.

7. $a_n = \frac{n+1}{n}$

8. $a_n = 3\left(\frac{4}{5}\right)^n$

En los ejercicios 9 a 18, verificar que la serie infinita diverge.

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^n$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{11}{10}\right)^n$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} 1\,000(1.055)^n$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1.03)^n$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

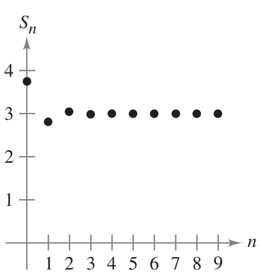
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$

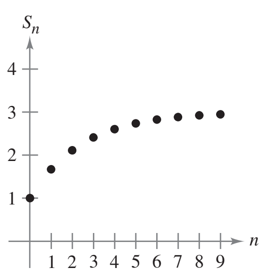
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

En los ejercicios 19 a 24, asignar la serie a la gráfica de su sucesión de sumas parciales. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).] Usar la gráfica para estimar la suma de la serie. Confirmar la respuesta analíticamente.

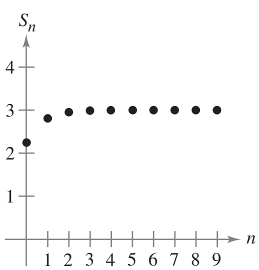
a)



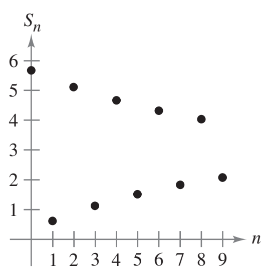
b)



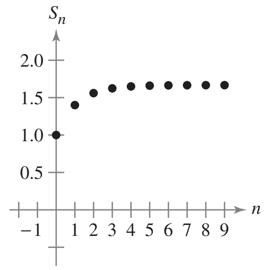
c)



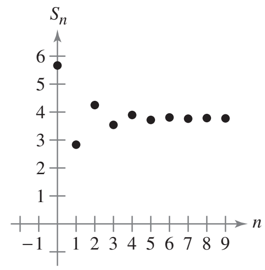
d)



e)



f)



19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

20. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17}{3}\left(-\frac{8}{9}\right)^n$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

24. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

En los ejercicios 25 a 30, verificar que la serie infinita converge.

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} (0.9)^n = 1 + 0.9 + 0.81 + 0.729 + \cdots$

28. $\sum_{n=0}^{\infty} (-0.6)^n = 1 - 0.6 + 0.36 - 0.216 + \cdots$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (Usar fracciones parciales.)

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ (Usar fracciones parciales.)

Análisis numérico, gráfico y analítico **En los ejercicios 31 a 36, *a*) hallar la suma de la serie, *b*) usar una herramienta de graficación para encontrar la suma parcial S_n indicada y completar la tabla, *c*) usar una herramienta de graficación y representar gráficamente los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales y una recta horizontal que represente la suma, y *d*) explicar la relación entre las magnitudes de los términos de la serie y la tasa a la que la sucesión de sumas parciales se aproxima a la suma de la serie.**

n	5	10	20	50	100
S_n					

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+3)}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+4)}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} 2(0.9)^{n-1}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} 3(0.85)^{n-1}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} 10(0.25)^{n-1}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

En los ejercicios 37 a 52, encontrar la suma de las series convergentes.

37. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

38. $\sum_{n=0}^{\infty} 6\left(\frac{4}{5}\right)^n$

39. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

40. $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(-\frac{6}{7}\right)^n$

41. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(n+1)(n+2)}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

45. $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots$

46. $8 + 6 + \frac{9}{2} + \frac{27}{8} + \cdots$

47. $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \cdots$

48. $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \cdots$

49. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} [(0.7)^n + (0.9)^n]$

51. $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen} 1)^n$

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2}$

En los ejercicios 53 a 58, *a*) expresar el decimal periódico como una serie geométrica y *b*) expresar su suma como el cociente de dos enteros.

53. $0.\overline{4}$

54. $0.\overline{9}$

55. $0.\overline{81}$

56. $0.\overline{01}$

57. $0.0\overline{75}$

58. $0.2\overline{15}$

En los ejercicios 59 a 76, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

59. $\sum_{n=0}^{\infty} (1.075)^n$

60. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{1\,000}$

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{10n+1}$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{3n-1}$

63. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n(n+1)}\right)$

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n+1}$

68. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$

69. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n}$

70. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{5^n}$

71. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$

72. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{n}$

73. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$

74. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

75. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Desarrollo de conceptos

77. Enunciar las definiciones de series convergente y divergente.

78. Describir la diferencia entre $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5.$

79. Definir una serie geométrica, enuncie cuándo converge y dar la fórmula para la suma de una serie geométrica convergente.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

80. Dé el criterio del término n-ésimo para la divergencia.

81. Explicar todas las diferencias entre las series siguientes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *b*) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *c*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$

82. *a*) Se elimina un número finito de términos de una serie divergente. ¿La nueva serie aún diverge? Explicar el razonamiento.

b) Se agrega un número finito de términos a una serie convergente. ¿La nueva serie aún converge? Explicar el razonamiento.

En los ejercicios 83 a 90, encontrar todos los valores de x para los cuales las series convergen. Para estos valores de x, escribir la suma de la serie como una función de x.

83. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

84. $\sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n$

85. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n$

86. $\sum_{n=0}^{\infty} 4\left(\frac{x-3}{4}\right)^n$

87. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

88. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

89. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$

90. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+4}\right)^n$

En los ejercicios 91 y 92, encontrar el valor de c para el cual la serie iguala a la suma indicada.

91. $\sum_{n=2}^{\infty} (1+c)^{-n} = 2$

92. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{cn} = 5$

93. ***Para pensar*** Considerar la fórmula

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$$

Dados $x = -1$ y $x = 2$, ¿se puede concluir que alguna de las afirmaciones siguientes son verdaderas? Explicar el razonamiento.

a) $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

b) $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$

Para discusión

94. ***Para pensar*** ¿Son verdaderos los siguientes enunciados? ¿Por qué sí y por qué no?

a) Ya que $\frac{1}{n^4}$ se aproxima a 0 cuando n se aproxima al ∞,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 0.$$

b) Ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ converge.

En los ejercicios 95 y 96, *a*) hallar la razón común a las series geométricas, *b*) escribir la función que da la suma de la serie, y *c*) usar una herramienta de graficación para representar la función y las sumas parciales S_3 y S_5. ¿Qué se puede notar?

95. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

96. $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots$

En los ejercicios 97 y 98, usar una herramienta de graficación para representar la función. Identificar la asíntota horizontal de la gráfica y determinar su relación con la suma de la serie.

Función	*Series*
97. $f(x) = 3\left[\dfrac{1-(0.5)^x}{1-0.5}\right]$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$
98. $f(x) = 2\left[\dfrac{1-(0.8)^x}{1-0.8}\right]$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{4}{5}\right)^n$

Redacción **En los ejercicios 99 y 100, usar una herramienta de graficación para hallar el primer término menor que 0.0001 en cada una de las series convergentes. Notar que las respuestas son muy diferentes. Explicar cómo afecta esto a la razón en que converge la serie.**

99. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n$ **100.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(0.01)^n$

101. ***Comercio*** Un fabricante de juegos electrónicos que produce un nuevo producto estima que las ventas anuales serán 8 000 unidades. Cada año 5% de las unidades que se han vendido dejan de funcionar. Así pues, 8 000 unidades estarán en uso después de un año, [8 000 + 0.95(8 000)] unidades estarán en uso después de 2 años, y así sucesivamente. ¿Cuántas unidades estarán en uso después de n años?

102. ***Depreciación*** Una compañía compra una máquina por \$475 000, la cual se deprecia a un ritmo o velocidad de 30% por año. Encontrar una fórmula para el valor de la máquina después de n años. ¿Cuál es su valor después de 5 años?

103. ***Efecto multiplicador*** El ingreso anual por turismo en una ciudad es de \$200 millones. Aproximadamente 75% de ese ingreso se reinvierte en la ciudad, y de esa cantidad aproximadamente 75% se reinvierte en la misma ciudad, y así sucesivamente. Escribir la serie geométrica que da la cantidad total de gasto generado por los \$200 millones y encontrar la suma de la serie.

104. ***Efecto del multiplicador*** Repetir el ejercicio 103 si el porcentaje del ingreso que es gastado de nuevo en la ciudad decrece a 60%.

105. ***Distancia*** Una pelota se deja caer de una altura de 16 pies. Cada vez que cae desde h pies, rebota $0.81h$ pies. Encontrar la distancia total recorrida por la pelota.

106. ***Tiempo*** La pelota en el ejercicio 105 tarda los tiempos siguientes en cada caída.

$$\begin{aligned}
s_1 &= -16t^2 + 16, & s_1 &= 0 \text{ si } t = 1\\
s_2 &= -16t^2 + 16(0.81), & s_2 &= 0 \text{ si } t = 0.9\\
s_3 &= -16t^2 + 16(0.81)^2, & s_3 &= 0 \text{ si } t = (0.9)^2\\
s_4 &= -16t^2 + 16(0.81)^3, & s_4 &= 0 \text{ si } t = (0.9)^3\\
&\vdots & &\vdots\\
s_n &= -16t^2 + 16(0.81)^{n-1}, & s_n &= 0 \text{ si } t = (0.9)^{n-1}
\end{aligned}$$

Empezando con s_2, la pelota toma la misma cantidad de tiempo para botar hacia arriba que para caer, de tal modo que el tiempo total que tarda hasta quedar en reposo está dado por $t = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(0.9)^n$. Encontrar este tiempo total.

Probabilidad **En los ejercicios 107 y 108, la variable aleatoria n representa el número de unidades de un producto vendidas por día en una tienda. La distribución de probabilidad de n está dada por $P(n)$. Calcular la probabilidad de que se vendan dos unidades en un día determinado [$P(2)$] y demostrar que $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + \cdots = 1$.**

107. $P(n) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ **108.** $P(n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

109. ***Probabilidad*** Una moneda es lanzada repetidamente. La probabilidad de que se obtenga la primera cara en el lanzamiento n-ésimo está dada por $P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, donde $n \geq 1$.

a) Mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

b) El número esperado de lanzamientos requeridas hasta que la primera cara ocurra en el experimento está dado por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$. ¿Es geométrica esta serie?

CAS *c*) Usar un sistema algebraico por computadora para encontrar la suma en el apartado *b*).

110. ***Probabilidad*** En un experimento, tres personas lanzan una moneda, y una de ellas cae cara. Determinar, para cada persona, la probabilidad que él o ella lance la primera cara. Verificar que la suma de las tres probabilidades es 1.

111. ***Área*** Los lados de un cuadrado son de 16 pulgadas de longitud. Un nuevo cuadrado se forma uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado original, y dos de los triángulos fuera del segundo cuadrado están sombreados (ver la figura). Determinar el área de las regiones sombreadas *a*) si este proceso se repite cinco veces más y *b*) si este patrón de sombreado se repite infinitamente.

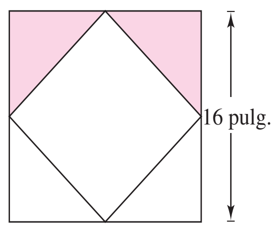


Figura para 111

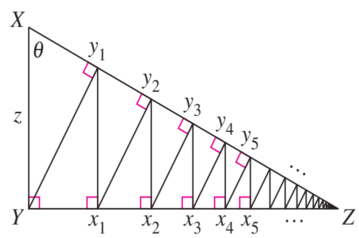


Figura para 112

112. ***Longitud*** Un triángulo rectángulo XYZ se muestra arriba, donde $|XY| = z$ y $\angle X = \theta$. Segmentos de recta son continuamente dibujados perpendiculares al triángulo, como se muestra en la figura.

a) Hallar la longitud total de los segmentos perpendiculares $|Yy_1| + |x_1y_1| + |x_1y_2| + \cdots$ en términos de z y θ.

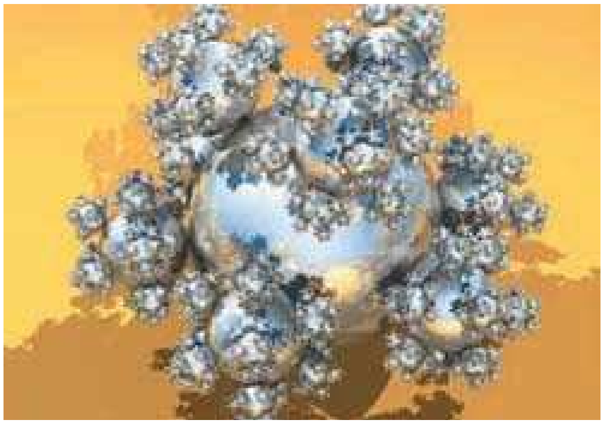
b) Si $z = 1$ y $\theta = \pi/6$, encontrar la longitud total de los segmentos perpendiculares.

En los ejercicios 113 a 116, usar la fórmula para la n-ésima suma parcial de una serie geométrica

$$\sum_{i=0}^{n-1} ar^i = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

113. ***Valor presente*** Al ganador de \$2 000 000 de una lotería se le pagará \$100 000 por año durante 20 años. El dinero gana 6% de interés por año. El valor presente de las ganancias es $\displaystyle\sum_{n=1}^{20} 100\,000\left(\frac{1}{1.06}\right)^n$. Calcular el valor presente e interpretar su significado.

114. ***Copo esférico*** Un copo esférico (mostrado abajo) es un fractal generado por computadora creado por Eric Haines. El radio de la esfera grande es 1. A la esfera grande se unen nueve esferas de radio $\frac{1}{3}$. A cada una de éstas se unen nueve esferas de radio $\frac{1}{9}$. Este proceso es infinitamente continuo. Demostrar que el copo esférico tiene una superficie de área infinita.



Eric Haines

115. ***Salario*** Una persona va a trabajar en una compañía que paga 0.01 de dólar el primer día, 0.02 el segundo, 0.04 el tercero, y así sucesivamente. Si el salario se mantiene así, doblándose cada día, ¿cuánto habrá cobrado en total por trabajar *a*) 29 días, *b*) 30 días y *c*) 31 días?

116. ***Anualidades*** Al recibir a fin de mes su paga, un empleado invierte P dólares en un plan de pensiones. Los depósitos se hacen cada mes durante t años y la cuenta gana interés a un ritmo o tasa porcentual anual r. Si el interés es compuesto mensualmente, la cantidad A en la cuenta al final de t años es

$$A = P + P\left(1 + \frac{r}{12}\right) + \cdot\cdot\cdot + P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t-1}$$
$$= P\left(\frac{12}{r}\right)\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t} - 1\right].$$

Si el interés es compuesto continuo, la cantidad A en la cuenta después de t años es

$$A = P + Pe^{r/12} + Pe^{2r/12} + Pe^{(12t-1)r/12}$$
$$= \frac{P(e^{rt} - 1)}{e^{r/12} - 1}.$$

Verificar las fórmulas para las sumas dadas.

Anualidades **En los ejercicios 117 a 120, considerar que se efectúan depósitos mensuales de P dólares en una cuenta de ahorro a una tasa de interés anual r. Usar los resultados del ejercicio 116 para encontrar el balance A después de t años si el interés se compone *a*) mensualmente y *b*) continuamente.**

117. $P = \$45,\quad r = 3\%,\quad t = 20$ años

118. $P = \$75,\quad r = 5.5\%,\quad t = 25$ años

119. $P = \$100,\quad r = 4\%,\quad t = 35$ años

120. $P = \$30,\quad r = 6\%,\quad t = 50$ años

121. ***Salario*** Una persona acepta un trabajo cuyo salario es de 50 000 dólares para el primer año. Durante los siguientes 39 años recibe 4% de aumento cada año. ¿Cuál sería su compensación total en el periodo de 40 años?

122. ***Salario*** Repetir el ejercicio 121 si el aumento que recibe la persona cada año es de 4.5%. Comparar los resultados.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 123 a 128, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

123. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

124. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$, entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L + a_0$.

125. Si $|r| < 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = \frac{a}{(1 - r)}$.

126. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1\,000\,(n + 1)}$ diverge.

127. $0.75 = 0.749999\ldots$

128. Cada decimal con un conjunto de dígitos periódico es un número racional.

129. Mostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede expresarse en forma telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(c - S_{n-1}) - (c - S_n)]$$

donde $S_0 = 0$ y S_n es la n-ésima suma parcial.

130. Sea $\Sigma\, a_n$ una serie convergente, y sea

$$R_N = a_{N+1} + a_{N+2} + \cdot\cdot\cdot$$

el resto de la serie después de los N primeros términos. Demostrar que $\displaystyle\lim_{N\to\infty} R_N = 0$.

131. Encontrar dos series divergentes $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ tales que $\Sigma(a_n + b_n)$ converja.

132. Dadas dos series infinitas $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ tales que $\Sigma\, a_n$ converge y $\Sigma\, b_n$ diverge, demostrar que $\Sigma(a_n + b_n)$ diverge.

133. Suponer que $\Sigma\, a_n$ diverge y c es una constante distinta de cero. Demostrar que $\Sigma\, ca_n$ diverge.

134. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, donde a_n es distinta de cero, demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge.

135. La sucesión de Fibonacci se define recurrentemente mediante $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, donde $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$.

a) Mostrar que $\displaystyle\frac{1}{a_{n+1}\,a_{n+3}} = \frac{1}{a_{n+1}\,a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+2}\,a_{n+3}}$.

b) Mostrar que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}\,a_{n+3}} = 1$.

136. Encontrar los valores de x para la cual la serie infinita

$$1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 + x^6 + \cdot\cdot\cdot$$

converge. ¿Cuál es la suma cuando la serie converge?

137. Demostrar que $\displaystyle\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdot\cdot\cdot = \frac{1}{r - 1}$, para $|r| > 1$.

138. Encontrar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Sugerencia: Encontrar las constantes A, B y C tales que $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+1} + \dfrac{C}{n+2}$.

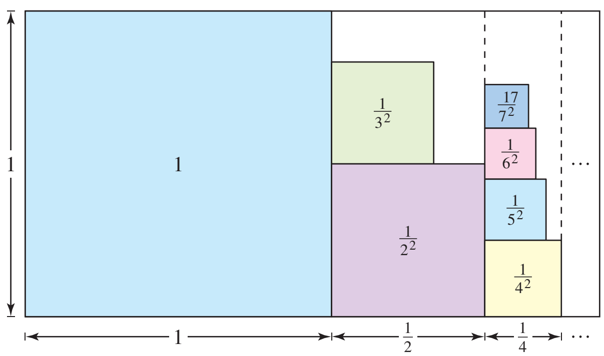
139. *a*) El integrando de cada integral definida es una diferencia de dos funciones. Trazar la gráfica de cada función y sombrear la región cuya área esté representada por la integral.

$$\int_0^1 (1 - x)\,dx \qquad \int_0^1 (x - x^2)\,dx \qquad \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

b) Encontrar el área de cada región en el apartado *a*).

c) Sea $a_n = \int_0^1 (x^{n-1} - x^n)\,dx$. Evaluar a_n y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ¿Qué se puede observar?

140. ***Redacción*** La figura de abajo representa una manera informal de demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$. Explicar cómo la figura implica esta conclusión.



PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este ejercicio, ver el artículo “Convergence with Pictures” de P. J. Rippon en *American Mathematical Monthly.*

141. ***Redacción*** Leer el artículo “The Exponential-Decay Law Applied to Medical Dosages” de Gerald M. Armstrong y Calvin P. Midgley en *Mathematics Teacher*. Después escribir un párrafo sobre cómo una sucesión geométrica puede usarse para encontrar la cantidad total de una droga que permanece en el sistema de un paciente después de que se le han administrado n dosis iguales (en iguales intervalos de tiempo).

Preparación del examen Putman

142. Expresar $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{(3^{k+1} - 2^{k+1})(3^k - 2^k)}$ como un número racional.

143. Sea $f(n)$ la suma de los primeros n términos de la sucesión 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, . . . , donde el término n-ésimo está dado por

$$a_n = \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ es par} \\ (n-1)/2, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

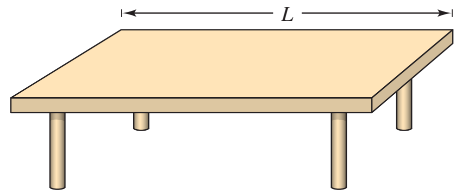
Mostrar que si x y y son enteros positivos y $x > y$, entonces $xy = f(x + y) - f(x - y)$.

PROYECTO DE TRABAJO

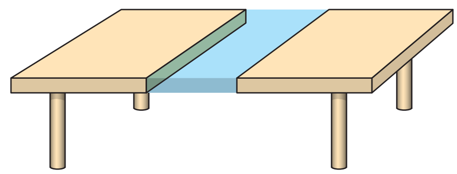
La mesa que desaparece

El procedimiento siguiente muestra cómo hacer desaparecer una mesa ¡quitando sólo la mitad de ésta!

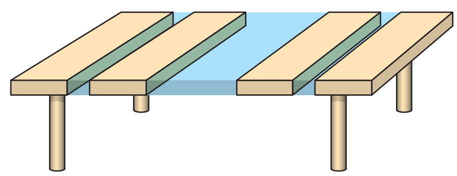
a) La mesa original tiene una longitud L.



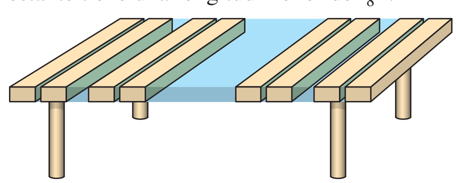
b) Eliminar $\frac{1}{4}$ de la mesa centrándose en el punto medio. Cada parte restante tiene una longitud menor de $\frac{1}{2}L$.



c) Eliminar $\frac{1}{8}$ de la mesa tomando secciones de $\frac{1}{16}L$ de longitud de la parte central de cada una de las dos piezas restantes. Ahora, usted ha eliminado $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ de la mesa. Cada pieza restante tiene una longitud menor de $\frac{1}{4}L$.



d) Eliminar $\frac{1}{16}$ de la mesa tomando secciones de longitud $\frac{1}{64}L$ de las partes centrales de cada uno de los cuatro fragmentos restantes. Ahora, usted ha eliminado $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ de la mesa. Cada trozo restante tiene una longitud menor de $\frac{1}{8}L$.



Continuando este proceso ¿ocasionará que desaparezca la mesa, aunque se haya eliminado sólo la mitad? ¿Por qué?

PARA MAYOR INFORMACIÓN Lea el artículo “Cantor’s Disappearing Table” de Larry E. Knop en *The College Mathematics Journal*.

9.3 Criterio de la integral y series p

- **Emplear el criterio de la integral para determinar si una serie infinita converge o diverge.**
- **Usar las propiedades de las series p y de las series armónicas.**

El criterio de la integral

En esta sección y en la siguiente, se estudiarán varios criterios de convergencia que aplican a las series con términos *positivos*.

TEOREMA 9.10 EL CRITERIO DE LA INTEGRAL

Si f es positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$ y $a_n = f(n)$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

o ambas convergen o ambas divergen.

DEMOSTRACIÓN Comenzamos dividiendo el intervalo $[1, n]$ en $n - 1$ subintervalos de longitud unidad o unitaria, como se muestra en la figura 9.8. Las áreas totales de los rectángulos inscritos y los rectángulos circunscritos son

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) = f(2) + f(3) + \cdot \cdot \cdot + f(n) \qquad \text{Área inscrita.}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) = f(1) + f(2) + \cdot \cdot \cdot + f(n-1) \qquad \text{Área circunscrita.}$$

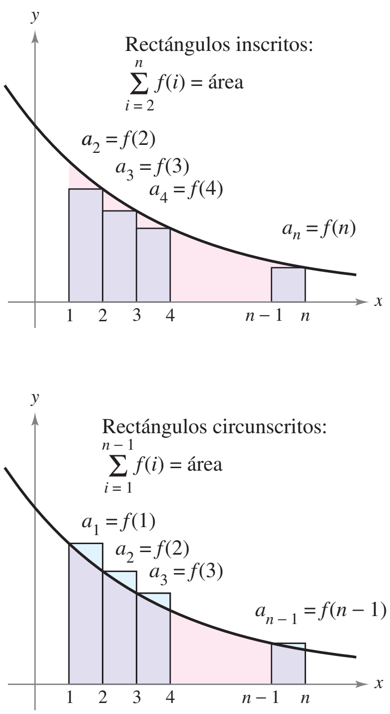


Figura 9.8

El área exacta bajo la gráfica de f para $x = 1$ a $x = n$ se encuentra entre las áreas inscrita y circunscrita.

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

Empleando la n-ésima suma parcial, $S_n = f(1) + f(2) + \cdot \cdot \cdot + f(n)$, se puede escribir esta desigualdad como

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}.$$

Ahora, suponiendo que $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge a L, se sigue que para $n \geq 1$

$$S_n - f(1) \leq L \quad \Rightarrow \quad S_n \leq L + f(1).$$

Por consiguiente, $\{S_n\}$ es acotada y monótona, y por el teorema 9.5 converge. Por consiguiente, $\Sigma\, a_n$ converge. Para la otra dirección de la demostración, asumir que la integral impropia diverge. Entonces $\int_1^n f(x)\,dx$ tiende a infinito cuando $n \to \infty$, y la desigualdad $S_{n-1} \geq \int_1^n f(x)\,dx$ implica que $\{S_n\}$ diverge. Así pues, $\Sigma\, a_n$ diverge.

NOTA Recordar que la convergencia o divergencia de $\Sigma\, a_n$ no se ve afectada al anular los primeros N términos. Análogamente, si las condiciones para el criterio de la integral se satisfacen para todo $x \geq N > 1$, se puede simplemente usar la integral $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ como criterio de convergencia o divergencia. (Esto se ilustra en el ejemplo 4.)

EJEMPLO 1 Aplicación del criterio de la integral

Aplicar el criterio de la integral a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

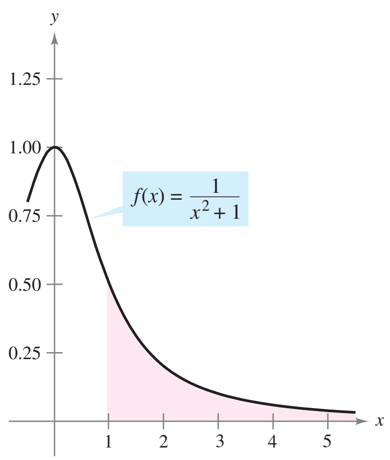
Solución La función $f(x) = x/(x^2+1)$ es positiva y continua para $x \geq 1$. Para determinar si f es decreciente, encontrar la derivada.

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Así, $f'(x) < 0$ para $x > 1$ y se sigue que f satisface las condiciones del criterio de la integral. Se puede integrar para obtener

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\Big[\ln(x^2+1)\Big]_1^b \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\ln(b^2+1) - \ln 2\right] \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Por tanto, la serie *diverge*.



Como la integral impropia converge, la serie infinita también converge
Figura 9.9

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio de la integral

Aplique el criterio de la integral a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Solución Como $f(x) = 1/(x^2+1)$ satisface las condiciones para el criterio de la integral (verificar), se puede integrar para obtener

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\Big[\arctan x\Big]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan 1) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Por tanto, la serie *converge* (ver la figura 9.9).

TECNOLOGÍA En el ejemplo 2, el hecho de que la integral impropia converja a $\pi/4$ no implica que la serie infinita converja a $\pi/4$. Para aproximar la suma de la serie, se puede usar la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+1} + \int_N^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

(Ver el ejercicio 68.) Entre mayor sea el valor N, mejor es la aproximación. Por ejemplo, usando $N = 200$ se obtiene $1.072 \leq \Sigma 1/(n^2+1) \leq 1.077$.

Series p y series armónicas

En el resto de esta sección se investigará un segundo tipo de serie que admite un criterio aritmético de convergencia o divergencia muy sencillo. Una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

Serie p.

es una **serie p** donde p es una constante positiva. Para $p = 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

Serie armónica.

es la serie **armónica**. Una **serie armónica general** es de la forma $\Sigma 1/(an + b)$. En música, las cuerdas del mismo material, diámetro y tensión cuyas longitudes forman una serie armónica producen tonos armónicos.

El criterio de la integral es adecuado para establecer la convergencia o divergencia de las series p. Esto se muestra en la demostración del teorema 9.11.

SERIE ARMÓNICA

Pitágoras y sus discípulos prestaron minuciosa atención al desarrollo de la música como una ciencia abstracta. Esto llevó al descubrimiento de la relación entre el tono y la longitud de la cuerda vibrante. Se observó que las armonías musicales más hermosas correspondían a las proporciones más simples de números enteros. Matemáticos posteriores desarrollaron esta idea en la serie armónica donde los términos de la serie armónica corresponden a los nodos en una cuerda vibrante que produce múltiplos de la frecuencia fundamental. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ es el doble de la frecuencia fundamental, $\frac{1}{3}$ es el triple de la frecuencia, y así sucesivamente.

TEOREMA 9.11 CONVERGENCIA DE SERIES p

La serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

1. converge si $p > 1$, y
2. diverge si $0 < p \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN La demostración se sigue del teorema del criterio de la integral y del teorema 8.5 los cuales establecen que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leq 1$.

EJEMPLO 3 Serie p convergente y divergente

Discutir la convergencia o divergencia de *a*) la serie armónica y *b*) la serie p con $p = 2$.

Solución

a) Del teorema 9.11, se sigue que la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \qquad p = 1$$

diverge.

b) Del teorema 9.11, sigue que la serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \qquad p = 2$$

converge.

NOTA La suma de la serie del ejemplo 3b puede mostrarse que es $\pi^2/6$. (Esto fue demostrado por Leonhard Euler, pero la demostración es demasiado difícil para presentarla aquí.) Asegurarse de ver que el criterio de la integral no dice que la suma de la serie sea igual al valor de la integral. Por ejemplo, la suma de la serie en el ejemplo 3b es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$$

pero el valor de la integral impropia correspondiente es

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1.$$

EJEMPLO 4 Análisis de la convergencia de una serie

Determinar si la siguiente serie converge o diverge.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Solución Esta serie es similar a la serie armónica divergente. Si sus términos fueran mayores que los de la serie armónica, se esperaría que fuera divergente. Sin embargo, como sus términos son menores, no se sabe qué esperar. La función $f(x) = 1/(x \ln x)$ es positiva y continua para $x \geq 2$. Para determinar si f es decreciente, primero se escribe f como $f(x) = (x \ln x)^{-1}$ y después se encuentra su derivada.

$$f'(x) = (-1)(x \ln x)^{-2}(1 + \ln x) = -\frac{1 + \ln x}{x^2(\ln x)^2}$$

Así, $f'(x) < 0$ para $x > 2$ y se sigue que f satisface las condiciones para el criterio integral.

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx &= \int_2^{\infty} \frac{1/x}{\ln x}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln(\ln x)\Big]_2^b \\ &= \lim_{b\to\infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] = \infty\end{aligned}$$

La serie diverge.

NOTA La serie infinita en el ejemplo 4 diverge muy lentamente. Por ejemplo, la suma de los primeros 10 términos es aproximadamente 1.6878196, y la suma de los primeros 100 términos es sólo un poco más grande: 2.3250871. La suma de los primeros 10 000 términos es aproximadamente 3.015021704. Se puede ver que aunque la serie infinita "suma hacia el infinito", lo hace muy lentamente. ■

9.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 24 confirmar que el criterio de la integral puede aplicarse en la serie. Entonces, usar el criterio de la integral para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n+5}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n/2}$

7. $\displaystyle\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \cdots$

8. $\displaystyle\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots$

9. $\displaystyle\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + \frac{\ln 6}{6} + \cdots$

10. $\displaystyle\frac{\ln 2}{\sqrt{2}} + \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} + \frac{\ln 4}{\sqrt{4}} + \frac{\ln 5}{\sqrt{5}} + \frac{\ln 6}{\sqrt{6}} + \cdots$

11. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1}(\sqrt{1}+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} + \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} + \cdots$

12. $\displaystyle\frac{1}{4} + \frac{2}{7} + \frac{3}{12} + \cdots + \frac{n}{n^2+3} + \cdots$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

16. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$

18. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^3}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{2n^2+1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n+5)^{3/2}}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+2n^2+1}$

En los ejercicios 25 y 26, aplicar el criterio de la integral para determinar la convergencia o divergencia de la serie donde k es un entero positivo.

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k + c}$ **26.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-n}$

En los ejercicios 27 a 30, explicar por qué el criterio de la integral no aplica a la serie.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ **28.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\cos n$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \operatorname{sen} n}{n}$ **30.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)^2$

En los ejercicios 31 a 34, aplicar el criterio de la integral para determinar la convergencia o divergencia de la serie p.

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ **32.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}}$ **34.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

En los ejercicios 35 a 42, usar el teorema 9.11 para determinar la convergencia o divergencia de la serie p.

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ **36.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^{5/3}}$

37. $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

38. $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{25} + \cdots$

39. $1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4\sqrt{4}} + \dfrac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

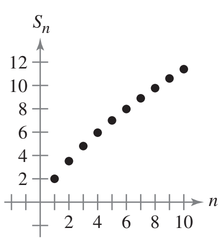
40. $1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}} + \cdots$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.04}}$

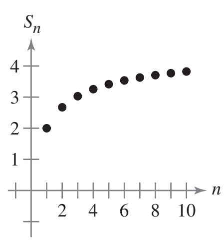
42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi}}$

En los ejercicios 43 a 48, asignar la serie a la gráfica de la sucesión de sus sumas parciales. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).] Determinar la convergencia o divergencia de la serie.

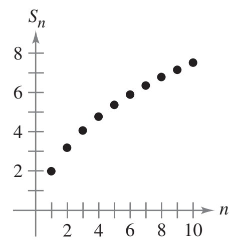
a)



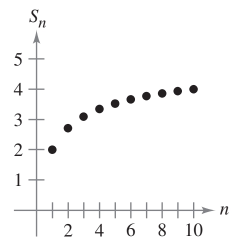
b)



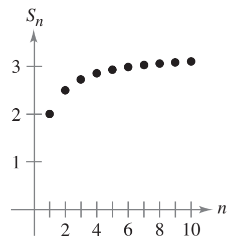
c)



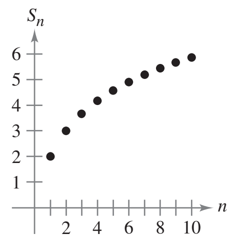
d)



e)



f)



43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[4]{n^3}}$ **44.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n^{\pi}}}$ **46.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[5]{n^2}}$

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}}$ **48.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$

49. ***Análisis numérico y gráfico*** Usar una herramienta de graficación para encontrar la suma parcial indicada S_n y completar la tabla. Entonces usar una herramienta de graficación para representar los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales. En cada caso comparar el ritmo o velocidad a la cual la sucesión de las sumas parciales se aproxima a la suma de la serie.

n	5	10	20	50	100
S_n					

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{15}{4}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

50. ***Razonamiento numérico*** Como la serie armónica diverge, se sigue que para cualquier número real positivo M existe un entero positivo N tal que la suma parcial

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > M.$$

a) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

M	2	4	6	8
N				

b) Conforme el número real M crece a incrementos iguales, ¿N crece también a incrementos iguales? Explicar.

Desarrollo de conceptos

51. Enunciar el criterio de la integral y dar un ejemplo de su uso.

52. Definir una serie p y enunciar los requisitos para su convergencia.

53. Un alumno de la clase de cálculo le dice a un amigo que la serie siguiente converge porque los términos son muy pequeños y se aproximan a 0 rápidamente. ¿Está el alumno en lo correcto? Explicar.

$$\frac{1}{10\,000} + \frac{1}{10\,001} + \frac{1}{10\,002} + \cdots$$

54. En los ejercicios 43 a 48, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ para todas las series pero no todas convergen. ¿Es ésta una contradicción del teorema 9.9? Por qué algunas convergen y otras divergen? Explicar.

55. Sea f una función positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$, tal que $a_n = f(n)$. Usar una gráfica para ordenar las cantidades siguientes en orden decreciente. Explicar su razonamiento.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{7} a_n$ *b)* $\displaystyle\int_1^7 f(x)\,dx$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} a_n$

Para discusión

56. Usar una gráfica para demostrar que la desigualdad es cierta. ¿Qué se puede concluir acerca de la convergencia o divergencia de la serie? Explicar.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} > \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

En los ejercicios 57 a 62, encontrar los valores positivos de p para la cual la serie converge.

57. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

58. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

59. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)^p}$

60. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$

61. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n}$

62. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n[\ln(\ln n)]^p}$

En ejercicios 63 a 66, usar el resultado del ejercicio 57 para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

63. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

64. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{(\ln n)^2}}$

65. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

66. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^2)}$

67. Sea f una función positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$, tal que $a_n = f(n)$. Demuestre que si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge a S, entonces el residuo $R_N = S - S_N$ está acotado por

$$0 \leq R_N \leq \int_N^{\infty} f(x)\,dx.$$

68. Mostrar que el resultado del ejercicio 67 puede escribirse como

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} a_n + \int_N^{\infty} f(x)\,dx.$$

En los ejercicios 69 a 74, usar el resultado del ejercicio 67 para aproximar la suma de la serie convergente usando el número indicado de términos. Incluir una estimación del error máximo en su aproximación.

69. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, seis términos

70. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$, cuatro términos

71. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, diez términos

72. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^3}$, diez términos

73. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$, cuatro términos

74. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$, cuatro términos

En los ejercicios 75 a 80, usar el resultado del ejercicio 67 para encontrar N tal que $R_N \leq$ 0.001 en las series convergentes.

75. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

76. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

77. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-5n}$

78. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n/2}$

79. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

80. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+5}$

81. *a)* Mostrar que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}}$ converge y $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

b) Comparar los primeros cinco términos de cada serie del apartado *a*).

c) Hallar $n > 3$ tal que

$$\frac{1}{n^{1.1}} < \frac{1}{n \ln n}.$$

82. Se usan diez términos para aproximar una serie p convergente. Por consiguiente, el resto es una función de p y es

$$0 \leq R_{10}(p) \leq \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx, \quad p > 1.$$

a) Realizar la integración en la desigualdad.

b) Usar una herramienta de graficación para representar gráficamente la desigualdad.

c) Identificar cualquier asíntota de la función error e interpretar su significado.

83. ***Constante de Euler*** Sea

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

a) Mostrar que $\ln(n+1) \le S_n \le 1 + \ln n$.

b) Mostrar que la sucesión $\{a_n\} = \{S_n - \ln n\}$ es acotada.

c) Mostrar que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

d) Mostrar que a_n converge a un límite γ (llamado constante de Euler).

e) Aproximar γ usando a_{100}.

84. Encontrar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

85. Considerar la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^{\ln n}.$$

a) Determinar la convergencia o divergencia de la serie para $x = 1$.

b) Determinar la convergencia o divergencia de la serie para $x = 1/e$.

c) Hallar los valores positivos de x para la cual la serie converge.

86. La **función zeta de Riemann** para los números reales se define para todo x para el cual la serie

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$$

converge. Encontrar el dominio de la función.

Repaso **En los ejercicios 87 a 98, determinar la convergencia o divergencia de las series.**

87. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$

88. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

89. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[4]{n}}$

90. $\displaystyle 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.95}}$

91. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

92. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1.042)^n$

93. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

94. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)$

95. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

96. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln n$

97. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

98. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

PROYECTO DE TRABAJO

La serie armónica

La serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

es una de las series más importantes en este capítulo. Aunque sus términos tienden a cero cuando n aumenta,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

la serie armónica diverge. En otras palabras, aunque los términos se van haciendo cada vez más y más pequeños, la suma “es infinita”.

a) Una manera de demostrar que la serie armónica diverge se atribuye a Jakob Bernoulli. Él agrupó los términos de la serie armónica como sigue:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{> \frac{1}{2}} +$$

$$\underbrace{\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}}_{> \frac{1}{2}} + \cdots$$

Escribir un párrafo corto que explique cómo se puede usar esta manera de agrupar los términos para mostrar que la serie armónica diverge.

b) Usar la demostración del criterio de la integral, teorema 9.10, para mostrar que

$$\ln(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \le 1 + \ln n.$$

c) Usar el inciso *b*) para determinar cuántos términos M se necesitarían para que

$$\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} > 50.$$

d) Mostrar que la suma del primer millón de términos de la serie armónica es menor de 15.

e) Mostrar que las desigualdades siguientes son válidas.

$$\ln \tfrac{21}{10} \le \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \cdots + \tfrac{1}{20} \le \ln \tfrac{20}{9}$$

$$\ln \tfrac{201}{100} \le \tfrac{1}{100} + \tfrac{1}{101} + \cdots + \tfrac{1}{200} \le \ln \tfrac{200}{99}$$

f) Usar las ideas del inciso *e*) para encontrar el límite

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{2m} \frac{1}{n}.$$

9.4 Comparación de series

- **Usar el criterio de comparación directa para determinar si una serie converge o diverge.**
- **Usar el criterio de comparación en el límite para determinar si una serie converge o diverge.**

Criterio de comparación directa

Para los criterios de convergencia desarrollados hasta ahora, los términos de la serie tienen que ser bastante simples y la serie debe tener características especiales para que los criterios de convergencia se puedan aplicar. Una ligera desviación de estas características especiales puede hacer que los criterios no sean aplicables. Por ejemplo, en los pares siguientes, la segunda serie no puede analizarse con el mismo criterio de convergencia que la primera serie aunque sean similares.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es geométrica, pero $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ no lo es.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ es una serie p, pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ no lo es.
3. $a_n = \frac{n}{(n^2+3)^2}$ se integra fácilmente, pero $b_n = \frac{n^2}{(n^2+3)^2}$ no.

En esta sección se estudian dos criterios adicionales para series con términos positivos. Estos dos criterios amplían la variedad de series que se pueden analizar respecto a convergencia o divergencia. Permiten *comparar* una serie que tenga términos complicados con una serie más simple cuya convergencia o divergencia es conocida.

TEOREMA 9.12 CRITERIO DE COMPARACIÓN DIRECTA

Sea $0 < a_n \le b_n$ para todo n.

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la primera propiedad, sea $L = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y sea

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdot \cdot \cdot + a_n.$$

Como $0 < a_n \le b_n$, la sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots$ es no decreciente y acotada superiormente por L, así que debe converger. Como

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

se sigue que $\Sigma\, a_n$ converge. La segunda propiedad es lógicamente equivalente a la primera.

NOTA Como se ha enunciado, el criterio de comparación directa requiere que $0 < a_n \le b_n$ para todo n. Como la convergencia de una serie no depende de sus primeros términos, se podría modificar el criterio requiriendo sólo que $0 < a_n \le b_n$ para todo n mayor que algún entero N.

EJEMPLO 1 Aplicación del criterio de comparación directa

Determinar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}.$$

Solución Esta serie se parece a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}. \qquad \text{Serie geométrica convergente.}$$

La comparación término a término da

$$a_n = \frac{1}{2+3^n} < \frac{1}{3^n} = b_n, \quad n \geq 1.$$

Por tanto, por el criterio de la comparación directa, la serie converge.

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio de comparación directa

Determinar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{n}}.$$

Solución Esta serie se parece a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}. \qquad \text{Serie } p \text{ divergente.}$$

La comparación término a término da

$$\frac{1}{2+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1$$

la cual *no satisface* los requisitos para la divergencia. (Recordar que si la comparación término a término revela que una serie es *menor* que una serie divergente, el criterio de comparación directa no concluye nada.) Esperando que la serie dada sea divergente, se puede comparar con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \qquad \text{Serie armónica divergente.}$$

En este caso, la comparación término a término da

$$a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2+\sqrt{n}} = b_n, \quad n \geq 4$$

y, por el criterio de comparación directa, la serie dada diverge.

NOTA Para verificar la última desigualdad en el ejemplo 2, intentar mostrar que $2 + \sqrt{n} \leq n$ cuando $n \geq 4$. ■

Recordar que ambas partes del criterio de comparación directa requieren que $0 < a_n \leq b_n$. Informalmente, el criterio dice lo siguiente sobre las dos series con términos no negativos.

1. Si la serie "mayor" converge, la serie "menor" también converge.
2. Si la serie "menor" diverge, la serie "mayor" también diverge.

Criterio de comparación en el límite

A menudo una serie dada parece una serie p o una serie geométrica; sin embargo, no se puede establecer la comparación término a término necesaria para aplicar el criterio de comparación directa. Bajo estas circunstancias se puede aplicar un segundo criterio de comparación, llamado **criterio de comparación en el límite**.

TEOREMA 9.13 CRITERIO DE COMPARACIÓN EN EL LÍMITE

Suponga que $a_n > 0$, $b_n > 0$, y

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$$

donde L es *finito y positivo*. Entonces las dos series $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ o convergen ambas o divergen ambas.

NOTA Como con el criterio de comparación directa, el criterio de comparación en el límite puede modificarse para requerir sólo que a_n y b_n sean positivos para todo n mayor que algún entero N. ■

DEMOSTRACIÓN Como $a_n > 0$, $b_n > 0$, y

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$$

existe $N > 0$ tal que

$$0 < \frac{a_n}{b_n} < L + 1, \quad \text{para } n \geq N.$$

Esto implica que

$$0 < a_n < (L + 1)b_n.$$

Por tanto, por el criterio de comparación directa, la convergencia de $\Sigma\, b_n$ implica la convergencia de $\Sigma\, a_n$. Similarmente, el hecho de que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{1}{L}$$

puede usarse para mostrar que la convergencia de $\Sigma\, a_n$ implica la convergencia de $\Sigma\, b_n$.

EJEMPLO 3 Aplicación del criterio de comparación en el límite

Mostrar que la siguiente serie armónica general diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an + b}, \quad a > 0, \quad b > 0$$

Solución Por comparación con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{Serie armónica divergente.}$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(an + b)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{an + b} = \frac{1}{a}.$$

Como este límite es mayor que 0, se puede concluir por el criterio de comparación en el límite que la serie dada diverge.

El criterio de comparación en el límite funciona bien para comparar una serie algebraica "complicada" con una serie p. Al elegir una serie p apropiada, se debe elegir una en la que el término n-ésimo sea de la misma magnitud que el término n-ésimo de la serie dada.

Serie dada	*Serie de comparación*	*Conclusión*
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - 4n + 5}$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	Ambas serie convergen.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n - 2}}$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$	Ambas serie divergen.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 10}{4n^5 + n^3}$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$	Ambas serie convergen.

En otras palabras, al elegir una serie para comparación, se pueden despreciar todos menos las *potencias más altas de n* en el numerador y el denominador.

EJEMPLO 4 Aplicación del criterio de comparación en el límite

Determinar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}.$$

Solución Despreciando todas las potencias de n menos las potencias más altas en el numerador y en el denominador, se puede comparar la serie con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Serie p convergente.

Como

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}\right)\left(\frac{n^{3/2}}{1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1 \end{aligned}$$

se puede concluir por el criterio de comparación en el límite que las series dadas convergen.

EJEMPLO 5 Aplicación del criterio de comparación en el límite

Determinar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{4n^3 + 1}.$$

Solución Una comparación razonable será comparar con las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}.$$

Serie divergente.

Nótese que estas series divergen según el criterio del término n-ésimo. Por el límite

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n2^n}{4n^3 + 1}\right)\left(\frac{n^2}{2^n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4 + (1/n^3)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

se puede concluir que la serie dada diverge.

9.4 Ejercicios

1. ***Análisis gráfico*** Las figuras muestran la gráfica de los primeros 10 términos y la gráfica de los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales, de cada serie.

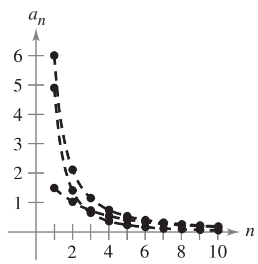
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^{3/2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^{3/2}+3} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\sqrt{n^2+0.5}}$$

a) Identificar la serie en cada figura.

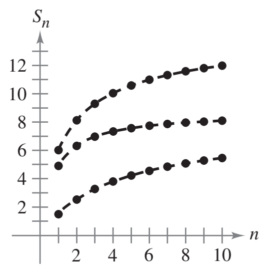
b) ¿Qué serie es una serie p? ¿Es convergente o divergente?

c) En las que no son series p, comparar las magnitudes de sus términos con los términos de la serie p. ¿Qué conclusión se obtiene acerca de la convergencia de las series?

d) Explicar la relación entre las magnitudes de los términos de las series y las magnitudes de sus sumas parciales.



Gráfica de términos



Gráfica de sumas parciales

2. ***Análisis gráfico*** Las figuras muestran la gráfica de los primeros 10 términos y la gráfica de los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales, de cada serie.

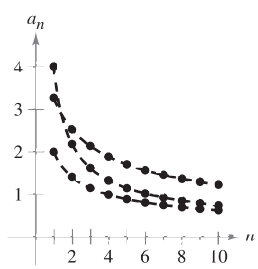
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}-0.5}, \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n+0.5}}$$

a) Identificar la serie en cada figura.

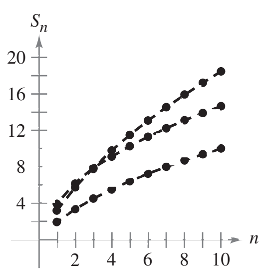
b) ¿Qué serie es una serie p? ¿Es convergente o divergente?

c) Para las que no son series p, comparar las magnitudes de sus términos con las magnitudes de los términos de la serie p. ¿Qué conclusión se saca sobre la convergencia de las series?

d) Explicar la relación entre las magnitudes de los términos de las series y las magnitudes de sus sumas parciales.



Gráfica de términos



Gráfica de sumas parciales

En los ejercicios 3 a 14, aplicar el criterio de comparación directa para determinar la convergencia o divergencia de las series.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+2}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^n+3}$

9. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n+1}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt[3]{n}-1}$

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n-1}$

En los ejercicios 15 a 28, aplicar el criterio de comparación en el límite para determinar la convergencia o divergencia de las series.

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4^n+1}$

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{5^n+1}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{3n^5+2n+1}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n^2+4)}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+3)}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^{n-1}}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k+1}, \quad k>2$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+\sqrt{n^2+4}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$

En los ejercicios 29 a 36, analizar la convergencia o divergencia, usando por lo menos una vez cada criterio. Identificar qué criterio fue usado.

***a*) Criterio del término n-ésimo**

***b*) Criterio de la serie geométrica**

***c*) Criterio de la serie p**

***d*) Criterio de la serie telescópica**

***e*) Criterio de la integral**

***f*) Criterio de comparación directa**

***g*) Criterio de comparación en el límite**

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n}$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 7\left(-\frac{1}{7}\right)^n$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+1}$

32. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-8}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n-2}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

37. Aplicar el criterio de comparación en el límite con la serie armónica para mostrar que la serie $\Sigma\, a_n$ (donde $0 < a_n < a_{n-1}$) diverge si $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ es finito y distinto de cero.

38. Demostrar que, si $P(n)$ y $Q(n)$ son polinomios de grado j y k, respectivamente, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

converge si $j < k - 1$ y diverge si $j \geq k - 1$.

En los ejercicios 39 a 42, aplicar el criterio polinomial del ejercicio 38 para determinar si la serie converge o diverge.

39. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \frac{5}{26} + \cdots$

40. $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \cdots$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$

En los ejercicios 43 y 44, aplicar el criterio de divergencia del ejercicio 37 para demostrar que la serie diverge.

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5n^4 + 3}$

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 1}{4n^3 + 2}$

En los ejercicios 45 a 48, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

45. $\frac{1}{200} + \frac{1}{400} + \frac{1}{600} + \frac{1}{800} + \cdots$

46. $\frac{1}{200} + \frac{1}{210} + \frac{1}{220} + \frac{1}{230} + \cdots$

47. $\frac{1}{201} + \frac{1}{204} + \frac{1}{209} + \frac{1}{216} + \cdots$

48. $\frac{1}{201} + \frac{1}{208} + \frac{1}{227} + \frac{1}{264} + \cdots$

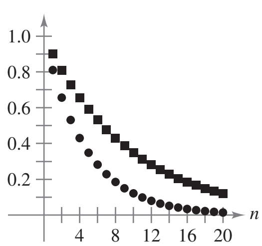
Desarrollo de conceptos

49. Revisar los resultados de los ejercicios 45 a 48. Explicar por qué se requiere el análisis cuidadoso para determinar la convergencia o divergencia de una serie y por qué considerar sólo las magnitudes de los términos de una serie puede ser engañoso.

50. Enunciar el criterio de comparación directa y dar un ejemplo de su uso.

51. Enunciar el criterio de comparación en el límite y dar un ejemplo de su uso.

52. La figura muestra los primeros 20 términos de la serie convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y los primeros 20 términos de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Identificar las dos series y explicar su razonamiento al hacer la elección.



53. Considerar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

a) Verificar que la serie converge.

b) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

n	5	10	20	50	100
S_n					

c) La suma de la serie es $\pi^2/8$. Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

d) Usar una herramienta de graficación para encontrar la suma de la serie

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Para discusión

54. Parece que los términos de la serie

$$\frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \cdots$$

son menores que los términos que corresponden a la serie convergente

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

Si el enunciado anterior es correcto, la primera serie converge. ¿Esto es correcto? ¿Por qué sí o por qué no? Plantear un enunciado sobre cómo la divergencia o convergencia de una serie es afectada por la inclusión o exclusión del primer número finito de términos.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 55 a 60, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

55. Si $0 < a_n \leq b_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

56. Si $0 < a_{n+10} \leq b_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

57. Si $a_n + b_n \leq c_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen. (Asumir que los términos de las tres series son positivos.)

58. Si $a_n \leq b_n + c_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergen. (Asumir que los términos de las tres series son positivos.)

59. Si $0 < a_n \leq b_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

60. Si $0 < a_n \leq b_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

61. Demostrar que si las series no negativas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

convergen, entonces también converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

62. Usar el resultado del ejercicio 61 para demostrar que si la serie no negativa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces también converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

63. Encontrar dos series que demuestren el resultado del ejercicio 61.

64. Encontrar dos series que demuestren el resultado del ejercicio 62.

65. Suponer que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos. Demostrar que si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ y $\Sigma\, b_n$ converge, $\Sigma\, a_n$ también converge.

66. Suponer que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos. Demostrar que si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ y $\Sigma\, b_n$ diverge, $\Sigma\, a_n$ también diverge.

67. Usar el resultado del ejercicio 65 para mostrar que cada serie converge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\pi^n}$

68. Usar el resultado del ejercicio 66 para mostrar que cada serie diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

69. Suponer que $\Sigma\, a_n$ es una serie con términos positivos. Demostrar que si $\Sigma\, a_n$ converge, entonces $\Sigma\, \operatorname{sen} a_n$ también converge.

70. Demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ converge.

71. Demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ converge en comparación con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$.

Preparación del examen Putman

72. ¿Es la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(n+1)/n}}$$

convergente? Demostrar su afirmación.

73. Demostrar que si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de números reales positivos, entonces también lo es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{n/(n+1)}.$$

PROYECTO DE TRABAJO

El método de la solera

La mayoría de los vinos se produce completamente de uvas cultivadas en un solo año. El jerez, sin embargo, es una mezcla compleja de vinos viejos con vinos nuevos. Esto se hace con una sucesión de barriles (llamada una solera) apilados unos encima de los otros, como se muestra en la fotografía.

© Owen Franken/Corbis

El vino más viejo está en la hilera inferior de barriles, y el más nuevo está en la hilera superior. Cada año, la mitad de cada barril en la fila inferior se embotella como jerez. Los barriles inferiores se llenan entonces con vino de los barriles de la hilera siguiente. Este proceso se repite a lo largo de la solera, con vino nuevo que se agrega a los barriles de arriba. Un modelo matemático para la cantidad, por año, de vino de n años que se extrae de la solera (con k hileras) cada año es

$$f(n, k) = \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \quad k \le n.$$

a) Considerar una solera que tiene cinco hileras k, numeradas $k = 1, 2, 3, 4$ y 5. En 1990 $(n = 0)$, la mitad de cada barril en la fila de arriba (fila 1) se llenó con el vino nuevo. ¿Cuánto de este vino se extrajo de la solera en 1991? ¿En 1992? ¿En 1993? . . . ¿En 2005? ¿Durante qué año(s) se extrajo de la solera la mayor cantidad del vino de 1990?

b) En el apartado *a)*, sea a_n la cantidad de vino de 1990 que es extraído de la solera en el año n. Calcular

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Ver el artículo "Finding Vintage Concentrations in a Sherry Solera" por Rhodes Peele y John T. MacQueen en los *UMAP Modules*.

9.5 Series alternadas o alternantes

- **Usar el criterio de la serie alternada o alternante para determinar si una serie infinita converge.**
- **Usar el resto o residuo de una serie alternada o alternante para aproximar la suma de esa serie.**
- **Clasificar una serie como absolutamente convergente o condicionalmente convergente.**
- **Reordenar una serie infinita para obtener una suma diferente.**

Series alternadas o alternantes

Hasta ahora sólo hemos analizado series con términos positivos. En esta sección y la siguiente se estudian series que contienen términos positivos y negativos. Las series más sencillas de este tipo son las **series alternadas o alternantes** cuyos términos alternan en signo. Por ejemplo, la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$$

es una *serie geométrica alternante* con $r = -\frac{1}{2}$. Las series alternadas o alternantes pueden ser de dos tipos: los términos impares son negativos o los términos pares son negativos.

TEOREMA 9.14 CRITERIO DE LA SERIE ALTERNADA O ALTERNANTE

Sea $a_n > 0$. Las series alternadas o alternantes

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

convergen si se satisfacen las siguientes dos condiciones.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ **2.** $a_{n+1} \le a_n$, para todo n

DEMOSTRACIÓN Considerar la serie alternada o alternante $\Sigma(-1)^{n+1}a_n$. En esta serie, la suma parcial (donde $2n$ es par)

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

todos sus términos son no negativos, y por consiguiente $\{S_{2n}\}$ es una sucesión no decreciente. Pero también se puede escribir

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

que implica que $S_{2n} \le a_1$ para todo entero n. Así pues, $\{S_{2n}\}$ es una sucesión acotada, no decreciente que converge a algún valor L. Como $S_{2n-1} - a_{2n} = S_{2n}$ y $a_{2n} \to 0$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n}$$
$$= L + \lim_{n\to\infty} a_{2n} = L.$$

Como tanto S_{2n} como S_{2n-1} convergen al mismo límite L, se sigue que $\{S_n\}$ también converge a L. Consecuentemente, la serie alternada o alternante dada converge.

NOTA La segunda condición en el criterio de la serie alternada o alternante se puede modificar para requerir sólo que $0 < a_{n+1} \le a_n$ para todo n mayor que algún entero N. ■

EJEMPLO 1 Aplicación del criterio de la serie alternada o alternante

NOTA La serie del ejemplo 1 es llamada *serie armónica alternada o alternante.* Volveremos a esta serie en el ejemplo 7. ■

Determinar la convergencia o divergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Solución Notar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Así, la primera condición del teorema 9.14 es satisfecha. También notar que la segunda condición del teorema 9.14 está satisfecha porque

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = a_n$$

para todo n. Por consiguiente, aplicando el criterio de la serie alternada o alternante, se puede concluir que la serie converge.

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio de la serie alternada o alternante

Determinar la convergencia o divergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}}$.

Solución Para aplicar el criterio de la serie alternada o alternante, notar que, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &\leq \frac{n}{n+1}\\
\frac{2^{n-1}}{2^n} &\leq \frac{n}{n+1}\\
(n+1)2^{n-1} &\leq n2^n\\
\frac{n+1}{2^n} &\leq \frac{n}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Así, $a_{n+1} = (n+1)/2^n \leq n/2^{n-1} = a_n$ para todo n. Además, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^{x-1}(\ln 2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0.$$

Por consiguiente, por el criterio de la serie alternada o alternante, la serie converge.

EJEMPLO 3 Casos en los que el criterio de series alternadas o alternantes no funciona

NOTA En el ejemplo 3*a*, recordar que siempre que una serie no satisface la primera condición del criterio de la serie alternada o alternante, se puede usar el criterio del término n-ésimo para la divergencia para concluir que la serie diverge. ■

a) La serie alternada o alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n} = \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \cdots$$

cumple la segunda condición del criterio de la serie alternada o alternante porque $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n. Sin embargo, no se aplica el criterio de la serie alternada o alternante, porque la serie no satisface la primera condición. De hecho, la serie diverge.

b) La serie alternada o alternante

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \cdots$$

satisface la primera condición porque a_n tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Sin embargo, no se puede aplicar el criterio de la serie alternada o alternante, porque la serie no satisface la segunda condición. Para concluir que la serie diverge, se puede argumentar que S_{2N} es igual a la N-ésima suma parcial de la serie armónica divergente. Esto implica que la sucesión de sumas parciales diverge. Así pues, la serie diverge.

El resto o residuo de una serie alternada o alternante

Para una serie alternada o alternante convergente, la suma parcial S_N puede ser una aproximación útil para la suma S de la serie. El error al usar $S \approx S_N$ es el resto o residuo $R_N = S - S_N$.

TEOREMA 9.15 RESTO DE UNA SERIE ALTERNADA O ALTERNANTE

Si una serie alternada o alternante convergente satisface la condición $a_{n+1} \leq a_n$, entonces el valor absoluto del resto o residuo R_N que se tiene al aproximar la suma S con S_N es menor (o igual) que el primer término desechado. Es decir,

$$|S - S_N| = |R_N| \leq a_{N+1}.$$

DEMOSTRACIÓN La serie obtenida al eliminar los N primeros términos de la serie dada satisface las condiciones del criterio de series alternadas y tiene una suma de R_N.

$$\begin{aligned}
R_N = S - S_N &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} a_n \\
&= (-1)^N a_{N+1} + (-1)^{N+1} a_{N+2} + (-1)^{N+2} a_{N+3} + \cdots \\
&= (-1)^N (a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - \cdots) \\
|R_N| &= a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - a_{N+4} + a_{N+5} - \cdots \\
&= a_{N+1} - (a_{N+2} - a_{N+3}) - (a_{N+4} - a_{N+5}) - \cdots \leq a_{N+1}
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $|S - S_N| = |R_N| \leq a_{N+1}$, lo cual prueba el teorema.

EJEMPLO 4 Cálculo aproximado de la suma de una serie alternada o alternante

Aproximar la suma de la serie siguiente por medio de sus primeros seis términos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \cdots$$

Solución La serie converge según el criterio de la serie alternada o alternante porque

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0.$$

La suma de los primeros seis términos es

$$S_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} = \frac{91}{144} \approx 0.63194$$

y, por el teorema del resto de la serie alternada o alternante, se tiene

$$|S - S_6| = |R_6| \leq a_7 = \frac{5\,040}{5040} \approx 0.0002.$$

Así, la suma de S está entre $0.63194 - 0.0002$ y $0.63194 + 0.0002$, y se concluye que

$$0.63174 \leq S \leq 0.63214.$$

TECNOLOGÍA Más adelante, en la sección 9.10, se podrá demostrar que la serie del ejemplo 4 converge a

$$\frac{e-1}{e} \approx 0.63212.$$

Por ahora, utilizar una herramienta de graficación para obtener una aproximación a la suma de la serie. ¿Cuántos términos se necesitan para obtener una aproximación que no esté a más de 0.00001 de la suma real?

Convergencia absoluta y condicional

Ocasionalmente, una serie puede tener tanto términos positivos como negativos sin ser una serie alternada o alternante. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} = \frac{\operatorname{sen} 1}{1} + \frac{\operatorname{sen} 2}{4} + \frac{\operatorname{sen} 3}{9} + \cdot \cdot \cdot$$

tiene términos positivos y negativos, pero no es una serie alternada o alternante. Una manera de tener alguna información sobre la convergencia de esta serie es investigar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right|.$$

Mediante comparación directa, se tiene $|\operatorname{sen} n| \leq 1$ para todo n, por lo que

$$\left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Por consiguiente, por el criterio de la comparación directa, la serie $\sum \left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right|$ converge El siguiente teorema dice que la serie original también converge.

TEOREMA 9.16 CONVERGENCIA ABSOLUTA

Si la serie $\Sigma |a_n|$ converge, entonces la serie $\Sigma\, a_n$ también converge.

DEMOSTRACIÓN Como $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ para todo n, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$$

converge por la comparación con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|.$$

Además, como $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$, se puede escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

donde las dos series de la derecha convergen. Por tanto, se sigue que $\Sigma\, a_n$ converge.

El recíproco del teorema 9.16 es falso. Por ejemplo, la **serie armónica alternada o alternante**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdot \cdot \cdot$$

converge de acuerdo con el criterio de la serie alternada o alternante. Sin embargo, la serie armónica diverge. Este tipo de convergencia se llama **convergencia condicional**.

DEFINICIONES DE CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONDICIONAL

1. $\Sigma\, a_n$ es **absolutamente convergente** si $\Sigma\, |a_n|$ converge.
2. $\Sigma\, a_n$ es **condicionalmente convergente** si $\Sigma\, a_n$ converge pero $\Sigma\, |a_n|$ diverge.

EJEMPLO 5 Convergencia absoluta y condicional

Determinar si cada una de las series es convergente o divergente. Clasificar cada serie como absolutamente convergente o condicionalmente convergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n} = \frac{0!}{2^0} - \frac{1!}{2^1} + \frac{2!}{2^2} - \frac{3!}{2^3} + \cdot\cdot\cdot$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \cdot\cdot\cdot$

Solución

a) Por el criterio del término n-ésimo para la divergencia, se concluye que esta serie diverge.

b) La serie dada puede mostrarse que es convergente por el criterio de la serie alternada o alternante. Además, como la serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdot\cdot\cdot$$

diverge, la serie dada es *condicionalmente* convergente.

EJEMPLO 6 Convergencia absoluta y condicional

Determinar si cada una de las series es convergente o divergente. Clasificar cada serie como absolutamente convergente o condicionalmente convergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{3^n} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \cdot\cdot\cdot$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)} = -\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} - \cdot\cdot\cdot$

Solución

a) Ésta *no* es una serie alternada o alternante. Sin embargo, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

es una serie geométrica convergente, se puede aplicar el teorema 9.16 para concluir que la serie dada es *absolutamente* convergente (y por consiguiente convergente).

b) En este caso, el criterio de la serie alternada o alternante indica que la serie dada converge. Sin embargo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}\right| = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \cdot\cdot\cdot$$

diverge por la comparación directa con los términos de la serie armónica. Por consiguiente, la serie dada es *condicionalmente* convergente.

Reordenación de series

Una suma finita como $(1 + 3 - 2 + 5 - 4)$ puede reordenarse sin cambiar el valor de la suma. Esto no es necesariamente cierto en el caso de una serie infinita. En este caso depende de que la serie sea absolutamente convergente (toda reordenación tiene la misma suma) o condicionalmente convergente.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Georg Friedrich Riemann (1826-1866) demostró que si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente y S es cualquier número real, pueden reordenarse los términos de la serie para converger a S. Para más sobre este tema, ver el artículo "Riemann's Rearrangement Theorem" de Stewart Galanor en *Mathematics Teacher*.

EJEMPLO 7 Reordenamiento de una serie

La serie armónica alternada o alternante converge a ln 2. Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2.$$

(Ver ejercicio 59, sección 9.10.)

Reordenar la serie para producir una suma diferente.

Solución Considerar la reordenación siguiente.

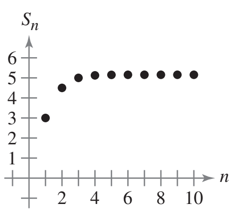
$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \cdots$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots\right) = \frac{1}{2}(\ln 2)$$

Reordenando los términos se obtiene una suma que es la mitad de la suma original.

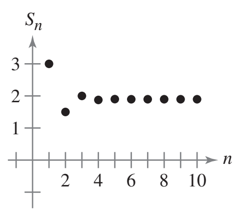
9.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, asociar la serie con la gráfica de su sucesión de sumas parciales. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

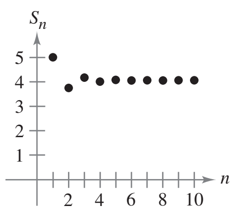
a)



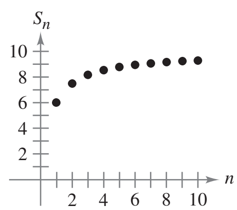
b)



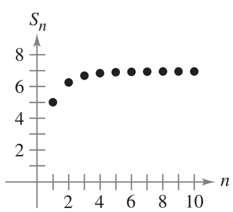
c)



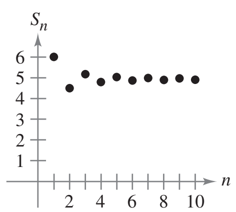
d)



e)



f)



1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}6}{n^2}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n!}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}3}{n!}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n2^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}10}{n2^n}$

Análisis numérico y gráfico **En los ejercicios 7 a 10, explorar el resto de la serie alternada o alternante.**

a) Usar una herramienta de graficación para encontrar la suma parcial indicada S_n y completar la tabla.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n										

b) Usar una herramienta de graficación para representar los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales y una recta horizontal que represente la suma.

c) ¿Qué patrón existe entre el diagrama de los puntos sucesivos en el apartado *b*) y la recta horizontal que representa la suma de la serie? ¿La distancia entre los puntos sucesivos de la recta horizontal crece o decrece?

d) Discutir la relación entre las respuestas en el apartado *c*) y el resto de la serie alternada o alternante como se indicó en el teorema 9.15.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{e}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} = \text{sen } 1$

En los ejercicios 11 a 36, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{3n+2}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{3^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{e^n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(5n-1)}{4n+1}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\, n}{\ln(n+1)}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+2}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\ln(n+1)}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\, n^2}{n^2+5}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n}{n^2+5}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n^2}{n^2+4}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)}{\ln(n+1)}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln(n+1)}{n+1}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos n\pi$

29. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!}$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{n+2}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{e^n-e^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{csch} n$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{e^n+e^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{sech} n$

En los ejercicios 37 a 40, aproximar la suma de la serie usando los primeros seis términos. (Ver ejemplo 4.)

37. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\, 2}{n!}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 4}{\ln(n+1)}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 3}{n^2}$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n}{2^n}$

En los ejercicios 41 a 46, *a*) aplicar el teorema 9.15 para determinar el número de términos requerido para aproximar la suma de la serie convergente con un error menor de 0.001, y *b*) usar una herramienta de graficación para aproximar la suma de la serie con un error menor de 0.001.

41. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!} = \frac{1}{e}$

42. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^n\, n!} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

43. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} 1$

44. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!} = \cos 1$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n4^n} = \ln\frac{5}{4}$

En los ejercicios 47 a 50, aplicar el teorema 9.15 para determinar el número de términos requerido para aproximar la suma de la serie con un error menor de 0.001.

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$

48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

49. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^3-1}$

50. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$

En los ejercicios 51 a 70, determinar si la serie converge condicionalmente o absolutamente, o diverge.

51. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^n}$

52. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!}$

54. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{n^3}$

55. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)^2}$

56. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+3}$

57. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

58. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$

59. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n^2}{(n+1)^2}$

60. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{n+10}$

61. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\ln n}$

62. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n}\, e^{-n^2}$

63. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\, n}{n^3-5}$

64. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{4/3}}$

65. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}$

66. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n+4}}$

67. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n+1}$

68. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\arctan n$

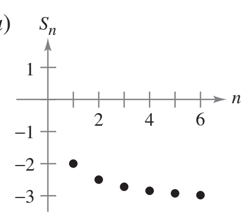
69. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2}$

70. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}[(2n-1)\pi/2]}{n}$

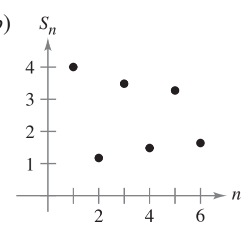
Desarrollo de conceptos

71. Definir una serie alternada o alternante.
72. Enunciar la prueba de serie alternada o alternante.
73. Escribir el residuo después de N términos de una serie alternada o alternante convergente.
74. En sus propias palabras, establecer la diferencia entre convergencia absoluta y convergencia condicional de una serie alternada o alternante.
75. En las figuras se muestran las gráficas de las sucesiones de las sumas parciales de dos series. ¿Qué gráfica representa las sumas parciales de una serie alternada o alternante? Explicar.

a)



b)



Para discusión

76. ¿Son correctas las siguientes afirmaciones? ¿Por qué sí o por qué no?

a) Si $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\,(-a_n)$ convergen, entonces $\Sigma\,|a_n|$ converge.

b) Si $\Sigma\, a_n$ diverge, entonces $\Sigma\,|a_n|$ diverge.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 77 y 78, determinar si las declaraciones son verdaderas o falsas. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que lo demuestre.**

77. En la serie alternada o alternante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, la suma parcial S_{100} es un sobreestimado de la suma de la serie.

78. Si $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ convergen, entonces $\Sigma\, a_n b_n$ converge.

En los ejercicios 79 y 80, encontrar los valores de *p* para los cuales la serie converge.

79. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{1}{n^p}\right)$ **80.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{1}{n+p}\right)$

81. Demostrar que si $\Sigma\,|a_n|$ converge, entonces $\Sigma\, a_n^2$ converge. ¿Es verdadero el recíproco? Si no lo es, dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

82. Usar el resultado del ejercicio 79 para dar un ejemplo de una serie *p* alternada o alternante que converja, pero cuya serie *p* correspondiente diverja.

83. Dar un ejemplo de una serie que demuestre la declaración del ejercicio 81.

84. Encontrar todos los valores de *x* para los cuales la serie $\Sigma\,(x^n/n)$ *a*) converja absolutamente y *b*) converja condicionalmente.

85. Considerar la serie siguiente.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \cdots$$

a) ¿Satisface esta serie las condiciones del teorema 9.14? Explicar por qué sí o por qué no.

b) ¿Converge la serie? En ese caso, ¿cuál es la suma?

86. Considerar la serie siguiente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,\quad a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}}, & \text{si } n \text{ es impar} \\[2mm] \dfrac{1}{n^3}, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

a) ¿Satisface esta serie las condiciones del teorema 9.14? Explicar por qué sí o por qué no.

b) ¿Converge la serie? En ese caso, ¿cuál es la suma?

Repaso **En los ejercicios 87 a 96, demostrar la convergencia o divergencia e identificar el criterio usado.**

87. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^{3/2}}$ **88.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+5}$

89. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ **90.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

91. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{7}{8}\right)^n$ **92.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{2n^2+1}$

93. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 100e^{-n/2}$ **94.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4}$

95. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}4}{3n^2-1}$ **96.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

97. El argumento siguiente, $0 = 1$, es *incorrecto*. Describir el error.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \\ &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + \cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

98. El argumento siguiente, $2 = 1$, es *incorrecto*. Describir el error. Multiplicar cada lado de la serie armónica alternada o alternante

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots$$

por 2 para obtener

$$2S = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \cdots$$

Ahora reunir los términos con un mismo denominador (como lo indican las flechas) para obtener

$$2S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

La serie resultante es la misma con que se empezó. Así, $2S = S$ y dividir cada lado por S para obtener $2 = 1$.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más sobre este ejercicio, ver el artículo "Riemann's Rearrangement Theorem" de Stewart Galanor en *Mathematics Teacher*.

Preparación del examen Putman

99. Asumir como sabido a ciencia cierta (verdadero) que la serie armónica alternada o alternante

1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$

es convergente, y denota su suma por s. Reordenar la serie 1) como sigue:

2) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$

Asumir como sabido a ciencia cierta (verdadero) que la serie 2) también es convergente, y denotar su suma por S. Denotar s_k y S_k, la suma k-ésima parcial de la serie 1) y 2), respectivamente. Demostrar cada declaración.

i) $S_{3n} = s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n}$, *ii*) $S \neq s$

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.

9.6 El criterio del cociente y el criterio de la raíz

- **Usar el criterio del cociente para determinar si una serie converge o diverge.**
- **Usar el criterio de la raíz para determinar si una serie converge o diverge.**
- **Revisar los criterios de la convergencia y divergencia de una serie infinita.**

El criterio del cociente

Esta sección empieza con un criterio de convergencia absoluta: el **criterio del cociente**.

TEOREMA 9.17 CRITERIO DEL COCIENTE

Sea $\Sigma\, a_n$ una serie con términos distintos de cero.

1. $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente si $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

2. $\Sigma\, a_n$ es divergente si $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ o $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$.

3. El criterio del cociente no es concluyente si $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la propiedad 1, asumir que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r < 1$$

y elegir un R tal que $0 \le r < R < 1$. Por la definición en el límite de una sucesión, existe un $N > 0$ tal que $|a_{n+1}/a_n| < R$ para todo $n > N$. Por tanto, se pueden escribir las desigualdades siguientes.

$$\begin{aligned}
|a_{N+1}| &< |a_N|R \\
|a_{N+2}| &< |a_{N+1}|R < |a_N|R^2 \\
|a_{N+3}| &< |a_{N+2}|R < |a_{N+1}|R^2 < |a_N|R^3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

La serie geométrica $\Sigma\, |a_N|R^n = |a_N|R + |a_N|R^2 + \cdots + |a_N|R^n + \cdots$ converge, y así, por el criterio de la comparación directa, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{N+n}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots + |a_{N+n}| + \cdots$$

también converge. Esto implica a su vez que la serie $\Sigma\, |a_n|$ converge, porque suprimir un número finito de términos $(n = N - 1)$ no afecta la convergencia. Por consiguiente, por el teorema 9.16, la serie $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente. La demostración de la propiedad 2 es similar y se deja como ejercicio (ver ejercicio 99).

NOTA El hecho de que el criterio del cociente no sea concluyente cuando $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ puede verse comparando las dos series $\Sigma\,(1/n)$ y $\Sigma\,(1/n^2)$. La primera serie diverge y la segunda converge, pero en ambos casos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1.$$

Aunque el criterio del cociente no es una panacea como criterio de convergencia, es particularmente útil para series que *convergen rápidamente*. Series que involucran factoriales o exponenciales frecuentemente son de este tipo.

EJEMPLO 1 Aplicación del criterio del cociente

Determinar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Solución Como $a_n = 2^n/n!$, se puede escribir lo siguiente.

AYUDA DE ESTUDIO Un paso frecuente en la aplicación del criterio del cociente es simplificar cocientes o factoriales. Así, en el ejemplo 1 notar que

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{2^n}{n!}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

La serie converge porque el límite de $|a_{n+1}/a_n|$ es menor que 1.

EJEMPLO 2 Aplicación del criterio del cociente

Determinar si cada serie converge o diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{3^n}$ ***b)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Solución

a) Esta serie converge porque el límite de $|a_{n+1}/a_n|$ es menor que 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left[(n+1)^2\left(\frac{2^{n+2}}{3^{n+1}}\right)\left(\frac{3^n}{n^2 2^{n+1}}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{3n^2} \\
&= \frac{2}{3} < 1
\end{aligned}$$

b) Esta serie diverge porque el límite de $|a_{n+1}/a_n|$ es mayor que 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)}\left(\frac{1}{n^n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= e > 1
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Un caso en que el criterio del cociente no decide

Determinar la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Solución El límite de $|a_{n+1}/a_n|$ es igual a 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{\sqrt{n}}\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right]\\
&= \sqrt{1}(1)\\
&= 1
\end{aligned}$$

NOTA Para toda serie p, el criterio del cociente no es concluyente. ■

Por tanto, el criterio del cociente no es concluyente. Para determinar si la serie converge se necesita recurrir a un criterio diferente. En este caso, se puede aplicar el criterio de la serie alternada. Para demostrar que $a_{n+1} \leq a_n$, sea

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

Entonces la derivada es

$$f'(x) = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

Como la derivada es negativa para $x > 1$, se sabe que f es una función decreciente. También, por la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{1/(2\sqrt{x})}{1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, por el criterio de la serie alternada o alternante, la serie converge.

La serie del ejemplo 3 es *condicionalmente convergente*. Esto se sigue del hecho que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

diverge (por el criterio de comparación en el límite con $\Sigma\, 1/\sqrt{n}$), pero la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge.

TECNOLOGÍA Una computadora o herramienta de graficación puede reforzar la conclusión de que la serie del ejemplo 3 converge *condicionalmente*. Sumando los primeros 100 términos de la serie, se obtiene una suma de aproximadamente –0.2. (La suma de los primeros 100 términos de la serie $\Sigma\,|a_n|$ es aproximadamente 17.)

El criterio de la raíz

El siguiente criterio para convergencia o divergencia de series es especialmente adecuado para series que involucran n-ésimas potencias. La demostración de este teorema es similar a la dada para el criterio del cociente, y se deja como ejercicio (ver ejercicio 100).

TEOREMA 9.18 EL CRITERIO DE LA RAÍZ

Sea $\Sigma\, a_n$ una serie.

1. $\Sigma\, a_n$ converge absolutamente si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.
2. $\Sigma\, a_n$ diverge si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ o $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$.
3. El criterio de la raíz no es concluyente si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

NOTA El criterio de la raíz siempre es no concluyente para toda serie p. ■

EJEMPLO 4 Aplicación del criterio de la raíz

Determinar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}.$$

Solución Se puede aplicar el criterio de la raíz como sigue.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n/n}}{n^{n/n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^2}{n} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

Como este límite es menor que 1, se puede concluir que la serie es absolutamente convergente (y por consiguiente converge).

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre la utilidad del criterio de la raíz, ver el artículo "*N*! and the Root Test" de Charles C. Mumma II en *The American Mathematical Monthly*.

Para ver la utilidad del criterio de la raíz en el caso de la serie del ejemplo 4, tratar de aplicar el criterio del cociente a esa serie. Al hacer esto, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{e^{2(n+1)}}{(n+1)^{n+1}} \div \frac{e^{2n}}{n^n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} e^2 \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Notar que este límite no es tan fácil de evaluar como el límite obtenido con el criterio de la raíz en el ejemplo 4.

Estrategias para analizar la convergencia de series

Hasta ahora se han estudiado 10 criterios para determinar la convergencia o divergencia de una serie infinita. (Ver el resumen en la tabla en la página 646.) La habilidad de elegir y aplicar los criterios sólo se adquiere con la práctica. A continuación se da un conjunto de pautas para elegir un criterio apropiado.

Estrategia para analizar la convergencia o divergencia de series

1. ¿Tiende a 0 el término n-ésimo? Si no es así, la serie diverge.
2. ¿Es la serie de alguno de los tipos especiales: geométrica, serie p, telescópica o alternante?
3. ¿Se puede aplicar el criterio de la integral, el de la raíz o el cociente?
4. ¿Puede compararse la serie favorable o fácilmente con uno de los tipos especiales?

En algunos casos puede haber más de un criterio aplicable. Sin embargo, el objetivo debe ser aprender a elegir el criterio más eficaz.

EJEMPLO 5 Aplicación de las pautas para analizar series

Determinar la convergencia o divergencia de cada serie.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n+1}$ ***b)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{6}\right)^n$ ***c)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ ***e)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4n+1}$ ***f)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$

Solución

a) En esta serie, el límite del término n-ésimo no es 0 $\left(a_n \to \frac{1}{3} \text{ o } n \to \infty\right)$. Por tanto, de acuerdo con el criterio del término n-ésimo, la serie diverge.

b) Esta serie es geométrica. Es más, como la razón de los términos $r = \pi/6$ es menor que 1 en el valor absoluto, puede concluirse que la serie converge.

c) Como la función $f(x) = xe^{-x^2}$ se integra fácilmente, se puede usar el criterio de la integral para concluir que la serie converge.

d) El término n-ésimo de esta serie se puede comparar al término n-ésimo de la serie armónica. Después de usar el criterio de comparación en el límite, se puede concluir que la serie diverge.

e) Ésta es una serie alternada o alternante cuyo término n-ésimo tiende a 0. Como $a_{n+1} \leq a_n$, se puede usar el criterio de la serie alternada o alternante para concluir que la serie converge.

f) El término n-ésimo de esta serie involucra un factorial, lo que indica que el criterio del cociente puede ser el adecuado. Después de aplicar el criterio del cociente, se puede concluir que la serie diverge.

g) El término n-ésimo de esta serie involucra una variable que se eleva a la potencia n-ésima que indica que el criterio de la raíz puede ser el adecuado. Después de aplicar el criterio de la raíz, se puede concluir que la serie converge.

Resumen de criterios para las series

Criterio	Serie	Condición(es) de la convergencia	Condición(es) de la divergencia	Comentario
Término n-ésimo	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$	Este criterio no sirve para demostrar la convergencia
Series geométricas	$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$	$\|r\| < 1$	$\|r\| \geq 1$	Suma: $S = \dfrac{a}{1-r}$
Series telescópicas	$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$	$\lim_{n\to\infty} b_n = L$		Suma: $S = b_1 - L$
Series p	$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$	$p > 1$	$0 < p \leq 1$	
Series alternadas o alternantes	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}a_n$	$0 < a_{n+1} \leq a_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$		Residuos: $\|R_N\| \leq a_{N+1}$
Integral (f continua, positiva y decreciente)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = f(n) \geq 0$	$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge	$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge	Residuo: $0 < R_N < \int_N^{\infty} f(x)\,dx$
Raíz	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} > 1$ o $= \infty$	El criterio no es concluyente si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = 1$.
Cociente	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \left\|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\| < 1$	$\lim_{n\to\infty} \left\|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\| > 1$ o $= \infty$	El criterio no es concluyente si $\lim_{n\to\infty} \left\|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = 1$.
Comparación directa ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$0 < a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge	$0 < b_n \leq a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge	
Comparación en el límite ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge	$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge	

9.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, verificar la fórmula.

1. $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} = (n+1)(n)(n-1)$

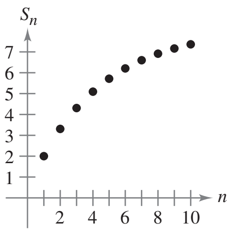
2. $\dfrac{(2k-2)!}{(2k)!} = \dfrac{1}{(2k)(2k-1)}$

3. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2k-1) = \dfrac{(2k)!}{2^k k!}$

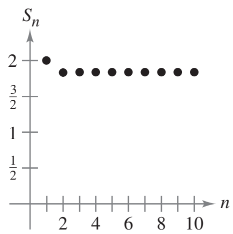
4. $\dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2k-5)} = \dfrac{2^k k!(2k-3)(2k-1)}{(2k)!}, \quad k \geq 3$

En los ejercicios 5 a 10, asociar la serie con la gráfica de su sucesión de sumas parciales. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

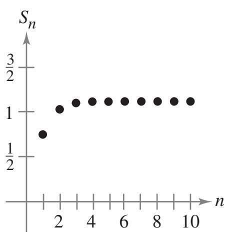
a)



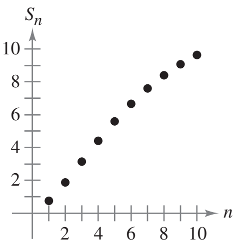
b)



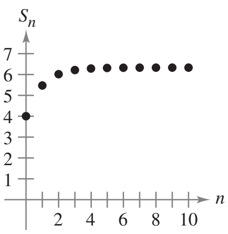
c)



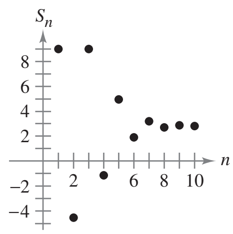
d)



e)



f)



5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n\left(\frac{1}{n!}\right)$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{n!}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}4}{(2n)!}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{5n-3}\right)^n$

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4e^{-n}$

Análisis numérico, gráfico y analítico **En los ejercicios 11 y 12, *a*) verificar que la serie converge. *b*) Usar una herramienta de graficación para encontrar la suma parcial indicada S_n y completar la tabla. *c*) Usar una herramienta de graficación para representar gráficamente los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales. *d*) Usar la tabla para estimar la suma de la serie. *e*) Explicar la relación entre las magnitudes de los términos de la serie y el ritmo o velocidad a la que la sucesión de las sumas parciales se aproxima a la suma de la serie.**

n	5	10	15	20	25
S_n					

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{5}{8}\right)^n$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}$

En los ejercicios 13 a 34, aplicar el criterio del cociente para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$

16. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{6}{5}\right)^n$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{10}{9}\right)^n$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n(n+1)}$

23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3/2)^n}{n^2}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n3^n}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^5}$

27. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{(n+1)^n}$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n)!}$

31. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{2^n+1}$

32. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{4n}}{(2n+1)!}$

33. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2n+1)}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdot \cdot (2n)]}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdot \cdot (3n-1)}$

En los ejercicios 35 a 50, aplicar el criterio de la raíz para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$

39. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^n$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{2n-1}\right)^n$

41. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3n}{2n+1}\right)^{3n}$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\sqrt[n]{n}+1\right)^n$

44. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-3n}$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{500}\right)^n$

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$

49. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

50. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

En los ejercicios 51 a 68, determinar la convergencia o divergencia de la serie usando el criterio apropiado de este capítulo. Identificar el criterio aplicado.

51. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}5}{n}$

52. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n}$

53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\sqrt{n}}$

54. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n$

55. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{2n-1}$

56. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+1}$

57. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n-2}}{2^n}$

58. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3\sqrt{n^3}}$

59. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+3}{n2^n}$

60. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4n^2-1}$

61. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{3^n}$

62. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$

63. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n7^n}{n!}$

64. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

65. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n-1}}{n!}$

66. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n2^n}$

67. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$

68. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{18^n(2n-1)n!}$

En los ejercicios 69 a 72, identificar las dos series que son idénticas.

69. *a)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n5^n}{(n+1)!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)5^{n+1}}{(n+1)!}$

70. *a)* $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

71. *a)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}$

72. *a)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)2^{n-1}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^n}$

En los ejercicios 73 y 74, escribir una serie equivalente en la que el índice de suma empiece en $n = 0$.

73. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n}$

74. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9^n}{(n-2)!}$

En los ejercicios 75 y 76, *a*) determinar el número de términos requerido para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0.0001, y *b*) usar una herramienta de graficación para aproximar la suma de la serie con un error menor que 0.0001.

75. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{2^k k!}$

76. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}$

En los ejercicios 77 a 82, los términos de una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se definen por recurrencia. Determinar la convergencia o divergencia de la serie. Explicar el razonamiento.

77. $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_{n+1} = \dfrac{4n-1}{3n+2}a_n$

78. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{5n-4}a_n$

79. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{\operatorname{sen} n + 1}{\sqrt{n}}a_n$

80. $a_1 = \dfrac{1}{5},\ a_{n+1} = \dfrac{\cos n + 1}{n}a_n$

81. $a_1 = \dfrac{1}{3},\ a_{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$

82. $a_1 = \dfrac{1}{4},\ a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$

En los ejercicios 83 a 86, aplicar el criterio del cociente o el de la raíz para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

83. $1 + \dfrac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots$

84. $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{3^2} + \dfrac{4}{3^3} + \dfrac{5}{3^4} + \dfrac{6}{3^5} + \cdots$

85. $\dfrac{1}{(\ln 3)^3} + \dfrac{1}{(\ln 4)^4} + \dfrac{1}{(\ln 5)^5} + \dfrac{1}{(\ln 6)^6} + \cdots$

86. $1 + \dfrac{1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots$

En los ejercicios 87 a 92, encontrar los valores de x para las cuales la serie converge.

87. $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{x}{3}\right)^n$

88. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{4}\right)^n$

89. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+1)^n}{n}$

90. $\sum_{n=0}^{\infty} 2(x-1)^n$

91. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\left(\frac{x}{2}\right)^n$

92. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$

Desarrollo de conceptos

93. Enunciar el criterio del cociente.

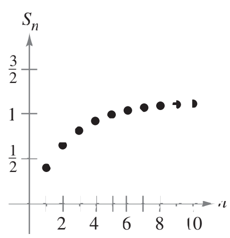
94. Enunciar el criterio de la raíz.

95. Se dice que los términos de una serie positiva parecen tender a cero rápidamente cuando n tiende a infinito. De hecho, $a_7 \leq 0.0001$. No habiendo otra información, ¿implica esto que la serie converge? Apoyar la conclusión en ejemplos.

96. La gráfica muestra los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales de la serie convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n.$$

Encontrar una serie tal que los términos de su sucesión de sumas parciales sean menores que los términos correspondientes de la sucesión en la figura, pero tales que la serie diverja. Explicar el razonamiento.



97. Aplicando el criterio del cociente, se determina que una serie alternada o alternamente converge. ¿Converge la serie condicional o absolutamente? Explicar.

Para discusión

98. ¿Qué se puede concluir acerca de la convergencia o divergencia de $\Sigma\, a_n$ para cada una de las siguientes condiciones? Explicar la respuesta.

a) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ *b)* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

c) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3}{2}$ *d)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ *f)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e$

99. Demostrar la propiedad 2 del teorema 9.17.

100. Demostrar el teorema 9.18. (*Sugerencia para la propiedad 1:* Si el límite es $r < 1$, elija un número real R tal que $r < R < 1$. De acuerdo con las definiciones del límite, existe algún $N > 0$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < R$ para $n > N$.)

En los ejercicios 101 a 104, verificar que la prueba del cociente no es conclusiva para la serie p.

101. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

102. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

103. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

104. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

105. Mostrar que el criterio de la raíz no es concluyente para la serie p.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

106. Mostrar que el criterio del cociente y de la raíz no son concluyentes para la serie p logarítmica.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

107. Determinar la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(xn)!}$$

cuando *a)* $x = 1$, *b)* $x = 2$, *c)* $x = 3$ y *d)* x es un entero positivo.

108. Mostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

109. ***Redacción*** Lea el artículo "A Differentiation Test for Absolute Convergence" de Yaser S. Abu-Mostafa en *Mathematics Magazine*. Escribir después un párrafo que describa ese criterio. Incluir ejemplos de series que convergen y ejemplos de serie que divergen.

Preparación del examen Putman

110. ¿Es la serie siguiente convergente o divergente?

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{19}{7} + \frac{2!}{3^2}\left(\frac{19}{7}\right)^2 + \frac{3!}{4^3}\left(\frac{19}{7}\right)^3 + \frac{4!}{5^4}\left(\frac{19}{7}\right)^4 + \cdots$$

111. Mostrar que si la serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

converge, entonces la serie

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} + \cdots$$

también converge.

9.7 Polinomios de Taylor y aproximación

- **Encontrar aproximaciones polinomiales de las funciones elementales y compararlas con las funciones elementales.**
- **Encontrar aproximaciones mediante polinomios de Taylor y Maclaurin a funciones elementales.**
- **Emplear el residuo de un polinomio de Taylor.**

Aproximaciones polinomiales a funciones elementales

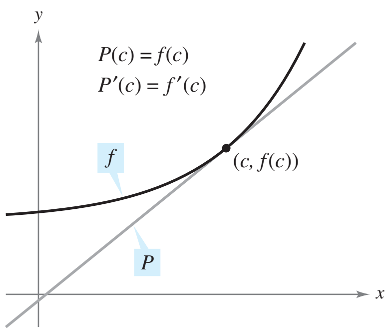
El objetivo de esta sección es mostrar cómo pueden usarse las funciones polinomiales como aproximaciones a otras funciones elementales. Para encontrar una función polinomial P que aproxime otra función f, se comienza por elegir un número c en el dominio de f en el que P y t tengan el mismo valor. Es decir,

$$P(c) = f(c).$$ Las gráficas de f y P pasan por $(c, f(c))$.

Se dice que la aproximación polinomial se **expande alrededor de *c*** o está **centrada en *c***. Geométricamente, el requisito de que $P(c) = f(c)$ significa que la gráfica de P debe pasar por el punto $(c, f(c))$. Por supuesto, hay muchos polinomios cuyas gráficas pasan por el punto $(c, f(c))$. La tarea es encontrar un polinomio cuya gráfica se parezca a la gráfica de f en la cercanía de este punto. Una manera de hacer esto es imponer el requisito adicional de que la pendiente de la función polinomial sea la misma que la pendiente de la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

$$P'(c) = f'(c)$$ Las gráficas de f y P tienen la misma pendiente en $(c, f(c))$.

Con estos dos requisitos se puede obtener una aproximación lineal simple a f, como se muestra en la figura 9.10.



Cerca de $(c, f(c))$, la gráfica de P puede usarse para aproximar la gráfica de f.
Figura 9.10

EJEMPLO 1 Aproximación a $f(x) = e^x$ mediante un polinomio de primer grado

Dada la función $f(x) = e^x$, encontrar una función polinomial de primer grado

$$P_1(x) = a_0 + a_1x$$

cuyo valor y pendiente en $x = 0$ coincidan con el valor y la pendiente de f.

Solución Como $f(x) = e^x$ y $f'(x) = e^x$, el valor y la pendiente de f en $x = 0$ están dados por

$$f(0) = e^0 = 1$$

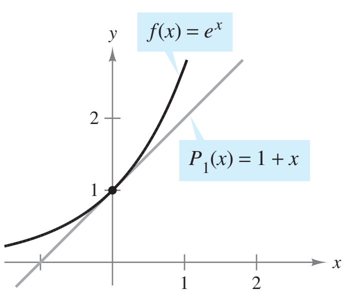
y

$$f'(0) = e^0 = 1.$$

Como $P_1(x) = a_0 + a_1x$, se puede usar la condición $P_1(0) = f(0)$ para concluir que $a_0 = 1$. Es más, como $P_1'(x) = a_1$, se puede usar la condición $P_1'(0) = f'(0)$ para concluir que $a_1 = 1$. Por consiguiente,

$$P_1(x) = 1 + x.$$

La figura 9.11 muestra las gráficas de $P_1(x) = 1 + x$ y $f(x) = e^x$.



P_1 es la aproximación polinomial de primer grado de $f(x) = e^x$
Figura 9.11

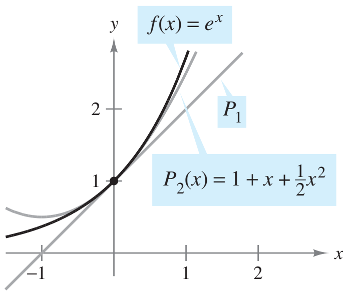
NOTA En el ejemplo 1 no es la primera vez que se usa una función lineal para aproximar otra función. El mismo procedimiento se usó como base para el método de Newton.

En la figura 9.12 se puede ver que, en los puntos cercanos a (0, 1), la gráfica de

$$P_1(x) = 1 + x \qquad \text{Aproximación de primer grado.}$$

está razonablemente cerca a la gráfica de $f(x) = e^x$. Sin embargo, al alejarse de (0, 1), las gráficas se apartan y la precisión de la aproximación disminuye. Para mejorar la aproximación, se puede imponer otro requisito todavía: que los valores de las segundas derivadas de P y f sean iguales en $x = 0$. El polinomio de menor grado, P_2, que satisface los tres requisitos, $P_2(0) = f(0)$, $P_2'(0) = f'(0)$ y $P_2''(0) = f''(0)$, puede mostrarse que es

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2. \qquad \text{Aproximación de segundo grado.}$$



P_2 es la aproximación polinomial de segundo grado para $f(x) = e^x$
Figura 9.12

Es más, en la figura 9.12 se puede ver que P_2 es una mejor aproximación que P_1. Si se continúa con este patrón, requiriendo que los valores de $P_n(x)$ y de sus primeras n coincidan con las de $f(x) = e^x$ en $x = 0$, se obtiene lo siguiente.

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{n!}x^n \qquad \text{Aproximación de } n\text{-ésimo grado.}$$
$$\approx e^x$$

EJEMPLO 2 Aproximación a $f(x) = e^x$ mediante un polinomio de tercer grado

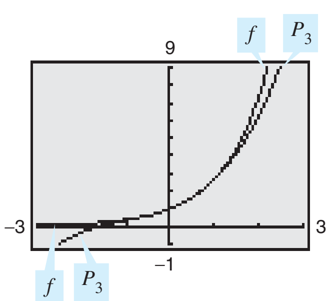
Construir una tabla que compare los valores del polinomio

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \qquad \text{Aproximación de tercer grado.}$$

con $f(x) = e^x$ para varios valores de x cercanos a 0.

Solución Usando una herramienta de graficación o una computadora, se pueden obtener los resultados mostrados en la tabla. Note que para $x = 0$, las dos funciones tienen el mismo valor, pero al alejarse x del valor 0, la precisión de la aproximación polinomial $P_3(x)$ disminuye.

x	−1.0	−0.2	−0.1	0	0.1	0.2	1.0
e^x	0.3679	0.81873	0.904837	1	1.105171	1.22140	2.7183
$P_3(x)$	0.3333	0.81867	0.904833	1	1.105167	1.22133	2.6667



P_3 es la aproximación polinomial de tercer grado para $f(x) = e^x$
Figura 9.13

TECNOLOGÍA Puede usarse una herramienta de graficación para comparar la gráfica del polinomio de aproximación con la gráfica de la función f. Por ejemplo, en la figura 9.13 la gráfica de

$$P_3(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 \qquad \text{Aproximación de tercer grado.}$$

se compara con la gráfica de $f(x) = e^x$. Si se tiene acceso a una herramienta de graficación, se puede tratar de comparar las gráficas de

$$P_4(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 \qquad \text{Aproximación de cuarto grado.}$$
$$P_5(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{120}x^5 \qquad \text{Aproximación de quinto grado.}$$
$$P_6(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{120}x^5 + \tfrac{1}{720}x^6 \qquad \text{Aproximación de sexto grado.}$$

con la gráfica de f. ¿Qué se nota?

The Granger Collection

BROOK TAYLOR (1685-1731)

Aunque Taylor no fue el primero en buscar aproximaciones polinomiales para funciones trascendentes, su trabajo, publicado en 1715, fue una de las primeras obras acerca de la materia.

Polinomios de Taylor y de Maclaurin

La aproximación polinomial de $f(x) = e^x$ dada en el ejemplo 2 estaba centrada en $c = 0$. Para aproximaciones centradas en un valor arbitrario de c, es conveniente escribir el polinomio en la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + \cdot \cdot \cdot + a_n(x - c)^n.$$

En esta forma, las derivadas sucesivas dan como resultado

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= a_1 + 2a_2(x - c) + 3a_3(x - c)^2 + \cdot \cdot \cdot + na_n(x - c)^{n-1} \\
P_n''(x) &= 2a_2 + 2(3a_3)(x - c) + \cdot \cdot \cdot + n(n - 1)a_n(x - c)^{n-2} \\
P_n'''(x) &= 2(3a_3) + \cdot \cdot \cdot + n(n - 1)(n - 2)a_n(x - c)^{n-3} \\
&\vdots \\
P_n^{(n)}(x) &= n(n - 1)(n - 2) \cdot \cdot \cdot (2)(1)a_n.
\end{aligned}$$

Sea $x = c$, obteniendo entonces

$$P_n(c) = a_0, \quad P_n'(c) = a_1, \quad P_n''(c) = 2a_2, \quad . . . , \quad P_n^{(n)}(c) = n!a_n$$

y como el valor de f y sus primeras n derivadas debe coincidir con el valor de P_n y sus primeras n derivadas en $x = c$, se sigue que

$$f(c) = a_0, \quad f'(c) = a_1, \quad \frac{f''(c)}{2!} = a_2, \quad . . . , \quad \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = a_n.$$

Con estos coeficientes se puede obtener la definición siguiente de **polinomios de Taylor**, en honor al matemático inglés Brook Taylor, y **polinomios de Maclaurin**, en honor al matemático inglés Colin Maclaurin (1698-1746).

NOTA Los polinomios de Maclaurin son tipos especiales de polinomios de Taylor en los que $c = 0$. ■

DEFINICIONES DEL POLINOMIO DE TAYLOR Y DE MACLAURIN DE GRADO *n*

Si f tiene n derivadas en c, entonces el polinomio

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdot \cdot \cdot + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

se llama **polinomio de Taylor de grado n para f en el punto c**. Si $c = 0$, entonces

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdot \cdot \cdot + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

también se llama **polinomio de Maclaurin de grado n para f**.

EJEMPLO 3 Un polinomio de Maclaurin para $f(x) = e^x$

Encuentre el polinomio de Maclaurin de grado n para $f(x) = e^x$.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para ver cómo usar series para obtener otras aproximaciones para e, ver el artículo "Novel Series-based Approximations to e" de John Knox y Harlan J. Brothers en *The College Mathematics Journal*.

Solución De la discusión en la página 651, el polinomio de Maclaurin de grado n para $f(x) = e^x$ está dado por

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{n!}x^n.$$

EJEMPLO 4 Encontrar polinomios de Taylor para ln *x*

Encontrar los polinomios de Taylor P_0, P_1, P_2, P_3 y P_4 para $f(x) = \ln x$ centrado en $c = 1$.

Solución Desarrollando respecto a $c = 1$ se obtiene lo siguiente.

$$f(x) = \ln x \qquad f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2!}{x^3} \qquad f'''(1) = \frac{2!}{1^3} = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{x^4} \qquad f^{(4)}(1) = -\frac{3!}{1^4} = -6$$

Por consiguiente, los polinomios de Taylor son como sigue.

$$P_0(x) = f(1) = 0$$

$$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = (x-1)$$

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

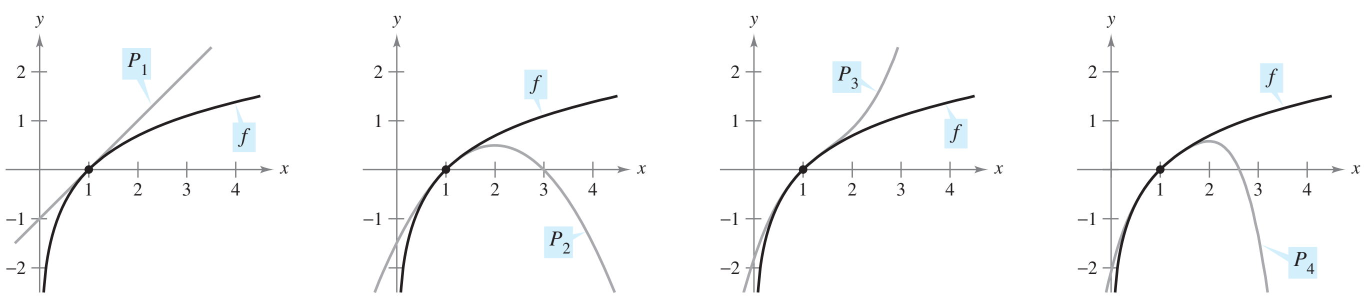
$$P_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

$$P_4(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$

La figura 9.14 compara las gráficas de P_1, P_2, P_3 y P_4 con la gráfica de $f(x) = \ln x$. Notar que cerca de $x = 1$ las gráficas son casi indistinguibles. Por ejemplo, $P_4(0.9) \approx -0.105358$ y $\ln(0.9) \approx -0.105361$.



Cuando n aumenta, la gráfica de P_n se convierte en una mejor aproximación de la gráfica de $f(x) = \ln x$ cerca de $x = 1$

Figura 9.14

EJEMPLO 5 Encontrar los polinomios de Maclaurin para cos *x*

Encontrar los polinomios de Maclaurin P_0, P_2, P_4 y P_6 para $f(x) = \cos x$. Usar $P_6(x)$ para aproximar el valor de $\cos(0.1)$.

Solución Desarrollando respecto de $c = 0$ se obtiene lo siguiente.

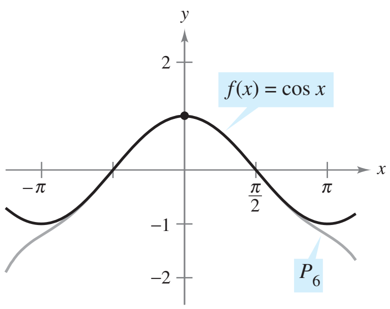
$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f(0) &= \cos 0 = 1 \\ f'(x) &= -\text{sen } x & f'(0) &= -\text{sen } 0 = 0 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -\cos 0 = -1 \\ f'''(x) &= \text{sen } x & f'''(0) &= \text{sen } 0 = 0 \end{aligned}$$

A través de repetida derivación puede verse que el patrón $1, 0, -1, 0$ se repite y se obtienen los polinomios de Maclaurin siguientes.

$$P_0(x) = 1, \quad P_2(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2,$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4, \quad P_6(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$$

Usando $P_6(x)$, se obtiene la aproximación $\cos(0.1) \approx 0.995004165$, que coincide con el valor de la herramienta de graficación a nueve decimales. En la figura 9.15 se comparan las gráficas de $f(x) = \cos x$ y P_6.



En la cercanía de $(0, 1)$, la gráfica de P_6 puede usarse para aproximar la gráfica de $f(x) = \cos x$

Figura 9.15

Notar que en el ejemplo 5 los polinomios de Maclaurin para el cos *x* sólo tienen potencias pares de *x*. Similarmente, los polinomios de Maclaurin para sen *x* sólo tienen potencias impares de *x* (ver ejercicio 17). Esto generalmente no es verdad para los polinomios de Taylor para sen *x* y cos *x* desarrollados respecto de $c \neq 0$, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Encontrar un polinomio de Taylor para sen *x*

Encontrar el tercer polinomio de Taylor para $f(x) = \text{sen } x$, desarrollado respecto de $c = \pi/6$.

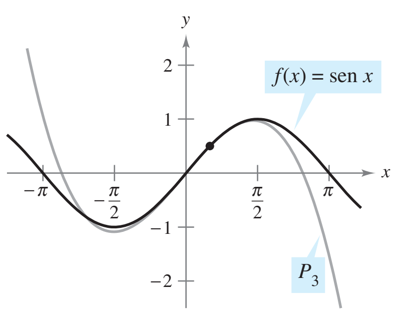
Solución Desarrollando respecto de $c = \pi/6$ se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sen } x & f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ f'(x) &= \cos x & f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f''(x) &= -\text{sen } x & f''\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -\text{sen } \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Así, el tercer polinomio de Taylor para $f(x) = \text{sen } x$, desarrollado respecto a $c = \pi/6$, es

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2(2!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2(3!)}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3. \end{aligned}$$

La figura 9.16 compara las gráficas de $f(x) = \text{sen } x$ y P_3.



En la cercanía de $(\pi/6, 1/2)$, la gráfica de P_3 puede usarse para aproximar la gráfica de $f(x) = \text{sen}\,x$

Figura 9.16

Los polinomios de Taylor y de Maclaurin pueden usarse para aproximar el valor de una función en un punto específico. Por ejemplo, para aproximar el valor de ln(1.1), se pueden usar los polinomios de Taylor para $f(x) = \ln x$ desarrollados respecto de $c = 1$, como se muestra en el ejemplo 4, o se pueden usar los polinomios de Maclaurin, como se muestra en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Aproximación por polinomios de Maclaurin

Usar un polinomio de Maclaurin para aproximar el valor de ln(1.1).

Solución Como 1.1 está más cerca de 1 que de 0, se deben considerar polinomios de Maclaurin para la función $g(x) = \ln(1 + x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(1 + x) & g(0) &= \ln(1 + 0) = 0 \\ g'(x) &= (1 + x)^{-1} & g'(0) &= (1 + 0)^{-1} = 1 \\ g''(x) &= -(1 + x)^{-2} & g''(0) &= -(1 + 0)^{-2} = -1 \\ g'''(x) &= 2(1 + x)^{-3} & g'''(0) &= 2(1 + 0)^{-3} = 2 \\ g^{(4)}(x) &= -6(1 + x)^{-4} & g^{(4)}(0) &= -6(1 + 0)^{-4} = -6 \end{aligned}$$

Notar que se obtienen los mismos coeficientes que en el ejemplo 4. Por consiguiente, el polinomio de Maclaurin de cuarto grado para $g(x) = \ln(1 + x)$ es

$$\begin{aligned} P_4(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\ln(1.1) = \ln(1 + 0.1) \approx P_4(0.1) \approx 0.0953083.$$

Verificar que el polinomio de Taylor de cuarto grado (del ejemplo 4), evaluado en $x = 1.1$, da el mismo resultado.

n	$P_n(0.1)$
1	0.1000000
2	0.0950000
3	0.0953333
4	0.0953083

La tabla a la izquierda ilustra la precisión de la aproximación del polinomio de Taylor al valor que da la herramienta de graficación para ln(1.1). Se puede ver que conforme n crece, $P_n(0.1)$ tiende al valor de la herramienta de graficación que es 0.0953102.

Por otro lado, la siguiente tabla ilustra que conforme se aleja uno del punto de desarrollo (o de expansión) $c = 1$, la precisión de la aproximación disminuye.

Aproximación de ln(1 + *x*) mediante un polinomio de Taylor de cuarto grado

x	0	0.1	0.5	0.75	1.0
$\ln(1 + x)$	0	0.0953102	0.4054651	0.5596158	0.6931472
$P_4(x)$	0	0.0953083	0.4010417	0.5302734	0.5833333

Estas dos tablas ilustran dos puntos muy importantes sobre la precisión de los polinomios de Taylor (o de Maclaurin) para su uso en aproximaciones.

1. La aproximación es normalmente mejor en los valores de x cercanos a c que en valores alejados de c.
2. La aproximación es generalmente mejor para los polinomios de Taylor (o de Maclaurin) de grado más alto que para los de grado más bajo.

Residuo de un polinomio de Taylor

Una técnica de aproximación es de poco valor sin alguna idea de su precisión. Para medir la precisión de una aproximación al valor de una función $f(x)$ mediante un polinomio de Taylor $P_n(x)$, se puede usar el concepto de **residuo** $R_n(x)$, definido como sigue.

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Valor exacto}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{Valor aproximado}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Resto}}$$

Así, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. El valor absoluto de $R_n(x)$ se llama **error** de la aproximación. Es decir,

$$\text{Error} = |R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|.$$

El siguiente teorema da un procedimiento general para estimar el residuo de un polinomio de Taylor. Este importante teorema es conocido como el **teorema de Taylor**, y el residuo dado en el teorema se llama **fórmula del residuo de Lagrange**. (La demostración del teorema es larga, y se da en el apéndice A.)

TEOREMA 9.19 TEOREMA DE TAYLOR

Si una función f es derivable hasta el orden $n + 1$ en un intervalo I que contiene a c, entonces, para toda x en I, existe z entre x y c tal que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdot \cdot \cdot + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}.$$

NOTA Una consecuencia útil del teorema de Taylor es que

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x - c|^{n+1}}{(n + 1)!} \text{ máx } |f^{(n+1)}(z)|$$

donde máx$|f^{(n+1)}(z)|$ es el valor máximo de $f^{(n+1)}(z)$ entre x y c. ■

Para $n = 0$, el teorema de Taylor establece que si f es derivable en un intervalo I conteniendo c, entonces, para cada x en I, existe z entre x y c tal que

$$f(x) = f(c) + f'(z)(x - c) \quad \text{o} \quad f'(z) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

¿Reconoce este caso especial del teorema de Taylor? (Es el teorema del valor medio.)

Al aplicar el teorema de Taylor, no se debe esperar poder encontrar el valor exacto de z. (Si se pudiera hacer esto, no sería necesaria una aproximación.) Más bien, se trata de encontrar límites para $f^{(n+1)}(z)$ a partir de los cuales se puede decir qué tan grande es el resto $R_n(x)$.

EJEMPLO 8 Determinar la precisión de una aproximación

El polinomio de Maclaurin de tercer grado para sen x está dado por

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Usar el teorema de Taylor para aproximar sen (0.1) mediante $P_3(0.1)$ y determinar la precisión de la aproximación.

Solución Aplicando el teorema de Taylor, se tiene

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4$$

donde $0 < z < 0.1$. Por consiguiente,

$$\operatorname{sen}(0.1) \approx 0.1 - \frac{(0.1)^3}{3!} \approx 0.1 - 0.000167 = 0.099833.$$

Como $f^{(4)}(z) = \operatorname{sen} z$, se sigue que el error $|R_3(0.1)|$ puede acotarse como sigue.

$$0 < R_3(0.1) = \frac{\operatorname{sen} z}{4!}(0.1)^4 < \frac{0.0001}{4!} \approx 0.000004$$

Esto implica que

$$0.099833 < \operatorname{sen}(0.1) = 0.099833 + R_3(x) < 0.099833 + 0.000004$$
$$0.099833 < \operatorname{sen}(0.1) < 0.099837.$$

NOTA Intentar verificar los resultados obtenidos en los ejemplos 8 y 9 usando una herramienta de graficación. En el ejemplo 8, se obtiene

$$\operatorname{sen}(0.1) \approx 0.0998334.$$

En el ejemplo 9, se obtiene

$$P_3(1.2) \approx 0.1827$$

y

$$\ln(1.2) \approx 0.1823. \blacksquare$$

EJEMPLO 9 Aproximar un valor con una precisión determinada

Determinar el grado del polinomio de Taylor $P_n(x)$ desarrollado respecto de $c = 1$ que debe usarse para aproximar $\ln(1.2)$ de manera que el error sea menor que 0.001.

Solución Siguiendo el modelo del ejemplo 4, se puede ver que la derivada de orden $(n + 1)$ de $f(x) = \ln x$ está dada por

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Usando el teorema de Taylor, se sabe que el error $|R_n(1.2)|$ está dado por

$$|R_n(1.2)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(1.2 - 1)^{n+1}\right| = \frac{n!}{z^{n+1}}\left[\frac{1}{(n+1)!}\right](0.2)^{n+1}$$
$$= \frac{(0.2)^{n+1}}{z^{n+1}(n+1)}$$

donde $1 < z < 1.2$. En este intervalo, $(0.2)^{n+1}/[z^{n+1}(n + 1)]$ es menor que $(0.2)^{n+1}/(n + 1)$.. Así pues, se busca un valor de n tal que

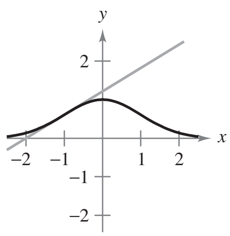
$$\frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)} < 0.001 \quad \Rightarrow \quad 1\,000 < (n + 1)5^{n+1}.$$

Por ensayo y error, puede determinarse que el menor valor de n que satisface esta desigualdad es $n = 3$. Por tanto, se necesita el polinomio de Taylor de tercer grado para lograr la precisión deseada al aproximar $\ln(1.2)$.

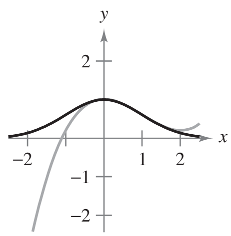
9.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, asociar la aproximación polinomial de Taylor para la función $f(x) = e^{-x^2/2}$ con la gráfica correcta. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*) y *d*).]

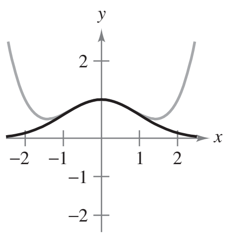
a)



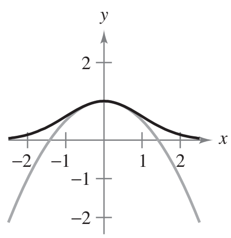
b)



c)



d)



1. $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$

2. $g(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

3. $g(x) = e^{-1/2}[(x + 1) + 1]$

4. $g(x) = e^{-1/2}\left[\frac{1}{3}(x - 1)^3 - (x - 1) + 1\right]$

En los ejercicios 5 a 8, encontrar una función polinomial de primer grado P_1 cuyo valor y pendiente coincidan con el valor y pendiente de f en $x = c$. Usar una herramienta de graficación para representar gráficamente f y P_1. ¿Cómo se le llama a P_1?

5. $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x}}, \quad c = 4$

6. $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}, \quad c = 8$

7. $f(x) = \sec x, \quad c = \dfrac{\pi}{4}$

8. $f(x) = \tan x, \quad c = \dfrac{\pi}{4}$

Análisis gráfico y numérico **En los ejercicios 9 y 10, usar una herramienta de graficación para representar gráficamente f y su aproximación polinomial de segundo grado P_2 en $x = c$. Completar la tabla que compara los valores de f y P_2.**

9. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}, \quad c = 1$

$P_2(x) = 4 - 2(x - 1) + \frac{3}{2}(x - 1)^2$

x	0	0.8	0.9	1	1.1	1.2	2
$f(x)$							
$P_2(x)$							

10. $f(x) = \sec x, \quad c = \dfrac{\pi}{4}$

$P_2(x) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{3}{2}\sqrt{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2$

x	-2.15	0.585	0.685	$\frac{\pi}{4}$	0.885	0.985	1.785
$f(x)$							
$P_2(x)$							

11. ***Conjetura*** Considerar la función $f(x) = \cos x$ y sus polinomios de Maclaurin P_2, P_4 y P_6 (ver ejemplo 5).

a) Usar una herramienta de graficación para representar gráficamente f y las aproximaciones polinomiales indicadas.

b) Evaluar y comparar los valores de $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$ para $n = 2$, 4 y 6.

c) Usar los resultados del apartado *b*) para hacer una conjetura sobre $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$.

12. ***Conjetura*** Considerar la función $f(x) = x^2e^x$.

a) Encontrar los polinomios de Maclaurin P_2, P_3 y P_4 para f.

b) Usar una herramienta de graficación para representar f, P_2, P_3 y P_4.

c) Evaluar y comparar los valores de $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$ para $n = 2$, 3 y 4.

d) Usar los resultados del apartado *c*) para hacer una conjetura sobre $f^{(n)}(0)$ y $P_n^{(n)}(0)$.

En los ejercicios 13 a 24, encontrar el polinomio de Maclaurin de grado n para la función.

13. $f(x) = e^{3x}, \quad n = 4$

14. $f(x) = e^{-x}, \quad n = 5$

15. $f(x) = e^{-x/2}, \quad n = 4$

16. $f(x) = e^{x/3}, \quad n = 4$

17. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad n = 5$

18. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x, \quad n = 3$

19. $f(x) = xe^x, \quad n = 4$

20. $f(x) = x^2e^{-x}, \quad n = 4$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}, \quad n = 5$

22. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad n = 4$

23. $f(x) = \sec x, \quad n = 2$

24. $f(x) = \tan x, \quad n = 3$

En los ejercicios 25 a 30, encontrar el polinomio de Taylor de grado n centrado en c.

25. $f(x) = \dfrac{2}{x}, \quad n = 3, \quad c = 1$

26. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad n = 4, \quad c = 2$

27. $f(x) = \sqrt{x}, \quad n = 3, \quad c = 4$

28. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad n = 3, \quad c = 8$

29. $f(x) = \ln x, \quad n = 4, \quad c = 2$

30. $f(x) = x^2 \cos x, \quad n = 2, \quad c = \pi$

CAS **En los ejercicios 31 y 32, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar los polinomios de Taylor indicados para la función *f*. Representar gráficamente la función y los polinomios de Taylor.**

31. $f(x) = \tan \pi x$
(a) $n = 3, \quad c = 0$
(b) $n = 3, \quad c = 1/4$

32. $f(x) = 1/(x^2 + 1)$
(a) $n = 4, \quad c = 0$
(b) $n = 4, \quad c = 1$

33. ***Aproximaciones numéricas y gráficas***

a) Usar los polinomios de Maclaurin $P_1(x)$, $P_3(x)$ y $P_5(x)$ para $f(x) = \operatorname{sen} x$ para completar la tabla.

x	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$\operatorname{sen} x$	0	0.2474	0.4794	0.6816	0.8415
$P_1(x)$					
$P_3(x)$					
$P_5(x)$					

b) Usar una herramienta de graficación para representar $f(x) = \operatorname{sen} x$ y los polinomios de Maclaurin en el apartado *a*).

c) Describir el cambio en la precisión de una aproximación polinomial conforme aumenta la distancia al punto en el que se centra el polinomio.

Para discusión

34. ***Aproximaciones numéricas y gráficas***

a) Usar los polinomios de Taylor $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_4(x)$ correspondientes a $f(x) = e^x$ centrada en $c = 1$ para completar la tabla.

x	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
e^x	e	3.4903	4.4817	5.7546	7.3891
$P_1(x)$					
$P_2(x)$					
$P_4(x)$					

b) Usar una herramienta de graficación para graficar $f(x) = e^x$ y los polinomios de Taylor en el inciso *a*).

c) Describir el cambio en la precisión de aproximaciones polinomiales a medida que aumenta el grado.

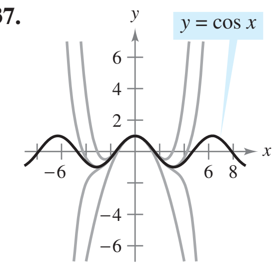
Aproximaciones numéricas y gráficas **En los ejercicios 35 y 36, *a*) encontrar el polinomio de Maclaurin $P_3(x)$ para $f(x)$, *b*) completar la tabla para $f(x)$ y $P_3(x)$, y *c*) dibujar las gráficas de $f(x)$ y $P_3(x)$ en el mismo eje de coordenadas.**

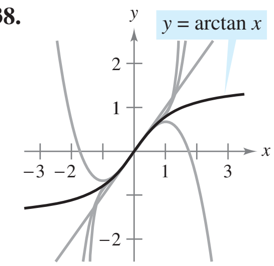
x	−0.75	−0.50	−0.25	0	0.25	0.50	0.75
$f(x)$							
$P_3(x)$							

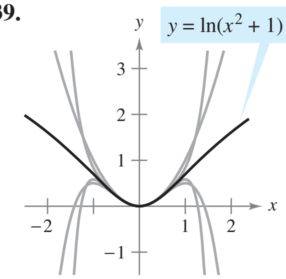
35. $f(x) = \arcsin x$

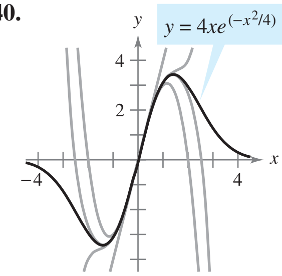
36. $f(x) = \arctan x$

En los ejercicios 37 a 40, la gráfica de $y = f(x)$ se muestra con cuatro de sus polinomios de Maclaurin. Identificar los polinomios de Maclaurin y usar una herramienta de graficación para confirmar sus resultados.

37.


38.


39.


40.


En los ejercicios 41 a 44, aproximar la función al valor dado de *x*, usando el polinomio encontrado en el ejercicio indicado.

41. $f(x) = e^{3x}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right)$, ejercicio 13

42. $f(x) = x^2e^{-x}, \quad f\left(\frac{1}{5}\right)$, ejercicio 20

43. $f(x) = \ln x, \quad f(2.1)$, ejercicio 29

44. $f(x) = x^2 \cos x, \quad f\left(\frac{7\pi}{8}\right)$, ejercicio 30

En los ejercicios 45 a 48, usar el teorema de Taylor para obtener una cota superior para el error de la aproximación. Después calcular el valor exacto del error.

45. $\cos(0.3) \approx 1 - \frac{(0.3)^2}{2!} + \frac{(0.3)^4}{4!}$

46. $e \approx 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!}$

47. $\operatorname{arcsen}(0.4) \approx 0.4 + \frac{(0.4)^3}{2 \cdot 3}$

48. $\arctan(0.4) \approx 0.4 - \frac{(0.4)^3}{3}$

En los ejercicios 49 a 52, determinar el grado del polinomio de Maclaurin requerido para que el error en la aproximación de la función en el valor indicado de *x* sea menor que 0.001.

49. $\operatorname{sen}(0.3)$

50. $\cos(0.1)$

51. $e^{0.6}$

52. $\ln(1.25)$

CAS **En los ejercicios 53 a 56, determinar el grado del polinomio de Maclaurin requerido para que el error en la aproximación de la función en el valor indicado de x sea menor que 0.0001. Usar un sistema algebraico por computadora para obtener y evaluar las derivadas requeridas.**

53. $f(x) = \ln(x + 1)$, aproximación $f(0.5)$.

54. $f(x) = \cos(\pi x^2)$, aproximación $f(0.6)$.

55. $f(x) = e^{-\pi x}$, aproximación $f(1.3)$.

56. $f(x) = e^{-x}$, aproximación $f(1)$.

En los ejercicios 57 a 60, determinar los valores de x para los cuales la función pueda reemplazarse por el polinomio de Taylor si el error no puede ser mayor que 0.001.

57. $f(x) = e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}, \quad x < 0$

58. $f(x) = \operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$

59. $f(x) = \cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$

60. $f(x) = e^{-2x} \approx 1 - 2x + 2x^2 - \dfrac{4}{3}x^3$

Desarrollo de conceptos

61. Una función elemental se aproxima por un polinomio. En sus propias palabras, describir qué significa decir que el polinomio se *desarrolla respecto a c* o *centrado en c*.

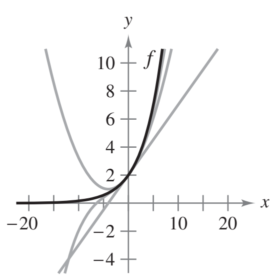
62. Cuando una función elemental f es aproximada por un polinomio de segundo grado P_2 centrada en c, ¿qué se sabe sobre f y P_2 en c? Explicar el razonamiento.

63. Enumerar la definición de un polinomio de Taylor grado n para f centrado en c.

64. Describir la precisión del polinomio de Taylor grado n para f centrado en c conforme aumenta la distancia entre c y x.

65. En general, ¿cómo cambia la precisión de un polinomio de Taylor cuando el grado del polinomio aumenta? Explicar el razonamiento.

66. Las gráficas muestran aproximaciones polinomiales de primero, segundo y tercer grados de P_1, P_2 y P_3 para una función f. Etiquetar las gráficas de P_1, P_2 y P_3.



67. ***Comparación de los polinomios de Maclaurin***

a) Comparar los polinomios de Maclaurin de grado 4 y grado 5, respectivamente, para las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = xe^x$. ¿Cuál es la relación entre ellos?

b) Usar el resultado en el apartado *a*) y el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $f(x) = \operatorname{sen} x$ para encontrar un polinomio de Maclaurin de grado 6 para la función $g(x) = x \operatorname{sen} x$.

c) Usar el resultado en el apartado *a*) y el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $f(x) = \operatorname{sen} x$ para encontrar un polinomio de Maclaurin de grado 4 para la función $g(x) = (\operatorname{sen} x)/x$.

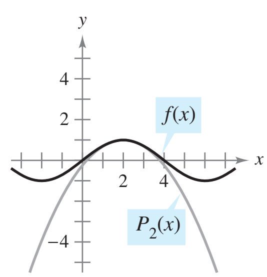
68. ***Derivación de los polinomios de Maclaurin***

a) Derivar el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $f(x) = \operatorname{sen} x$ y comparar el resultado con el polinomio de Maclaurin de grado 4 para $g(x) = \cos x$.

b) Derivar el polinomio de Maclaurin de grado 6 para $f(x) = \cos x$ y comparar el resultado con el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $g(x) = \operatorname{sen} x$.

c) Derivar el polinomio de Maclaurin de grado 4 para $f(x) = e^x$. Describir la relación entre las dos series.

69. ***Razonamiento gráfico*** La figura muestra la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x/4)$ y el polinomio de Taylor de segundo grado $P_2(x) = 1 - (\pi^2/32)(x - 2)^2$ centrado en $x = 2$.



a) Usar la simetría de la gráfica de f para escribir el polinomio de Taylor de segundo grado $Q_2(x)$ para f centrado en $x = -2$.

b) Usar una traslación horizontal del resultado en el apartado *a*) para encontrar el polinomio de Taylor de segundo grado $R_2(x)$ para f centrado en $x = 6$.

c) ¿Es posible usar una traslación horizontal del resultado en el apartado *a*) para escribir el polinomio de Taylor de segundo grado para f centrado en $x = 4$? Explicar su razonamiento.

70. Demostrar que si f es una función impar, entonces su polinomio de Maclaurin de grado n contiene sólo términos con potencias impares de x.

71. Demostrar que si f es una función par, entonces su polinomio de Maclaurin de grado n contiene sólo términos con potencias pares de x.

72. Sea $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de grado n para f en c. Demostrar que $P_n(c) = f(c)$ y $P^{(k)}(c) = f^{(k)}(c)$ para $1 \le k \le n$. (Ver ejercicios 9 y 10.)

73. ***Redacción*** La demostración en el ejercicio 72 garantiza que el polinomio de Taylor y sus derivadas coinciden con la función y sus derivadas en $x = c$. Usar las gráficas y tablas de los ejercicios 33 a 36 para discutir qué pasa con la precisión del polinomio de Taylor cuando uno se aleja de $x = c$.

9.8 Series de potencia

- **Comprender la definición de una serie de potencia.**
- **Calcular el radio y el intervalo de convergencia de una serie de potencia.**
- **Determinar la convergencia en los puntos terminales de una serie de potencia.**
- **Derivar e integrar una serie de potencia.**

Series de potencia

En la sección 9.7 se presentó el concepto de aproximación de las funciones por medio de polinomios de Taylor. Por ejemplo, la función $f(x) = e^x$ puede ser *aproximada* por sus polinomios de Maclaurin como sigue.

$$e^x \approx 1 + x \qquad \text{Polinomio de grado 1.}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad \text{Polinomio de grado 2.}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \qquad \text{Polinomio de grado 3.}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \qquad \text{Polinomio de grado 4.}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \qquad \text{Polinomio de grado 5.}$$

En esa sección se vio que la aproximación es mejor cuanto mayor es el grado del polinomio.

En ésta y las próximas dos secciones se verá que varios tipos importantes de funciones, incluyendo

$$f(x) = e^x$$

pueden ser representadas *exactamente* por medio de una serie infinita llamada **serie de potencia**. Por ejemplo, la representación de serie de potencia para e^x es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdot \cdot \cdot + \frac{x^n}{n!} + \cdot \cdot \cdot .$$

Para cada número real x puede mostrarse que la serie infinita a la derecha converge al número e^x. Sin embargo, antes de hacer esto se tratan algunos resultados preliminares relacionados con series de potencias, empezando con la definición siguiente.

EXPLORACIÓN

Razonamiento gráfico Usar una herramienta de graficación para aproximar la gráfica de cada serie de potencia cerca de $x = 0$. (Usar los primeros términos de cada serie.) Cada serie representa una función muy conocida. ¿Cuál es la función?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$

DEFINICIÓN DE SERIES DE POTENCIA

Si x es una variable, entonces una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdot \cdot \cdot + a_n x^n + \cdot \cdot \cdot$$

se llama **serie de potencia**. De manera más general, una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdot \cdot \cdot + a_n(x-c)^n + \cdot \cdot \cdot$$

se llama **serie de potencia centrada en *c***, donde c es una constante.

NOTA Para simplificar la notación para series de potencia, se establece que $(x - c)^0 = 1$, aun cuando $x = c$.

EJEMPLO 1 Series de potencia

a) La serie de potencia siguiente está centrada en 0.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

b) La serie de potencia siguiente está centrada en -1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n = 1 - (x+1) + (x+1)^2 - (x+1)^3 + \cdots$$

c) La serie de potencia siguiente está centrada en 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots$$

Radio e intervalo de convergencia

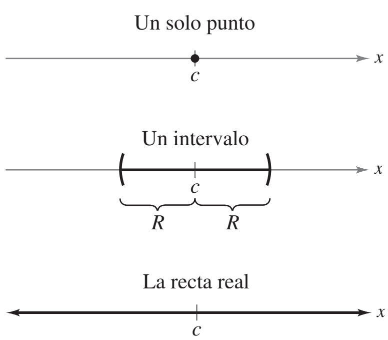
Una serie de potencia en x puede verse como una función de x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

donde el *dominio de f* es el conjunto de todas las x para el que la serie de potencia converge. La determinación del dominio de una serie de potencia es la preocupación primaria en esta sección. Claro está que cada serie de potencia converge en su centro c porque

$$\begin{aligned} f(c) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(c-c)^n \\ &= a_0(1) + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots \\ &= a_0. \end{aligned}$$

Así, c siempre queda en el dominio de f. El importante teorema siguiente establece que el dominio de una serie de potencia puede tomar tres formas básicas: un solo punto, un intervalo centrado en c, o toda la recta real, como se muestra en la figura 9.17. Una demostración se da en el apéndice A.



El dominio de una serie de potencia tiene sólo tres formas básicas: un solo punto, un intervalo centrado en c, o toda la recta real
Figura 9.17

TEOREMA 9.20 CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIA

Para una serie de potencia centrada en c, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera.

1. La serie converge sólo en c.
2. Existe un número real $R > 0$ tal que la serie converge absolutamente para $|x - c| < R$, y diverge para $|x - c| > R$.
3. La serie converge absolutamente para todo x.

El número R es el **radio de convergencia** de la serie de potencia. Si la serie sólo converge en c, el radio de convergencia es $R = 0$, y si la serie converge para todo x, el radio de convergencia es $R = \infty$. El conjunto de todos los valores de x para los cuales la serie de potencia converge es el **intervalo de convergencia** de la serie de potencia.

AYUDA DE ESTUDIO Para determinar el radio de convergencia de una serie de potencia, aplicar el criterio del cociente, como se demuestra en los ejemplos 2, 3 y 4.

EJEMPLO 2 Hallar el radio de convergencia

Hallar el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Solución Para $x = 0$, se obtiene

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} n!0^n = 1 + 0 + 0 + \cdot \cdot \cdot = 1.$$

Para cualquier valor fijo de x tal que $|x| > 0$, sea $u_n = n!x^n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} (n+1) \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, por el criterio del cociente, la serie diverge para $|x| > 0$ y sólo converge en su centro, 0. Por tanto, el radio de convergencia es $R = 0$.

EJEMPLO 3 Hallar el radio de convergencia

Hallar el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n.$$

Solución Para $x \neq 2$, sea $u_n = 3(x-2)^n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3(x-2)^{n+1}}{3(x-2)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} |x-2| \\
&= |x-2|.
\end{aligned}$$

Por el criterio del cociente, la serie converge si $|x-2| < 1$ y diverge si $|x-2| > 1$. Por consiguiente, el radio de convergencia de la serie es $R = 1$.

EJEMPLO 4 Hallar el radio de convergencia

Hallar el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

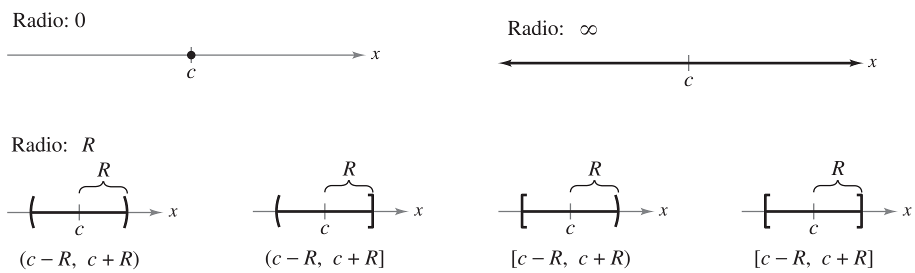
Solución Para $u_n = (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}.
\end{aligned}$$

Para cualquier valor *fijo* x, este límite es 0. Por el criterio del cociente, la serie converge para todo x. Por consiguiente, el radio de convergencia es $R = \infty$.

Convergencia en los puntos terminales

Notar que para una serie de potencia cuyo radio de convergencia es un número finito R, el teorema 9.20 no dice nada sobre la convergencia en los puntos *terminales* del intervalo de convergencia. Cada punto terminal debe analizarse separadamente respecto a convergencia o divergencia. Como resultado, el intervalo de convergencia de una serie de potencia puede tomar cualquiera de las seis formas mostradas en la figura 9.18.



Intervalos de convergencia
Figura 9.18

EJEMPLO 5 Hallar el intervalo de convergencia

Hallar el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Solución Haciendo $u_n = x^n/n$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)}}{\dfrac{x^n}{n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{nx}{n+1}\right|$$

$$= |x|.$$

Por tanto, por el criterio del cociente, el radio de convergencia es $R = 1$. Y como la serie es centrada en 0, converge en el intervalo $(-1, 1)$. Sin embargo, este intervalo no es necesariamente el *intervalo de convergencia*. Para determinar el intervalo se debe analizar la convergencia en cada uno de sus puntos terminales. Cuando $x = 1$, se obtiene la serie armónica *divergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots.$$ Diverge cuando $x = 1$.

Cuando $x = -1$, se obtiene la serie armónica alternada o alternante *convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots.$$ Converge cuando $x = -1$.

Por tanto, el intervalo de convergencia para la serie es $[-1, 1)$, como se muestra en la figura 9.19.

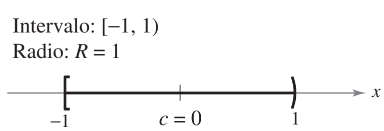


Figura 9.19

EJEMPLO 6 Hallar el intervalo de convergencia

Hallar el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}$.

Solución Haciendo $u_n = (-1)^n(x+1)^n/2^n$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^n(x+1)}{2^{n+1}}\right| \\
&= \left|\frac{x+1}{2}\right|.
\end{aligned}$$

Por el criterio del cociente, la serie converge si $|(x+1)/2| < 1$ o $|x+1| < 2$. Por tanto, el radio de convergencia es $R = 2$. Como la serie está centrada en $x = -1$, converge en el intervalo $(-3, 1)$. Además, en los puntos terminales se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \qquad \text{Diverge cuando } x = -3.$$

y

Intervalo: (−3, 1)
Radio: $R = 2$

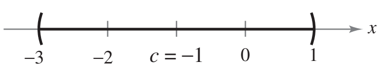


Figura 9.20

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \qquad \text{Diverge cuando } x = 1.$$

ambos divergen. Por tanto, el intervalo de convergencia es $(-3, 1)$, como se muestra en la figura 9.20.

EJEMPLO 7 Hallar el intervalo de convergencia

Hallar el intervalo de convergencia de

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Solución Haciendo $u_n = x^n/n^2$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}/(n+1)^2}{x^n/n^2}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2 x}{(n+1)^2}\right| = |x|.
\end{aligned}$$

Por tanto, el radio de convergencia es $R = 1$. Como la serie es centrada en $x = 0$, converge en el intervalo $(-1, 1)$. Cuando $x = 1$, se obtiene la serie p convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots. \qquad \text{Converge cuando } x = 1.$$

Cuando $x = -1$, se obtiene la serie alternada convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \cdots. \qquad \text{Converge cuando } x = -1.$$

Por consiguiente, el intervalo de convergencia para la serie dada es $[-1, 1]$.

The Granger Collection

JAMES GREGORY (1638-1675)

Uno de los primeros matemáticos que trabajaron con series de potencias fue el escocés James Gregory. Él desarrolló un método de series de potencias para interpolar valores en una tabla, método que usó después Brook Taylor en el desarrollo de los polinomios de Taylor y las series de Taylor.

Derivación e integración de series de potencia

La representación de funciones mediante series de potencias ha jugado un papel importante en el desarrollo del cálculo. De hecho, mucho del trabajo de Newton con derivación e integración fue realizado en el contexto de las series de potencias especialmente su trabajo con funciones algebraicas complicadas y con funciones trascendentes. Euler, Lagrange, Leibniz y Bernoulli usaron ampliamente las series de potencias en cálculo.

Una vez que se ha definido una función con una serie de potencia, es natural preguntarse cómo se pueden determinar las características de la función. ¿Es continua? ¿Derivable? El teorema 9.21, el cual se establece sin la demostración, contesta estas preguntas.

TEOREMA 9.21 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DEFINIDAS MEDIANTE SERIES DE POTENCIA

Si la función dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \\ &= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots \end{aligned}$$

tiene un radio de convergencia de $R > 0$, entonces, en el intervalo $(c - R, c + R)$, f es derivable (y por consiguiente continua). Además, la derivada y la primitiva o antiderivada de f son como sigue.

1. $$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} \\ &= C + a_0(x-c) + a_1\frac{(x-c)^2}{2} + a_2\frac{(x-c)^3}{3} + \cdots \end{aligned}$$

El *radio de convergencia* de la serie obtenida mediante la derivación o integración de una serie de potencia es el mismo que el de la serie de potencia original. Sin embargo, el *intervalo de convergencia* puede diferir como resultado del comportamiento en los puntos terminales.

El teorema 9.21 establece que, en muchos aspectos, una función definida me-diante una serie de potencia se comporta como un polinomio. Es continua en su intervalo de convergencia, y tanto su derivada como su antiderivada o primitiva pueden ser determinadas derivando e integrando cada término de la serie de potencia dada. Por ejemplo, la derivada de la serie de potencia

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

es

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + (2)\frac{x}{2} + (3)\frac{x^2}{3!} + (4)\frac{x^3}{4!} + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Nótese que $f'(x) = f(x)$. ¿Se reconoce esta función?

EJEMPLO 8 Intervalos de convergencia de $f(x)$, $f'(x)$ e $\int f(x)\,dx$

Considerar la función dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdot \cdot \cdot .$$

Calcular los intervalos de convergencia para cada una de las siguientes expresiones.

a) $\int f(x)\,dx$ ***b)*** $f(x)$ ***c)*** $f'(x)$

Solución Por el teorema 9.21, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \\ &= C + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \cdot \cdot \cdot . \end{aligned}$$

Por el criterio del cociente, se puede demostrar que cada serie tiene un radio de convergencia $R = 1$. Considerando el intervalo $(-1, 1)$, se tiene lo siguiente.

a) Para $\int f(x)\,dx$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \qquad \text{Intervalo de convergencia: } [-1, 1].$$

converge para $x = \pm 1$, y su intervalo de convergencia es $[-1, 1]$. Ver figura 9.21*a*.

b) Para $f(x)$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{Intervalo de convergencia: } [-1, 1).$$

converge para $x = -1$ y diverge para $x = 1$. Por tanto, su intervalo de convergencia es $[-1, 1)$. Ver figura 9.21*b*.

c) Para $f'(x)$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \qquad \text{Intervalo de convergencia: } (-1, 1).$$

diverge para $x = \pm 1$, y su intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. Ver figura 9.21*c*.

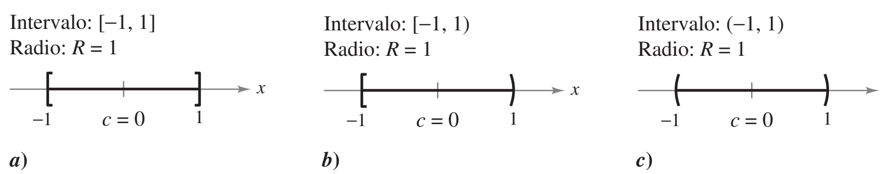


Figura 9.21

En el ejemplo 8 parece que de las tres series, la de la derivada, $f'(x)$, es la que tiene menor posibilidad de converger en los puntos terminales. De hecho, puede mostrarse que si la serie de $f'(x)$ converge en los puntos terminales $x = c \pm R$, la serie de $f(x)$ también converge en ellos.

9.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, establecer dónde está centrada la serie de potencia.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^n$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$

En los ejercicios 5 a 10, hallar el radio de convergencia de la serie de potencia.

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n^2}$

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^{2n}}{n!}$

En los ejercicios 11 a 34, hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencia. (Asegurarse de incluir un análisis de la convergencia en los puntos terminales del intervalo.)

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n$

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{7}\right)^n$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^n$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{5n}}{n!}$

16. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(2n)!}$

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2n)! \left(\frac{x}{3}\right)^n$

18. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(n+2)}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{4^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!(x-5)^n}{3^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-4)^n}{n9^n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}$

23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{n2^n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^{n-1}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(-2x)^{n-1}$

28. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

29. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(2n)!}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)x^n}{n!}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}\right] x^{2n+1}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)(x-3)^n}{4^n}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$

En los ejercicios 35 y 36, hallar el radio de convergencia de la serie de potencia, donde $c > 0$ y k es un entero positivo.

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^{n-1}}{c^{n-1}}$

36. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k x^n}{(kn)!}$

En los ejercicios 37 a 40, hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencia. (Asegurarse de incluir un análisis de la convergencia en los puntos terminales del intervalo.)

37. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n, \quad k > 0$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-c)^n}{nc^n}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k+1)(k+2) \cdots (k+n-1)x^n}{n!}, \quad k \geq 1$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-c)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$

En los ejercicios 41 a 44, escribir una serie equivalente en la que el índice para la suma empiece en $n = 1$.

41. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

42. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^n$

43. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

44. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

En los ejercicios 45 a 48, calcular los intervalos de convergencia de *a)* $f(x)$, *b)* $f'(x)$, *c)* $f''(x)$ y *d)* $\int f(x)\,dx$. Incluir una verificación para la convergencia en los puntos terminales del intervalo.

45. $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$

46. $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n5^n}$

47. $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}$

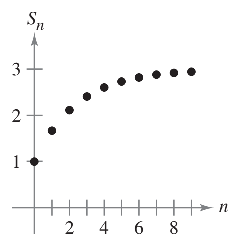
48. $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{n}$

Redacción **En los ejercicios 49 a 52, relacionar la gráfica de los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales de la serie**

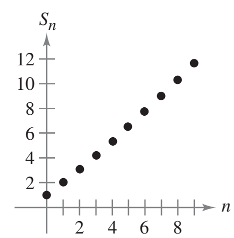
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

con el valor indicado de la función. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*) y *d*).] Explicar cómo eligió su opción.

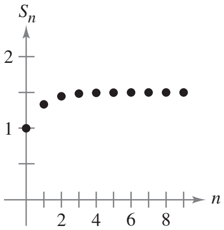
a)



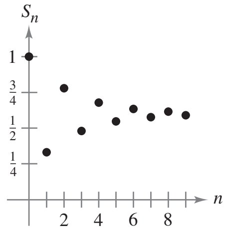
b)



c)



d)



49. $g(1)$

50. $g(2)$

51. $g(3.1)$

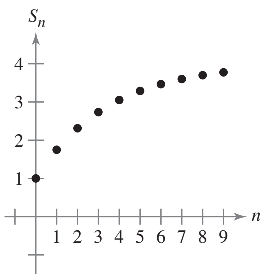
52. $g(-2)$

Redacción **En los ejercicios 53 a 56, relacionar la gráfica de los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales de la serie**

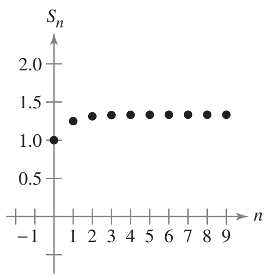
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

con el valor indicado de la función. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*) y *d*).] Explicar cómo eligió su opción.

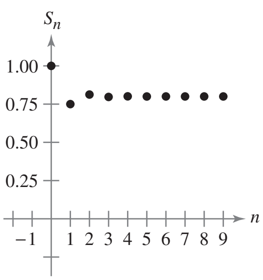
a)



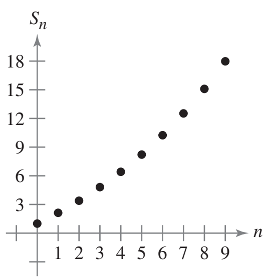
b)



c)



d)



53. $g\left(\frac{1}{8}\right)$

54. $g\left(-\frac{1}{8}\right)$

55. $g\left(\frac{9}{16}\right)$

56. $g\left(\frac{3}{8}\right)$

Desarrollo de conceptos

57. Definir una serie de potencia centrada en c.

58. Describir el radio de convergencia de una serie de potencia. Describir el intervalo de convergencia de una serie de potencia.

59. Describir las tres formas básicas del dominio de una serie de potencia.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

60. Describir cómo derivar e integrar una serie de potencia con un radio de convergencia R. ¿Tendrán las series resultantes de las operaciones de derivación e integración un radio de convergencia diferente? Explicar.

61. Dar ejemplos que demuestren que la convergencia de una serie de potencia en los puntos terminales de su intervalo de convergencia puede ser condicional o absoluta. Explicar su razonamiento.

Para discusión

62. Escribir una serie de potencia que tenga el intervalo de la convergencia indicado. Explicar su razonamiento.

a) $(-2, 2)$ *b)* $(-1, 1]$ *c)* $(-1, 0)$ *d)* $[-2, 6)$

63. Sea $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

a) Hallar los intervalos de convergencia de f y g.

b) Mostrar que $f'(x) = g(x)$.

c) Mostrar que $g'(x) = -f(x)$.

d) Identificar las funciones f y g.

64. Sea $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

a) Hallar el intervalo de convergencia de f.

b) Demostrar que $f'(x) = f(x)$.

c) Demostrar que $f(0) = 1$.

d) Identificar las funciones f.

En los ejercicios 65 a 70, demostrar que la función representada por la serie de potencia es una solución de la ecuación diferencial.

65. $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $y'' + y = 0$

66. $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ $y'' + y = 0$

67. $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $y'' - y = 0$

68. $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $y'' - y = 0$

69. $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$, $y'' - xy' - y = 0$

70. $y = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{2^{2n} n! \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}$, $y'' + x^2 y = 0$

71. ***Función de Bessel*** La función de Bessel de orden 0 es

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}.$$

a) Mostrar que la serie converge para todo x.

b) Mostrar que la serie es una solución de la ecuación diferencial $x^2 J_0'' + x J_0' + x^2 J_0 = 0$.

c) Usar una herramienta de graficación para representar el polinomio constituido por los primeros cuatro términos de J_0.

d) Aproximar $\int_0^1 J_0\, dx$ a una precisión de dos decimales.

72. ***Función de Bessel*** La función de Bessel de orden 1 es

$$J_1(x) = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k+1} k!(k+1)!}.$$

a) Demostrar que la serie converge para todo x.

b) Demostrar que la serie es una solución de la ecuación diferencial $x^2 J_1'' + xJ_1' + (x^2 - 1)J_1 = 0$.

c) Usar una herramienta de grafiación para representar el polinomio constituido por los primeros cuatro términos de J_1.

d) Mostrar que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

CAS **En los ejercicios 73 a 76, la serie representa una función muy conocida. Usar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la suma parcial S_{10} e identificar la función a partir de la gráfica.**

73. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

74. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

75. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1$

76. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \le x \le 1$

77. ***Investigación*** El intervalo de convergencia de la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n$ es $(-4, 4)$.

a) Hallar la suma de la serie cuando $x = \frac{5}{2}$. Usar una herramienta de graficación para representar gráficamente los primeros seis términos de la sucesión de sumas parciales y la recta horizontal que representan la suma de la serie.

b) Repetir el apartado *a*) para $x = -\frac{5}{2}$.

c) Escribir un párrafo corto comparando el ritmo o velocidad de convergencia de las sumas parciales con la suma de la serie en los apartados *a*) y *b*). ¿Cómo difieren las graficas de las sumas parciales cuando convergen hacia la suma de la serie?

d) Dado cualquier número real positivo M, existe un entero positivo N tal que la suma parcial

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{5}{4}\right)^n > M.$$

Usar una calculadora para completar la tabla.

M	10	100	1 000	10 000
N				

78. ***Investigación*** El intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$ es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

a) Hallar la suma de la serie cuando $x = \frac{1}{6}$. Usar una herramienta de graficación para representar gráficamente los primeros seis términos de la sucesión de sumas parciales y la recta horizontal que representan la suma de la serie.

b) Repitir el apartado *a*) con $x = -\frac{1}{6}$.

c) Escribir un párrafo corto comparando el ritmo o velocidad de convergencia de las sumas parciales con la suma de la serie en los apartados *a*) y *b*). ¿Cómo difieren las gráficas de las sumas parciales cuando convergen hacia la suma de la serie?

d) Dado cualquier número real positivo M, existe un entero positivo N tal que la suma parcial

$$\sum_{n=0}^{N} \left(3 \cdot \frac{2}{3}\right)^n > M.$$

Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

M	10	100	1 000	10 000
N				

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 79 a 82, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.**

79. Si la serie de potencia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $x = 2$, entonces también converge para $x = -2$.

80. Es posible encontrar una serie de potencia cuyo intervalo de convergencia es $[0, \infty)$.

81. Si el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es $(-1, 1)$, entonces el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ es $(0, 2)$.

82. Si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x| < 2$, entonces

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

83. Demostrar que la serie de potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!(n+q)!} x^n$$

tiene un radio de convergencia de $R = \infty$ si p y q son enteros positivos.

84. Sea $g(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$, donde los coeficientes son $c_{2n} = 1$ y $c_{2n+1} = 2$ para $n \ge 0$.

a) Hallar el intervalo de convergencia de la serie.

b) Hallar una fórmula explícita para $g(x)$.

85. Sea $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, donde $c_{n+3} = c_n$ para $n \ge 0$.

a) Hallar el intervalo de convergencia de la serie.

b) Hallar una fórmula explícita para $f(x)$.

86. Demostrar que si la serie de potencia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ tiene un radio de convergencia de R, entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}$ tiene un radio de convergencia de $\sqrt{R}$.

87. Para $n > 0$, sea $R > 0$ y $c_n > 0$. Demostrar que si el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ es $[x_0 - R, x_0 + R]$, entonces la serie converge condicionalmente en $x_0 - R$.

9.9 Representación de funciones en series de potencia

- **Hallar una serie geométrica de potencia que representa una función.**
- **Construir una serie de potencia aplicando operaciones de series.**

The Granger Collection

JOSEPH FOURIER (1768-1830)

Parte de las contribuciones acerca de la representación de funciones mediante series de potencia se deben al matemático francés Joseph Fourier. El trabajo de Fourier es importante en la historia del cálculo, en parte porque obligó a matemáticos del siglo XVIII a cuestionar el estrecho concepto de función que prevalecía entonces. Cauchy y Dirichlet fueron motivados por el trabajo de Fourier sobre series, y en 1837 Dirichlet publicó la definición general de una función que se usa actualmente.

Series geométricas de potencia

En esta sección y en la próxima, se estudiarán varias técnicas para hallar una serie de potencia que represente una función dada.

Considerar la función dada por $f(x) = 1/(1 - x)$. La forma de f se parece mucho a la suma de una serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r}, \quad |r| < 1.$$

En otros términos, si se toma $a = 1$ y $r = x$, una representación de $1/(1 - x)$, en forma de una serie de potencia centrada en 0, es

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdot \cdot \cdot, \quad |x| < 1.\end{aligned}$$

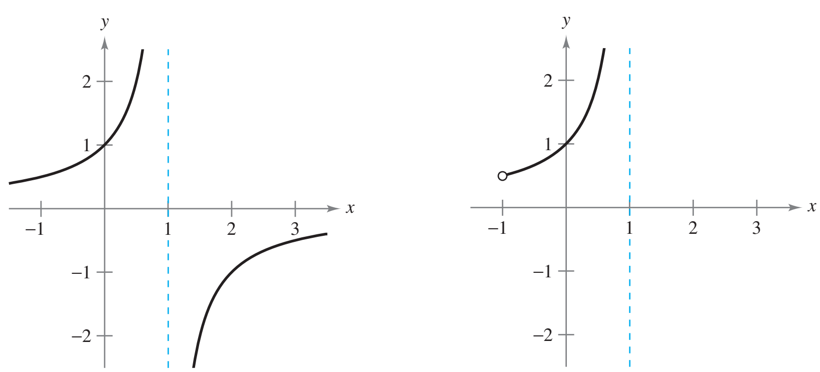
Naturalmente, esta serie representa a $f(x) = 1/(1 - x)$ sólo en el intervalo $(-1, 1)$, mientras que f está definida para todo $x \neq 1$, como se muestra en la figura 9.22. Para representar f en otro intervalo, se debe desarrollar otra serie diferente. Por ejemplo, para obtener la serie de potencia centrada en -1, se podría escribir

$$\frac{1}{1 - x} = \frac{1}{2 - (x + 1)} = \frac{1/2}{1 - [(x + 1)/2]} = \frac{a}{1 - r}$$

lo cual implica que $a = \frac{1}{2}$ y $r = (x + 1)/2$. Así, para $|x + 1| < 2$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x + 1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(x + 1)}{2} + \frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(x + 1)^3}{8} + \cdot \cdot \cdot\right], \quad |x + 1| < 2\end{aligned}$$

la cual converge en el intervalo $(-3, 1)$.



$f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$, dominio: todo $x \neq 1$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, dominio: $-1 < x < 1$

Figura 9.22

EJEMPLO 1 Hallar una serie geométrica de potencia centrada en 0

Hallar una serie de potencia para $f(x) = \dfrac{4}{x+2}$, centrada en 0.

Solución Escribiendo $f(x)$ en la forma $a/(1-r)$ se obtiene

$$\frac{4}{2+x} = \frac{2}{1-(-x/2)} = \frac{a}{1-r}$$

lo cual implica que $a = 2$ y $r = -x/2$. Por tanto, la serie de potencia para $f(x)$ es

$$\begin{aligned}\frac{4}{x+2} &= \sum_{n=0}^{\infty} ar^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(-\frac{x}{2}\right)^n \\ &= 2\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdot \cdot \cdot\right).\end{aligned}$$

División larga

$$\begin{array}{r}
2 - x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^3 + \cdots \\
2+x\,\overline{)\,4\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{4 + 2x}\qquad\qquad\qquad \\
-2x\qquad\qquad\qquad \\
\underline{-2x - x^2}\qquad\qquad \\
x^2\qquad\qquad \\
\underline{x^2 + \tfrac{1}{2}x^3}\qquad \\
-\tfrac{1}{2}x^3\qquad \\
\underline{-\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4}
\end{array}$$

Esta serie de potencia converge cuando

$$\left|-\frac{x}{2}\right| < 1$$

lo cual implica que el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$.

Otra manera de determinar una serie de potencia para una función racional como la del ejemplo 1 es usar la división larga. Por ejemplo, dividiendo $2 + x$ en 4, se obtiene el resultado mostrado a la izquierda.

EJEMPLO 2 Hallar una serie geométrica de potencia centrada en 1

Hallar una serie de potencia para $f(x) = \dfrac{1}{x}$, centrada en 1.

Solución Escribiendo $f(x)$ en la forma $a/(1-r)$ se obtiene

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(-x+1)} = \frac{a}{1-r}$$

lo cual implica que $a = 1$ y $r = 1 - x = -(x-1)$. Por tanto, la serie de potencia para $f(x)$ es

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} ar^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [-(x-1)]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(x-1)^n \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdot \cdot \cdot.\end{aligned}$$

Esta serie de potencia converge cuando

$$|x-1| < 1$$

lo cual implica que el intervalo de convergencia es $(0, 2)$.

Operaciones con series de potencia

La versatilidad de las series geométricas de potencia se mostrará más adelante en esta sección, después de una discusión acerca de las operaciones con series de potencia. Estas operaciones, usadas con la derivación y la integración, proporcionan un medio para desarrollar series de potencia para una gran variedad de funciones elementales. (Por simplicidad, las propiedades siguientes se enuncian para una serie centrada en 0.)

OPERACIONES CON SERIES DE POTENCIA

Sea $f(x) = \sum a_n x^n$ y $g(x) = \sum b_n x^n$.

1. $f(kx) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$

2. $f(x^N) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nN}$

3. $f(x) \pm g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$

Las operaciones descritas pueden modificar el intervalo de convergencia de la serie resultante. Por ejemplo, en la suma siguiente, el intervalo de convergencia de la suma es la *intersección* de los intervalos de convergencia de las dos series originales.

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{(-1,\,1)} \;\cap\; + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n}_{(-2,\,2)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) x^n}_{(-1,\,1)}$$

EJEMPLO 3 Suma de dos series de potencia

Hallar una serie de potencia, centrada en 0, para $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 - 1}$.

Solución Usando las fracciones parciales, se puede escribir $f(x)$ como

$$\frac{3x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{x + 1} + \frac{1}{x - 1}.$$

Sumando las dos series geométricas de potencia

$$\frac{2}{x + 1} = \frac{2}{1 - (-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

y

$$\frac{1}{x - 1} = \frac{-1}{1 - x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

se obtiene la serie de potencia siguiente.

$$\frac{3x - 1}{x^2 - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} [2(-1)^n - 1] x^n = 1 - 3x + x^2 - 3x^3 + x^4 - \cdot \cdot \cdot$$

El intervalo de convergencia para esta serie de potencia es $(-1, 1)$.

EJEMPLO 4 Hallar una serie de potencia mediante integración

Hallar una serie de potencia para $f(x) = \ln x$, centrada en 1.

Solución Por el ejemplo 2, se sabe que

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n. \qquad \text{Intervalo de convergencia: } (0, 2).$$

Integrando esta serie se obtiene

$$\begin{aligned}\ln x &= \int \frac{1}{x}\,dx + C\\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

Haciendo $x = 1$, se concluye que $C = 0$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\ln x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\\ &= \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots. \qquad \text{Intervalo de convergencia: } (0, 2].\end{aligned}$$

Notar que la serie converge en $x = 2$. Esto es consistente con la observación hecha en la sección precedente de que la integración de una serie de potencia puede alterar la convergencia en los puntos terminales del intervalo de convergencia.

TECNOLOGÍA En la sección 9.7, el polinomio de Taylor de cuarto grado para la función logarítmica natural

$$\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

fue usado para aproximar $\ln(1.1)$.

$$\begin{aligned}\ln(1.1) &\approx (0.1) - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}(0.1)^3 - \frac{1}{4}(0.1)^4\\ &\approx 0.0953083\end{aligned}$$

Se sabe ahora por el ejemplo 4 que este polinomio representa los primeros cuatro términos de la serie de potencia para $\ln x$. Es más, usando el resto de la serie alternada o alternante, puede determinarse que el error en esta aproximación es menor que

$$\begin{aligned}|R_4| &\leq |a_5|\\ &= \frac{1}{5}(0.1)^5\\ &= 0.000002.\end{aligned}$$

En los siglos XVII y XVIII se calcularon tablas matemáticas para los logaritmos y para valores de otras funciones trascendentes. Tales técnicas numéricas están lejos de ser obsoletas, porque es precisamente con estos medios que las modernas herramientas de graficación están programadas para evaluar funciones trascendentes.


The Granger Collection

SRINIVASA RAMANUJAN (1887-1920)

Las series que pueden usarse para aproximar π han interesado a matemáticos durante los últimos 300 años. Una serie interesante para aproximar $1/\pi$ la descubrió el matemático hindú Srinivasa Ramanujan en 1914 (ver ejercicio 67). Cada término sucesivo de la serie de Ramanujan agrega aproximadamente ocho dígitos más al valor de $1/\pi$. Para más información sobre el trabajo de Ramanujan, ver el artículo "Ramanujan and Pi" de Jonathan M. Borwein y Peter B. Borwein en *Scientific American*.

EJEMPLO 5 Hallar una serie de potencia mediante integración

Hallar una serie de potencia para $g(x) = \arctan x$, centrado en 0.

Solución Como $D_x[\arctan x] = 1/(1 + x^2)$, puede usarse la serie

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \qquad \text{Intervalo de convergencia: } (-1, 1).$$

Sustituyendo x^2 para x se obtiene

$$f(x^2) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Por último, integrando, se obtiene

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + C \\
&= C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} && \text{Sea } x = 0, \text{ entonces } C = 0. \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots. && \text{Intervalo de convergencia: } (-1, 1).
\end{aligned}$$

Puede mostrarse que la serie de potencia desarrollada para $\arctan x$ en el ejemplo 5 también converge (a $\arctan x$) para $x = \pm 1$. Por ejemplo, cuando $x = 1$, puede escribirse

$$\begin{aligned}
\arctan 1 &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Sin embargo, esta serie (desarrollada por James Gregory en 1671) no proporciona una manera práctica de aproximar π debido a que converge tan lentamente que se necesitarían cientos de términos para obtener una precisión razonable. El ejemplo 6 muestra cómo usar *dos* series diferentes de arctangente para obtener una aproximación muy buena de π usando unos cuantos términos. Esta aproximación fue desarrollada por John Machin en 1706.

EJEMPLO 6 Aproximación a π mediante una serie

Usar la identidad trigonométrica

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

para aproximar el número π [ver ejercicio 50*b*].

Solución Al usar sólo cinco términos de cada una de las series para el $\arctan(1/5)$ y $\arctan(1/239)$, se obtiene

$$4\left(4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}\right) \approx 3.1415926$$

lo cual coincide con el valor exacto de π con un error menor que 0.0000001.

9.9 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, calcular una serie geométrica de potencia para la función, centrada en 0, *a*) mediante la técnica mostrada en los ejemplos 1 y 2, y *b*) mediante la división larga.

1. $f(x) = \dfrac{1}{4 - x}$ **2.** $f(x) = \dfrac{1}{2 + x}$

3. $f(x) = \dfrac{3}{4 + x}$ **4.** $f(x) = \dfrac{2}{5 - x}$

En los ejercicios 5 a 16, hallar una serie de potencia para la función, centrada en *c*, y determinar el intervalo de convergencia.

5. $f(x) = \dfrac{1}{3 - x}, \quad c = 1$ **6.** $f(x) = \dfrac{4}{5 - x}, \quad c = -3$

7. $f(x) = \dfrac{1}{1 - 3x}, \quad c = 0$ **8.** $h(x) = \dfrac{1}{1 - 5x}, \quad c = 0$

9. $g(x) = \dfrac{5}{2x - 3}, \quad c = -3$ **10.** $f(x) = \dfrac{3}{2x - 1}, \quad c = 2$

11. $f(x) = \dfrac{2}{2x + 3}, \quad c = 0$ **12.** $f(x) = \dfrac{4}{3x + 2}, \quad c = 3$

13. $g(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 2x - 3}, \quad c = 0$

14. $g(x) = \dfrac{3x - 8}{3x^2 + 5x - 2}, \quad c = 0$

15. $f(x) = \dfrac{2}{1 - x^2}, \quad c = 0$

16. $f(x) = \dfrac{5}{5 + x^2}, \quad c = 0$

En los ejercicios 17 a 26, usar la serie de potencia

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

para determinar una serie de potencia, centrada en 0, para la función. Identificar el intervalo de convergencia.

17. $h(x) = \dfrac{-2}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{1 + x} + \dfrac{1}{1 - x}$

18. $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2(1 + x)} - \dfrac{1}{2(1 - x)}$

19. $f(x) = -\dfrac{1}{(x + 1)^2} = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{x + 1}\right]$

20. $f(x) = \dfrac{2}{(x + 1)^3} = \dfrac{d^2}{dx^2}\left[\dfrac{1}{x + 1}\right]$

21. $f(x) = \ln(x + 1) = \displaystyle\int \frac{1}{x + 1}\,dx$

22. $f(x) = \ln(1 - x^2) = \displaystyle\int \frac{1}{1 + x}\,dx - \int \frac{1}{1 - x}\,dx$

23. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **24.** $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

25. $h(x) = \dfrac{1}{4x^2 + 1}$ **26.** $f(x) = \arctan 2x$

Análisis gráfico y numérico **En los ejercicios 27 y 28, sea**

$$S_n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \pm \frac{x^n}{n}.$$

Usar una herramienta de graficación para confirmar gráficamente la desigualdad. Después completar la tabla para confirmar numéricamente la desigualdad.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
S_n						
$\ln(x + 1)$						
S_{n+1}						

27. $S_2 \le \ln(x + 1) \le S_3$

28. $S_4 \le \ln(x + 1) \le S_5$

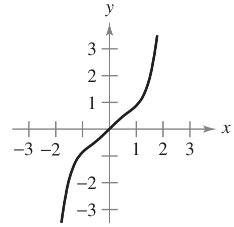
En los ejercicios 29 y 30, *a*) representar gráficamente varias sumas parciales de la serie, *b*) hallar la suma de la serie y su radio de convergencia, *c*) usar 50 términos de la serie para aproximar la suma cuando $x = 0.5$, y *d*) determinar qué representa la aproximación y qué tan buena es.

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x - 1)^n}{n}$

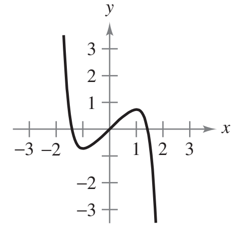
30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n + 1)!}$

En los ejercicios 31 a 34, relacionar la aproximación polinomial de la función $f(x) = \arctan x$ con la gráfica correcta. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*) y *d*).]

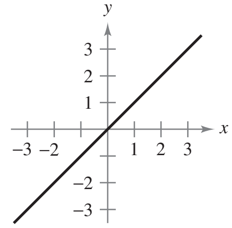
a)



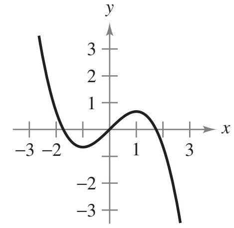
b)



c)



d)



31. $g(x) = x$ **32.** $g(x) = x - \dfrac{x^3}{3}$

33. $g(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$ **34.** $g(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7}$

En los ejercicios 35 a 38, uasar la serie para $f(x) = \arctan x$ para aproximar el valor, usando $R_N \leq 0.001$.

35. $\arctan \dfrac{1}{4}$

36. $\displaystyle\int_0^{3/4} \arctan x^2\, dx$

37. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arctan x^2}{x}\, dx$

38. $\displaystyle\int_0^{1/2} x^2 \arctan x\, dx$

En los ejercicios 39 a 42, usar la serie de potencia

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ |x| < 1.$$

Hallar la representación por medio de una serie de la función y determinar su intervalo de convergencia.

39. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

40. $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

41. $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

42. $f(x) = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^2}$

43. ***Probabilidad*** Una moneda se lanza repetidamente. La probabilidad que la primera cara ocurra en la n-ésima lanzada es $P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Cuando este juego se repite muchas veces, el número medio de lanzadas requerido hasta que la primera cara ocurra es

$$E(n) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(n).$$

(Este valor se llama *valor esperado de n*.) Usar los resultados de los ejercicios 39 a 42 para encontrar $E(n)$. ¿Es la respuesta lo que se esperaba? ¿Por qué sí o por qué no?

44. Usar los resultados de los ejercicios 39 a 42 para encontrar la suma de cada serie.

a) $\displaystyle\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *b)* $\displaystyle\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{9}{10}\right)^n$

Redacción **En los ejercicios 45 a 48, explicar cómo usar la serie geométrica**

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

para encontrar la serie para la función. No calcular la serie.

45. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

46. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

47. $f(x) = \dfrac{5}{1+x}$

48. $f(x) = \ln(1-x)$

49. Demostrar que $\arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$ para $xy \neq 1$ siempre que el valor del lado izquierdo de la ecuación esté entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

50. Usar el resultado del ejercicio 49 para verificar cada identidad.

a) $\arctan \dfrac{120}{119} - \arctan \dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$

b) $4 \arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$

[*Sugerencia:* Usar el ejercicio 49 dos veces para encontrar $4 \arctan \frac{1}{5}$. Después usar el apartado *a*).]

En los ejercicios 51 y 52, *a*) verificar la ecuación dada, y *b*) usar la ecuación y la serie para el arctangente para aproximar π para una precisión de dos decimales.

51. $2 \arctan \dfrac{1}{2} - \arctan \dfrac{1}{7} = \dfrac{\pi}{4}$

52. $\arctan \dfrac{1}{2} + \arctan \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

En los ejercicios 53 a 58, calcular la suma de la serie convergente usando una función muy conocida. Identificar la función y explicar cómo se obtuvo la suma.

53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n n}$

54. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n n}$

55. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{5^n n}$

56. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

57. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}$

58. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^{2n-1}(2n-1)}$

Desarrollo de conceptos

59. Usar los resultados de los ejercicios 31 a 34 para dar un argumento geométrico del porqué las series para la aproximación de $f(x) = \arctan x$ tienen sólo potencias impares de x.

60. Usar los resultados de los ejercicios 31 a 34 para hacer una conjetura sobre los grados de las series para la aproximación de $f(x) = \arctan x$ que tienen extremos relativos.

61. Una de las series en los ejercicios 53 a 58 converge a su suma a un ritmo mucho menor que las otras cinco series. ¿Cuál es? Explicar por qué esta serie converge tan lentamente. Usar una herramienta de graficación para ilustrar el ritmo o velocidad de convergencia.

62. El radio de convergencia de las series de potencia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es 3. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$? Explicar el razonamiento.

63. Las series de potencia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergen para $|x+1| < 4$. ¿Qué se puede concluir acerca de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$? Explicar el razonamiento.

Para discusión

64. ***Encontrar el error*** Describir por qué el enunciado está incorrecto.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{5}\right) x^n$$

En los ejercicios 65 y 66, hallar la suma de la serie.

65. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$

66. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)!}$

67. ***Ramanujan y Pi*** Usar una herramienta de graficación para demostrar que

$$\frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1\,103 + 26\,390n)}{(n!)396^{4n}} = \frac{1}{\pi}.$$

9.10 Series de Taylor y de Maclaurin

- **Hallar una serie de Taylor o de Maclaurin para una función.**
- **Hallar una serie binomial.**
- **Usar una lista básica de series de Taylor para hallar otras series de Taylor.**

COLIN MACLAURIN (1698-1746)

Se acredita el desarrollo de las series de potencia para representar funciones al trabajo combinado de muchos matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Gregory, Newton, John y James Bernoulli, Leibniz, Euler, Lagrange, Wallis y Fourier contribuyeron a este trabajo. Sin embargo, los dos nombres más comúnmente asociados con las series de potencia son Brook Taylor (1685-1731) y Colin Maclaurin.

Series de Taylor y de Maclaurin

En la sección 9.9 se obtuvieron series de potencia para varias funciones usando series geométricas con derivación o integración término-por-término. En esta sección se estudia un procedimiento *general* para obtener la serie de potencia para una función que tiene derivadas de todos los órdenes. El teorema siguiente da la forma que debe tomar *toda* serie de potencia convergente.

TEOREMA 9.22 FORMA DE UNA SERIE DE POTENCIA CONVERGENTE

Si f se representa por una serie de potencias $f(x) = \Sigma\, a_n(x-c)^n$ para todo x en un intervalo abierto I que contiene c, entonces $a_n = f^{(n)}(c)/n!$ y

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

DEMOSTRACIÓN Suponer que la serie de potencia $\Sigma\, a_n(x-c)^n$ tiene un radio de convergencia R. Entonces, por el teorema 9.21, se sabe que la n-ésima derivada de f existe para $|x-c| < R$, y mediante derivación sucesiva se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + a_4(x-c)^4 + \cdots\\
f^{(1)}(x) &= a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \cdots\\
f^{(2)}(x) &= 2a_2 + 3!a_3(x-c) + 4\cdot 3a_4(x-c)^2 + \cdots\\
f^{(3)}(x) &= 3!a_3 + 4!a_4(x-c) + \cdots\\
&\ \ \vdots\\
f^{(n)}(x) &= n!a_n + (n+1)!a_{n+1}(x-c) + \cdots
\end{aligned}$$

Evaluando cada una de estas derivadas en $x = c$ se ve que

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(c) &= 0!a_0\\
f^{(1)}(c) &= 1!a_1\\
f^{(2)}(c) &= 2!a_2\\
f^{(3)}(c) &= 3!a_3
\end{aligned}$$

y, en general, $f^{(n)}(c) = n!a_n$. Despejando a_n, se encuentra que los coeficientes de las series de potencia que representan a $f(x)$ son

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

NOTA Asegurarse de entender el teorema 9.22. Éste dice que *si una serie de potencia converge a* $f(x)$, la serie debe ser una serie de Taylor. El teorema *no* dice que toda serie formada con los coeficientes de Taylor $a_n = f^{(n)}(c)/n!$ converge a $f(x)$. ■

Nótese que los coeficientes de la serie de potencia en el teorema 9.22 son precisamente los coeficientes de los polinomios de Taylor para $f(x)$ en c como se definió en la sección 9.7. Por esta razón, la serie se llama **serie de Taylor** para $f(x)$ en c.

DEFINICIÓN DE LAS SERIES DE TAYLOR Y DE MACLAURIN

Si una función f tiene derivadas de todos los órdenes en $x = c$, entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n = f(c) + f'(c)(x - c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \cdots$$

se llama **serie de Taylor para $f(x)$ en c**. Además, si $c = 0$, entonces la serie es **serie de Maclaurin para f**.

Si se conoce el patrón para los coeficientes de los polinomios de Taylor para una función, se puede desarrollar fácilmente el patrón para formar la serie de Taylor correspondiente. Por ejemplo, en el ejemplo 4 de la sección 9.7, se encuentra que el polinomio de Taylor de cuarto grado para $\ln x$, centrado en 1, es

$$P_4(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4.$$

A partir de este patrón se puede obtener la serie de Taylor para $\ln x$ centrada en $c = 1$,

$$(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x - 1)^n + \cdots.$$

EJEMPLO 1 Construcción de una serie de potencia

Aplicar la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ para formar la serie de Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

y determinar el intervalo de convergencia.

Solución La derivación sucesiva de $f(x)$ da

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0\\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= \cos 0 = 1\\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0\\
f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(0) &= -\cos 0 = -1\\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0\\
f^{(5)}(x) &= \cos x & f^{(5)}(0) &= \cos 0 = 1
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. El patrón se repite después de la tercera derivada. Por tanto, la serie de potencia es como sigue.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots\\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n + 1)!} &= 0 + (1)x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6\\
&\quad + \frac{(-1)}{7!}x^7 + \cdots\\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots
\end{aligned}$$

Por el criterio del cociente puede concluirse que esta serie converge para todo x.

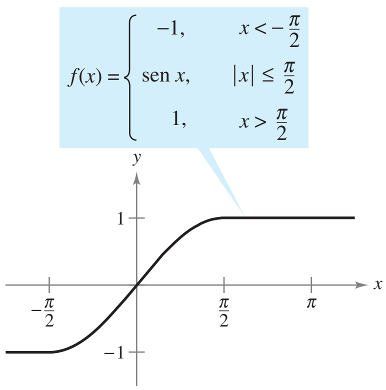


Figura 9.23

Notar que en el ejemplo 1 no se puede concluir que la serie de potencia converge a sen x para todo x. Simplemente se puede concluir que la serie de potencia converge a alguna función, pero no se sabe con seguridad a qué función. Esto es un punto sutil, pero importante, en relación con las series de Taylor o de Maclaurin. Para persuadir que la serie

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdot\cdot\cdot + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdot\cdot\cdot$$

podría converger a otra función que no fuera f, recordar que las derivadas se evalúan en un solo punto. Puede pasar fácilmente que otra función coincida con los valores de $f^{(n)}(x)$ en $x = c$ y discrepe en otros valores de x. Por ejemplo, si se forma la serie de potencia (centrada en 0) para la función mostrada en la figura 9.23, se obtiene la misma serie que en el ejemplo 1. Se sabe que la serie converge para todo x, pero obviamente no puede converger tanto hacia $f(x)$ como hacia sen x para todo x.

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto I centrado en c. La serie de Taylor para f no puede converger para algún x en I. O, aun cuando converja, puede no tener $f(x)$ como su suma. No obstante, el teorema 9.19 dice que para cada n,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdot\cdot\cdot + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x),$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Notar que en esta fórmula del residuo el valor particular de z que hace la fórmula del residuo verdadero depende de los valores de x y n. Si $R_n \to 0$, entonces el teorema siguiente dice que la serie de Taylor para f realmente converge en $f(x)$ para todo x en I.

TEOREMA 9.23 CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE TAYLOR

Si $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ para todo x en el intervalo I, entonces la serie de Taylor para f converge y es igual a $f(x)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

DEMOSTRACIÓN Para una serie de Taylor, la n-ésima suma parcial coincide con el n-ésimo polinomio de Taylor. Es decir, $S_n(x) = P_n(x)$. Además, como

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n(x) &= \lim_{n\to\infty} P_n(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)]\\ &= f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x).\end{aligned}$$

Así, para un x, dado, la serie de Taylor (la sucesión de sumas parciales) converge a $f(x)$ si y sólo si $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

NOTA En otras palabras, el teorema 9.23 dice que una serie de potencia formado con los coeficientes de Taylor $a_n = f^{(n)}(c)/n!$ converge a la función de la que se derivó precisamente en aquellos valores en los que el residuo tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

En el ejemplo 1, derivamos la serie de potencia de la función del seno y también concluimos que la serie converge a alguna función en toda la recta real. En el ejemplo 2 veremos que la serie realmente converge para sen x. La observación clave es que aunque el valor de z no es conocido, es posible obtener una cota superior para $|f^{(n+1)}(z)|$.

EJEMPLO 2 Una serie de Maclaurin convergente

Mostrar que la serie de Maclaurin para $f(x) = \operatorname{sen} x$ converge para sen x para todo x.

Solución Usando el resultado del ejemplo 1, se necesita demostrar que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

es verdad para todo x. Como

$$f^{(n+1)}(x) = \pm \operatorname{sen} x$$

o

$$f^{(n+1)}(x) = \pm \cos x$$

se sabe que $|f^{(n+1)}(z)| \leq 1$ para todo número real z. Por consiguiente, para cualquier x fijo, se puede aplicar el teorema de Taylor (teorema 9.19) para concluir que

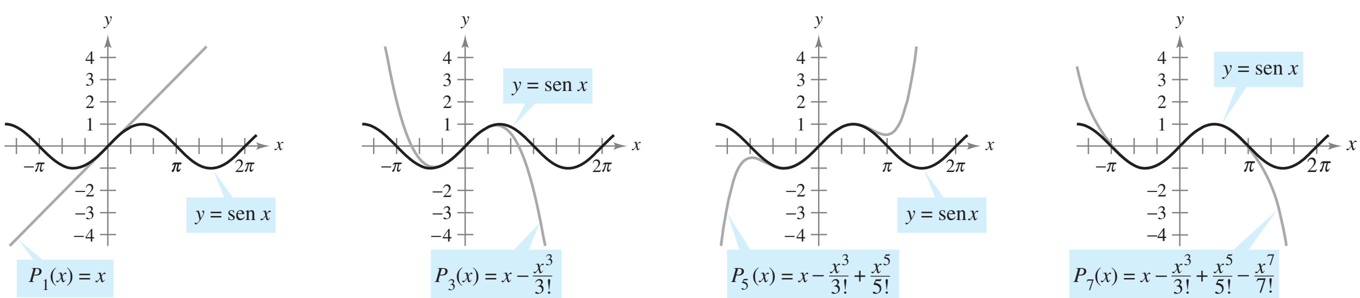
$$0 \leq |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

De la discusión en la sección 9.1 respecto de los ritmos relativos de convergencia de sucesiones exponenciales y factoriales, se sigue que para un x fijo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Por último, por el teorema del encaje o del emparedado, se sigue que para todo x, $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así, por el teorema 9.23, la serie de Maclaurin para sen x converge a sen x para todo x.

La figura 9.24 ilustra visualmente la convergencia de la serie de Maclaurin para sen x comparando las gráficas del polinomio de Maclaurin $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$ y $P_7(x)$ con la gráfica de la función seno. Notar que a medida que el grado del polinomio aumenta, su gráfica se parece más a la de la función seno.



Conforme n aumenta, la gráfica de P_n se parece más a la de la función seno.
Figura 9.24

Las pasos para encontrar una serie de Taylor para $f(x)$ en c se resumen a continuación.

Pasos para encontrar una serie de Taylor

1. Derivar $f(x)$ varias veces y evaluar cada derivada en c.

$$f(c), f'(c), f''(c), f'''(c), \cdot\cdot\cdot, f^{(n)}(c), \cdot\cdot\cdot$$

Intentar reconocer un patrón en estos números.

2. Usar la sucesión desarrollada en el primer paso para formar los coeficientes de Taylor $a_n = f^{(n)}(c)/n!$, y determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencia resultante

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdot\cdot\cdot + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdot\cdot\cdot.$$

3. Dentro de este intervalo de convergencia, determinar si la serie converge o no a $f(x)$.

La determinación directa de los coeficientes de Taylor o de Maclaurin usando derivación sucesiva puede ser difícil, y el siguiente ejemplo ilustra una manera más sencilla para encontrar los coeficientes de manera indirecta usando los coeficientes de una serie de Taylor o de Maclaurin conocida.

EJEMPLO 3 Serie de Maclaurin para una función compuesta

Encontrar la serie de Maclaurin para $f(x) = \operatorname{sen} x^2$.

Solución Para encontrar los coeficientes directamente para esta serie de Maclaurin, deben calcularse derivadas sucesivas de $f(x) = \operatorname{sen} x^2$. Calculando solamente las dos primeras,

$$f'(x) = 2x \cos x^2 \quad \text{y} \quad f''(x) = -4x^2 \operatorname{sen} x^2 + 2\cos x^2$$

puede verse que esta tarea sería bastante complicada. Afortunadamente hay una alternativa. Primero considerar la serie de Maclaurin para sen x encontrada en el ejemplo 1.

$$\begin{aligned} g(x) &= \operatorname{sen} x \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdot\cdot\cdot \end{aligned}$$

Ahora, como $\operatorname{sen} x^2 = g(x^2)$, puede sustituirse x para x^2 en la serie para sen x y obtener

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x^2 &= g(x^2) \\ &= x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdot\cdot\cdot. \end{aligned}$$

Asegurarse de entender el punto ilustrado en el ejemplo 3. Como el cálculo directo de los coeficientes de Taylor o de Maclaurin puede ser tedioso, la manera más práctica de encontrar una serie de Taylor o de Maclaurin es desarrollar series de potencia para una *lista básica* de funciones elementales. A partir de esta lista puede determinarse la serie de potencia para otras funciones mediante las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, derivación, integración o composición con series de potencia conocidas.

Series binomiales

Antes de presentar la lista básica de funciones elementales, construir una serie más para una función de la forma $f(x) = (1 + x)^k$. Esto produce la **serie binomial**.

EJEMPLO 4 Serie binomial

Hallar la serie de Maclaurin para $f(x) = (1 + x)^k$ y determinar su radio de convergencia. Asumir que k no es un entero positivo.

Solución Mediante derivación sucesiva, se tiene que

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1 + x)^k & f(0) &= 1\\
f'(x) &= k(1 + x)^{k-1} & f'(0) &= k\\
f''(x) &= k(k - 1)(1 + x)^{k-2} & f''(0) &= k(k - 1)\\
f'''(x) &= k(k - 1)(k - 2)(1 + x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k - 1)(k - 2)\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= k \cdot \cdot \cdot (k - n + 1)(1 + x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k - 1) \cdot \cdot \cdot (k - n + 1)
\end{aligned}$$

la cual produce la serie

$$1 + kx + \frac{k(k - 1)x^2}{2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{k(k - 1) \cdot \cdot \cdot (k - n + 1)x^n}{n!} + \cdot \cdot \cdot .$$

Como $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1$, puede aplicarse el criterio del cociente para concluir que el radio de convergencia es $R = 1$. Por tanto, la serie converge a alguna función en el intervalo $(-1, 1)$.

Notar que el ejemplo 4 muestra que la serie de Taylor para $(1 + x)^k$ converge a alguna función en el intervalo $(-1, 1)$. Sin embargo, el ejemplo no muestra que la serie realmente converge a $(1 + x)^k$. Para hacer esto, podría mostrarse que el resto $R_n(x)$ converge a 0, como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 5 Hallar una serie binomial

Hallar la serie de potencia para $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$.

Solución Usando la serie binomial

$$(1 + x)^k = 1 + kx + \frac{k(k - 1)x^2}{2!} + \frac{k(k - 1)(k - 2)x^3}{3!} + \cdot \cdot \cdot$$

se hace $k = \frac{1}{3}$ y se escribe

$$(1 + x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{3^2 2!} + \frac{2 \cdot 5x^3}{3^3 3!} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8x^4}{3^4 4!} + \cdot \cdot \cdot$$

la cual converge para $-1 \leq x \leq 1$.

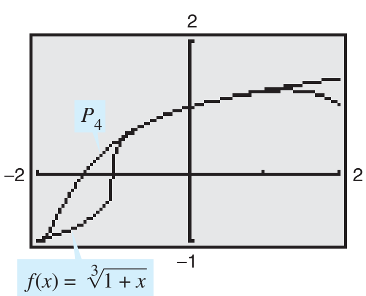


Figura 9.25

TECNOLOGÍA Usar una herramienta de graficación para confirmar el resultado del ejemplo 5. Al graficar las funciones

$$f(x) = (1 + x)^{1/3} \quad \text{y} \quad P_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$$

en la misma pantalla, debe obtenerse el resultado mostrado en la figura 9.25.

Obtención de la serie de Taylor de una lista básica

La lista siguiente proporciona las series de potencia para varias funciones elementales con los intervalos de convergencia correspondientes.

Series de potencia para funciones elementales

Función	*Intervalo de convergencia*
$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - \cdots + (-1)^n(x-1)^n + \cdots$	$0 < x < 2$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$	$-1 < x < 1$
$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \cdots$	$0 < x \le 2$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$-1 \le x \le 1$
$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{(2n)!x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)} + \cdots$	$-1 \le x \le 1$
$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!} + \cdots$	$-1 < x < 1$*

* *La convergencia a $x = \pm 1$ depende del valor de k.*

NOTA La serie binomial es válida para los valores no enteros de k. Pero, si k es un entero positivo, la serie binomial se reduce a un simple desarrollo binomial. ■

EJEMPLO 6 Obtención de una serie de potencia a partir de la lista básica

Hallar la serie de potencia para $f(x) = \cos\sqrt{x}$.

Solución Usando la serie de potencia

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

puede reemplazarse x por $\sqrt{x}$ para obtener la serie

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \cdots.$$

Esta serie converge para todo x en el dominio de $\cos\sqrt{x}$, es decir, para $x \ge 0$.

Las series de potencia pueden multiplicarse y dividirse como los polinomios. Después de encontrar los primeros términos del producto (o cociente), se puede reconocer un patrón.

EJEMPLO 7 Multiplicación y división de series de potencia

Hallar los primeros tres términos distintos de cero de cada una de las series de Maclaurin.

a) $e^x \arctan x$ ***b)*** $\tan x$

Solución

a) Al usar las series de Maclaurin para e^x y $\arctan x$ de la tabla, se tiene

$$e^x \arctan x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right).$$

Multiplicar estas expresiones y reunir los términos como se haría al multiplicar polinomios.

$$\begin{array}{rrrrrl}
1 + x + & \frac{1}{2}x^2 + & \frac{1}{6}x^3 + & \frac{1}{24}x^4 + & \cdots & \\
x & & -\frac{1}{3}x^3 & & +\frac{1}{5}x^5 & - \cdots \\
\hline
x + & x^2 + & \frac{1}{2}x^3 + & \frac{1}{6}x^4 + & \frac{1}{24}x^5 & + \cdots \\
 & & -\frac{1}{3}x^3 - & \frac{1}{3}x^4 - & \frac{1}{6}x^5 & - \cdots \\
 & & & & +\frac{1}{5}x^5 & + \cdots \\
\hline
x + & x^2 + & \frac{1}{6}x^3 - & \frac{1}{6}x^4 + & \frac{3}{40}x^5 & + \cdots
\end{array}$$

Así, $e^x \arctan x = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$.

b) Al usar la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ de la tabla, se tiene

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}.$$

Dividir usando la división larga.

$$\begin{array}{r|rrrl}
 & x + & \frac{1}{3}x^3 + & \frac{2}{15}x^5 & + \cdots \\
\hline
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots & x - & \frac{1}{6}x^3 + & \frac{1}{120}x^5 & - \cdots \\
 & x - & \frac{1}{2}x^3 + & \frac{1}{24}x^5 & - \cdots \\
\cline{2-5}
 & & \frac{1}{3}x^3 - & \frac{1}{30}x^5 & + \cdots \\
 & & \frac{1}{3}x^3 - & \frac{1}{6}x^5 & + \cdots \\
\cline{3-5}
 & & & \frac{2}{15}x^5 & + \cdots
\end{array}$$

Así, $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$

EJEMPLO 8 Una serie de potencia para $\operatorname{sen}^2 x$

Hallar la serie de potencia para $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

Solución Reescribir $\operatorname{sen}^2 x$ como sigue.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

Ahora, usar la serie para el $\cos x$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \frac{2^8}{8!}x^8 - \cdots$$

$$-\frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2} + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdots$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdots$$

$$= \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdots$$

Esta serie converge para $-\infty < x < \infty$.

Como se mencionó en la sección precedente, las series de potencia pueden usarse para obtener tablas de valores de funciones trascendentes. También son útiles para estimar los valores de integrales definidas para las que no pueden encontrarse las antiderivadas o primitivas. El ejemplo siguiente demuestra este uso.

EJEMPLO 9 Aproximación de una integral definida mediante una serie de potencia

Usar una serie de potencia para aproximar

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

con un error menor que 0.01.

Solución Sustituyendo x por $-x^2$ en la serie para e^x se obtiene lo siguiente.

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots$$

Sumando los primeros cuatro términos, se tiene

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0.74$$

lo cual, por el criterio de la serie alternada o alternante, tiene un error menor que $\frac{1}{216} \approx 0.005$.

9.10 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 12, usar la definición para encontrar la serie de Taylor (centrada en c) para la función.

1. $f(x) = e^{2x}, \quad c = 0$

2. $f(x) = e^{3x}, \quad c = 0$

3. $f(x) = \cos x, \quad c = \dfrac{\pi}{4}$

4. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad c = \dfrac{\pi}{4}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad c = 1$

6. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \quad c = 2$

7. $f(x) = \ln x, \quad c = 1$

8. $f(x) = e^x, \quad c = 1$

9. $f(x) = \operatorname{sen} 3x, \quad c = 0$

10. $f(x) = \ln(x^2 + 1), \quad c = 0$

11. $f(x) = \sec x, \quad c = 0$ (primeros tres términos distintos de cero)

12. $f(x) = \tan x, \quad c = 0$ (primeros tres términos distintos de cero)

En los ejercicios 13 a 16, demostrar que la serie de Maclaurin para la función converge a la función para toda x.

13. $f(x) = \cos x$

14. $f(x) = e^{-2x}$

15. $f(x) = \operatorname{senh} x$

16. $f(x) = \cosh x$

En los ejercicios 17 a 26, usar la serie binomial para encontrar la serie de Maclaurin para la función.

17. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

18. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^4}$

19. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

20. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

21. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{(2+x)^3}$

23. $f(x) = \sqrt{1+x}$

24. $f(x) = \sqrt[4]{1+x}$

25. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

26. $f(x) = \sqrt{1+x^3}$

En los ejercicios 27 a 40, encontrar la serie de Maclaurin para la función. (Usar la tabla de series de potencia para las funciones elementales.)

27. $f(x) = e^{x^2/2}$

28. $g(x) = e^{-3x}$

29. $f(x) = \ln(1+x)$

30. $f(x) = \ln(1+x^2)$

31. $g(x) = \operatorname{sen} 3x$

32. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$

33. $f(x) = \cos 4x$

34. $f(x) = \cos \pi x$

35. $f(x) = \cos x^{3/2}$

36. $g(x) = 2 \operatorname{sen} x^3$

37. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{senh} x$

38. $f(x) = e^x + e^{-x} = 2\cosh x$

39. $f(x) = \cos^2 x$

40. $f(x) = \operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$\left(\textit{Sugerencia:}\ \text{Integrar la serie para } \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\right)$

En los ejercicios 41 a 44, encontrar la serie de Maclaurin para la función. (Ver ejemplo 7.)

41. $f(x) = x \operatorname{sen} x$

42. $h(x) = x \cos x$

43. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

En los ejercicios 45 y 46, usar una serie de potencia y el hecho de que $i^2 = -1$ para verificar la fórmula.

45. $g(x) = \dfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \operatorname{sen} x$

46. $g(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$

En los ejercicios 47 a 52, encontrar los primeros cuatro términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para la función, multiplicando o dividiendo las series de potencia apropiadas. Usar la tabla de series de potencia para las funciones elementales de la página 684. Usar una herramienta de graficación para representar gráficamente la función y su aproximación polinomial correspondiente.

47. $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$

48. $g(x) = e^x \cos x$

49. $h(x) = \cos x \ln(1+x)$

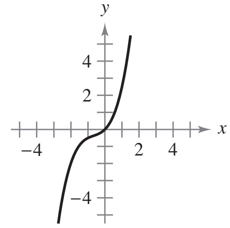
50. $f(x) = e^x \ln(1+x)$

51. $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+x}$

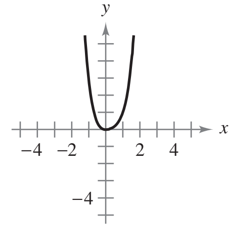
52. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$

En los ejercicios 53 a 56, relacionar el polinomio con su gráfica. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*) y *d*).] Obtener el factor común de cada polinomio e identificar la función aproximada por el polinomio de Taylor restante.

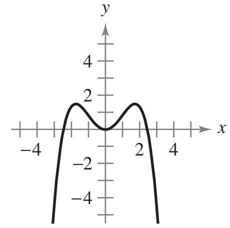
***a*)**



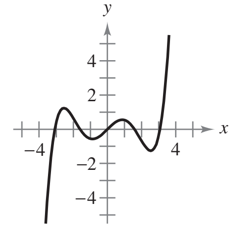
***b*)**



***c*)**



***d*)**



53. $y = x^2 - \dfrac{x^4}{3!}$

54. $y = x - \dfrac{x^3}{2!} + \dfrac{x^5}{4!}$

55. $y = x + x^2 + \dfrac{x^3}{2!}$

56. $y = x^2 - x^3 + x^4$

En los ejercicios 57 y 58, encontrar una serie de Maclaurin para $f(x)$.

57. $f(x) = \int_0^x (e^{-t^2} - 1)\, dt$

58. $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^3}\, dt$

En los ejercicios 59 a 62, verificar la suma. Entonces usar una herramienta de graficación para aproximar la suma con un error menor que 0.0001.

59. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$

60. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n + 1)!}\right] = \operatorname{sen} 1$

61. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{e - 1}{e}$

En los ejercicios 63 a 66, usar la representación en series de la función f para encontrar $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (si existe).

63. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$

64. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

65. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

66. $f(x) = \frac{\ln(x + 1)}{x}$

En los ejercicios 67 a 74, usar una serie de potencia para aproximar el valor de la integral con un error menor que 0.0001. (En los ejercicios 69 y 71, asumir que el integrando se define como 1 cuando $x = 0$.)

67. $\int_0^1 e^{-x^3}\, dx$

68. $\int_0^{1/4} x \ln(x + 1)\, dx$

69. $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

70. $\int_0^1 \cos x^2\, dx$

71. $\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x}\, dx$

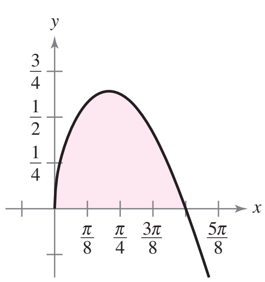
72. $\int_0^{1/2} \arctan x^2\, dx$

73. $\int_{0.1}^{0.3} \sqrt{1 + x^3}\, dx$

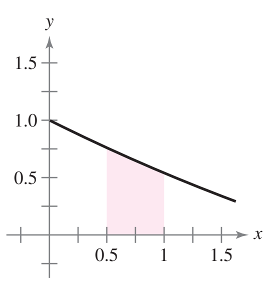
74. $\int_0^{0.2} \sqrt{1 + x^2}\, dx$

Área **En los ejercicios 75 y 76, usar una serie de potencia para aproximar el área de la región. Usar una herramienta de graficación para verificar el resultado.**

75. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{x} \cos x\, dx$

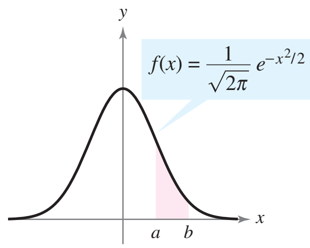


76. $\int_{0.5}^{1} \cos \sqrt{x}\, dx$



Probabilidad **En los ejercicios 77 y 78, aproximar la probabilidad normal con un error menor que 0.0001, donde la probabilidad está dada por**

$$P(a < x < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx.$$



77. $P(0 < x < 1)$

78. $P(1 < x < 2)$

En los ejercicios 79 a 82, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar el polinomio de Taylor de quinto grado (centrado en c) para la función. Representar gráficamente la función y el polinomio. Usar la gráfica para determinar el intervalo más grande en que el polinomio es una aproximación razonable de la función.

79. $f(x) = x \cos 2x, \quad c = 0$

80. $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2} \ln(1 + x), \quad c = 0$

81. $g(x) = \sqrt{x} \ln x, \quad c = 1$

82. $h(x) = \sqrt[3]{x} \arctan x, \quad c = 1$

Desarrollo de conceptos

83. Enunciar los pasos para encontrar una serie de Taylor.

84. Si f es una función par, ¿qué debe ser verdad acerca de los coeficientes a_n en la serie de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n?$$

Explicar el razonamiento.

85. Definir la serie binomial. ¿Cuál es su radio de convergencia?

Para discusión

86. Explicar cómo usar la serie

$$g(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para encontrar la serie para cada función. No hallar la serie.

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = e^{3x}$

c) $f(x) = xe^x$

d) $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$

87. ***Movimiento de un proyectil*** Un proyectil disparado desde el suelo sigue la trayectoria dada por

$$y = \left(\tan\theta - \frac{g}{kv_0\cos\theta}\right)x - \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{v_0\cos\theta}\right)$$

donde v_0 es la velocidad inicial, θ es el ángulo de proyección, g es la aceleración debida a la gravedad y k es el factor de retardo causado por la resistencia del aire. Usando la representación de series de potencia

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

verificar que la trayectoria se puede reescribir como

$$y = (\tan\theta)x + \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + \frac{kgx^3}{3v_0^3\cos^3\theta} + \frac{k^2gx^4}{4v_0^4\cos^4\theta} + \cdots.$$

88. ***Movimiento de un proyectil*** Usar el resultado del ejercicio 87 para determinar la serie para la trayectoria de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo con un ángulo de $\theta = 60°$, una velocidad inicial de $v_0 = 64$ pies por segundo y un factor de retardo $k = \frac{1}{16}$.

89. ***Investigación*** Considerar la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) Dibujar una gráfica de la función.

b) Usar la forma alternativa de la definición de la derivada (sección 2.1) y la regla de L'Hôpital para mostrar que $f'(0) = 0$. [Continuando este proceso, puede mostrarse que $f^{(n)}(0) = 0$ para $n > 1$.]

c) Usando el resultado en el apartado *b*), encontrar la serie de Maclaurin para f. ¿Converge la serie a f?

90. ***Investigación***

a) Hallar la serie de potencia centrada en 0 para la función

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}.$$

b) Usar una herramienta de graficación para representar gráficamente f y el polinomio de Taylor de grado ocho $P_8(x)$ para f.

c) Completar la tabla, donde

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(t^2+1)}{t^2}\,dt \quad \text{y} \quad G(x) = \int_0^x P_8(t)\,dt.$$

x	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
$F(x)$						
$G(x)$						

d) Describir la relación entre las gráficas de f y P_8 y los resultados dados en la tabla en el apartado *c*).

91. Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ para todo x real.

92. Encontrar la serie de Maclaurin para

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

y determinar su radio de convergencia. Usar los primeros cuatro términos de la serie para aproximar ln 3.

En los ejercicios 93 a 96, evaluar el coeficiente binomial usando la fórmula

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

donde k es un número real, n es un entero positivo, y

$$\binom{k}{0} = 1.$$

93. $\binom{5}{3}$

94. $\binom{-2}{2}$

95. $\binom{0.5}{4}$

96. $\binom{-1/3}{5}$

97. Escribir la serie de potencia para $(1+x)^k$ en términos de los coeficientes binomiales.

98. Demostrar que e es irracional. $\Big[$*Sugerencia:* Asumir que $e = p/q$ es racional (p y q son enteros) y considerar

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.\Big]$$

99. Mostrar que la serie de Maclaurin para la función

$$g(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

es

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

donde F_n es el n-ésimo número de Fibonacci con $F_1 = F_2 = 1$ y $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, para $n \geq 3$.

(*Sugerencia:* Escribir

$$\frac{x}{1-x-x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

y multiplicar cada lado de esta ecuación por $1 - x - x^2$.)

Preparación del examen Putman

100. Asumir que $|f(x)| \leq 1$ y $|f''(x)| \leq 1$ para todo x en un intervalo de longitud por lo menos 2. Mostrar que $|f'(x)| \leq 2$ en el intervalo.

9 Ejercicios de repaso

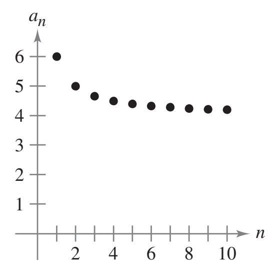
En los ejercicios 1 y 2, escribir una expresión para el término *n*-ésimo de la sucesión.

1. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{25}, \frac{1}{121}, \ldots$

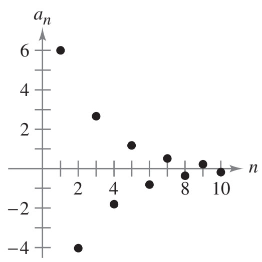
2. $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \ldots$

En los ejercicios 3 a 6, relacionar la sucesión con su gráfica. [Las gráficas se etiquetan *a*), *b*), *c*) y *d*).]

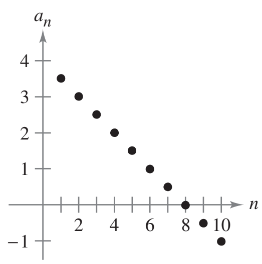
a)



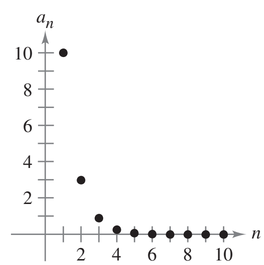
b)



c)



d)



3. $a_n = 4 + \frac{2}{n}$

4. $a_n = 4 - \frac{1}{2}n$

5. $a_n = 10(0.3)^{n-1}$

6. $a_n = 6\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

En los ejercicios 7 y 8, usar una calculadora para representar gráficamente los primeros 10 términos de la sucesión. Usar la gráfica para hacer una inferencia acerca de la convergencia o divergencia de la sucesión. Verificar su inferencia analíticamente y, si la sucesión converge, encontrar su límite.

7. $a_n = \frac{5n + 2}{n}$

8. $a_n = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$

En los ejercicios 9 a 18, determinar la convergencia o divergencia de la sucesión con el término *n*-ésimo dado. Si la sucesión converge, encontrar su límite. (*b* y *c* son números reales positivos.)

9. $a_n = \left(\frac{7}{8}\right)^n + 3$

10. $a_n = 1 + \frac{5}{n + 1}$

11. $a_n = \frac{n^3 + 1}{n^2}$

12. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

13. $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$

14. $a_n = \frac{n}{\ln n}$

15. $a_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$

16. $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

17. $a_n = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

18. $a_n = (b^n + c^n)^{1/n}$

19. ***Interés compuesto*** Se hace un depósito de \$8 000 en una cuenta que gana 5% de interés compuesto trimestral. El balance en la cuenta después de n trimestres es

$$A_n = 8\,000\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

a) Calcular los primeros ocho términos de la sucesión $\{A_n\}$.

b) Hallar el balance de la cuenta después de 10 años calculando el término 40 de la sucesión.

20. ***Depreciación*** Una compañía compra una nueva máquina por \$175 000. Durante los siguientes 5 años la máquina perderá valor a un ritmo o velocidad de 30% por año. (Es decir, al final de cada año, el valor perdido será 70% de lo que era al principio del año.)

a) Hallar una fórmula para el término *n*-ésimo de la sucesión que da el valor *V* de la máquina en *t* años después de que fue comprada.

b) Hallar el valor perdido de la máquina después de 5 años.

Análisis numérico, gráfico y analítico **En los ejercicios 21 a 24, *a*) usar una herramienta de graficación para encontrar la suma parcial indicada S_k y completar la tabla, y *b*) usar una herramienta de graficación para representar los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales.**

n	5	10	15	20	25
S_n					

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 1)}$

En los ejercicios 25 a 28, encontrar la suma de la serie convergente.

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

26. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} [(0.6)^n + (0.8)^n]$

28. $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{(n + 1)(n + 2)}\right]$

En los ejercicios 29 y 30, *a*) escribir el decimal repetido como una serie geométrica y *b*) escribir su suma como la razón de dos enteros.

29. $0.\overline{09}$

30. $0.\overline{64}$

En los ejercicios 31 a 34, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

31. $\sum_{n=0}^{\infty} (1.67)^n$

32. $\sum_{n=0}^{\infty} (0.67)^n$

33. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln n}$

34. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 1}{3n + 2}$

35. ***Distancia*** Una pelota se deja caer de una altura de 8 metros. Cada vez que se deja caer h metros rebota hasta una altura de $0.7h$. Encontrar la distancia total recorrida por la pelota.

36. ***Salario*** Se tiene un trabajo en el que gana el primer año un sueldo de $42 000. Durante los siguientes 39 años, se recibirá 5.5% de aumento cada año. ¿Cuál sería la compensación total en un periodo de 40 años?

37. ***Interés compuesto*** Se hace un depósito de $300 al final de cada mes durante 2 años en una cuenta que paga 6% de interés compuesto continuo. Determinar el saldo de la cuenta al final de 2 años.

38. ***Interés compuesto*** Se hace un depósito de $125 al final de cada mes durante 10 años en una cuenta que paga 3.5% mensual compuesto. Determinar el equilibrio en la cuenta al final de 10 años.

En los ejercicios 39 a 42, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^4}$ **40.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)$ **42.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^n}\right)$

En los ejercicios 43 a 48, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{5n - 1}$ **44.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3 + 3n}}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2n}}$ **46.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n(n + 2)}$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$ **48.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 5}$

En los ejercicios 49 a 54, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5}$ **50.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n + 1)}{n^2 + 1}$

51. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 3}$ **52.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n + 1}$

53. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n - 3}$ **54.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n^3}{n}$

En los ejercicios 55 a 60, determinar la convergencia o divergencia de la serie.

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n - 1}{2n + 5}\right)^n$ **56.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{7n - 1}\right)^n$

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ **58.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$

59. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$

60. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n - 1)}$

Análisis gráfico y analítico **En los ejercicios 61 y 62, *a*) verificar que la serie converge, *b*) usar una herramienta de graficación para encontrar la suma parcial indicada S_n y completar la tabla, *c*) usar una herramienta de graficación para representar gráficamente los primeros 10 términos de la sucesión de sumas parciales, y *d*) usar la tabla para estimar la suma de la serie.**

n	5	10	15	20	25
S_n					

61. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{5}\right)^n$ **62.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^3 + 5}$

63. ***Redacción*** Usar una herramienta de graficación para completar la tabla para *a*) $p = 2$ y *b*) $p = 5$. Escribir un párrafo corto describiendo y comparando los datos en la tabla.

N	5	10	20	30	40
$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p}$					
$\int_N^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$					

64. ***Redacción*** Se dice que los términos de una serie positiva parecen tender a cero muy lentamente cuando n tiende a infinito. (De hecho, $a_{75} = 0.7$.) Si no se da otra información, ¿se puede concluir que la serie diverge? Apoyar la respuesta con un ejemplo.

En los ejercicios 65 y 66, encontrar el polinomio de Taylor de tercer grado centrado en c.

65. $f(x) = e^{-3x}, \quad c = 0$

66. $f(x) = \tan x, \quad c = -\frac{\pi}{4}$

En los ejercicios 67 a 70, usar un polinomio de Taylor para aproximar la función con un error menor que 0.001.

67. sen 95° **68.** $\cos(0.75)$

69. $\ln(1.75)$ **70.** $e^{-0.25}$

71. Un polinomio de Taylor centrado en 0 se usará para aproximar la función coseno. Encontrar el grado del polinomio requerido para obtener la exactitud deseada en cada intervalo.

	Error máximo	*Intervalo*
a)	0.001	$[-0.5, 0.5]$
b)	0.001	$[-1, 1]$
c)	0.0001	$[-0.5, 0.5]$
d)	0.0001	$[-2, 2]$

72. Usar una herramienta de graficación para representar gráficamente la función coseno y los polinomios de Taylor del ejercicio 71.

En los ejercicios 73 a 78, encontrar el intervalo de convergencia de la serie de potencias. (Asegurarse de incluir una verificación para la convergencia en los puntos terminales del intervalo.)

73. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{10}\right)^n$

74. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$

75. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{(n+1)^2}$

76. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x-2)^n}{n}$

77. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!(x-2)^n$

78. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$

En los ejercicios 79 y 80, demostrar que la función representada por la serie de potencia es una solución de la ecuación diferencial.

79. $\displaystyle y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^n(n!)^2}$

$x^2y''+xy'+x^2y=0$

80. $\displaystyle y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n x^{2n}}{2^n n!}$

$y''+3xy'+3y=0$

En los ejercicios 81 y 82, encontrar una serie geométrica de potencia centrada en 0 para la función.

81. $g(x)=\dfrac{2}{3-x}$

82. $h(x)=\dfrac{3}{2+x}$

83. Encontrar una serie de potencia para la derivada de la función del ejercicio 81.

84. Encontrar una serie de potencia para la integral de la función del ejercicio 82.

En los ejercicios 85 y 86, encontrar una función representada por la serie y dar el dominio de la función.

85. $1+\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}x^2+\frac{8}{27}x^3+\cdots$

86. $8-2(x-3)+\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{1}{8}(x-3)^3+\cdots$

En los ejercicios 87 a 94, encontrar la serie de potencia para la función centrada en c.

87. $f(x)=\operatorname{sen} x,\quad c=\dfrac{3\pi}{4}$

88. $f(x)=\cos x,\quad c=-\dfrac{\pi}{4}$

89. $f(x)=3^x,\quad c=0$

90. $f(x)=\csc x,\quad c=\dfrac{\pi}{2}$

(primeros tres términos)

91. $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad c=-1$

92. $f(x)=\sqrt{x},\quad c=4$

93. $g(x)=\sqrt[5]{1+x},\quad c=0$

94. $h(x)=\dfrac{1}{(1+x)^3},\quad c=0$

En los ejercicios 95 a 100, encontrar la suma de las series convergentes utilizando una función muy conocida. Identificar la función y explicar cómo se obtuvo la suma.

95. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n n}$

96. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5^n n}$

97. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$

98. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n n!}$

99. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{3^{2n}(2n)!}$

100. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{2n+1}(2n+1)!}$

101. ***Redacción*** Una de las series en los ejercicios 45 y 57 converge a su suma a un ritmo o velocidad más lento que la otra serie. ¿Cuál es? Explicar por qué esta serie converge tan despacio. Usar una herramienta de graficación para ilustrar el ritmo o velocidad de convergencia.

102. Usar la serie binomial para encontrar la serie de Maclaurin

para $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

103. ***Construyendo series de Maclaurin*** Determinar los primeros cuatro términos de la serie de Maclaurin para e^{2x}

a) usando la definición de la serie de Maclaurin y la fórmula para el coeficiente del término n-ésimo, $a_n=f^{(n)}(0)/n!$

b) reemplazando x por $2x$ en la serie para e^x.

c) multiplicando la serie para e^x por ella misma, ya que $e^{2x}=e^x\cdot e^x$.

104. ***Construyendo series de Maclaurin*** Seguir el patrón del ejercicio 103 para encontrar los primeros cuatro términos de la serie para sen $2x$. (*Sugerencia:* sen $2x=2$ sen x cos x.)

En los ejercicios 105 a 108, encontrar la representación mediante una serie de la función definida por la integral.

105. $\displaystyle\int_0^x\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$

106. $\displaystyle\int_0^x\cos\frac{\sqrt{t}}{2}\,dt$

107. $\displaystyle\int_0^x\frac{\ln(t+1)}{t}\,dt$

108. $\displaystyle\int_0^x\frac{e^t-1}{t}\,dt$

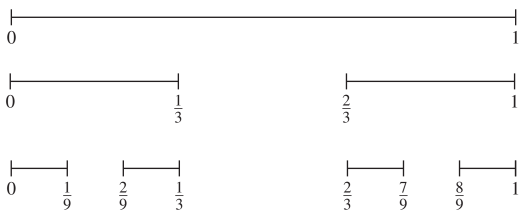
En los ejercicios 109 y 110, usar una serie de potencia para encontrar el límite (si existe). Verificar el resultado usando la regla de L'Hôpital.

109. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$

110. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$

SP Solución de problemas

1. Conjunto de Cantor (Georg Cantor, 1845-1918) es un subconjunto del intervalo de la unidad $[0, 1]$. Para construir el conjunto Cantor, primero eliminar el tercio central $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ del intervalo, dejando dos segmentos de la recta. En el segundo paso, eliminar el tercio central de cada uno de los dos segmentos restantes, dejando cuatro segmentos de recta. Continuar con este procedimiento indefinidamente, como se muestra en la figura. El conjunto de Cantor consiste en todos los números que quedan en el intervalo unidad $[0, 1]$.



a) Hallar la longitud total de todos los segmentos de la recta eliminados.

b) Dar tres números que están en el conjunto de Cantor.

c) Sea C_n la longitud total de los segmentos de la recta restantes después de n pasos. Encontrar $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$.

2. *a*) Dado que $\lim\limits_{x\to\infty} a_{2n} = L$ y $\lim\limits_{x\to\infty} a_{2n+1} = L$, demostrar que $\{a_n\}$ es convergente y que $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = L$.

b) Sea $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + a_n}$. Escribir los primeros ocho términos de $\{a_n\}$. Usar el apartado *a*) para demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Esto produce una **expansión en fracciones continuas**

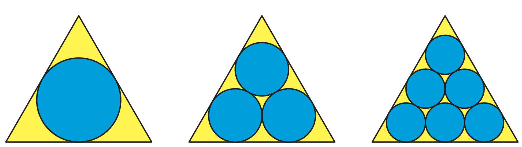
$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}.$$

3. Puede demostrarse que

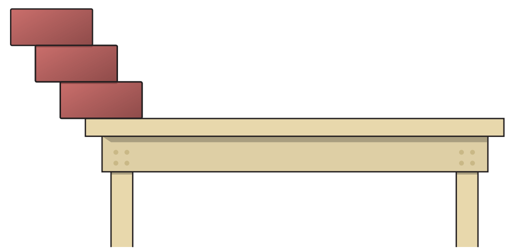
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ [ver ejemplo 3}b\text{), sección 9.3].}$$

Usar este hecho para demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4. Sea T un triángulo equilátero con lados de longitud 1. Sea a_n el número de círculos que pueden empacarse en n hileras dentro del triángulo. Por ejemplo, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ y $a_3 = 6$, como se muestra en la figura. Sea A_n el área combinada de los a_n círculos. Encontrar $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.



5. Se apilan bloques idénticos de una unidad de longitud sobre el borde de una mesa. El centro de gravedad del bloque superior debe quedar sobre el bloque debajo de él, el centro de gravedad de los dos bloques superiores debe quedar sobre el bloque debajo de ellos, y así sucesivamente (ver la figura).



a) Si hay tres bloques, demostrar que es posible apilarlos de manera que el borde izquierdo del bloque superior se encuentre $\frac{11}{12}$ unidades más allá del borde de la mesa.

b) ¿Es posible apilar los bloques de manera que el borde derecho del bloque superior se encuentre más allá del borde de la mesa?

c) ¿Qué tan lejos de la mesa pueden apilarse los bloques?

6. *a*) Considerar la serie de potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 2x + 3x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + x^6 + \cdots$$

en la que los coeficientes $a_n = 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \ldots$ son periódicos con periodo $p = 3$. Hallar el radio de convergencia y la suma de esta serie de potencias.

b) Considerar una serie de potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

en la cual los coeficientes son periódicos, $(a_{n+p} = a_p)$ y $a_n > 0$. Hallar el radio de convergencia y la suma de esta serie de potencia.

7. ¿Para qué valor de las constantes positivas a y b converge la serie siguiente absolutamente? ¿Para qué valores converge condicionalmente?

$$a - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \frac{a}{5} - \frac{b}{6} + \frac{a}{7} - \frac{b}{8} + \cdots$$

8. *a*) Hallar una serie de potencia para la función

$$f(x) = xe^x$$

centrada en 0. Usar esta representación para encontrar la suma de la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}.$$

b) Derivar la serie de potencia para $f(x) = xe^x$. Usar el resultado para encontrar la suma de la serie infinita

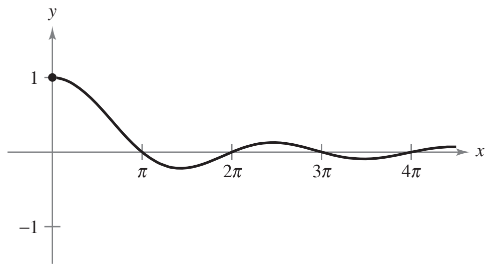
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}.$$

9. Hallar $f^{(12)}(0)$ si $f(x) = e^{x^2}$. (*Sugerencia:* No calcular las derivadas.)

10. La gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

se muestra debajo. Usar el criterio de la serie alternada o alternante para demostrar que la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ converge.



11. *a*) Demostrar que $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx$ converge si y sólo si $p > 1$.

b) Determinar la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^2)}.$$

12. *a*) Considerar la siguiente sucesión de números definida recursiva o recurrentemente.

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = \sqrt{3}$$
$$a_3 = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$$
$$\vdots$$
$$a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$$

Escribir las aproximaciones decimales de los primeros seis términos de esta sucesión. Demostrar que la sucesión converge y encontrar su límite.

b) Considerar la siguiente sucesión recursivamente definida por $a_1 = \sqrt{a}$ y $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$, donde $a > 2$.

$$\sqrt{a},\ \sqrt{a + \sqrt{a}},\ \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}},\ .\ .\ .$$

Demostrar que esta sucesión converge y encuentra su límite.

13. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos que satisfacen $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = L < \frac{1}{r},\ r > 0$. Demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ converge.

14. Considerar la serie infinita $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$.

a) Hallar los primeros cinco términos de la sucesión de sumas parciales.

b) Demostrar que el criterio del cociente no es concluyente para esta serie.

c) Usar el criterio de la raíz para probar la convergencia o divergencia de esta serie.

15. Obtener cada identidad usando la serie geométrica apropiada.

a) $\dfrac{1}{0.99} = 1.01010101\ .\ .\ .$ *b*) $\dfrac{1}{0.98} = 1.0204081632\ .\ .\ .$

16. Considerar una población idealizada con la característica de que cada miembro de la población produce una descendiente al final de cada periodo. Cada miembro tiene un ciclo de vida de tres periodos y la población empieza con 10 miembros recién nacidos. La tabla siguiente muestra la población durante los primeros cinco periodos.

Clasificación por edades	Periodo				
	1	2	3	4	5
0-1	10	10	20	40	70
1-2		10	10	20	40
2-3			10	10	20
Total	10	20	40	70	130

La sucesión para la población total tiene la propiedad de que

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}, \qquad n > 3.$$

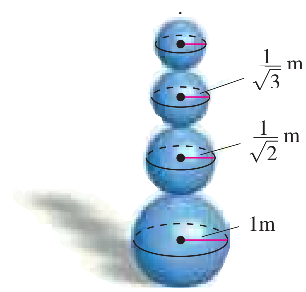
Encontrar la población total durante cada uno de los próximos cinco periodos.

17. Imaginar que se está apilando un número infinito de esferas de radios decrecientes, una encima de otra, como se muestra en la figura. Los radios de las esferas son de 1 metro, $1/\sqrt{2}$ metros, $1/\sqrt{3}$ metros, etc. Las esferas están hechas de un material que pesa 1 newton por metro cúbico.

a) ¿Qué tan alta es esta pila infinita de esferas?

b) ¿Cuál es el área de la superficie total de todas las esferas en la pila?

c) Mostrar que el peso de la pila es finito.



18. *a*) Determinar la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}.$$

b) Determinar la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2n} - \operatorname{sen} \frac{1}{2n+1} \right).$$

Apéndices

A Demostración de teoremas seleccionados

TEOREMA 1.2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES (PROPIEDADES 2, 3, 4 Y 5) (PÁGINA 59)

Sean b y c números reales, sea n un número entero positivo y f y g funciones con los siguientes límites:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = K$$

2. Suma o diferencia: $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$

3. Producto: $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)] = LK$

4. Cociente: $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$, siempre que $K \neq 0$

5. Potencia: $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = L^n$

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la propiedad 2, se elige $\varepsilon > 0$. Puesto que $\varepsilon/2 > 0$, se sabe que existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta_1$ implica que $|f(x) - L| < \varepsilon/2$. Se sabe también que existe $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta_2$ implica que $|g(x) - K| < \varepsilon/2$. Sea δ el menor de δ_1 y δ_2; entonces, $0 < |x - c| < \delta$ implica:

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |g(x) - K| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto, aplicando la desigualdad del triángulo se deduce que:

$$|[f(x) + g(x)] - (L + K)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - K| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que implica que:

$$\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = L + K = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x).$$

La demostración de que:

$$\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = L - K$$

es semejante.

Para demostrar la propiedad 3, dado que

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = K$$

se puede escribir

$$f(x)g(x) = [f(x) - L][g(x) - K] + [Lg(x) + Kf(x)] - LK.$$

Como que el límite de $f(x)$ es L y el límite de $g(x)$ es K, se tiene

$$\lim_{x\to c} [f(x) - L] = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c} [g(x) - K] = 0.$$

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces

$$|f(x) - L - 0| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |g(x) - K - 0| < \varepsilon$$

lo cual implica que

$$|[f(x) - L][g(x) - K] - 0| = |f(x) - L|\,|g(x) - K| < \varepsilon\varepsilon < \varepsilon.$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to c} [f(x) - L][g(x) - K] = 0.$$

Además, por la propiedad 1, se tiene:

$$\lim_{x \to c} Lg(x) = LK \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} Kf(x) = KL.$$

Por último, por la propiedad 2, se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to c} f(x)g(x) &= \lim_{x \to c} [f(x) - L][g(x) - K] + \lim_{x \to c} Lg(x) + \lim_{x \to c} Kf(x) - \lim_{x \to c} LK \\ &= 0 + LK + KL - LK \\ &= LK.\end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad 4, obsérvese que basta demostrar que:

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{K}\cdot$$

Entonces se puede emplear la propiedad 3 para escribir:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} f(x) \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{L}{K}\cdot$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{x \to c} g(x) = K$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta_1, \text{ entonces } |g(x) - K| < \frac{|K|}{2}$$

lo cual implica que

$$|K| = |g(x) + [|K| - g(x)]| \le |g(x)| + ||K| - g(x)| < |g(x)| + \frac{|K|}{2}.$$

Esto es, si $0 < |x - c| < \delta_1$,

$$\frac{|K|}{2} < |g(x)| \quad \text{o} \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|K|}\cdot$$

De manera semejante, existe un $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta_2$, entonces

$$|g(x) - K| < \frac{|K|^2}{2}\varepsilon.$$

Sea δ el menor de δ_1 y δ_2. Si $0 < |x - c| < \delta$, se tiene

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{K}\right| = \left|\frac{K - g(x)}{g(x)K}\right| = \frac{1}{|K|} \cdot \frac{1}{|g(x)|}|K - g(x)| < \frac{1}{|K|} \cdot \frac{2}{|K|}\frac{|K|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{K}\cdot$

Por último, la propiedad 5 se obtiene por inducción matemática empleando la propiedad 3.

TEOREMA 1.4 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN RADICAL (PÁGINA 60)

Sea n un entero positivo. El siguiente límite es válido para toda c si n es impar, y para toda $c > 0$ si n es par.

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}.$$

DEMOSTRACIÓN Considérese el caso en que $c > 0$ y n es un entero positivo. Para un $\varepsilon > 0$ dado, se necesita encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c}\right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

lo que equivale a decir

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c} < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad -\delta < x - c < \delta.$$

Supóngase que $\varepsilon < \sqrt[n]{c}$, lo cual implica que $0 < \sqrt[n]{c} - \varepsilon < \sqrt[n]{c}$. Sea ahora δ el menor de los dos números.

$$c - \left(\sqrt[n]{c} - \varepsilon\right)^n \quad \text{y} \quad \left(\sqrt[n]{c} + \varepsilon\right)^n - c$$

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
-\delta < x - c &< \delta \\
-\left[c - \left(\sqrt[n]{c} - \varepsilon\right)^n\right] < x - c &< \left(\sqrt[n]{c} + \varepsilon\right)^n - c \\
\left(\sqrt[n]{c} - \varepsilon\right)^n - c < x - c &< \left(\sqrt[n]{c} + \varepsilon\right)^n - c \\
\left(\sqrt[n]{c} - \varepsilon\right)^n < x &< \left(\sqrt[n]{c} + \varepsilon\right)^n \\
\sqrt[n]{c} - \varepsilon < \sqrt[n]{x} &< \sqrt[n]{c} + \varepsilon \\
-\varepsilon < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c} &< \varepsilon.
\end{aligned}$$

TEOREMA 1.5 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA (PÁGINA 61)

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to c} g(x) = L$ y $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$, entonces:

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L).$$

DEMOSTRACIÓN Para todo $\varepsilon > 0$ dado, hay que encontrar un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Como el límite de $f(x)$ cuando $x \to L$ es $f(L)$, se sabe que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(u) - f(L)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |u - L| < \delta_1.$$

Además, como el límite de $g(x)$ cuando $x \to c$ es L, se sabe que existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - L| < \delta_1 \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Por último, haciendo $u = g(x)$, se tiene

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

TEOREMA 1.7 FUNCIONES QUE COINCIDEN TODOS LOS PUNTOS SALVO EN UNO (PÁGINA 62)

Sean c un número real y sea $f(x) = g(x)$ para todos los valores de $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene c. Si existe el límite de $g(x)$ cuando x tiende a c, entonces también existe el límite de $f(x)$ y

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x).$$

DEMOSTRACIÓN Sea L el límite de $g(x)$ cuando $x \to c$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ en los intervalos abiertos $(c - \delta, c)$ y $(c, c + \delta)$, y

$$|g(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Como $f(x) = g(x)$ para todo x en el intervalo abierto distinto de $x = c$, se sigue que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Por tanto, el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ es también L.

TEOREMA 1.8 TEOREMA DEL ENCAJE O DEL EMPAREDADO (PÁGINA 65)

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todos los valores x en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en c, y si

$$\lim_{x \to c} h(x) = L = \lim_{x \to c} g(x)$$

entonces existe $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ y es igual a L.

DEMOSTRACIÓN Para $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$|h(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta_1$$

y

$$|g(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta_2.$$

Como $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en c, existe $\delta_3 > 0$ tal que $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para $0 < |x - c| < \delta_3$. Sea δ el menor de δ_1, δ_2 y δ_3. Entonces, si $0 < |x - c| < \delta$, se sigue que $|h(x) - L| < \varepsilon$ y $|g(x) - L| < \varepsilon$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon \quad &\text{y} \quad -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon \\ L - \varepsilon < h(x) \quad &\text{y} \quad g(x) < L + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, se sigue que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, lo cual implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Por tanto,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

TEOREMA 1.11 PROPIEDADES DE CONTINUIDAD (PÁGINA 75)

Si b es un número real y f y g son continuas en $x = c$, entonces las siguientes funciones también son continuas en c.

1. Múltiplo escalar: bf
2. Suma o diferencia: $f \pm g$
3. Producto: fg
4. Cociente: $\dfrac{f}{g}$, si $g(c) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN Como f y g son continuas en $x = c$, se puede escribir

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x) = g(c).$$

Por la propiedad 1, cuando b es un número real, se sigue del teorema 1.2 que

$$\lim_{x\to c} [(bf)(x)] = \lim_{x\to c} [bf(x)] = b \lim_{x\to c} [f(x)] = b\, f(c) = (bf)(c).$$

Por tanto, bf es continua en $x = c$.

Por la propiedad 2, se sigue del teorema 1.2 que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} (f \pm g)(x) &= \lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)]\\ &= \lim_{x\to c} [f(x)] \pm \lim_{x\to c} [g(x)]\\ &= f(c) \pm g(c)\\ &= (f \pm g)(c).\end{aligned}$$

Entonces, $f \pm g$ es continua en $x = c$.

Por la propiedad 3, se sigue del teorema 1.2 que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} (fg)(x) &= \lim_{x\to c} [f(x)g(x)]\\ &= \lim_{x\to c} [f(x)] \lim_{x\to c} [g(x)]\\ &= f(c)g(c)\\ &= (fg)(c).\end{aligned}$$

En consecuencia, fg es continua en $x = c$.

Por la propiedad 4, cuando $g(c) \neq 0$, se sigue del teorema 1.2 que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} \frac{f}{g}(x) &= \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}\\ &= \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}\\ &= \frac{f(c)}{g(c)}\\ &= \frac{f}{g}(\mathrm{c}).\end{aligned}$$

En consecuencia, $\dfrac{f}{g}$, es continua en $x = c$.

TEOREMA 1.14 ASÍNTOTAS VERTICALES (PÁGINA 85)

Sean f y g funciones continuas en un intervalo abierto que contiene a c. Si $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$, y existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ en intervalo, entonces la gráfica de la función dada por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene una asíntota vertical en $x = c$.

DEMOSTRACIÓN Considérese el caso en el que $f(c) > 0$ y existe una $b > c$ tal que $c < x < b$ implica que $g(x) > 0$. Entonces, para $M > 0$ se elige un δ_1 tal que

$$0 < x - c < \delta_1 \quad \text{implica que} \quad \frac{f(c)}{2} < f(x) < \frac{3f(c)}{2}$$

y un δ_2 tal que

$$0 < x - c < \delta_2 \quad \text{implica que} \quad 0 < g(x) < \frac{f(c)}{2M}.$$

Ahora sea δ el menor de δ_1 y δ_2. Entonces deducir que

$$0 < x - c < \delta \quad \text{implica que} \quad \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(c)}{2}\left[\frac{2M}{f(c)}\right] = M.$$

Por tanto, se sigue que

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

y la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de h.

FÓRMULA ALTERNATIVA PARA LA DERIVADA (PÁGINA 101)

La derivada de f en c está dada por

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

siempre que este límite exista.

DEMOSTRACIÓN La derivada de f en c está dada por

$$f'(c) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Sea $x = c + \Delta x$. Entonces $x \to c$ a medida que $\Delta x \to 0$. Por tanto, sustituyendo $c + \Delta x$ por x se tiene:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

TEOREMA 2.10 REGLA DE LA CADENA (PÁGINA 131)

Si $y = f(u)$ es una función derivable de u, y si $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable de x y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o lo que es equivalente,

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

DEMOSTRACIÓN En la sección 2.4 se hizo $h(x) = f(g(x))$ y se utilizó la fórmula alternativa de la derivada para demostrar que $h'(c) = f'(g(c))\,g'(c)$, siempre que $g(x) \neq g(c)$ para todos los valores de x distintos de c. Ahora se da una demostración más general. Se empieza por considerar la derivada de f.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Para un valor fijo de x, se define una función η tal que

$$\eta(\Delta x) = \begin{cases} 0, & \Delta x = 0 \\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x), & \Delta x \neq 0. \end{cases}$$

Como el límite de $\eta(\Delta x)$ cuando $\Delta x \to 0$ no depende del valor de $\eta(0)$, tenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right] = 0$$

y se puede concluir que η es continua en 0. Además, dado que $\Delta y = 0$ cuando $\Delta x = 0$, la ecuación:

$$\Delta y = \Delta x \eta(\Delta x) + \Delta x f'(x)$$

es válida ya sea que Δx sea o no cero. Ahora, haciendo $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$, se puede usar la continuidad de g para concluir que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = \lim_{\Delta x \to 0} [g(x + \Delta x) - g(x)] = 0$$

lo que implica

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta u) = 0.$$

Por último,

$$\Delta y = \Delta u \eta(\Delta u) + \Delta u f'(u) \to \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \eta(\Delta u) + \frac{\Delta u}{\Delta x} f'(u), \quad \Delta x \neq 0$$

y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\left[\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta u)\right] + \frac{du}{dx} f'(u) &= \frac{dy}{dx}(0) + \frac{du}{dx} f'(u) \\ &= \frac{du}{dx} f'(u) \\ &= \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}. \end{aligned}$$

INTERPRETACIÓN DE LA CONCAVIDAD (PÁGINA 190)

1. Sea f derivable en un intervalo abierto I. Si la gráfica de f es cóncava *hacia arriba* en I, entonces su gráfica queda *por encima* de todas sus rectas tangentes en I.

2. Sea f derivable en el intervalo abierto I. Si la gráfica de f es cóncava *hacia abajo* en I, entonces su gráfica queda *por abajo* de todas sus rectas tangentes en I.

DEMOSTRACIÓN Supóngase que f es cóncava hacia arriba en $I = (a, b)$. Entonces f' es creciente en (a, b). Sea c un punto dentro del intervalo $I = (a, b)$. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en la c dada es:

$$g(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$

Si x está en el intervalo abierto (c, b), la distancia dirigida que va del punto $(x, f(x))$ (en la gráfica de f) al punto $(x, g(x))$ (en la recta tangente) está dada por:

$$\begin{aligned} d &= f(x) - [f(c) + f'(c)(x - c)] \\ &= f(x) - f(c) - f'(c)(x - c). \end{aligned}$$

Además, por el teorema del valor medio, existe un número z en (c, x) tal que

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Por tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} d &= f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) \\ &= f'(z)(x - c) - f'(c)(x - c) \\ &= [f'(z) - f'(c)](x - c). \end{aligned}$$

El segundo factor $(x - c)$ es positivo porque $c < x$. Además, puesto que f' es creciente, se sigue que el primer factor $[f'(z) - f'(c)]$ también es positivo. Por consiguiente, $d > 0$ y se concluye que la gráfica de f está sobre la recta tangente en x. Si x está en el intervalo abierto (a, c), se puede aplicar un argumento similar. Con esto queda demostrado el primer enunciado; la demostración del segundo enunciado es semejante.

TEOREMA 3.7 PRUEBA DE LA CONCAVIDAD (PÁGINA 191)

Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

1. Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.
2. Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

DEMOSTRACIÓN Por la propiedad 1, suponer que $f''(x) > 0$ para todo x en (a, b). Entonces, por el teorema 3.5, f' es creciente en $[a, b]$. Por tanto, por la definición de concavidad, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en (a, b).

Por la propiedad 2, suponer que $f''(x) < 0$ para todo x en (a, b). Entonces, por el teorema 3.5, f' decrece en $[a, b]$. Por tanto, por la definición de concavidad, la gráfica de f es cóncava hacia abajo en (a, b).

TEOREMA 3.10 LÍMITES EN EL INFINITO (PÁGINA 199)

Si r es un número racional positivo y c es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

Además, si x^r está definida para $x < 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$

DEMOSTRACIÓN Se empieza por demostrar que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Si $\varepsilon > 0$, sea $M = 1/\varepsilon$. Entonces, para $x > M$ se tiene:

$$x > M = \frac{1}{\varepsilon} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x} < \varepsilon \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon.$$

Por tanto, empleando la definición de límite en el infinito, se concluye que el límite de $1/x$, cuando $x \to \infty$ es 0. Ahora, usando este resultado, y haciendo $r = m/n$, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} &= \lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^{m/n}} \\
&= c\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)^m\right] \\
&= c\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{x}}\right)^m \\
&= c\left(\sqrt[n]{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}\right)^m \\
&= c\left(\sqrt[n]{0}\right)^m \\
&= 0
\end{aligned}$$

La demostración de la segunda parte del teorema es similar.

TEOREMA 4.2 FÓRMULAS DE SUMA (PÁGINA 260)

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = cn$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

DEMOSTRACIÓN La propiedad 1 es inmediata. Si se suma n veces el número c, se obtiene la suma cn.

Para demostrar la propiedad 2, se escribe la suma en orden creciente y en orden decreciente, y se suman los términos correspondientes de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots + & (n-1) & + & n \\
& \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \cdots + & 2 & + & 1 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = & \multicolumn{9}{c}{\underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ términos}}}
\end{array}$$

Por tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La propiedad 3 se demuestra por inducción matemática. En primer lugar, para $n = 1$ es verdadera, ya que:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}.$$

Suponiendo ahora que el resultado es verdadero para $n = k$, se comprueba que también es verdadero para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k+1}{6}(2k^2 + k + 6k + 6) \\
&= \frac{k+1}{6}[(2k+3)(k+2)] \\
&= \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6}
\end{aligned}$$

La propiedad 4 se puede demostrar mediante un argumento con inducción matemática.

TEOREMA 4.8 CONSERVACIÓN DE DESIGUALDADES (PÁGINA 278)

1. Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces:

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Si f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todas las x en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la propiedad 1 supóngase que ocurre lo contrario, que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = I < 0.$$

Entonces, sea $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ una partición de $[a, b]$ y sea

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

una suma de Riemann. Como $f(x) \geq 0$, se sigue que $R \geq 0$. Ahora, para $\|\Delta\|$ suficientemente pequeña, se tiene $|R - I| < -I/2$, lo cual implica que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = R < I - \frac{I}{2} < 0$$

lo que no es posible. De esta contradicción se concluye que:

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$

Para demostrar la propiedad 2 del teorema, obsérvese que $f(x) \leq g(x)$ implica que $g(x) - f(x) \geq 0$. Por tanto se puede aplicar la propiedad 1 para concluir que:

$$0 \leq \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$$

$$0 \leq \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL (PÁGINA 325)

La función logaritmo natural es inyectiva.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

DEMOSTRACIÓN Recordar de la sección P.3 que la función f es inyectiva si para x_1 y x_2 en su dominio

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Sea $f(x) = \ln x$. Entonces, $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ para $x > 0$. Así que f es creciente en su dominio entero $(0, \infty)$ y, por tanto, es estrictamente monótona (ver la sección 3.3). Se eligió x_1 y x_2 en el dominio de f de manera que $x_1 \neq x_2$. Puesto que f es estrictamente monótona, se sigue que

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{o} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

En cualquier caso, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Así que, $f(x) = \ln x$ es inyectiva. Para verificar los límites, se empieza mostrando que $\ln 2 \geq \frac{1}{2}$. Por el teorema del valor promedio para integrales, puede escribirse

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{c}(2 - 1) = \frac{1}{c}$$

donde c está en $[1, 2]$.

Esto implica que

$$\begin{aligned} 1 \leq \quad c \quad &\leq 2 \\ 1 \geq \quad \frac{1}{c} \quad &\geq \frac{1}{2} \\ 1 \geq \ln 2 &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ahora sea N un número positivo (grande). Como $\ln x$ es creciente, se sigue que si $x > 2^{2N}$, entonces:

$$\ln x > \ln 2^{2N} = 2N \ln 2.$$

Sin embargo, puesto que $\ln 2 \geq \frac{1}{2}$, se sigue que

$$\ln x > 2N \ln 2 \geq 2N\left(\frac{1}{2}\right) = N.$$

Esto verifica el segundo límite. Para verificar el primero, sea $z = 1/x$. Entonces, $z \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, y se puede escribir:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \ln x &= \lim_{x \to 0^+} \left(-\ln \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{z \to \infty} (-\ln z) \\ &= -\lim_{z \to \infty} \ln z \\ &= -\infty \end{aligned}$$

TEOREMA 5.8 CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD DE LAS FUNCIONES INVERSAS (PÁGINA 347)

Sea f una función cuyo dominio es un intervalo I. Si existe la función inversa de f, son ciertas las siguientes afirmaciones:

1. Si f es continua en su dominio, entonces f^{-1} es continua en su dominio.
2. Si f es creciente en su dominio, entonces f^{-1} es creciente en su dominio.
3. Si f es decreciente en su dominio, entonces f^{-1} es decreciente en su dominio.
4. Si f es derivable en un intervalo que contiene c y $f'(c) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(c)$.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la propiedad 1, se muestra en primer lugar, que si f es continua en I y tiene inversa, entonces f es estrictamente monótona en I. Supóngase que f no es estrictamente monótona. En tal caso, existen en I números x_1, x_2 y x_3 tales que $x_1 < x_2 < x_3$, pero $f(x_2)$ no está entre $f(x_1)$ y $f(x_3)$. Sin pérdida de la generalidad, supóngase que $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$. Por el teorema del valor intermedio, existe x_0 entre x_1 y x_2 tal que $f(x_0) = f(x_3)$. Así, f no es inyectiva y no puede tener inversa. Por tanto, f debe ser estrictamente monótona.

Puesto que f es continua, el teorema del valor intermedio implica que el conjunto de valores de f

$$\{f(x): x \in I\}$$

forma un intervalo J. Suponer que a es un punto interior de J. De acuerdo con el argumento anterior, $f^{-1}(a)$ es un punto interior de I. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ tal que:

$$I_1 = (f^{-1}(a) - \varepsilon_1, f^{-1}(a) + \varepsilon_1) \subseteq I.$$

Como f es estrictamente monótona en I_1, el conjunto de valores $\{f(x): x \in I_1\}$ forma un intervalo $J_1 \subseteq J$. Sea $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subseteq J_1$. Por último, si

$$|y - a| < \delta, \text{ entonces } |f^{-1}(y) - f^{-1}(a)| < \varepsilon_1 < \varepsilon.$$

Por tanto, f^{-1} es continua en a. Una demostración similar puede darse en el caso en que a sea un punto terminal.

Para demostrar la propiedad 2, sean y_1 y y_2 elementos en el dominio de f^{-1}, con $y_1 < y_2$. Entonces, en el dominio de f existen x_1 y x_2 tales que

$$f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2).$$

Como f es creciente, $f(x_1) < f(x_2)$ exactamente cuando $x_1 < x_2$. Por consiguiente:

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$$

lo cual implica que f^{-1} es creciente (la propiedad 3 se demuestra de manera similar).

Por último, para demostrar la propiedad 4, considérese el límite

$$(f^{-1})'(a) = \lim_{y \to a} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(a)}{y - a}$$

donde a está en el dominio de f^{-1} y $f^{-1}(a) = c$. Puesto que f es derivable en un intervalo que contiene c, f es continua en ese intervalo y entonces es f^{-1} en a. Por tanto, $y \to a$ implica que $x \to c$, y se tiene:

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(a) &= \lim_{x \to c} \frac{x - c}{f(x) - f(c)} \\
&= \lim_{x \to c} \frac{1}{\left(\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)} \\
&= \frac{1}{\displaystyle\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}} \\
&= \frac{1}{f'(c)}.
\end{aligned}$$

Por tanto, existe $(f^{-1})'(a)$ y f^{-1} es derivable en $f(c)$.

TEOREMA 5.9 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN INVERSA (PÁGINA 347)

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si f tiene una función inversa g, entonces g es derivable en todo x en la que $f'(g(x)) \neq 0$. Además:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(g(x)) \neq 0.$$

DEMOSTRACIÓN De la demostración del teorema 5.8, haciendo que $a = x$, se sabe que g es derivable. Empleando la regla de la cadena, se derivan ambos miembros de la ecuación $x = f(g(x))$ para obtener:

$$1 = f'(g(x)) \frac{d}{dx}[g(x)].$$

Puesto que $f'(g(x)) \neq 0$, se puede dividir entre esa cantidad, para obtener:

$$\frac{d}{dx}[g(x)] = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

TEOREMA 5.10 OPERACIONES CON FUNCIONES EXPONENCIALES (PROPIEDAD 2) (PÁGINA 353)

2. $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ (Sean a y b cualesquiera números reales.)

DEMOSTRACIÓN Para comprobar la propiedad 2, se puede escribir

$$\ln\left(\frac{e^a}{e^b}\right) = \ln e^a - \ln e^b = a - b = \ln(e^{a-b})$$

Puesto que la función logaritmo natural es inyectiva, puede concluirse que

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}.$$

TEOREMA 5.15 UN LÍMITE QUE INVOLUCRA AL NÚMERO *e* (PÁGINA 366)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. Aplicando el logaritmo natural en ambos lados, se tiene:

$$\ln y = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right].$$

Puesto que la función logaritmo natural es continua, se puede escribir

$$\ln y = \lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\ln[1+(1/x)]}{1/x}\right\}.$$

Haciendo $x = \dfrac{1}{t}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\ln y &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)-\ln 1}{t}\\
&= \frac{d}{dx}\ln x \text{ en } x = 1\\
&= \frac{1}{x} \text{ en } x = 1\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por último, como $\ln y = 1$ se sabe que $y = e$, y se puede concluir que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

TEOREMA 5.16 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS (arcsen *u* y arccos *u*) (PÁGINA 376)

Sea u una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\text{arcsen } u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arccos } u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

DEMOSTRACIÓN

Método 1: Aplicar el teorema 5.9.

Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \arcsin x$. Puesto que f es derivable en $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, se puede aplicar el teorema 5.9.

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Si u es una función derivable de x, entonces es posible usar la regla de la cadena para escribir

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \text{donde} \quad u' = \frac{du}{dx}.$$

Método 2: Usar diferenciación implícita.

Sea $y = \arccos x$, $0 \le y \le \pi$. Así que, $\cos y = x$, y se puede usar diferenciación implícita de la siguiente manera:

$$\cos y = x$$

$$-\operatorname{sen} y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\operatorname{sen} y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Si u es una función derivable de x, entonces puede usarse la regla de la cadena para escribir

$$\frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \text{donde} \quad u' = \frac{du}{dx}.$$

TEOREMA 8.3 TEOREMA GENERAL DEL VALOR MEDIO (PÁGINA 570)

Si f y g son derivables en un intervalo abierto (a, b) y continuas en $[a, b]$, y si además $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b), entonces existe algún punto c en (a, b) tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

DEMOSTRACIÓN Se puede suponer que $g(a) \neq g(b)$, ya que de otra manera, por el teorema de Rolle se sigue que $g'(x) = 0$ para algún x en (a, b). Ahora, se define $h(x)$ como:

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right] g(x).$$

Entonces:

$$h(a) = f(a) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right] g(a) = \frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

y

$$h(b) = f(b) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right] g(b) = \frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

y, por el teorema de Rolle existe un punto c en (a, b) tal que

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$$

lo cual implica que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

TEOREMA 8.4 REGLA DE L'HÔPITAL (PÁGINA 570)

Sean f y g funciones derivables en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c, excepto posiblemente en la misma c. Supóngase que $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b), excepto posiblemente en la propia c. Si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a c produce la forma indeterminada 0/0, entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite de la derecha exista (o sea infinito). Este resultado también es válido si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a c produce cualquiera de las formas indeterminadas ∞/∞, $(-\infty)/\infty$, $\infty/(-\infty)$, o $(-\infty)/(-\infty)$.

Se puede utilizar el teorema del valor medio generalizado para demostrar la regla de L'Hôpital. Sólo se da la demostración de uno de los varios casos de esta regla, dejando los demás casos en los que $x \to c^-$ y $x \to c$, como ejercicio para el lector.

DEMOSTRACIÓN Considérese el caso en el que $\lim_{x\to c^+} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c^+} g(x) = 0$. Se definen las siguientes nuevas funciones:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq c \\ 0, & x = c \end{cases} \quad \text{y} \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq c \\ 0, & x = c \end{cases}.$$

Para todo x, $c < x < b$, F y G son derivables en $(c, x]$ y continuas en $[c, x]$. Se puede aplicar el teorema del valor medio generalizado, para concluir que en (c, x) existe un número z tal que:

$$\frac{F'(z)}{G'(z)} = \frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Por último, si se hace que x tienda a c por la derecha, $x \to c^+$, se tiene que $z \to c^+$, ya que $c < z < x$, y

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c^+} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to c^+} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{x\to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

TEOREMA 9.19 TEOREMA DE TAYLOR (PÁGINA 656)

Si una función f es derivable hasta el orden $n + 1$ en un intervalo I que incluye a c, entonces, para todo x en I existe z entre x y c tal que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}.$$

DEMOSTRACIÓN Para determinar $R_n(x)$, se fija x en I $(x \neq c)$ y se escribe $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ donde $P_n(x)$ es el n-ésimo polinomio de Taylor para $f(x)$. Sea ahora g una función de t definida por:

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - R_n(x)\frac{(x - t)^{n+1}}{(x - c)^{n+1}}.$$

La razón por la que se define g de esta manera es que la derivación con respecto a t tiene un efecto telescópico. Por ejemplo, se tiene:

$$\frac{d}{dt}[-f(t) - f'(t)(x - t)] = -f'(t) + f'(t) - f''(t)(x - t) = -f''(t)(x - t).$$

El resultado es que la derivada $g'(t)$ se simplifica a

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + (n + 1)R_n(x)\frac{(x - t)^n}{(x - c)^{n+1}}$$

para todo t entre c y x. Además, para un x fijo:

$$g(c) = f(x) - [P_n(x) + R_n(x)] = f(x) - f(x) = 0$$

y

$$g(x) = f(x) - f(x) - 0 - \cdot \cdot \cdot - 0 = f(x) - f(x) = 0.$$

Por tanto, g satisface las condiciones del teorema de Rolle, y se sigue que existe un número z entre c y x tal que $g'(z) = 0$. Si se sustituye t por z en la ecuación de $g'(t)$ y después se despeja $R_n(x)$ se obtiene:

$$g'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n + (n + 1)R_n(x)\frac{(x - z)^n}{(x - c)^{n+1}} = 0$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}.$$

Por último, como $g(c) = 0$, se tiene:

$$0 = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) - \cdot \cdot \cdot - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n - R_n(x)$$

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \cdot \cdot \cdot + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x).$$

TEOREMA 9.20 CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIAS (PÁG. 662)

Para una serie de potencias centrada en c, exactamente uno de los siguientes enunciados es verdadero.

1. La serie converge sólo en c.
2. Existe un número real $R > 0$ tal que la serie se converge absolutamente para $|x - c| < R$ y diverge para $|x - c| > R$.
3. La serie converge absolutamente para todo x.

El número R es el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Si la serie converge sólo en c, el radio de convergencia es $R = 0$, y si la serie converge para todo x, el radio de convergencia es $R = \infty$. El conjunto de todos los valores de x para los cuales la serie exponencial converge es el **intervalo de convergencia** de la serie de potencias.

DEMOSTRACIÓN Con el fin de simplificar la notación, se demostrará el teorema para la serie de potencias $\Sigma\, a_n x^n$ centrada en $x = 0$. La demostración para una serie de potencias centrada en $x = c$ se deduce con facilidad. Un paso clave en esta demostración usa la propiedad de completitud del conjunto de los números reales: si un conjunto no vacío S de números reales tiene una cota superior, entonces debe tener una mínima cota superior (vea la página 603).

Se debe mostrar que si una serie de potencias $\Sigma\, a_n x^n$ converge en $x = d$, $d \neq 0$, entonces converge para todo b que satisface $|b| < |d|$. Como $\Sigma\, a_n x^n$ converge, el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n d^n = 0$.

Por tanto, existe un $N > 0$ tal que $a_n d^n < 1$ para todo $n \geq N$. Entonces, para todo $n \geq N$:

$$|a_n b^n| = \left|a_n b^n \frac{d^n}{d^n}\right| = |a_n d^n| \left|\frac{b^n}{d^n}\right| < \left|\frac{b^n}{d^n}\right|.$$

Así, para $|b| < |d|$, $\left|\frac{b}{d}\right| < 1$, lo cual implica que

$$\sum \left|\frac{b^n}{d^n}\right|$$

es una serie geométrica convergente. Por el criterio de comparación, la serie $\Sigma\, a_n b^n$ también converge.

Del mismo modo, si la serie de potencias $\Sigma\, a_n x^n$ diverge en $x = b$, donde $b \neq 0$, entonces diverge para todo d que satisface $|d| > |b|$. Si $\Sigma\, a_n d^n$ convergiera, entonces el argumento anterior implicaría que $\Sigma\, a_n b^n$ también fuera divergente.

Por último, para demostrar el teorema, supóngase que ninguno de los casos 1 y 3 sea verdadero. Entonces existen puntos b y d tales que $\Sigma\, a_n x^n$ converge en b y diverge en d. Sea $S = \{x\colon \Sigma\, a_n x^n \text{ converge}\}$. S no es un conjunto vacío ya que $b \in S$. Si $x \in S$, entonces $|x| \leq |d|$, lo cual muestra que $|d|$ es una cota superior del conjunto no vacío S. Por la propiedad de completitud, S tiene una mínima cota superior, R.

Ahora, si $|x| > R$, entonces $x \notin S$ de manera que $\Sigma\, a_n x^n$ diverge. Y si $|x| < R$, entonces $|x|$ no es cota superior de S, por lo que existe b en S que satisface $|b| > |x|$. Como $b \in S$, $\Sigma\, a_n b^n$ converge lo que implica que $\Sigma\, a_n x^n$ converge.

B Tablas de integración

Fórmulas u^n

1. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

Integrales con la forma $a + bu$

3. $\displaystyle\int \frac{u}{a+bu}\,du = \frac{1}{b^2}\big(bu - a\ln|a+bu|\big) + C$

4. $\displaystyle\int \frac{u}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bu} + \ln|a+bu|\right) + C$

5. $\displaystyle\int \frac{u}{(a+bu)^n}\,du = \frac{1}{b^2}\left[\frac{-1}{(n-2)(a+bu)^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)(a+bu)^{n-1}}\right] + C,\quad n \neq 1, 2$

6. $\displaystyle\int \frac{u^2}{a+bu}\,du = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{bu}{2}(2a - bu) + a^2\ln|a+bu|\right] + C$

7. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^3}\left(bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$

8. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^3}\,du = \frac{1}{b^3}\left[\frac{2a}{a+bu} - \frac{a^2}{2(a+bu)^2} + \ln|a+bu|\right] + C$

9. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^n}\,du = \frac{1}{b^3}\left[\frac{-1}{(n-3)(a+bu)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(a+bu)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(a+bu)^{n-1}}\right] + C,\quad n \neq 1, 2, 3$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{u(a+bu)}\,du = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{u(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a+bu} + \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right) + C$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2(a+bu)}\,du = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{u} + \frac{b}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right) + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2(a+bu)^2}\,du = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{a+2bu}{u(a+bu)} + \frac{2b}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right] + C$

Integrales con la forma $a + bu + cu^2$, $b^2 \neq 4ac$

14. $$\int \frac{1}{a + bu + cu^2}\,du = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \dfrac{2cu + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C, & b^2 < 4ac \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln\left|\dfrac{2cu + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cu + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right| + C, & b^2 > 4ac \end{cases}$$

15. $$\int \frac{u}{a + bu + cu^2}\,du = \frac{1}{2c}\left(\ln|a + bu + cu^2| - b \int \frac{1}{a + bu + cu^2}\,du\right)$$

Integrales con la forma $\sqrt{a + bu}$

16. $$\int u^n \sqrt{a + bu}\,du = \frac{2}{b(2n + 3)}\left[u^n (a + bu)^{3/2} - na \int u^{n-1}\sqrt{a + bu}\,du\right]$$

17. $$\int \frac{1}{u\sqrt{a + bu}}\,du = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\dfrac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}}\right| + C, & a > 0 \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\dfrac{a + bu}{-a}} + C, & a < 0 \end{cases}$$

18. $$\int \frac{1}{u^n\sqrt{a + bu}}\,du = \frac{-1}{a(n - 1)}\left[\frac{\sqrt{a + bu}}{u^{n-1}} + \frac{(2n - 3)b}{2} \int \frac{1}{u^{n-1}\sqrt{a + bu}}\,du\right],\ n \neq 1$$

19. $$\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a + bu} + a \int \frac{1}{u\sqrt{a + bu}}\,du$$

20. $$\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u^n}\,du = \frac{-1}{a(n - 1)}\left[\frac{(a + bu)^{3/2}}{u^{n-1}} + \frac{(2n - 5)b}{2} \int \frac{\sqrt{a + bu}}{u^{n-1}}\,du\right],\ n \neq 1$$

21. $$\int \frac{u}{\sqrt{a + bu}}\,du = \frac{-2(2a - bu)}{3b^2}\sqrt{a + bu} + C$$

22. $$\int \frac{u^n}{\sqrt{a + bu}}\,du = \frac{2}{(2n + 1)b}\left(u^n\sqrt{a + bu} - na \int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a + bu}}\,du\right)$$

Integrales con la forma $a^2 \pm u^2$, $a > 0$

23. $$\int \frac{1}{a^2 + u^2}\,du = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$$

24. $$\int \frac{1}{u^2 - a^2}\,du = -\int \frac{1}{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C$$

25. $$\int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^n}\,du = \frac{1}{2a^2(n - 1)}\left[\frac{u}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + (2n - 3)\int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}}\,du\right],\ n \neq 1$$

Integrales con la forma $\sqrt{u^2 \pm a^2}$, $a > 0$

26. $$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C$$

27. $$\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{8}\left[u(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - a^4 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right] + C$$

28. $$\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + C$$

29. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \operatorname{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2}\,du = \frac{-\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 + a^2}}\,du = \frac{-1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\,du = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = \mp\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}}\,du = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$

Integrales con la forma $\sqrt{a^2 - u^2},\ a > 0$

37. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \operatorname{arcsen}\frac{u}{a}\right) + C$

38. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{8}\left[u(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + a^4 \operatorname{arcsen}\frac{u}{a}\right] + C$

39. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

40. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\,du = \frac{-\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$

41. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \frac{-1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \frac{1}{2}\left(-u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \operatorname{arcsen}\frac{u}{a}\right) + C$

44. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \frac{-\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2 - u^2)^{3/2}}\,du = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

Integrales con la forma sen u o cos u

46. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$

47. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$

48. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2}(u - \operatorname{sen} u \cos u) + C$

49. $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}(u + \operatorname{sen} u \cos u) + C$

50. $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$

51. $\int \cos^n u\, du = \frac{\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$

52. $\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$

53. $\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

54. $\int u^n \operatorname{sen} u\, du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1} \cos u\, du$

55. $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1} \operatorname{sen} u\, du$

56. $\int \frac{1}{1 \pm \operatorname{sen} u}\, du = \tan u \mp \sec u + C$

57. $\int \frac{1}{1 \pm \cos u}\, du = -\cot u \pm \csc u + C$

58. $\int \frac{1}{\operatorname{sen} u \cos u}\, du = \ln|\tan u| + C$

Integrales con la forma tan u, cot u, sec u, csc u

59. $\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + C$

60. $\int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

61. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

62. $\int \csc u\, du = \ln|\csc u - \cot u| + C \quad \text{o} \quad \int \csc u\, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$

63. $\int \tan^2 u\, du = -u + \tan u + C$

64. $\int \cot^2 u\, du = -u - \cot u + C$

65. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

66. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

67. $\int \tan^n u\, du = \frac{\tan^{n-1} u}{n-1} - \int \tan^{n-2} u\, du, \ n \neq 1$

68. $\int \cot^n u\, du = -\frac{\cot^{n-1} u}{n-1} - \int (\cot^{n-2} u)\, du, \ n \neq 1$

69. $\int \sec^n u\, du = \frac{\sec^{n-2} u \tan u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du, \ n \neq 1$

70. $\int \csc^n u\, du = -\frac{\csc^{n-2} u \cot u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du, \ n \neq 1$

71. $\int \frac{1}{1 \pm \tan u}\, du = \frac{1}{2}\left(u \pm \ln|\cos u \pm \operatorname{sen} u|\right) + C$

72. $\int \frac{1}{1 \pm \cot u}\, du = \frac{1}{2}\left(u \mp \ln|\operatorname{sen} u \pm \cos u|\right) + C$

73. $\int \frac{1}{1 \pm \sec u}\, du = u + \cot u \mp \csc u + C$

74. $\int \frac{1}{1 \pm \csc u}\, du = u - \tan u \pm \sec u + C$

Integrales con funciones trigonométricas inversas

75. $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} u\, du = u \operatorname{arcsen} u + \sqrt{1-u^2} + C$

76. $\displaystyle\int \arccos u\, du = u \arccos u - \sqrt{1-u^2} + C$

77. $\displaystyle\int \arctan u\, du = u \arctan u - \ln\sqrt{1+u^2} + C$

78. $\displaystyle\int \operatorname{arccot} u\, du = u \operatorname{arccot} u + \ln\sqrt{1+u^2} + C$

79. $\displaystyle\int \operatorname{arcsec} u\, du = u \operatorname{arcsec} u - \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C$

80. $\displaystyle\int \operatorname{arccsc} u\, du = u \operatorname{arccsc} u + \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C$

Integrales con la forma e^u

81. $\displaystyle\int e^u\, du = e^u + C$

82. $\displaystyle\int ue^u\, du = (u-1)e^u + C$

83. $\displaystyle\int u^n e^u\, du = u^n e^u - n\int u^{n-1}e^u\, du$

84. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^u}\, du = u - \ln(1+e^u) + C$

85. $\displaystyle\int e^{au} \operatorname{sen} bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

86. $\displaystyle\int e^{au} \cos bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C$

Integrales con la forma $\ln u$

87. $\displaystyle\int \ln u\, du = u(-1 + \ln u) + C$

88. $\displaystyle\int u \ln u\, du = \frac{u^2}{4}(-1 + 2\ln u) + C$

89. $\displaystyle\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[-1 + (n+1)\ln u] + C, \;\; n \neq -1$

90. $\displaystyle\int (\ln u)^2\, du = u\left[2 - 2\ln u + (\ln u)^2\right] + C$

91. $\displaystyle\int (\ln u)^n\, du = u(\ln u)^n - n\int (\ln u)^{n-1}\, du$

Integrales con funciones hiperbólicas

92. $\displaystyle\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

93. $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

94. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

95. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

96. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

97. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

Integrales con funciones hiperbólicas inversas (en forma logarítmica)

98. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$

99. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

100. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C$

Soluciones de los ejercicios impares

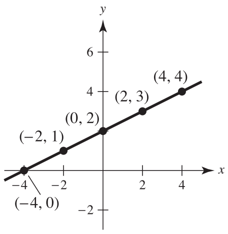
Capítulo P

Sección P.1 (página 8)

1. *b* **2.** *d* **3.** *a* **4.** *c*

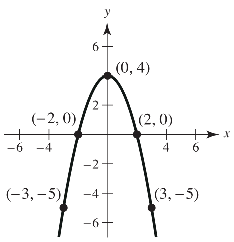
5. Las respuestas varían.

x	-4	-2	0	2	4
y	0	1	2	3	4



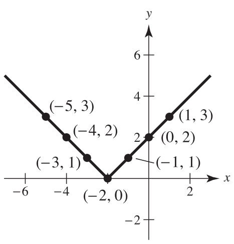
7. Las respuestas varían.

x	-3	-2	0	2	3
y	-5	0	4	0	-5



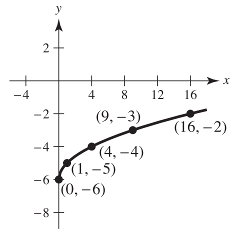
9. Las respuestas varían.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	3	2	1	0	1	2	3



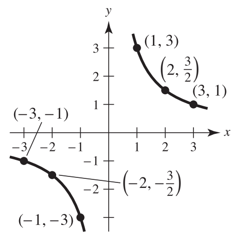
11. Las respuestas varían.

x	0	1	4	9	16
y	-6	-5	-4	-3	-2



13. Las respuestas varían.

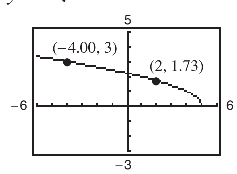
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	$-\frac{3}{2}$	-3	Indef.	3	$\frac{3}{2}$	1



15.

Xmín = –5
Xmáx = 4
Xscl = 1
Ymín = –5
Ymáx = 8
Yscl = 1

17. $y = \sqrt{5 - x}$



a) $y \approx 1.73$ *b*) $x = -4$

19. $(0, -5), \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ **21.** $(0, -2), (-2, 0), (1, 0)$

23. $(0, 0), (4, 0), (-4, 0)$ **25.** $(4, 0)$ **27.** $(0, 0)$

29. Simétrica respecto al eje *y*

31. Simétrica respecto al eje *x*

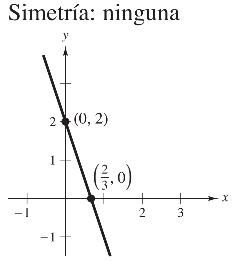
33. Simétrica respecto al origen **35.** No hay simetría

37. Simétrica respecto al origen

39. Simétrica respecto al eje *y*

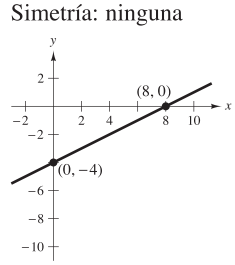
41. $y = 2 - 3x$

Simetría: ninguna

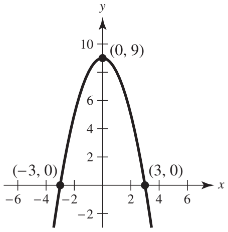


43. $y = \frac{1}{2}x - 4$

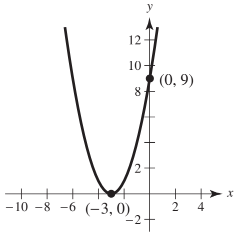
Simetría: ninguna



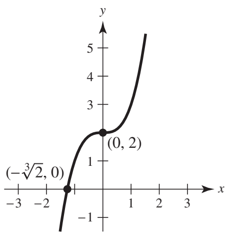
45. $y = 9 - x^2$
Simetría: respecto al eje y



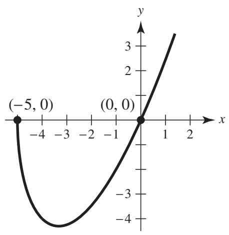
47. $y = (x + 3)^2$
Simetría: ninguna



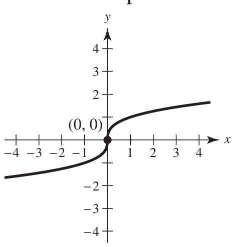
49. $y = x^3 + 2$
Simetría: ninguna



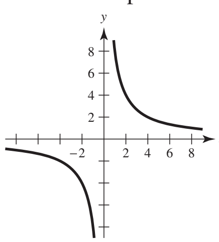
51. $y = x\sqrt{x + 5}$
Simetría: ninguna



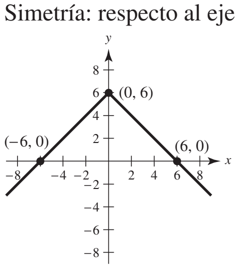
53. $x = y^3$
Simetría: respecto al origen



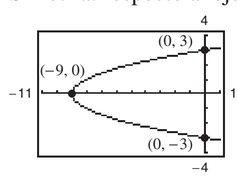
55. $y = 8/x$
Simetría: respecto al origen



57. $y = 6 - |x|$
Simetría: respecto al eje y



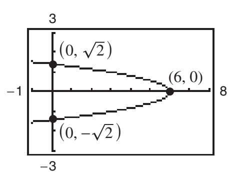
59. $y_1 = \sqrt{x + 9}$
$y_2 = -\sqrt{x + 9}$
Simetría: respecto al eje x



61. $y_1 = \sqrt{\dfrac{6 - x}{3}}$

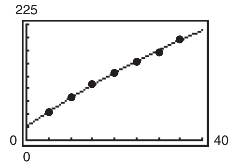
$y_2 = -\sqrt{\dfrac{6 - x}{3}}$

Simetría: respecto al eje x



63. $(3, 5)$ **65.** $(-1, 5), (2, 2)$ **67.** $(-1, -2), (2, 1)$
69. $(-1, -1), (0, 0), (1, 1)$
71. $(-1, -5), (0, -1), (2, 1)$ **73.** $(-2, 2), \left(-3, \sqrt{3}\right)$

75. *a*) $y = -0.027t^2 + 5.73t + 26.9$
b)



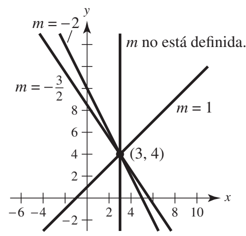
El modelo es un buen ajuste para los datos.

c) 212.9

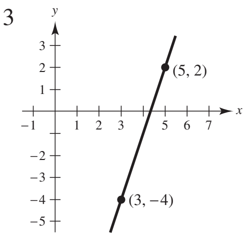
77. $x \approx 3\,133$ unidades **79.** $y = (x + 4)(x - 3)(x - 8)$
81. *a*) Demostración *b*) Demostración
83. Falso. $(4, -5)$ no es un punto de la gráfica de $x = y^2 - 29$.
85. Verdadero **87.** $x^2 + (y - 4)^2 = 4$

Sección P.2 (página 16)

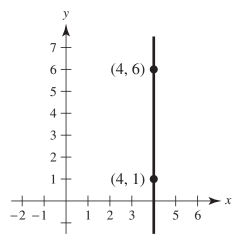
1. $m = 1$ **3.** $m = 0$ **5.** $m = -12$
7.



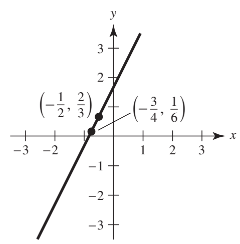
9. $m = 3$



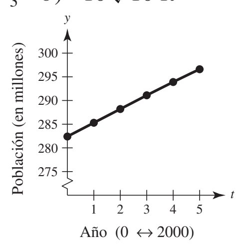
11. m no está definida.



13. $m = 2$

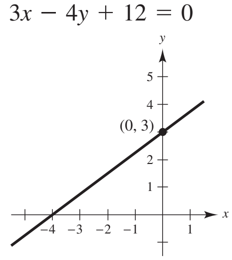


15. $(0, 2), (1, 2), (5, 2)$ **17.** $(0, 10), (2, 4), (3, 1)$
19. *a*) $\frac{1}{3}$ *b*) $10\sqrt{10}$ ft
21. *a*)

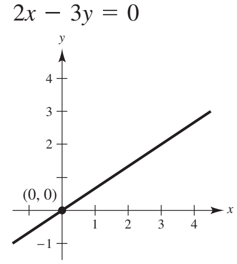


b) Menor rapidez de crecimiento de la población de 2004 a 2005.

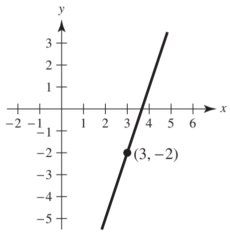
23. $m = 4, (0, -3)$
25. $m = -\frac{1}{5}, (0, 4)$ **27.** m no está definida, no tiene intersección con y
29. $3x - 4y + 12 = 0$



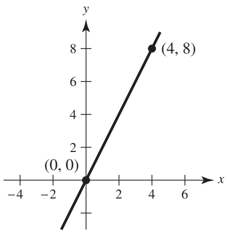
31. $2x - 3y = 0$



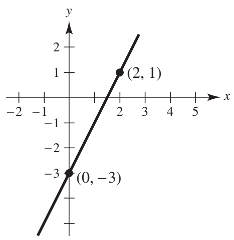
33. $3x - y - 11 = 0$



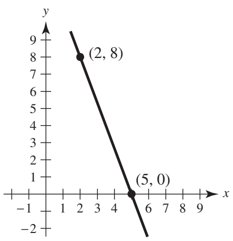
35. $2x - y = 0$



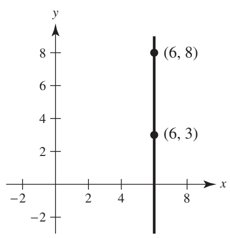
37. $2x - y - 3 = 0$



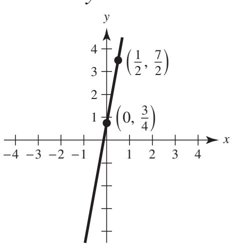
39. $8x + 3y - 40 = 0$



41. $x - 6 = 0$

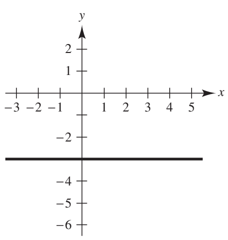


43. $22x - 4y + 3 = 0$

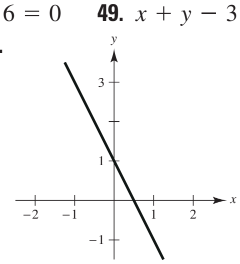


45. $x - 3 = 0$ **47.** $3x + 2y - 6 = 0$ **49.** $x + y - 3 = 0$

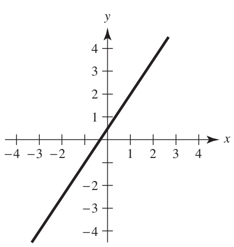
51.



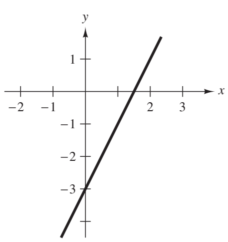
53.



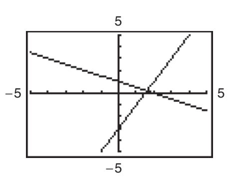
55.



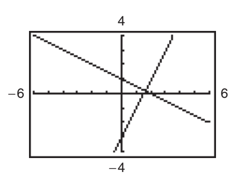
57.



59. *a*)



b)



Las rectas en *a*) no parecen perpendiculares, pero lo son en *b*) debido a que se utiliza una configuración cuadrada. Las rectas son perpendiculares.

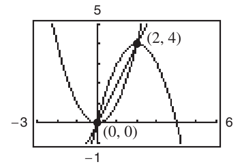
61. *a*) $x + 7 = 0$ *b*) $y + 2 = 0$

63. *a*) $2x - y - 3 = 0$ *b*) $x + 2y - 4 = 0$

65. *a*) $40x - 24y - 9 = 0$ *b*) $24x + 40y - 53 = 0$

67. $V = 250t - 150$ **69.** $V = -1\,600t + 30\,000$

71. $y = 2x$



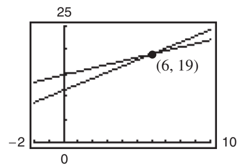
73. No son colineales, porque $m_1 \neq m_2$

75. $\left(0, \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right)$ **77.** $\left(b, \dfrac{a^2 - b^2}{c}\right)$

79. $5F - 9C - 160 = 0$; $72°\text{F} \approx 22.2°\text{C}$

81. *a*) $W_1 = 14.50 + 0.75x$, $W_2 = 11.20 + 1.30x$

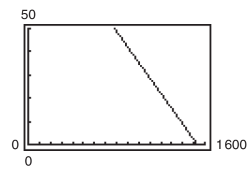
b)



c) Cuando se producen 6 unidades, el salario de ambas opciones es de \$19.00 por hora. Seleccionar la opción 1 si se producen 6 unidades. Seleccionar la opción 2 si se producen más de 6 unidades.

83. *a*) $x = (1\,530 - p)/15$

b)



45 unidades

c) 49 unidades

85. $12y + 5x - 169 = 0$ **87.** 2 **89.** $(5\sqrt{2})/2$ **91.** $2\sqrt{2}$

93. Demostración **95.** Demostración **97.** Demostración **99.** Verdadero

Sección P.3 (página 27)

1. *a*) Dominio de f: $[-4, 4]$; rango de f: $[-3, 5]$
Dominio de g: $[-3, 3]$; rango de g: $[-4, 4]$
b) $f(-2) = -1$; $g(3) = -4$
c) $x = -1$ *d*) $x = 1$ *e*) $x = -1, x = 1$ y $x = 2$

3. *a*) -4 *b*) -25 *c*) $7b - 4$ *d*) $7x - 11$

5. *a*) 5 *b*) 0 *c*) 1 *d*) $4 + 2t - t^2$

7. *a*) 1 *b*) 0 *c*) $-\frac{1}{2}$ **9.** $3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2$, $\Delta x \neq 0$

11. $\left(\sqrt{x-1} - x + 1\right)/[(x-2)(x-1)]$
$= -1/\left[\sqrt{x-1}\left(1 + \sqrt{x-1}\right)\right]$, $x \neq 2$

13. Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $[0, \infty)$

15. Dominio: $[0, \infty)$; rango: $[0, \infty)$

17. Dominio: Todos los números reales t tales que $t \neq 4n + 2$, donde n es un entero; rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

19. Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

21. Dominio: $[0, 1]$

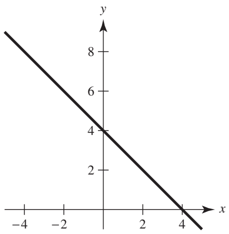
23. Dominio: Todos los números reales x tales que $x \neq 2n\pi$, donde n es un entero

25. Dominio: $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

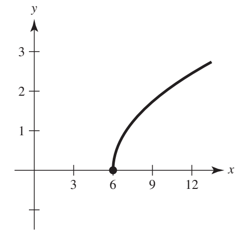
27. *a*) -1 *b*) 2 *c*) 6 *d*) $2t^2 + 4$
Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(-\infty, 1) \cup [2, \infty)$

29. *a*) 4 *b*) 0 *c*) -2 *d*) $-b^2$
Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

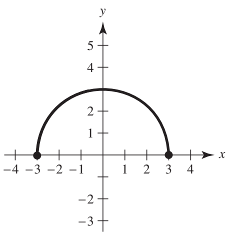
31. $f(x) = 4 - x$
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $(-\infty, \infty)$



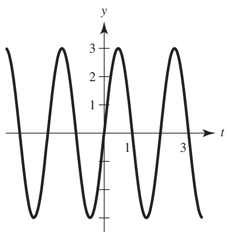
33. $h(x) = \sqrt{x - 6}$
Dominio: $[6, \infty)$
Rango: $[0, \infty)$



35. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
Dominio: $[-3, 3]$
Rango: $[0, 3]$



37. $g(t) = 3 \text{ sen } \pi t$
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-3, 3]$



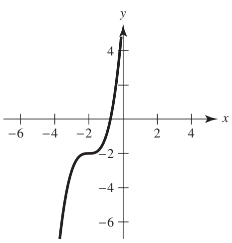
39. El estudiante viaja $\frac{1}{2}$ milla/minuto durante los primeros 4 minutos, se detiene por los siguientes 2 minutos y viaja 1 milla/minuto durante los últimos 4 minutos.

41. y no es una función de x. **43.** y es una función de x.

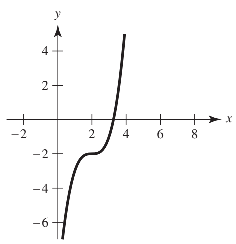
45. y no es una función de x. **47.** y no es una función de x.

49. *d* **50.** *b* **51.** *c* **52.** *a* **53.** *e* **54.** *g*

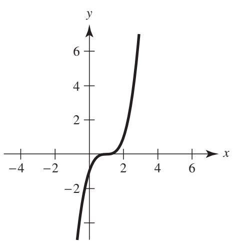
55. *a*)



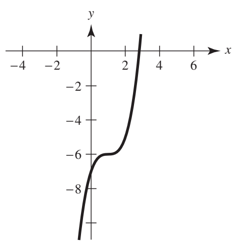
b)



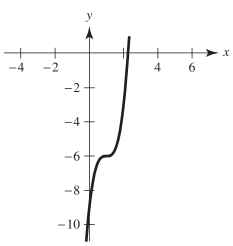
c)



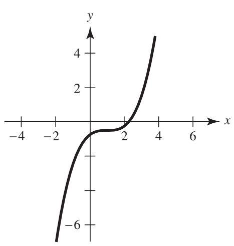
d)



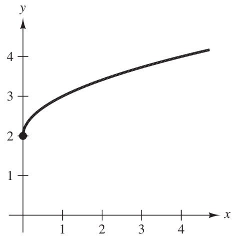
e)



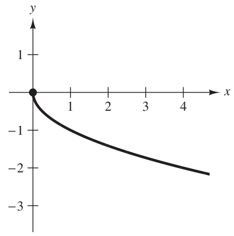
f)



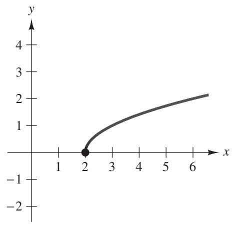
57. *a*) Traslación vertical



b) Reflexión alrededor del eje x



c) Traslación horizontal



59. *a*) 0 *b*) 0 *c*) -1 *d*) $\sqrt{15}$
e) $\sqrt{x^2 - 1}$ *f*) $x - 1\ (x \geq 0)$

61. $(f \circ g)(x) = x$; dominio: $[0, \infty)$
$(g \circ f)(x) = |x|$; dominio: $(-\infty, \infty)$
No, sus dominios son diferentes.

63. $(f \circ g)(x) = 3/(x^2 - 1)$; dominio: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$
$(g \circ f)(x) = (9/x^2) - 1$; dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
No

65. *a*) 4 *b*) -2
c) Indefinida. La gráfica de g no existe en $x = -5$.
d) 3 *e*) 2
f) Indefinida. La gráfica de f no existe en $x = -4$.

67. Las respuestas varían.
Ejemplo: $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x - 2$; $h(x) = 2x$

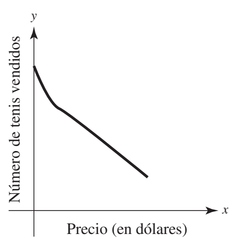
69. Par **71.** Impar **73.** *a*) $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ *b*) $\left(\frac{3}{2}, -4\right)$

75. f es par. g no es ni par ni impar. h es impar.

77. $f(x) = -5x - 6, -2 \leq x \leq 0$ **79.** $y = -\sqrt{-x}$

81. Las respuestas varían.
Ejemplo de respuesta:

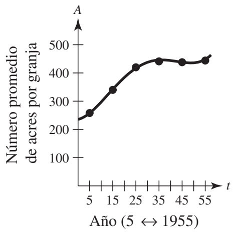
83. Las respuestas varían.
Ejemplo de respuesta:



85. $c = 25$

87. *a*) $T(4) = 16°\text{C}, T(15) \approx 23°\text{C}$
b) Los cambios en la temperatura ocurren 1 hora más tarde.
c) Las temperaturas son 1° más bajas.

89. *a)*



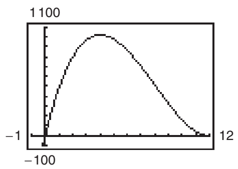
b) $A(20) \approx 384$ acres/granja

91. $f(x) = |x| + |x-2| = \begin{cases} 2x-2, & \text{si } x \geq 2 \\ 2, & \text{si } 0 < x < 2 \\ -2x+2, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

93. Demostración **95.** Demostración

97. *a)* $V(x) = x(24-2x)^2,\ 0 < x < 12$

b)



$4 \times 16 \times 16$ cm

c)

Altura, x	*Longitud y ancho*	*Volumen, V*
1	$24-2(1)$	$1[24-2(1)]^2 = 484$
2	$24-2(2)$	$2[24-2(2)]^2 = 800$
3	$24-2(3)$	$3[24-2(3)]^2 = 972$
4	$24-2(4)$	$4[24-2(4)]^2 = 1\,024$
5	$24-2(5)$	$5[24-2(5)]^2 = 980$
6	$24-2(6)$	$6[24-2(6)]^2 = 864$

Las dimensiones de la caja que proporcionan el volumen máximo son $4 \times 16 \times 16$ cm.

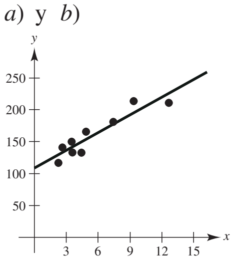
99. Falso. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(-1) = f(1)$.

101. Verdadero **103.** Problema Putnam A1, 1988

Sección P.4 (página 34)

1. Trigonométrica **3.** Sin relación

5. *a)* y *b)*

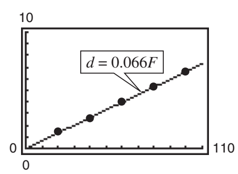


Lineal aproximadamente

c) 136

7. *a)* $d = 0.066F$

b)

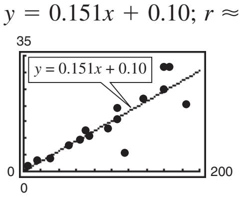


El modelo ajusta bien.

c) 3.63 cm

9. *a)* $y = 0.151x + 0.10;\ r \approx 0.880$

b)

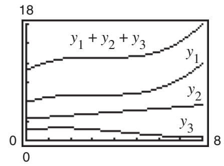


c) Un mayor consumo de energía per cápita en un país tiende a estar relacionado con un mayor producto interno bruto per cápita. Los cuatro países que más difieren del modelo lineal son Venezuela, Corea del Sur, Hong Kong y Reino Unido.

d) $y = 0.155x + 0.22;\ r \approx 0.984$

11. *a)* $y_1 = 0.04040t^3 - 0.3695t^2 + 1.123t + 5.88$
$y_2 = 0.264t + 3.35$
$y_3 = 0.01439t^3 - 0.1886t^2 + 0.476t + 1.59$

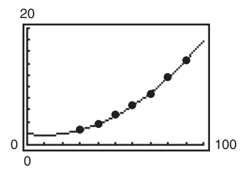
b) $y_1 + y_2 + y_3 = 0.05479t^3 - 0.5581t^2 + 1.863t + 10.82$



Alrededor de 47.5 centavos/milla

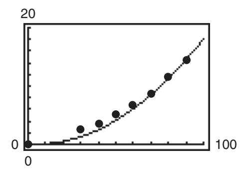
13. *a)* $t = 0.002s^2 - 0.04s + 1.9$

b)



c) De acuerdo con el modelo, los tiempos requeridos para alcanzar velocidades menores de 20 millas por hora son todos casi los mismos.

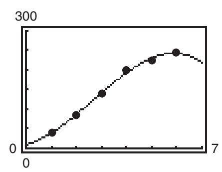
d) $t = 0.002s^2 + 0.02s + 0.1$



e) No. De la gráfica en el apartado *b)* se observa que el modelo del apartado *a)* se acerca a los datos más que el modelo mostrado en *d)*.

15. *a)* $y = -1.806x^3 + 14.58x^2 + 16.4x + 10$

b)

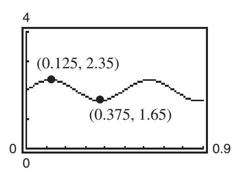


c) 214 hp

17. *a)* Sí. Al tiempo *t* hay uno y solo un desplazamiento *y*.

b) Amplitud: 0.35; periodo: 0.5 *c)* $y = 0.35\ \text{sen}(4\pi t) + 2$

d)



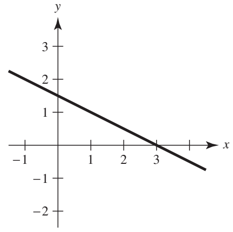
El modelo parece ajustarse bien a los datos.

19. Las respuestas varían. **21.** Problema Putnam A2, 2004

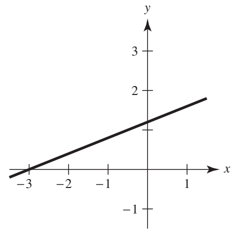
Ejercicios de repaso para el capítulo P (página 37)

1. $\left(\frac{8}{5}, 0\right), (0, -8)$ **3.** $(3, 0), \left(0, \frac{3}{4}\right)$ **5.** Simetría respecto al eje y

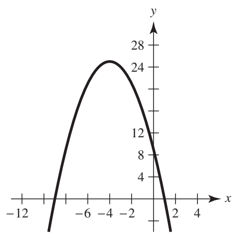
7.



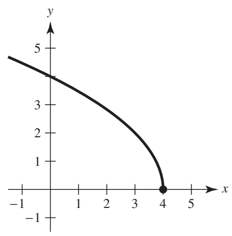
9.



11.



13.

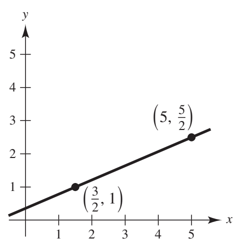


15.

Xmín = –5
Xmáx = 5
Xscl = 1
Ymín = –30
Ymáx = 10
Yscl = 5

17. $(-2, 3)$ **19.** $y = x^3 - 16x$

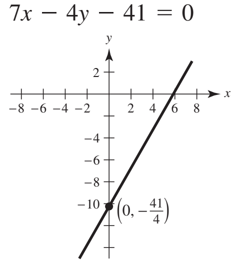
21.



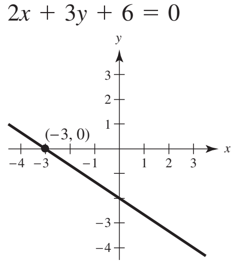
$m = \frac{3}{7}$

23. $t = \frac{1}{5}$

25. $y = \frac{7}{4}x - \frac{41}{4}$ o
$7x - 4y - 41 = 0$



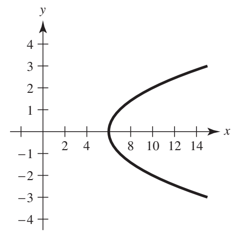
27. $y = -\frac{2}{3}x - 2$ o
$2x + 3y + 6 = 0$



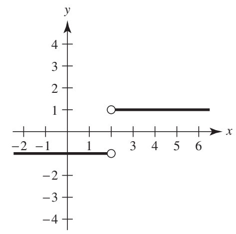
29. *a*) $7x - 16y + 101 = 0$ *b*) $5x - 3y + 30 = 0$
c) $5x + 3y = 0$ *d*) $x + 3 = 0$

31. $V = 12\,500 - 850t$; \$9 950

33. No es función



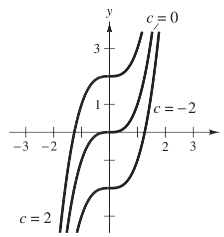
35. Es función



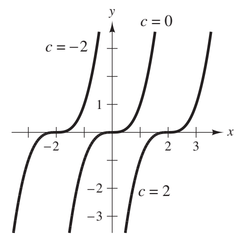
37. *a*) Indefinida *b*) $-1/(1 + \Delta x), \Delta x \neq 0, -1$

39. *a*) Dominio: $[-6, 6]$; rango: $[0, 6]$
b) Dominio: $(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$; rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
c) Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(-\infty, \infty)$

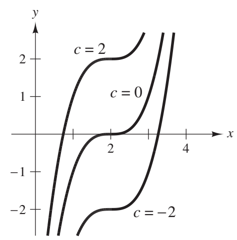
41. *a*)



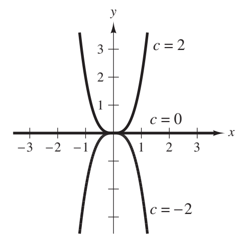
b)



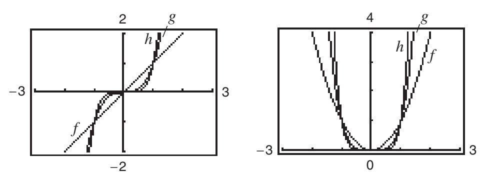
c)



d)



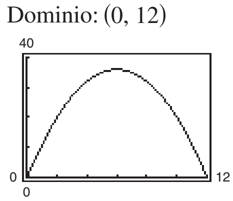
43. *a*)



Todas las gráficas pasan por el origen. Las gráficas de potencias impares de x son simétricas con respecto al origen y las gráficas de potencias pares de x son simétricas con respecto al eje y. Conforme las potencias se incrementan las gráficas se hacen más planas en el intervalo $-1 < x < 1$. Las gráficas de estas ecuaciones con potencias pares se extienden en los cuadrantes I y II.

b) La gráfica de $y = x^7$ debe pasar por el origen y por los cuadrantes I y III. Debe ser simétrica con respecto al origen y bastante plana en el intervalo (–1, 1). La gráfica $y = x^8$ debe pasar por el origen y por los cuadrantes I y II. Debe ser simétrica con respecto al eje y bastante plana en el intervalo (–1, 1).

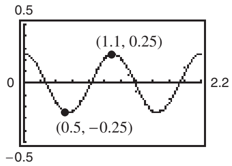
45. *a*) $A = x(12 - x)$
b) Dominio: (0, 12)



c) Área máxima:
36 pulg^2; 6×6 pulg.

47. *a*) Grado mínimo: 3; coeficiente dominante: negativo
b) Grado mínimo: 4; coeficiente dominante: positivo
c) Grado mínimo: 2; coeficiente dominante: negativo
d) Grado mínimo: 5; coeficiente dominante: positivo

49. *a*) Sí. A cada tiempo t le corresponde uno y sólo un desplazamiento y.
b) Amplitud: 0.25; Periodo: 1.1 *c*) $y \approx \frac{1}{4}\cos(5.7t)$
d)

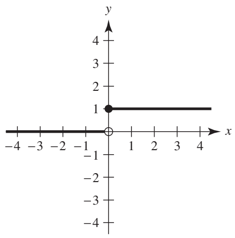


El modelo parece ajustarse a los datos.

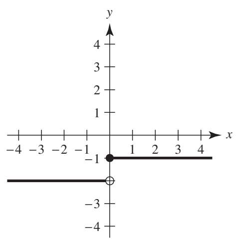
SP Solución de problemas (página 39)

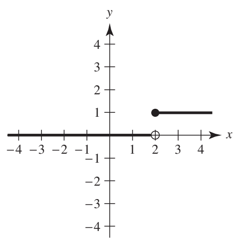
1. *a*) Centro: $(3, 4)$; radio: 5
b) $y = -\frac{3}{4}x$ *c*) $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$ *d*) $\left(3, -\frac{9}{4}\right)$

3.

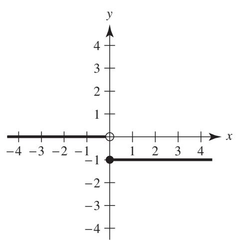


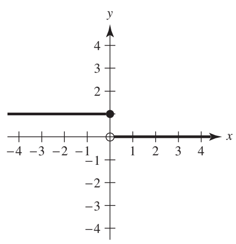
a) $H(x) - 2 = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$ *b*) $H(x - 2) = \begin{cases} 1, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$



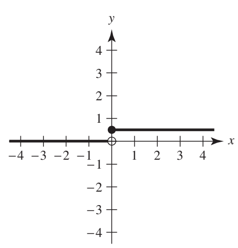


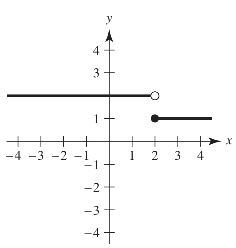
c) $-H(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ *d*) $H(-x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$



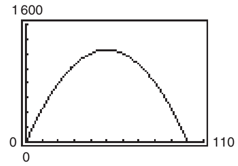


e) $\frac{1}{2}H(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ *f*) $-H(x - 2) + 2 = \begin{cases} 1, & x \geq 2 \\ 2, & x < 2 \end{cases}$





5. *a*) $A(x) = x[(100 - x)/2]$; Dominio: $(0, 100)$
b)



Las dimensiones de 50 m × 25 m dan el área máxima de 1 250 m^2.

c) 50 m × 25 m; Área $=$ 1 250 m^2

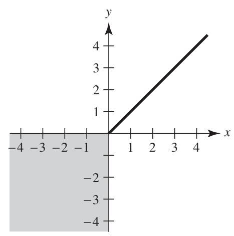
7. $T(x) = \left[2\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{(3 - x)^2 + 1}\right]/4$

9. *a*) 5, menor *b*) 3, mayor *c*) 4.1, menor
d) $4 + h$ *e*) 4; las respuestas varían.

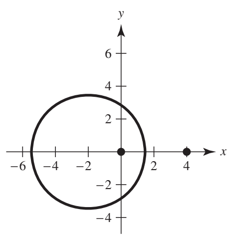
11. Al utilizar la definición de valor absoluto, se puede reescribir la ecuación como

$$\begin{cases} 2y, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Para $x > 0$ y $y > 0$, se tiene $2y = 2x \rightarrow y = x$. Para cualquier $x \leq 0$, y se tiene $y \leq 0$. De esta manera, la gráfica de $y + |y| = x + |x|$ es como sigue.

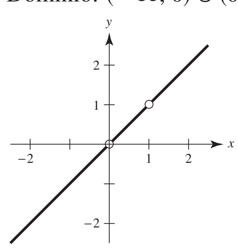


13. *a*) $\left(x + \dfrac{4}{k - 1}\right)^2 + y^2 = \dfrac{16k}{(k - 1)^2}$
b)



c) Conforme k se hace muy grande $\dfrac{4}{k - 1} \rightarrow 0$ y $\dfrac{16k}{(k - 1)^2} \rightarrow 0$.
El centro del círculo se acerca a (0, 0), y su radio se aproxima a 0.

15. *a*) Dominio: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
b) $f(f(x)) = \dfrac{x - 1}{x}$
Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$
c) $f(f(f(x))) = x$
Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$
d)



La gráfica no es un recta porque tiene huecos en $x = 0$ y $x = 1$.

Capítulo 1

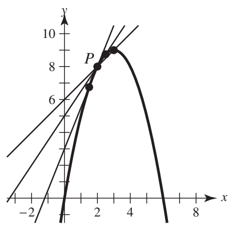
Sección 1.1 (página 47)

1. Al aplicar precálculo: 300 pies

3. Al aplicar cálculo: la pendiente de la recta tangente en $x = 2$ es 0.16.

5. *a*) Al aplicar precálculo: 10 unidades cuadradas
b) Cálculo: 5 unidades cuadradas

7. *a*)



b) 1; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$ *c*) 2. Utilizar puntos cercanos a *P*.

9. *a*) Área $\approx$ 10.417; Área $\approx$ 9.145 *b*) Utilizar más rectángulos.

11. *a*) 5.66 *b*) 6.11 *c*) Aumentar el número de segmentos.

Sección 1.2 (página 54)

1.

x	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	0.2041	0.2004	0.2000	0.2000	0.1996	0.1961

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-3x-4} \approx 0.2000 \left(\text{El límite real es } \frac{1}{5}.\right)$$

3.

x	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.2050	0.2042	0.2041	0.2041	0.2040	0.2033

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x} \approx 0.2041 \left(\text{El límite real es } \frac{1}{2\sqrt{6}}.\right)$$

5.

x	2.9	2.99	2.999
$f(x)$	−0.0641	−0.0627	−0.0625

x	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	−0.0625	−0.0623	−0.0610

$$\lim_{x\to 3} \frac{[1/(x+1)]-(1/4)}{x-3} \approx -0.0625 \left(\text{El límite real es } -\frac{1}{16}.\right)$$

7.

x	−0.1	−0.01	−0.001
$f(x)$	0.9983	0.99998	1.0000

x	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	1.0000	0.99998	0.9983

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \approx 1.0000 \text{ (El límite real es 1.)}$$

9.

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.2564	0.2506	0.2501	0.2499	0.2494	0.2439

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x^2+x-6} \approx 0.2500 \left(\text{El límite real es } \frac{1}{4}.\right)$$

11.

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.7340	0.6733	0.6673	0.6660	0.6600	0.6015

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^6-1} \approx 0.6666 \left(\text{El límite real es } \frac{2}{3}.\right)$$

13.

x	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	1.9867	1.9999	2.0000	2.0000	1.9999	1.9867

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \approx 2.0000 \text{ (El límite real es 2.)}$$

15. 1 **17.** 2

19. No existe el límite. La función tiende a 1 por la derecha de 2 pero tiende a −1 por la izquierda de 2.

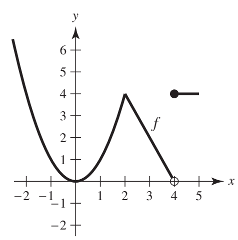
21. 0

23. No existe el límite. Cuando x tiende a 0, la función oscila entre 1 y −1.

25. *a*) 2
b) No existe el límite. La función tiende a 1 por la derecha de 1 pero tiende a 3.5 por la izquierda de 1.
c) No existe el valor. La función no está definida en $x = 4$.
d) 2

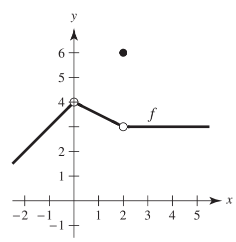
27. $\lim_{x\to c} f(x)$ existe en todos los puntos de la gráfica excepto en $c = -3$.

29.

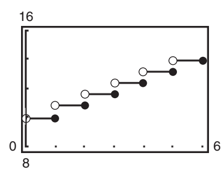


$\lim_{x\to c} f(x)$ existe en todos los puntos de la gráfica excepto en $c = 4$.

31.



33. *a*)



b)

t	3	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	4
C	11.57	12.36	12.36	12.36	12.36	12.36	12.36

$\lim_{t \to 3.5} C(t) = 12.36$

c)

t	2	2.5	2.9	3	3.1	3.5	4
C	10.78	11.57	11.57	11.57	12.36	12.36	12.36

No existe el límite porque los límites por la derecha y por la izquierda son diferentes.

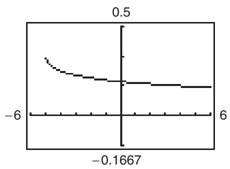
35. $\delta = 0.4$ **37.** $\delta = \frac{1}{11} \approx 0.091$

39. $L = 8$. Con $\delta = 0.01/3 \approx 0.0033$.

41. $L = 1$. Con $\delta = 0.01/5 = 0.002$.

43. 6 **45.** -3 **47.** 3 **49.** 0 **51.** 10 **53.** 2 **55.** 4

57.

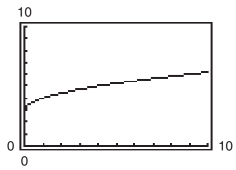


$\lim_{x \to 4} f(x) = \frac{1}{6}$

Dominio: $[-5, 4) \cup (4, \infty)$

La gráfica tiene un hueco en $x = 4$.

59.



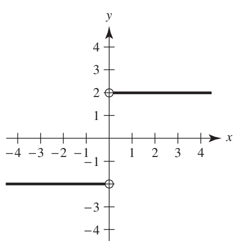
$\lim_{x \to 9} f(x) = 6$

Dominio: $[0, 9) \cup (9, \infty)$

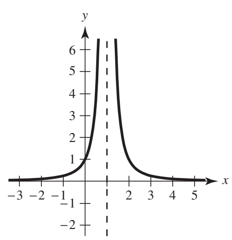
La gráfica tiene un hueco en $x = 9$.

61. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: cuando x tiende a 8 por cualquier lado, $f(x)$ se acerca arbitrariamente a 25.

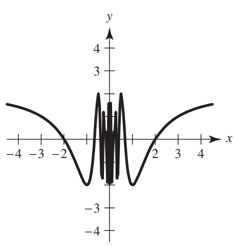
63. *i*) Los valores de f se aproximan a diferentes números cuando x tiende a c por diferentes lados de c.



ii) Los valores de f crecen o decrecen indefinidamente cuando x tiende a c.



iii) Los valores de f oscilan entre dos números fijos cuando x tiende a c.



65. *a*) $r = \dfrac{3}{\pi} \approx 0.9549$ cm

b) $\dfrac{5.5}{2\pi} \le r \le \dfrac{6.5}{2\pi}$, o aproximadamente $0.8754 < r < 1.0345$

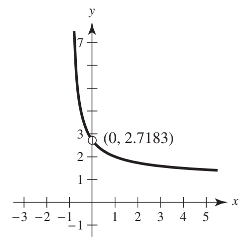
(c) $\lim_{r \to 3/\pi} 2\pi r = 6$; $\varepsilon = 0.5$; $\delta \approx 0.0796$

67.

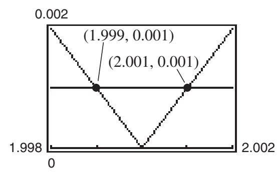
x	-0.001	-0.0001	-0.00001
$f(x)$	2.7196	2.7184	2.7183

x	0.00001	0.0001	0.001
$f(x)$	2.7183	2.7181	2.7169

$\lim_{x \to 0} f(x) \approx 2.7183$



69.



$\delta = 0.001$

$(1.999, 2.001)$

71. Falso. La existencia o no existencia de $f(x)$ en $x = c$ no influye en la existencia del límite de $f(x)$ cuando $x \to c$.

73. Falso. Ver el ejercicio 17.

75. Sí. Cuando x tiende a 0.25 por cualquiera de los lados, $\sqrt{x}$ se acerca arbitrariamente a 0.5.

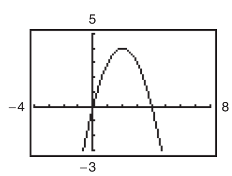
77. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} nx}{x} = n$

79 a 81. Demostraciones. **83.** Las respuestas varían.

85. Problema Putnam B1, 1986.

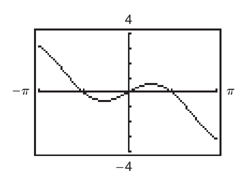
Sección 1.3 (página 67)

1.



a) 0 *b*) -5

3.



a) 0 *b*) ≈ 0.52 o $\pi/6$

5. 8 **7.** -1 **9.** 0 **11.** 7 **13.** 2 **15.** 1

17. 1/2 **19.** 1/5 **21.** 7 **23.** *a*) 4 *b*) 64 *c*) 64

25. *a*) 3 *b*) 2 *c*) 2 **27.** 1 **29.** 1/2 **31.** 1

33. 1/2 **35.** -1 **37.** *a*) 10 *b*) 5 *c*) 6 *d*) 3/2

39. *a*) 64 *b*) 2 *c*) 12 *d*) 8

41. *a*) -1 *b*) -2

$g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$ y $f(x) = x - 1$ coinciden excepto en $x = 0$.

43. *a)* 2 *b)* 0

$g(x) = \dfrac{x^3 - x}{x - 1}$ y $f(x) = x^2 + x$ coinciden excepto en $x = 1$.

45. -2

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ y $g(x) = x - 1$ coinciden excepto en $x = -1$.

47. 12

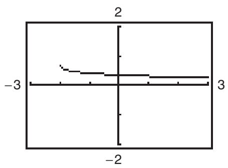
$f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ y $g(x) = x^2 + 2x + 4$ coinciden excepto en $x = 2$.

49. -1 **51.** $1/8$ **53.** $5/6$ **55.** $1/6$ **57.** $\sqrt{5}/10$

59. $-1/9$ **61.** 2 **63.** $2x - 2$

65. $1/5$ **67.** 0 **69.** 0 **71.** 0 **73.** 1 **75.** $3/2$

77.



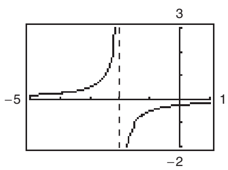
La gráfica tiene un hueco en $x = 0$.

Las respuestas varían. Ejemplo:

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.358	0.354	0.354	0.354	0.353	0.349

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \approx 0.354 \left(\text{El límite real es } \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.\right)$$

79.



La gráfica tiene un hueco en $x = 0$.

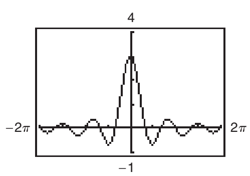
Las respuestas varían. Ejemplo:

x	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$	-0.263	-0.251	-0.250

x	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.250	-0.249	-0.238

$$\lim_{x\to 0} \frac{[1/(2+x)] - (1/2)}{x} \approx -0.250 \left(\text{El límite real es } -\frac{1}{4}.\right)$$

81.



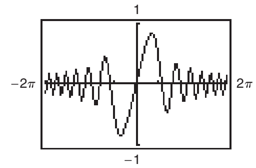
La gráfica tiene un hueco en $t = 0$.

Las respuestas varían. Ejemplo:

t	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
$f(t)$	2.96	2.9996	?	2.9996	2.96

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3t}{t} = 3$$

83.



La gráfica tiene un hueco en $x = 0$.

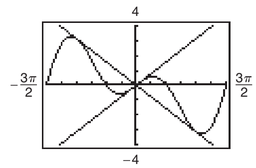
Las respuestas varían. Ejemplo:

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001	?	0.001	0.01	0.1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} = 0$$

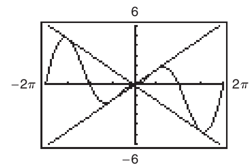
85. 3 **87.** $-1/(x + 3)^2$ **89.** 4

91.



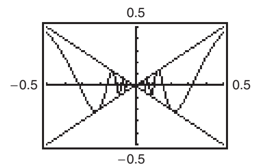
0

93.



0

95.



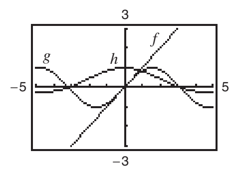
0

La gráfica tiene un hueco en $x = 0$.

97. f y g coinciden en todos los puntos, excepto en uno si c es un número real tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$.

99. Se obtiene una indeterminación cuando al evaluar un límite empleando sustitución directa se produce una fracción que no tiene significado, como $\frac{0}{0}$.

101.



Las magnitudes de $f(x)$ y $g(x)$ son aproximadamente iguales cuando x se encuentra cercana a 0. Por tanto, su relación es de 1 aproximadamente.

103. -64 pies/s (velocidad $=$ 64 pies/s) **105.** -29.4 m/s

107. Sea $f(x) = 1/x$ y $g(x) = -1/x$.

$\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existen. Sin embargo,

$$\lim_{x\to 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

y por tanto existe.

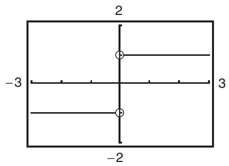
109 a 113. Demostraciones

115. Sea $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \geq 0 \\ -4, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} |f(x)| = \lim_{x\to 0} 4 = 4$

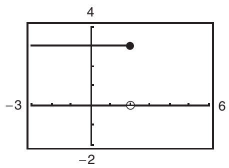
$\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe porque para $x < 0$, $f(x) = -4$ y para $x \geq 0$, $f(x) = 4$.

117. Falso. No existe el límite porque de la función tiende a 1 por la derecha de 0 y a -1 por la izquierda de 0. (Observar la siguiente gráfica.)



119. Verdadero.

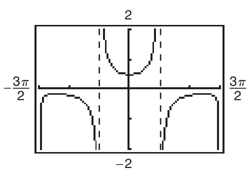
121. Falso. No existe el límite porque la función $f(x)$ tiende a 3 por la izquierda de 2 y a 0 por la derecha de 2. (Observar la siguiente gráfica.)



123. Demostración.

125. *a*) Todos los valores $x \neq 0, \dfrac{\pi}{2} + n\pi$

b)



El dominio no es obvio. El hueco en $x = 0$ no se ve de manera clara en la gráfica.

c) $\dfrac{1}{2}$ *d*) $\dfrac{1}{2}$

127. La calculadora no fue seleccionada en el modo de radianes.

Sección 1.4 (página 78)

1. *a*) 3 *b*) 3 *c*) 3; $f(x)$ es continua sobre $(-\infty, \infty)$.

3. *a*) 0 *b*) 0 *c*) 0; Discontinua en $x = 3$

5. *a*) -3 *b*) 3 *c*) No existe el límite.
Discontinua en $x = 2$

7. $\frac{1}{16}$ **9.** $\frac{1}{10}$

11. No existe el límite. La función decrece indefinidamente cuando x tiende a -3 por la izquierda.

13. -1 **15.** $-1/x^2$ **17.** $5/2$ **19.** 2

21. No existe el límite. La función decrece indefinidamente cuando x tiende a π por la izquierda y crece indefinidamente cuando x tiende a π por la derecha.

23. 8

25. No existe el límite. La función tiende a 5 por la izquierda de 3 pero tiende a 6 por la derecha de 3.

27. Discontinua en $x = \pm 2$

29. Discontinua en todos los enteros

31. Continua en $[-7, 7]$ **33.** Continua en $[-1, 4]$

35. Discontinuidad no removible en $x = 0$

37. Continua para todo número real x

39. Discontinuidades no removibles en $x = \pm 2$

41. Continua para todo número real x

43. Discontinuidad no removible en $x = 1$
Discontinuidad removible en $x = 0$

45. Continua para todo número real x

47. Discontinuidad removible en $x = -2$
Discontinuidad no removible en $x = 5$

49. Discontinuidad no removible en $x = -7$

51. Continua para todo número real x

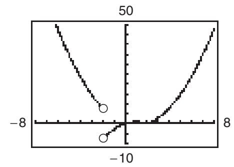
53. Discontinuidad no removible en $x = 2$

55. Continua para todo número real x

57. Discontinuidades no removibles en los múltiplos enteros de $\pi/2$

59. Discontinuidad no removible en todo entero

61.



$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

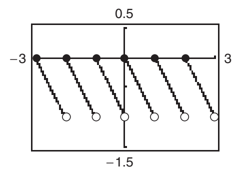
Discontinuidad en $x = -2$

63. $a = 7$ **65.** $a = 2$ **67.** $a = -1, b = 1$

69. Continua para todo número real x

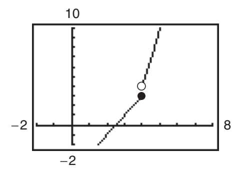
71. Discontinuidades no removibles en $x = \pm 1$

73.



Discontinuidad no removible en todo entero

75.

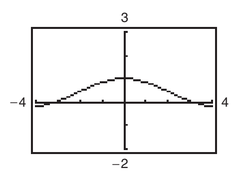


Discontinuidad no removible en $x = 4$

77. Continua en $(-\infty, \infty)$

79. Continua en los intervalos abiertos . . . $(-6, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, 6)$, . . .

81.



La gráfica tiene un hueco en $x = 0$. La gráfica parece continua, pero la función no es continua en $[-4, 4]$. A partir de la gráfica no resulta evidente que la función tiene una discontinuidad en $x = 0$.

83. Puesto que $f(x)$ es continua en el intervalo $[1, 2]$ y $f(1) = 37/12$ y $f(2) = -8/3$, por el teorema del valor intermedio existe un número real c en $[1, 2]$ tal que $f(c) = 0$.

85. Puesto que $f(x)$ es continua en el intervalo $[0, \pi]$ y $f(0) = -3$ y $f(\pi) \approx 8.87$, por el teorema del valor intermedio existe un número real c en $[0, \pi]$ tal que $f(c) = 0$.

87. 0.68, 0.6823 **89.** 0.56, 0.5636

91. $f(3) = 11$ **93.** $f(2) = 4$

95. *a*) El límite no existe en $x = c$.
b) La función no está definida en $x = c$.
c) El límite existe, pero no es igual al valor de la función en $x = c$.
d) El límite no existe en $x = c$.

97. Si f y g son continuas para todos los números reales entonces también lo es $f + g$ (teorema 1.11, parte 2). Sin embargo, f/g podría no ser continua si $g(x) = 0$. Por ejemplo, sean $f(x) = x$ y $g(x) = x^2 - 1$. Se cumple que f y g son continuas para todos los números reales, pero f/g no es continua en $x = \pm 1$.

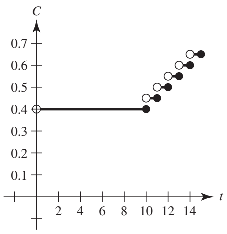
99. Verdadero

101. Falso. Una función racional se puede escribir como $P(x)/Q(x)$, donde P y Q son polinomios de grado m y n, respectivamente. Puede tener a lo más n discontinuidades.

103. $\lim\limits_{t\to 4^-} f(t) \approx 28$; $\lim\limits_{t\to 4^+} f(t) \approx 56$

Al final del día 3 la cantidad de cloro en la piscina es de 28 onzas, aproximadamente. Al comienzo del día 4, la cantidad de cloro en la piscina es de 56 onzas, aproximadamente.

105. $C = \begin{cases} 0.40, & 0 < t \le 10 \\ 0.40 + 0.05[\![t - 9]\!], & t > 10,\ t \text{ no es un entero} \\ 0.40 + 0.05(t - 10), & t > 10,\ t \text{ es un entero} \end{cases}$

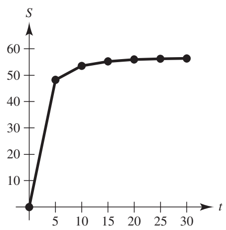


Hay una discontinuidad no removible en cada entero mayor o igual que 10.

107 a 109. Demostraciones

111. Las respuestas varían.

113. *a)*

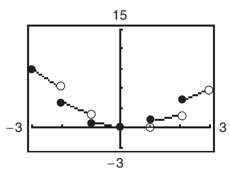


b) Al parecer existe una velocidad límite, posiblemente debido a la resistencia del aire.

115. $c = \left(-1 \pm \sqrt{5}\right)/2$

117. Dominio: $[-c^2, 0) \cup (0, \infty)$; Sea $f(0) = 1/(2c)$

119. $h(x)$ tiene una discontinuidad no removible en todo número entero, excepto en 0.



121. Problema Putnam B2, 1988

Sección 1.5 (página 88)

1. $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{x-4} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{1}{x-4} = -\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{(x-4)^2} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{1}{(x-4)^2} = \infty$

5. $\lim\limits_{x\to -2^+} 2\left|\dfrac{x}{x^2-4}\right| = \infty$, $\lim\limits_{x\to -2^-} 2\left|\dfrac{x}{x^2-4}\right| = \infty$

7. $\lim\limits_{x\to -2^+} \tan(\pi x/4) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^-} \tan(\pi x/4) = \infty$

9.

x	-3.5	-3.1	-3.01	-3.001
$f(x)$	0.31	1.64	16.6	167

x	-2.999	-2.99	-2.9	-2.5
$f(x)$	-167	-16.7	-1.69	-0.36

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \infty$

11.

x	-3.5	-3.1	-3.01	-3.001
$f(x)$	3.8	16	151	1 501

x	-2.999	-2.99	-2.9	-2.5
$f(x)$	$-1\,499$	-149	-14	-2.3

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \infty$

13. $x = 0$ **15.** $x = \pm 2$ **17.** No hay asíntota vertical.

19. $x = 2$, $x = -1$ **21.** $t = 0$ **23.** $x = -2, x = 1$

25. No hay asíntota vertical. **27.** No hay asíntota vertical.

29. $x = \frac{1}{2} + n$, n es un entero.

31. $t = n\pi$, n es un entero no cero.

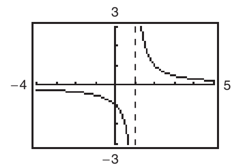
33. Discontinuidad no removible en $x = -1$

35. Asíntota vertical en $x = -1$ **37.** ∞ **39.** ∞

41. ∞ **43.** $-\frac{1}{5}$ **45.** $\frac{1}{2}$ **47.** $-\infty$ **49.** ∞ **51.** 0

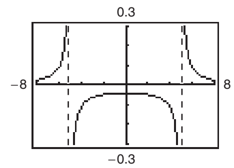
53. El límite no existe.

55.



$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty$

57.

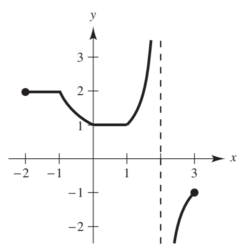


$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$

59. Las respuestas varían.

61. Las respuestas varían. Ejemplo: $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4x-12}$

63.



65. ∞

67. *a)* $\frac{1}{3}(200\pi)$ pies/s

b) 200π pies/s

c) $\lim\limits_{\theta\to(\pi/2)^-} [50\pi \sec^2 \theta] = \infty$

69. *a)* Dominio: $x > 25$

b)

x	30	40	50	60
y	150	66.667	50	42.857

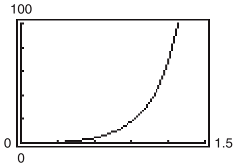
c) $\lim\limits_{x\to 25^+} \dfrac{25x}{x-25} = \infty$

Entre más se acerca x a las 25 millas/hora, más crece y.

71. *a)* $A = 50 \tan \theta - 50\theta$; Dominio: $(0, \pi/2)$

b)

θ	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
$f(\theta)$	0.47	4.21	18.0	68.6	630.1



c) $\lim_{\theta \to \pi/2^-} A = \infty$

73. Falso; sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$

75. Falso; sea $f(x) = \tan x$

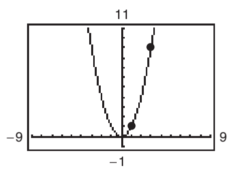
77. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^4}$, y sea $c = 0$. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$ y $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^4} = \infty$, pero $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^4} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^4} \right) = -\infty \neq 0$.

79. Dado $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$, sea $g(x) = 1$. Entonces por el teorema 1.15 se tiene $\lim_{x \to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.

81. Las respuestas varían.

Ejercicios de repaso para el capítulo 1 (página 91)

1. Al aplicar cálculo Estimación: 8.3



3.

x	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$	-1.0526	-1.0050	-1.0005

x	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.9995	-0.9950	-0.9524

La estimación del límite de $f(x)$, cuando x tiende a cero, es -1.00.

5. 5; Demostración **7.** -3; Demostración **9.** *a)* 4 *b)* 5 **11.** 16

13. $\sqrt{6} \approx 2.45$ **15.** $-\frac{1}{4}$ **17.** $\frac{1}{2}$ **19.** -1 **21.** 75

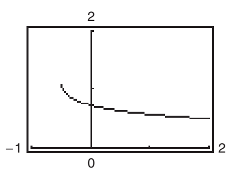
23. 0 **25.** $\sqrt{3}/2$ **27.** $-\frac{1}{2}$ **29.** $\frac{7}{12}$

31. *a)*

x	1.1	1.01	1.001	1.0001
$f(x)$	0.5680	0.5764	0.5773	0.5773

$\lim_{x \to 1^+} f(x) \approx 0.5773$

b)



La gráfica tiene un hueco en $x = 1$.
$\lim_{x \to 1^+} f(x) \approx 0.5774$

c) $\sqrt{3}/3$

33. -39.2 m/s **35.** -1 **37.** 0

39. No existe el límite. El límite cuando t tiende a 1 por la izquierda es 2, mientras que el límite cuando t tiende a 1 por la derecha es 1.

41. Continua para todo número real x

43. Discontinuidad no removible en todo número entero
Continua en $(k, k + 1)$ para todo entero k

45. Discontinuidad removible en $x = 1$
Continua en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

47. Discontinuidad no removible en $x = 2$
Continua en $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

49. Discontinuidad no removible en $x = -1$
Continua en $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

51. Discontinuidad no removible en todo número entero par
Continua en $(2k, 2k + 2)$ para todo entero k

53. $c = -\frac{1}{2}$ **55.** Demostración

57. *a)* -4 *b)* 4 *c)* No existe el límite.

59. $x = 0$ **61.** $x = 10$ **63.** $-\infty$ **65.** $\frac{1}{3}$

67. $-\infty$ **69.** $-\infty$ **71.** $\frac{4}{5}$ **73.** ∞

75. *a)* \$14 117.65 *b)* \$80 000.00 *c)* \$720 000.00 *d)* ∞

SP Solución de problemas (página 93)

1. *a)* Perímetro $\triangle PAO = 1 + \sqrt{(x^2 - 1)^2 + x^2} + \sqrt{x^4 + x^2}$
Perímetro $\triangle PBO = 1 + \sqrt{x^4 + (x - 1)^2} + \sqrt{x^4 + x^2}$

b)

x	4	2	1
Perímetro $\triangle PAO$	33.0166	9.0777	3.4142
Perímetro $\triangle PBO$	33.7712	9.5952	3.4142
$r(x)$	0.9777	0.9461	1.0000

x	0.1	0.01
Perímetro $\triangle PAO$	2.0955	2.0100
Perímetro $\triangle PBO$	2.0006	2.0000
$r(x)$	1.0475	1.0050

c) 1

3. *a)* Área (hexágono) $= (3\sqrt{3})/2 \approx 2.5981$
Área (círculo) $= \pi \approx 3.1416$
Área (círculo) $-$ Área (hexágono) ≈ 0.5435

b) $A_n = (n/2) \operatorname{sen} (2\pi/n)$

c)

n	6	12	24	48	96
A_n	2.5981	3.0000	3.1058	3.1326	3.1394

d) 3.1416 o π

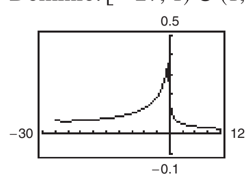
5. *a)* $m = -\frac{12}{5}$ *b)* $y = \frac{5}{12}x - \frac{169}{12}$

c) $m_x = \dfrac{-\sqrt{169 - x^2} + 12}{x - 5}$

d) $\frac{5}{12}$; Es igual a la pendiente de la recta encontrada en *b*).

7. *a)* Dominio: $[-27, 1) \cup (1, \infty)$

b)

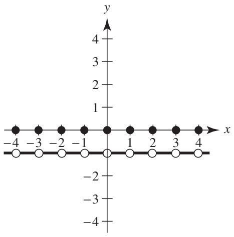


c) $\frac{1}{14}$ *d)* $\frac{1}{12}$

La gráfica tiene un hueco en $x = 1$.

9. *a)* g_1, g_4 *b)* g_1 *c)* g_1, g_3, g_4

11.



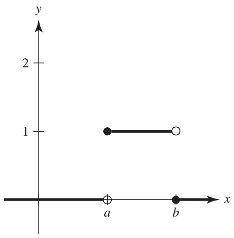
La gráfica tiene un salto en cada número entero.

a) $f(1) = 0,\ f(0) = 0,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -1,\ f(-2.7) = -1$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1,\ \lim\limits_{x\to 1/2} f(x) = -1$

c) Existe una discontinuidad en cada entero.

13. *a)*



b) *i)* $\lim\limits_{x\to a^+} P_{a,b}(x) = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to a^-} P_{a,b}(x) = 0$

iii) $\lim\limits_{x\to b^+} P_{a,b}(x) = 0$

iv) $\lim\limits_{x\to b^-} P_{a,b}(x) = 1$

c) Continua para todos los números reales positivos excepto a y b.

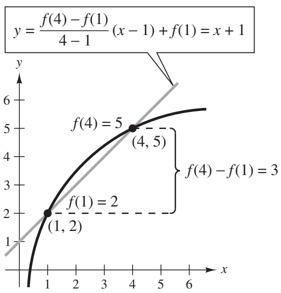
d) El área bajo la gráfica de U y por arriba del eje x tiene un valor de 1.

Capítulo 2

Sección 2.1 (página 103)

1. *a)* $m_1 = 0, m_2 = 5/2$ *b)* $m_1 = -5/2, m_2 = 2$

3.



5. $m = -5$ **7.** $m = 4$

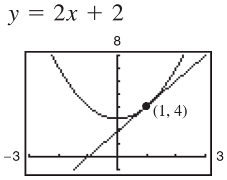
9. $m = 3$ **11.** $f'(x) = 0$ **13.** $f'(x) = -10$ **15.** $h'(s) = \frac{2}{3}$

17. $f'(x) = 2x + 1$ **19.** $f'(x) = 3x^2 - 12$

21. $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$ **23.** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$

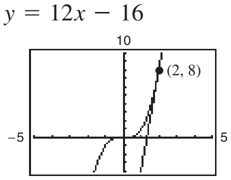
25. *a)* Recta tangente: $y = 2x + 2$

b)



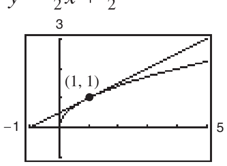
27. *a)* Recta tangente: $y = 12x - 16$

b)



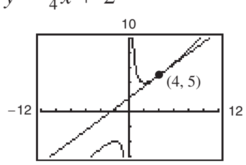
29. *a)* Recta tangente: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

b)



31. *a)* Recta tangente: $y = \frac{3}{4}x + 2$

b)

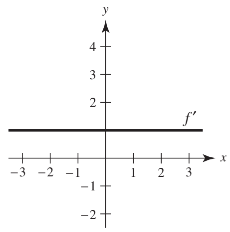


33. $y = 2x - 1$ **35.** $y = 3x - 2;\ y = 3x + 2$

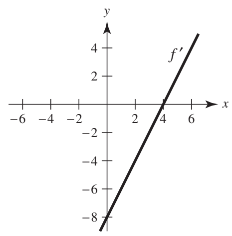
37. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ **39.** b **40.** d **41.** a **42.** c

43. $g(4) = 5;\ g'(4) = -\frac{5}{3}$

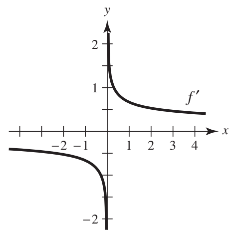
45.



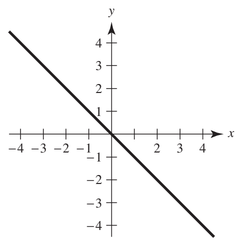
47.



49.



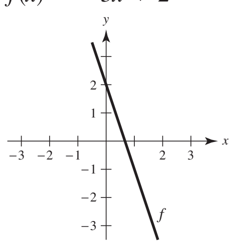
51. Las respuestas varían.
Ejemplo de respuesta:
$y = -x$



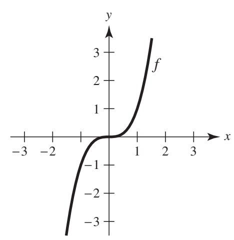
53. $f(x) = 5 - 3x$
$c = 1$

55. $f(x) = -x^2$
$c = 6$

57. $f(x) = -3x + 2$

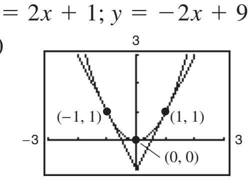


59. Las respuestas varían.
Ejemplo de respuesta: $f(x) = x^3$



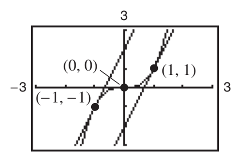
61. $y = 2x + 1;\ y = -2x + 9$

63. *a)*



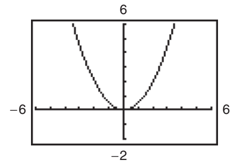
Para esta función las pendientes de las rectas tangentes son siempre distintas para diferentes valores de x.

b)



Para esta función las pendientes de las rectas tangentes son algunas veces la misma.

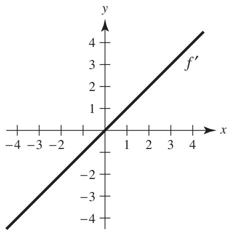
65. *a)*



$f'(0) = 0, f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, f'(1) = 1, f'(2) = 2$

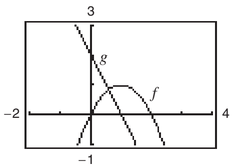
b) $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, f'(-1) = -1, f'(-2) = -2$

c)



d) $f'(x) = x$

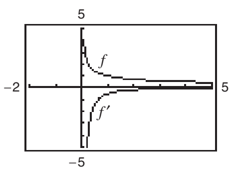
67.



$g(x) \approx f'(x)$

69. $f(2) = 4; f(2.1) = 3.99; f'(2) \approx -0.1$

71.



Cuando x tiende a infinito, la gráfica de f se aproxima a una recta de pendiente 0. Por tanto $f'(x)$ tiende a 0.

73. 6 **75.** 4 **77.** $g(x)$ no es derivable en $x = 0$.

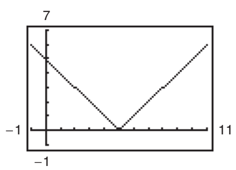
79. $f(x)$ no es derivable en $x = 6$.

81. $h(x)$ no es derivable en $x = -7$.

83. $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ **85.** $(-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$

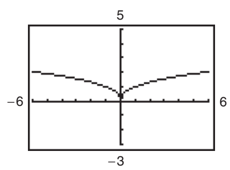
87. $(1, \infty)$

89.



$(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$

91.



$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

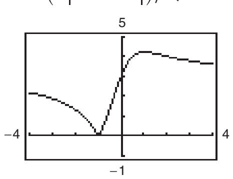
93. La derivada por la izquierda es -1 y la derivada por la derecha es 1, por tanto f no es derivable en $x = 1$.

95. Las derivadas por la izquierda y por la derecha son 0, entonces $f'(1) = 0$.

97. f es derivable en $x = 2$.

99. *a)* $d = \left(3|m + 1|\right)/\sqrt{m^2 + 1}$

b)



No es derivable en $m = -1$

101. Falso. La pendiente es $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$.

103. Falso. Por ejemplo, $f(x) = |x|$. Existen ambas derivadas por la izquierda y por la derecha, pero no son iguales.

105. Demostración.

Sección 2.2 (página 115)

1. *a)* $\frac{1}{2}$ *b)* 3 **3.** 0 **5.** $7x^6$ **7.** $-5/x^6$ **9.** $1/(5x^{4/5})$

11. 1 **13.** $-4t + 3$ **15.** $2x + 12x^2$ **17.** $3t^2 + 10t - 3$

19. $\dfrac{\pi}{2}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ **21.** $2x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x$ **23.** $-\dfrac{1}{x^2} - 3\cos x$

	Función	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
25.	$y = \dfrac{5}{2x^2}$	$y = \dfrac{5}{2}x^{-2}$	$y' = -5x^{-3}$	$y' = -\dfrac{5}{x^3}$
27.	$y = \dfrac{6}{(5x)^3}$	$y = \dfrac{6}{125}x^{-3}$	$y' = -\dfrac{18}{125}x^{-4}$	$y' = -\dfrac{18}{125x^4}$
29.	$y = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$	$y = x^{-1/2}$	$y' = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2}$	$y' = -\dfrac{1}{2x^{3/2}}$

31. -2 **33.** 0 **35.** 8 **37.** 3 **39.** $2x + 6/x^3$

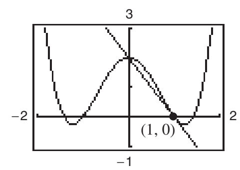
41. $2t + 12/t^4$ **43.** $8x + 3$ **45.** $(x^3 - 8)/x^3$

47. $3x^2 + 1$ **49.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^{2/3}}$ **51.** $\dfrac{4}{5s^{1/5}} - \dfrac{2}{3s^{1/3}}$

53. $\dfrac{3}{\sqrt{x}} - 5\operatorname{sen} x$

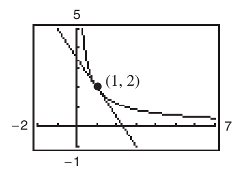
55. *a)* $2x + y - 2 = 0$

b)



57. *a)* $3x + 2y - 7 = 0$

b)

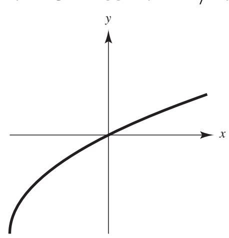


59. $(-1, 2), (0, 3), (1, 2)$ **61.** No hay tangentes horizontales.

63. (π, π) **65.** $k = -1,\ k = -9$

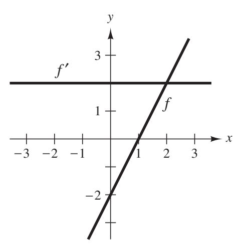
67. $k = 3$ **69.** $k = 4/27$

71.



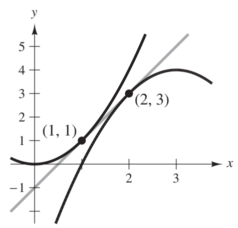
73. $g'(x) = f'(x)$

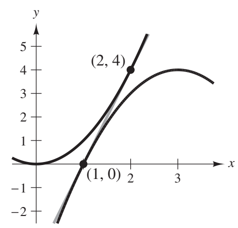
75.



La razón de cambio de f es constante y por tanto f' es una función constante.

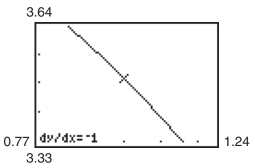
77. $y = 2x - 1$ $\qquad$ $y = 4x - 4$





79. $f'(x) = 3 + \cos x \neq 0$ para toda x. **81.** $x - 4y + 4 = 0$

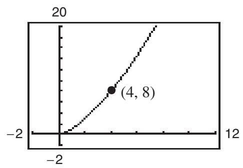
83.



$f'(1)$ parece estar cerca de -1.

$f'(1) = -1$

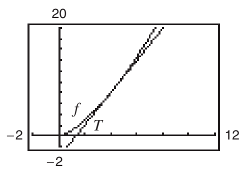
85. *a)*



(3.9, 7.7019),
$S(x) = 2.981x - 3.924$

b) $T(x) = 3(x - 4) + 8 = 3x - 4$
La pendiente (y la ecuación) de la recta secante tiende a la de la recta tangente en (4, 8), a medida que se toman puntos más cercanos a (4, 8).

c)



La aproximación se hace menos precisa.

d)

Δx	-3	-2	-1	-0.5	-0.1	0
$f(4 + \Delta x)$	1	2.828	5.196	6.548	7.702	8
$T(4 + \Delta x)$	-1	2	5	6.5	7.7	8

Δx	0.1	0.5	1	2	3
$f(4 + \Delta x)$	8.302	9.546	11.180	14.697	18.520
$T(4 + \Delta x)$	8.3	9.5	11	14	17

87. Falso. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x + 1$.

89. Falso. $dy/dx = 0$ **91.** Verdadero.

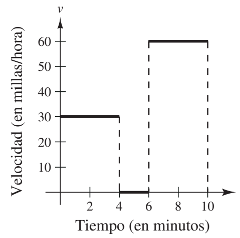
93. Ritmo de cambio o velocidad promedio: 4
Ritmos o velocidades instantáneas: $f'(1) = 4; f'(2) = 4$

95. Ritmo de cambio o velocidad promedio: $\frac{1}{2}$
Ritmos o velocidades instantáneas: $f'(1) = 1; f'(2) = \frac{1}{4}$

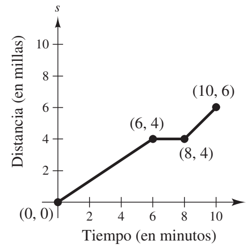
97. *a)* $s(t) = -16t^2 + 1\,362;\ v(t) = -32t$ *b)* -48 pies/s
b) $s'(1) = -32$ pies/s; $s'(2) = -64$ pies/s
d) $t = \dfrac{\sqrt{1\,362}}{4} \approx 9.226$ s *e)* -295.242 pies/s

99. $v(5) = 71$ m/s; $v(10) = 22$ m/s

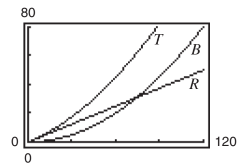
101.



103.



105. *a)* $R(v) = 0.417v - 0.02$
b) $B(v) = 0.0056v^2 + 0.001v + 0.04$
c) $T(v) = 0.0056v^2 + 0.418v + 0.02$
d)



e) $T'(v) = 0.0112v + 0.418$
$T'(40) = 0.866$
$T'(80) = 1.314$
$T'(100) = 1.538$

f) La distancia de frenado aumenta con un ritmo o velocidad mayor.

107. $V'(6) = 108\ \text{cm}^3/\text{cm}$ **109.** Demostración.

111. *a)* La razón de cambio del número de galones de gasolina vendidos cuando el precio es de \$2.979.
b) En general, la razón de cambio cuando $p = 2.979$ debe ser negativa. A medida que los precios crecen, las ventas bajan.

113. $y = 2x^2 - 3x + 1$ **115.** $9x + y = 0, 9x + 4y + 27 = 0$

117. $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$

119. $f_1(x) = |\text{sen}\ x|$ es derivable para todo $x \neq n\pi$, n entero.
$f_2(x) = \text{sen}|x|$ es derivable para todo $x \neq 0$.

Sección 2.3 (página 126)

1. $2(2x^3 - 6x^2 + 3x - 6)$ **3.** $(1 - 5t^2)/(2\sqrt{t})$

5. $x^2(3 \cos x - x\ \text{sen}\ x)$ **7.** $(1 - x^2)/(x^2 + 1)^2$

9. $(1 - 5x^3)/[2\sqrt{x}(x^3 + 1)^2]$ **11.** $(x \cos x - 2\ \text{sen}\ x)/x^3$

13. $f'(x) = (x^3 + 4x)(6x + 2) + (3x^2 + 2x - 5)(3x^2 + 4)$
$= 15x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 16x - 20$
$f'(0) = -20$

15. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 4}{(x - 3)^2}$ **17.** $f'(x) = \cos x - x\ \text{sen} x$

$f'(1) = -\dfrac{1}{4}$ $\qquad$ $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{8}(4 - \pi)$

	Función	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
19.	$y = \dfrac{x^2 + 3x}{7}$	$y = \dfrac{1}{7}x^2 + \dfrac{3}{7}x$	$y' = \dfrac{2}{7}x + \dfrac{3}{7}$	$y' = \dfrac{2x + 3}{7}$
21.	$y = \dfrac{6}{7x^2}$	$y = \dfrac{6}{7}x^{-2}$	$y' = -\dfrac{12}{7}x^{-3}$	$y' = -\dfrac{12}{7x^3}$
23.	$y = \dfrac{4x^{3/2}}{x}$	$y = 4x^{1/2}$, $x > 0$	$y' = 2x^{-1/2}$	$y' = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

25. $\dfrac{(x^2 - 1)(-3 - 2x) - (4 - 3x - x^2)(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{3}{(x + 1)^2},\ x \neq 1$

27. $1 - 12/(x + 3)^2 = (x^2 + 6x - 3)/(x + 3)^2$

29. $\dfrac{3}{2}x^{-1/2} + \dfrac{1}{2}x^{-3/2} = (3x + 1)/2x^{3/2}$

31. $6s^2(s^3 - 2)$ **33.** $-(2x^2 - 2x + 3)/[x^2(x - 3)^2]$

35. $(6x^2 + 5)(x - 3)(x + 2) + (2x^3 + 5x)(1)(x + 2)$
$+ (2x^3 + 5x)(x - 3)(1)$
$= 10x^4 - 8x^3 - 21x^2 - 10x - 30$

37. $\dfrac{(x^2 - c^2)(2x) - (x^2 + c^2)(2x)}{(x^2 - c^2)^2} = -\dfrac{4xc^2}{(x^2 - c^2)^2}$

39. $t(t \cos t + 2 \operatorname{sen} t)$ **41.** $-(t \operatorname{sen} t + \cos t)/t^2$

43. $-1 + \sec^2 x = \tan^2 x$ **45.** $\dfrac{1}{4t^{3/4}} - 6 \csc t \cot t$

47. $\dfrac{-6\cos^2 x + 6 \operatorname{sen} x - 6 \operatorname{sen}^2 x}{4\cos^2 x} = \dfrac{3}{2}(-1 + \tan x \sec x - \tan^2 x)$
$= \dfrac{3}{2} \sec x(\tan x - \sec x)$

49. $\csc x \cot x - \cos x = \cos x \cot^2 x$ **51.** $x(x \sec^2 x + 2 \tan x)$

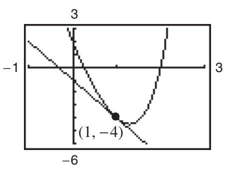
53. $2x \cos x + 2 \operatorname{sen} x - x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x$
$= 4x \cos x + (2 - x^2) \operatorname{sen} x$

55. $\left(\dfrac{x + 1}{x + 2}\right)(2) + (2x - 5)\left[\dfrac{(x + 2)(1) - (x + 1)(1)}{(x + 2)^2}\right]$
$= \dfrac{2x^2 + 8x - 1}{(x + 2)^2}$

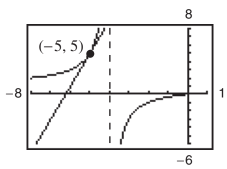
57. $\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta + \theta \cos \theta}{(1 - \operatorname{sen}\theta)^2}$ **59.** $y' = \dfrac{-2 \csc x \cot x}{(1 - \csc x)^2}, \quad -4\sqrt{3}$

61. $h'(t) = \sec t(t \tan t - 1)/t^2, \quad 1/\pi^2$

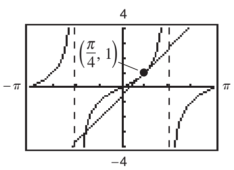
63. *a)* $y = -3x - 1$
b)



65. *a)* $y = 4x + 25$
b)

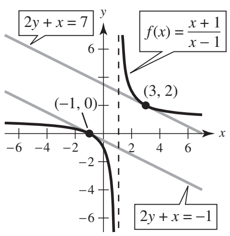


67. *a)* $4x - 2y - \pi + 2 = 0$ **69.** $2y + x - 4 = 0$
b)



71. $25y - 12x + 16 = 0$ **73.** $(1, 1)$ **75.** $(0, 0), (2, 4)$

77. Rectas tangentes: $2y + x = 7$; $2y + x = -1$



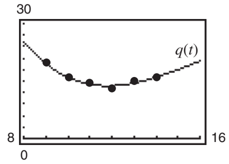
79. $f(x) + 2 = g(x)$ **81.** *a)* $p'(1) = 1$ *b)* $q'(4) = -1/3$

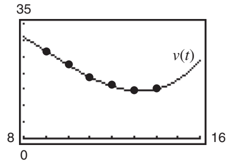
83. $(18t + 5)/\left(2\sqrt{t}\right)$ cm²/s

85. *a)* $-\$38.13$ miles de dólares/100 componentes
b) $-\$10.37$ miles de dólares/100 componentes
c) $-\$3.80$ miles de dólares/100 componentes
El costo disminuye al aumentar el tamaño pedido.

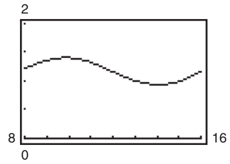
87. 31.55 bacterias/hora **89.** Demostración

91. *a)* $q(t) = -0.0546t^3 + 2.529t^2 - 36.89t + 186.6$
$v(t) = 0.0796t^3 - 2.162t^2 + 15.32t + 5.9$
b)





c) $A = \dfrac{0.0796t^3 - 2.162t^2 + 15.32t + 5.9}{-0.0546t^3 + 2.529t^2 - 36.89t + 186.6}$



A representa el valor promedio (en miles de millones de dólares) por cada millón de computadoras personales.

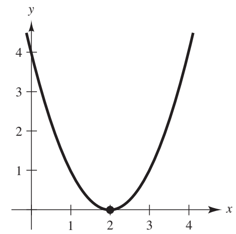
d) $A'(t)$ representa la razón de cambio del valor promedio de cada millón de computadoras personales por año dado.

93. $12x^2 + 12x - 6$ **95.** $3/\sqrt{x}$ **97.** $2/(x - 1)^3$

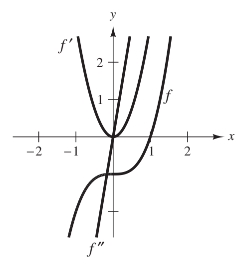
99. $2 \cos x - x \operatorname{sen} x$ **101.** $2x$ **103.** $1/\sqrt{x}$

105. 0 **107.** -10

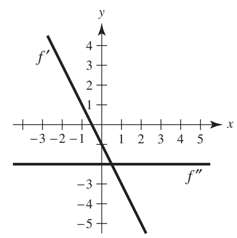
109. Las respuestas varían. Por ejemplo: $f(x) = (x - 2)^2$



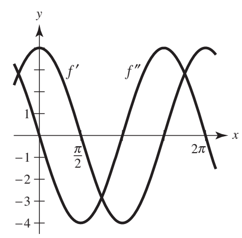
111.



113.



115.



117. $v(3) = 27$ m/s
$a(3) = -6$ m/s²
La velocidad del objeto es decreciente.

119.

t	0	1	2	3	4
$s(t)$	0	57.75	99	123.75	132
$v(t)$	66	49.5	33	16.5	0
$a(t)$	−16.5	−16.5	−16.5	−16.5	−16.5

La velocidad promedio en el intervalo $[0, 1]$ es 57.75, en $[1, 2]$ es 41.25, en $[2, 3]$ es 24.75 y en $[3, 4]$ es 8.25.

121. $f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1) = n!$

123. *a)* $f''(x) = g(x)h''(x) + 2g'(x)h'(x) + g''(x)h(x)$

$f'''(x) = g(x)h'''(x) + 3g'(x)h''(x) + 3g''(x)h'(x) + g'''(x)h(x)$

$f^{(4)}(x) = g(x)h^{(4)}(x) + 4g'(x)h'''(x) + 6g''(x)h''(x) + 4g'''(x)h'(x) + g^{(4)}(x)h(x)$

b) $f^{(n)}(x) = g(x)h^{(n)}(x) + \dfrac{n!}{1!(n-1)!}g'(x)h^{(n-1)}(x) + \dfrac{n!}{2!(n-2)!}g''(x)h^{(n-2)}(x) + \cdots + \dfrac{n!}{(n-1)!1!}g^{(n-1)}(x)h'(x) + g^{(n)}(x)h(x)$

125. $n = 1$: $f'(x) = x\cos x + \operatorname{sen} x$

$n = 2$: $f'(x) = x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x$

$n = 3$: $f'(x) = x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen} x$

$n = 4$: $f'(x) = x^4\cos x + 4x^3\operatorname{sen} x$

Regla general: $f'(x) = x^n\cos x + nx^{(n-1)}\operatorname{sen} x$

127. $y' = -1/x^2$, $y'' = 2/x^3$,

$x^3y'' + 2x^2y' = x^3(2/x^3) + 2x^2(-1/x^2) = 2 - 2 = 0$

129. $y' = 2\cos x$, $y'' = -2\operatorname{sen} x$,

$y'' + y = -2\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x + 3 = 3$

131. Falso. $dy/dx = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ **133.** Verdadero

135. Verdadero **137.** $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

139. $f'(x) = 2|x|$; $f''(0)$ no existe **141.** Demostración

Sección 2.4 (página 137)

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
1.	$y = (5x-8)^4$	$u = 5x - 8$	$y = u^4$
3.	$y = \sqrt{x^3 - 7}$	$u = x^3 - 7$	$y = \sqrt{u}$
5.	$y = \csc^3 x$	$u = \csc x$	$y = u^3$

7. $12(4x-1)^2$ **9.** $-108(4-9x)^3$

11. $\frac{1}{2}(5-t)^{-1/2}(-1) = -1/\left(2\sqrt{5-t}\right)$

13. $\frac{1}{3}(6x^2+1)^{-2/3}(12x) = 4x/\sqrt[3]{(6x^2+1)^2}$

15. $\frac{1}{2}(9-x^2)^{-3/4}(-2x) = -x/\sqrt[4]{(9-x^2)^3}$ **17.** $-1/(x-2)^2$

19. $-2(t-3)^{-3}(1) = -2/(t-3)^3$ **21.** $-1/\left[2\sqrt{(x+2)^3}\right]$

23. $x^2[4(x-2)^3(1)] + (x-2)^4(2x) = 2x(x-2)^3(3x-2)$

25. $x\left(\dfrac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-1/2}(-2x) + (1-x^2)^{1/2}(1) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

27. $\dfrac{(x^2+1)^{1/2}(1) - x(1/2)(x^2+1)^{-1/2}(2x)}{x^2+1} = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

29. $\dfrac{-2(x+5)(x^2+10x-2)}{(x^2+2)^3}$ **31.** $\dfrac{-9(1-2v)^2}{(v+1)^4}$

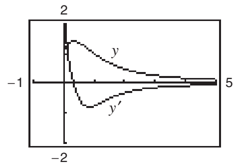
33. $2((x^2+3)^5 + x)(5(x^2+3)^4(2x)+1)$

$= 20x(x^2+3)^9 + 2(x^2+3)^5 + 20x^2(x^2+3)^4 + 2x$

35. $\dfrac{1}{2}(2 + (2 + x^{1/2})^{1/2})^{-1/2}\left(\dfrac{1}{2}(2 + x^{1/2})^{-1/2}\right)\left(\dfrac{1}{2}x^{-1/2}\right)$

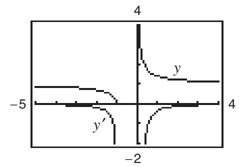
$= \dfrac{1}{8\sqrt{x}\left(\sqrt{2+\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}\right)}$

37. $(1 - 3x^2 - 4x^{3/2})/[2\sqrt{x}(x^2+1)^2]$



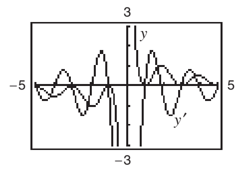
El cero de y' corresponde al punto de la gráfica de la función en el que la recta tangente es horizontal.

39. $-\dfrac{\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}}{2x(x+1)}$



y' no tiene ceros.

41. $-[\pi x\operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x) + 1]/x^2$



Los ceros de y' corresponden a los puntos sobre la gráfica de la función en los que las rectas tangentes son horizontales.

43. *a)* 1 *b)* 2; La pendiente de sen ax en el origen es a.

45. $-4\operatorname{sen} 4x$ **47.** 15 s^2 $3x$ **49.** $2\pi^2 x\cos(\pi x)^2$

51. $2\cos 4x$ **53.** $(-1 - \cos^2 x)/\operatorname{sen}^3 x$

55. $8\sec^2 x\tan x$ **57.** $10\tan 5\theta\sec^2 5\theta$

59. $\operatorname{sen} 2\theta\cos 2\theta = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 4\theta$

61. $\dfrac{6\pi\operatorname{sen}(\pi t - 1)}{\cos^3(\pi t - 1)}$ **63.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2x\cos(2x)^2$

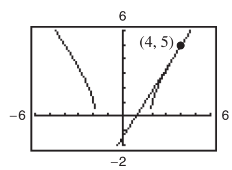
65. $2\sec^2 2x\cos(\tan 2x)$

67. $s'(t) = \dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+6t-2}}, \dfrac{6}{5}$ **69.** $f'(x) = \dfrac{-15x^2}{(x^3-2)^2}, -\dfrac{3}{5}$

71. $f'(t) = \dfrac{-5}{(t-1)^2}, -5$ **73.** $y' = -12\sec^3 4x\tan 4x, 0$

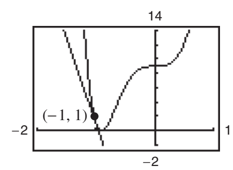
75. *a)* $8x - 5y - 7 = 0$

b)



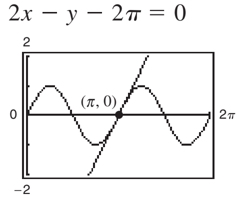
77. *a)* $24x + y + 23 = 0$

b)



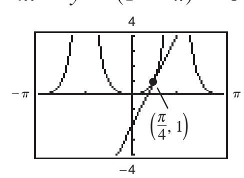
79. *a)* $2x - y - 2\pi = 0$

b)



81. *a)* $4x - y + (1 - \pi) = 0$

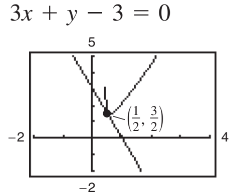
b)



83. *a)* $g'(1/2) = -3$

b) $3x + y - 3 = 0$

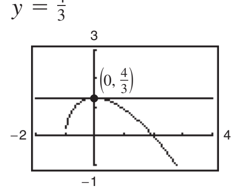
c)



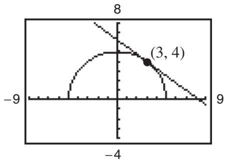
85. *a)* $s'(0) = 0$

b) $y = \frac{4}{3}$

c)



87. $3x + 4y - 25 = 0$



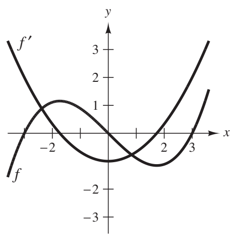
89. $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$ **91.** $2\,940(2 - 7x)^2$

93. $\dfrac{2}{(x-6)^3}$

95. $2(\cos x^2 - 2x^2 \operatorname{sen} x^2)$ **97.** $h''(x) = 18x + 6, 24$

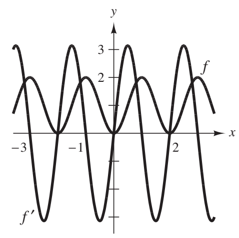
99. $f''(x) = -4x^2 \cos(x^2) - 2 \operatorname{sen}(x^2), 0$

101.



Los ceros de f' corresponden a los puntos donde la gráfica de f tiene tangentes horizontales.

103.



Los ceros de f' corresponden a los puntos donde la gráfica de f tiene tangentes horizontales.

105. La razón de cambio de g será tres veces mayor que la razón de cambio de f.

107. *a)* $g'(x) = f'(x)$ *b)* $h'(x) = 2f'(x)$
c) $r'(x) = -3f'(-3x)$ *d)* $s'(x) = f'(x+2)$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-2	-4
$g'(x)$	4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-2	-4
$h'(x)$	8	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-2	-4	-8
$r'(x)$		12	1			
$s'(x)$	$-\frac{1}{3}$	-1	-2	-4		

109. *a)* $\frac{1}{2}$
b) $s'(5)$ no existe porque g no es derivable en 6.

111. *a)* 1.461 *b)* −1.016

113. 0.2 rad, 1.45 rad/s **115.** 0.04224 cm/s

117. *a)* $x = -1.637t^3 + 19.31t^2 - 0.5t - 1$
b) $\dfrac{dC}{dt} = -294.66t^2 + 2\,317.2t - 30$
c) Porque x, el número de unidades producidas en t horas, no es una función lineal, y por tanto el costo respecto al tiempo t no es lineal.

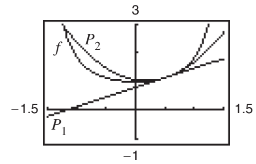
119. *a)* Sí, si $f(x+p) = f(x)$ para toda x, entonces $f'(x+p) = f'(x)$, lo cual muestra que también f' es periódica.
b) Sí, si $g(x) = f(2x)$, entonces $g'(x) = 2f'(2x)$. Y dado que f' es periódica, también lo es g'.

121. *a)* 0
b) $f'(x) = 2 \sec x \cdot \sec x \tan x = 2 \sec^2 x \tan x$
$g'(x) = 2 \tan x \sec^2 x = 2 \sec^2 x \tan x$
$f'(x) = g'(x)$

123. Demostración **125.** $f'(x) = 2x\left(\dfrac{x^2-9}{|x^2-9|}\right), x \neq \pm 3$

127. $f'(x) = \cos x \operatorname{sen} x/|\operatorname{sen} x|, x \neq k\pi$

129. *a)* $P_1(x) = 2/3(x - \pi/6) + 2/\sqrt{3}$
$P_2(x) = 5/\left(3\sqrt{3}\right)(x - \pi/6)^2 + 2/3(x - \pi/6) + 2/\sqrt{3}$
b)



c) P_2
d) La precisión empeora conforme uno se aleja de $x = \pi/6$.

131. Falso. Si $f(x) = \operatorname{sen}^2 2x$, entonces $f'(x) = 2(\operatorname{sen} 2x)(2 \cos 2x)$.

133. Problema Putnam A1, 1967

Sección 2.5 (página 146)

1. $-x/y$ **3.** $-\sqrt{y/x}$ **5.** $(y - 3x^2)/(2y - x)$

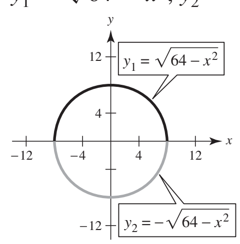
7. $(1 - 3x^2y^3)/(3x^3y^2 - 1)$

9. $(6xy - 3x^2 - 2y^2)/(4xy - 3x^2)$

11. $\cos x/[4 \operatorname{sen}(2y)]$ **13.** $(\cos x - \tan y - 1)/(x \sec^2 y)$

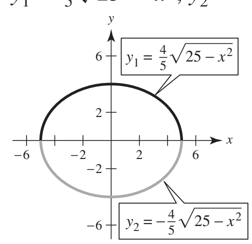
15. $[y \cos(xy)]/[1 - x \cos(xy)]$

17. *a)* $y_1 = \sqrt{64 - x^2}$; $y_2 = -\sqrt{64 - x^2}$
b)



c) $y' = \mp \dfrac{x}{\sqrt{64 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$
d) $y' = -\dfrac{x}{y}$

19. *a)* $y_1 = \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$; $y_2 = -\frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$
b)



c) $y' = \mp \dfrac{4x}{5\sqrt{25 - x^2}} = -\dfrac{16x}{25y}$
d) $y' = -\dfrac{16x}{25y}$

21. $-\dfrac{y}{x}, -\dfrac{1}{6}$ **23.** $\dfrac{98x}{y(x^2 + 49)^2}$, indefinida **25.** $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}, -\dfrac{1}{2}$

27. $-\operatorname{sen}^2(x + y)$ o $-\dfrac{x^2}{x^2 + 1}, 0$ **29.** $-\dfrac{1}{2}$ **31.** 0

33. $y = -x + 7$ **35.** $y = -x + 2$

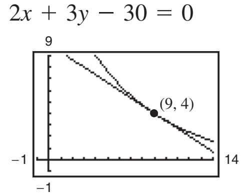
37. $y = \sqrt{3}x/6 + 8\sqrt{3}/3$ **39.** $y = -\frac{2}{11}x + \frac{30}{11}$

41. *a)* $y = -2x + 4$ *b)* Las respuestas varían.

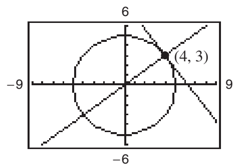
43. $\cos^2 y, -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{1}{1 + x^2}$ **45.** $-4/y^3$

47. $-36/y^3$ **49.** $(3x)/(4y)$

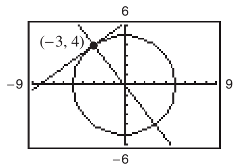
51. $2x + 3y - 30 = 0$



53. En $(4, 3)$:
Recta tangente: $4x + 3y - 25 = 0$
Recta normal: $3x - 4y = 0$



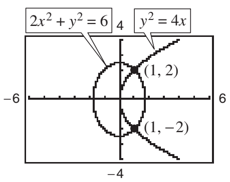
En $(-3, 4)$:
Recta tangente: $3x - 4y + 25 = 0$
Recta normal: $4x + 3y = 0$



55. $x^2 + y^2 = r^2 \Longrightarrow y' = -x/y \Longrightarrow y/x =$ pendiente de la recta normal.
Entonces para (x_0, y_0) en el círculo, $x_0 \neq 0$, una ecuación de la recta normal es $y = (y_0/x_0)x$, la cual pasa por el origen. Si $x_0 = 0$, la recta normal es vertical y pasa por el origen.

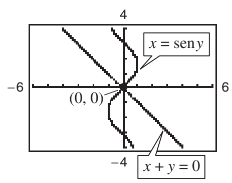
57. Tangentes horizontales: $(-4, 0), (-4, 10)$
Tangentes verticales: $(0, 5), (-8, 5)$

59.



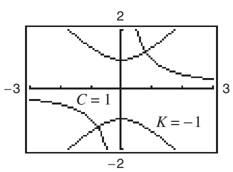
En $(1, 2)$:
Pendiente de la elipse: -1
Pendiente de la parábola: 1
En $(1, -2)$:
Pendiente de la elipse: 1
Pendiente de la parábola: -1

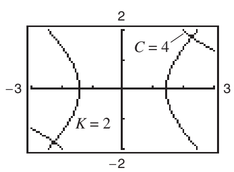
61.



En $(0, 0)$:
Pendiente de la recta: -1
Pendiente de la curva seno: 1

63. Derivadas: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}, \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$



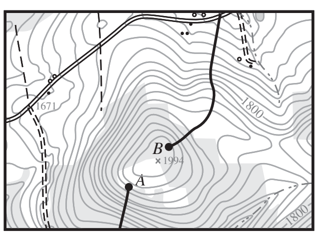


65. *a)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^3}{y}$ *b)* $y\dfrac{dy}{dt} = 3x^3\dfrac{dx}{dt}$

67. *a)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3\cos \pi x}{\operatorname{sen} \pi y}$ *b)* $-\operatorname{sen}\pi y\left(\dfrac{dy}{dt}\right) = 3\cos \pi x\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$

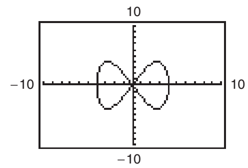
69. Las respuestas varían. En la forma explícita de una función, la variable se escribe explícitamente como una función de x. En una ecuación implícita, la función está solamente implicada por una ecuación. Un ejemplo de una función implícita es $x^2 + xy = 5$, cuya forma explícita es $y = (5 - x^2)/x$.

71.

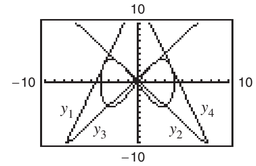


Utilizar el punto de partida B.

73. *a)*



b)



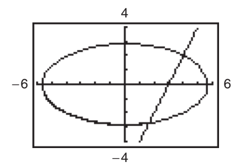
c) $\left(\dfrac{8\sqrt{7}}{7}, 5\right)$

$y_1 = \frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{7} + 7\right)x + \left(8\sqrt{7} + 23\right)\right]$
$y_2 = -\frac{1}{3}\left[\left(-\sqrt{7} + 7\right)x - \left(23 - 8\sqrt{7}\right)\right]$
$y_3 = -\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{7} - 7\right)x - \left(23 - 8\sqrt{7}\right)\right]$
$y_4 = -\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{7} + 7\right)x - \left(8\sqrt{7} + 23\right)\right]$

75. Demostración **77.** $(6, -8), (-6, 8)$

79. $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3},\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - 2\sqrt{3}$

81. *a)* $y = 2x - 6$
b)



c) $\left(\frac{28}{17}, -\frac{46}{17}\right)$

Sección 2.6 (página 154)

1. *a)* $\frac{3}{4}$ *b)* 20 **3.** *a)* $-\frac{5}{8}$ *b)* $\frac{3}{2}$
5. *a)* -8 cm/s *b)* 0 cm/s *c)* 8 cm/s
7. *a)* 8 cm/s *b)* 4 cm/s *c)* 2 cm/s
9. En una función lineal, si x cambia a un ritmo constante, así lo hace y. Sin embargo, a menos que $a = 1$, y no cambia al mismo ritmo que x.
11. $(4x^3 + 6x)/\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}$
13. *a)* 64π cm²/min *b)* 256π cm²/min
15. *a)* Demostración
b) Cuando $\theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}s^2$. Cuando $\theta = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{8}s^2$.
c) Si s y $d\theta/dt$ son constantes, dA/dt es proporcional a $\cos\theta$.
17. *a)* $2/(9\pi)$ cm/min *b)* $1/(18\pi)$ cm/min
19. *a)* 144 cm²/s *b)* 720 cm²/s **21.** $8/(405\pi)$ pies/min
23. *a)* 12.5% *b)* $\frac{1}{144}$ m/min
25. *a)* $-\frac{7}{12}$ pies/s; $-\frac{3}{2}$ pies/s; $-\frac{48}{7}$ pies/s
b) $\frac{527}{24}$ pies²/s *c)* $\frac{1}{12}$ rad/s
27. Razón de cambio vertical: $\frac{1}{5}$ m/s
Razón de cambio horizontal: $-\sqrt{3}/15$ m/s
29. *a)* -750 mi/h *b)* 30 min
31. $-50/\sqrt{85} \approx -5.42$ pies/s **33.** *a)* $\frac{25}{3}$ pies/s *b)* $\frac{10}{3}$ pies/s
35. *a)* 12 s *b)* $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ m *c)* $\left(\sqrt{5}\pi\right)/120$ m/s

37. Ritmo de evaporación proporcional a $S \Rightarrow \dfrac{dV}{dt} = k(4\pi r^2)$

$V = \left(\dfrac{4}{3}\right)\pi r^3 \Rightarrow \dfrac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$. Por tanto $k = \dfrac{dr}{dt}$.

39. 0.6 ohm/s **41.** $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{16r}{v}\,\mathrm{s}^2\,\theta \dfrac{d\theta}{dt}, \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{v}{16r}\cos^2\theta \dfrac{dv}{dt}$

43. $\dfrac{2\sqrt{21}}{525} \approx 0.017$ rad/s

45. *a*) $\dfrac{200\pi}{3}$ pies/s *b*) 200π pies/s *c*) Alrededor de 427.43π pies/s

47. Alrededor de 84.9797 mi/h

49. *a*) $\dfrac{dy}{dt} = 3\dfrac{dx}{dt}$ significa que y cambia tres veces más que x.

b) y cambia lentamente cuando $x \approx 0$ o $x \approx L$. y cambia más rápidamente cuando x se acerca a la mitad del intervalo.

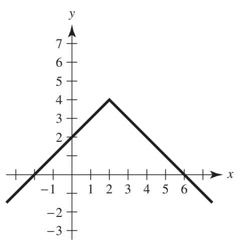
51. -18.432 pies/s² **53.** Alrededor de -97.96 m/s

Ejercicios de repaso para el capítulo 2 (página 158)

1. $f'(x) = 2x - 4$ **3.** $f'(x) = -2/(x-1)^2$

5. f es derivable para toda $x \neq 3$.

7.



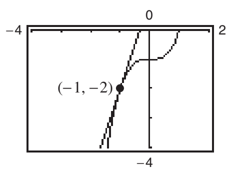
a) Sí

b) No, porque las derivadas por la izquierda y por la derecha no son iguales.

9. $-\frac{3}{2}$

11. *a*) $y = 3x + 1$ **13.** 8

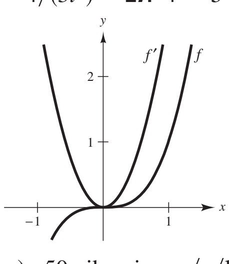
b)



15. 0 **17.** $8x^7$ **19.** $52t^3$ **21.** $3x^2 - 22x$ **23.** $\dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

25. $-4/(3t^3)$ **27.** $4 - 5\cos\theta$ **29.** $-3\,\mathrm{sen}\,\theta - (\cos\theta)/4$

31.



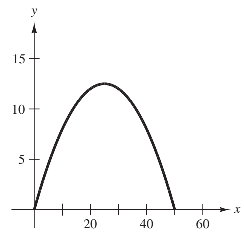
$f' > 0$ donde las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de f son positivas.

33. *a*) 50 vibraciones/s/lb

b) 33.33 vibraciones/s/lb

35. 1 354.24 pies o 412.77 m

37. *a*)



b) 50

c) $x = 25$

d) $y' = 1 - 0.04x$

x	0	10	25	30	50
y'	1	0.6	0	-0.2	-1

e) $y'(25) = 0$

39. *a*) $x'(t) = 2t - 3$ *b*) $(-\infty, 1.5)$ *c*) $x = -\frac{1}{4}$ *d*) 1

41. $4(5x^3 - 15x^2 - 11x - 8)$ **43.** $\sqrt{x}\cos x + \mathrm{sen}\,x/(2\sqrt{x})$

45. $-(x^2+1)/(x^2-1)^2$ **47.** $(8x)/(9-4x^2)^2$

49. $\dfrac{4x^3\cos x + x^4\,\mathrm{sen}\,x}{\cos^2 x}$ **51.** $3x^2\,\mathrm{s}\,x\tan x + 6x\,\mathrm{s}\,x$

53. $-x\,\mathrm{sen}\,x$ **55.** $y = 4x - 3$ **57.** $y = 0$

59. $v(4) = 20$ m/s; $a(4) = -8$ m/s²

61. $-48t$ **63.** $\frac{225}{4}\sqrt{x}$ **65.** $6\,\mathrm{s}^2\,\theta\tan\theta$

67. $y'' + y = -(2\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x) + (2\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x) = 0$

69. $\dfrac{2(x+5)(-x^2-10x+3)}{(x^2+3)^3}$

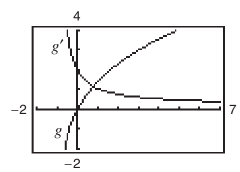
71. $s(s^2-1)^{3/2}(8s^3 - 3s + 25)$

73. $-45\,\mathrm{sen}(9x+1)$ **75.** $\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \mathrm{sen}^2 x$

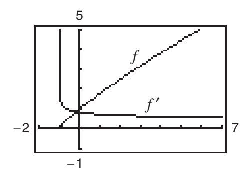
77. $\mathrm{sen}^{1/2} x\cos x - \mathrm{sen}^{5/2} x\cos x = \cos^3 x\sqrt{\mathrm{sen}\,x}$

79. $\dfrac{(x+2)(\pi\cos\pi x) - \mathrm{sen}\,\pi x}{(x+2)^2}$ **81.** -2 **83.** 0

85. $(x+2)/(x+1)^{3/2}$ **87.** $5/[6(t+1)^{1/6}]$



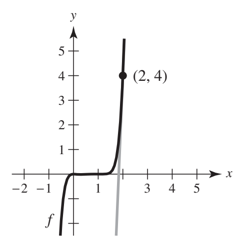
g' es diferente de cero para cualquier x.



f' no tiene ceros.

89. *a*) $f'(2) = 24$ *b*) $y = 24t - 44$

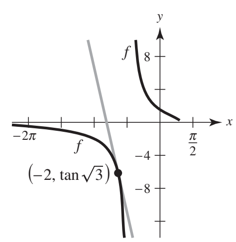
c)



91. *a*) $f'(-2) = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}\cos^2\sqrt{3}} \approx -11.1983$

b) $y = -\dfrac{\sqrt{3}(x+2)}{6\cos^2\sqrt{3}} + \tan\sqrt{3}$

c)



93. $14 - 4\cos 2x$ **95.** $2\csc^2 x \cot x$

97. $[8(2t+1)]/(1-t)^4$

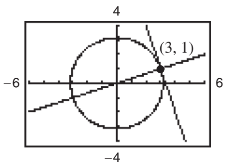
99. $18\ \mathrm{s}^2 3\theta \tan 3\theta + \mathrm{sen}(\theta - 1)$

101. *a*) $-18.667°/\mathrm{h}$ *b*) $-7.284°/\mathrm{h}$
c) $-3.240°/\mathrm{h}$ *d*) $-0.747°/\mathrm{h}$

103. $-\dfrac{2x+3y}{3(x+y^2)}$ **105.** $\dfrac{\sqrt{y}(2\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+8\sqrt{y})} = \dfrac{2x-9y}{9x-32y}$

107. $\dfrac{y\,\mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,y}{\cos x - x\cos y}$

109. Recta tangente: $3x + y - 10 = 0$
Recta normal: $x - 3y = 0$



111. *a*) $2\sqrt{2}$ unidades/s *b*) 4 unidades/s *c*) 8 unidades/s

113. $\frac{2}{25}$ m/min **115.** -38.34 m/s

SP Solución de problemas (página 161)

1. *a*) $r = \frac{1}{2};\ x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
b) Centro: $\left(0, \frac{5}{4}\right);\ x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 1$

3. *a*) $P_1(x) = 1$ *b*) $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$
c)

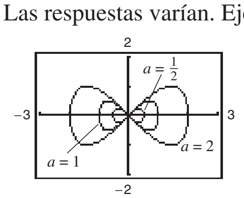
x	-1.0	-0.1	-0.001	0	0.001
cos *x*	0.5403	0.9950	1.000	1	1.000
$P_2(x)$	0.5	0.995	1.000	1	1.000

x	0.1	1.0
cos *x*	0.9950	0.5403
$P_2(x)$	0.995	0.5

$P_2(x)$ es una buena aproximación de $f(x) = \cos x$ para valores de x cercanos a 0.
d) $P_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$

5. $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5$

7. *a*) Graficar: $\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{a}\sqrt{x^2(a^2 - x^2)} \\ y_2 = -\dfrac{1}{a}\sqrt{x^2(a^2 - x^2)} \end{cases}$ como ecuaciones separadas.
b) Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta:



Las intersecciones siempre serán $(0, 0)$, $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, y los valores máximos y mínimos de y parecen ser $\pm\frac{1}{2}a$.
c) $\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \dfrac{a}{2}\right), \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{a}{2}\right), \left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \dfrac{a}{2}\right), \left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{a}{2}\right)$

9. *a*) Cuando el hombre se encuentra a 90 pies de la luz, la parte superior de su sombra está a $112\frac{1}{2}$ pies de ella. La parte superior de la sombra del niño está a $111\frac{1}{9}$ pies de la luz, de manera que la sombra del hombre se extiende $1\frac{7}{18}$ pies más allá de la sombra del niño.
b) Cuando el hombre se encuentra a 60 pies de la luz, la parte superior de su sombra está a 75 pies de ella. La parte superior de la sombra del niño está a $77\frac{7}{9}$ pies de la luz, de manera que la sombra del niño se extiende $2\frac{7}{9}$ pies más allá de la sombra del hombre.
c) $d = 80$ pies
d) Sea x la distancia entre el hombre y la luz, y s la distancia entre la luz y la parte superior de su sombra.
Si $0 < x < 80$, $ds/dt = -50/9$.
Si $x > 80$, $ds/dt = -25/4$.
Existe una discontinuidad en $x = 80$.

11. Demostración. La gráfica de L es una recta por el origen $(0, 0)$.

13. *a*)

$z°$	0.1	0.01	0.0001
$\dfrac{\mathrm{sen}\,z}{z}$	0.0174532837	0.0174532924	0.0174532925

b) $\pi/180$ *c*) $(\pi/180)\cos z$
d) $S(90) = 1,\ C(180) = -1;\ (\pi/180)C(z)$
e) Las respuestas varían.

15. *a*) j sería la razón de cambio de la aceleración.
b) $j = 0$. La aceleración es constante de manera que no hay cambio en la aceleración.
c) a: función de posición, d: función de velocidad,
b: función de aceleración, c: función de estremecimiento

Capítulo 3

Sección 3.1 (página 169)

1. $f'(0) = 0$ **3.** $f'(2) = 0$ **5.** $f'(-2)$ no está definida

7. 2, máximo absoluto (y máximo relativo)

9. 1, máximo absoluto (y máximo relativo);
2, mínimo absoluto (y mínimo relativo);
3, máximo absoluto (y máximo relativo)

11. $x = 0, x = 2$ **13.** $t = 8/3$ **15.** $x = \pi/3, \pi, 5\pi/3$

17. Mínimo: $(2, 1)$
Máximo: $(-1, 4)$

19. Mínimo: $(1, -1)$
Máximo: $(4, 8)$

21. Mínimo: $\left(-1, -\frac{5}{2}\right)$
Máximo: $(2, 2)$

23. Mínimo: $(0, 0)$
Máximo: $(-1, 5)$

25. Mínimo: $(0, 0)$
Máximos: $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(1, \frac{1}{4}\right)$

27. Mínimo: $(1, -1)$
Máximo: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

29. Mínimo: $(-1, -1)$
Máximo: $(3, 3)$

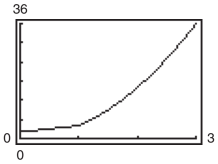
31. El mínimo valor es -2 para el intervalo $-2 \leq x < -1$.
Máximo: $(2, 2)$

33. Mínimo: $\left(1/6, \sqrt{3}/2\right)$
Máximo: $(0, 1)$

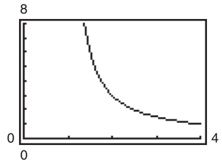
35. Mínimo: $(\pi, -3)$
Máximos: $(0, 3)$ y $(2\pi, 3)$

37. *a*) Mínimo: $(0, -3)$;
Máximo: $(2, 1)$
b) Mínimo: $(0, -3)$
c) Máximo: $(2, 1)$
d) No hay extremos

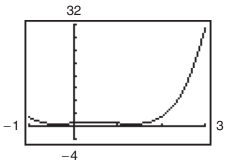
39. *a*) Mínimo: $(1, -1)$;
Máximo: $(-1, 3)$
b) Máximo: $(3, 3)$
c) Mínimo: $(1, -1)$
d) Mínimo: $(1, -1)$

41. 

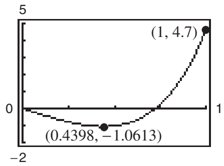
Mínimo: $(0, 2)$
Máximo: $(3, 36)$

43. 

Mínimo: $(4, 1)$

45. 

Mínimos: $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$
Máximo: $(3, 31)$

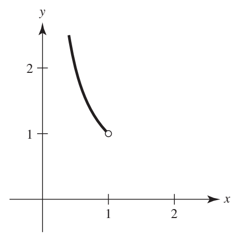
47. *a)* 

b) Mínimo: $(0.4398, -1.0613)$

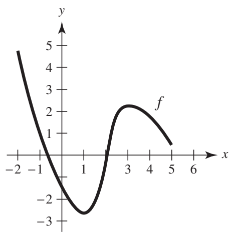
49. Máximo: $\left|f''\left(\sqrt[3]{-10+\sqrt{108}}\right)\right| = f''\left(\sqrt{3}-1\right) \approx 1.47$

51. Máximo: $\left|f^{(4)}(0)\right| = \frac{56}{81}$

53. Las respuestas varían. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$. f es continua en $(0, 1)$ pero no tiene un mínimo ni un máximo.



55. Las respuestas varían. Por ejemplo:



57. *a)* Sí *b)* No **59.** *a)* No *b)* Sí

61. Máximo: $P(12) = 72$; No. P es decreciente para $I > 12$.

63. $\theta = \operatorname{arcsec}\sqrt{3} \approx 0.9553$ rad

65. Verdadero. **67.** Verdadero **69.** Demostración

71. Problema Putnam B3, 2004

Sección 3.2 (página 176)

1. $f(-1) = f(1) = 1$; f no es continua en $[-1, 1]$.

3. $f(0) = f(2) = 0$; f no es derivable en $(0, 2)$.

5. $(2, 0), (-1, 0); f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ **7.** $(0, 0), (-4, 0); f'\left(-\frac{8}{3}\right) = 0$

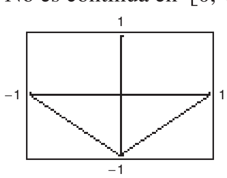
9. $f'(-1) = 0$ **11.** $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

13. $f'\left(\dfrac{6-\sqrt{3}}{3}\right) = 0;\ f'\left(\dfrac{6+\sqrt{3}}{3}\right) = 0$

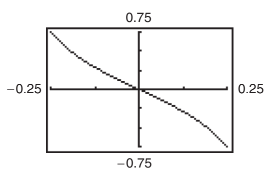
15. No es derivable en $x = 0$ **17.** $f'\left(-2+\sqrt{5}\right) = 0$

19. $f'(\pi/2) = 0$; $f'(3\pi/2) = 0$ **21.** $f'(0.249) \approx 0$

23. No es continua en $[0, \pi]$

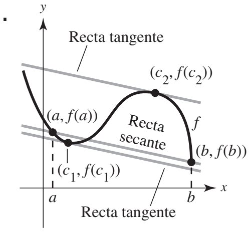
25. 

El teorema de Rolle no aplica.

27. 

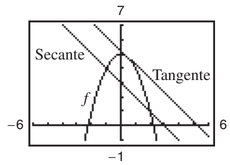
El teorema de Rolle no aplica.

29. *a)* $f(1) = f(2) = 38$
b) Velocidad $= 0$ para alguna t en $(1, 2)$; $t = \frac{3}{2}$ s

31. 

33. La función no es continua en $[0, 6]$.

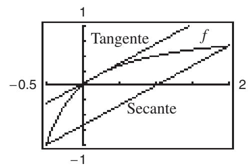
35. La función no es continua en $[0, 6]$.

37. *a)* Recta secante: $x + y - 3 = 0$ *b)* $c = \frac{1}{2}$
c) Recta tangente: $4x + 4y - 21 = 0$
d) 

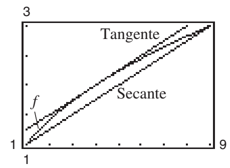
39. $f'(-1/2) = -1$ **41.** $f'\left(1/\sqrt{3}\right) = 3, f'\left(-1/\sqrt{3}\right) = 3$

43. $f'(8/27) = 1$ **45.** f no es derivable en $x = -\frac{1}{2}$.

47. $f'(\pi/2) = 0$

49. *a)* a *c)* 

b) $y = \frac{2}{3}(x-1)$
c) $y = \frac{1}{3}\left(2x + 5 - 2\sqrt{6}\right)$

51. *a)* a *c)* 

b) $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$
c) $y = \frac{1}{4}x + 1$

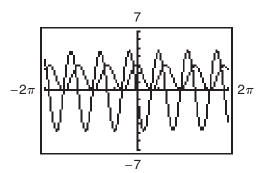
53. *a)* -14.7 m/s *b)* 1.5 s

55. No. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ en $[-1, 2]$.

57. No. $f(x)$ no es continua en $[0, 1]$. De manera que no satisface la hipótesis del teorema de Rolle.

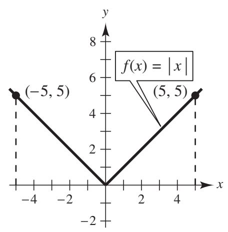
59. De acuerdo con el teorema del valor medio, existe un momento en el que la velocidad del aeroplano debe ser igual a la velocidad promedio que es de 454.5 mph. La velocidad era de 400 mi/h cuando el aeroplano aceleró a 454.5 mph y se desaceleró desde esa velocidad.

61. Demostración

63. *a)* 

b) Sí; sí
c) Dado que $f(-1) = f(1) = 0$, el teorema de Rolle aplica en $[-1, 1]$. Como $f(1) = 0$ y $f(2) = 3$, el teorema de Rolle no aplica en $[1, 2]$.
d) $\lim\limits_{x\to 3^-} f'(x) = 0;\ \lim\limits_{x\to 3^+} f'(x) = 0$

65.



67. Demostración

69. Demostración

71. $a = 6, b = 1, c = 2$ **73.** $f(x) = 5$ **75.** $f(x) = x^2 - 1$

77. Falso. f no es continua en $[-1, 1]$. **79.** Verdadero

81 a 89. Demostraciones

Sección 3.3 (página 186)

1. *a*) $(0, 6)$ *b*) $(6, 8)$

3. Creciente en $(3, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 3)$

5. Creciente en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$; decreciente en $(-2, 2)$

7. Creciente en $(-\infty, -1)$; decreciente en $(-1, \infty)$

9. Creciente en $(1, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 1)$

11. Creciente en $\left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$
Decreciente en $\left(-4, -2\sqrt{2}\right)$ y $\left(2\sqrt{2}, 4\right)$

13. Creciente en $(0, \pi/2)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$;
Decreciente en $(\pi/2, 3\pi/2)$

15. Creciente en $(0, 7\pi/6)$ y $(11\pi/6, 2\pi)$;
Decreciente en $(7\pi/6, 11\pi/6)$

17. *a*) Número crítico: $x = 2$
b) Creciente en $(2, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 2)$
c) Mínimo relativo: $(2, -4)$

19. *a*) Número crítico: $x = 1$
b) Creciente en $(-\infty, 1)$; decreciente en $(1, \infty)$
c) Máximo relativo: $(1, 5)$

21. *a*) Números críticos: $x = -2, 1$
b) Creciente en $(-\infty, -2)$ y $(1, \infty)$; decreciente en $(-2, 1)$
c) Máximo relativo: $(-2, 20)$; mínimo relativo: $(1, -7)$

23. *a*) Números críticos: $x = -\frac{5}{3}, 1$
b) Creciente en $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right), (1, \infty)$
Decreciente en $\left(-\frac{5}{3}, 1\right)$
c) Máximo relativo: $\left(-\frac{5}{3}, \frac{256}{27}\right)$
Mínimo relativo: $(1, 0)$

25. *a*) Números críticos: $x = \pm 1$
b) Creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; decreciente en $(-1, 1)$
c) Máximo relativo: $\left(-1, \frac{4}{5}\right)$; mínimo relativo: $\left(1, -\frac{4}{5}\right)$

27. *a*) Número crítico: $x = 0$
b) Creciente en $(-\infty, \infty)$
c) No tiene extremos relativos

29. *a*) Número crítico: $x = -2$
b) Creciente en $(-2, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -2)$
c) Mínimo relativo: $(-2, 0)$

31. *a*) Número crítico: $x = 5$
b) Creciente en $(-\infty, 5)$; decreciente en $(5, \infty)$
c) Máximo relativo: $(5, 5)$

33. *a*) Números críticos: $x = \pm\sqrt{2}/2$; discontinuidad en: $x = 0$
b) Creciente en $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ y $(\sqrt{2}/2, \infty)$
Decreciente en $\left(-\sqrt{2}/2, 0\right)$ y $\left(0, \sqrt{2}/2\right)$
c) Máximo relativo: $\left(-\sqrt{2}/2, -2\sqrt{2}\right)$
Mínimo relativo: $\left(\sqrt{2}/2, 2\sqrt{2}\right)$

35. *a*) Número crítico: $x = 0$; discontinuidades en $x = \pm 3$
b) Creciente en $(-\infty, -3)$ y $(-3, 0)$
Decreciente en $(0, 3)$ y $(3, \infty)$
c) Máximo relativo: $(0, 0)$

37. *a*) Números críticos: $x = -3, 1$; discontinuidades en $x = -1$
b) Creciente en $(-\infty, -3)$ y $(1, \infty)$
Decreciente en $(-3, -1)$ y $(-1, 1)$
c) Máximo relativo: $(-3, -8)$; mínimo relativo: $(1, 0)$

39. *a*) Número crítico: $x = 0$
b) Creciente en $(-\infty, 0)$; decreciente en $(0, \infty)$
c) No tiene extremos relativos

41. *a*) Número crítico: $x = 1$
b) Creciente en $(-\infty, 1)$; decreciente en $(1, \infty)$
c) Máximo relativo: $(1, 4)$

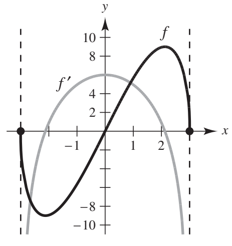
43. *a*) Números críticos: $x = \pi/6, 5\pi/6$
Creciente en $(0, \pi/6), (5\pi/6, 2\pi)$
Decreciente en $(\pi/6, 5\pi/6)$
b) Máximo relativo: $\left(\pi/6, \left(\pi + 6\sqrt{3}\right)/12\right)$
Mínimo relativo: $\left(5\pi/6, (5\pi - 6\sqrt{3})/12\right)$

45. *a*) Números críticos: $x = \pi/4, 5\pi/4$
Creciente en $(0, \pi/4), (5\pi/4, 2\pi)$
Decreciente en $(\pi/4, 5\pi/4)$
b) Máximo relativo: $\left(\pi/4, \sqrt{2}\right)$
Mínimo relativo: $\left(5\pi/4, -\sqrt{2}\right)$

47. *a*) Números críticos:
$x = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$
Creciente en $(\pi/4, \pi/2), (3\pi/4, \pi), (5\pi/4, 3\pi/2), (7\pi/4, 2\pi)$
Decreciente en $(0, \pi/4), (\pi/2, 3\pi/4), (\pi, 5\pi/4), (3\pi/2, 7\pi/4)$
b) Máximos relativos: $(\pi/2, 1), (\pi, 1), (3\pi/2, 1)$
Mínimos relativos: $(\pi/4, 0), (3\pi/4, 0), (5\pi/4, 0), (7\pi/4, 0)$

49. *a*) Números críticos: $\pi/2, 7\pi/6, 3\pi/2, 11\pi/6$
Creciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right), \left(\dfrac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$
Decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{6}\right), \left(\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{6}\right)$
b) Máximos relativos: $\left(\dfrac{\pi}{2}, 2\right), \left(\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$
Mínimos relativos: $\left(\dfrac{7\pi}{6}, -\dfrac{1}{4}\right), \left(\dfrac{11\pi}{6}, -\dfrac{1}{4}\right)$

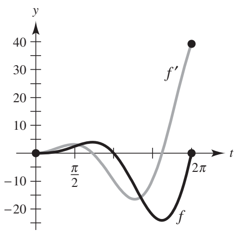
51. *a*) $f'(x) = 2(9 - 2x^2)/\sqrt{9 - x^2}$
b)



c) Números críticos: $x = \pm 3\sqrt{2}/2$
d) $f' > 0$ en $\left(-3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2\right)$
$f' < 0$ en $\left(-3, -3\sqrt{2}/2\right), \left(3\sqrt{2}/2, 3\right)$

53. *a*) $f'(t) = t(t \cos t + 2 \text{ sen } t)$

b)

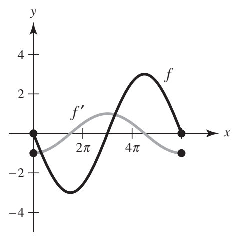


c) Números críticos:
$t = 2.2889, 5.0870$

d) $f' > 0$ en $(0, 2.2889)$, $(5.0870, 2\pi)$
$f' < 0$ en $(2.2889, 5.0870)$

55. *a*) $f'(x) = -\cos(x/3)$

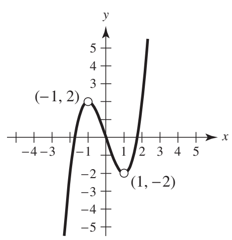
b)



c) Números críticos:
$x = 3\pi/2, 9\pi/2$

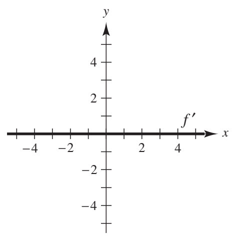
d) $f' > 0$ en $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right)$
$f' < 0$ en $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{9\pi}{2}, 6\pi\right)$

57. $f(x)$ es simétrica respecto al origen.
Ceros: $(0, 0), (\pm\sqrt{3}, 0)$

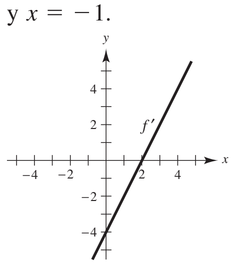


$g(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$ y $f(x)$ tiene huecos en $x = 1$ y $x = -1$.

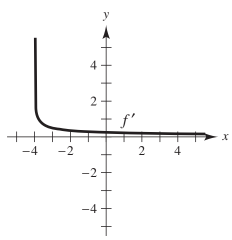
59.



61.



63.



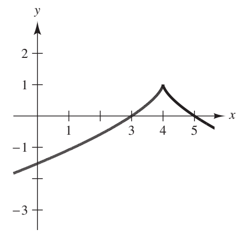
65. *a*) Creciente en $(2, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 2)$
b) Mínimo relativo: $x = 2$

67. *a*) Creciente en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$; decreciente en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$
b) Máximos relativos: $x = -1$ y $x = 1$
Mínimo relativo: $x = 0$

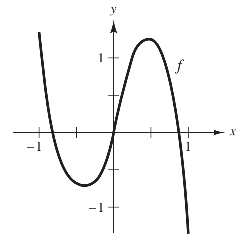
69. *a*) Números críticos: $x = -1, x = 1, x = 2$
b) Máximo relativo en $x = 1$, mínimo relativo en $x = 2$ y ni uno ni otro en $x = -1$

71. $g'(0) < 0$ **73.** $g'(-6) < 0$ **75.** $g'(0) > 0$

77. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta:



79. *a*)



b) Números críticos: $x \approx -0.40$ y $x \approx 0.48$
c) Máximo relativo: $(0.48, 1.25)$
Mínimo relativo: $(-0.40, 0.75)$

81. *a*) $s'(t) = 9.8(\text{sen } \theta)t$; velocidad $= |9.8(\text{sen } \theta)t|$
b)

θ	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	π
$s'(t)$	0	$4.9\sqrt{2}t$	$4.9\sqrt{3}t$	$9.8t$	$4.9\sqrt{3}t$	$4.9\sqrt{2}t$	0

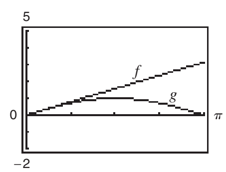
La velocidad es máxima en $\theta = \pi/2$.

83. *a*)

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$g(x)$	0.48	0.84	1.00	0.91	0.60	0.14

$f(x) > g(x)$

b)



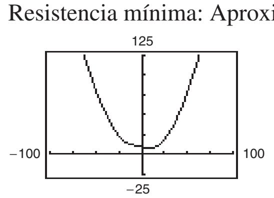
$f(x) > g(x)$

c) Demostración

85. $r = 2R/3$

87. *a*) $\dfrac{dR}{dT} = \dfrac{0.004T^3 - 4}{2\sqrt{0.001T^4 - 4T + 100}}$
Número crítico: $T = 10$
Resistencia mínima: Aproximadamente 8.3666 ohms

b)



Resistencia mínima: Aproximadamente 8.3666 ohms

89. *a*) $v(t) = 6 - 2t$ *b*) $(0, 3)$ *c*) $(3, \infty)$ *d*) $t = 3$

91. *a*) $v(t) = 3t^2 - 10t + 4$

b) $\left(0, (5 - \sqrt{13})/3\right)$ y $\left((5 + \sqrt{13})/3, \infty\right)$

c) $\left(\dfrac{5 - \sqrt{13}}{3}, \dfrac{5 + \sqrt{13}}{3}\right)$ *d*) $t = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{3}$

93. Las respuestas varían

95. *a*) Grado mínimo: 3

b)
$$\begin{aligned} a_3(0)^3 + a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 &= 0 \\ a_3(2)^3 + a_2(2)^2 + a_1(2) + a_0 &= 2 \\ 3a_3(0)^2 + 2a_2(0) + a_1 &= 0 \\ 3a_3(2)^2 + 2a_2(2) + a_1 &= 0 \end{aligned}$$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

97. *a*) Grado mínimo: 4

b)
$$\begin{aligned} a_4(0)^4 + a_3(0)^3 + a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0 &= 0 \\ a_4(2)^4 + a_3(2)^3 + a_2(2)^2 + a_1(2) + a_0 &= 4 \\ a_4(4)^4 + a_3(4)^3 + a_2(4)^2 + a_1(4) + a_0 &= 0 \\ 4a_4(0)^3 + 3a_3(0)^2 + 2a_2(0) + a_1 &= 0 \\ 4a_4(2)^3 + 3a_3(2)^2 + 2a_2(2) + a_1 &= 0 \\ 4a_4(4)^3 + 3a_3(4)^2 + 2a_2(4) + a_1 &= 0 \end{aligned}$$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2$

99. Verdadero **101.** Falso. Sea $f(x) = x^3$.

103. Falso. Sea $f(x) = x^3$. Hay un número crítico en $x = 0$, pero no un extremo relativo.

105 a 107. Demostraciones

Sección 3.4 (página 195)

1. $f' > 0, f'' > 0$ **3.** $f' < 0, f'' < 0$

5. Cóncava hacia arriba: $(-\infty, \infty)$

7. Cóncava hacia arriba: $(-\infty, 1)$; cóncava hacia abajo: $(1, \infty)$

9. Cóncava hacia arriba: $(-\infty, 2)$; cóncava hacia abajo: $(2, \infty)$

11. Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -2), (2, \infty)$
Cóncava hacia abajo: $(-2, 2)$

13. Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -1), (1, \infty)$
Cóncava hacia abajo: $(-1, 1)$

15. Cóncava hacia arriba: $(-2, 2)$
Cóncava hacia abajo: $(-\infty, -2), (2, \infty)$

17. Cóncava hacia arriba: $(-\pi/2, 0)$; cóncava hacia abajo: $(0, \pi/2)$

19. Puntos de inflexión: $(-2, -8), (0, 0)$
Cóncava hacia arriba: $(-\infty, -2), (0, \infty)$
Cóncava hacia abajo: $(-2, 0)$

21. Punto de inflexión: $(2, 8)$; cóncava hacia abajo: $(-\infty, 2)$
Cóncava hacia arriba: $(2, \infty)$

23. Puntos de inflexión: $\left(\pm 2\sqrt{3}/3, -20/9\right)$
Cóncava hacia arriba: $\left(-\infty, -2\sqrt{3}/3\right), \left(2\sqrt{3}/3, \infty\right)$
Cóncava hacia abajo: $\left(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3\right)$

25. Puntos de inflexión: $(2, -16), (4, 0)$
Cóncava hacia arriba: $(-\infty, 2), (4, \infty)$; cóncava hacia abajo: $(2, 4)$

27. Cóncava hacia arriba: $(-3, \infty)$

29. Puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{3}/3, 3\right), \left(\sqrt{3}/3, 3\right)$
Cóncava hacia arriba: $\left(-\infty, -\sqrt{3}/3\right), \left(\sqrt{3}/3, \infty\right)$
Cóncava hacia abajo: $\left(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\right)$

31. Punto de inflexión: $(2\pi, 0)$
Cóncava hacia arriba: $(2\pi, 4\pi)$; cóncava hacia abajo: $(0, 2\pi)$

33. Cóncava hacia arriba: $(0, \pi), (2\pi, 3\pi)$
Cóncava hacia abajo: $(\pi, 2\pi), (3\pi, 4\pi)$

35. Puntos de inflexión: $(\pi, 0), (1.823, 1.452), (4.46, -1.452)$
Cóncava hacia arriba: $(1.823, \pi), (4.46, 2\pi)$
Cóncava hacia abajo: $(0, 1.823), (\pi, 4.46)$

37. Mínimo relativo: $(5, 0)$ **39.** Máximo relativo: $(3, 9)$

41. Máximo relativo: $(0, 3)$; mínimo relativo: $(2, -1)$

43. Mínimo relativo: $(3, -25)$

45. Máximo relativo: $(2.4, 268.74)$; mínimo relativo: $(0, 0)$

47. Mínimo relativo: $(0, -3)$

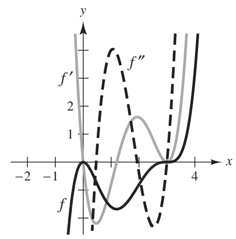
49. Máximo relativo: $(-2, -4)$; mínimo relativo: $(2, 4)$

51. No hay extremos relativos porque f no es creciente

53. *a*) $f'(x) = 0.2x(x - 3)^2(5x - 6)$
$f''(x) = 0.4(x - 3)(10x^2 - 24x + 9)$

b) Máximo relativo: $(0, 0)$
Mínimo relativo: $(1.2, -1.6796)$
Puntos de inflexión: $(0.4652, -0.7048)$, $(1.9348, -0.9048)$, $(3, 0)$

c)

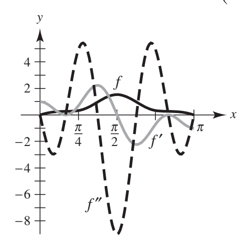


f es creciente cuando f' es positiva, y decreciente cuando f' es negativa. f es cóncava hacia arriba cuando f'' es positiva y cóncava hacia abajo cuando f'' es negativa.

55. *a*) $f'(x) = \cos x - \cos 3x + \cos 5x$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} 3x - 5 \operatorname{sen} 5x$

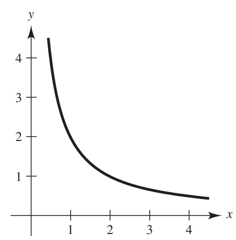
b) Máximo relativo: $(\pi/2, 1.53333)$
Puntos de inflexión: $(\pi/6, 0.2667), (1.1731, 0.9637)$, $(1.9685, 0.9637), (5\pi/6, 0.2667)$

c)

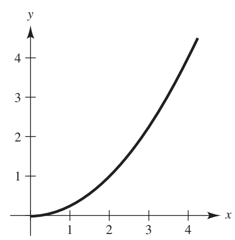


f es creciente cuando f' es positiva, y decreciente cuando f' es negativa. f es cóncava hacia arriba cuando f'' es positiva y cóncava hacia abajo cuando f'' es negativa.

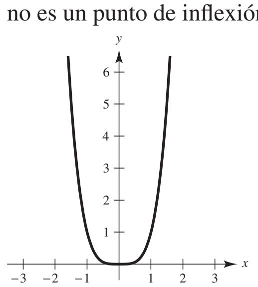
57. *a*)



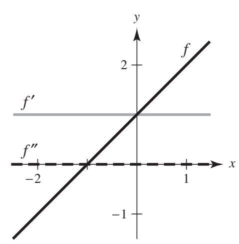
b)



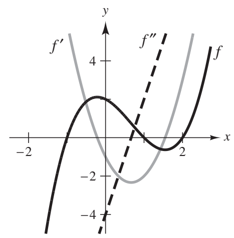
59. Las respuestas varían. Ejemplo: $f(x) = x^4$; $f''(0) = 0$, pero $(0, 0)$ no es un punto de inflexión.



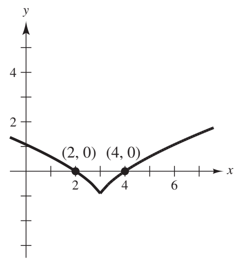
61.



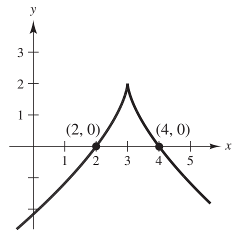
63.



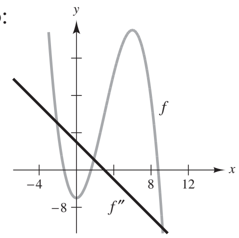
65.



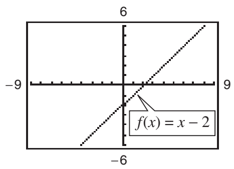
67.

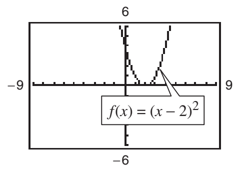


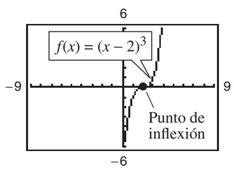
69. Ejemplo:

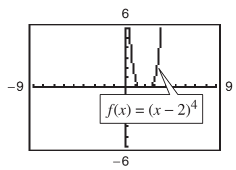


71. *a)* $f(x) = (x - 2)^n$ tiene un punto de inflexión en $(2, 0)$ si n es impar y $n \geq 3$.









b) Demostración

73. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + \frac{45}{2}x - 24$

75. *a)* $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{16}x^2$ *b)* A dos millas del aterrizaje

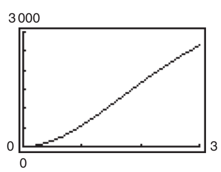
77. $x = \left(\dfrac{15 - \sqrt{33}}{16}\right)L \approx 0.578L$ **79.** $x = 100$ unidades

81. *a)*

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3
S	151.5	555.6	1 097.6	1 666.7	2 193.0	2 647.1

$1.5 < t < 2$

b)



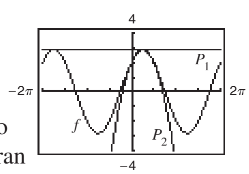
$t \approx 1.5$

c) Aproximadamente 1.633 años

83. $P_1(x) = 2\sqrt{2}$

$P_2(x) = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}(x - \pi/4)^2$

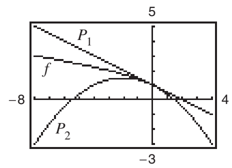
Los valores de f, P_1 y P_2 y sus primeras derivadas son iguales cuando $x = \pi/4$. Las aproximaciones empeoran conforme nos alejemos de ese valor.



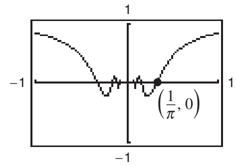
85. $P_1(x) = 1 - x/2$

$P_2(x) = 1 - x/2 - x^2/8$

Los valores de f, P_1 y P_2 y sus primeras derivadas son iguales cuando $x = 0$. Las aproximaciones empeoran conforme nos alejemos de ese valor.



87.



89. Demostración

91. Verdadero

93. Falso. f es cóncava hacia arriba en $x = c$ si $f''(c) > 0$.

95. Demostración

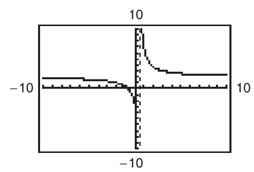
Sección 3.5 (página 205)

1. *f* **2.** *c* **3.** *d* **4.** *a* **5.** *b* **6.** *e*

7.

x	10^0	10^1	10^2	10^3
$f(x)$	7	2.2632	2.0251	2.0025

x	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	2.0003	2.0000	2.0000

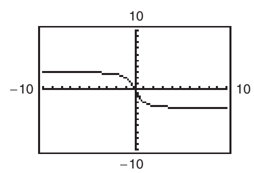


$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x + 3}{2x - 1} = 2$$

9.

x	10^0	10^1	10^2	10^3
$f(x)$	-2	-2.9814	-2.9998	-3.0000

x	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	-3.0000	-3.0000	-3.0000

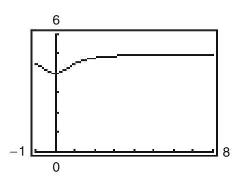


$$\lim_{x \to \infty} \frac{-6x}{\sqrt{4x^2 + 5}} = -3$$

11.

x	10^0	10^1	10^2	10^3
$f(x)$	4.5000	4.9901	4.9999	5.0000

x	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	5.0000	5.0000	5.0000



$$\lim_{x \to \infty} \left(5 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) = 5$$

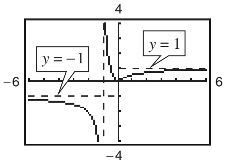
13. *a*) ∞ *b*) 5 *c*) 0 **15.** *a*) 0 *b*) 1 *c*) ∞

17. *a*) 0 *b*) $-\frac{2}{3}$ c) $-\infty$ **19.** 4 **21.** $\frac{2}{3}$ **23.** 0

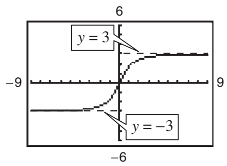
25. $-\infty$ **27.** -1 **29.** -2 **31.** $\frac{1}{2}$ **33.** ∞

35. 0 **37.** 0

39.



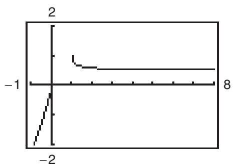
41.



43. 1 **45.** 0 **47.** $\frac{1}{6}$

49.

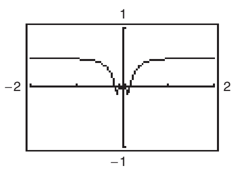
x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	1.000	0.513	0.501	0.500	0.500	0.500	0.500



$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - \sqrt{x(x-1)}\right] = \frac{1}{2}$

51.

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$f(x)$	0.479	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500

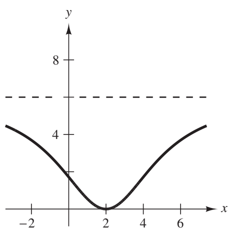


La gráfica tiene un hueco en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$

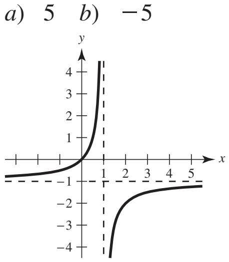
53. Conforme x crece $f(x)$ tiende a 4.

55. Las respuestas varían. Ejemplo: sea $f(x) = \dfrac{-6}{0.1(x-2)^2 + 1} + 6$.

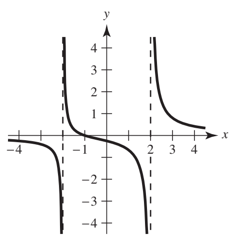


57. *a*) 5 *b*) -5

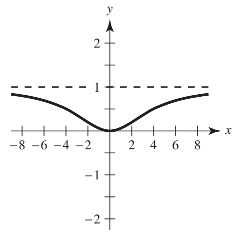
59.



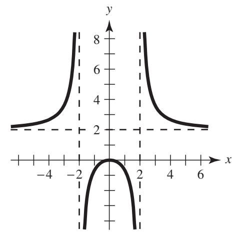
61.



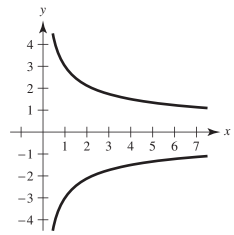
63.



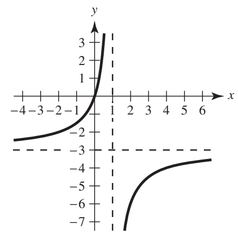
65.



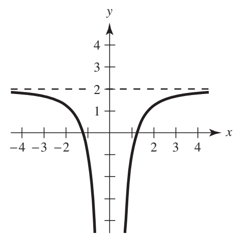
67.



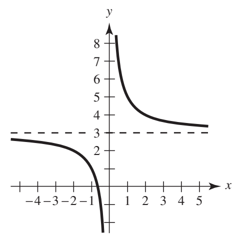
69.



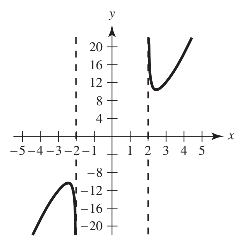
71.



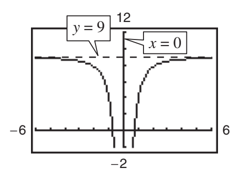
73.



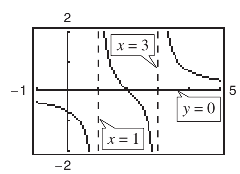
75.



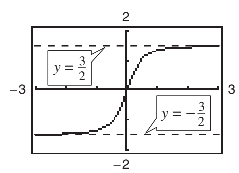
77.



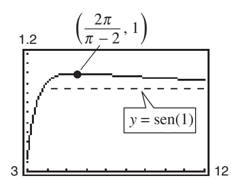
79.



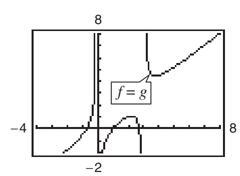
81.



83.

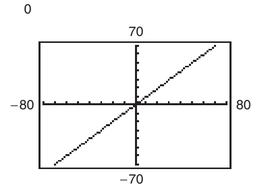


85. *a*)



b) Demostración

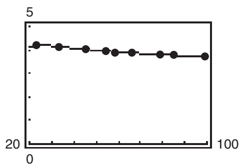
c)



La asíntota oblicua $y = x$

87. 100% **89.** $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = +\infty$; $\lim\limits_{t\to\infty} E(t) = c$

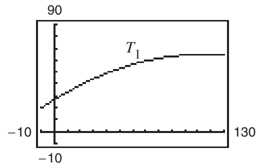
91. *a)*



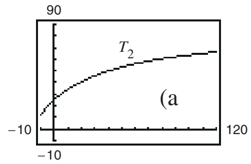
b) Sí. $\lim_{t\to\infty} y = 3.351$

93. *a)* $T_1 = -0.003t^2 + 0.68t + 26.6$

b)



c)

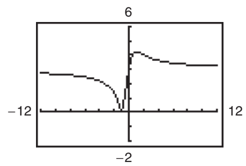


d) $T_1(0) \approx 26.6°$, $T_2(0) \approx 25.0°$ *e)* 86

f) La temperatura limitante es de 86°.
No. T_1 no tiene asíntotas horizontales.

95. *a)* $d(m) = \dfrac{|3m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

b)



c) $\lim_{m\to\infty} d(m) = 3$

$\lim_{m\to-\infty} d(m) = 3$

La distancia se aproxima a 3 cuando m tiende a $\pm\infty$.

97. *a)* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ *b)* $x_1 = \sqrt{\dfrac{4 - 2\varepsilon}{\varepsilon}}$, $x_2 = -\sqrt{\dfrac{4 - 2\varepsilon}{\varepsilon}}$

c) $\sqrt{\dfrac{4 - 2\varepsilon}{\varepsilon}}$ *d)* $-\sqrt{\dfrac{4 - 2\varepsilon}{\varepsilon}}$

99. *a)* Las respuestas varían. $M = \dfrac{5\sqrt{33}}{11}$ **101–105.** Demostraciones

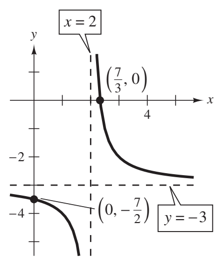
b) Las respuestas varían. $M = \dfrac{29\sqrt{177}}{59}$

107. Falso. Sea $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}}$. $f'(x) > 0$ para todo número real.

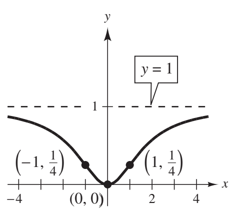
Sección 3.6 (página 215)

1. *d* **2.** *c* **3.** *a* **4.** *b*

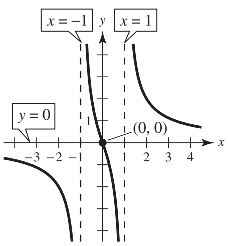
5.



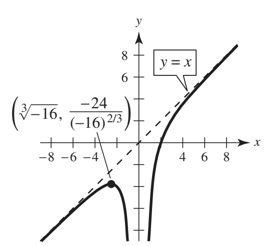
7.



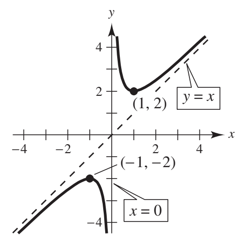
9.



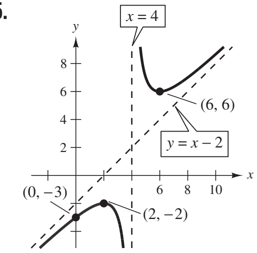
11.



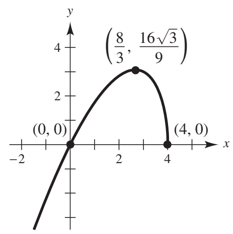
13.



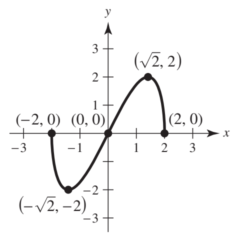
15.



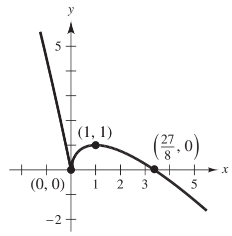
17.



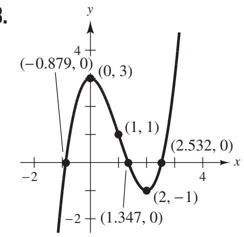
19.



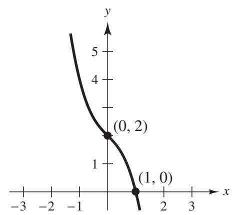
21.



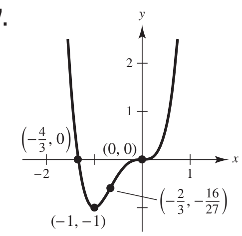
23.



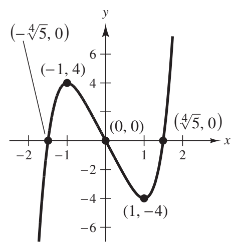
25.



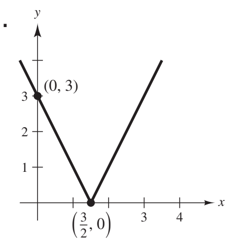
27.



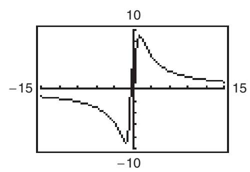
29.



31.

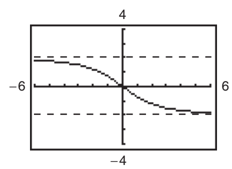


33.



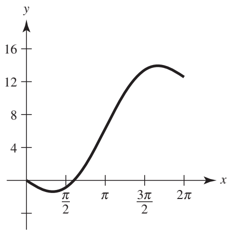
Mínimo: $(-1.10, -9.05)$
Máximo: $(1.10, 9.05)$
Puntos de inflexión: $(-1.84, -7.86)$, $(1.84, 7.86)$
Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota horizontal: $y = 0$

35.

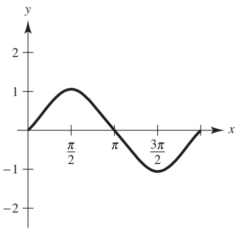


Punto de inflexión: $(0, 0)$
Asíntota horizontal: $y = \pm 2$

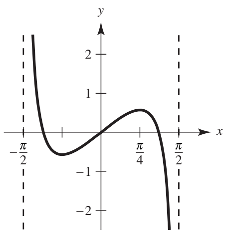
37.



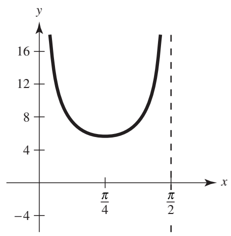
39.



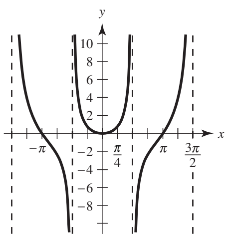
41.



43.

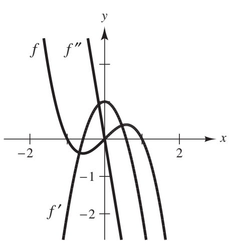


45.



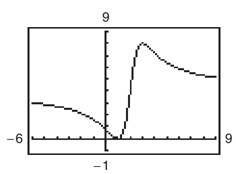
47. f es decreciente en $(2, 8)$ y por tanto $f(3) > f(5)$.

49.



Los ceros de f' corresponden a los puntos en los que la gráfica de f tiene tangentes horizontales. El cero de f'' corresponde al punto en el que la gráfica de f' tiene una tangente horizontal.

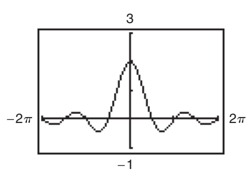
51.



La gráfica cruza la asíntota horizontal $y = 4$.

La gráfica de una función f no cruza su asíntota vertical $x = c$ porque no existe $f(c)$.

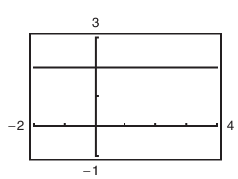
53.



La gráfica tiene un hueco en $x = 0$. La gráfica cruza la asíntota horizontal $y = 0$.

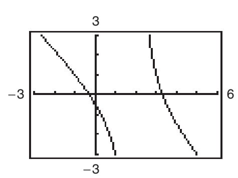
La gráfica de una función f no cruza su asíntota vertical $x = c$ porque no existe $f(c)$.

55.



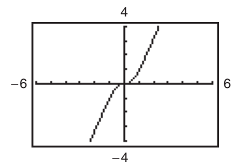
La gráfica tiene un hueco en $x = 3$. La función racional no se redujo a su mínima expresión.

57.



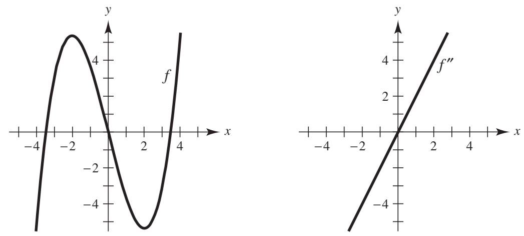
La gráfica parece aproximarse a la recta $y = -x + 1$, que es la asíntota oblicua.

59.

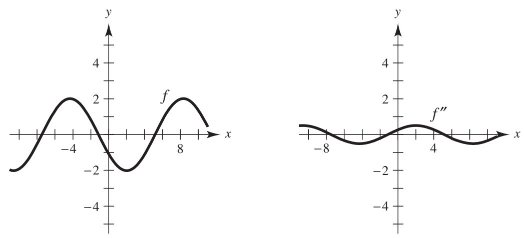


La gráfica parece aproximarse a la recta $y = 2x$, que es la asíntota oblicua.

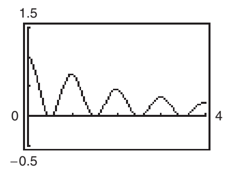
61.



63.



65. *a*)



La gráfica tiene huecos en $x = 0$ y en $x = 4$.

Números críticos por aproximación visual: $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}$

b) $f'(x) = \dfrac{-x\cos^2(\pi x)}{(x^2+1)^{3/2}} - \dfrac{2\pi\,\mathrm{sen}(\pi x)\cos(\pi x)}{\sqrt{x^2+1}}$

Números o puntos críticos aproximados: $\frac{1}{2}, 0.97, \frac{3}{2}, 1.98, \frac{5}{2}, 2.98, \frac{7}{2}$.

En el apartado *a*) donde se presentan los números o puntos críticos los máximos parecen ser enteros, pero al aproximarlos utilizando f' se observa que no son números enteros.

67. Las respuestas varían. Ejemplo: $y = 1/(x - 3)$

69. Las respuestas varían. Ejemplo: $y = (3x^2 - 7x - 5)/(x - 3)$

71. *a*) $f'(x) = 0$ para $x = \pm 2$; $f'(x) > 0$ para $(-\infty, -2), (2, \infty)$
$f'(x) < 0$ para $(-2, 2)$

b) $f''(x) = 0$ para $x = 0$; $f''(x) > 0$ para $(0, \infty)$
$f''(x) < 0$ para $(-\infty, 0)$

c) $(0, \infty)$

d) f' es mínima para $x = 0$.
f es decreciente a su mayor tasa en $x = 0$.

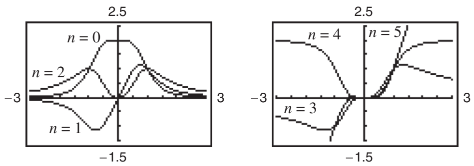
73. Las respuestas varían. Muestra de respuesta: la gráfica tiene una asíntota vertical en $x = b$. Si a y b son ambos positivos o ambos negativos, la gráfica de f tiende a ∞ cuando x tiende a b, y la gráfica tiene un mínimo en $x = -b$. Si a y b tienen signos opuestos, la gráfica de f tiende a $-\infty$ cuando x tiende a b, y la gráfica tiene un máximo en $x = -b$.

75. *a*) Si n es par, f es simétrica con respecto al eje y.
Si n es impar, f es simétrica respecto al origen.

b) $n = 0, 1, 2, 3$ *c*) $n = 4$

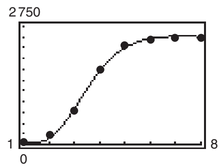
d) Cuando $n = 5$, la asíntota oblicua es $y = 2x$.

e)



n	0	1	2	3	4	5
M	1	2	3	2	1	0
N	2	3	4	5	2	3

77. *a)*



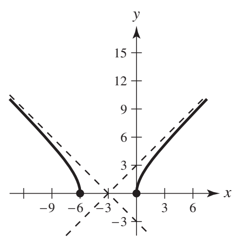
b) 2 434

c) El número de bacterias alcanza su máximo al principio del séptimo día.

d) La razón de incremento del número de bacterias es mayor en la primera parte del tercer día.

e) 13 250/7

79. $y = x + 3,\ y = -x - 3$



Sección 3.7 (página 223)

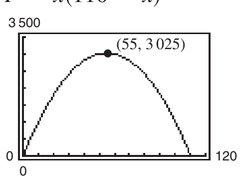
1. *a)* y *b)*

Primer número x	Segundo número	Producto P
10	$110 - 10$	$10(110 - 10) = 1\,000$
20	$110 - 20$	$20(110 - 20) = 1\,800$
30	$110 - 30$	$30(110 - 30) = 2\,400$
40	$110 - 40$	$40(110 - 40) = 2\,800$
50	$110 - 50$	$50(110 - 50) = 3\,000$
60	$110 - 60$	$60(110 - 60) = 3\,000$
70	$110 - 70$	$70(110 - 70) = 2\,800$
80	$110 - 80$	$80(110 - 80) = 2\,400$
90	$110 - 90$	$90(110 - 90) = 1\,800$
100	$110 - 100$	$100(110 - 100) = 1\,000$

El máximo está acotado entre $x = 50$ y 60.

c) $P = x(110 - x)$

d)



e) 55 y 55

3. $S/2$ y $S/2$ **5.** 21 y 7 **7.** 54 y 27

9. $l = w = 20$ m **11.** $l = w = 4\sqrt{2}$ pies **13.** $(1, 1)$

15. $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

17. Dimensiones de la página: $(2 + \sqrt{30})$ pulg $\times$ $(2 + \sqrt{30})$ pulg

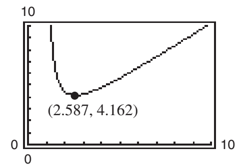
19. $x = Q_0/2$ **21.** 700×350 m

23. *a)* Demostración *b)* $V_1 = 99$ pulg^3, $V_2 = 125$ pulg^3, $V_3 = 117$ pulg^3 *c)* $5 \times 5 \times 5$ pulg

25. Porción rectangular: $16/(\pi + 4) \times 32/(\pi + 4)$ pies

27. *a)* $L = \sqrt{x^2 + 4 + \dfrac{8}{x-1} + \dfrac{4}{(x-1)^2}},\quad x > 1$

b)

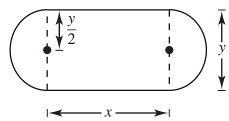


Mínimo cuando $x \approx 2.587$

c) (0, 0), (2, 0), (0, 4)

29. Ancho: $5\sqrt{2}/2$; longitud: $5\sqrt{2}$

31. *a)*



b)

Longitud x	Ancho y	Área xy
10	$2/\pi(100 - 10)$	$(10)(2/\pi)(100 - 10) \approx 573$
20	$2/\pi(100 - 20)$	$(20)(2/\pi)(100 - 20) \approx 1\,019$
30	$2/\pi(100 - 30)$	$(30)(2/\pi)(100 - 30) \approx 1\,337$
40	$2/\pi(100 - 40)$	$(40)(2/\pi)(100 - 40) \approx 1\,528$
50	$2/\pi(100 - 50)$	$(50)(2/\pi)(100 - 50) \approx 1\,592$
60	$2/\pi(100 - 60)$	$(60)(2/\pi)(100 - 60) \approx 1\,528$

El área máxima del rectángulo es aproximadamente 1 592 m^2.

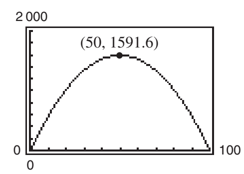
c) $A = 2/\pi(100x - x^2),\quad 0 < x < 100$

d) $\dfrac{dA}{dx} = \dfrac{2}{\pi}(100 - 2x)$

$= 0$ cuando $x = 50$

El valor máximo es aproximadamente 1 592 cuando $x = 50$.

e)



33. $18 \times 18 \times 36$ pulg **35.** $32\pi r^3/81$

37. No. El volumen cambia porque la forma del contenedor cambia cuando se comprime.

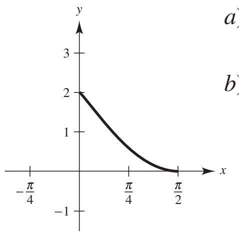
39. $r = \sqrt[3]{21/(2\pi)} \approx 1.50$ ($h = 0$, de manera que el sólido es una esfera).

41. Lado del cuadrado: $\dfrac{10\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}}$; lado del triángulo: $\dfrac{30}{9 + 4\sqrt{3}}$

43. $w = (20\sqrt{3})/3$ pulg, $h = (20\sqrt{6})/3$ pulg **45.** $\theta = \pi/4$

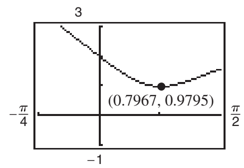
47. $h = \sqrt{2}$ pies **49.** Una milla del punto más cercano de la costa.

51. Demostración

53. 

a) Del origen a la intersección en *y*: 2
Del origen a la intersección en *x*: $\pi/2$

b) $d = \sqrt{x^2 + (2 - 2\,\text{sen}\,x)^2}$



c) La distancia mínima es 0.9795 cuando $x \approx 0.7967$.

55. $F = kW/\sqrt{k^2 + 1}$; $\theta = \arctan k$

57. *a*)

Base 1	Base 2	Altitud	Área
8	$8 + 16 \cos 10°$	8 sen 10°	≈ 22.1
8	$8 + 16 \cos 20°$	8 sen 20°	≈ 42.5
8	$8 + 16 \cos 30°$	8 sen 30°	≈ 59.7
8	$8 + 16 \cos 40°$	8 sen 40°	≈ 72.7
8	$8 + 16 \cos 50°$	8 sen 50°	≈ 80.5
8	$8 + 16 \cos 60°$	8 sen 60°	≈ 83.1

b)

Base 1	Base 2	Altitud	Área
8	$8 + 16 \cos 70°$	8 sen 70°	≈ 80.7
8	$8 + 16 \cos 80°$	8 sen 80°	≈ 74.0
8	$8 + 16 \cos 90°$	8 sen 90°	≈ 64.0

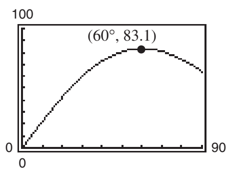
El área transversal máxima es aproximadamente: 83.1 pies^2.

c) $A = 64(1 + \cos\theta)\,\text{sen}\,\theta,\ 0° < \theta < 90°$

d) $\dfrac{dA}{d\theta} = 64(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$

$= 0$ cuando $\theta = 60°, 180°, 300°$

El área máxima ocurre cuando $\theta = 60°$.

e) 

59. 4 045 unidades **61.** $y = \frac{64}{141}x$; $S_1 \approx 6.1$ millas

63. $y = \frac{3}{10}x$; $S_3 \approx 4.50$ millas **65.** Problema Putnam A1, 1986

Sección 3.8 (página 233)

En las respuestas para los ejercicios 1 y 3, los valores en las tablas se han redondeado por conveniencia. Dado que una calculadora o un programa hace cálculos internos utilizando más dígitos de los desplegados, se pueden producir valores ligeramente diferentes que los mostrados en la tabla.

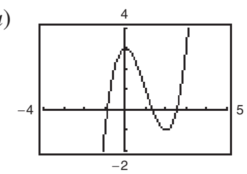
1.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	2.2000	-0.1600	4.4000	-0.0364	2.2364
2	2.2364	0.0015	4.4728	0.0003	2.2361

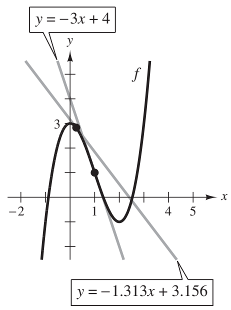
3.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	1.6	-0.0292	-0.9996	0.0292	1.5708
2	1.5708	0	-1	0	1.5708

5. -1.587 **7.** 0.682 **9.** 1.250, 5.000
11. 0.900, 1.100, 1.900 **13.** 1.935 **15.** 0.569
17. 4.493 **19.** *a*) Demostración *b*) $\sqrt{5} \approx 2.236$; $\sqrt{7} \approx 2.646$
21. $f'(x_1) = 0$ **23.** $2 = x_1 = x_3 = \ldots;\ 1 = x_2 = x_4 = \ldots$
25. 0.74 **27.** Demostración

29. *a*) 

b) 1.347 *c*) 2.532

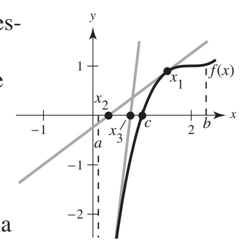
d) 

La intersección de $y = -3x + 4$ con el eje *x* es $\frac{4}{3}$.

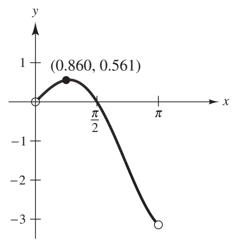
La intersección de $y = -1.313x + 3.156$ con el eje *x* es aproximadamente 2.404.

e) Si la estimación inicial $x = x_1$ no es lo suficientemente cercana al deseado cero de la función, la intersección con el eje *x* de la correspondiente recta tangente a la función puede aproximar un segundo cero de la función.

31. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: si *f* es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), donde *c* pertenece a $[a, b]$ y $f(c) = 0$, el método de Newton utiliza las tangentes para aproximar *c*. Primero se estima una x_1 inicial y cercana a *c* (ver la gráfica). Luego se determina x_2 empleando $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$. Se realiza una tercera estimación mediante $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2)$. Se continúa con este proceso hasta que $|x_n - x_{n+1}|$ tenga la exactitud deseada, donde x_{n+1} es la aproximación final de *c*.



33. 0.860



35. (1.939, 0.240)

37. $x \approx 1.563$ millas **39.** 15.1, 26.8 **41.** Falso: sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

43. Verdadero **45.** 0.217

Sección 3.9 (página 240)

1. $T(x) = 4x - 4$

x	1.9	1.99	2	2.01	2.1
$f(x)$	3.610	3.960	4	4.040	4.410
$T(x)$	3.600	3.960	4	4.040	4.400

3. $T(x) = 80x - 128$

x	1.9	1.99	2	2.01	2.1
$f(x)$	24.761	31.208	32	32.808	40.841
$T(x)$	24.000	31.200	32	32.800	40.000

5. $T(x) = (\cos 2)(x - 2) + \operatorname{sen} 2$

x	1.9	1.99	2	2.01	2.1
$f(x)$	0.946	0.913	0.909	0.905	0.863
$T(x)$	0.951	0.913	0.909	0.905	0.868

7. $\Delta y = 0.331;\ dy = 0.3$ **9.** $\Delta y = -0.039;\ dy = -0.040$

11. $6x\,dx$ **13.** $-\dfrac{3}{(2x-1)^2}\,dx$ **15.** $\dfrac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

17. $(3 - \operatorname{sen} 2x)\,dx$ **19.** $-\pi \operatorname{sen}\left(\dfrac{6\pi x - 1}{2}\right) dx$

21. *a)* 0.9 *b)* 1.04 **23.** *a)* 1.05 *b)* 0.98

25. *a)* 8.035 *b)* 7.95 **27.** $\pm\frac{5}{8}$ pulg^2 **29.** $\pm 8\pi$ pulg^2

31. *a)* $\frac{5}{6}\%$ *b)* 1.25%

33. *a)* $\pm 5.12\pi$ pulg^3 *b)* $\pm 1.28\pi$ pulg^2 *c)* 0.75%, 0.5%

35. 80π cm^3 **37.** *a)* $\frac{1}{4}\%$ *b)* 216 s = 3.6 min

39. *a)* 0.87% *b)* 2.16% **41.** 6 407 pies

43. $f(x) = \sqrt{x},\ dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$f(99.4) \approx \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}}(-0.6) = 9.97$$

Calculadora: 9.97

45. $f(x) = \sqrt[4]{x},\ dy = \dfrac{1}{4x^{3/4}}\,dx$

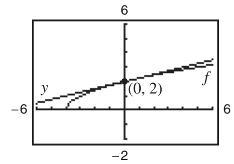
$$f(624) \approx \sqrt[4]{625} + \frac{1}{4(625)^{3/4}}(-1) = 4.998$$

Calculadora: 4.998

47. $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - 2 = \frac{1}{4}x$

$y = 2 + x/4$



49. El valor de dy se aproxima al valor de Δy cuando Δx decrece.

51. *a)* $f(x) = \sqrt{x};\ dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$f(4.02) \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.02) = 2 + \frac{1}{4}(0.02)$$

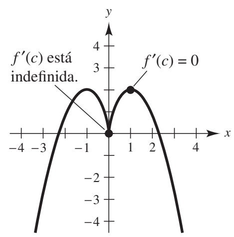
b) $f(x) = \tan x;\ dy = \mathrm{s}^2\, x\,dx$

$f(0.05) \approx \tan 0 + \mathrm{s}^2(0)\,(0.05) = 0 + 1(0.05)$

53. Verdadero **55.** Verdadero

Ejercicios de repaso para el capítulo 3 (página 242)

1. Sea f una función definida en c. Si $f'(c) = 0$ o si f' está indefinida en c, entonces c es un número crítico de f.

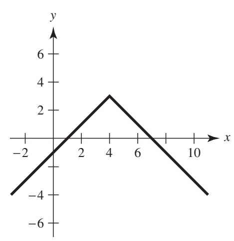


3. Máximo: (0, 0)
Mínimo: $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

5. Máximo: $(2\pi, 17.57)$
Mínimo: (2.73, 0.88)

7. $f(0) \neq f(4)$ **9.** No es continua en $[-2, 2]$

11. *a)*



b) f no es derivable en $x = 4$.

13. $f'\left(\dfrac{2\,744}{729}\right) = \dfrac{3}{7}$ **15.** f no es derivable en $x = 5$.

17. $f'(0) = 1$ **19.** $c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

21. Número crítico: $x = -\frac{3}{2}$
Creciente en $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$; decreciente en $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$

23. Números críticos: $x = 1, \frac{7}{3}$
Creciente en $(-\infty, 1), \left(\frac{7}{3}, \infty\right)$; decreciente en $\left(1, \frac{7}{3}\right)$

25. Número crítico: $x = 1$
Creciente en $(1, \infty)$; decreciente en $(0, 1)$

27. Máximo relativo: $\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{6}, \dfrac{5\sqrt{15}}{9}\right)$

Mínimo relativo: $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{6}, -\dfrac{5\sqrt{15}}{9}\right)$

29. Mínimo relativo: $(2, -12)$

31. *a)* $y = \frac{1}{4}$ pulg; $v = 4$ pulg/s *b)* Demostración
c) Periodo: $\pi/6$; frecuencia: $6/\pi$

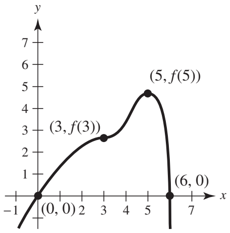
33. $(3, -54)$; cóncava hacia arriba: $(3, \infty)$; cóncava hacia abajo: $(-\infty, 3)$

35. $(\pi/2, \pi/2)$, $(3\pi/2, 3\pi/2)$; cóncava hacia arriba: $(\pi/2, 3\pi/2)$; cóncava hacia abajo: $(0, \pi/2)$, $(3\pi/2, 2\pi)$

37. Mínimo relativo: $(-9, 0)$

39. Máximos relativos: $\left(\sqrt{2}/2, 1/2\right), \left(-\sqrt{2}/2, 1/2\right)$
Mínimo relativo: $(0, 0)$

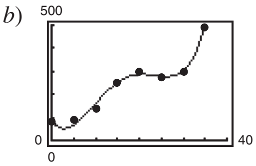
41.



43. Creciente y cóncava hacia abajo

45. *a)* $D = 0.00430t^4 - 0.2856t^3 + 5.833t^2 - 26.85t + 87.1$

b)



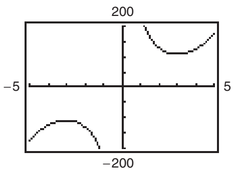
c) Máximo en 2005; mínimo en 1972 *d)* 2005

47. 8 **49.** $\frac{2}{3}$ **51.** $-\infty$ **53.** 0 **55.** 6

57. Asíntota vertical: $x = 0$; asíntota horizontal: $y = -2$

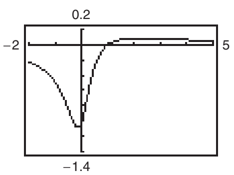
59. Asíntota vertical: $x = 4$; asíntota horizontal: $y = 2$

61.



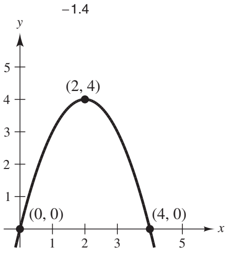
Asíntota vertical: $x = 0$
Mínimo relativo: $(3, 108)$
Máximo relativo: $(-3, -108)$

63.

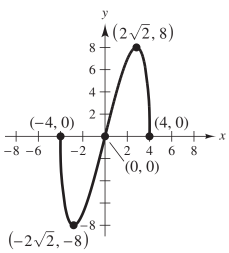


Asíntota horizontal: $y = 0$
Mínimo relativo: $(-0.155, -1.077)$
Máximo relativo: $(2.155, 0.077)$

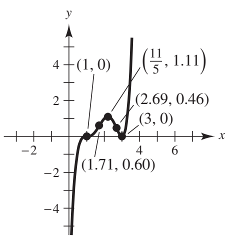
65.



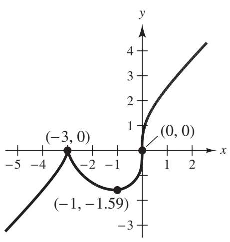
67.



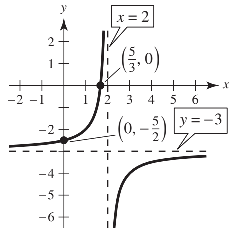
69.



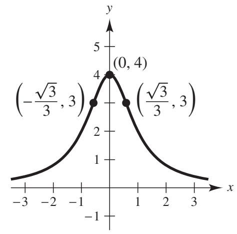
71.



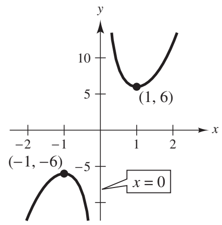
73.



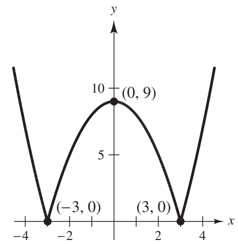
75.



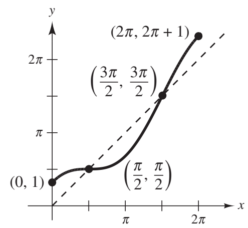
77.



79.



81.



83. *a)* y *b)* máximo: $(1, 3)$
Mínimo: $(1, 1)$

85. $t \approx 4.92 \approx$ 4:55 P.M.; $d \approx 64$ km

87. $(0, 0), (5, 0), (0, 10)$ **89.** Demostración **91.** 14.05 pies

93. $3(3^{2/3} + 2^{2/3})^{3/2} \approx 21.07$ pies **95.** $v \approx 54.77$ mi/h

97. $-1.532, -0.347, 1.879$ **99.** $-1.164, 1.453$

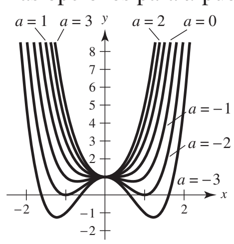
101. $dy = (1 - \cos x + x \operatorname{sen} x)\, dx$

103. $dS = \pm 1.8\pi \text{ cm}^2, \dfrac{dS}{S} \times 100 \approx \pm 0.56\%$

$dV = \pm 8.1\pi \text{ cm}^3, \dfrac{dV}{V} \times 100 \approx \pm 0.83\%$

SP Solución de problemas (página 245)

1. Las opciones para a pueden variar.



a) Un mínimo relativo en $(0, 1)$ para $a \geq 0$
b) Un máximo relativo en $(0, 1)$ para $a < 0$
c) Dos mínimos relativos para $a < 0$ cuando $x = \pm\sqrt{-a/2}$
d) Si $a < 0$, hay tres puntos críticos; si $a \geq 0$, sólo hay un punto crítico.

3. Todas las c, donde c es un número real. **5 a 7.** Demostraciones

9. Alrededor de 9.19 pies

11. Mínimo: $\left(\sqrt{2} - 1\right)d$; no hay máximo.

13. *a)* a *c)* Demostraciones

15. *a)*

x	0	0.5	1	2
$\sqrt{1 + x}$	1	1.2247	1.4142	1.7321
$\frac{1}{2}x + 1$	1	1.25	1.5	2

b) Demostración

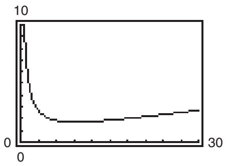
17. *a)*

v	20	40	60	80	100
s	5.56	11.11	16.67	22.22	27.78
d	5.1	13.7	27.2	44.2	66.4

$d(s) = 0.071s^2 + 0.389s + 0.727$

b) La distancia entre la parte posterior del primer vehículo y la parte delantera del segundo es $d(s)$, la distancia de frenado segura. El primer vehículo pasa por el punto dado en $5.5/s$ segundos, y el segundo necesita $d(s)/s$ segundos más. Por tanto, $T = d(s)/s + 5.5/s$.

c)

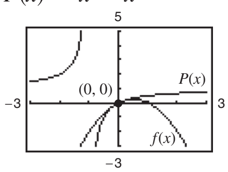


$s \approx 9.365$ m/s

d) $s \approx 9.365$ m/s; 1.719 s; 33.714 km/h *e)* 10.597 m

19. *a)* $P(x) = x - x^2$

b)



Capítulo 4

Sección 4.1 (página 255)

1 a 3. Demostraciones **5.** $y = 3t^3 + C$ **7.** $y = \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
9.	$\int \sqrt[3]{x}\,dx$	$\int x^{1/3}\,dx$	$\dfrac{x^{4/3}}{4/3} + C$	$\dfrac{3}{4}x^{4/3} + C$
11.	$\int \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$	$\int x^{-3/2}\,dx$	$\dfrac{x^{-1/2}}{-1/2} + C$	$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} + C$
13.	$\int \dfrac{1}{2x^3}\,dx$	$\dfrac{1}{2}\int x^{-3}\,dx$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^{-2}}{-2}\right) + C$	$-\dfrac{1}{4x^2} + C$

15. $\frac{1}{2}x^2 + 7x + C$ **17.** $x^2 - x^3 + C$ **19.** $\frac{1}{6}x^6 + x + C$

21. $\frac{2}{5}x^{5/2} + x^2 + x + C$ **23.** $\frac{3}{5}x^{5/3} + C$ **25.** $-1/(4x^4) + C$

27. $\frac{2}{3}x^{3/2} + 12x^{1/2} + C = \frac{2}{3}x^{1/2}(x + 18) + C$

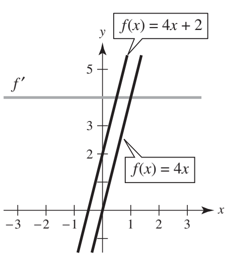
29. $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

31. $\frac{2}{7}y^{7/2} + C$ **33.** $x + C$ **35.** $5 \operatorname{sen} x - 4 \cos x + C$

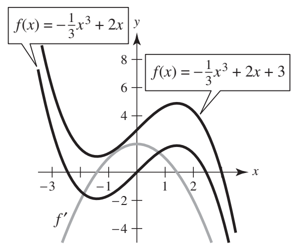
37. $t + \csc t + C$ **39.** $\tan\theta + \cos\theta + C$ **41.** $\tan y + C$

43. $-\csc x + C$

45. Las respuestas varían. Ejemplo:

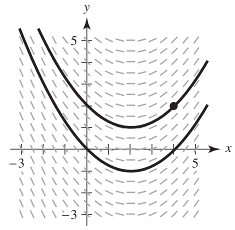


47. Las respuestas varían. Ejemplo:

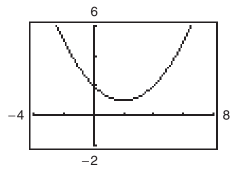


49. $y = x^2 - x + 1$

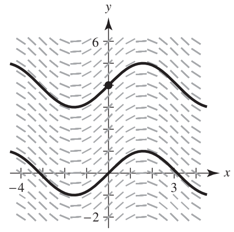
51. *a)* Las respuestas varían. Ejemplo:



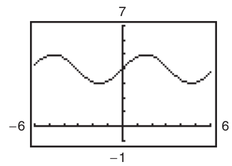
b) $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$



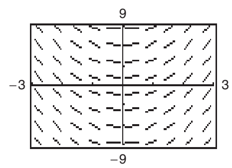
53. *a)* Las respuestas varían. Ejemplo:



b) $y = \operatorname{sen} x + 4$

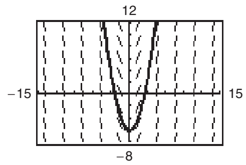


55. *a)*



b) $y = x^2 - 6$

c)



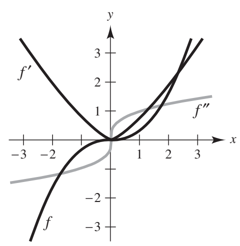
57. $f(x) = 3x^2 + 8$ **59.** $h(t) = 2t^4 + 5t - 11$

61. $f(x) = x^2 + x + 4$ **63.** $f(x) = -4\sqrt{x} + 3x$

65. *a)* $h(t) = \frac{3}{4}t^2 + 5t + 12$ *b)* 69 cm

67. Cuando se evalúa la integral $\int f(x)\,dx$, se encuentra una función $F(x)$ que es una antiderivada de $f(x)$. Por tanto no existe diferencia.

69.



71. 62.25 pies **73.** $v_0 \approx 187.617$ pies/s

75. $v(t) = -9.8t + C_1 = -9.8t + v_0$
$f(t) = -4.9t^2 + v_0t + C_2 = -4.9t^2 + v_0t + s_0$

77. 7.1 m **79.** 320 m; -32 m/s

81. *a)* $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$; $a(t) = 6t - 12$
b) (0, 1), (3, 5) *c)* -3

83. $a(t) = -1/(2t^{3/2})$; $x(t) = 2\sqrt{t} + 2$

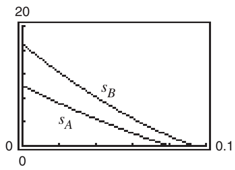
85. *a)* 1.18 m/s² *b)* 190 m

87. *a)* 300 pies *b)* 60 pies/s ≈ 41 mi/h

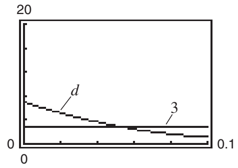
89. *a)* Aeroplano A: $s_A = \dfrac{625}{2}t^2 - 150t + 10$

Aeroplano B: $s_B = \dfrac{49\,275}{68}t^2 - 250t + 17$

b)



c) $d = \dfrac{28\,025}{68}t^2 - 100t + 7$

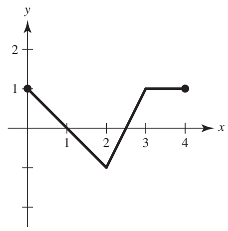


Sí, $d < 3$ para $t > 0.0505$ h

91. Verdadero **93.** Verdadero

95. Falso. f tiene un número infinito de antiderivadas, cada una de ellas difieren por una constante.

97.



99. Demostración

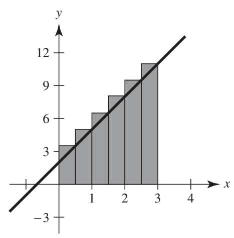
Sección 4.2 (página 267)

1. 75 **3.** $\dfrac{158}{85}$ **5.** $4c$ **7.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{11} \frac{1}{5i}$ **9.** $\displaystyle\sum_{j=1}^{6} \left[7\left(\frac{j}{6}\right) + 5\right]$

11. $\displaystyle\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3 - \left(\frac{2i}{n}\right)\right]$ **13.** $\displaystyle\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[2\left(1 + \frac{3i}{n}\right)^2\right]$ **15.** 84

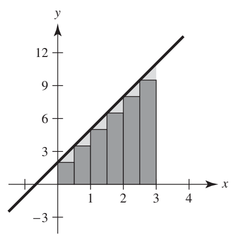
17. 1 200 **19.** 2 470 **21.** 12 040 **23.** 2 930

25. *a)*



Área ≈ 21.75

b)



Área ≈ 17.25

27. $13 <$ (área de región) < 15

29. $55 <$ (área de región) < 74.5

31. $0.7908 <$ (área de región) < 1.1835

33. El área de la región sombreada cae entre 12.5 y 16.5 unidades cuadradas.

35. El área de la región sombreada cae entre 7 y 11 unidades cuadradas.

37. $\frac{81}{4}$ **39.** 9 **41.** $A \approx S \approx 0.768$, $A \approx s \approx 0.518$ **43.** $A \approx S \approx 0.746$, $A \approx s \approx 0.646$

45. $(n + 2)/n$

$n = 10$: $S = 1.2$

$n = 100$: $S = 1.02$

$n = 1\,000$: $S = 1.002$

$n = 10\,000$: $S = 1.0002$

47. $[2(n + 1)(n - 1)]/n^2$

$n = 10$: $S = 1.98$

$n = 100$: $S = 1.9998$

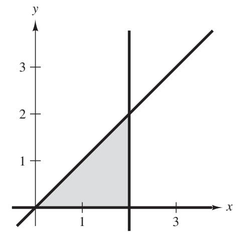
$n = 1\,000$: $S = 1.999998$

$n = 10\,000$: $S = 1.99999998$

49. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{12(n + 1)}{n}\right] = 12$ **51.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3}\right) = \frac{1}{3}$

53. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}[(3n + 1)/n] = 3$

55. *a)*



b) $\Delta x = (2 - 0)/n = 2/n$

c) $\displaystyle s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n}[(i - 1)(2/n)](2/n)$

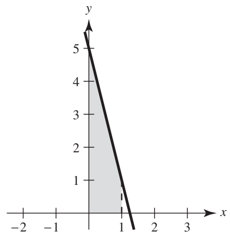
d) $\displaystyle S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n}[i(2/n)](2/n)$

e)

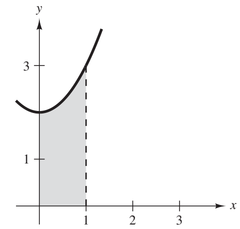
n	5	10	50	100
$s(n)$	1.6	1.8	1.96	1.98
$S(n)$	2.4	2.2	2.04	2.02

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[(i - 1)(2/n)](2/n) = 2;\ \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[i(2/n)](2/n) = 2$

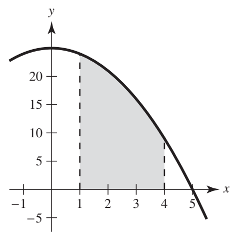
57. $A = 3$



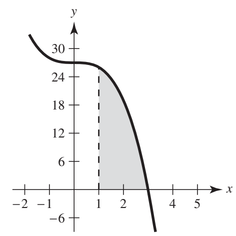
59. $A = \frac{7}{3}$



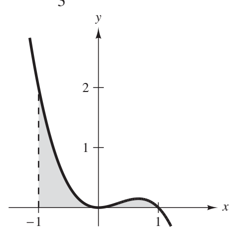
61. $A = 54$



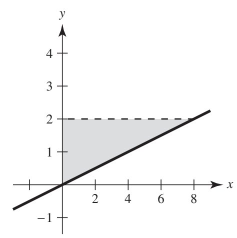
63. $A = 34$



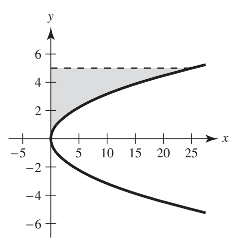
65. $A = \frac{2}{3}$



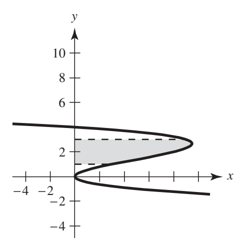
67. $A = 8$



69. $A = \frac{125}{3}$



71. $A = \frac{44}{3}$



73. $\frac{69}{8}$ **75.** 0.345

77.

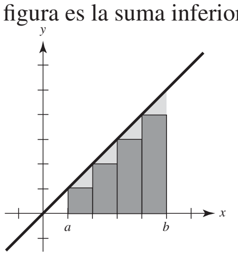
n	4	8	12	16	20
Área aproximada	5.3838	5.3523	5.3439	5.3403	5.3384

79.

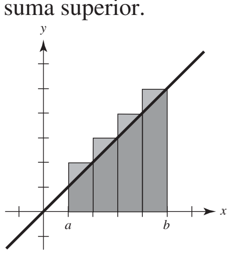
n	4	8	12	16	20
Área aproximada	2.2223	2.2387	2.2418	2.2430	2.2435

81. *b*

83. Se puede utilizar la recta $y = x$ acotada por $x = a$ y $x = b$. La suma de las áreas de los rectángulos inscritos en la siguiente figura es la suma inferior.

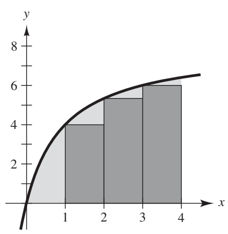


La suma de las áreas de los rectángulos circunscritos en la siguiente figura es la suma superior.



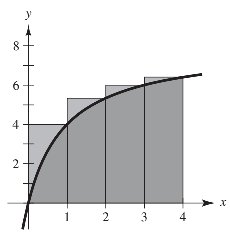
Los rectángulos de la primera gráfica no incluyen totalmente el área de la región, mientras que los rectángulos de la segunda gráfica abarcan un área mayor a la de la región. El valor exacto del área se encuentra entre estas dos sumas.

85. *a*)



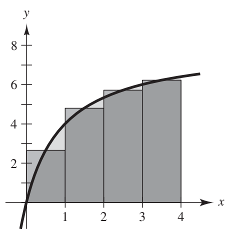
$s(4) = \frac{46}{3}$

b)



$S(4) = \frac{326}{15}$

c)



$M(4) = \frac{6\,112}{315}$

d) Demostración

e)

n	4	8	20	100	200
$s(n)$	15.333	17.368	18.459	18.995	19.060
$S(n)$	21.733	20.568	19.739	19.251	19.188
$M(n)$	19.403	19.201	19.137	19.125	19.125

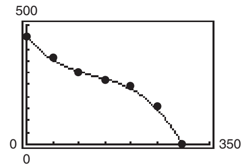
f) Como f es una función creciente, $s(n)$ es siempre creciente y $S(n)$ es siempre decreciente.

87. Verdadero

89. Supóngase que la figura tiene n filas y $n + 1$ columnas. Las estrellas de la izquierda suman $1 + 2 + \cdots + n$, al igual que las estrellas de la derecha. Hay $n(n + 1)$ estrellas en total. Por tanto $2[1 + 2 + \cdots + n] = n(n + 1)$ de manera que $1 + 2 + \cdots + n = [n(n + 1)]/2$.

91. *a*) $y = (-4.09 \times 10^{-5})x^3 + 0.016x^2 - 2.67x + 452.9$

b)



c) 76 897.5 pies^2

93. Demostración

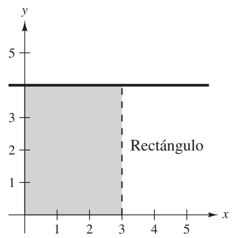
Sección 4.3 (página 278)

1. $2\sqrt{3} \approx 3.464$ **3.** 32 **5.** 0 **7.** $\frac{10}{3}$ **9.** $\int_{-1}^{5} (3x + 10)\, dx$

11. $\int_0^3 \sqrt{x^2 + 4}\, dx$ **13.** $\int_0^4 5\, dx$ **15.** $\int_{-4}^{4} (4 - |x|)\, dx$

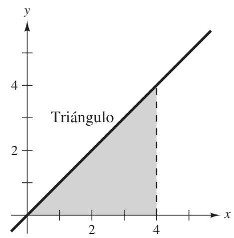
17. $\int_{-5}^{5} (25 - x^2)\, dx$ **19.** $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$ **21.** $\int_0^2 y^3\, dy$

23.



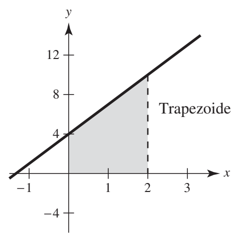
$A = 12$

25.



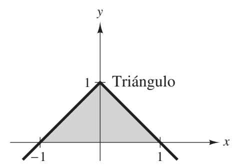
$A = 8$

27.



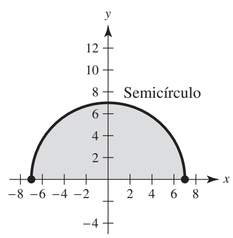
$A = 14$

29.



$A = 1$

31.



$A = 49\pi/2$

33. -6 **35.** 48 **37.** -12

39. 16 **41.** *a*) 13 *b*) -10 *c*) 0 *d*) 30

43. *a*) 8 *b*) -12 *c*) -4 *d*) 30 **45.** -48, 88

47. *a*) $-\pi$ *b*) 4 *c*) $-(1 + 2\pi)$ *d*) $3 - 2\pi$
e) $5 + 2\pi$ *f*) $23 - 2\pi$

49. *a*) 14 *b*) 4 *c*) 8 *d*) 0 **51.** 81

53. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x > \int_1^5 f(x)\, dx$

55. No. Hay una discontinuidad en $x = 4$. **57.** *a* **59.** *d*

61.

n	4	8	12	16	20
$L(n)$	3.6830	3.9956	4.0707	4.1016	4.1177
$M(n)$	4.3082	4.2076	4.1838	4.1740	4.1690
$R(n)$	3.6830	3.9956	4.0707	4.1016	4.1177

63.

n	4	8	12	16	20
$L(n)$	0.5890	0.6872	0.7199	0.7363	0.7461
$M(n)$	0.7854	0.7854	0.7854	0.7854	0.7854
$R(n)$	0.9817	0.8836	0.8508	0.8345	0.8247

65. Verdadero **67.** Verdadero

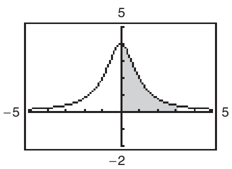
69. Falso: $\int_0^2 (-x)\, dx = -2$ **71.** 272 **73.** Demostración

75. No. No importa lo pequeño que sean los intervalos, la cantidad de números racionales e irracionales en cada intervalo es infinita y $f(c_i) = 0$ o $f(c_i) = 1$.

77. $a = -1$ y $b = 1$ maximizan la integral. **79.** $\frac{1}{3}$

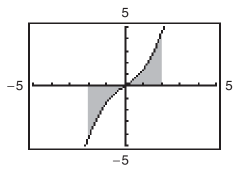
Sección 4.4 (página 293)

1.



Positiva

3.



Cero

5. 12 **7.** -2 **9.** $-\frac{10}{3}$ **11.** $\frac{1}{3}$ **13.** $\frac{1}{2}$ **15.** $\frac{2}{3}$ **17.** -4

19. $-\frac{1}{18}$ **21.** $-\frac{27}{20}$ **23.** $\frac{25}{2}$ **25.** $\frac{64}{3}$ **27.** $\pi + 2$

29. $\pi/4$ **31.** $2\sqrt{3}/3$ **33.** 0 **35.** $\frac{1}{6}$ **37.** 1 **39.** $\frac{52}{3}$

41. 20 **43.** $\frac{32}{3}$ **45.** $3\sqrt[3]{2}/2 \approx 1.8899$

47. $\frac{1444}{225} \approx 6.4178$ **49.** $\pm\arccos\sqrt{\pi}/2 \approx \pm 0.4817$

51. Valor promedio $= 6$
$x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.7321$

53. Valor promedio $= \frac{1}{4}$
$x = \sqrt[3]{2}/2 \approx 0.6300$

55. Valor promedio $= 2/\pi$
$x \approx 0.690,\ x \approx 2.451$

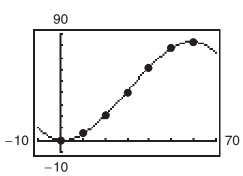
57. ≈ 540 pies

59. *a)* 8 *b)* $\frac{4}{3}$ *c)* $\int_1^7 f(x)\, dx = 20$; valor promedio $= \frac{10}{3}$

61. *a)* $F(x) = 500\, s^2 x$ *b)* $1\,500\sqrt{3}/\pi \approx 827$ N

63. ≈ 0.5318 L

65. *a)* $v = -0.00086t^3 + 0.0782t^2 - 0.208t + 0.10$
b)



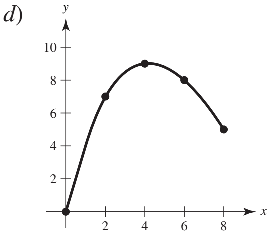
c) 2 475.6 m

67. $F(x) = 2x^2 - 7x$
$F(2) = -6$
$F(5) = 15$
$F(8) = 72$

69. $F(x) = -20/x + 20$
$F(2) = 10$
$F(5) = 16$
$F(8) = \frac{35}{2}$

71. $F(x) = \text{sen}\, x - \text{sen}\, 1$
$F(2) = \text{sen}\, 2 - \text{sen}\, 1 \approx 0.0678$
$F(5) = \text{sen}\, 5 - \text{sen}\, 1 \approx -1.8004$
$F(8) = \text{sen}\, 8 - \text{sen}\, 1 \approx 0.1479$

73. *a)* $g(0) = 0,\ g(2) \approx 7,\ g(4) \approx 9,\ g(6) \approx 8,\ g(8) \approx 5$
b) Creciente: $(0, 4)$; decreciente: $(4, 8)$
c) Se presenta un máximo en $x = 4$.
d)

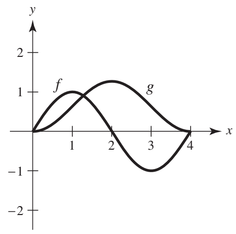


75. $\frac{1}{2}x^2 + 2x$ **77.** $\frac{3}{4}x^{4/3} - 12$ **79.** $\tan x - 1$

81. $x^2 - 2x$ **83.** $\sqrt{x^4 + 1}$ **85.** $x \cos x$ **87.** 8

89. $\cos x\sqrt{\text{sen}\, x}$ **91.** $3x^2\, \text{sen}\, x^6$

93.



Se presenta un extremo de g en $x = 2$.

95. *a)* $C(x) = 1\,000(12x^{5/4} + 125)$
b) $C(1) = \$137\,000$
$C(5) \approx \$214\,721$
$C(10) \approx \$338\,394$

97. *a)* $\frac{3}{2}$ pies a la derecha *b)* $\frac{113}{10}$ pies **99.** *a)* 0 pies *b)* $\frac{63}{2}$ pies

101. *a)* 2 pies a la derecha *b)* 2 pies **103.** 28 unidades **105.** 8 190 L

107. $f(x) = x^{-2}$ tiene una discontinuidad no removible en $x = 0$.

109. $f(x) = s^2\, x$ tiene una discontinuidad no removible en $x = \pi/2$.

111. $2/\pi \approx 63.7\%$ **113.** Verdadero

115. $f'(x) = \dfrac{1}{(1/x)^2 + 1}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$

Debido a que $f'(x) = 0$, $f(x)$ es constante.

117. *a)* 0 *b)* 0 *c)* $xf(x) + \int_0^x f(t)\, dt$ *d)* 0

Sección 4.5 (página 306)

$\int f(g(x))g'(x)\, dx$	$u = g(x)$	$du = g'(x)\, dx$
1. $\int (8x^2 + 1)^2(16x)\, dx$	$8x^2 + 1$	$16x\, dx$
3. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$	$x^2 + 1$	$2x\, dx$
5. $\int \tan^2 x \sec^2 x\, dx$	$\tan x$	$\sec^2 x\, dx$

7. No **9.** Sí **11.** $\frac{1}{5}(1 + 6x)^5 + C$

13. $\frac{2}{3}(25 - x^2)^{3/2} + C$ **15.** $\frac{1}{12}(x^4 + 3)^3 + C$

17. $\frac{1}{15}(x^3 - 1)^5 + C$ **19.** $\frac{1}{3}(t^2 + 2)^{3/2} + C$

21. $-\frac{15}{8}(1 - x^2)^{4/3} + C$ **23.** $1/[4(1 - x^2)^2] + C$

25. $-1/[3(1 + x^3)] + C$ **27.** $-\sqrt{1 - x^2} + C$

29. $-\frac{1}{4}(1 + 1/t)^4 + C$ **31.** $\sqrt{2x} + C$

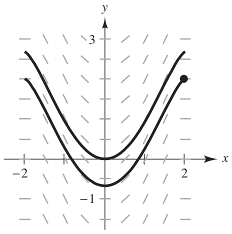
33. $\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{10}{3}x^{3/2} - 16x^{1/2} + C = \frac{1}{15}\sqrt{x}(6x^2 + 50x - 240) + C$

35. $\frac{1}{4}t^4 - 4t^2 + C$

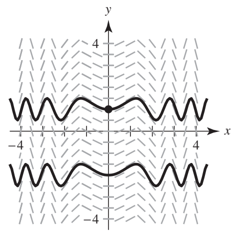
37. $6y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} + C = \frac{2}{5}y^{3/2}(15 - y) + C$

39. $2x^2 - 4\sqrt{16 - x^2} + C$ **41.** $-1/[2(x^2 + 2x - 3)] + C$

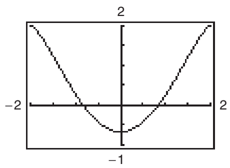
43. *a*) Las respuestas varían. Ejemplo:



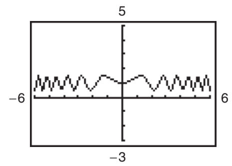
45. *a*) Las respuestas varían. Ejemplo:



b) $y = -\frac{1}{3}(4 - x^2)^{3/2} + 2$



b) $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + 1$



47. $-\cos(\pi x) + C$ **49.** $-\frac{1}{4}\cos 4x + C$ **51.** $-\operatorname{sen}(1/\theta) + C$

53. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x + C$ o $-\frac{1}{4}\cos^2 2x + C_1$ o $-\frac{1}{8}\cos 4x + C_2$

55. $\frac{1}{5}\tan^5 x + C$ **57.** $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$ o $\frac{1}{2}\sec^2 x + C_1$

59. $-\cot x - x + C$ **61.** $f(x) = 2\cos(x/2) + 4$

63. $f(x) = -\frac{1}{2}\cos 4x - 1$ **65.** $f(x) = \frac{1}{12}(4x^2 - 10)^3 - 8$

67. $\frac{2}{5}(x + 6)^{5/2} - 4(x + 6)^{3/2} + C = \frac{2}{5}(x + 6)^{3/2}(x - 4) + C$

69. $-\left[\frac{2}{3}(1 - x)^{3/2} - \frac{4}{5}(1 - x)^{5/2} + \frac{2}{7}(1 - x)^{7/2}\right] + C =$
$-\frac{2}{105}(1 - x)^{3/2}(15x^2 + 12x + 8) + C$

71. $\frac{1}{8}\left[\frac{2}{5}(2x - 1)^{5/2} + \frac{4}{3}(2x - 1)^{3/2} - 6(2x - 1)^{1/2}\right] + C =$
$\left(\sqrt{2x - 1}/15\right)(3x^2 + 2x - 13) + C$

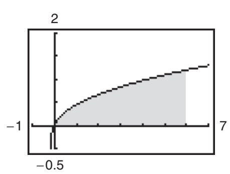
73. $-x - 1 - 2\sqrt{x + 1} + C$ o $-\left(x + 2\sqrt{x + 1}\right) + C_1$

75. 0 **77.** $12 - \frac{8}{9}\sqrt{2}$ **79.** 2 **81.** $\frac{1}{2}$ **83.** $\frac{4}{15}$ **85.** $3\sqrt{3}/4$

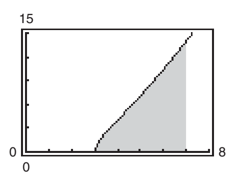
87. $f(x) = (2x^3 + 1)^3 + 3$ **89.** $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} - 3$

91. 1 209/28 **93.** 4 **95.** $2\left(\sqrt{3} - 1\right)$

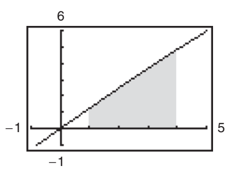
97. $\frac{14}{3}$



99. $\frac{144}{5}$



101. 9.21



103. $\frac{272}{15}$ **105.** $\frac{2}{3}$ **107.** *a*) $\frac{64}{3}$ *b*) $\frac{128}{3}$ *c*) $-\frac{64}{3}$ *d*) 64

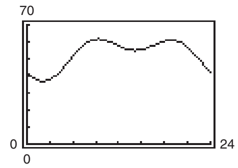
109. $2\int_0^3 (4x^2 - 6)\,dx = 36$

111. Si $u = 5 - x^2$, entonces $du = -2x\,dx$ y
$\int x(5 - x^2)^3\,dx = -\frac{1}{2}\int(5 - x^2)^3(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int u^3\,du$.

113. 16 **115.** \$250 000

117. *a*) Mínimo relativo: (6.7, 0.7) o julio
Mínimo relativo: (1.3, 5.1) o febrero
b) 36.68 pulg *c*) 3.99 pulg

119. *a*)



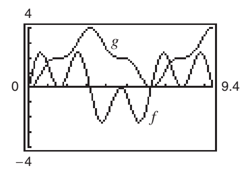
Flujo máximo:
$R \approx 61.713$ en $t = 9.36$.

b) 1 272 miles de galones

121. *a*) $P_{0.50,\,0.75} \approx 35.3\%$ *b*) $b \approx 58.6\%$

123. *a*) \$9.17 *b*) \$3.14

125. *a*)

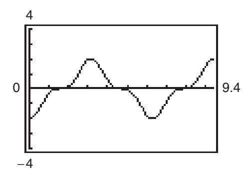


b) *g* es no negativa porque la gráfica de *f* es positiva al principio, y por lo general tiene más secciones positivas que negativas.

c) Los puntos de *g* que corresponden a extremos de *f* son puntos de inflexión de *g*.

d) No, algunos ceros de *f* como $x = \pi/2$, no corresponden a extremos de *g*. La gráfica de *g* sigue creciendo después de que $x = \pi/2$ porque *f* sigue estando por arriba del eje *x*.

e)



La gráfica de *h* es la de *g* trasladada dos unidades hacia abajo.

127. *a*) Demostración *b*) Demostración

129. Falso. $\int (2x + 1)^2\,dx = \frac{1}{6}(2x + 1)^3 + C$

131. Verdadero **133.** Verdadero **135 a 137.** Demostraciones

139. Problema Putnam A1, 1958

Sección 4.6 (página 316)

	Trapezoidal	*De Simpson*	*Exacta*
1.	2.7500	2.6667	2.6667
3.	4.2500	4.0000	4.0000
5.	20.2222	20.0000	20.0000
7.	12.6640	12.6667	12.6667
9.	0.3352	0.3334	0.3333

	Trapezoidal	*De Simpson*	*Calculadora*
11.	3.2833	3.2396	3.2413
13.	0.3415	0.3720	0.3927
15.	0.5495	0.5483	0.5493
17.	−0.0975	−0.0977	−0.0977
19.	0.1940	0.1860	0.1858

21. Trapezoidal: Polinomios lineales (1er. grado)
De Simpson: Polinomios cuadráticos (2o. grado)

23. *a*) 1.500 *b*) 0.000 **25.** *a*) 0.01 *b*) 0.0005

27. *a*) 0.1615 *b*) 0.0066 **29.** *a*) $n = 366$ *b*) $n = 26$

31. *a*) $n = 77$ *b*) $n = 8$ **33.** *a*) $n = 287$ *b*) $n = 16$

35. *a*) $n = 130$ *b*) $n = 12$ **37.** *a*) $n = 643$ *b*) $n = 48$

39. *a*) 24.5 *b*) 25.67 **41.** Las respuestas varían.

43.

n	$L(n)$	$M(n)$	$R(n)$	$T(n)$	$S(n)$
4	0.8739	0.7960	0.6239	0.7489	0.7709
8	0.8350	0.7892	0.7100	0.7725	0.7803
10	0.8261	0.7881	0.7261	0.7761	0.7818
12	0.8200	0.7875	0.7367	0.7783	0.7826
16	0.8121	0.7867	0.7496	0.7808	0.7836
20	0.8071	0.7864	0.7571	0.7821	0.7841

45. 0.701 **47.** 17.476

49. *a*) Regla trapezoidal: 12.518; regla de Simpson: 12.592

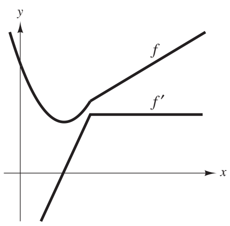
b) $y = -1.37266x^3 + 4.0092x^2 - 0.620x + 4.28$

$\int_0^2 y\,dx \approx 12.521$

51. 3.14159 **53.** 7 435 m^2 **55.** 2.477

Ejercicios de repaso para el capítulo 4 (página 318)

1.



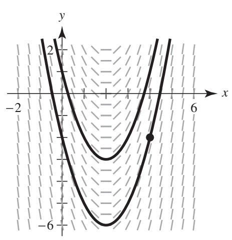
3. $\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$

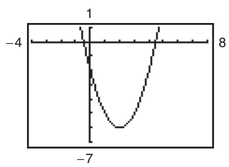
5. $x^2/2 - 4/x^2 + C$ **7.** $x^2 + 9\cos x + C$

9. $y = 1 - 3x^2$

11. *a*) Las respuestas varían. *b*) $y = x^2 - 4x - 2$

Ejemplo:





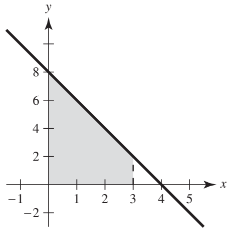
13. 240 pies/s **15.** *a*) 3 s; 144 pies *b*) $\frac{3}{2}$ s *c*) 108 pies

17. $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{3n}$ **19.** 420 **21.** 3 310

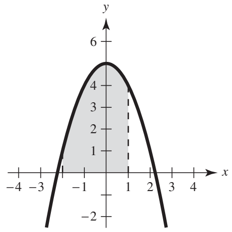
23. *a*) $\sum_{i=1}^{10}(2i - 1)$ *b*) $\sum_{i=1}^{n} i^3$ *c*) $\sum_{i=1}^{10}(4i + 2)$

25. 9.038 < (área de región) < 13.038

27. $A = 15$

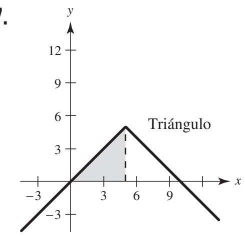


29. $A = 12$



31. $\frac{27}{2}$ **33.** $\int_4^6 (2x - 3)\,dx$ **35.** $\int_{-4}^0 (2x + 8)\,dx$

37.

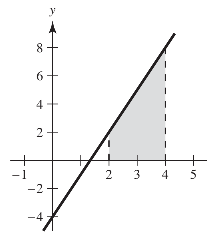


$A = \frac{25}{2}$

39. *a*) 17 *b*) 7 *c*) 9 *d*) 84

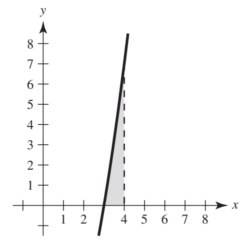
41. 56 **43.** 0 **45.** $\frac{422}{5}$ **47.** $(\sqrt{2} + 2)/2$

49.



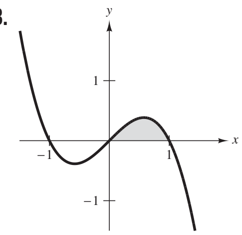
$A = 10$

51.



$A = \frac{10}{3}$

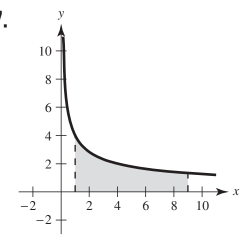
53.



$A = \frac{1}{4}$

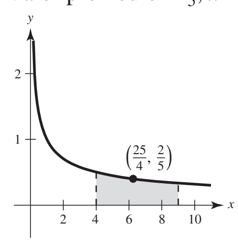
55. $-\cos 2 + 1 \approx 1.416$

57.



$A = 16$

59. Valor promedio $= \frac{2}{5}$, $x = \frac{25}{4}$



61. $x^2\sqrt{1 + x^3}$ **63.** $x^2 + 3x + 2$

65. $-\frac{1}{7}x^7 + \frac{9}{5}x^5 - 9x^3 + 27x + C$ **67.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 3} + C$

69. $-\frac{1}{30}(1 - 3x^2)^5 + C = \frac{1}{30}(3x^2 - 1)^5 + C$

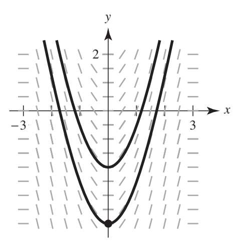
71. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + C$ **73.** $-2\sqrt{1 - \operatorname{sen}\theta} + C$

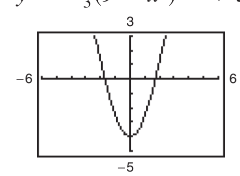
75. $\frac{1}{3\pi}(1 + \sec \pi x)^3 + C$

77. 21/4 **79.** 2 **81.** $28\pi/15$ **83.** 2

85. *a*) Las respuestas varían. *b*) $y = -\frac{1}{3}(9 - x^2)^{3/2} + 5$

Ejemplo:





87. $\frac{468}{7}$

89. *a)* $\int_0^{12} [2.880 + 2.125 \operatorname{sen}(0.578t + 0.745)]\, dt \approx 36.63$ pulg
b) 2.22 pulg

91. Regla trapezoidal: 0.285
Regla de Simpson: 0.284
Calculadora: 0.284

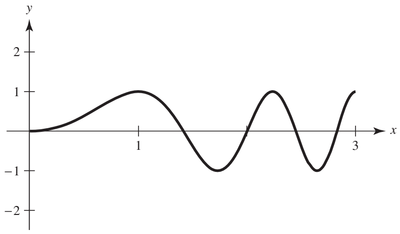
93. Regla trapezoidal: 0.637
Regla de Simpson: 0.685
Calculadora: 0.704

SP Solución de problemas (página 321)

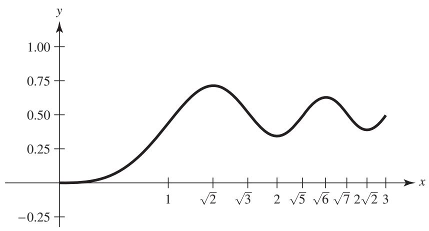
1. *a)* $L(1) = 0$ *b)* $L'(x) = 1/x,\ L'(1) = 1$
c) $x \approx 2.718$ *d)* Demostración

3. *a)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{32}{n^5}\sum_{i=1}^{n} i^4 - \frac{64}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{32}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$
b) $(16n^4 - 16)/(15n^4)$ *c)* $16/15$

5. *a)*

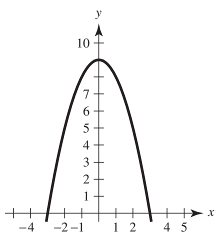


b)



c) Máximos relativos en $x = \sqrt{2}, \sqrt{6}$
Mínimos relativos en $x = 2, 2\sqrt{2}$
d) Puntos de inflexión en $x = 1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$

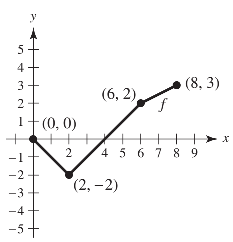
7. *a)*



Área = 36

b) Base = 6, altura = 9
Área $= \frac{2}{3}bh = \frac{2}{3}(6)(9) = 36$
c) Demostración

9. *a)*



b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{7}{2}$	-4	$-\frac{7}{2}$	-2	$\frac{1}{4}$	3

c) $x = 4, 8$ *d)* $x = 2$

11. Demostración **13.** $\frac{2}{3}$ **15.** $1 \le \int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx \le \sqrt{2}$

17. *a)* Demostración *b)* Demostración *c)* Demostración

19. *a)* $R(n), I, T(n), L(n)$
b) $S(4) = \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)] \approx 5.42$

21. $a = -4, b = 4$

Capítulo 5

Sección 5.1 (página 331)

1.

x	0.5	1.5	2	2.5
$\int_1^x (1/t)\, dt$	-0.6932	0.4055	0.6932	0.9163

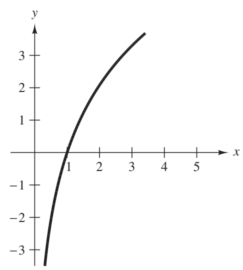
x	3	3.5	4
$\int_1^x (1/t)\, dt$	1.0987	1.2529	1.3865

3. *a)* 3.8067 *b)* $\ln 45 = \int_1^{45} \frac{1}{t}\, dt \approx 3.8067$

5. *a)* -0.2231 *b)* $\ln 0.8 = \int_1^{0.8} \frac{1}{t}\, dt \approx -0.2231$

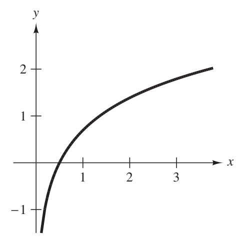
7. *b* **8.** *d* **9.** *a* **10.** *c*

11.



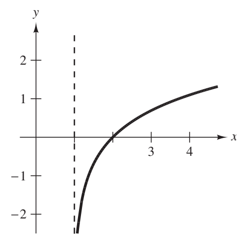
Dominio: $x > 0$

13.



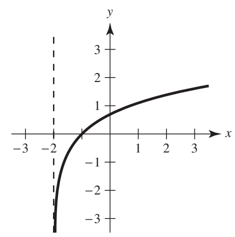
Dominio: $x > 0$

15.



Dominio: $x > 1$

17.



Dominio: $x > -2$

19. *a)* 1.7917 *b)* -0.4055 *c)* 4.3944 *d)* 0.5493

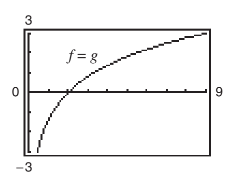
21. $\ln x - \ln 4$ **23.** $\ln x + \ln y - \ln z$

25. $\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 5)$ **27.** $\frac{1}{2}[\ln(x - 1) - \ln x]$

29. $\ln z + 2\ln(z - 1)$

31. $\ln \dfrac{x - 2}{x + 2}$ **33.** $\ln \sqrt[3]{\dfrac{x(x + 3)^2}{x^2 - 1}}$ **35.** $\ln\left(9/\sqrt{x^2 + 1}\right)$

37. *a)*



b) $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{4} = \ln x^2 - \ln 4$
$= 2\ln x - \ln 4$
$= g(x)$

39. $-\infty$ **41.** $\ln 4 \approx 1.3863$ **43.** $y = 3x - 3$

45. $y = 4x - 4$ **47.** $1/x$ **49.** $2/x$ **51.** $4(\ln x)^3/x$

53. $2/(t+1)$ **55.** $\dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$ **57.** $\dfrac{1 - x^2}{x(x^2 + 1)}$

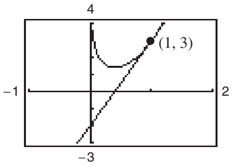
59. $\dfrac{1 - 2\ln t}{t^3}$ **61.** $\dfrac{2}{x \ln x^2} = \dfrac{1}{x \ln x}$ **63.** $\dfrac{1}{1 - x^2}$

65. $\dfrac{-4}{x(x^2 + 4)}$ **67.** $\dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2}$ **69.** $\cot x$

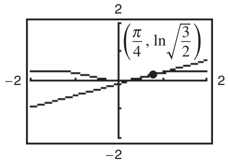
71. $-\tan x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x - 1}$ **73.** $\dfrac{3 \cos x}{(\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 2)}$

75. $[\ln(2x) + 1]/x$

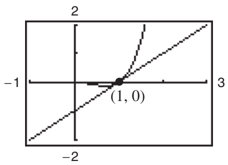
77. *a)* $5x - y - 2 = 0$
b)



79. *a)* $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$
b)



81. *a)* $y = x - 1$
b)



83. $2xy/(3 - 2y^2)$

85. $\dfrac{y(1 - 6x^2)}{1 + y}$ **87.** $y = x - 1$

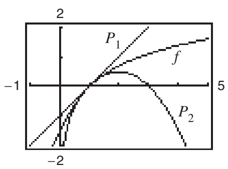
89. $xy'' + y' = x(-2/x^2) + (2/x) = 0$

91. Mínimo relativo: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

93. Mínimo relativo: $(e^{-1}, -e^{-1})$

95. Mínimo relativo: (e, e); punto de inflexión: $(e^2, e^2/2)$

97. $P_1(x) = x - 1$; $P_2(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2$



Los valores de f y P_1 y P_2 y sus primeras derivadas coinciden en $x = 1$.

99. $x \approx 0.567$ **101.** $(2x^2 + 1)/\sqrt{x^2 + 1}$

103. $\dfrac{3x^3 + 15x^2 - 8x}{2(x + 1)^3\sqrt{3x - 2}}$ **105.** $\dfrac{(2x^2 + 2x - 1)\sqrt{x - 1}}{(x + 1)^{3/2}}$

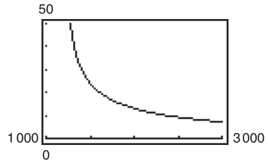
107. El dominio de la función logaritmo natural es $(0, \infty)$ y el rango es $(-\infty, \infty)$. La función es continua, creciente e inyectiva, y su gráfica es cóncava hacia abajo. Además, si a y b son números positivos y n es racional, entonces $\ln(1) = 0$, $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^n) = n \ln a$ y $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$.

109. *a)* Sí. Si la gráfica de g es creciente, entonces $g'(x) > 0$. Como $f(x) > 0$, entonces se sabe que $f'(x) = g'(x)f(x)$ de modo que $f'(x) > 0$. Por tanto, la gráfica de f es creciente.
b) No. Sea $f(x) = x^2 + 1$ (positiva y cóncava hacia arriba) y sea $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ (no cóncava hacia arriba).

111. Falso; $\ln x + \ln 25 = \ln 25x$.

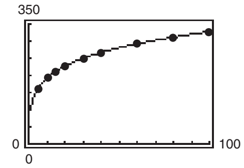
113. Falso; π es una constante, de manera que $\dfrac{d}{dx}[\ln \pi] = 0$.

115. *a)*

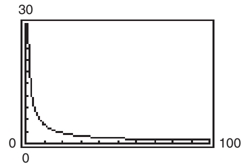


b) 30 años; \$503 434.80
c) 20 años; \$386 685.60
d) Cuando $x = 1\,398.43$, $dt/dx \approx -0.0805$.
Cuando $x = 1\,611.19$, $dt/dx \approx -0.0287$.
e) Una mensualidad mayor tiene dos ventajas: el plazo es más breve y la cantidad pagada es menor.

117. *a)*



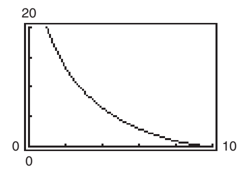
c)



b) $T'(10) \approx 4.75°/\text{lb/pulg}^2$
$T'(70) \approx 0.97°/\text{lb/pulg}^2$

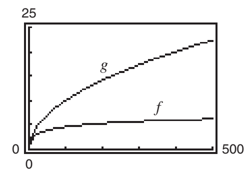
$\lim\limits_{p \to \infty} T'(p) = 0$
Las respuestas varían.

119. *a)*



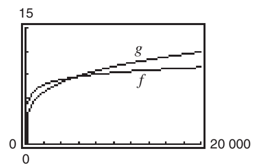
b) Cuando $x = 5$, $dy/dx = -\sqrt{3}$.
Cuando $x = 9$, $dy/dx = -\sqrt{19}/9$.
c) $\lim\limits_{x \to 10^-} \dfrac{dy}{dx} = 0$

121. *a)*



Para $x > 4$, $g'(x) > f'(x)$. g crece más rápidamente que f para valores grandes de x.

b)



Para $x > 256$, $g'(x) > f'(x)$. g crece más rápidamente que f para valores grandes de x.

$f(x) = \ln x$ crece lentamente para valores grandes de x.

Sección 5.2 (página 340)

1. $5 \ln|x| + C$ **3.** $\ln|x + 1| + C$ **5.** $\frac{1}{2}\ln|2x + 5| + C$

7. $\frac{1}{2}\ln|x^2 - 3| + C$ **9.** $\ln|x^4 + 3x| + C$

11. $x^2/2 - \ln(x^4) + C$ **13.** $\frac{1}{3}\ln|x^3 + 3x^2 + 9x| + C$

15. $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6\ln|x + 1| + C$ **17.** $\frac{1}{3}x^3 + 5\ln|x - 3| + C$

19. $\frac{1}{3}x^3 - 2x + \ln\sqrt{x^2 + 2} + C$ **21.** $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$

23. $2\sqrt{x + 1} + C$ **25.** $2\ln|x - 1| - 2/(x - 1) + C$

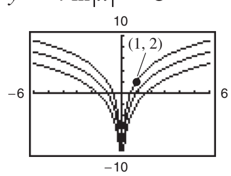
27. $\sqrt{2x} - \ln\left|1 + \sqrt{2x}\right| + C$

29. $x + 6\sqrt{x} + 18\ln\left|\sqrt{x} - 3\right| + C$ **31.** $3\ln\left|\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{3}\right| + C$

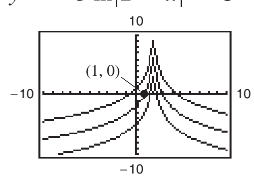
33. $-\frac{1}{2}\ln|\csc 2x + \cot 2x| + C$ **35.** $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\theta - \theta + C$

37. $\ln|1 + \operatorname{sen} t| + C$ **39.** $\ln|\sec x - 1| + C$

41. $y = 4\ln|x| + C$

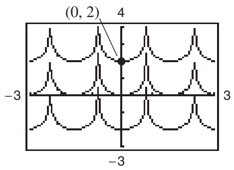


43. $y = -3\ln|2 - x| + C$

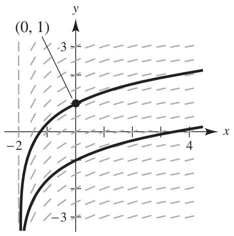


La gráfica tiene un hueco en $x = 2$.

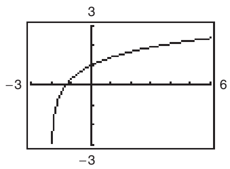
45. $s = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2\theta| + C$ **47.** $f(x) = -2\ln x + 3x - 2$



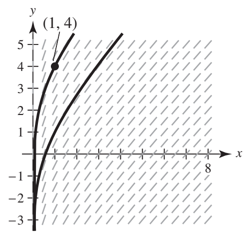
49. *a*)



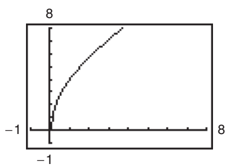
b) $y = \ln\left(\dfrac{x+2}{2}\right) + 1$



51. *a*)



b) $y = \ln x + x + 3$



53. $\frac{5}{3}\ln 13 \approx 4.275$ **55.** $\frac{7}{3}$ **57.** $-\ln 3 \approx -1.099$

59. $\ln\left|\dfrac{2 - \operatorname{sen} 2}{1 - \operatorname{sen} 1}\right| \approx 1.929$ **61.** $2\left[\sqrt{x} - \ln\left(1 + \sqrt{x}\right)\right] + C$

63. $\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) + 2\sqrt{x} + C$ **65.** $\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.174$

67. $1/x$ **69.** $1/x$ **71.** *d* **73.** $6\ln 3$ **75.** $\frac{1}{2}\ln 2$

77. $\frac{15}{2} + 8\ln 2 \approx 13.045$

79. $(12/\pi)\ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \approx 5.03$

81. Regla trapezoidal: 20.2
Regla de Simpson: 19.4667

83. Regla trapezoidal: 5.3368
Regla de Simpson: 5.3632

85. Regla de las potencias. **87.** Regla de los logaritmos.

89. $x = 2$ **91.** Demostración

93. $-\ln|\cos x| + C = \ln|1/\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

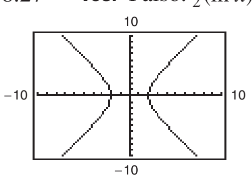
95. $\ln|\sec x + \tan x| + C = \ln\left|\dfrac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\sec x - \tan x}\right| + C$
$= -\ln|\sec x - \tan x| + C$

97. 1 **99.** $1/(e - 1) \approx 0.582$

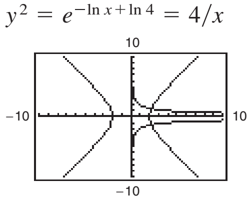
101. $P(t) = 1\,000(12\ln|1 + 0.25t| + 1)$; $P(3) \approx 7715$

103. \$168.27 **105.** Falso. $\frac{1}{2}(\ln x) = \ln x^{1/2}$ **107.** Verdadero

109. *a*)



b) Las respuestas varían.
Ejemplo:
$y^2 = e^{-\ln x + \ln 4} = 4/x$



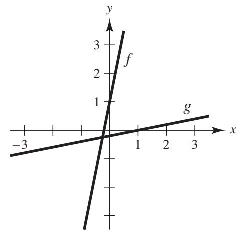
c) Las respuestas varían.

111. Demostración

Sección 5.3 (página 349)

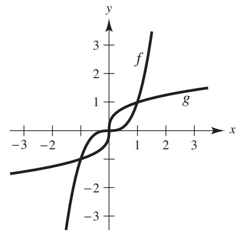
1. *a*) $f(g(x)) = 5[(x - 1)/5] + 1 = x$
$g(f(x)) = [(5x + 1) - 1]/5 = x$

b)



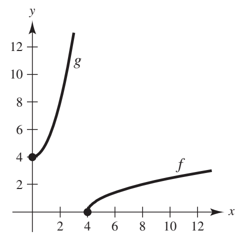
3. *a*) $f(g(x)) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$; $g(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x$

b)



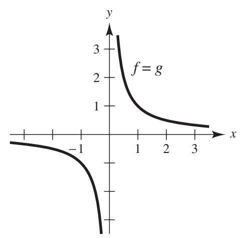
5. *a*) $f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 4 - 4} = x$;
$g(f(x)) = \left(\sqrt{x - 4}\right)^2 + 4 = x$

b)



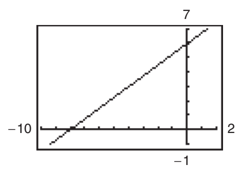
7. *a*) $f(g(x)) = \dfrac{1}{1/x} = x$; $g(f(x)) = \dfrac{1}{1/x} = x$

b)



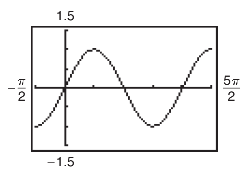
9. *c* **10.** *b* **11.** *a* **12.** *d*

13.



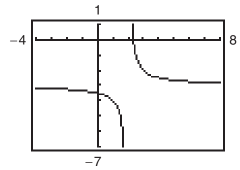
Inyectiva, existe la inversa.

15.



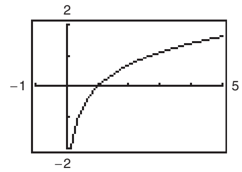
No inyectiva, no existe la inversa.

17.



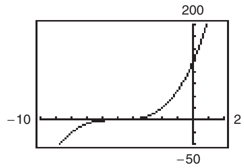
Inyectiva, existe la inversa.

19.



Inyectiva, existe la inversa.

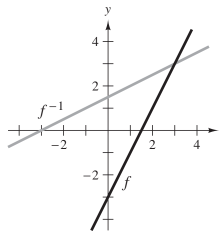
21.



Inyectiva, existe la inversa.

23. *a*) $f^{-1}(x) = (x + 3)/2$

b)

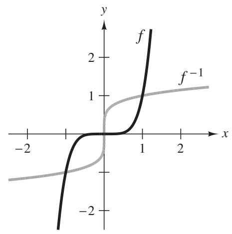


c) f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

d) Dominio de f y f^{-1}: todos los números reales. Rango de f y f^{-1}: todos los números reales.

25. *a*) $f^{-1}(x) = x^{1/5}$

b)

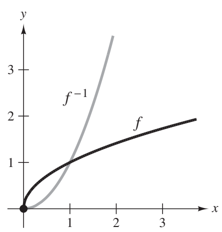


c) f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

d) Dominio de f y f^{-1}: todos los números reales. Rango de f y f^{-1}: todos los números reales.

27. *a*) $f^{-1}(x) = x^2, \ x \geq 0$

b)

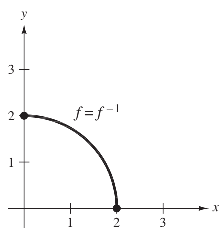


c) f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

d) Dominio de f y f^{-1}: $x \geq 0$ Rango de f y f^{-1}: $y \geq 0$

29. *a*) $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2}, \ 0 \leq x \leq 2$

b)

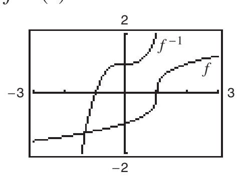


c) f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

d) Dominio de f y f^{-1}: $0 \leq x \leq 2$ Rango de f y f^{-1}: $0 \leq y \leq 2$

31. *a*) $f^{-1}(x) = x^3 + 1$

b)

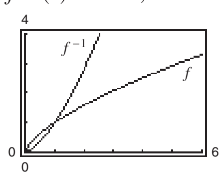


c) f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

d) Dominio de f y f^{-1}: todos los números reales. Rango de f y f^{-1}: todos los números reales.

33. *a*) $f^{-1}(x) = x^{3/2}, \ x \geq 0$

b)

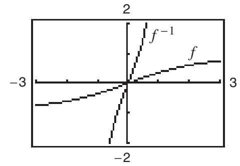


c) f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

d) Dominio de f y f^{-1}: $x \geq 0$ Rango de f y f^{-1}: $y \geq 0$

35. *a*) $f^{-1}(x) = \sqrt{7}x/\sqrt{1 - x^2}, \ -1 < x < 1$

b)



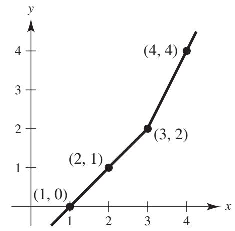
c) f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

d) Dominio de f: todos los números reales.
Dominio de f^{-1}: $-1 < x < 1$
Rango de f: $-1 < y < 1$
Rango de f^{-1}: todos los números reales.

37.

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	2	3	4

x	1	2	3	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2	4



39. *a*) Demostración

b) $y = \frac{20}{7}(80 - x)$
x: costo total.
y: número de libras del bien menos costos

c) $[62.5, 80]$ *d*) 20 lb

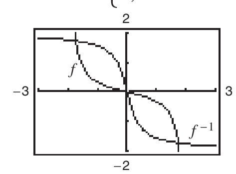
41. Existe la inversa. **43.** No existe la inversa.

45. Existe la inversa. **47.** $f'(x) = 2(x - 4) > 0$ en $(4, \infty)$

49. $f'(x) = -8/x^3 < 0$ en $(0, \infty)$

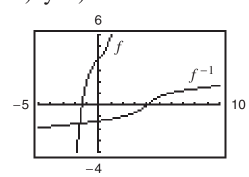
51. $f'(x) = -\operatorname{sen} x < 0$ en $(0, \pi)$

53. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \left[1 - \sqrt{1 + 16x^2}\right]/(2x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$



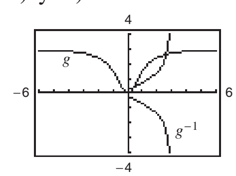
La gráfica de f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f respecto de la recta $y = -x$.

55. *a*) y *b*)



c) f es inyectiva y tiene una función inversa

57. *a*) y *b*)



c) g no es inyectiva y no tiene una función inversa

59. Inyectiva
$f^{-1}(x) = x^2 + 2, \ x \geq 0$

61. Inyectiva
$f^{-1}(x) = 2 - x, \ x \geq 0$

63. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 3, \ x \geq 0$ (La respuesta no es única)

65. $f^{-1}(x) = x - 3, \ x \geq 0$ (La respuesta no es única)

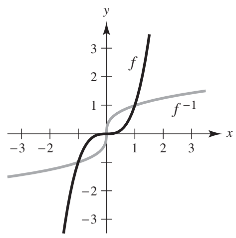
67. Existe la inversa. El volumen es una función creciente, y por tanto es inyectiva. La función inversa proporciona el tiempo t correspondiente al volumen V.

69. No existe la inversa. **71.** $1/27$ **73.** $1/5$

75. $2\sqrt{3}/3$ **77.** -2 **79.** $1/13$

81. *a*) Dominio de f: $(-\infty, \infty)$ *b*) Rango de f: $(-\infty, \infty)$
Dominio de f^{-1}: $(-\infty, \infty)$ Rango de f^{-1}: $(-\infty, \infty)$

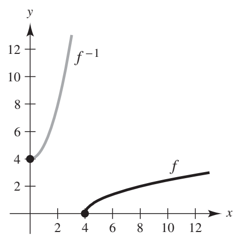
c)



d) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, (f^{-1})'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{3}$

83. *a*) Dominio de f: $[4, \infty)$ *b*) Rango de f: $[0, \infty)$
Dominio de f^{-1}: $[0, \infty)$ Rango de f^{-1}: $[4, \infty)$

c)



d) $f'(5) = \frac{1}{2}, (f^{-1})'(1) = 2$

85. $-\frac{1}{11}$ **87.** 32   **89.** 600

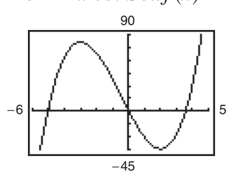
91. $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = (x + 1)/2$ **93.** $(f \circ g)^{-1}(x) = (x + 1)/2$

95. Sea $y = f(x)$ una función inyectiva. Despejar x en función de y. Intercambiar x y y para obtener $y = f^{-1}(x)$. Sea el rango de f el dominio de f^{-1}. Verificar que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.
Ejemplo: $f(x) = x^3$; $y = x^3$; $x = \sqrt[3]{y}$; $y = \sqrt[3]{x}$; $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

97. Muchos valores de x dan el mismo valor de y. Por ejemplo, $f(\pi) = 0 = f(0)$. La gráfica no es continua en $[(2n - 1)\pi]/2$ donde n es un entero.

99. $\frac{1}{4}$ **101.** Falso. Sea $f(x) = x^2$.   **103.** Verdadero

105. *a*)



b) $c = 2$

f no pasa la prueba de la recta horizontal.

107 a 109. Demostraciones   **111.** Demostración; cóncava hacia arriba.

113. Demostración; $\sqrt{5}/5$

115. *a*) Demostración   *b*) $f^{-1}(x) = \dfrac{b - dx}{cx - a}$

c) $a = -d$, o $b = c = 0$, $a = d$

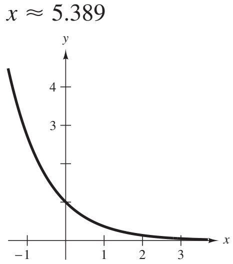
Sección 5.4 (página 358)

1. $x = 4$ **3.** $x \approx 2.485$ **5.** $x = 0$ **7.** $x \approx 0.511$

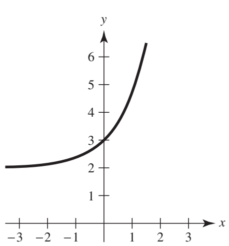
9. $x \approx 8.862$ **11.** $x \approx 7.389$ **13.** $x \approx 10.389$

15. $x \approx 5.389$

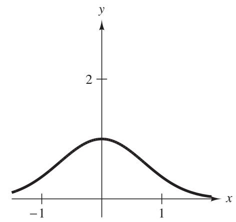
17.



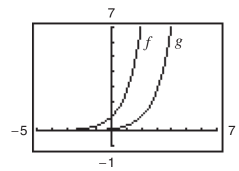
19.



21.

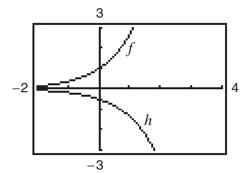


23. *a*)



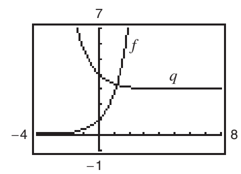
Traslación de dos unidades a la derecha

b)



Reflexión respecto al eje x y un encogimiento vertical.

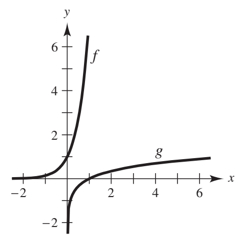
c)



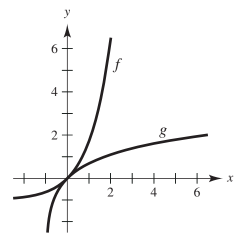
Reflexión respecto al eje x y una traslación de tres unidades hacia arriba.

25. *c*   **26.** *d*   **27.** *a*   **28.** *b*

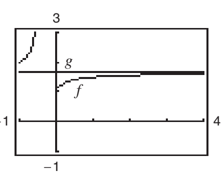
29.



31.



33.



$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = e^{0.5}$

35. $2.7182805 < e$ **37.** *a*) $y = 3x + 1$ *b*) $y = -3x + 1$

39. $2e^{2x}$ **41.** $e^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$ **43.** e^{x-4} **45.** $e^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$

47. $e^x(x^3 + 3x^2)$ **49.** $3(e^{-t} + e^t)^2(e^t - e^{-t})$

51. $2e^{2x}/(1 + e^{2x})$ **53.** $-2(e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})^2$

55. $-2e^x/(e^x - 1)^2$ **57.** $2e^x \cos x$ **59.** $\cos(x)/x$

61. $y = -x + 2$ **63.** $y = -4(x + 1)$ **65.** $y = ex$

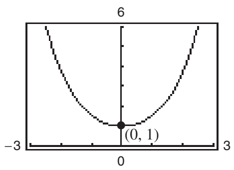
67. $y = (1/e)x - 1/e$ **69.** $\dfrac{10 - e^y}{xe^y + 3}$

71. $y = (-e - 1)x + 1$ **73.** $3(6x + 5)e^{-3x}$

75. $y'' - y = 0$
$4e^{-x} - 4e^{-x} = 0$

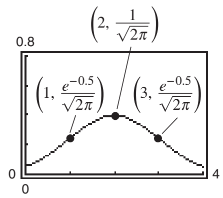
77. $y'' - 2y' + 3y = 0$
$e^x[-\cos\sqrt{2}x - \operatorname{sen}\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x] -$
$2e^x[-\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}x + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}x + \cos\sqrt{2}x + \operatorname{sen}\sqrt{2}x] +$
$3e^x[\cos\sqrt{2}x + \operatorname{sen}\sqrt{2}x] = 0$
$0 = 0$

79. Mínimo relativo: $(0, 1)$

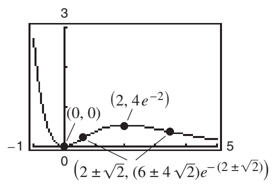


81. Máximo relativo: $\left(2, 1/\sqrt{2\pi}\right)$

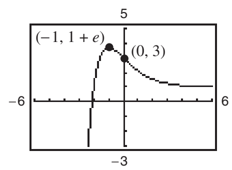
Puntos de inflexión: $\left(1, \dfrac{e^{-0.5}}{\sqrt{2\pi}}\right), \left(3, \dfrac{e^{-0.5}}{\sqrt{2\pi}}\right)$



83. Mínimo relativo: $(0, 0)$
Máximo relativo: $(2, 4e^{-2})$
Puntos de inflexión: $\left(2 \pm \sqrt{2}, \left(6 \pm 4\sqrt{2}\right)e^{-(2 \pm \sqrt{2})}\right)$

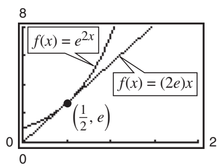


85. Máximo relativo: $(-1, 1 + e)$
Punto de inflexión: $(0, 3)$

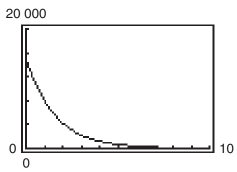


87. $A = \sqrt{2}e^{-1/2}$

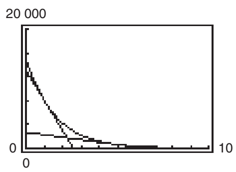
89. $\left(\frac{1}{2}, e\right)$



91. *a)*



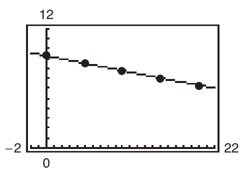
c)



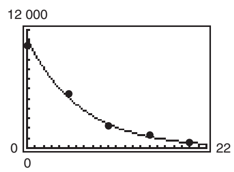
b) Cuando $t = 1, \dfrac{dV}{dt} \approx -5\,028.84$.

Cuando $t = 5, \dfrac{dV}{dt} \approx -406.89$.

93. *a)*



c)

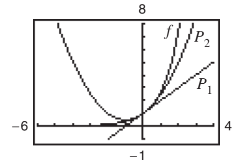


$\ln P = -0.1499h + 9.3018$

b) $P = 10\,957.7e^{-0.1499h}$

d) $h = 5: -776$
$h = 18: -111$

95. $P_1 = 1 + x$; $P_2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$



Los valores de f, P_1 y P_2 y de sus primeras derivadas coinciden en $x = 0$.

97. $12! = 479\,001\,600$
Fórmula de Stirling: $12! \approx 475\,687\,487$

99. $e^{5x} + C$ **101.** $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$ **103.** $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$

105. $2e^{\sqrt{x}} + C$

107. $x - \ln(e^x + 1) + C_1$ o $-\ln(1 + e^{-x}) + C_2$

109. $-\frac{2}{3}(1 - e^x)^{3/2} + C$ **111.** $\ln\left|e^x - e^{-x}\right| + C$

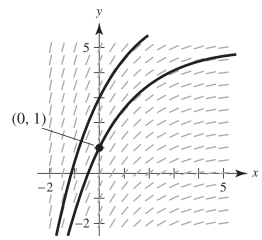
113. $-\frac{5}{2}e^{-2x} + e^{-x} + C$ **115.** $\ln\left|\cos e^{-x}\right| + C$

117. $(e^2 - 1)/(2e^2)$ **119.** $(e - 1)/(2e)$ **121.** $(e/3)(e^2 - 1)$

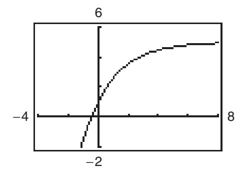
123. $\ln\left(\dfrac{1 + e^6}{2}\right)$ **125.** $(1/\pi)[e^{\operatorname{sen}(\pi^2/2)} - 1]$

127. $[1/(2a)]e^{ax^2} + C$ **129.** $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

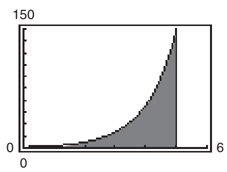
131. *a)*

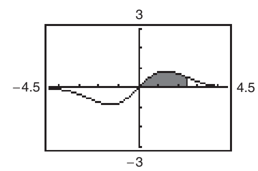


b) $y = -4e^{-x/2} + 5$



133. $e^5 - 1 \approx 147.413$ **135.** $2(1 - e^{-3/2}) \approx 1.554$





137. Regla del punto medio: 92.190; regla trapezoidal: 93.837; regla de Simpson: 92.7385

139. La probabilidad de que una batería dada dure entre 48 y 60 meses es aproximadamente de 47.72%.

141. *a)* $t = \dfrac{1}{2k}\ln\dfrac{B}{A}$

b) $x''(t) = k^2(Ae^{kt} + Be^{-kt})$, donde k^2 es la constante de proporcionalidad.

143. $f(x) = e^x$
El dominio de $f(x)$ es $(-\infty, \infty)$ y su rango $f(x)$ es $(0, \infty)$. $f(x)$ es continua, creciente, inyectiva y cóncava hacia arriba en todo su dominio.
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

145. *a)* Regla del logaritmo *b)* Sustitución

147. $\displaystyle\int_0^x e^t\,dt \geq \int_0^x 1\,dt$; $e^x - 1 \geq x$; $e^x \geq x + 1$ para toda $x \geq 0$

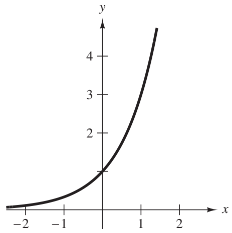
149. $x \approx 0.567$ **151.** Demostración

Sección 5.5 (página 368)

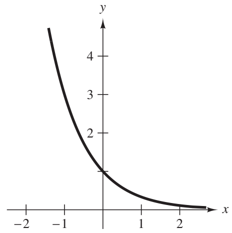
1. -3 **3.** 0 **5.** *a)* $\log_2 8 = 3$ *b)* $\log_3(1/3) = -1$

7. *a)* $10^{-2} = 0.01$ *b)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

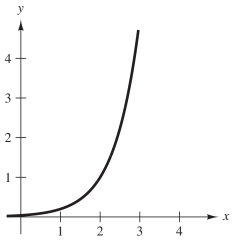
9.



11.



13.



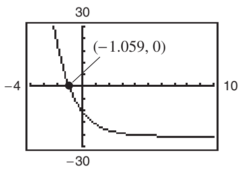
15. *d* **16.** *c* **17.** *b* **18.** *a*

19. *a)* $x = 3$ *b)* $x = -1$ **21.** *a)* $x = \frac{1}{3}$ *b)* $x = \frac{1}{16}$

23. *a)* $x = -1, 2$ *b)* $x = \frac{1}{3}$ **25.** 1.965 **27.** -6.288

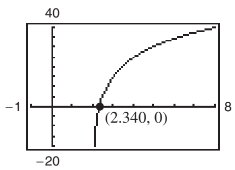
29. 12.253 **31.** 33.000 **33.** ± 11.845

35.



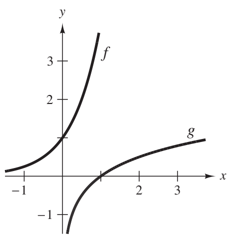
$(-1.059, 0)$

37.



$(2.340, 0)$

39.



41. $(\ln 4)4^x$ **43.** $(-4 \ln 5)5^{-4x}$

45. $9^x(x \ln 9 + 1)$ **47.** $t2^t(t \ln 2 + 2)$

49. $-2^{-\theta}[(\ln 2) \cos \pi\theta + \pi \operatorname{sen} \pi\theta]$

51. $5/[(\ln 4)(5x + 1)]$ **53.** $2/[(\ln 5)(t - 4)]$

55. $x/[(\ln 5)(x^2 - 1)]$ **57.** $(x - 2)/[(\ln 2)x(x - 1)]$

59. $(3x - 2)/[(2x \ln 3)(x - 1)]$

61. $5(1 - \ln t)/(t^2 \ln 2)$ **63.** $y = -2x \ln 2 - 2 \ln 2 + 2$

65. $y = [1/(27 \ln 3)]x + 3 - 1/\ln 3$ **67.** $2(1 - \ln x)x^{(2/x)-2}$

69. $(x - 2)^{x+1}[(x + 1)/(x - 2) + \ln(x - 2)]$

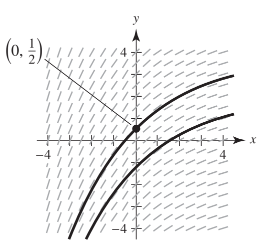
71. $y = x$ **73.** $y = \dfrac{\cos e}{e}x - \cos e + 1$ **75.** $3^x/\ln 3 + C$

77. $\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{2^{-x}}{\ln 2} + C$ **79.** $[-1/(2 \ln 5)](5^{-x^2}) + C$

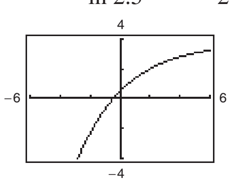
81. $\ln(3^{2x} + 1)/(2 \ln 3) + C$ **83.** $7/(2 \ln 2)$

85. $4/\ln 5 - 2/\ln 3$ **87.** $26/\ln 3$

89. *a)*



b) $y = \dfrac{3(1 - 0.4^{x/3})}{\ln 2.5} + \dfrac{1}{2}$



91. *a)* $x > 0$ *b)* 10^x *c)* $3 \le f(x) \le 4$
d) $0 < x < 1$ *e)* 10 *f)* 100^n

93. *a)* ax^{a-1} *b)* $(\ln a)a^x$ *c)* $x^x(1 + \ln x)$ *d)* 0

95. *a)* \$40.64 *b)* $C'(1) \approx 0.051P$, $C'(8) \approx 0.072P$
c) ln 1.05

97.

n	1	2	4	12	365	Continua
A	\$1 410.60	\$1 414.78	\$1 416.91	\$1 418.34	\$1 419.04	\$1 419.07

99.

n	1	2	4	12	365	Continua
A	\$4 321.94	\$4 399.79	\$4 440.21	\$4 467.74	\$4 481.23	\$4 481.69

101.

t	1	10	20	30	40	50
P	\$95 122.94	\$60 653.07	\$36 787.94	\$22 313.02	\$13 533.53	\$8 208.50

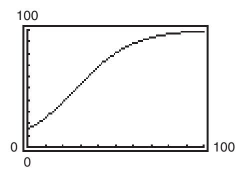
103.

t	1	10	20	30	40	50
P	\$95 132.82	\$60 716.10	\$36 864.45	\$22 382.66	\$13 589.88	\$8 251.24

105. *c*

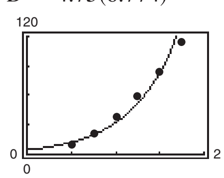
107. *a)* 6.7 millones de pies^3/acre
b) $t = 20$: $\dfrac{dV}{dt} = 0.073$; $t = 60$: $\dfrac{dV}{dt} = 0.040$

109. *a)*



b) 16.7%
c) $x \approx 38.8$ o 38 800 huevos
d) $x \approx 27.75$ o 27 750 huevos

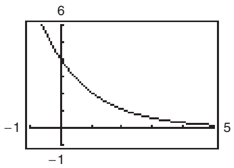
111. *a)* $B = 4.75(6.774)^d$
b)



c) Cuando $d = 0.8$, la razón de crecimiento es 41.99. Cuando $d = 1.5$, la razón de crecimiento es 160.21.

113. *a*) 5.67; 5.67; 5.67

b)



c) $f(t) = g(t) = h(t)$. No porque las integrales definidas de dos funciones sobre un intervalo dado pueden ser iguales aun cuando las funciones sean diferentes.

115. $y = 1\,200(0.6^t)$ **117.** e **119.** e^2

121. Falso: e es un número irracional. **123.** Verdadero **125.** Verdadero

127. *a*) $(2^3)^2 = 2^6 = 64$

$2^{(3^2)} = 2^9 = 512$

b) No. $f(x) = (x^x)^x = x^{(x^2)}$ y $g(x) = x^{(x^x)}$

c) $f'(x) = x^{x^2}(x + 2x\ln x)$

$g'(x) = x^{x^x+x-1}[x(\ln x)^2 + x\ln x + 1]$

129. Demostración

131. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - yx\ln y}{x^2 - xy\ln x}$

b) *i*) 1 cuando $c \neq 0, c \neq e$ *ii*) -3.1774 *iii*) -0.3147

c) (e, e)

133. Problema Putnam A15, 1940

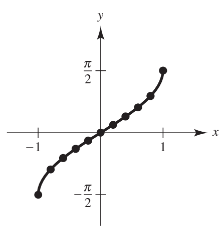
Sección 5.6 (página 379)

1. *a*)

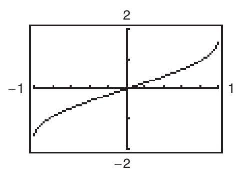
x	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2
y	-1.57	-0.93	-0.64	-0.41	-0.20

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	0	0.20	0.41	0.64	0.93	1.57

b)



c)



d) Intersección: (0, 0); Simetría: respecto al origen

3. $\left(-\sqrt{2}/2, 3\pi/4\right), (1/2, \pi/3), \left(\sqrt{3}/2, \pi/6\right)$

5. $\pi/6$ **7.** $\pi/3$ **9.** $\pi/6$ **11.** $-\pi/4$ **13.** 2.50

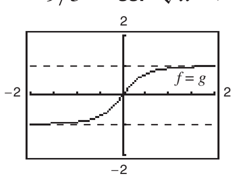
15. $\operatorname{arccos}(1/1.269) \approx 0.66$ **17.** *a*) $3/5$ *b*) $5/3$

19. *a*) $-\sqrt{3}$ *b*) $-\frac{13}{5}$ **21.** x **23.** $\sqrt{1 - x^2}/x$ **25.** $1/x$

27. $\sqrt{1 - 4x^2}$ **29.** $\sqrt{x^2 - 1}/|x|$

31. $\sqrt{x^2 - 9}/3$ **33.** $\sqrt{x^2 + 2}/x$

35. *a*)



b) Demostración

c) Asíntotas horizontales: $y = -1, y = 1$

37. $x = \frac{1}{3}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) + \pi\right] \approx 1.207$ **39.** $x = \frac{1}{3}$

41. *a*) y *b*) Demostraciones **43.** $2/\sqrt{2x - x^2}$

45. $-3/\sqrt{4 - x^2}$ **47.** $e^x/(1 + e^{2x})$

49. $\left(3x - \sqrt{1 - 9x^2}\operatorname{arcsen} 3x\right)/\left(x^2\sqrt{1 - 9x^2}\right)$

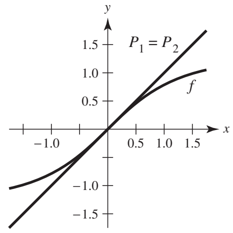
51. $-t/\sqrt{1 - t^2}$ **53.** $2\operatorname{arccos} x$ **55.** $1/(1 - x^4)$

57. $\operatorname{arcsen} x$ **59.** $x^2/\sqrt{16 - x^2}$ **61.** $2/(1 + x^2)^2$

63. $y = \frac{1}{3}\left(4\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + \pi\right)$

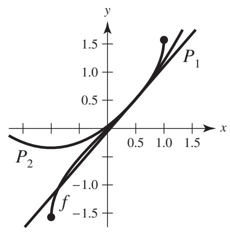
65. $y = \frac{1}{4}x + (\pi - 2)/4$ **67.** $y = (2\pi - 4)x + 4$

69. $P_1(x) = x$; $P_2(x) = x$



71. $P_1(x) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

$P_2(x) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$

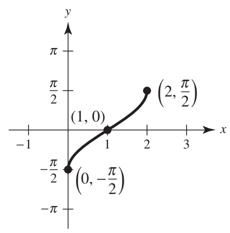


73. Máximo relativo: $(1.272, -0.606)$

Mínimo relativo: $(-1.272, 3.747)$

75. Máximo relativo: $(2, 2.214)$

77.

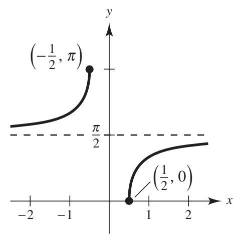


Máximo: $\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Mínimo: $\left(0, -\dfrac{\pi}{2}\right)$

Punto de inflexión: $(1, 0)$

79.



Máximo: $\left(-\dfrac{1}{2}, \pi\right)$

Mínimo: $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

Asíntota: $y = \dfrac{\pi}{2}$

81. $y = -2\pi x/(\pi + 8) + 1 - \pi^2/(2\pi + 16)$

83. $y = -x + \sqrt{2}$

85. Si los dominios no estuvieran restringidos, las funciones trigonométricas no serían inyectivas y por tanto no tendrían inversas.

87. Si $x > 0$, $y = \operatorname{arccot} x = \arctan \dfrac{1}{x}$; si $x < 0$, $y = \arctan \dfrac{1}{x} + \pi$.

89. *a*) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{arcsen} 0.5) \approx 0.551$

$\operatorname{arcsen}(\operatorname{arcsen} 1)$ no existe

b) $\operatorname{sen}(-1) \leq x \leq \operatorname{sen}(1)$

91. Falso. El rango de arccos es $[0, \pi]$. **93.** Verdadero **95.** Verdadero

97. *a*) $\theta = \operatorname{arccot}(x/5)$

b) $x = 10$: 16 rad/h; $x = 3$: 58.824 rad/h

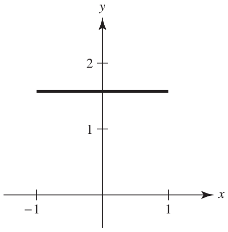
99. *a*) $h(t) = -16t^2 + 256$; $t = 4$ s

b) $t = 1$: -0.0520 rad/s; $t = 2$: -0.1116 rad/s

101. $50\sqrt{2} \approx 70.71$ pies **103.** *a*) y *b*) Demostraciones

105. $k \leq -1$ o $k \geq 1$

107. *a*)

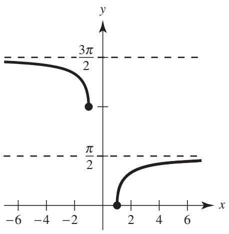


b) La gráfica es una recta horizontal en $\dfrac{\pi}{2}$.

c) Demostración

109. $c = 2$

111. *a*)



b) Demostración

Sección 5.7 (página 387)

1. $\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{3} + C$ **3.** $\dfrac{7}{4}\arctan\dfrac{x}{4} + C$ **5.** $\operatorname{arcsec}|2x| + C$

7. $\operatorname{arcsen}(x+1) + C$ **9.** $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} t^2 + C$

11. $\dfrac{1}{10}\arctan\dfrac{t^2}{5} + C$ **13.** $\dfrac{1}{4}\arctan(e^{2x}/2) + C$

15. $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\tan x}{5}\right) + C$ **17.** $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

19. $2\operatorname{arcsen}\sqrt{x} + C$ **21.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan x + C$

23. $8\operatorname{arcsen}[(x-3)/3] - \sqrt{6x - x^2} + C$ **25.** $\pi/6$

27. $\pi/6$ **29.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 2) \approx -0.134$

31. $\dfrac{1}{5}\arctan\dfrac{3}{5} \approx 0.108$ **33.** $\arctan 5 - \dfrac{\pi}{4} \approx 0.588$

35. $\pi/4$ **37.** $\frac{1}{32}\pi^2 \approx 0.308$ **39.** $\pi/2$

41. $\ln|x^2 + 6x + 13| - 3\arctan[(x+3)/2] + C$

43. $\operatorname{arcsen}[(x+2)/2] + C$ **45.** $-\sqrt{-x^2 - 4x} + C$

47. $4 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{6}\pi \approx 1.059$ **49.** $\frac{1}{2}\arctan(x^2+1) + C$

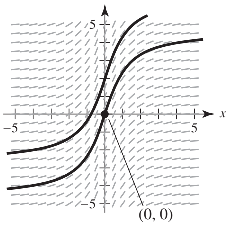
51. $2\sqrt{e^t - 3} - 2\sqrt{3}\arctan\left(\sqrt{e^t - 3}/\sqrt{3}\right) + C$ **53.** $\pi/6$

55. *a* y *b* **57.** *a*, *b* y *c*

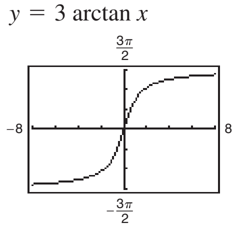
59. No. Esta integral no corresponde a ninguna de las reglas básicas de integración.

61. $y = \operatorname{arcsen}(x/2) + \pi$

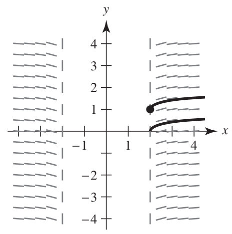
63. *a*)



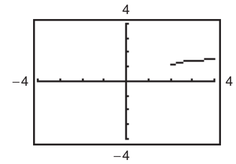
b) $y = 3\arctan x$



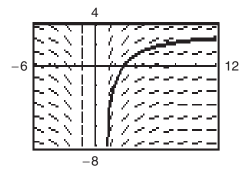
65. *a*)



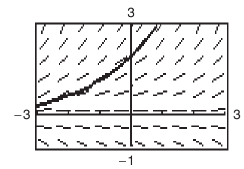
b) $y = \frac{1}{2}\operatorname{arcsec}(x/2) + 1$, $x \geq 2$



67.



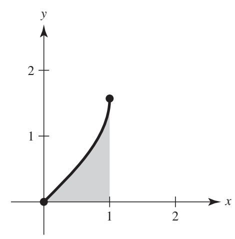
69.



71. $\pi/3$ **73.** $\pi/8$ **75.** $3\pi/2$

77. *a*) Demostración *b*) $\ln\left(\sqrt{6}/2\right) + \left(9\pi - 4\pi\sqrt{3}\right)/36$

79. *a*)



b) 0.5708

c) $(\pi - 2)/2$

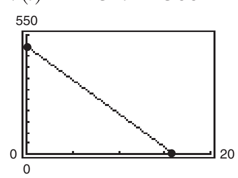
81. *a*) $F(x)$ representa el valor promedio de $f(x)$ sobre el intervalo $[x, x+2]$. Máximo en $x = -1$.

b) Máximo en $x = -1$.

83. Falso. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x\sqrt{9x^2 - 16}} = \frac{1}{12}\operatorname{arcsec}\frac{|3x|}{4} + C$

85. Verdadero **87 a 89.** Demostraciones

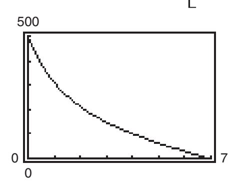
91. *a*) $v(t) = -32t + 500$



b) $s(t) = -16t^2 + 500t$; 3 906.25 pies

c) $v(t) = \sqrt{\dfrac{32}{k}}\tan\left[\arctan\left(500\sqrt{\dfrac{k}{32}}\right) - \sqrt{32k}\,t\right]$

d)



$t_0 = 6.86$ s

e) 1 088 pies

f) Cuando se considera la resisistencia con el aire, la altura máxima del objeto no es tan grande.

Sección 5.8 (página 398)

1. *a*) 10.018 *b*) -0.964 **3.** *a*) $\frac{4}{3}$ *b*) $\frac{13}{12}$

5. *a*) 1.317 *b*) 0.962 **7 a 15.** Demostraciones

17. $\cosh x = \sqrt{13}/2$; $\tanh x = 3\sqrt{13}/13$; $\operatorname{csch} x = 2/3$; $\operatorname{sech} x = 2\sqrt{13}/13$; $\coth x = \sqrt{13}/3$

19. $3\cosh 3x$ **21.** $-10x[\operatorname{sech}(5x^2)\tanh(5x^2)]$ **23.** $\coth x$

25. $\operatorname{csch} x$ **27.** $\operatorname{senh}^2 x$ **29.** $\operatorname{sech} t$

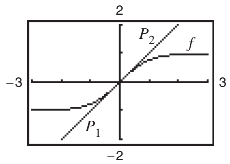
31. $y = -2x + 2$ **33.** $y = 1 - 2x$

35. Máximos relativos: $(\pm\pi, \cosh \pi)$; mínimo relativo: $(0, -1)$

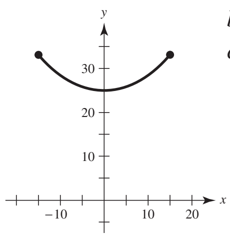
37. Máximo relativo: $(1.20, 0.66)$
Mínimo relativo: $(-1.20, -0.66)$

39. $y = a \operatorname{senh} x$; $y' = a \cosh x$; $y'' = a \operatorname{senh} x$; $y''' = a \cosh x$; por tanto, $y''' - y' = 0$.

41. $P_1(x) = x$; $P_2(x) = x$



43. *a)*



b) 33.146 unidades; 25 unidades
c) $m = \operatorname{senh}(1) \approx 1.175$

45. $\frac{1}{2}\operatorname{senh} 2x + C$ **47.** $-\frac{1}{2}\cosh(1 - 2x) + C$

49. $\frac{1}{3}\cosh^3(x - 1) + C$ **51.** $\ln|\operatorname{senh} x| + C$

53. $-\coth(x^2/2) + C$ **55.** $\operatorname{csch}(1/x) + C$

57. $\frac{1}{2}\arctan x^2 + C$ **59.** $\ln(5/4)$ **61.** $\frac{1}{5}\ln 3$

63. $\pi/4$ **65.** $3/\sqrt{9x^2 - 1}$ **67.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1 - x)}$ **69.** $|\sec x|$

71. $\dfrac{-2\operatorname{csch}^{-1} x}{|x|\sqrt{1 + x^2}}$ **73.** $2\operatorname{senh}^{-1}(2x)$ **75.** Las respuestas varían.

77. $\cosh x$, $\operatorname{sech} x$ **79.** ∞ **81.** 1 **83.** 0 **85.** 1

87. $\dfrac{\sqrt{3}}{18}\ln\left|\dfrac{1 + \sqrt{3}x}{1 - \sqrt{3}x}\right| + C$ **89.** $\ln\left(\sqrt{e^{2x} + 1} - 1\right) - x + C$

91. $2\operatorname{senh}^{-1}\sqrt{x} + C = 2\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{1 + x}\right) + C$

93. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x - 4}{x}\right| + C$ **95.** $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}(x + 1) + \sqrt{3}}{\sqrt{2}(x + 1) - \sqrt{3}}\right| + C$

97. $\ln\left(\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$ **99.** $\dfrac{\ln 7}{12}$ **101.** $\dfrac{1}{4}\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{4x - 1}{9}\right) + C$

103. $-\dfrac{x^2}{2} - 4x - \dfrac{10}{3}\ln\left|\dfrac{x - 5}{x + 1}\right| + C$

105. $8\arctan(e^2) - 2\pi \approx 5.207$ **107.** $\frac{5}{2}\ln\left(\sqrt{17} + 4\right) \approx 5.237$

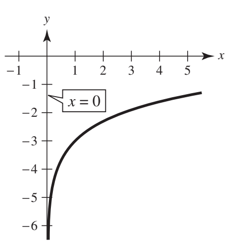
109. *a)* $\ln\left(\sqrt{3} + 2\right)$ (b) $\operatorname{senh}^{-1}\sqrt{3}$

111. $\frac{52}{31}$ kg **113.** $-\sqrt{a^2 - x^2}/x$ **115 a 123.** Demostraciones

125. Problema Putnam 8, 1939

Ejercicios de repaso para el capítulo 5 (página 401)

1.



Asíntota vertical: $x = 0$

3. $\frac{1}{5}[\ln(2x + 1) + \ln(2x - 1) - \ln(4x^2 + 1)]$

5. $\ln\left(3\sqrt[3]{4 - x^2}/x\right)$ **7.** $e^4 - 1 \approx 53.598$

9. $1/(2x)$ **11.** $(1 + 2\ln x)/\left(2\sqrt{\ln x}\right)$

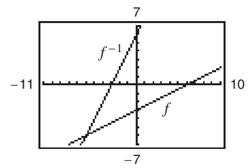
13. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{b^2}\left(b - \dfrac{ab}{a + bx}\right) = \dfrac{x}{a + bx}$ **15.** $y = -x + 1$

17. $\frac{1}{7}\ln|7x - 2| + C$ **19.** $-\ln|1 + \cos x| + C$

21. $3 + \ln 2$ **23.** $\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$

25. *a)* $f^{-1}(x) = 2x + 6$

b)

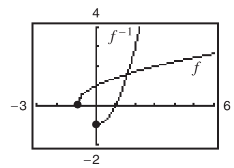


c) Demostración

d) Dominio de f y f^{-1}: todos los números reales.
Rango de f y f^{-1}: todos los números reales.

27. *a)* $f^{-1}(x) = x^2 - 1, \quad x \geq 0$

b)

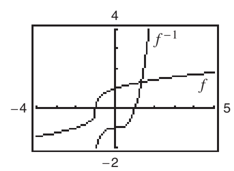


c) Demostración

d) Dominio de f: $x \geq -1$
Dominio de f^{-1}: $x \geq 0$
Rango de f: $y \geq 0$
Rango de f^{-1}: $y \geq -1$

29. *a)* $f^{-1}(x) = x^3 - 1$

b)



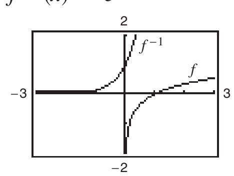
c) Demostración

d) Dominio de f y f^{-1}: todos los números reales.
Rango de f y f^{-1}: todos los números reales.

31. $1/\left[3\left(\sqrt[3]{-3}\right)^2\right] \approx 0.160$ **33.** $3/4$

35. *a)* $f^{-1}(x) = e^{2x}$

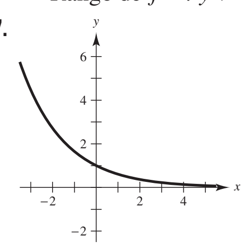
b)



c) Demostración

d) Dominio de f: $x > 0$
Dominio de f^{-1}: todos los números reales.
Rango de f: todos los números reales.
Rango de f^{-1}: $y > 0$

37.



39. $te^t(t + 2)$

41. $(e^{2x} - e^{-2x})/\sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$ **43.** $x(2 - x)/e^x$

45. $y = -4x + 4$ **47.** $-y/[x(2y + \ln x)]$

49. $(1 - e^{-3})/6 \approx 0.158$ **51.** $(e^{4x} - 3e^{2x} - 3)/(3e^x) + C$
53. $-\frac{1}{2}e^{1-x^2} + C$ **55.** $\ln(e^2 + e + 1) \approx 2.408$
57. $y = e^x(a \cos 3x + b \operatorname{sen} 3x)$

$y' = e^x[(-3a + b) \operatorname{sen} 3x + (a + 3b) \cos 3x]$

$y'' = e^x[(-6a - 8b) \operatorname{sen} 3x + (-8a + 6b) \cos 3x]$

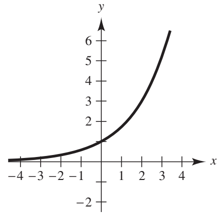
$y'' - 2y' + 10y$

$= e^x\{[(-6a - 8b) - 2(-3a + b) + 10b] \operatorname{sen} 3x +$

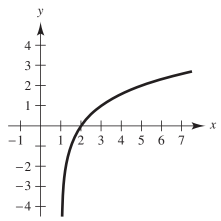
$[(-8a + 6b) - 2(a + 3b) + 10a] \cos 3x\} = 0$

59. $-\frac{1}{2}(e^{-16} - 1) \approx 0.500$

61.

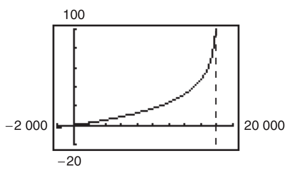


63.



65. $3^{x-1} \ln 3$ **67.** $x^{2x+1}(2 \ln x + 2 + 1/x)$
69. $-1/[\ln 3(2 - 2x)]$ **71.** $5^{(x+1)^2}/(2 \ln 5) + C$
73. *a*) Dominio: $0 \le h < 18\,000$

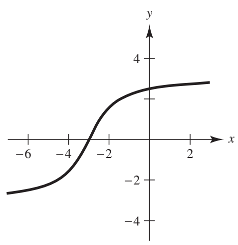
b)



c) $t = 0$

Asíntota vertical: $h = 18\,000$

75.



77. *a*) $1/2$ *b*) $\sqrt{3}/2$

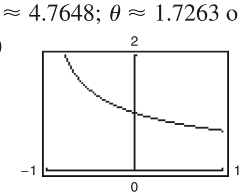
79. $(1 - x^2)^{-3/2}$ **81.** $\dfrac{x}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} + \operatorname{arcsec} x$ **83.** $(\operatorname{arcsen} x)^2$
85. $\frac{1}{2} \arctan(e^{2x}) + C$ **87.** $\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + C$
89. $\frac{1}{4}[\arctan(x/2)]^2 + C$ **91.** $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} - 2 \approx 1.826$
93. $y = A \operatorname{sen}\left(t\sqrt{k/m}\right)$

95. $y' = x\left(\dfrac{2}{1 - 4x^2}\right) + \tanh^{-1} 2x = \dfrac{2x}{1 - 4x^2} + \tanh^{-1} 2x$

97. $\frac{1}{3} \tanh x^3 + C$

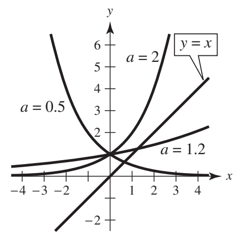
SP Solución de problemas (página 403)

1. $a \approx 4.7648$; $\theta \approx 1.7263$ o $98.9°$
3. *a*)



b) 1 *c*) Demostración

5.



$y = 0.5^x$ y $y = 1.2^x$ intersecan la recta: $y = x$; $0 < a < e^{1/e}$

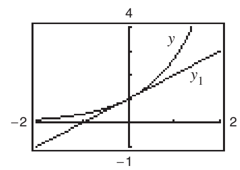
7. $e - 1$
9. *a*) Área de la región $A = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)/2 \approx 0.1589$

Área de la región $B = \pi/12 \approx 0.2618$

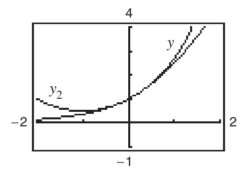
b) $\frac{1}{24}\left[3\pi\sqrt{2} - 12\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - 2\pi\right] \approx 0.1346$

c) 1.2958 *d*) 0.6818

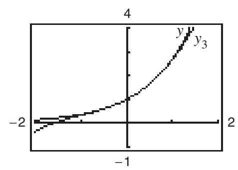
11. Demostración **13.** $2 \ln \frac{3}{2} \approx 0.8109$
15. *a*) *i*)



ii)

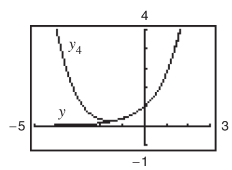


iii)



b) Patrón: $y_n = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$

$y_4 = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!}$



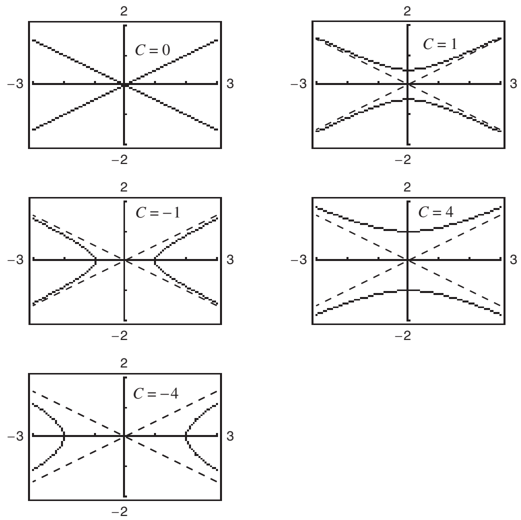
c) El patrón implica que $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$.

Capítulo 6

Sección 6.1 (página 411)

1 a 11. Demostraciones **13.** No es solución **15.** Solución
17. Solución **19.** Solución **21.** No es solución
23. Solución **25.** No es solución **27.** No es solución
29. $y = 3e^{-x/2}$ **31.** $4y^2 = x^3$

33.



35. $y = 3e^{-2x}$ **37.** $y = 2 \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{3}\cos 3x$

39. $y = -2x + \frac{1}{2}x^3$ **41.** $2x^3 + C$

43. $y = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$ **45.** $y = x - \ln x^2 + C$

47. $y = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

49. $y = \frac{2}{5}(x-6)^{5/2} + 4(x-6)^{3/2} + C$

51. $y = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

53.

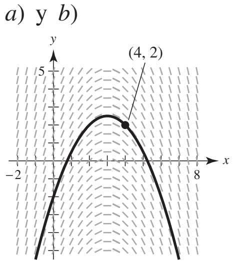
x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx	-4	Indef.	0	1	$\frac{4}{3}$	2

55.

x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx	$-2\sqrt{2}$	-2	0	0	$-2\sqrt{2}$	-8

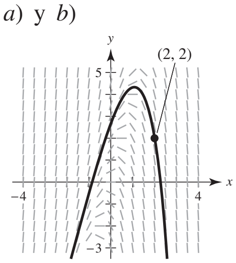
57. *b* **58.** *c* **59.** *d* **60.** *a*

61. *a*) y *b*)



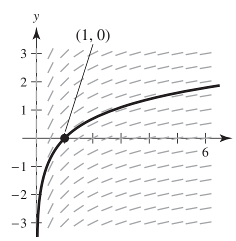
c) Como $x \to \infty$, entonces $y \to -\infty$; como $x \to -\infty$, entonces $y \to -\infty$

63. *a*) y *b*)



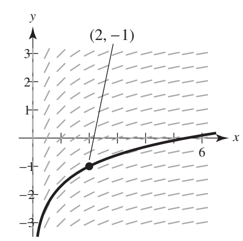
c) Como $x \to \infty$, entonces $y \to -\infty$; como $x \to -\infty$, entonces $y \to -\infty$

65. *a*)



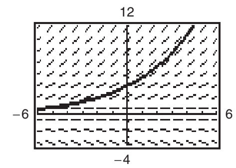
Como $x \to \infty$, entonces $y \to \infty$

b)

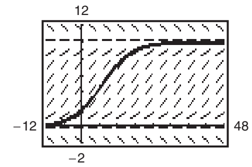


Como $x \to \infty$, entonces $y \to \infty$

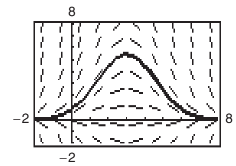
67. *a*) y *b*)



69. *a*) y *b*)



71. *a*) y *b*)



73.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_n	2	2.2	2.43	2.693	2.992	3.332	3.715

n	7	8	9	10
x_n	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	4.146	4.631	5.174	5.781

75.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
y_n	3	2.7	2.438	2.209	2.010	1.839	1.693

n	7	8	9	10
x_n	0.35	0.4	0.45	0.5
y_n	1.569	1.464	1.378	1.308

77.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_n	1	1.1	1.212	1.339	1.488	1.670	1.900

n	7	8	9	10
x_n	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	2.213	2.684	3.540	5.958

79.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y(x)$ (exacta)	3.0000	3.6642	4.4755	5.4664	6.6766	8.1548
$y(x)$ $(h = 0.2)$	3.0000	3.6000	4.3200	5.1840	6.2208	7.4650
$y(x)$ $(h = 0.1)$	3.0000	3.6300	4.3923	5.3147	6.4308	7.7812

81.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$y(x)$ (exacta)	0.0000	0.2200	0.4801	0.7807	1.1231	1.5097
$y(x)$ $(h = 0.2)$	0.0000	0.2000	0.4360	0.7074	1.0140	1.3561
$y(x)$ $(h = 0.1)$	0.0000	0.2095	0.4568	0.7418	1.0649	1.4273

83. *a*) $y(1) = 112.7141°$; $y(2) = 96.3770°$; $y(3) = 86.5954°$
b) $y(1) = 113.2441°$; $y(2) = 97.0158°$; $y(3) = 87.1729°$
c) Método de Euler: $y(1) = 112.9828°$; $y(2) = 96.6998°$; $y(3) = 86.8863°$
Solución exacta: $y(1) = 113.2441°$; $y(2) = 97.0158°$; $y(3) = 87.1729°$
Las aproximaciones mejoran al usar $h = 0.05$.

85. La solución general es una familia de curvas que satisface la ecuación diferencial. Una solución particular es un miembro de la familia que satisface las condiciones dadas.

87. Comenzar con un punto (x_0, y_0) que satisfaga la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Después utilizar el tamaño del paso requerido h para calcular el punto $(x_1, y_1) = (x_0 + h, y_0 + hF(x_0, y_0))$. Continuar generando la secuencia de puntos $(x_n + h, y_n + hF(x_n, y_n))$ o (x_{n+1}, y_{n+1}).

89. Falso: $y = x^3$ es una solución de $xy' - 3y = 0$, pero $y = x^3 + 1$ no es solución.

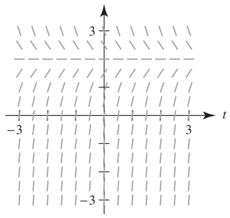
91. Verdadero

93. *a*)

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	4	2.6813	1.7973	1.2048	0.8076	0.5413
y_1	4	2.56	1.6384	1.0486	0.6711	0.4295
y_2	4	2.4	1.44	0.864	0.5184	0.3110
e_1	0	0.1213	0.1589	0.1562	0.1365	0.1118
e_2	0	0.2813	0.3573	0.3408	0.2892	0.2303
r		0.4312	0.4447	0.4583	0.4720	0.4855

b) Dado que $r \approx 0.5$, si h se reduce a la mitad el error también se reduce a la mitad.
c) De nuevo, el error se reducirá a la mitad.

95. *a*)



b) $\lim_{t\to\infty} I(t) = 2$

97. $\omega = \pm 4$ **99.** Problema Putnam 3, sesión matutina, 1954

Sección 6.2 (página 420)

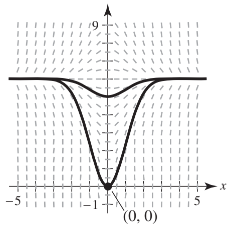
1. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$ **3.** $y = Ce^x - 3$ **5.** $y^2 - 5x^2 = C$

7. $y = Ce^{(2x^{3/2})/3}$ **9.** $y = C(1 + x^2)$

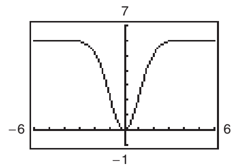
11. $dQ/dt = k/t^2$
$Q = -k/t + C$

13. $dN/ds = k(500 - s)$
$N = -(k/2)(500 - s)^2 + C$

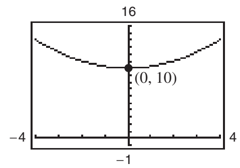
15. *a*)



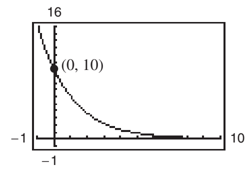
b) $y = 6 - 6e^{-x^2/2}$



17. $y = \frac{1}{4}t^2 + 10$



19. $y = 10e^{-t/2}$



21. $dy/dx = ky$
$y = 6e^{(1/4)\ln(5/2)x} \approx 6e^{0.2291x}$
$y(8) \approx 37.5$

23. $dV/dt = kV$
$V = 20\,000e^{(1/4)\ln(5/8)t} \approx 20\,000\,e^{-0.1175t}$
$V(6) \approx 9\,882$

25. $y = (1/2)e^{[(\ln 10)/5]t} \approx (1/2)e^{0.4605t}$

27. $y = 5(5/2)^{1/4}e^{[\ln(2/5)/4]t} \approx 6.2872e^{-0.2291t}$

29. C es el valor inicial de y, y k es la constante de proporcionalidad.

31. Cuadrantes I y III; dy/dx es positiva cuando ambas x y y son positivas (cuadrante I) o cuando ambas son negativas (cuadrante III).

33. Cantidad después de 1 000 años: 12.96 g
Cantidad después de 10 000 años: 0.26 g

35. Cantidad inicial: 7.63 g
Cantidad después de 1 000 años: 4.95 g

37. Cantidad después de 1 000 años: 4.43 g
Cantidad después de 10 000 años: 1.49 g

39. Cantidad inicial: 2.16 g
Cantidad después de 10 000 años: 1.62 g

41. 95.76%

43. Tiempo necesario para duplicarlo: 11.55 años; cantidad después de 10 años: \$7 288.48

45. Tasa anual: 8.94%; cantidad después de 10 años: \$1 833.67

47. Tasa anual: 9.50%; tiempo necesario para duplicarlo: 7.30 años

49. \$224 174.18 **51.** \$61 377.75

53. *a*) 10.24 años *b*) 9.93 años *c*) 9.90 años *d*) 9.90 años

55. *a*) 8.50 años *b*) 8.18 años *c*) 8.16 años *d*) 8.15 años

57. *a*) $P = 2.40e^{-0.006t}$ *b*) 2.19 millones
c) Dado que $k < 0$, la población es decreciente.

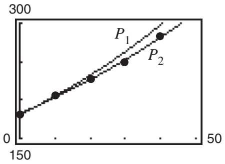
59. *a*) $P = 5.66e^{0.024t}$ *b*) 8.11 millones
c) Dado que $k > 0$, la población es creciente.

61. *a*) $P = 23.55e^{0.036t}$ *b*) 40.41 millones
c) Dado que $k > 0$, la población es creciente.

63. *a*) $N = 100.1596(1.2455)^t$ *b*) 6.3 h

65. *a*) $N \approx 30(1 - e^{-0.0502t})$ *b*) 36 días

67. *a)* $P_1 \approx 181e^{0.01245t} \approx 181(1.01253)^t$
b) $P_2 = 182.3248(1.01091)^t$
c)



d) 2011

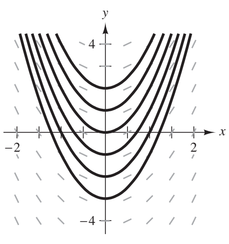
P_2 es una mejor aproximación.

69. *a)* 20 dB *b)* 70 dB *c)* 95 dB *d)* 120 dB
71. 2024 ($t = 16$) **73.** 379.2°F
75. Falso. La razón de crecimiento dy/dx es proporcional a y.
77. Verdadero.

Sección 6.3 (página 431)

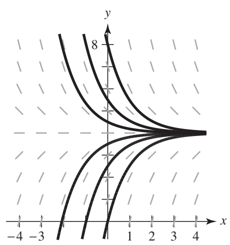
1. $y^2 - x^2 = C$ **3.** $15y^2 + 2x^3 = C$ **5.** $r = Ce^{0.75s}$
7. $y = C(x + 2)^3$ **9.** $y^2 = C - 8\cos x$
11. $y = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2} + C$ **13.** $y = Ce^{(\ln x)^2/2}$
15. $y^2 = 4e^x + 5$ **17.** $y = e^{-(x^2+2x)/2}$
19. $y^2 = 4x^2 + 3$ **21.** $u = e^{(1-\cos v^2)/2}$ **23.** $P = P_0e^{kt}$
25. $4y^2 - x^2 = 16$ **27.** $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ **29.** $f(x) = Ce^{-x/2}$
31. Homogénea de grado 3 **33.** Homogénea de grado 3
35. No homogénea **37.** Homogénea de grado 0
39. $|x| = C(x - y)^2$ **41.** $|y^2 + 2xy - x^2| = C$
43. $y = Ce^{-x^2/(2y^2)}$ **45.** $e^{y/x} = 1 + \ln x^2$ **47.** $x = e^{\operatorname{sen}(y/x)}$

49.



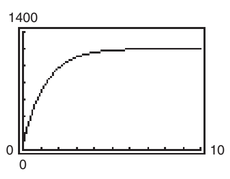
$y = \frac{1}{2}x^2 + C$

51.

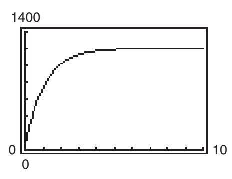


$y = 4 + Ce^{-x}$

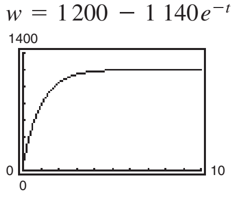
53. *a)* $y \approx 0.1602$ *b)* $y = 5e^{-3x^2}$ *c)* $y \approx 0.2489$
55. *a)* $y \approx 3.0318$ *b)* $y^3 - 4y = x^2 + 12x - 13$ *c)* $y = 3$
57. 97.9% de la cantidad original
59. *a)* $dy/dx = k(y - 4)$ *b)* *a* *c)* Demostración
60. *a)* $dy/dx = k(x - 4)$ *b)* *b* *c)* Demostración
61. *a)* $dy/dx = ky(y - 4)$ *b)* *c* *c)* Demostración
62. *a)* $dy/dx = ky^2$ *b)* *d* *c)* Demostración
63. *a)* $w = 1\,200 - 1\,140\,e^{-0.8t}$



$w = 1\,200 - 1\,140\,e^{-0.9t}$

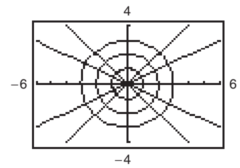


$w = 1\,200 - 1\,140e^{-t}$

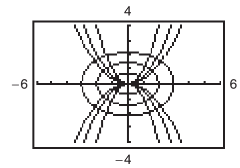


b) 1.31 años; 1.16 años; 1.05 años *c)* 1 200 lb

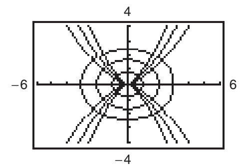
65. Círculos: $x^2 + y^2 = C$
Rectas: $y = Kx$
Las gráficas varían.



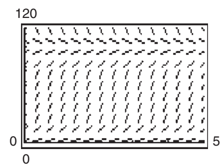
67. Parábolas: $x^2 = Cy$
Elipses: $x^2 + 2y^2 = K$
Las gráficas varían.



69. Curvas: $y^2 = Cx^3$
Elipses: $2x^2 + 3y^2 = K$
Las gráficas varían.



71. *d* **72.** *a* **73.** *b* **74.** *c*
75. *a)* 0.75 *b)* 2 100 *c)* 70 *d)* 4.49 años
e) $dP/dt = 0.75P(1 - P/2\,100)$
77. *a)* 3 *b)* 100
c)

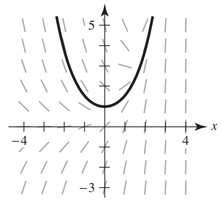


d) 50

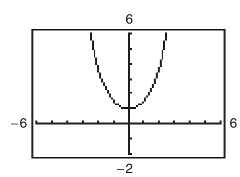
79. $y = 36/(1 + 8e^{-t})$ **81.** $y = 120/(1 + 14e^{-0.8t})$
83. *a)* $P = \dfrac{200}{1 + 7e^{-0.2640t}}$ *b)* 70 panteras *c)* 7.37 años
d) $dP/dt = 0.2640P(1 - P/200)$; 65.6 *e)* 100 años
85. Las respuestas varían.
87. Dos familias de curvas son mutuamente ortogonales si cada curva de la primer familia interseca a cada curva de la segunda familia en ángulos rectos.
89. Demostración
91. Falso. $y' = x/y$ es separable, pero $y = 0$ no es una solución.
93. Falso: $f(tx, ty) \neq t^nf(x, y)$. **95.** Problema Putnam A2, 1988

Sección 6.4 (página 440)

1. Lineal; se puede escribir en la forma $dy/dx + P(x)y = Q(x)$
3. No lineal; no se puede escribir en la forma $dy/dx + P(x)y = Q(x)$
5. $y = 2x^2 + x + C/x$ **7.** $y = -16 + Ce^x$
9. $y = -1 + Ce^{\operatorname{sen} x}$ **11.** $y = (x^3 - 3x + C)/[3(x - 1)]$
13. $y = e^{x^3}(x + C)$
15. *a)* Las respuestas varían.



c)



b) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
17. $y = 1 + 4/e^{\tan x}$ **19.** $y = \operatorname{sen} x + (x + 1)\cos x$
21. $xy = 4$ **23.** $y = -2 + x\ln|x| + 12x$

25. $P = -N/k + (N/k + P_0)e^{kt}$

27. *a)* \$4 212 796.94 *b)* \$31 424 909.75

29. *a)* $\dfrac{dQ}{dt} = q - kQ$ *b)* $Q = \dfrac{q}{k} + \left(Q_0 - \dfrac{q}{k}\right)e^{-kt}$ *c)* $\dfrac{q}{k}$

31. Demostración

33. *a)* $Q = 25e^{-t/20}$ *b)* $-20\ln\left(\frac{3}{5}\right) \approx 10.2$ min *c)* 0

35. *a)* $t = 50$ min *b)* $100 - \dfrac{25}{\sqrt{2}} \approx 82.32$ lb

c) $t = 50$ min; $200 - \dfrac{50}{\sqrt{2}} \approx 164.64$ lb

37. $v(t) = -159.47(1 - e^{-0.2007t})$; -159.47 pies/s

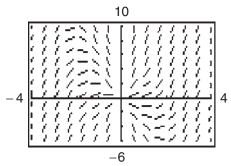
39. $I = \dfrac{E_0}{R} + Ce^{-Rt/L}$ **41.** $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$; $u(x) = e^{\int P(x)\,dx}$

43. *c* **44.** *d* **45.** *a* **46.** *b*

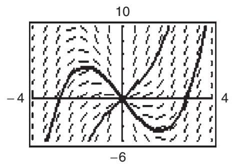
47. $1/y^2 = Ce^{2x^3} + \frac{1}{3}$ **49.** $y = 1/(Cx - x^2)$

51. $1/y^2 = 2x + Cx^2$ **53.** $y^{2/3} = 2e^x + Ce^{2x/3}$

55. *a)*



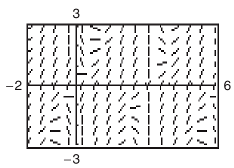
c)



b) $(-2, 4)$: $y = \frac{1}{2}x(x^2 - 8)$

$(2, 8)$: $y = \frac{1}{2}x(x^2 + 4)$

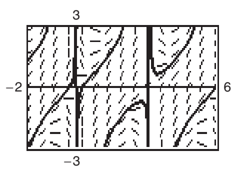
57. *a)*



b) $(1, 1)$: $y = (2\cos 1 + \operatorname{sen} 1)\csc x - 2\cot x$

$(3, -1)$: $y = (2\cos 3 - \operatorname{sen} 3)\csc x - 2\cot x$

c)



59. $2e^x + e^{-2y} = C$ **61.** $y = Ce^{-\operatorname{sen} x} + 1$

63. $x^3y^2 + x^4y = C$ **65.** $y = [e^x(x - 1) + C]/x^2$

67. $x^4y^4 - 2x^2 = C$ **69.** $y = \frac{12}{5}x^2 + C/x^3$

71. Falso. $y' + xy = x^2$ es lineal.

Ejercicios de repaso para el capítulo 6 (página 443)

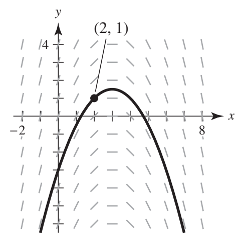
1. Sí **3.** $y = \frac{4}{3}x^3 + 7x + C$ **5.** $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$

7. $y = \frac{2}{5}(x - 5)^{5/2} + \frac{10}{3}(x - 5)^{3/2} + C$ **9.** $y = -e^{2-x} + C$

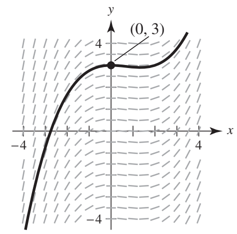
11.

x	-4	-2	0	2	4	8
y	2	0	4	4	6	8
dy/dx	-10	-4	-4	0	2	8

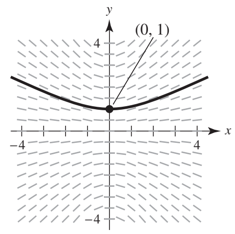
13. *a)* y *b)*



15. *a)* y *b)*



17. *a)* y *b)*



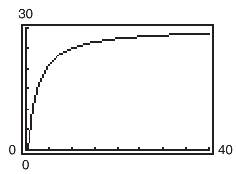
19. $y = 8x - \frac{1}{2}x^2 + C$

21. $y = -3 - 1/(x + C)$ **23.** $y = Ce^x/(2 + x)^2$

25. $y \approx \frac{3}{4}e^{0.379t}$ **27.** $y \approx 5e^{-0.680t}$ **29.** ≈ 7.79 pulg

31. *a)* $S \approx 30e^{-1.7918/t}$ *b)* 20 965 unidades

c)

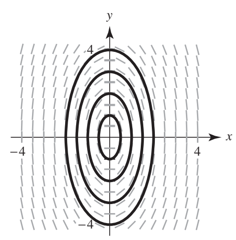


33. ≈ 37.5 años **35.** $y = \frac{1}{5}x^5 + 7\ln|x| + C$

37. $y = Ce^{8x^2}$ **39.** $x/(x^2 - y^2) = C$

41. Demostración; $y = -2x + \frac{1}{2}x^3$

43.



Las gráficas varían.
$4x^2 + y^2 = C$

45. *a)* 0.55 *b)* 5 250 *c)* 150 *d)* 6.41 años

e) $\dfrac{dP}{dt} = 0.55P\left(1 - \dfrac{P}{5\,250}\right)$

47. $y = \dfrac{80}{1 + 9e^{-t}}$

49. *a)* $P(t) = \dfrac{20\,400}{1 + 16e^{-0.553t}}$ *b)* 17 118 truchas *c)* 4.94 años

51. $y = -10 + Ce^x$ **53.** $y = e^{x/4}\left(\frac{1}{4}x + C\right)$

55. $y = (x + C)/(x - 2)$

57. $y = Ce^{3x} - \frac{1}{13}(2\cos 2x + 3\operatorname{sen} 2x)$

59. $y = e^{5x}/10 + Ce^{-5x}$ **61.** $y = 1/(1 + x + Ce^x)$

63. $y^{-2} = Cx^2 + 2/(3x)$

65. Las respuestas varían. Muestra de respuesta:
$(x^2 + 3y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$; $x^3 = C(x^2 + y^2)$

67. Las respuestas varían. Muestra de respuesta:
$x^3y' + 2x^2y = 1$; $x^2y = \ln|x| + C$

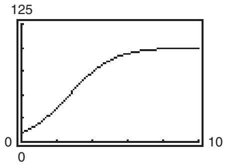
SP Solución de problemas (página 445)

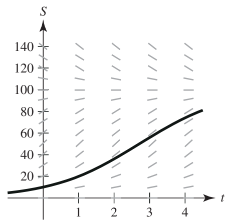
1. *a*) $y = 1/(1 - 0.01t)^{100}$; $T = 100$

b) $y = 1\Big/\left[\left(\dfrac{1}{y_0}\right)^{\varepsilon} - k\varepsilon t\right]^{1/\varepsilon}$; Las explicaciones varían.

3. *a*) $dS/dt = kS(L - S)$; $S = 100/(1 + 9e^{-0.8109t})$

b) 2.7 meses

c)


d)


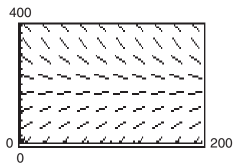
e) Las ventas disminuirán hacia la recta $S = L$.

5. Demostración; La gráfica de la función de logística es sólo un desplazamiento de la gráfica de la tangente hiperbólica.

7. 1 481.45 s ≈ 24 min, 41 s

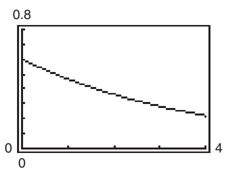
9. 2 575.95 s ≈ 42 min, 56 s

11. *a*) $s = 184.21 - Ce^{-0.019t}$

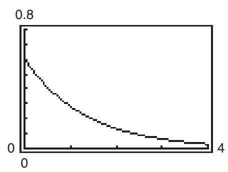
b)


c) Cuando $t \to \infty$, entonces $Ce^{-0.019t} \to 0$, y $s \to 184.21$.

13. *a*) $C = 0.6e^{-0.25t}$



b) $C = 0.6e^{-0.75t}$

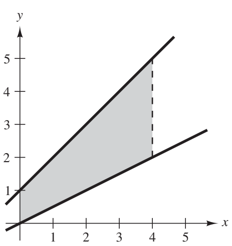


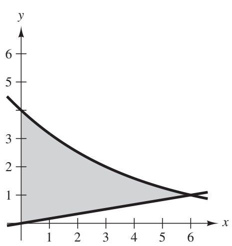
Capítulo 7

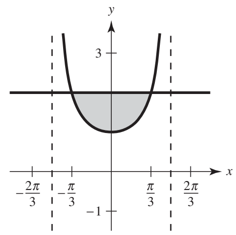
Sección 7.1 (página 454)

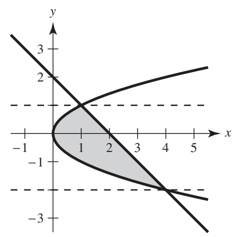
1. $-\displaystyle\int_0^6 (x^2 - 6x)\, dx$ **3.** $\displaystyle\int_0^3 (-2x^2 + 6x)\, dx$

5. $-6\displaystyle\int_0^1 (x^3 - x)\, dx$

7.


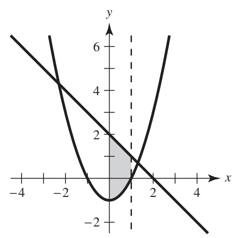
9.


11.


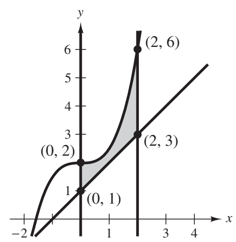
13.


15. *d*

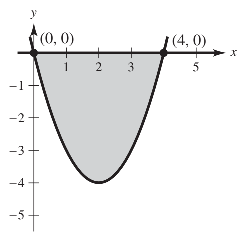
17. *a*) $\frac{125}{6}$ *b*) $\frac{125}{6}$ *c*) Integrando con respecto a *y*; las respuestas varían.

19.


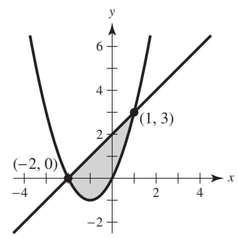
$\frac{13}{6}$

21.


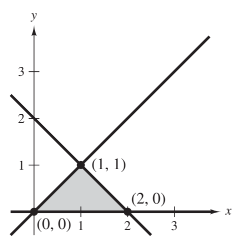
2

23.


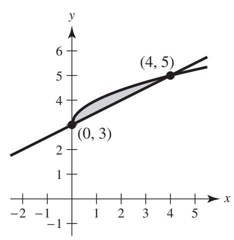
$\frac{32}{3}$

25.


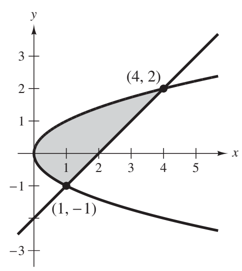
$\frac{9}{2}$

27.


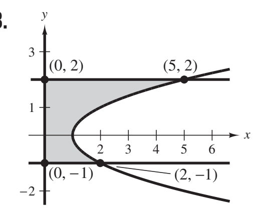
1

29.


$\frac{4}{3}$

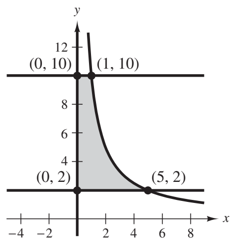
31.


$\frac{9}{2}$

33.


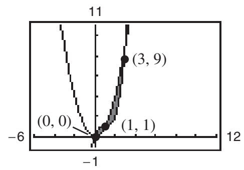
6

35.



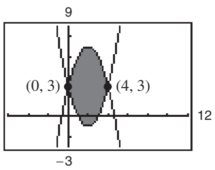
$10 \ln 5 \approx 16.094$

37. *a)*



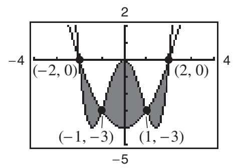
b) $\frac{37}{12}$

39. *a)*



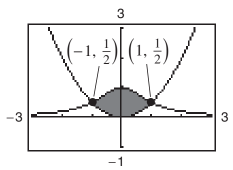
b) $\frac{64}{3}$

41. *a)*



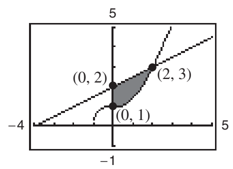
b) 8

43. *a)*



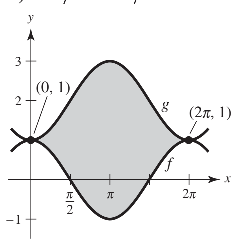
b) $\pi/2 - 1/3 \approx 1.237$

45. *a)*



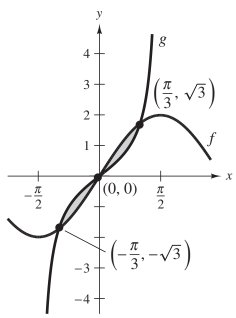
b) ≈ 1.759

47.



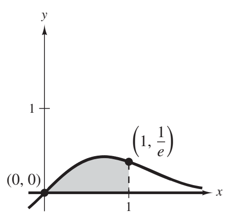
$4\pi \approx 12.566$

49.



$2(1 - \ln 2) \approx 0.614$

51.

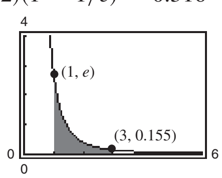


$(1/2)(1 - 1/e) \approx 0.316$

53. *a)*

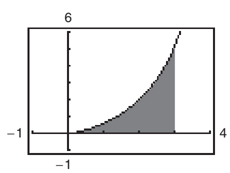
b) 4

55. *a)*



b) ≈ 1.323

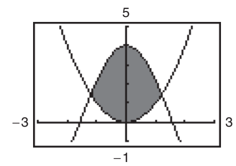
57. *a)*



b) La función es difícil de integrar.

c) ≈ 4.7721

59. *a)*

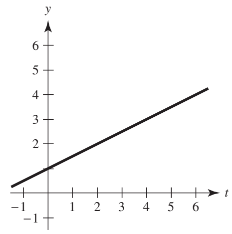


b) Las intersecciones son difíciles de encontrar.

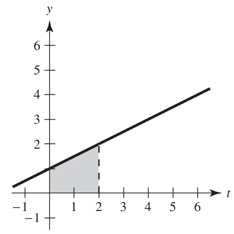
c) ≈ 6.3043

61. $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$

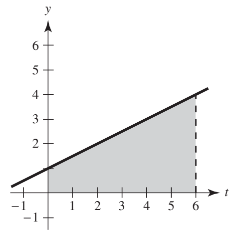
a) $F(0) = 0$



b) $F(2) = 3$

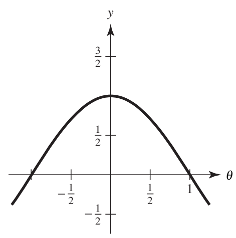


c) $F(6) = 15$

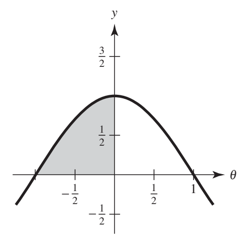


63. $F(\alpha) = (2/\pi)[\operatorname{sen}(\pi\alpha/2) + 1]$

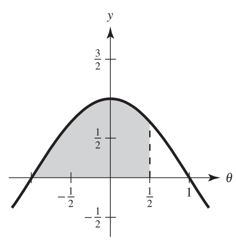
a) $F(-1) = 0$



b) $F(0) = 2/\pi \approx 0.6366$



c) $F(1/2) = \left(\sqrt{2} + 2\right)/\pi \approx 1.0868$

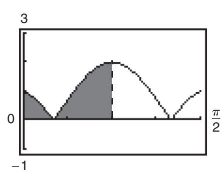


65. 14 **67.** 16

69. Las respuestas varían. Ejemplos de respuesta:

a) $\approx$ 966 pies^2 *b)* $\approx$ 1 004 pies^2

71. $A = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{2} \approx 0.7990$ **73.** $\int_{-2}^{1} [x^3 - (3x - 2)]\, dx = \frac{27}{4}$



75. $\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{1}{x^2+1} - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)\right] dx \approx 0.0354$

77. Las respuestas varían. Ejemplo: $x^4 - 2x^2 + 1 \le 1 - x^2$ en $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} [(1 - x^2) - (x^4 - 2x^2 + 1)]\, dx = \tfrac{4}{15}$$

79. La oferta 2 es mejor porque el salario acumulado (área bajo la curva) es mayor.

81. *a*) La integral $\int_0^5 [v_1(t) - v_2(t)]\, dt = 10$ significa que de 0 a 5 segundos el primer carro viajó 10 metros más que el segundo.

La integral $\int_0^{10} [v_1(t) - v_2(t)]\, dt = 30$ significa que de 0 a 10 segundos el primer carro viajó 30 metros más que el segundo.

La integral $\int_{20}^{30} [v_1(t) - v_2(t)]\, dt = -5$ significa que de 20 a 30 segundos el segundo carro viajó 5 metros más que el primero.

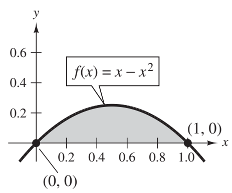
b) No. No se sabe cuándo inician ambos autos o la distancia inicial entre ellos.

c) El auto con velocidad v_1 va a la cabeza por 30 metros.

d) El carro 1 está a la cabeza por 8 metros.

83. $b = 9\left(1 - 1/\sqrt[3]{4}\right) \approx 3.330$ **85.** $a = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1.172$

87. Las respuestas varían. Ejemplo de muestra: $\frac{1}{6}$



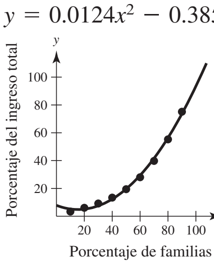
89. *a*) $(-2, -11), (0, 7)$ *b*) $y = 9x + 7$

c) 3.2, 6.4, 3.2; el área entre los dos puntos de inflexión es la suma de las áreas entre las otras dos regiones.

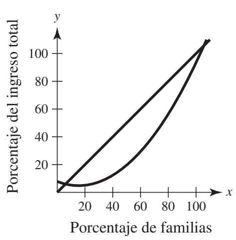
91. $6.825 miles de millones

93. *a*) $y = 0.0124x^2 - 0.385x + 7.85$

b)



c)



d) $\approx$ 2 006.7

95. $\frac{16}{3}\left(4\sqrt{2} - 5\right) \approx 3.503$

97. *a*) $\approx$ 6.031 m^2 *b*) $\approx$ 12.062 m^3 *c*) 60 310 lb

99. Verdadero

101. Falso. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = 2x - x^2$. f y g se intersecan en (1, 1), el punto medio de [0, 2], pero

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^2 [x - (2x - x^2)]\, dx = \tfrac{2}{3} \ne 0.$$

103. $\sqrt{3}/2 + 7\pi/24 + 1 \approx 2.7823$

105. Problema Putnam A1, 1993

Sección 7.2 (página 465)

1. $\pi\displaystyle\int_0^1 (-x+1)^2\, dx = \frac{\pi}{3}$ **3.** $\pi\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \frac{15\pi}{2}$

5. $\pi\displaystyle\int_0^1 [(x^2)^2 - (x^5)^2]\, dx = \frac{6\pi}{55}$ **7.** $\pi\displaystyle\int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = 8\pi$

9. $\pi\displaystyle\int_0^1 (y^{3/2})^2\, dy = \frac{\pi}{4}$

11. *a*) $9\pi/2$ *b*) $\left(36\pi\sqrt{3}\right)/5$ *c*) $\left(24\pi\sqrt{3}\right)/5$ *d*) $\left(84\pi\sqrt{3}\right)/5$

13. *a*) $32\pi/3$ *b*) $64\pi/3$ **15.** 18π

17. $\pi\left(48 \ln 2 - \frac{27}{4}\right) \approx 83.318$ **19.** $124\pi/3$ **21.** $832\pi/15$

23. $\pi \ln 5$ **25.** $2\pi/3$ **27.** $(\pi/2)(1 - 1/e^2) \approx 1.358$

29. $277\pi/3$ **31.** 8π **33.** $\pi^2/2 \approx 4.935$

35. $(\pi/2)(e^2 - 1) \approx 10.036$ **37.** 1.969 **39.** 15.4115

41. $\pi/3$ **43.** $2\pi/15$ **45.** $\pi/2$ **47.** $\pi/6$

49. *a*) El área parece acercarse a 1 de manera que volumen (área cuadrada $\times$ π) es casi 3.

51. Una curva seno en $[0, \pi/2]$ girada alrededor del eje x.

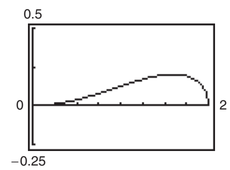
53. La parábola $y = 4x - x^2$ es la traslación horizontal de la parábola $y = 4 - x^2$, de manera que sus volúmenes son iguales.

55. *a*) El enunciado es verdadero. Las explicaciones varían.

b) El enunciado es falso. Las explicaciones varían.

57. 18π **59.** Demostración **61.** $\pi r^2 h[1 - (h/H) + h^2/(3H^2)]$

63.

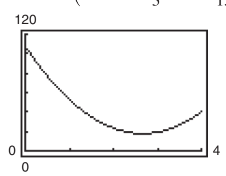


$\pi/30$

65. *a*) 60π *b*) 50π

67. *a*) $V = \pi\left(4b^2 - \frac{64}{3}b + \frac{512}{15}\right)$

b)



$b \approx 2.67$

c) $b = \frac{8}{3} \approx 2.67$

69. *a*) *ii*); cilindro circular recto de radio r y altura h.

b) *iv*); elipsoide cuya elipse subyacente tiene la ecuación $(x/b)^2 + (y/a)^2 = 1$

c) *iii*); esfera de radio r.

d) *i*); cono circular recto de radio r y altura h.

e) *v*); toroide con radio transversal r y demás radios R.

71. *a*) $\frac{81}{10}$ *b*) $\frac{9}{2}$ **73.** $\frac{16}{3}r^3$ **75.** $V = \frac{4}{3}\pi(R^2 - r^2)^{3/2}$

77. 19.7443 **79.** *a*) $\frac{2}{3}r^3$ *b*) $\frac{2}{3}r^3 \tan\theta$; Como $\theta \to 90°$, entonces $V \to \infty$.

Sección 7.3 (página 474)

1. $2\pi\displaystyle\int_0^2 x^2\, dx = \frac{16\pi}{3}$ **3.** $2\pi\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x}\, dx = \frac{128\pi}{5}$

5. $2\pi\displaystyle\int_0^3 x^3\, dx = \frac{81}{2}\pi$ **7.** $2\pi\displaystyle\int_0^2 x(4x - 2x^2)\, dx = \frac{16\pi}{3}$

9. $2\pi\int_0^2 x(x^2-4x+4)\,dx = \frac{8\pi}{3}$

11. $2\pi\int_2^4 x\sqrt{x-2}\,dx = \frac{128\pi}{15}\sqrt{2}$

13. $2\pi\int_0^1 x\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)dx = \sqrt{2\pi}\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \approx 0.986$

15. $2\pi\int_0^2 y(2-y)\,dy = \frac{8\pi}{3}$

17. $2\pi\left[\int_0^{1/2} y\,dy + \int_{1/2}^1 y\left(\frac{1}{y}-1\right)dy\right] = \frac{\pi}{2}$

19. $2\pi\left[\int_0^8 y^{4/3}\,dy\right] = \frac{768\pi}{7}$

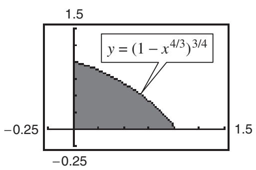
21. $2\pi\int_0^2 y(4-2y)\,dy = 16\pi/3$ **23.** 64π **25.** 16π

27. Métodos de las capas; es mucho más sencillo expresar x en términos de y que a la inversa.

29. *a*) $128\pi/7$ *b*) $64\pi/5$ *c*) $96\pi/5$

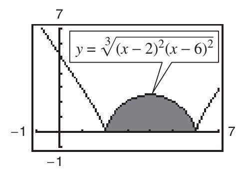
31. *a*) $\pi a^3/15$ *b*) $\pi a^3/15$ *c*) $4\pi a^3/15$

33. *a*)



b) 1.506

35. *a*)



b) 187.25

37. *d* **39.** *a*, *c*, *b*

41. Ambas integrales dan el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$ y $x = 5$ alrededor del eje x.

43. *a*) Los rectángulos serían verticales.

b) Los rectángulos serían horizontales.

45. Diámetro $= 2\sqrt{4-2\sqrt{3}} \approx 1.464$ **47.** $4\pi^2$

49. *a*) Región acotada por $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

b) Girada alrededor del eje y.

51. *a*) Región acotada por $x = \sqrt{6-y}$, $y = 0$, $x = 0$

b) Girada alrededor de $y = -2$

53. *a*) Demostración *b*) *i*) $V = 2\pi$ *ii*) $V = 6\pi^2$

55. Demostración

57. *a*) $R_1(n) = n/(n+1)$ *b*) $\lim_{n\to\infty} R_1(n) = 1$

c) $V = \pi ab^{n+2}[n/(n+2)]$; $R_2(n) = n/(n+2)$

d) $\lim_{n\to\infty} R_2(n) = 1$

e) La gráfica se aproxima a la recta $x = b$ cuando n tiende a ∞.

59. *a*) y *b*) $\approx$ 121 475 pies^3 **61.** $c = 2$

63. *a*) $64\pi/3$ *b*) $2\,048\pi/35$ *c*) $8\,192\pi/105$

Sección 7.4 (página 485)

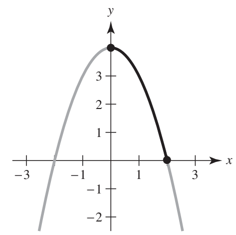
1. *a*) y *b*) 17 **3.** $\frac{5}{3}$ **5.** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) \approx 1.219$

7. $5\sqrt{5}-2\sqrt{2} \approx 8.352$ **9.** 309.3195

11. $\ln\left[(\sqrt{2}+1)/(\sqrt{2}-1)\right] \approx 1.763$

13. $\frac{1}{2}(e^2 - 1/e^2) \approx 3.627$ **15.** $\frac{76}{3}$

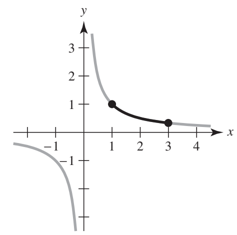
17. *a*)



b) $\int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx$

c) ≈ 4.647

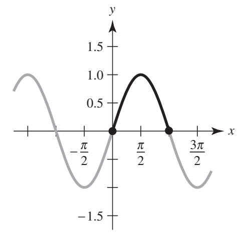
19. *a*)



b) $\int_1^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$

c) ≈ 2.147

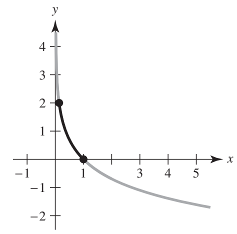
21. *a*)



b) $\int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$

c) ≈ 3.820

23. *a*)

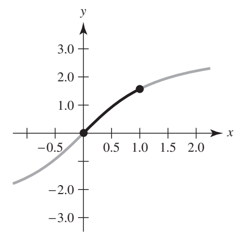


b) $\int_0^2 \sqrt{1+e^{-2y}}\,dy$

$= \int_{e^{-2}}^1 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx$

c) ≈ 2.221

25. *a*)



b) $\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^2}\,dx$

c) ≈ 1.871

27. *b* **29.** *a*) 64.125 *b*) 64.525 *c*) 64.666 *d*) 64.672

31. $20[\text{senh}\,1 - \text{senh}(-1)] \approx 47.0$ m **33.** $\approx 1\,480$

35. $3\,\text{arcsen}\,\frac{2}{3} \approx 2.1892$

37. $2\pi\int_0^3 \frac{1}{3}x^3\sqrt{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{9}(82\sqrt{82}-1) \approx 258.85$

39. $2\pi\int_1^2 \left(\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx = \frac{47\pi}{16} \approx 9.23$

41. $2\pi\int_{-1}^1 2\,dx = 8\pi \approx 25.13$

43. $2\pi\int_1^8 x\sqrt{1+\frac{1}{9x^{4/3}}}\,dx = \frac{\pi}{27}(145\sqrt{145}-10\sqrt{10}) \approx 199.48$

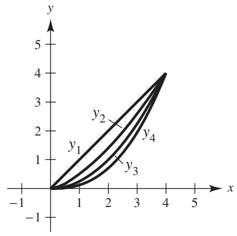
45. $2\pi\int_0^2 x\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\,dx = \frac{\pi}{3}(16\sqrt{2}-8) \approx 15.318$

47. 14.424

49. Una curva rectificable es una curva con longitud de arco finita.

51. La fórmula de integración para el área de revolución se deduce de la fórmula para el área lateral de un cono circular recto. La fórmula es $S = 2\pi rL$, donde $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, que es el radio promedio del tronco y L es la longitud del segmento de recta del tronco. El elemento representativo es $2\pi f(d_i)\sqrt{1+(\Delta y_i/\Delta x_i)^2}\,\Delta x_i$.

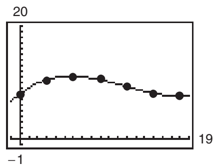
53. *a)*



b) y_1, y_2, y_3, y_4
c) $s_1 \approx 5.657$; $s_2 \approx 5.759$; $s_3 \approx 5.916$; $s_4 \approx 6.063$

55. 20π **57.** $6\pi(3 - \sqrt{5}) \approx 14.40$

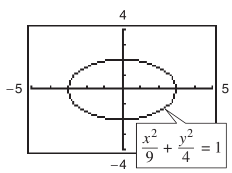
59. *a)* Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: 5 207.62 pulg^3
b) Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: 1 168.64 pulg^3
c) $r = 0.0040y^3 - 0.142y^2 + 1.23y + 7.9$



d) 5 279.64 pulg^3; 1 179.5 pulg^2

61. *a)* $\pi(1 - 1/b)$ *b)* $2\pi\int_1^b \sqrt{x^4+1}/x^3\,dx$
c) $\lim\limits_{b\to\infty} V = \lim\limits_{b\to\infty} \pi(1 - 1/b) = \pi$
d) Porque $\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} > \dfrac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \dfrac{1}{x} > 0$ en $[1, b]$,
se tiene $\displaystyle\int_1^b \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx > \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_1^b = \ln b$ y $\lim\limits_{b\to\infty}$
$\ln b \to \infty$. De esta manera, $\displaystyle\lim_{b\to\infty} 2\pi\int_1^b \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx = \infty$.

63. *a)*



b) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{1 + \frac{4x^2}{81 - 9x^2}}\,dx$
c) No se puede evaluar esta integral definida porque el integrando no está definido en $x = 3$. La regla de Simpson no puede aplicarse por la misma razón.

65. Objeto volador: $\frac{2}{3}$ unidades
Perseguidor: $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{4}{3} = 2\left(\frac{2}{3}\right)$

67. $384\pi/5$ **69.** Demostración **71.** Demostración

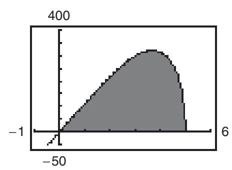
Sección 7.5 (página 495)

1. 2 000 pies-lb **3.** 896 N-m
5. 40.833 pulg-lb $\approx$ 3.403 pies-lb **7.** 8 750 N-cm = 87.5 N-m
9. 160 pulg-lb $\approx$ 13.3 pies-lb **11.** 37.125 pies-lb
13. *a)* 487.805 millas-tons $\approx 5.151 \times 10^9$ pies-lb
b) 1 395.349 millas-tons $\approx 1.473 \times 10^{10}$ pies-lb
15. *a)* 2.93×10^4 millas-tons $\approx 3.10 \times 10^{11}$ pies-lb
b) 3.38×10^4 millas-tons $\approx 3.57 \times 10^{11}$ pies-lb
17. *a)* 2 496 pies-lb *b)* 9 984 pies-lb **19.** $470\,400\pi$ N-m
21. $2\,995.2\,\pi$ pies-lb **23.** $20\,217.6\pi$ pies-lb **25.** $2\,457\,\pi$ pies-lb
27. 600 pies-lb **29.** 450 pies-lb **31.** 168.75 pies-lb
33. Si un objeto se mueve una distancia D en la dirección en la que una fuerza constante es aplicada, entonces el trabajo W hecho por la fuerza se define como $W = FD$.
35. La situación en *a)* requiere más trabajo. No hay trabajo requerido para el apartado *b)* porque la distancia es 0.
37. *a)* 54 pies-lb *b)* 160 pies-lb *c)* 9 pies-lb *d)* 18 pies-lb
39. $2\,000\ln(3/2) \approx 810.93$ pies-lb **41.** $3k/4$
43. 3 249.4 pies-lb **45.** 10 330.3 pies-lb

Sección 7.6 (página 506)

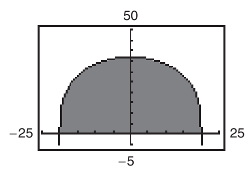
1. $\bar{x} = -\frac{4}{3}$ **3.** $\bar{x} = 12$ **5.** *a)* $\bar{x} = 16$ *b)* $\bar{x} = -2$
7. $x = 6$ ft **9.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{10}{9}, -\frac{1}{9}\right)$ **11.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(2, \frac{48}{25}\right)$
13. $M_x = \rho/3$, $M_y = 4\rho/3$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (4/3, 1/3)$
15. $M_x = 4\rho$, $M_y = 64\rho/5$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (12/5, 3/4)$
17. $M_x = \rho/35$, $M_y = \rho/20$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (3/5, 12/35)$
19. $M_x = 99\rho/5$, $M_y = 27\rho/4$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (3/2, 22/5)$
21. $M_x = 192\rho/7$, $M_y = 96\rho$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (5, 10/7)$
23. $M_x = 0$, $M_y = 256\rho/15$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (8/5, 0)$
25. $M_x = 27\rho/4$, $M_y = -27\rho/10$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (-3/5, 3/2)$
27. $A = \displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{4}{3}$
$M_x = \displaystyle\int_0^2 \left(\frac{2x + x^2}{2}\right)(2x - x^2)\,dx = \frac{32}{15}$
$M_y = \displaystyle\int_0^2 x(2x - x^2)\,dx = \frac{4}{3}$
29. $A = \displaystyle\int_0^3 (2x + 4)\,dx = 21$
$M_x = \displaystyle\int_0^3 \left(\frac{2x + 4}{2}\right)(2x + 4)\,dx = 78$
$M_y = \displaystyle\int_0^3 x(2x + 4)\,dx = 36$

31.



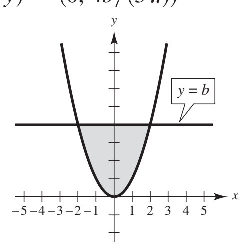
$(\bar{x}, \bar{y}) = (3.0, 126.0)$

33.



$(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 16.2)$

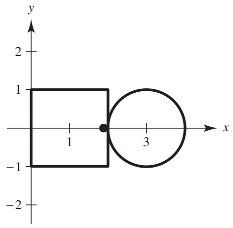
35. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{b}{3}, \dfrac{c}{3}\right)$ **37.** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{(a + 2b)c}{3(a + b)}, \dfrac{a^2 + ab + b^2}{3(a + b)}\right)$
39. $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 4b/(3\pi))$
41. *a)*



b) $\bar{x} = 0$ por simetría
c) $M_y = \displaystyle\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} x(b - x^2)\,dx = 0$ porque $x(b - x^2)$ es una función impar.
d) $\bar{y} > b/2$ porque el área es mayor para $y > b/2$.
e) $\bar{y} = (3/5)b$

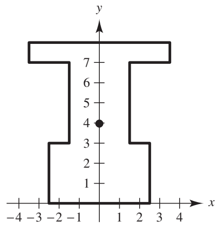
43. *a)* $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 12.98)$
b) $y = (-1.02 \times 10^{-5})x^4 - 0.0019x^2 + 29.28$
c) $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 12.85)$

45.



$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{4 + 3\pi}{4 + \pi}, 0\right)$

47.



$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \dfrac{135}{34}\right)$

49. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{2 + 3\pi}{2 + \pi}, 0\right)$ **51.** $160\pi^2 \approx 1\,579.14$

53. $128\pi/3 \approx 134.04$

55. El centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ es $\bar{x} = M_y/m$ y $\bar{y} = M_x/m$, donde:

1. $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ es la masa total del sistema.
2. $M_y = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n$ es el momento alrededor del eje y.
3. $M_x = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n$ es el momento alrededor del eje x.

57. Ver teorema 7.1 en la página 505. **59.** $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2r/\pi)$

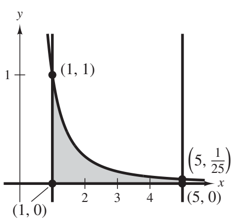
61. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{n+1}{n+2}, \dfrac{n+1}{4n+2}\right)$; a medida que $n \to \infty$, la región se contrae hacia los segmentos de recta $y = 0$ para $0 \le x \le 1$ y $x = 1$ para $0 \le y \le 1$; $(\bar{x}, \bar{y}) \to \left(1, \dfrac{1}{4}\right)$.

Sección 7.7 (página 513)

1. 1 497.6 lb **3.** 4 992 lb **5.** 748.8 lb **7.** 1 123.2 lb
9. 748.8 lb **11.** 1 064.96 lb **13.** 117 600 N
15. 2 381 400 N **17.** 2 814 lb **19.** 6 753.6 lb **21.** 94.5 lb
23. Demostración **25.** Demostración **27.** 960 lb
29. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta (utilizando la regla de Simpson): 3 010.8 lb
31. 8 213.0 lb
33. $3\sqrt{2}/2 \approx 2.12$ pies; la presión aumenta al incrementarse la profundidad.
35. Porque se mide la fuerza total contra una región entre dos profundidades.

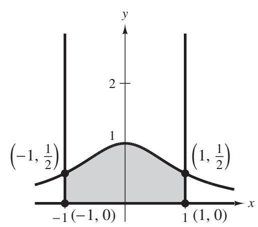
Ejercicios de repaso para el capítulo 7 (página 515)

1.



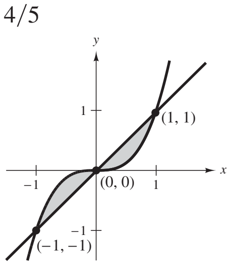
$4/5$

3.



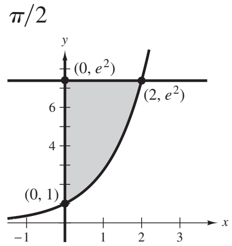
$\pi/2$

5.



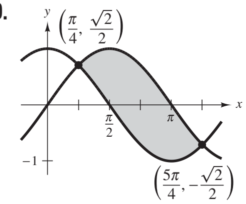
$\frac{1}{2}$

7.



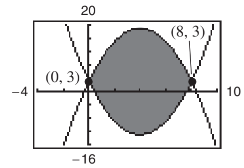
$e^2 + 1$

9.



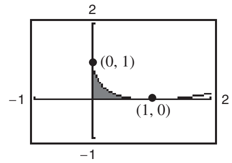
$2\sqrt{2}$

11.



$\frac{512}{3}$

13.



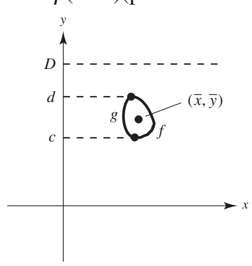
$\frac{1}{6}$

15. $\displaystyle\int_0^2 [0 - (y^2 - 2y)]\,dy = \int_{-1}^0 2\sqrt{x+1}\,dx = \frac{4}{3}$

17. $\displaystyle\int_0^2 \left[1 - \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right] dx + \int_2^3 [1 - (x - 2)]\,dx$
$\displaystyle= \int_0^1 [(y+2) - (2 - 2y)]\,dy = \frac{3}{2}$

19. *a)* 9 920 pies^2 *b)* 10 413$\frac{1}{3}$ pies^2
21. *a)* 9π *b)* 18π *c)* 9π *d)* 36π
23. *a)* 64π *b)* 48π **25.** $\pi^2/4$
27. $(4\pi/3)(20 - 9\ln 3) \approx 42.359$
29. *a)* $\dfrac{4}{15}$ *b)* $\dfrac{\pi}{12}$ *c)* $\dfrac{32\pi}{105}$ **31.** 1.958 pies
33. $\frac{8}{15}(1 + 6\sqrt{3}) \approx 6.076$ **35.** 4 018.2 pies
37. 15π **39.** 62.5 pulg-lb $\approx$ 5.208 pies-lb
41. $122\,980\pi$ pies-lb $\approx$ 193.2 pies-ton **43.** 200 pies-lb
45. $a = 15/4$ **47.** $(\bar{x}, \bar{y}) = (a/5, a/5)$ **49.** $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2a^2/5)$
51. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{2(9\pi + 49)}{3(\pi + 9)}, 0\right)$
53. Sea D = superficie del líquido; ρ = peso por volumen cúbico.

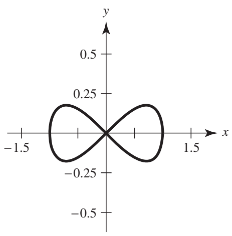
$$F = \rho\int_c^d (D - y)[f(y) - g(y)]\,dy$$
$$= \rho\left[\int_c^d D[f(y) - g(y)]\,dy - \int_c^d y[f(y) - g(y)]\,dy\right]$$
$$= \rho\left[\int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy\right]\left[D - \frac{\int_c^d y[f(y) - g(y)]\,dy}{\int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy}\right]$$
$$= \rho(\text{área})(D - \bar{y})$$
$$= \rho(\text{área})(\text{profundidad del centroide})$$



SP Solución de problemas (página 517)

1. 3 **3.** $y = 0.2063x$

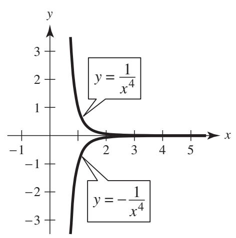
5. $\dfrac{5\sqrt{2}\pi}{3}$



7. $V = 2\pi\left[d + \frac{1}{2}\sqrt{w^2 + l^2}\right]lw$ **9.** $f(x) = 2e^{x/2} - 2$

11. 89.3%

13.



a) $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{63}{43}, 0\right)$

b) $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{3b(b+1)}{2(b^2 + b + 1)}, 0\right)$

c) $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

15. Excedente del consumidor: 1 600; excedente del productor: 400

17. Muro en el extremo bajo: 9 984 lb
Muro en el extremo profundo: 39 936 lb
Muro lateral: 19 968 lb + 26 624 lb = 46 592 lb

Capítulo 8

Sección 8.1 (página 524)

1. *b* **3.** *c*

5. $\displaystyle\int u^n\,du$; $u = 5x - 3,\ n = 4$ **7.** $\displaystyle\int \frac{du}{u}$; $u = 1 - 2\sqrt{x}$ **9.** $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$; $u = t,\ a = 1$

11. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du$; $u = t^2$ **13.** $\displaystyle\int e^u\,du$; $u = \operatorname{sen} x$ **15.** $2(x-5)^7 + C$

17. $-7/[6(z-10)^6] + C$ **19.** $\frac{1}{2}v^2 - 1/[6(3v-1)^2] + C$

21. $-\frac{1}{3}\ln|-t^3 + 9t + 1| + C$ **23.** $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C$

25. $\ln(1 + e^x) + C$ **27.** $\dfrac{x}{15}(48x^4 + 200x^2 + 375) + C$

29. $\operatorname{sen}(2\pi x^2)/(4\pi) + C$ **31.** $-(1/\pi)\csc \pi x + C$

33. $\frac{1}{11}e^{11x} + C$ **35.** $2\ln(1 + e^x) + C$ **37.** $(\ln x)^2 + C$

39. $-\ln(1 - \operatorname{sen} x) + C = \ln|\sec x(\sec x + \tan x)| + C$

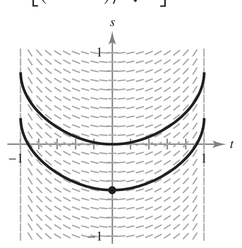
41. $\csc\theta + \cot\theta + C = (1 + \cos\theta)/\operatorname{sen}\theta + C$

43. $-\frac{1}{4}\operatorname{arcsen}(4t+1) + C$ **45.** $\frac{1}{2}\ln|\cos(2/t)| + C$

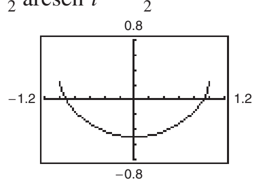
47. $6\operatorname{arcsen}[(x-5)/5] + C$ **49.** $\frac{1}{4}\arctan[(2x+1)/8] + C$

51. $\operatorname{arcsen}\left[(x+2)/\sqrt{5}\right] + C$

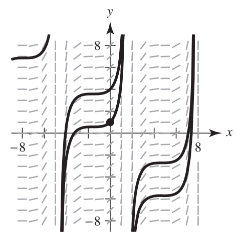
53. *a)*



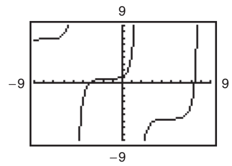
b) $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} t^2 - \frac{1}{2}$



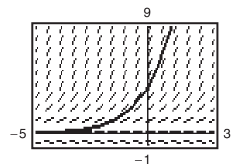
55. *a)*



b) $2\tan x + 2\sec x - x - 1 + C$



57. $y = 4e^{0.8x}$



59. $y = \frac{1}{2}e^{2x} + 10e^x + 25x + C$

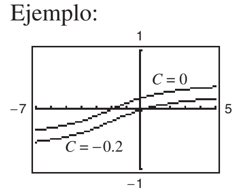
61. $r = 10\operatorname{arcsen} e^t + C$ **63.** $y = \frac{1}{2}\arctan(\tan x/2) + C$

65. $\frac{1}{2}$ **67.** $\frac{1}{2}(1 - e^{-1}) \approx 0.316$ **69.** 8 **71.** $\pi/18$

73. $18\sqrt{6}/5 \approx 8.82$ **75.** $\frac{3}{2}\ln\left(\frac{34}{9}\right) + \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{5}{3}\right) \approx 2.68$

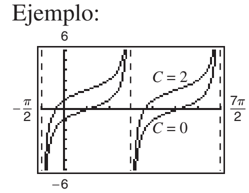
77. $\frac{4}{3} \approx 1.333$

79. $\frac{1}{3}\arctan\left[\frac{1}{3}(x+2)\right] + C$
Las gráficas varían.
Ejemplo:



Una gráfica es una traslación vertical de la otra.

81. $\tan\theta - \sec\theta + C$
Las gráficas varían.
Ejemplo:



Una gráfica es una traslación vertical de la otra.

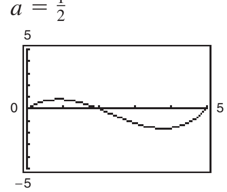
83. Regla de las potencias: $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C;\ u = x^2 + 1,\ n = 3$

85. Regla de los logaritmos: $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;\ u = x^2 + 1$

87. $a = \sqrt{2},\ b = \dfrac{\pi}{4};\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

89. $a = \frac{1}{2}$

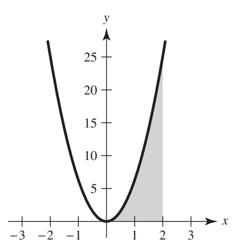
91.



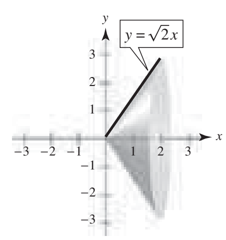
Negativa; hay más área por debajo del eje *x* que por arriba.

93. *a*

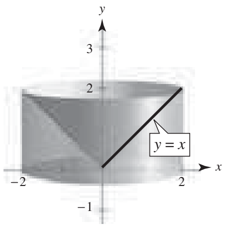
95. *a)*



b)



c)



97. *a)* $\pi(1 - e^{-1}) \approx 1.986$ *b)* $b = \sqrt{\ln\left(\dfrac{3\pi}{3\pi - 4}\right)} \approx 0.743$

99. $\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) \approx 0.8814$

101. $(8\pi/3)\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 256.545$

103. $\frac{1}{3}$ arctan $3 \approx 0.416$ **105.** ≈ 1.0320

107. *a)* $\frac{1}{3}\operatorname{sen} x(\cos^2 x + 2)$

b) $\frac{1}{15}\operatorname{sen} x(3\cos^4 x + 4\cos^2 x + 8)$

c) $\frac{1}{35}\operatorname{sen} x(5\cos^6 x + 6\cos^4 x + 8\cos^2 x + 16)$

d) $\displaystyle\int \cos^{15} x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^7 \cos x\, dx$

Se expandiría $(1 - \operatorname{sen}^2 x)^7$.

109. Demostración

Sección 8.2 (página 533)

1. $u = x,\ dv = e^{2x}\,dx$ **3.** $u = (\ln x)^2,\ dv = dx$

5. $u = x,\ dv = \sec^2 x\,dx$ **7.** $\frac{1}{16}x^4(4\ln x - 1) + C$

9. $\dfrac{1}{9}\operatorname{sen} 3x - \dfrac{1}{3}x\cos 3x + C$ **11.** $-\dfrac{1}{16e^{4x}}(4x + 1) + C$

13. $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

15. $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$ **17.** $\frac{1}{4}[2(t^2 - 1)\ln|t + 1| - t^2 + 2t] + C$

19. $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$ **21.** $e^{2x}/[4(2x + 1)] + C$

23. $(x - 1)^2 e^x + C$ **25.** $\frac{2}{15}(x - 5)^{3/2}(3x + 10) + C$

27. $x\operatorname{sen} x + \cos x + C$

29. $(6x - x^3)\cos x + (3x^2 - 6)\operatorname{sen} x + C$

31. $-t\csc t - \ln|\csc t + \cot t| + C$

33. $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

35. $\frac{1}{5}e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x) + C$

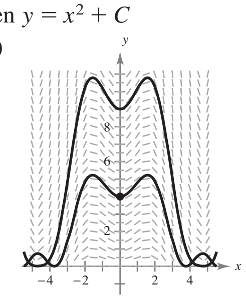
37. $\frac{1}{5}e^{-x}(2\operatorname{sen} 2x - \cos 2x) + C$ **39.** $y = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

41. $y = \dfrac{2}{5}t^2\sqrt{3 + 5t} - \dfrac{8t}{75}(3 + 5t)^{3/2} + \dfrac{16}{1\,875}(3 + 5t)^{5/2} + C$

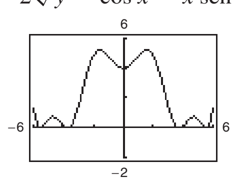
$= \dfrac{2}{625}\sqrt{3 + 5t}(25t^2 - 20t + 24) + C$

43. $\operatorname{sen} y = x^2 + C$

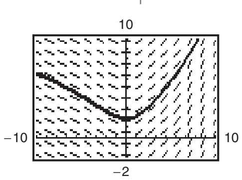
45. *a)*



b) $2\sqrt{y} - \cos x - x\operatorname{sen} x = 3$



47.



49. $2e^{3/2} + 4 \approx 12.963$

51. $\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4} \approx 0.143$

53. $\left(\pi - 3\sqrt{3} + 6\right)/6 \approx 0.658$

55. $\frac{1}{2}[e(\operatorname{sen} 1 - \cos 1) + 1] \approx 0.909$

57. $\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln 2 - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9} \approx 0.494$

59. $8\operatorname{arcsec} 4 + \sqrt{3}/2 - \sqrt{15}/2 - 2\pi/3 \approx 7.380$

61. $(e^{2x}/4)(2x^2 - 2x + 1) + C$

63. $(3x^2 - 6)\operatorname{sen} x - (x^3 - 6x)\cos x + C$

65. $x\tan x + \ln|\cos x| + C$ **67.** $2\left(\operatorname{sen}\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right) + C$

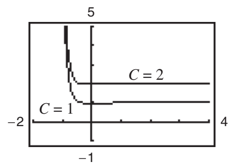
69. $\frac{128}{15}$ **71.** $\frac{1}{2}(x^4 e^{x^2} - 2x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2}) + C$

73. $\frac{1}{2}x[\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)] + C$ **75.** Regla del producto

77. Para que la técnica de integración por partes sea eficiente, la parte más complicada del integrando se asigna como dv y como u la parte del integrando cuya derivada es una función más simple que u. Si se elige $u = \operatorname{sen} x$, entonces du no es una función más simple.

79. *a)* $-(e^{-4t}/128)(32t^3 + 24t^2 + 12t + 3) + C$

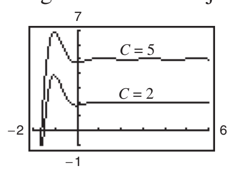
b) Las gráficas varían. Ejemplo:



c) Una gráfica es una traslación vertical de la otra.

81. *a)* $\frac{1}{13}(2e^{-\pi} + 3) \approx 0.2374$

b) Las gráficas varían. Ejemplo:



c) Una gráfica es una traslación vertical de la otra.

83. $\frac{2}{5}(2x - 3)^{3/2}(x + 1) + C$ **85.** $\frac{1}{3}\sqrt{4 + x^2}(x^2 - 8) + C$

87. $n = 0$: $x(\ln x - 1) + C$

$n = 1$: $\frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$

$n = 2$: $\frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C$

$n = 3$: $\frac{1}{16}x^4(4\ln x - 1) + C$

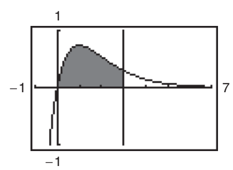
$n = 4$: $\frac{1}{25}x^5(5\ln x - 1) + C$

$\displaystyle\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{(n + 1)^2}[(n + 1)\ln x - 1] + C$

89 a 93. Demostraciones

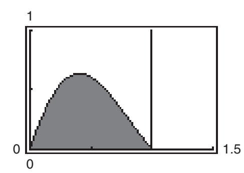
95. $\frac{1}{36}x^6(6\ln x - 1) + C$ **97.** $\frac{1}{13}e^{2x}(2\cos 3x + 3\operatorname{sen} 3x) + C$

99.



$2 - \dfrac{8}{e^3} \approx 1.602$

101.



$\dfrac{\pi}{1 + \pi^2}\left(\dfrac{1}{e} + 1\right) \approx 0.395$

103. *a)* 1 *b)* $\pi(e - 2) \approx 2.257$ *c)* $\frac{1}{2}\pi(e^2 + 1) \approx 13.177$

d) $\left(\dfrac{e^2 + 1}{4}, \dfrac{e - 2}{2}\right) \approx (2.097, 0.359)$

105. En el ejemplo 6, se mostró que el centroide de una región equivalente fue $(1, \pi/8)$. Por simetría, el centroide de esta región es $(\pi/8, 1)$.

107. $[7/(10\pi)](1 - e^{-4\pi}) \approx 0.223$ **109.** \$931 265

111. Demostración **113.** $b_n = [8h/(n\pi)^2]\,\text{sen}(n\pi/2)$

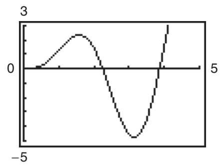
115. Capas: $V = \pi\left[b^2 f(b) - a^2 f(a) - \int_a^b x^2 f'(x)\,dx\right]$

Discos: $V = \pi\left[b^2 f(b) - a^2 f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} [f^{-1}(y)]^2\,dy\right]$

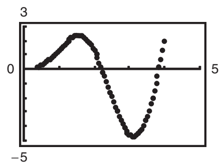
Ambos métodos dan el mismo volumen porque $x = f^{-1}(y)$, $f'(x)\,dx = dy$, si $y = f(a)$ entonces $x = a$, y si $y = f(b)$ entonces $x = b$.

117. *a)* $y = \frac{1}{4}(3\,\text{sen}\,2x - 6x\cos 2x)$

b)

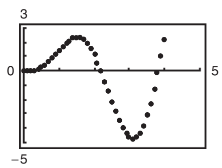


c) Se obtienen los siguientes puntos.



n	x_n	y_n
0	0	0
1	0.05	0
2	0.10	7.4875×10^{-4}
3	0.15	0.0037
4	0.20	0.0104
⋮	⋮	⋮
80	4.00	1.3181

d) Se obtienen los siguientes puntos.



n	x_n	y_n
0	0	0
1	0.1	0
2	0.2	0.0060
3	0.3	0.0293
4	0.4	0.0801
⋮	⋮	⋮
40	4.0	1.0210

119. La gráfica de $y = x\,\text{sen}\,x$ está por debajo de la gráfica de $y = x$ en $[0, \pi/2]$.

Sección 8.3 (página 542)

1. c **2.** a **3.** d **4.** b **5.** $-\frac{1}{6}\cos^6 x + C$

7. $\frac{1}{16}\,\text{sen}^8\,2x + C$ **9.** $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

11. $-\frac{1}{3}(\cos 2\theta)^{3/2} + \frac{1}{7}(\cos 2\theta)^{7/2} + C$

13. $\frac{1}{12}(6x + \text{sen}\,6x) + C$

15. $\frac{3}{8}\alpha + \frac{1}{12}\,\text{sen}\,6\alpha + \frac{1}{96}\,\text{sen}\,12\alpha + C$

17. $\frac{1}{8}(2x^2 - 2x\,\text{sen}\,2x - \cos 2x) + C$ **19.** $\frac{16}{35}$

21. $63\pi/512$ **23.** $5\pi/32$ **25.** $\frac{1}{7}\ln|\sec 7x + \tan 7x| + C$

27. $\frac{1}{15}\tan 5x(3 + \tan^2 5x) + C$

29. $(\sec \pi x \tan \pi x + \ln|\sec \pi x + \tan \pi x|)/(2\pi) + C$

31. $\frac{1}{2}\tan^4(x/2) - \tan^2(x/2) - 2\ln|\cos(x/2)| + C$

33. $\frac{1}{2}\tan^2 x + \text{C}$ **35.** $\frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$

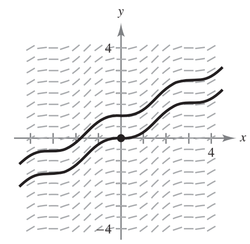
37. $\frac{1}{24}\sec^6 4x + C$ **39.** $\frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + C$

41. $\ln|\sec x + \tan x| - \text{sen}\,x + C$

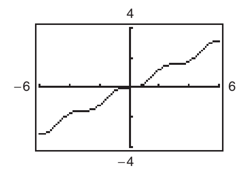
43. $(12\pi\theta - 8\,\text{sen}\,2\pi\theta + \text{sen}\,4\pi\theta)/(32\pi) + C$

45. $y = \frac{1}{9}\sec^3 3x - \frac{1}{3}\sec 3x + C$

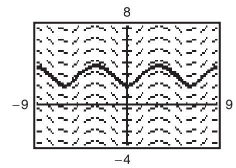
47. *a)*



b) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x$



49.



51. $\frac{1}{16}(2\,\text{sen}\,4x + \text{sen}\,8x) + C$

53. $\frac{1}{12}(3\cos 2x - \cos 6x) + C$ **55.** $\frac{1}{8}(2\,\text{sen}\,2\theta - \text{sen}\,4\theta) + C$

57. $\frac{1}{4}(\ln|\csc^2 2x| - \cot^2 2x) + C$ **59.** $-\frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{6}\cot^3 2x + C$

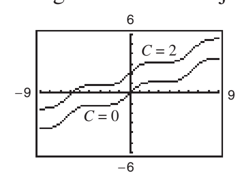
61. $\ln|\csc t - \cot t| + \cos t + C$

63. $\ln|\csc x - \cot x| + \cos x + C$ **65.** $t - 2\tan t + C$

67. π **69.** $3(1 - \ln 2)$ **71.** $\ln 2$ **73.** 4

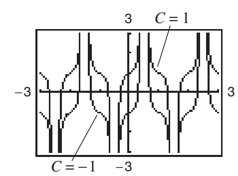
75. $\frac{1}{16}(6x + 8\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,2x) + C$

Las gráficas varían. Ejemplo:



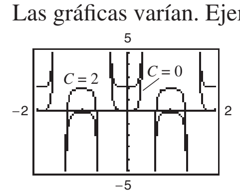
77. $\left[\sec^3 \pi x \tan \pi x + \frac{3}{2}(\sec \pi x \tan \pi x + \ln|\sec \pi x + \tan \pi x|)\right]/(4\pi) + C$

Las gráficas varían. Ejemplo:



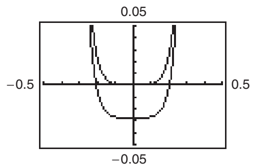
79. $(\sec^5 \pi x)/(5\pi) + C$ **81.** $2\sqrt{2}/7$ **83.** $3\pi/16$

Las gráficas varían. Ejemplo:



85. *a*) Conservar uno de los factores seno y convertir los demás factores en cosenos. Después, expandir e integrar.
b) Conservar uno de los factores coseno y convertir los demás en senos. Después, expandir e integrar.
c) Utilizar varias veces las fórmulas de reducción de potencias hasta convertir el integrando a potencias impares del coseno. Después continuar como en el apartado *b*).

87. *a*) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$ *b*) $-\frac{1}{2}\cos^2 x + C$
c) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$ *d*) $-\frac{1}{4}\cos 2x + C$
Las respuestas son todas las mismas, sólo se escriben en diferentes formas. Utilizando identidades trigonométricas, se puede reescribir cada respuesta en la misma forma.

89. *a*) $\frac{1}{18}\tan^6 3x + \frac{1}{12}\tan^4 3x + C_1,\ \frac{1}{18}\sec^6 3x - \frac{1}{12}\sec^4 3x + C_2$
b)


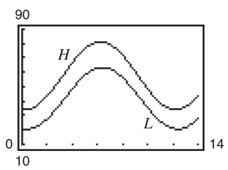
c) Demostración

91. $\frac{1}{3}$ **93.** 1 **95.** $2\pi(1 - \pi/4) \approx 1.348$

97. *a*) $\pi^2/2$ *b*) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\pi/2, \pi/8)$ **99 a 101.** Demostraciones

103. $-\frac{1}{15}\cos x(3\operatorname{sen}^4 x + 4\operatorname{sen}^2 x + 8) + C$

105. $\dfrac{5}{6\pi}\tan\dfrac{2\pi x}{5}\left(\sec^2\dfrac{2\pi x}{5} + 2\right) + C$

107. *a*) $H(t) \approx 57.72 - 23.36\cos(\pi t/6) - 2.75\operatorname{sen}(\pi t/6)$
b) $L(t) \approx 42.04 - 20.91\cos(\pi t/6) - 4.33\operatorname{sen}(\pi t/6)$
c)


La diferencia máxima se encuentra en $t \approx 4.9$, o a principios del verano.

109. Demostración

Sección 8.4 (página 551)

1. $x = 3\tan\theta$ **3.** $x = 4\operatorname{sen}\theta$ **5.** $x/\left(16\sqrt{16 - x^2}\right) + C$

7. $4\ln\left|\left(4 - \sqrt{16 - x^2}\right)/x\right| + \sqrt{16 - x^2} + C$

9. $\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 25}\right| + C$

11. $\frac{1}{15}(x^2 - 25)^{3/2}(3x^2 + 50) + C$

13. $\frac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C$ **15.** $\frac{1}{2}[\arctan x + x/(1 + x^2)] + C$

17. $\frac{1}{2}x\sqrt{9 + 16x^2} + \frac{9}{8}\ln\left|4x + \sqrt{9 + 16x^2}\right| + C$

19. $\frac{25}{4}\operatorname{arcsen}(2x/5) + \frac{1}{2}x\sqrt{25 - 4x^2} + C$

21. $\sqrt{x^2 + 36} + C$ **23.** $\operatorname{arcsen}(x/4) + C$

25. $4\operatorname{arcsen}(x/2) + x\sqrt{4 - x^2} + C$ **27.** $\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 4}\right| + C$

29. $-\dfrac{(1 - x^2)^{3/2}}{3x^3} + C$ **31.** $-\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{4x^2 + 9} + 3}{2x}\right| + C$

33. $3/\sqrt{x^2 + 3} + C$ **35.** $\frac{1}{3}(1 + e^{2x})^{3/2} + C$

37. $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} e^x + e^x\sqrt{1 - e^{2x}}\right) + C$

39. $\frac{1}{4}\left[x/(x^2 + 2) + \left(1/\sqrt{2}\right)\arctan\left(x/\sqrt{2}\right)\right] + C$

41. $x\operatorname{arcsec} 2x - \frac{1}{2}\ln\left|2x + \sqrt{4x^2 - 1}\right| + C$

43. $\operatorname{arcsen}[(x - 2)/2] + C$

45. $\sqrt{x^2 + 6x + 12} - 3\ln\left|\sqrt{x^2 + 6x + 12} + (x + 3)\right| + C$

47. *a*) y *b*) $\sqrt{3} - \pi/3 \approx 0.685$

49. *a*) y *b*) $9\left(2 - \sqrt{2}\right) \approx 5.272$

51. *a*) y *b*) $-(9/2)\ln\left(2\sqrt{7}/3 - 4\sqrt{3}/3 - \sqrt{21}/3 + 8/3\right) + 9\sqrt{3} - 2\sqrt{7} \approx 12.644$

53. $\sqrt{x^2 - 9} - 3\arctan\left(\sqrt{x^2 - 9}/3\right) + 1$

55. $\frac{1}{2}(x - 15)\sqrt{x^2 + 10x + 9} + 33\ln\left|\sqrt{x^2 + 10x + 9} + (x + 5)\right| + C$

57. $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 - 1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|\right) + C$

59. *a*) Sea $u = a\operatorname{sen}\theta$, $\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$, donde $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.
b) Sea $u = a\tan\theta$, $\sqrt{a^2 + u^2} = a\sec\theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.
c) Sea $u = a\sec\theta$, $\sqrt{u^2 - a^2} = \tan\theta$ si $u > a$ y $\sqrt{u^2 - a^2} = -\tan\theta$ si $u < -a$, donde $0 \le \theta < \pi/2$ o $\pi/2 < \theta \le \pi$.

61. Sustitución trigonométrica: $x = \sec\theta$ **63.** Verdadero

65. Falso: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}} = \int_0^{\pi/3} \cos\theta\, d\theta$

67. πab **69.** *a*) $5\sqrt{2}$ *b*) $25(1 - \pi/4)$ *c*) $r^2(1 - \pi/4)$

71. $6\pi^2$ **73.** $\ln\left[\dfrac{5\left(\sqrt{2} + 1\right)}{\sqrt{26} + 1}\right] + \sqrt{26} - \sqrt{2} \approx 4.367$

75. Longitud de un arco de la curva seno: $y = \operatorname{sen} x,\ y' = \cos x$

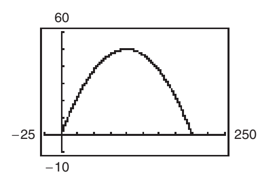
$$L_1 = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$$

Longitud de un arco de la curva coseno: $y = \cos x,\ y' = -\operatorname{sen} x$

$$L_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2(x - \pi/2)}\, dx, \quad u = x - \pi/2,\ du = dx$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \sqrt{1 + \cos^2 u}\, du = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 u}\, du = L_1$$

77. *a*)


b) 200
c) $100\sqrt{2} + 50\ln\left[\left(\sqrt{2} + 1\right)/\left(\sqrt{2} - 1\right)\right] \approx 229.559$

79. (0, 0.422) **81.** $(\pi/32)\left[102\sqrt{2} - \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\right] \approx 13.989$

83. *a*) 187.2π lb *b*) $62.4\pi d$ lb

85. Demostración **87.** $12 + 9\pi/2 - 25\operatorname{arcsen}(3/5) \approx 10.050$

89. Problema Putnam A5, 2005

Sección 8.5 (página 561)

1. $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 8}$ **3.** $\dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 10}$ **5.** $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 6}$

7. $\frac{1}{6}\ln\left|(x - 3)/(x + 3)\right| + C$ **9.** $\ln\left|(x - 1)/(x + 4)\right| + C$

11. $\frac{3}{2}\ln\left|2x - 1\right| - 2\ln\left|x + 1\right| + C$

13. $5\ln\left|x - 2\right| - \ln\left|x + 2\right| - 3\ln\left|x\right| + C$

15. $x^2 + \frac{3}{2}\ln|x - 4| - \frac{1}{2}\ln|x + 2| + C$

17. $1/x + \ln|x^4 + x^3| + C$

19. $2\ln|x - 2| - \ln|x| - 3/(x - 2) + C$

21. $\ln|(x^2 + 1)/x| + C$

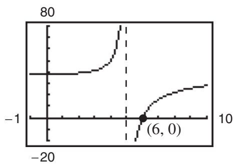
23. $\frac{1}{6}\left[\ln|(x - 2)/(x + 2)| + \sqrt{2}\arctan(x/\sqrt{2})\right] + C$

25. $\frac{1}{16}\ln|(4x^2 - 1)/(4x^2 + 1)| + C$

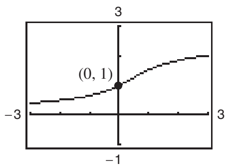
27. $\ln|x + 1| + \sqrt{2}\arctan\left[(x - 1)/\sqrt{2}\right] + C$

29. $\ln 3$ **31.** $\frac{1}{2}\ln(8/5) - \pi/4 + \arctan 2 \approx 0.557$

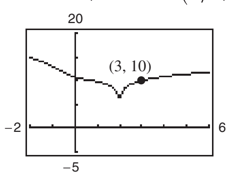
33. $y = 5\ln|x - 5| - 5x/(x - 5) + 30$



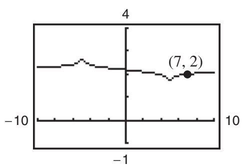
35. $y = (\sqrt{2}/2)\arctan(x/\sqrt{2}) - 1/[2(x^2 + 2)] + 5/4$



37. $y = \ln|x - 2| + \frac{1}{2}\ln|x^2 + x + 1|$
$\quad - \sqrt{3}\arctan\left[(2x + 1)/\sqrt{3}\right] - \frac{1}{2}\ln 13$
$\quad + \sqrt{3}\arctan(7/\sqrt{3}) + 10$



39. $y = \frac{1}{10}\ln|(x - 5)/(x + 5)| + \frac{1}{10}\ln 6 + 2$

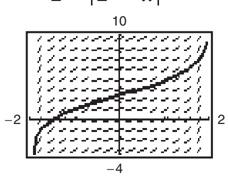


41. $\ln\left|\dfrac{\cos x}{\cos x - 1}\right| + C$ **43.** $\ln\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}\right| + C$

45. $\ln\left|\dfrac{\tan x + 2}{\tan x + 3}\right| + C$ **47.** $\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{e^x - 1}{e^x + 4}\right| + C$

49. $2\sqrt{x} + 2\ln\left|\dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}\right| + C$ **51 a 53.** Demostraciones

55. $y = \dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{2 + x}{2 - x}\right| + 3$ **57.** Primero dividir x^3 entre $(x - 5)$.



59. $12\ln\left(\frac{9}{8}\right) \approx 1.4134$ **61.** $6 - \frac{7}{4}\ln 7 \approx 2.5947$

63. 4.90 o $490 000

65. $V = 2\pi\left(\arctan 3 - \frac{3}{10}\right) \approx 5.963$; $(\bar{x}, \bar{y}) \approx (1.521, 0.412)$

67. $x = n[e^{(n+1)kt} - 1]/[n + e^{(n+1)kt}]$ **69.** $\pi/8$

Sección 8.6 (página 567)

1. $-\frac{1}{2}x(10 - x) + 25\ln|5 + x| + C$

3. $\frac{1}{2}\left[e^x\sqrt{e^{2x} + 1} + \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}\right)\right] + C$

5. $-\sqrt{1 - x^2}/x + C$

7. $\frac{1}{24}(3x + \operatorname{sen} 3x\cos 3x + 2\cos^3 3x\operatorname{sen} 3x) + C$

9. $-2\left(\cot\sqrt{x} + \csc\sqrt{x}\right) + C$ **11.** $x - \frac{1}{2}\ln(1 + e^{2x}) + C$

13. $\frac{1}{64}x^8(8\ln x - 1) + C$

15. *a*) y *b*) $\frac{1}{27}e^{3x}(9x^2 - 6x + 2) + C$

17. *a*) y *b*) $\ln|(x + 1)/x| - 1/x + C$

19. $\frac{1}{2}\left[(x^2 + 1)\operatorname{arccsc}(x^2 + 1) + \ln\left(x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 2x^2}\right)\right] + C$

21. $\sqrt{x^2 - 4}/(4x) + C$ **23.** $\frac{4}{25}[\ln|2 - 5x| + 2/(2 - 5x)] + C$

25. $e^x\arccos(e^x) - \sqrt{1 - e^{2x}} + C$

27. $\frac{1}{2}(x^2 + \cot x^2 + \csc x^2) + C$

29. $(\sqrt{2}/2)\arctan\left[(1 + \operatorname{sen}\theta)/\sqrt{2}\right] + C$

31. $-\sqrt{2 + 9x^2}/(2x) + C$

33. $\frac{1}{4}\left(2\ln|x| - 3\ln|3 + 2\ln|x||\right) + C$

35. $(3x - 10)/[2(x^2 - 6x + 10)] + \frac{3}{2}\arctan(x - 3) + C$

37. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 3 + \sqrt{x^4 - 6x^2 + 5}\right| + C$

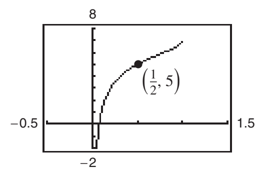
39. $-\frac{1}{3}\sqrt{4 - x^2}(x^2 + 8) + C$

41. $2/(1 + e^x) - 1/[2(1 + e^x)^2] + \ln(1 + e^x) + C$

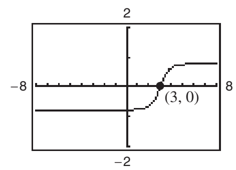
43. $\frac{1}{2}(e - 1) \approx 0.8591$ **45.** $\frac{32}{5}\ln 2 - \frac{31}{25} \approx 3.1961$

47. $\pi/2$ **49.** $\pi^3/8 - 3\pi + 6 \approx 0.4510$ **51 a 55.** Demostraciones

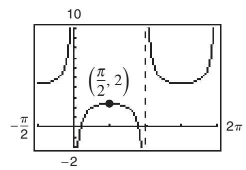
57. $y = -2\sqrt{1 - x}/\sqrt{x} + 7$



59. $y = \frac{1}{2}[(x - 3)/(x^2 - 6x + 10) + \arctan(x - 3)]$



61. $y = -\csc\theta + \sqrt{2} + 2$



63. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{2\tan(\theta/2) - 3 - \sqrt{5}}{2\tan(\theta/2) - 3 + \sqrt{5}}\right| + C$ **65.** $\ln 2$

67. $\frac{1}{2}\ln(3 - 2\cos\theta) + C$ **69.** $-2\cos\sqrt{\theta} + C$ **71.** $4\sqrt{3}$

73. *a*) $\displaystyle\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

$$\int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

$$\int x^3\ln x\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$$

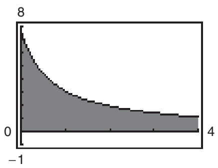
b) $\int x^n \ln x\, dx = x^{n+1} \ln x/(n+1) - x^{n+1}/(n+1)^2 + C$

75. Falso. Se tuvieron que hacer antes sustituciones para reescribir la integral en una forma que aparece en la tabla.

77. $32\pi^2$ **79.** 1 919.145 pies-lb

81. *a)* $V = 80 \ln\left(\sqrt{10} + 3\right) \approx 145.5 \text{ pies}^3$
$W = 11\,840 \ln\left(\sqrt{10} + 3\right) \approx 21\,530.4 \text{ lb}$
b) (0, 1.19)

83. *a)* $k = 30/\ln 7 \approx 15.42$ **85.** Problema Putnam A3, 1980
b)



Sección 8.7 (página 576)

1.

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	1.3177	1.3332	1.3333	1.3333	1.3332	1.3177

$\frac{4}{3}$

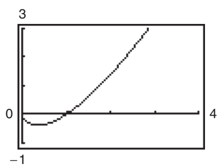
3.

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$f(x)$	0.9900	90,483.7	3.7×10^9	4.5×10^{10}	0	0

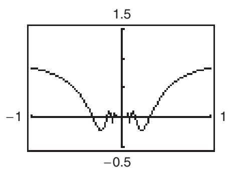
0

5. $\frac{3}{8}$ **7.** $\frac{1}{8}$ **9.** $\frac{5}{3}$ **11.** 4 **13.** 0 **15.** 2
17. ∞ **19.** $\frac{11}{4}$ **21.** $\frac{3}{5}$ **23.** 1 **25.** $\frac{5}{4}$ **27.** ∞
29. 0 **31.** 1 **33.** 0 **35.** 0 **37.** ∞
39. $\frac{5}{9}$ **41.** 1 **43.** ∞

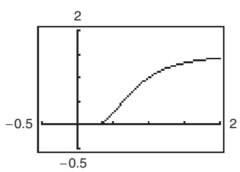
45. *a)* No indeterminada
b) ∞
c)



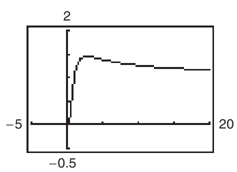
47. *a)* $0 \cdot \infty$
b) 1
c)



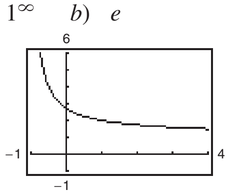
49. *a)* No indeterminada
b) 0
c)



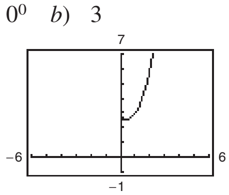
51. *a)* ∞^0
b) 1
c)



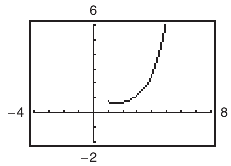
53. *a)* 1^∞ *b)* e
c)



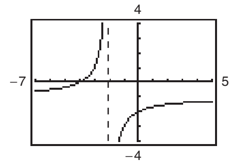
55. *a)* 0^0 *b)* 3
c)



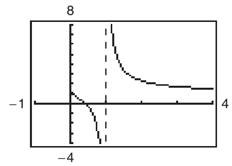
57. *a)* 0^0 *b)* 1
c)



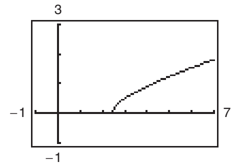
59. *a)* $\infty - \infty$ *b)* $-\frac{3}{2}$
c)



61. *a)* $\infty - \infty$ *b)* ∞
c)

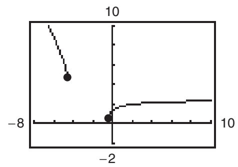


63. *a)*



b) $\frac{1}{2}$

65. *a)*



b) $\frac{5}{2}$

67. $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty - \infty$

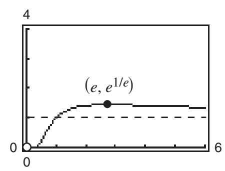
69. Las respuestas varían. Ejemplos:
a) $f(x) = x^2 - 25,\ g(x) = x - 5$
b) $f(x) = (x - 5)^2,\ g(x) = x^2 - 25$
c) $f(x) = x^2 - 25,\ g(x) = (x - 5)^3$

71.

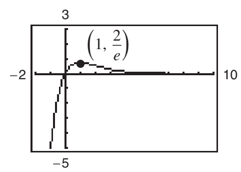
x	10	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}
$\frac{(\ln x)^4}{x}$	2.811	4.498	0.720	0.036	0.001	0.000

73. 0 **75.** 0 **77.** 0

79. Asíntota horizontal:
$y = 1$
Máximo relativo: $(e, e^{1/e})$

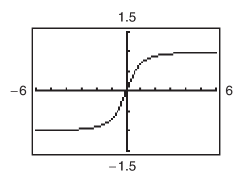


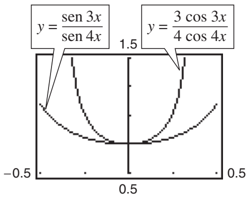
81. Asíntota horizontal:
$y = 0$
Máximo relativo: $(1, 2/e)$



83. El límite no es de la forma 0/0 o ∞/∞.
85. El límite no es de la forma 0/0 o ∞/∞.
87. El límite no es de la forma 0/0 o ∞/∞.

89. *a)* $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
Aplicando dos veces la regla de L'Hôpital se obtiene el límite original, de manera que la regla no aplica.
b) 1
c)



91. 

Cuando $x \to 0$, las gráficas se acercan entre sí (se aproximan a 0.75).

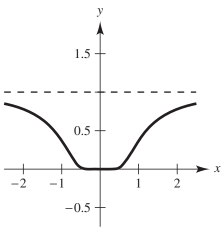
Utilizando la regla de L'Hôpital,

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3 \cos 3x}{4 \cos 4x} = \frac{3}{4}.$

93. $v = 32t + v_0$ **95.** Demostración **97.** $c = \frac{2}{3}$ **99.** $c = \pi/4$

101. Falso: La regla de L'Hôpital no aplica porque $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 + x + 1) \neq 0$. **103.** Verdadero

105. $\frac{3}{4}$ **107.** $\frac{4}{3}$ **109.** $a = 1, b = \pm 2$ **111.** Demostración

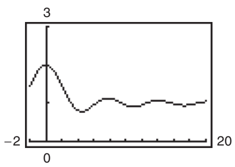
113. 

$g'(0) = 0$

115. *a)* $0 \cdot \infty$ *b)* 0

117. Demostración

119. *a)* a *c)* 2

121. *a)* 

b) $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 1$

c) No

123. Problema Putnam A1, 1956

Sección 8.8 (página 587)

1. Impropia; $0 \leq \frac{3}{5} \leq 1$ **3.** No impropia; continua en $[0, 1]$

5. No impropia; continua en $[0, 2]$

7. Impropia; límites infinitos de integración

9. Discontinuidad infinita en $x = 0$; 4

11. Discontinuidad infinita en $x = 1$; diverge

13. Límite de integración infinito; $\frac{1}{4}$

15. Discontinuidad infinita en $x = 0$; diverge

17. Límite de integración infinito; converge a 1 **19.** $\frac{1}{2}$

21. Diverge **23.** Diverge **25.** 2 **27.** $\frac{1}{2}$

29. $1/[2(\ln 4)^2]$ **31.** π **33.** $\pi/4$ **35.** Diverge

37. Diverge **39.** 6 **41.** $-\frac{1}{4}$ **43.** Diverge **45.** $\pi/3$

47. $\ln(2 + \sqrt{3})$ **49.** 0 **51.** $\pi/6$ **53.** $2\pi\sqrt{6}/3$

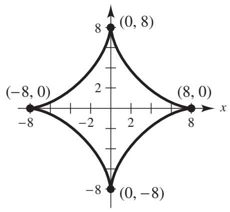
55. $p > 1$ **57.** Demostración **59.** Diverge **61.** Converge

63. Converge **65.** Diverge **67.** Diverge **69.** Converge

71. Una integral con límites de integración infinitos, una integral con una discontinuidad infinita en o entre los límites de integración

73. La integral impropia diverge. **75.** e **77.** π

79. *a)* 1 *b)* $\pi/2$ *c)* 2π

81. 

Perímetro = 48

83. $8\pi^2$ **85.** *a)* $W = 20\,000$ millas-ton *b)* 4 000 mi

87. *a)* Demostración *b)* $P = 43.53\%$ *c)* $E(x) = 7$

89. *a)* \$757 992.41 *b)* \$837 995.15 *c)* \$1 066 666.67

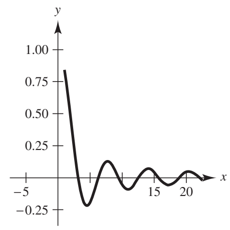
91. $P = \left[2\pi NI\left(\sqrt{r^2 + c^2} - c\right)\right]/\left(kr\sqrt{r^2 + c^2}\right)$

93. Falso. Sea $f(x) = 1/(x + 1)$. **95.** Verdadero

97. *a)* y *b)* Demostraciones

c) La definición de integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty}$ no es $\lim\limits_{a\to\infty} \int_{-a}^{a}$ no obstante que la integral diverge al reescribirla se encuentra que la integral converge.

99. *a)* $\int_1^\infty \frac{1}{x^n}\,dx$ converge si $n > 1$ y diverge si $n \leq 1$.

b) 

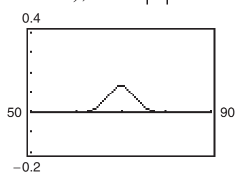
c) Converge

101. *a)* $\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2$ *b)* Demostración

c) $\Gamma(n) = (n - 1)!$

103. $1/s,\ s > 0$ **105.** $2/s^3,\ s > 0$ **107.** $s/(s^2 + a^2),\ s > 0$

109. $s/(s^2 - a^2),\ s > |a|$

111. *a)* 

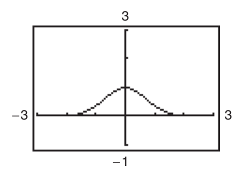
b) ≈ 0.2525

c) 0.2525; igual por simetría

113. $c = 1$; $\ln(2)$

115. $8\pi[(\ln 2)^2/3 - (\ln 4)/9 + 2/27] \approx 2.01545$

117. $\int_0^1 2 \text{ sen}(u^2)\,du$; 0.6278

119. *a)* 

b) Demostración

Ejercicios de repaso para el capítulo 8 (página 591)

1. $\frac{1}{3}(x^2 - 36)^{3/2} + C$ **3.** $\frac{1}{2}\ln|x^2 - 49| + C$

5. $\ln(2) + \frac{1}{2} \approx 1.1931$ **7.** $100 \text{ arcsen}(x/10) + C$

9. $\frac{1}{9}e^{3x}(3x - 1) + C$

11. $\frac{1}{13}e^{2x}(2 \text{ sen } 3x - 3 \cos 3x) + C$

13. $\frac{2}{15}(x - 1)^{3/2}(3x + 2) + C$

15. $-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{2}x \text{ sen } 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

17. $\frac{1}{16}\left[(8x^2 - 1)\text{ arcsen } 2x + 2x\sqrt{1 - 4x^2}\right] + C$

19. $\text{sen}(\pi x - 1)[\cos^2(\pi x - 1) + 2]/(3\pi) + C$

21. $\frac{2}{3}[\tan^3(x/2) + 3\tan(x/2)] + C$ **23.** $\tan\theta + \sec\theta + C$

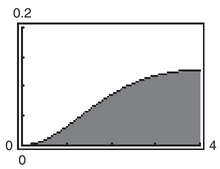
25. $3\pi/16 + \frac{1}{2} \approx 1.0890$ **27.** $3\sqrt{4 - x^2}/x + C$

29. $\frac{1}{3}(x^2 + 4)^{1/2}(x^2 - 8) + C$ **31.** π

33. *a*), *b*) y *c*) $\frac{1}{3}\sqrt{4+x^2}(x^2-8)+C$
35. $6\ln|x+3|-5\ln|x-4|+C$
37. $\frac{1}{4}[6\ln|x-1|-\ln(x^2+1)+6\arctan x]+C$
39. $x-\frac{64}{11}\ln|x+8|+\frac{9}{11}\ln|x-3|+C$
41. $\frac{1}{25}[4/(4+5x)+\ln|4+5x|]+C$ **43.** $1-\sqrt{2}/2$
45. $\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+8|-\arctan[(x+2)/2]+C$
47. $\ln|\tan \pi x|/\pi+C$ **49.** Demostración
51. $\frac{1}{8}(\operatorname{sen} 2\theta-2\theta\cos 2\theta)+C$
53. $\frac{4}{3}[x^{3/4}-3x^{1/4}+3\arctan(x^{1/4})]+C$
55. $2\sqrt{1-\cos x}+C$ **57.** $\operatorname{sen} x\ln(\operatorname{sen} x)-\operatorname{sen} x+C$
59. $\frac{5}{2}\ln|(x-5)/(x+5)|+C$
61. $y=x\ln|x^2+x|-2x+\ln|x+1|+C$ **63.** $\frac{1}{5}$
65. $\frac{1}{2}(\ln 4)^2\approx 0.961$ **67.** π **69.** $\frac{128}{15}$
71. $(\bar{x},\bar{y})=(0,4/(3\pi))$ **73.** 3.82 **75.** 0 **77.** ∞ **79.** 1
81. $1\,000\,e^{0.09}\approx 1\,094.17$ **83.** Converge; $\frac{32}{3}$ **85.** Diverge
87. Converge; 1 **89.** Converge; $\pi/4$
91. *a*) \$6 321 205.59 *b*) \$10 000 000
93. *a*) 0.4581 *b*) 0.0135

SP Solución de problemas (página 593)

1. *a*) $\frac{4}{3}, \frac{16}{15}$ *b*) Demostración **3.** ln 3 **5.** Demostración
7. *a*)



Área $\approx$ 0.2986

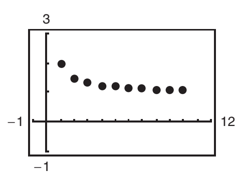
b) $\ln 3-\frac{4}{5}$
c) $\ln 3-\frac{4}{5}$

9. $\ln 3-\frac{1}{2}\approx 0.5986$ **11.** Demostración **13.** ≈ 0.8670
15. *a*) ∞ *b*) 0 *c*) $-\frac{2}{3}$
La forma $0\cdot\infty$ es una indeterminación.
17. $\frac{1/12}{x}+\frac{1/42}{x-3}+\frac{1/10}{x-1}+\frac{111/140}{x+4}$
19. Demostración **21.** $\approx$ 0.0158

Capítulo 9

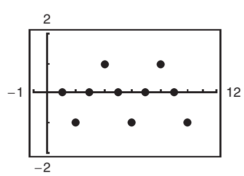
Sección 9.1 (página 604)

1. 3, 9, 27, 81, 243 **3.** $-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{256}, -\frac{1}{1\,024}$
5. 1, 0, −1, 0, 1 **7.** $-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}$ **9.** $5, \frac{19}{4}, \frac{43}{9}, \frac{77}{16}, \frac{121}{25}$
11. 3, 4, 6, 10, 18 **13.** 32, 16, 8, 4, 2
15. *c* **16.** *a* **17.** *d* **18.** *b* **19.** *b* **20.** *c*
21. *a* **22.** *d* **23.** 14, 17; sumar 3 al término precedente
25. 80, 160; multiplicar por 2 el término precedente
27. $\frac{3}{16}, -\frac{3}{32}$; multiplicar por $-\frac{1}{2}$ el término precedente
29. $11\cdot 10\cdot 9=990$ **31.** $n+1$ **33.** $1/[(2n+1)(2n)]$
35. 5 **37.** 2 **39.** 0
41.



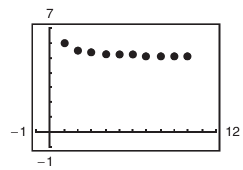
Converge a 1

43.



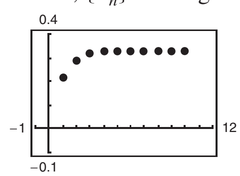
Diverge

45. Converge a −1 **47.** Converge a 0
49. Diverge **51.** Converge a $\frac{3}{2}$ **53.** Converge a 0
55. Converge a 0 **57.** Converge a 0 **59.** Converge a 0
61. Diverge **63.** Converge a 0 **65.** Converge a 0
67. Converge a 1 **69.** Converge a e^k **71.** Converge a 0
73. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: $3n-2$
75. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: n^2-2
77. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: $(n+1)/(n+2)$
79. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: $(n+1)/n$
81. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: $n/[(n+1)(n+2)]$
83. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta:
$$\frac{(-1)^{n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}2^n n!}{(2n)!}$$
85. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: $(2n)!$
87. Monótona; acotada **89.** Monótona; acotada
91. No monótona; acotada **93.** Monótona; acotada
95. No monótona; acotada **97.** No monótona; acotada
99. *a*) $\left|5+\frac{1}{n}\right|\le 6\implies$ acotada
$a_n>a_{n+1}\implies$ monótona
Así, $\{a_n\}$ converge.
b)



Límite = 5

101. *a*) $\left|\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right|<\frac{1}{3}\implies$ acotada
$a_n<a_{n+1}\implies$ monótona
Así, $\{a_n\}$ converge.
b)



Límite = $\frac{1}{3}$

103. $\{a_n\}$ tiene un límite porque es acotada y monótona; pues $2\le a_n\le 4$, $2\le L\le 4$.
105. *a*) No; $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ no existe.
b)

n	1	2	3	4
A_n	\$10 045.83	\$10 091.88	\$10 138.13	\$10 184.60

n	5	6	7
A_n	\$10 231.28	\$10 278.17	\$10 325.28

n	8	9	10
A_n	\$10 372.60	\$10 420.14	\$10 467.90

107. No. Una secesión se dice convergente cuando sus términos se aproximan a un número real.
109. La gráfica de la izquierda representa una sucesión con signos alternantes porque los términos alternan de estar por arriba a estar por debajo del eje *x*.

111. *a*) $\$4\,500\,000\,000(0.8)^n$

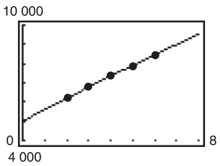
b)

Año	1	2
Presupuesto	\$3 600 000 000	\$2 880 000 000

Año	3	4
Presupuesto	\$2 304 000 000	\$1 843 200 000

c) Converge a 0

113. *a*) $a_n = -5.364n^2 + 608.04n + 4\,998.3$



b) \$11 522.4 miles de millones

115. *a*) $a_9 = a_{10} = 1\,562\,500/567$ *b*) Decreciente

c) Los factoriales crecen más rápidamente que las exponenciales.

117. 1, 1.4142, 1.4422, 1.4142, 1.3797, 1.3480; Converge a 1

119. Verdadero **121.** Verdadero **123.** Verdadero

125. *a*) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

b) 1, 2, 1.5, 1.6667, 1.6, 1.6250, 1.6154, 1.6190, 1.6176, 1.6182

c) Demostración *d*) $\rho = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2 \approx 1.6180$

127. *a*) 1.4142, 1.8478, 1.9616, 1.9904, 1.9976

b) $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ *c*) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

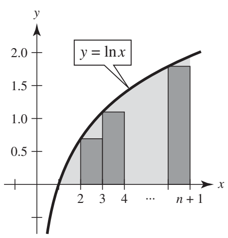
129. *a*) Demostración *b*) Demostración

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \left(1 + \sqrt{1 + 4k}\right)/2$

131. *a*) Demostración *b*) Demostración

133. *a*) Demostración

b)



c) Demostración *d*) Demostración

e) $\dfrac{\sqrt[20]{20!}}{20} \approx 0.4152$; $\dfrac{\sqrt[50]{50!}}{50} \approx 0.3897$; $\dfrac{\sqrt[100]{100!}}{100} \approx 0.3799$

135. Demostración

137. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: $a_n = (-1)^n$

139. Demostración **141.** Problema Putnam A1, 1900

Sección 9.2 (página 614)

1. 1, 1.25, 1.361, 1.424, 1.464

3. 3, −1.5, 5.25, −4.875, 10.3125

5. 3, 4.5, 5.25, 5.625, 5.8125

7. $\{a_n\}$ converge, $\Sigma\, a_n$ diverge

9. Serie geométrica: $r = \frac{7}{6} > 1$

11. Serie geométrica: $r = 1.055 > 1$ **13.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$ **17.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$ **19.** *c*; 3

20. *b*; 3 **21.** *a*; 3 **22.** *d*; 3 **23.** *f*; $\frac{34}{9}$ **24.** *e*; $\frac{5}{3}$

25. Serie geométrica: $r = \frac{5}{6} < 1$

27. Serie geométrica: $r = 0.9 < 1$

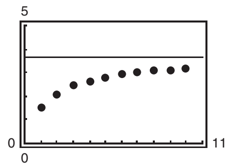
29. Serie telescópica: $a_n = 1/n - 1/(n+1)$; converge a 1.

31. *a*) $\frac{11}{3}$

b)

n	5	10	20	50	100
S_n	2.7976	3.1643	3.3936	3.5513	3.6078

c)



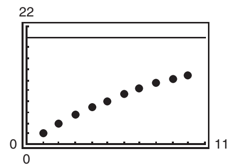
d) Los términos de la serie decrecen en magnitud, de manera relativamente lenta y la sucesión de sumas parciales tiende a la suma de la serie de manera relativamente lenta.

33. *a*) 20

b)

n	5	10	20	50	100
S_n	8.1902	13.0264	17.5685	19.8969	19.9995

c)



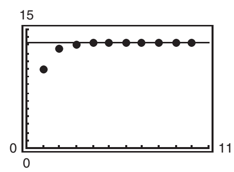
d) Los términos de la serie decrecen en magnitud, de manera relativamente lenta y la sucesión de sumas parciales tiende a la suma de la serie de manera relativamente lenta.

35. *a*) $\frac{40}{3}$

b)

n	5	10	20	50	100
S_n	13.3203	13.3333	13.3333	13.3333	13.3333

c)



d) Los términos de la serie decrecen en magnitud, de manera relativamente rápida y la sucesión de sumas parciales tiende a la suma de la serie de manera relativamente rápida.

37. 2 **39.** $\frac{3}{4}$ **41.** $\frac{3}{4}$ **43.** 4 **45.** $\frac{10}{9}$ **47.** $\frac{9}{4}$ **49.** $\frac{1}{2}$

51. $\dfrac{\operatorname{sen}(1)}{1 - \operatorname{sen}(1)}$ **53.** *a*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{10}(0.1)^n$ *b*) $\dfrac{4}{9}$

55. *a*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{81}{100}(0.01)^n$ *b*) $\dfrac{9}{11}$

57. *a*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{40}(0.01)^n$ *b*) $\dfrac{5}{66}$ **59.** Diverge **61.** Diverge

63. Converge **65.** Converge **67.** Diverge

69. Converge **71.** Diverge **73.** Diverge **75.** Diverge

77. Ver definiciones en la página 608.

79. Las series dadas por

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots, a \neq 0$$

es una serie geométrica con radio r. Cuando $0 < |r| < 1$, las series convergen a la suma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r}$.

81. Las series en *a*) y en *b*) son la misma. La serie en *c*) es diferente a menos que $a_1 = a_2 = \cdots = a$ sea constante.

83. $-2 < x < 2$; $x/(2 - x)$ **85.** $0 < x < 2$; $(x - 1)/(2 - x)$

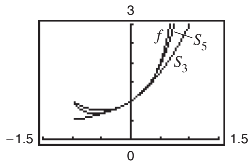
87. $-1 < x < 1$; $1/(1 + x)$

89. x: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; $x/(x - 1)$ **91.** $c = \left(\sqrt{3} - 1\right)/2$

93. Ningún enunciado es verdadero. La fórmula es válida para $-1 < x < 1$.

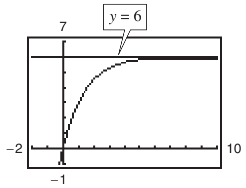
95. *a*) x *b*) $f(x) = 1/(1 - x)$, $|x| < 1$

c)



Las respuestas varían.

97.



Asíntota horizontal: $y = 6$

La suma horizontal es la suma de las series.

99. Los términos requeridos para las dos series son $n = 100$ y $n = 5$, respectivamente. La segunda serie converge a un ritmo más alto.

101. $160\,000(1 - 0.95^n)$ unidades

103. $\sum_{i=0}^{\infty} 200(0.75)^i$; Suma $= \$800$ millones

105. 152.42 pies **107.** $\frac{1}{8}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$

109. *a*) $-1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = -1 + \frac{a}{1 - r} = -1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 1$

b) No *c*) 2

111. *a*) 126 pulg^2 *b*) 128 pulg^2

113. Los \$2 000 000 de la lotería tienen un valor presente de \$1 146 992.12. Después de aumentar el interés sobre el periodo de 20 años, logra su valor completo.

115. *a*) \$5 368,709.11 *b*) \$10 737 418.23 *c*) \$21 474 836.47

117. *a*) \$14 773.59 *b*) \$14 779.65

119. *a*) \$91 373.09 *b*) \$91 503.32 **121.** \$4 751 275.79

123. Falso. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

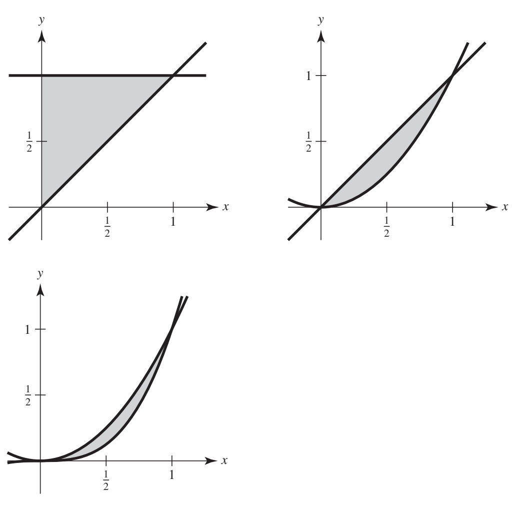
125. Falso. $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = \left(\frac{a}{1 - r}\right) - a$. La fórmula requiere que la serie geométrica inicie en $n = 0$.

127. Verdadero **129.** Demostración

131. Las respuestas varían. Ejemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)$

133 a 137. Demostraciones

139. *a*)



b) $\int_0^1 (1 - x)\,dx = \frac{1}{2}$

$\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{6}$

$\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{12}$

c) $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$; La suma de todas las regiones sombreadas es el área del cuadrado, 1.

141. $H =$ vida media de la droga

$n =$ número de dosis iguales

$P =$ número de unidades de la droga

$t =$ intervalos de tiempo iguales

La cantidad total de la droga en el sistema del paciente en el momento que se da la última dosis es

$T_n = P + Pe^{kt} + Pe^{2kt} + \cdots + Pe^{(n-1)kt}$

donde $k = -(\ln 2)/H$. Un intervalo de tiempo después de que la última dosis se da es:

$T_{n+1} = Pe^{kt} + Pe^{2kt} + Pe^{3kt} + \cdots + Pe^{nkt}$

y así sucesivamente, porque $k < 0$, $T_{n+s} \to 0$ cuando $s \to \infty$.

143. Problema Putnam A1, 1966

Sección 9.3 (página 622)

1. Diverge **3.** Converge **5.** Converge **7.** Converge

9. Diverge **11.** Diverge **13.** Diverge **15.** Converge

17. Converge **19.** Converge **21.** Diverge

23. Diverge **25.** Diverge **27.** $f(x)$ no es positiva para $x \geq 1$.

29. $f(x)$ no es siempre decreciente **31.** Converge **33.** Diverge

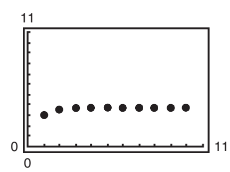
35. Diverge **37.** Diverge **39.** Converge **41.** Converge

43. *c*; diverge **44.** *f*; diverge **45.** *b*; converge

46. *a*; diverge **47.** *d*; converge **48.** *e*; converge

49. *a*)

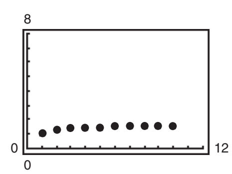
n	5	10	20	50	100
S_n	3.7488	3.75	3.75	3.75	3.75



Las sumas parciales se aproximan a la suma 3.75 muy rápidamente.

b)

n	5	10	20	50	100
S_n	1.4636	1.5498	1.5962	1.6251	1.635

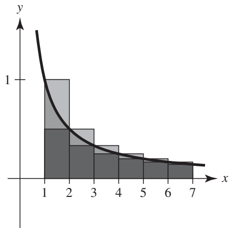


Las sumas parciales se aproximan a la suma $\pi^2/6 \approx 1.6449$ más lentamente que la serie en el apartado *a*).

51. Ver el teorema 9.10 en la página 619. Las respuestas varían. Por ejemplo, la convergencia o la divergencia pueden determinarse para la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

53. No. Porque $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n=10\,000}^{\infty}\frac{1}{n}$ también diverge. La convergencia o divergencia de una serie no está determinada por el primer número finito de términos de la serie.

55. 

$$\sum_{n=1}^{6} a_n \geq \int_1^7 f(x)\,dx \geq \sum_{n=2}^{7} a_n$$

57. $p > 1$ **59.** $p > 1$ **61.** $p > 1$ **63.** Diverge
65. Converge **67.** Demostración
69. $S_6 \approx 1.0811$, $R_6 \approx 0.0015$ **71.** $S_{10} \approx 0.9818$, $R_{10} \approx 0.0997$ **73.** $S_4 \approx 0.4049$, $R_4 \approx 5.6 \times 10^{-8}$
75. $N \geq 7$ **77.** $N \geq 2$ **79.** $N \geq 1\,000$

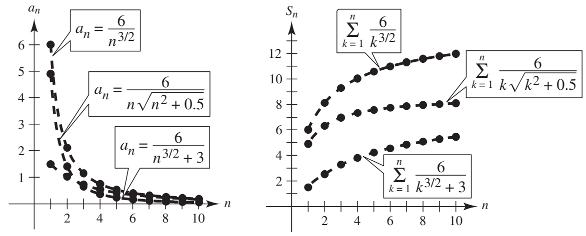
81. *a)* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1.1}}$ converge por el criterio de la serie *p* porque $1.1 > 1$.
$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ diverge por el criterio de la integral porque
$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}\,dx$ diverge.
b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1.1}} = 0.4665 + 0.2987 + 0.2176 + 0.1703 + 0.1393 + \cdots$
$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} = 0.7213 + 0.3034 + 0.1803 + 0.1243 + 0.0930 + \cdots$
c) $n \geq 3.431 \times 10^{15}$

83. *a)* Sea $f(x) = 1/x$. f es positiva, continua y decreciente en $[1, \infty)$.
$$S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln n$$
$$S_n \geq \int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$$
Así, $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$.
b) $\ln(n+1) - \ln n \leq S_n - \ln n \leq 1$.
También, $\ln(n+1) - \ln n > 0$ para $n \geq 1$. Así, $0 \leq S_n - \ln n \leq 1$, y la sucesión $\{a_n\}$ es acotada.
c) $a_n - a_{n+1} = [S_n - \ln n] - [S_{n+1} - \ln(n+1)]$
$$= \int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{n+1} \geq 0$$
Así, $a_n \geq a_{n+1}$.
d) Porque la sucesión es acotada y monótona, converge a un límite γ.
e) 0.5822

85. *a)* Diverge *b)* Diverge
c) $\sum_{n=2}^{\infty} x^{\ln n}$ converge para $x < 1/e$.

87. Diverge **89.** Converge **91.** Converge **93.** Diverge
95. Diverge **97.** Converge

Sección 9.4 (página 630)

1. *a)* 

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^{3/2}}$; Converge
c) Las magnitudes de los términos son menores que las magnitudes de los términos de la serie *p*. Por tanto, las series convergen.
d) A menores magnitudes de los términos, menores magnitudes de los términos de la sucesión de sumas parciales.

3. Converge **5.** Diverge **7.** Converge **9.** Diverge
11. Converge **13.** Converge **15.** Diverge **17.** Diverge
19. Converge **21.** Converge **23.** Converge
25. Diverge **27.** Diverge **29.** Diverge; criterio de la serie *p*
31. Converge; criterio de la comparación directa con $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$
33. Diverge; criterio del *n*-ésimo término **35.** Converge; criterio de la integral
37. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} na_n$
$\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, pero es finito.
La serie diverge por el criterio de la comparación en el límite.
39. Diverge **41.** Converge
43. $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^3}{5n^4+3}\right) = \frac{1}{5} \neq 0$
Así, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5n^4+3}$ diverge.
45. Diverge **47.** Converge
49. La convergencia o divergencia depende de la forma del término general de la serie y no necesariamente de la magnitud de los términos.
51. Ver el teorema 9.13 en la página 628. Las repuestas varían. Por ejemplo, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-1}$ diverge porque $\lim_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt{n}-1}{1/\sqrt{n}} = 1$ y $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (serie *p*).
53. *a)* Demostración
b)

n	5	10	20	50	100
S_n	1.1839	1.2087	1.2212	1.2287	1.2312

c) 0.1226 *d)* 0.0277
55. Falso. Sea $a_n = 1/n^3$ y $b_n = 1/n^2$.
57. Verdadero **59.** Verdadero **61.** Demostración **63.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$
65 a 71. Demostraciones **73.** Problema Putnam B4, 1988

Sección 9.5 (página 638)

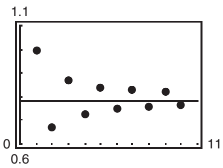
1. *d* **2.** *f* **3.** *a* **4.** *b* **5.** *e* **6.** *c*

7. *a)*

n	1	2	3	4	5
S_n	1.0000	0.6667	0.8667	0.7238	0.8349

n	6	7	8	9	10
S_n	0.7440	0.8209	0.7543	0.8131	0.7605

b)



c) Los puntos están alternados a los lados de la recta horizontal $y = \pi/4$ que representa la suma de la serie. Las distancias entre puntos sucesivos y la recta decrecen.

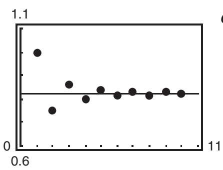
d) La distancia en el apartado *c)* es siempre menor que la magnitud del siguiente término de la serie.

9. *a)*

n	1	2	3	4	5
S_n	1.0000	0.7500	0.8611	0.7986	0.8386

n	6	7	8	9	10
S_n	0.8108	0.8312	0.8156	0.8280	0.8180

b)



c) Los puntos están alternados a los lados de la recta horizontal $y = \pi^2/12$ que representa la suma de la serie. Las distancias entre puntos sucesivos y la recta decrecen.

d) La distancia en el apartado *c)* es siempre menor que la magnitud del siguiente término de la serie.

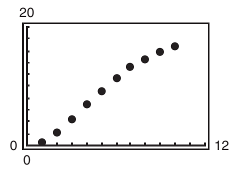
11. Converge **13.** Converge **15.** Diverge
17. Converge **19.** Diverge **21.** Converge **23.** Diverge
25. Diverge **27.** Diverge **29.** Converge
31. Converge **33.** Converge **35.** Converge
37. $0.7305 \leq S \leq 0.7361$ **39.** $2.3713 \leq S \leq 2.4937$
41. *a)* 7 términos (note que la suma empieza con $n = 0$.) *b)* 0.368
43. *a)* 3 términos (note que la suma empieza con $n = 0$.) *b)* 0.842
45. *a)* 1 000 términos *b)* 0.693 **47.** 10 **49.** 7
51. Converge absolutamente **53.** Converge absolutamente
55. Converge absolutamente **57.** Converge condicionalmente
59. Diverge **61.** Converge condicionalmente
63. Converge absolutamente **65.** Converge absolutamente
67. Converge condicionalmente **69.** Converge absolutamente
71. Una serie alternante es una serie cuyos términos alternan en el signo.
73. $|S - S_N| = |R_N| \leq a_{N+1}$
75. Graficar *b)*. La suma parcial alterna por arriba y por abajo de la recta horizontal que representa la suma.
77. Verdadero **79.** $p > 0$
81. Demostración; el recíproco es falso. Por ejemplo: Sea $a_n = 1/n$.
83. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, por tanto, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
85. *a)* No; $a_{n+1} \leq a_n$ no se satisface para toda n. Por ejemplo, $\frac{1}{9} < \frac{1}{8}$.
b) Sí; 0.5
87. Converge; criterio de la serie p
89. Diverge; criterio del término n-ésimo
91. Converge; criterio de la serie geométrica
93. Converge; criterio de la integral
95. Converge; criterio de la serie alternante
97. El primer término de la serie es 0, no 1. No se pueden reagrupar los términos de la serie arbitrariamente.
99. Problema Putnam 2, sesión vespertina, 1954

Sección 9.6 (página 647)

1 a 3. Demostraciones **5.** *d* **6.** *c* **7.** *f* **8.** *b* **9.** *a* **10.** *e*
11. *a)* Demostración
b)

n	5	10	15	20	25
S_n	9.2104	16.7598	18.8016	19.1878	19.2491

c)



d) 19.26

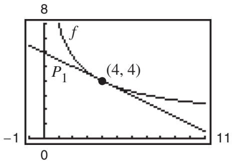
e) Entre más rápidamente tienden a cero los términos de la serie, más rápidamente tiende la sucesión de las sumas parciales a la suma de la serie.

13. Converge **15.** Diverge **17.** Diverge
19. Converge **21.** Diverge **23.** Converge
25. Diverge **27.** Converge **29.** Converge
31. Diverge **33.** Converge **35.** Converge
37. Converge **39.** Diverge **41.** Converge
43. Diverge **45.** Converge **47.** Converge
49. Converge **51.** Converge; criterio de la serie alternante
53. Converge; criterio de la serie p
55. Diverge; criterio del término n-ésimo
57. Diverge; criterio de la serie geométrica
59. Converge; criterio de comparación de límites con $b_n = 1/2^n$
61. Converge; criterio de comparación directa con $b_n = 1/3^n$
63. Converge; criterio del radio **65.** Converge; criterio del radio
67. Converge; criterio del radio **69.** a y c **71.** a y b
73. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{7^{n+1}}$ **75.** *a)* 9 *b)* -0.7769
77. Diverge; $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$
79. Converge; $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$
81. Diverge; $\lim a_n \neq 0$ **83.** Converge **85.** Converge
87. $(-3, 3)$ **89.** $(-2, 0]$ **91.** $x = 0$
93. Ver el teorema 9.17 en la página 641.
95. No; la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 10\,000}$ diverge.
97. Absolutamente; por el teorema 9.17 **99 a 105.** Demostraciones
107. *a)* Diverge *b)* Converge *c)* Converge
d) Converge para todos los enteros $x \geq 2$
109. Las respuestas varían.
111. Problema Putnam 7, sesión matutina, 1951

Sección 9.7 (página 658)

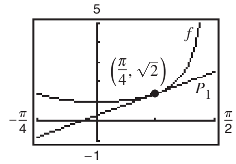
1. *d* **2.** *c* **3.** *a* **4.** *b*

5. $P_1 = -\frac{1}{2}x + 6$



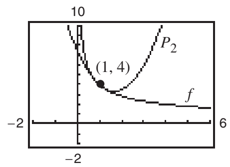
P_1 es el polinomio de Taylor de primer grado para f en 4.

7. $P_1 = \sqrt{2}x + \sqrt{2}(4 - \pi)/4$



P_1 es el polinomio de Taylor de primer grado para f en $\pi/4$.

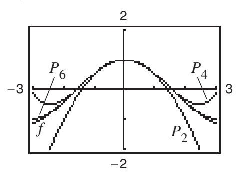
9.



x	0	0.8	0.9	1	1.1
$f(x)$	Error	4.4721	4.2164	4.0000	3.8139
$P_2(x)$	7.5000	4.4600	4.2150	4.0000	3.8150

x	1.2	2
$f(x)$	3.6515	2.8284
$P_2(x)$	3.6600	3.5000

11. *a)*



b) $f^{(2)}(0) = -1$ $\quad P_2^{(2)}(0) = -1$
$f^{(4)}(0) = 1$ $\quad P_4^{(4)}(0) = 1$
$f^{(6)}(0) = -1$ $\quad P_6^{(6)}(0) = -1$

c) $f^{(n)}(0) = P_n^{(n)}(0)$

13. $1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4$

15. $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{384}x^4$

17. $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ **19.** $x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4$

21. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$ **23.** $1 + \frac{1}{2}x^2$

25. $2 - 2(x - 1) + 2(x - 1)^2 - 2(x - 1)^3$

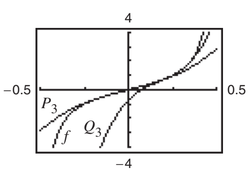
27. $2 + \frac{1}{4}(x - 4) - \frac{1}{64}(x - 4)^2 + \frac{1}{512}(x - 4)^3$

29. $\ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2 + \frac{1}{24}(x - 2)^3 - \frac{1}{64}(x - 2)^4$

31. *a)* $P_3(x) = \pi x + \dfrac{\pi^3}{3}x^3$

b)

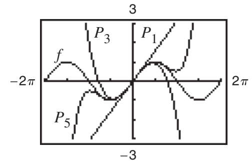
$$Q_3(x) = 1 + 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) + 2\pi^2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{8\pi^3}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right)^3$$



33. *a)*

x	0	0.25	0.50	0.75	1.00
sen x	0	0.2474	0.4794	0.6816	0.8415
$P_1(x)$	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$P_3(x)$	0	0.2474	0.4792	0.6797	0.8333
$P_5(x)$	0	0.2474	0.4794	0.6817	0.8417

b)



c) Como la distancia aumenta, la aproximación polinómica se vuelve menos exacta.

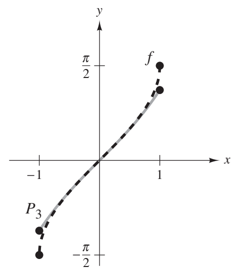
35. *a)* $P_3(x) = x + \frac{1}{6}x^3$

b)

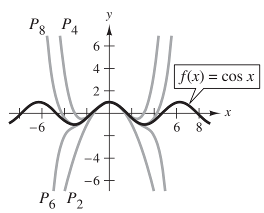
x	−0.75	−0.50	−0.25	0	0.25
$f(x)$	−0.848	−0.524	−0.253	0	0.253
$P_3(x)$	−0.820	−0.521	−0.253	0	0.253

x	0.50	0.75
$f(x)$	0.524	0.848
$P_3(x)$	0.521	0.820

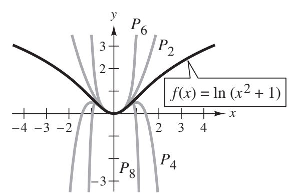
c)



37.



39.



41. 4.3984 **43.** 0.7419 **45.** $R_4 \leq 2.03 \times 10^{-5}$; 0.000001

47. $R_3 \leq 7.82 \times 10^{-3}$; 0.00085 **49.** 3 **51.** 5

53. $n = 9$; $\ln(1.5) \approx 0.4055$ **55.** $n = 16$; $e^{-\pi(1.3)} \approx 0.01684$

57. $-0.3936 < x < 0$ **59.** $-0.9467 < x < 0.9467$

61. La gráfica de la aproximación polinómica P y la función elemental f pasan por el punto $(c, f(c))$, y la pendiente de la gráfica de P es igual a la pendiente de la grafica de f en el punto $(c, f(c))$. Si P es de grado n, entonces las primeras n derivadas de f y P coinciden en c. Esto permite que la gráfica de P se parezca a la gráfica de f cerca del punto $(c, f(c))$.

63. Ver las definiciones del n-ésimo polinomio de Taylor y del n-ésimo polinomio de Maclaurin en la página 652.

65. Conforme el grado del polinomio aumenta, la gráfica del polinomio de Taylor se vuelve una mejor aproximación de la función dentro del intervalo de convergencia. En consecuencia, la exactitud se incrementa.

67. *a)* $f(x) \approx P_4(x) = 1 + x + (1/2)x^2 + (1/6)x^3 + (1/24)x^4$
$g(x) \approx Q_5(x) = x + x^2 + (1/2)x^3 + (1/6)x^4 + (1/24)x^5$
$Q_5(x) = xP_4(x)$
b) $g(x) \approx P_6(x) = x^2 - x^4/3! + x^6/5!$
c) $g(x) \approx P_4(x) = 1 - x^2/3! + x^4/5!$

69. *a)* $Q_2(x) = -1 + (\pi^2/32)(x + 2)^2$
b) $R_2(x) = -1 + (\pi^2/32)(x - 6)^2$
c) No. Las traslaciones horizontales en el resultado del apartado *a)* sólo son posibles en $x = -2 + 8n$ (donde n es un número entero) porque el periodo de f es 8.

71. Demostración

73. Cuando nos alejamos del valor $x = c$, el polinomio de Taylor se vuelve menos exacto.

Sección 9.8 (página 668)

1. 0 **3.** 2 **5.** $R = 1$ **7.** $R = \frac{1}{4}$ **9.** $R = \infty$
11. $(-4, 4)$ **13.** $(-1, 1]$ **15.** $(-\infty, \infty)$ **17.** $x = 0$
19. $(-4, 4)$ **21.** $(-5, 13]$ **23.** $(0, 2]$ **25.** $(0, 6)$
27. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **29.** $(-\infty, \infty)$ **31.** $(-1, 1)$ **33.** $x = 3$
35. $R = c$ **37.** $(-k, k)$ **39.** $(-1, 1)$
41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ **43.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
45. *a)* $(-3, 3)$ *b)* $(-3, 3)$ *c)* $(-3, 3)$ *d)* $[-3, 3)$
47. *a)* $(0, 2]$ *b)* $(0, 2)$ *c)* $(0, 2)$ *d)* $[0, 2]$
49. *c*; $S_1 = 1$, $S_2 = 1.33$ **50.** *a*; $S_1 = 1$, $S_2 = 1.67$
51. *b*; diverge **52.** *d*; alternante
53. *b* **54.** *c* **55.** *d* **56.** *a*

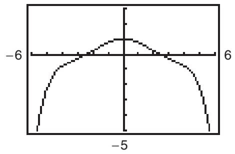
57. Una serie de la forma
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \cdots + a_n(x - c)^n + \cdots$$
se llama una serie de potencias centrada en c, donde c es una constante.

59. 1. Un solo punto 2. Un intervalo centrado en c
3. Toda la recta real

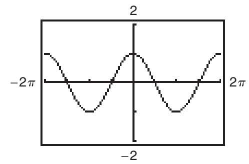
61. Las respuestas varían.

63. *a)* Para $f(x)$: $(-\infty, \infty)$; para $g(x)$: $(-\infty, \infty)$
b) Demostración *c)* Demostración *d)* $f(x) = \operatorname{sen} x$; $g(x) = \cos x$

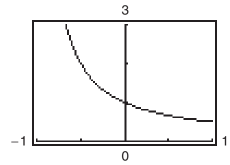
65 a 69. Demostraciones

71. *a)* Demostración *b)* Demostración
c)


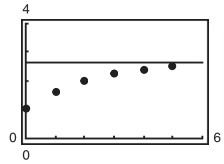
d) 0.92

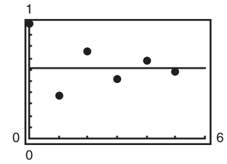
73.


$f(x) = \cos x$

75.


$f(x) = 1/(1 + x)$

77. *a)* $\frac{8}{3}$


b) $\frac{8}{13}$


c) Las series alternantes convergen más rápidamente. Las sumas parciales de las series de términos positivos se aproximan a la suma por abajo. Las sumas parciales de las series alternantes se alternan a los lados de la recta horizontal que representa la suma.
d)

M	10	100	1 000	10 000
N	5	14	24	35

79. Falso. Sea $a_n = (-1)^n/(n2^n)$ **81.** Verdadero **83.** Demostración
85. *a)* $(-1, 1)$ *b)* $f(x) = (c_0 + c_1x + c_2x^2)/(1 - x^3)$
87. Demostración

Sección 9.9 (página 676)

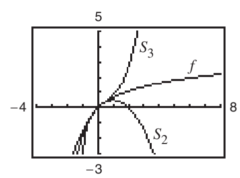
1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n+1}}$ **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n x^n}{4^{n+1}}$ **5.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}$ **7.** $\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$
$(-1, 3)$ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

9. $-\frac{5}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{9}(x + 3)\right]^n$ **11.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1} x^n}{3^{n+1}}$
$\left(-\frac{15}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

13. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(-3)^n} - 1\right]x^n$ **15.** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n[1 + (-1)^n] = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$
$(-1, 1)$ $(-1, 1)$

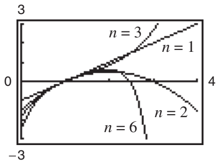
17. $2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ **19.** $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1}$ **21.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$
$(-1, 1)$ $(-1, 1)$ $(-1, 1]$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ **25.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^{2n}$
$(-1, 1)$ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

27.


x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
S_2	0.000	0.180	0.320	0.420	0.480	0.500
ln(x + 1)	0.000	0.182	0.336	0.470	0.588	0.693
S_3	0.000	0.183	0.341	0.492	0.651	0.833

29. *a)*



b) $\ln x,\ 0 < x \le 2,\ R = 1$
c) -0.6931
d) $\ln(0.5)$; el error es aproximadamente 0.

31. *c* **32.** *d* **33.** *a* **34.** *b* **35.** 0.245 **37.** 0.125

39. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},\ -1 < x < 1$ **41.** $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n,\ -1 < x < 1$

43. $E(n) = 2$. Porque la probabilidad de obtener una cara en un solo lanzamiento es $\frac{1}{2}$, se espera que en promedio se obtenga una cara en cada dos lanzamientos.

45. Como $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)}$, se sustituye $(-x)$ en la serie geométrica.

47. Como $\dfrac{5}{1+x} = 5\left(\dfrac{1}{1-(-x)}\right)$, se sustituye $(-x)$ en la serie geométrica y se multiplica por 5.

49. Demostración **51.** *a)* Demostración *b)* 3.14

53. $\ln\frac{3}{2} \approx 0.4055$; ver ejercicio 21.

55. $\ln\frac{7}{5} \approx 0.3365$; ver ejercicio 53.

57. $\arctan\frac{1}{2} \approx 0.4636$; ver ejercicio 56.

59. $f(x) = \arctan x$ es una función impar (simétrica respecto al origen).

61. La serie en el ejercicio 56 converge a su suma a un ritmo más lento porque sus términos tienden a cero a un ritmo mucho más lento.

63. La serie converge en el intervalo $(-5, 3)$ y quizás también en uno o en ambos puntos terminales.

65. $\sqrt{3}\pi/6$ **67.** $S_1 = 0.3183098862,\ 1/\pi \approx 0.3183098862$

Sección 9.10 (página 687)

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2x)^n}{n!}$ **3.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n!}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^n$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(x-1)^n$ **7.** $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ **11.** $1 + x^2/2! + 5x^4/4! + \cdots$

13 a 15. Demostraciones **17.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n+1)x^n$

19. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^n}{2^n n!}$

21. $\dfrac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n}}{2^{3n}n!}\right]$

23. $1 + \dfrac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\,1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)x^n}{2^n n!}$

25. $1 + \dfrac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)x^{2n}}{2^n n!}$

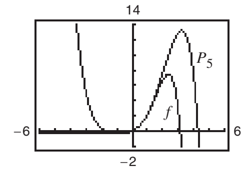
27. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{2^n n!}$ **29.** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ **31.** $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 4^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$ **35.** $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{3n}}{(2n)!}$ **37.** $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

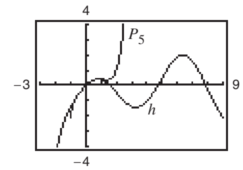
39. $\dfrac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}\right]$ **41.** $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!}$

43. $\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ **45.** Demostración

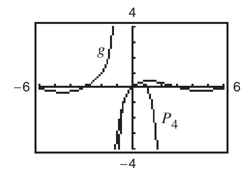
47. $P_5(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5$



49. $P_5(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5$



51. $P_4(x) = x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4$



53. *c*; $f(x) = x \operatorname{sen} x$ **54.** *d*; $f(x) = x\cos x$ **55.** *a*; $f(x) = xe^x$

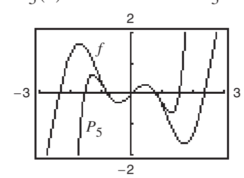
56. *b*; $f(x) = x^2\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ **57.** $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{(n+1)}x^{2n+3}}{(2n+3)(n+1)!}$

59. 0.6931 **61.** 7.3891 **63.** 0 **65.** 1 **67.** 0.8075

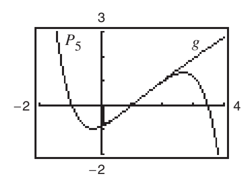
69. 0.9461 **71.** 0.4872 **73.** 0.2010 **75.** 0.7040

77. 0.3412

79. $P_5(x) = x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5$ $\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$



81. $P_5(x) = (x-1) - \frac{1}{24}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 - \frac{71}{1920}(x-1)^5$ $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$



83. Ver los "Pasos para encontrar una serie de Taylor" en página 682.

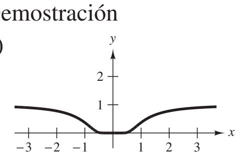
85. La serie binomial está dada por

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots.$$

El radio de convergencia es $R = 1$.

87. Demostración

89. *a)*



b) Demostración

c) $\sum_{n=0}^{\infty} 0x^n = 0 \ne f(x)$

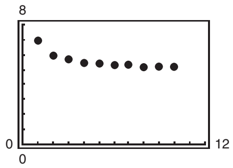
91. Demostración **93.** 10 **95.** -0.0390625

97. $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n$ **99.** Demostración

Ejercicios de repaso del capítulo 9 (página 690)

1. $a_n = 1/(n! + 1)$ **3.** a **4.** c **5.** d **6.** b

7.



Converge a 5

9. Converge a 3 **11.** Diverge **13.** Converge a 0

15. Converge a 0 **17.** Converge a 0

19. *a*)

n	1	2	3	4
A_n	\$8 100.00	\$8 201.25	\$8 303.77	\$8 407.56

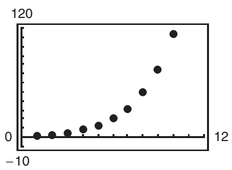
n	5	6	7	8
A_n	\$8 512.66	\$8 619.07	\$8 726.80	\$8 835.89

b) \$13 148.96

21. *a*)

n	5	10	15	20	25
S_n	13.2	113.3	873.8	6 648.5	50 500.3

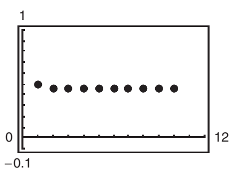
b)



23. *a*)

n	5	10	15	20	25
S_n	0.4597	0.4597	0.4597	0.4597	0.4597

b)



25. 3 **27.** 5.5 **29.** *a*) $\sum_{n=0}^{\infty}(0.09)(0.01)^n$ *b*) $\frac{1}{11}$

31. Diverge **33.** Diverge **35.** $45\frac{1}{3}$ m **37.** \$7 630.70

39. Converge **41.** Diverge **43.** Diverge

45. Converge **47.** Diverge **49.** Converge

51. Converge **53.** Diverge **55.** Diverge

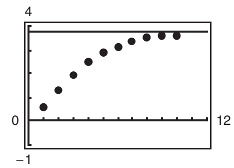
57. Converge **59.** Diverge

61. *a*) Demostración

b)

n	5	10	15	20	25
S_n	2.8752	3.6366	3.7377	3.7488	3.7499

c)



d) 3.75

63. *a*)

N	5	10	20	30	40
$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$	1.4636	1.5498	1.5962	1.6122	1.6202
$\int_N^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$	0.2000	0.1000	0.0500	0.0333	0.0250

b)

N	5	10	20	30	40
$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^5}$	1.0367	1.0369	1.0369	1.0369	1.0369
$\int_N^{\infty}\frac{1}{x^5}\,dx$	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

La serie en el apartado *b*) converge más rápidamente. Esto es evidente en las integrales que dan los restos de las sumas parciales.

65. $P_3(x) = 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3$ **67.** 0.996 **69.** 0.559

71. *a*) 4 *b*) 6 *c*) 5 *d*) 10 **73.** $(-10, 10)$

75. $[1, 3]$ **77.** Sólo converge en $x = 2$ **79.** Demostración

81. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^n$ **83.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{9}(n+1)\left(\frac{x}{3}\right)^n$

85. $f(x) = \frac{3}{3-2x}, \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **87.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n!}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^n$

89. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln 3)^n}{n!}$ **91.** $-\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$

93. $1 + x/5 - 2x^2/25 + 6x^3/125 - 21x^4/625 + \cdots$

95. $\ln\frac{5}{4} \approx 0.2231$ **97.** $e^{1/2} \approx 1.6487$ **99.** $\cos\frac{2}{3} \approx 0.7859$

101. La serie en el ejercicio 45 converge a su suma a un ritmo más bajo porque sus términos tienden a 0 a un ritmo más bajo.

103. *a*) a *c*) $1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$

105. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ **107.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)^2}$ **109.** 0

SP Solución de problemas (página 693)

1. *a*) 1 *b*) Las respuestas varían. Ejemplo: $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ *c*) 0

3. Demostración **5.** *a*) Demostración *b*) Sí *c*) Cualquier distancia

7. Para $a = b$, la serie converge condicionalmente. Para ningún valor de a y b la serie converge absolutamente.

9. 665 280 **11.** *a*) Demostración *b*) Diverge

13. Demostración **15.** *a*) Demostración *b*) Demostración

17. *a*) La altura es infinita *b*) El área de la superficie es infinita *c*) Demostración

Cálculo 2

Cálculo 2
de varias variables

Novena edición

Ron Larson
The Pennsylvania State University
The Behrend College

Bruce H. Edwards
University of Florida

Revisión técnica

Marlene Aguilar Abalo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México

José Job Flores Godoy
Universidad Iberoamericana

Joel Ibarra Escutia
Instituto Tecnológico de Toluca

Linda M. Medina Herrera
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México

Mc Graw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

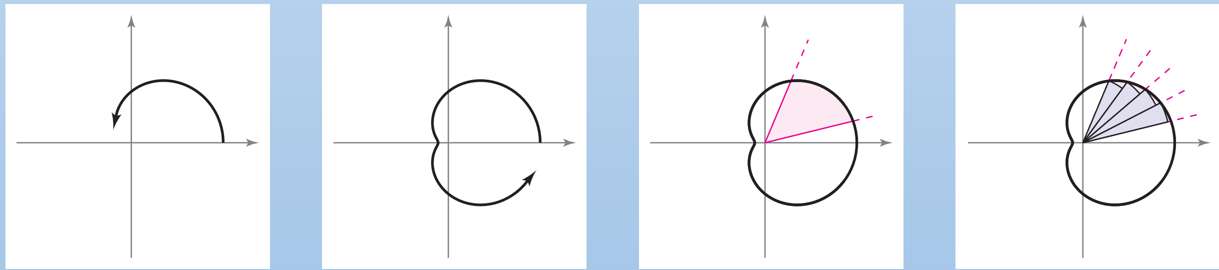
10 Cónicas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

En este capítulo se analizarán y se escribirán ecuaciones de cónicas usando sus propiedades. También se aprenderá cómo escribir y graficar ecuaciones paramétricas y polares, y se verá cómo se puede usar el cálculo para estudiar tales gráficas. Además de las ecuaciones rectangulares de cónicas, también se estudiarán ecuaciones polares de cónicas.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo analizar y escribir ecuaciones de una parábola, una elipse y una hipérbola. (10.1)
- Cómo trazar una curva representada por ecuaciones paramétricas. (10.2)
- Cómo usar un conjunto de ecuaciones paramétricas para encontrar la pendiente de una línea tangente a una curva y la longitud de arco de una curva. (10.3)
- Cómo dibujar la gráfica de una ecuación en forma polar, encontrar la pendiente de una línea tangente a una gráfica polar e identificar gráficas polares especiales. (10.4)
- Cómo encontrar el área de una región acotada por una gráfica polar y encontrar la longitud de arco de una gráfica polar. (10.5)
- Cómo analizar y escribir una ecuación polar de una cónica. (10.6)

Se puede modelar la trayectoria de una pelota de béisbol bateada a una altura específica a un ángulo con el horizontal utilizando ecuaciones paramétricas. ¿Cómo se puede usar un conjunto de ecuaciones paramétricas para encontrar el ángulo mínimo al cual la pelota debe salir del bate para que el golpe sea un jonrón? (Ver la sección 10.2, ejercicio 75.)



En el sistema de coordenadas polares, graficar una ecuación implica trazar una curva alrededor de un punto fijo llamado el polo. Considerar una región acotada por una curva y por los rayos que contienen los puntos extremos de un intervalo sobre la curva. Pueden usarse sectores circulares para aproximar el área de tal región. En la sección 10.5 se verá cómo es posible usar el proceso de límite para encontrar esta área.

10.1 Cónicas y cálculo

- **Entender la definición de una sección cónica.**
- **Analizar y dar las ecuaciones de la parábola utilizando las propiedades de la parábola.**
- **Analizar y dar las ecuaciones de la elipse utilizando las propiedades de la elipse.**
- **Analizar y dar las ecuaciones de la hipérbola utilizando las propiedades de la hipérbola.**

Secciones cónicas

Toda **sección cónica** (o simplemente **cónica**) puede describirse como la intersección de un plano y un cono de dos hojas. En la figura 10.1 se observa que en las cuatro cónicas básicas el plano de intersección no pasa por el vértice del cono. Cuando el plano pasa por el vértice, la figura que resulta es una **cónica degenerada**, como se muestra en la figura 10.2.

Bettmann/Corbis

HYPATIA (370-415 D.C.)

Los griegos descubrieron las secciones cónicas entre los años 600 y 300 a.C. A principios del periodo alejandrino ya se sabía lo suficiente acerca de las cónicas como para que Apolonio (269-190 a.C.) escribiera una obra de ocho volúmenes sobre el tema. Más tarde, hacia finales del periodo Alejandrino, Hypatia escribió un texto titulado *Sobre las cónicas de Apolonio*. Su muerte marcó el final de los grandes descubrimientos matemáticos en Europa por varios siglos.

Los primeros griegos se interesaron mucho por las propiedades geométricas de las cónicas. No fue sino 1900 años después, a principios del siglo XVII, cuando se hicieron evidentes las amplias posibilidades de aplicación de las cónicas, las cuales llegaron a jugar un papel prominente en el desarrollo del cálculo.

Circunferencia Parábola Elipse Hipérbola

Secciones cónicas
Figura 10.1

Punto Recta Dos rectas que se cortan

Cónicas degeneradas
Figura 10.2

Existen varias formas de estudiar las cónicas. Se puede empezar, como lo hicieron los griegos, definiendo las cónicas en términos de la intersección de planos y conos, o se pueden definir algebraicamente en términos de la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Ecuación general de segundo grado.

Sin embargo, un tercer método en el que cada una de las cónicas está definida como el **lugar geométrico** (o colección) de todos los puntos que satisfacen cierta propiedad geométrica, funciona mejor. Por ejemplo, la circunferencia se define como el conjunto de todos los puntos (x, y) que son equidistantes de un punto fijo (h, k). Esta definición en términos del lugar geométrico conduce fácilmente a la ecuación estándar o canónica de la circunferencia

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Ecuación estándar o canónica de la circunferencia.

Para información acerca de la rotación de ecuaciones de segundo grado en dos variables, ver el apéndice D.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para conocer más sobre las actividades de esta matemática, consultar al artículo "Hypatia and her Mathematics" de Michael A. B. Deakin en *The American Mathematical Monthly*.

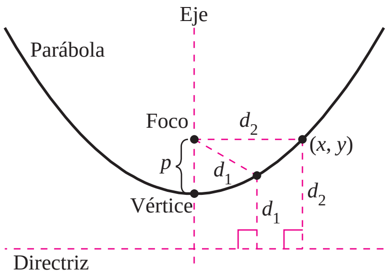


Figura 10.3

Parábolas

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos (x, y) equidistantes de una recta fija llamada **directriz** y de un punto fijo, fuera de dicha recta, llamado **foco**. El punto medio entre el foco y la directriz es el **vértice**, y la recta que pasa por el foco y el vértice es el **eje** de la parábola. Obsérvese en la figura 10.3 que la parábola es simétrica respecto de su eje.

TEOREMA 10.1 ECUACIÓN ESTÁNDAR O CANÓNICA DE UNA PARÁBOLA

La **forma estándar** o **canónica** de la ecuación de una parábola con vértice (h, k) y directriz $y = k - p$ es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k). \qquad \text{Eje vertical.}$$

Para la directriz $x = h - p$, la ecuación es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h). \qquad \text{Eje horizontal.}$$

El foco se encuentra en el eje a p unidades (*distancia dirigida*) del vértice. Las coordenadas del foco son las siguientes.

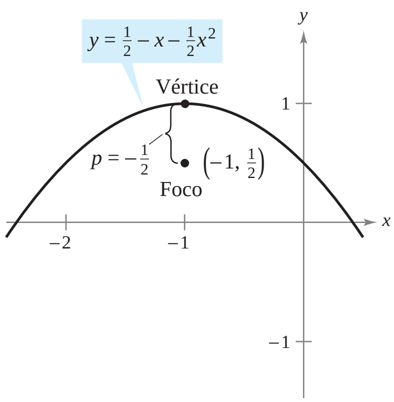
$$(h, k + p) \qquad \text{Eje vertical.}$$
$$(h + p, k) \qquad \text{Eje horizontal.}$$

EJEMPLO 1 Hallar el foco de una parábola

Hallar el foco de la parábola dada por $y = \dfrac{1}{2} - x - \dfrac{1}{2}x^2$.

Solución Para hallar el foco, se convierte a la forma canónica o estándar completando el cuadrado.

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2} - x - \tfrac{1}{2}x^2 && \text{Reescribir la ecuación original.}\\ y &= \tfrac{1}{2}(1 - 2x - x^2) && \text{Sacar } \tfrac{1}{2} \text{ como factor.}\\ 2y &= 1 - 2x - x^2 && \text{Multiplicar cada lado por 2.}\\ 2y &= 1 - (x^2 + 2x) && \text{Agrupar términos.}\\ 2y &= 2 - (x^2 + 2x + 1) && \text{Sumar y restar 1 en el lado derecho.}\\ x^2 + 2x + 1 &= -2y + 2 && \\ (x + 1)^2 &= -2(y - 1) && \text{Expresar en la forma estándar o canónica.} \end{aligned}$$



Parábola con eje vertical, $p < 0$
Figura 10.4

Si se compara esta ecuación con $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, se concluye que

$$h = -1, \qquad k = 1 \qquad \text{y} \qquad p = -\tfrac{1}{2}.$$

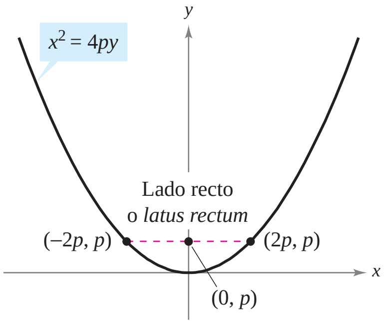
Como p es negativo, la parábola se abre hacia abajo, como se muestra en la figura 10.4. Por tanto, el foco de la parábola se encuentra a p unidades del vértice, o sea

$$(h, k + p) = \left(-1, \tfrac{1}{2}\right). \qquad \text{Foco.}$$

A un segmento de la recta que pasa por el foco de una parábola y que tiene sus extremos en la parábola se le llama **cuerda focal**. La cuerda focal perpendicular al eje de la parábola es el **lado recto** (*latus rectum*). El ejemplo siguiente muestra cómo determinar la longitud del lado recto y la longitud del correspondiente arco cortado.

EJEMPLO 2 Longitud de la cuerda focal y longitud de arco

Encontrar la longitud del lado recto de la parábola dada por $x^2 = 4py$. Después, hallar la longitud del arco parabólico cortado por el lado recto.



Longitud del lado recto o *latus rectum*: $4p$
Figura 10.5

Solución Debido a que el lado recto pasa por el foco $(0, p)$ y es perpendicular al eje y, las coordenadas de sus extremos son $(-x, p)$ y (x, p). Al sustituir, en la ecuación de la parábola, y por p se obtiene

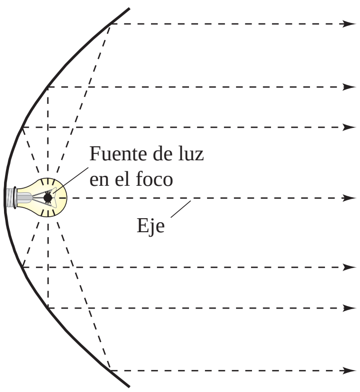
$$x^2 = 4p(p) \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2p.$$

Entonces, los extremos del lado recto son $(-2p, p)$ y $(2p, p)$, y se concluye que su longitud es $4p$, como se muestra en la figura 10.5. En cambio, la longitud del arco cortado es

$$\begin{aligned}
s &= \int_{-2p}^{2p} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx && \text{Emplear la fórmula de longitud del arco.} \\
&= 2\int_{0}^{2p} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2p}\right)^2}\, dx && y = \frac{x^2}{4p} \Rightarrow y' = \frac{x}{2p} \\
&= \frac{1}{p}\int_{0}^{2p} \sqrt{4p^2 + x^2}\, dx && \text{Simplificar.} \\
&= \frac{1}{2p}\left[x\sqrt{4p^2 + x^2} + 4p^2 \ln\left|x + \sqrt{4p^2 + x^2}\right|\right]_0^{2p} && \text{Teorema 8.2.} \\
&= \frac{1}{2p}\left[2p\sqrt{8p^2} + 4p^2 \ln\left(2p + \sqrt{8p^2}\right) - 4p^2 \ln(2p)\right] \\
&= 2p\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] \\
&\approx 4.59p.
\end{aligned}$$

Una propiedad muy utilizada de la parábola es su propiedad de reflexión. En física, se dice que una superficie es reflejante o **reflectante** si la tangente a cualquier punto de la superficie produce ángulos iguales con un rayo incidente y con el rayo reflejado resultante. El ángulo correspondiente al rayo incidente es el **ángulo de incidencia**, y el ángulo correspondiente al rayo que se refleja es el **ángulo de reflexión**. Un espejo plano es un ejemplo de una superficie reflejante o reflectante.

Otro tipo de superficie reflejante es la que se forma por revolución de una parábola alrededor de su eje. Una propiedad especial de los reflectores parabólicos es que permiten dirigir hacia el foco de la parábola todos los rayos incidentes paralelos al eje. Éste es el principio detrás del diseño de todos los espejos parabólicos que se utilizan en los telescopios de reflexión. Inversamente, todos los rayos de luz que emanan del foco de una linterna con reflector parabólico son paralelos, como se ilustra en la figura 10.6.



Reflector parabólico: la luz se refleja en rayos paralelos
Figura 10.6

TEOREMA 10.2 PROPIEDAD DE REFLEXIÓN DE UNA PARÁBOLA

Sea P un punto de una parábola. La tangente a la parábola en el punto P produce ángulos iguales con las dos rectas siguientes.

1. La recta que pasa por P y por el foco
2. La recta paralela al eje de la parábola que pasa por P

NICOLÁS COPÉRNICO (1473-1543)

Copérnico comenzó el estudio del movimiento planetario cuando se le pidió que corrigiera el calendario. En aquella época, el uso de la teoría de que la Tierra era el centro del Universo, no permitía predecir con exactitud la longitud de un año.

Elipses

Más de mil años después de terminar el periodo alejandrino de la matemática griega, comienza un renacimiento de la matemática y del descubrimiento científico en la civilización occidental. Nicolás Copérnico, astrónomo polaco, fue figura principal en este renacimiento. En su trabajo *Sobre las revoluciones de las esferas celestes*, Copérnico sostenía que todos los planetas, incluyendo la Tierra, giraban, en órbitas circulares, alrededor del Sol. Aun cuando algunas de las afirmaciones de Copérnico no eran válidas, la controversia desatada por su teoría heliocéntrica motivó a que los astrónomos buscaran un modelo matemático para explicar los movimientos del Sol y de los planetas que podían observar. El primero en encontrar un modelo correcto fue el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630). Kepler descubrió que los planetas se mueven alrededor del Sol, en órbitas elípticas, teniendo al Sol, no como centro, sino como uno de los puntos focales de la órbita.

El uso de las elipses para explicar los movimientos de los planetas es sólo una de sus aplicaciones prácticas y estéticas. Como con la parábola, el estudio de este segundo tipo de cónica empieza definiéndola como lugar geométrico de puntos. Sin embargo, ahora se tienen *dos* puntos focales en lugar de uno.

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos (x, y), cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante. (Ver la figura 10.7.) La recta que une a los focos interseca o corta a la elipse en dos puntos, llamados **vértices**. La cuerda que une a los vértices es el **eje mayor**, y su punto medio es el **centro** de la elipse. La cuerda a través del centro, perpendicular al eje mayor, es el **eje menor** de la elipse. (Ver la figura 10.8.)

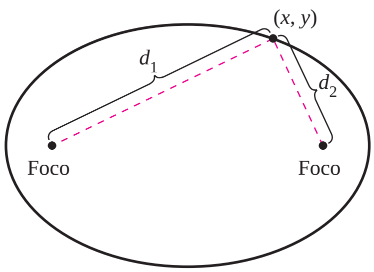


Figura 10.7

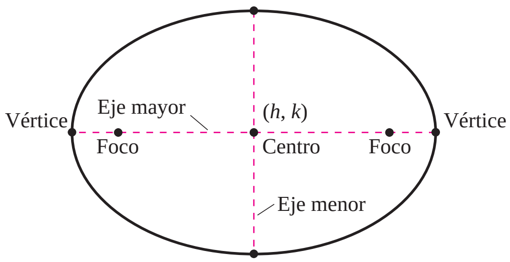


Figura 10.8

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para saber más acerca de cómo "hacer explotar" una elipse para convertirla en una parábola, consultar al artículo "Exploding the Ellipse" de Arnold Good en *Mathematics Teacher*.

TEOREMA 10.3 ECUACIÓN ESTÁNDAR O CANÓNICA DE UNA ELIPSE

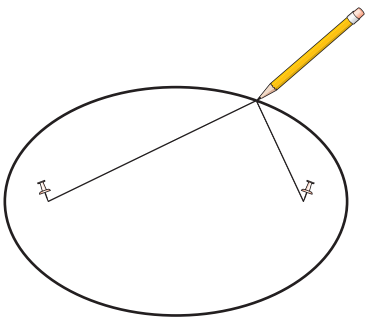
La forma estándar o canónica de la ecuación de una elipse con centro (h, k) y longitudes de los ejes mayor y menor $2a$ y $2b$, respectivamente, donde $a > b$, es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{El eje mayor es horizontal.}$$

o

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1. \qquad \text{El eje mayor es vertical.}$$

Los focos se encuentran en el eje mayor, a c unidades del centro, con $c^2 = a^2 - b^2$.



Si los extremos de una cuerda se atan a los alfileres y se tensa la cuerda con un lápiz, la trayectoria trazada con el lápiz será una elipse
Figura 10.9

La definición de una elipse se puede visualizar si se imaginan dos alfileres colocados en los focos, como se muestra en la figura 10.9.

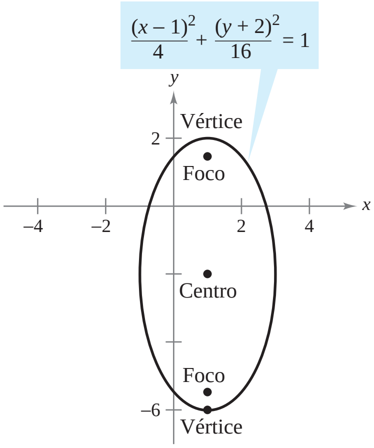
EJEMPLO 3 Completar cuadrados

Encontrar el centro, los vértices y los focos de la elipse dada por

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0.$$

Solución Al completar el cuadrado se puede expresar la ecuación original en la forma estándar o canónica.

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0 \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$
$$4x^2 - 8x + y^2 + 4y = 8$$
$$4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 8 + 4 + 4$$
$$4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$
$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1 \qquad \text{Escribir la forma estándar o canónica.}$$



Elipse con eje mayor vertical
Figura 10.10

Así, el eje mayor es paralelo al eje y, donde $h = 1$, $k = -2$, $a = 4$, $b = 2$ y $c = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$. Por tanto, se obtiene:

Centro: $(1, -2)$ $\qquad (h, k)$.

Vértices: $(1, -6)$ y $(1, 2)$ $\qquad (h, k \pm a)$.

Focos: $\left(1, -2 - 2\sqrt{3}\right)$ y $\left(1, -2 + 2\sqrt{3}\right)$ $\qquad (h, k \pm c)$.

La gráfica de la elipse se muestra en la figura 10.10.

NOTA Si en la ecuación del ejemplo 3, el término constante $F = -8$ hubiese sido mayor o igual a 8, se hubiera obtenido alguno de los siguientes casos degenerados.

1. $F = 8$, un solo punto, $(1, -2)$: $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 0$

2. $F > 8$, no existen puntos solución: $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{16} < 0$

EJEMPLO 4 La órbita de la Luna

La Luna gira alrededor de la Tierra siguiendo una trayectoria elíptica en la que el centro de la Tierra está en uno de los focos, como se ilustra en la figura 10.11. Las longitudes de los ejes mayor y menor de la órbita son 768 800 kilómetros y 767 640 kilómetros, respectivamente. Encontrar las distancias mayor y menor (apogeo y perigeo) entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna.

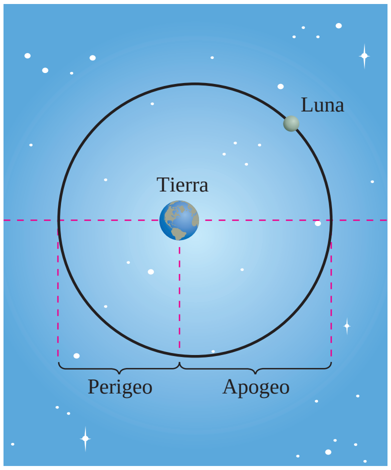


Figura 10.11

Solución Para comenzar se encuentran a y b.

$$2a = 768\,800 \qquad \text{Longitud del eje mayor.}$$
$$a = 384\,400 \qquad \text{Despejar } a.$$
$$2b = 767\,640 \qquad \text{Longitud del eje menor.}$$
$$b = 383\,820 \qquad \text{Despejar } b.$$

Ahora, al emplear estos valores, se despeja c como sigue.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 21\,108$$

La distancia mayor entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna es $a + c \approx 405\,508$ kilómetros y la distancia menor es $a - c \approx 363\,292$ kilómetros.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para más información acerca de algunos usos de las propiedades de reflexión de las cónicas, consultar el artículo “Parabolic Mirrors, Elliptic and Hyperbolic Lenses” de Mohsen Maesumi en *The American Mathematical Monthly*. Consultar también el artículo “The Geometry of Microwave Antennas” de William R. Paezynski en *Mathematics Teacher*.

En el teorema 10.2 se presentó la propiedad de reflexión de la parábola. La elipse tiene una propiedad semejante. En el ejercicio 112 se pide demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 10.4 PROPIEDAD DE REFLEXIÓN DE LA ELIPSE

Sea P un punto de una elipse. La recta tangente a la elipse en el punto P forma ángulos iguales con las rectas que pasan por P y por los focos.

Uno de los motivos por el cual los astrónomos tuvieron dificultad para descubrir que las órbitas de los planetas son elípticas es el hecho de que los focos de las órbitas planetarias están relativamente cerca del centro del Sol, lo que hace a las órbitas ser casi circulares. Para medir el achatamiento de una elipse, se puede usar el concepto de **excentricidad**.

DEFINICIÓN DE LA EXCENTRICIDAD DE UNA ELIPSE

La **excentricidad** e de una elipse está dada por el cociente

$$e = \frac{c}{a}.$$

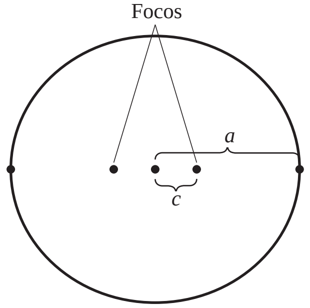
Para ver cómo se usa este cociente en la descripción de la forma de una elipse, obsérvese que como los focos de una elipse se localizan a lo largo del eje mayor entre los vértices y el centro, se tiene que

$$0 < c < a.$$

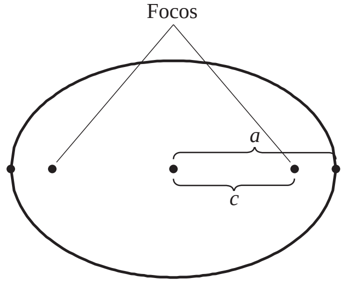
En una elipse casi circular, los focos se encuentran cerca del centro y el cociente c/a es pequeño, mientras que en una elipse alargada, los focos se encuentran cerca de los vértices y el cociente c/a está cerca de 1, como se ilustra en la figura 10.12. Obsérvese que para toda elipse $0 < e < 1$.

La excentricidad de la órbita de la Luna es $e = 0.0549$, y las excentricidades de las nueve órbitas planetarias son las siguientes.

Mercurio:	$e = 0.2056$	Júpiter:	$e = 0.0484$
Venus:	$e = 0.0068$	Saturno:	$e = 0.0542$
Tierra:	$e = 0.0167$	Urano:	$e = 0.0472$
Marte:	$e = 0.0934$	Neptuno:	$e = 0.0086$



a) $\frac{c}{a}$ es pequeño



b) $\frac{c}{a}$ es casi 1

Excentricidad es el cociente $\frac{c}{a}$.
Figura 10.12

Por integración se puede mostrar que el área de una elipse es $A = \pi ab$. Por ejemplo, el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

está dada por

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx \\ &= \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

Sustitución trigonométrica $x = a$ sen θ.

Sin embargo, encontrar el *perímetro* de una elipse no es fácil. El siguiente ejemplo muestra cómo usar la excentricidad para establecer una “integral elíptica” para el perímetro de una elipse.

EJEMPLO 5 Encontrar el perímetro de una elipse

Mostrar que el perímetro de una elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ es

$$4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta. \qquad e = \frac{c}{a}$$

Solución Como la elipse dada es simétrica respecto al eje x y al eje y, se sabe que su perímetro C es el cuádruplo de la longitud de arco de $y = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$ en el primer cuadrante. La función y es diferenciable (o derivable) para toda x en el intervalo $[0, a]$ excepto en $x = a$. Entonces, el perímetro está dado por la integral impropia

$$C = \lim_{d\to a} 4\int_0^d \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 4\int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 4\int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx.$$

Al usar la sustitución trigonométrica $x = a \operatorname{sen} \theta$, se obtiene

$$\begin{aligned} C &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{a^2 \cos^2 \theta}}(a \cos \theta)\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta) + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta. \end{aligned}$$

Debido a que $e^2 = c^2/a^2 = (a^2 - b^2)/a^2$, se puede escribir esta integral como

$$C = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta.$$

ÁREA Y PERÍMETRO DE UNA ELIPSE

En su trabajo con órbitas elípticas, a principios del siglo XVII, Johannes Kepler desarrolló una fórmula para encontrar el área de una elipse, $A = \pi ab$. Sin embargo, tuvo menos éxito en hallar una fórmula para el perímetro de una elipse, para el cual sólo dio la siguiente fórmula de aproximación $C = \pi(a + b)$.

Se ha dedicado mucho tiempo al estudio de las integrales elípticas. En general dichas integrales no tienen antiderivadas o primitivas elementales. Para encontrar el perímetro de una elipse, por lo general hay que recurrir a una técnica de aproximación.

EJEMPLO 6 Aproximar el valor de una integral elíptica

Emplear la integral elíptica del ejemplo 5 para aproximar el perímetro de la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Solución Como $e^2 = c^2/a^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 9/25$, se tiene

$$C = (4)(5)\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{9 \operatorname{sen}^2 \theta}{25}}\, d\theta.$$

Aplicando la regla de Simpson con $n = 4$ se obtiene

$$\begin{aligned} C &\approx 20\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{4}\right)[1 + 4(0.9733) + 2(0.9055) + 4(0.8323) + 0.8] \\ &\approx 28.36. \end{aligned}$$

Por tanto, el perímetro de la elipse es aproximadamente 28.36 unidades, como se muestra en la figura 10.13.

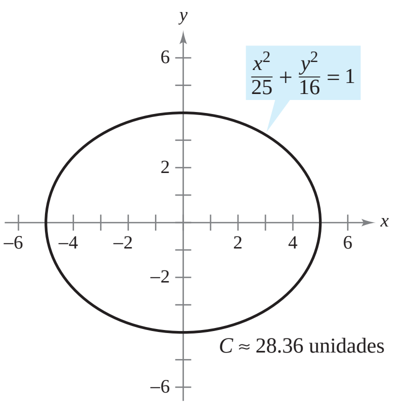


Figura 10.13

Hipérbolas

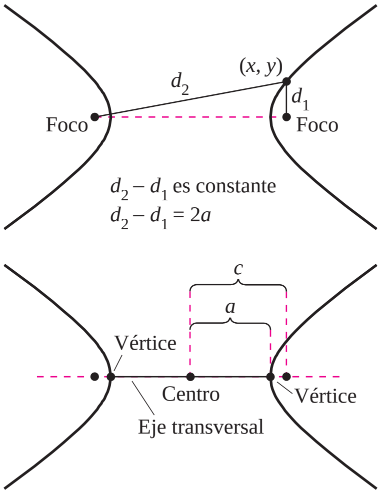


Figura 10.14

La definición de hipérbola es similar a la de la elipse. En la elipse, la *suma* de las distancias de un punto de la elipse a los focos es fija, mientras que en la hipérbola, el valor absoluto de la *diferencia* entre estas distancias es fijo.

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos (x, y) para los que el valor absoluto de la diferencia entre las distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante. (Ver la figura 10.14.) La recta que pasa por los dos focos corta a la hipérbola en dos puntos llamados **vértices**. El segmento de recta que une a los vértices es el **eje transversal**, y el punto medio del eje transversal es el **centro** de la hipérbola. Un rasgo distintivo de la hipérbola es que su gráfica tiene dos *ramas* separadas.

TEOREMA 10.5 ECUACIÓN ESTÁNDAR O CANÓNICA DE UNA HIPÉRBOLA

La forma estándar o canónica de la ecuación de una hipérbola con centro (h, k) es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{El eje transversal es horizontal.}$$

o

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1. \qquad \text{El eje transversal es vertical.}$$

Los vértices se encuentran a a unidades del centro y los focos se encuentran a c unidades del centro, con $c^2 = a^2 + b^2$.

NOTA En la hipérbola no existe la misma relación entre las constantes a, b y c, que en la elipse. En la hipérbola, $c^2 = a^2 + b^2$, mientras que en la elipse, $c^2 = a^2 - b^2$. ■

Una ayuda importante para trazar la gráfica de una hipérbola es determinar sus **asíntotas**, como se ilustra en la figura 10.15. Toda hipérbola tiene dos asíntotas que se cortan en el centro de la hipérbola. Las asíntotas pasan por los vértices de un rectángulo de dimensiones $2a$ por $2b$, con centro en (h, k). Al segmento de la recta de longitud $2b$ que une $(h, k + b)$ y $(h, k - b)$ se le conoce como **eje conjugado** de la hipérbola.

TEOREMA 10.6 ASÍNTOTAS DE UNA HIPÉRBOLA

Si el eje transversal es *horizontal*, las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = k + \frac{b}{a}(x-h) \qquad \text{y} \qquad y = k - \frac{b}{a}(x-h).$$

Si el eje transversal es *vertical*, las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = k + \frac{a}{b}(x-h) \qquad \text{y} \qquad y = k - \frac{a}{b}(x-h).$$

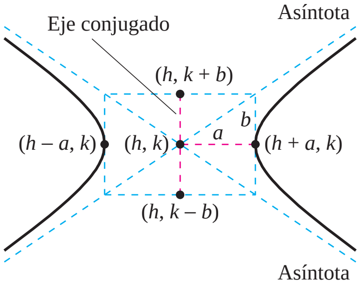


Figura 10.15

En la figura 10.15 se puede ver que las asíntotas coinciden con las diagonales del rectángulo de dimensiones $2a$ y $2b$, centrado en (h, k). Esto proporciona una manera rápida de trazar las asíntotas, las que a su vez ayudan a trazar la hipérbola.

TECNOLOGÍA Para verificar la gráfica obtenida en el ejemplo 7 se puede emplear una herramienta de graficación y despejar y de la ecuación original para representar gráficamente las ecuaciones siguientes.

$$y_1 = \sqrt{4x^2 - 16}$$
$$y_2 = -\sqrt{4x^2 - 16}$$

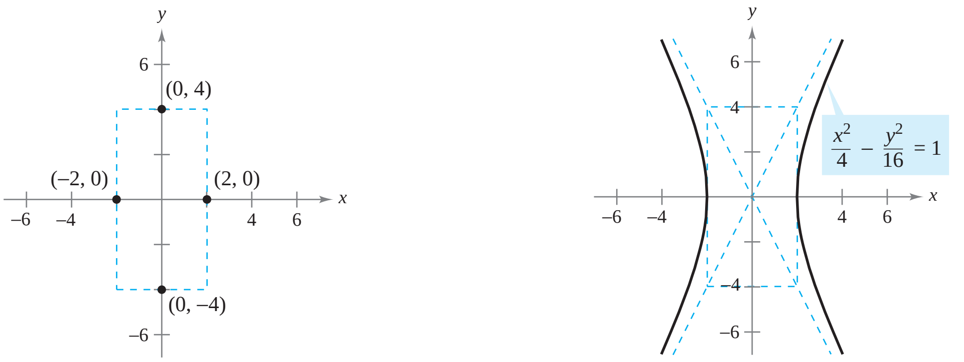
EJEMPLO 7 Uso de las asíntotas para trazar una hipérbola

Trazar la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es $4x^2 - y^2 = 16$.

Solución Para empezar se escribe la ecuación en la forma estándar o canónica.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

El eje transversal es horizontal y los vértices se encuentran en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$. Los extremos del eje conjugado se encuentran en $(0, -4)$ y $(0, 4)$. Con estos cuatro puntos, se puede trazar el rectángulo que se muestra en la figura 10.16*a*. Al dibujar las asíntotas a través de las esquinas de este rectángulo, el trazo se termina como se muestra en la figura 10.16*b*.



a) *b)*

Figura 10.16

DEFINICIÓN DE LA EXCENTRICIDAD DE UNA HIPÉRBOLA

La **excentricidad** e de una hipérbola es dada por el cociente

$$e = \frac{c}{a}.$$

Como en la elipse, la **excentricidad** de una hipérbola es $e = c/a$. Dado que en la hipérbola $c > a$ resulta que $e > 1$. Si la excentricidad es grande, las ramas de la hipérbola son casi planas. Si la excentricidad es cercana a 1, las ramas de la hipérbola son más puntiagudas, como se muestra en la figura 10.17.

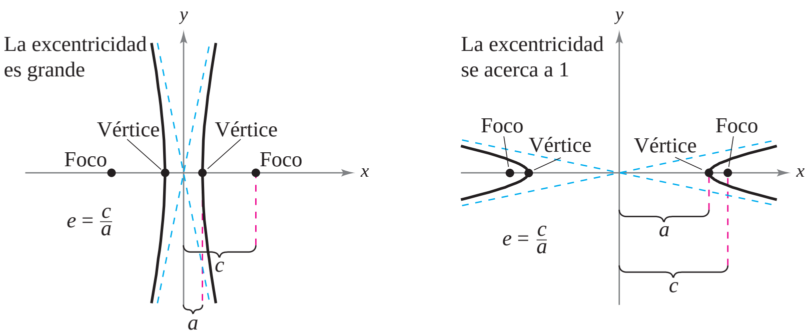
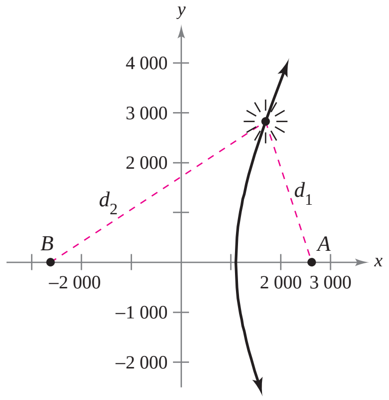


Figura 10.17

La aplicación siguiente fue desarrollada durante la Segunda Guerra Mundial. Muestra cómo los radares y otros sistemas de detección pueden usar las propiedades de la hipérbola.

EJEMPLO 8 Un sistema hiperbólico de detección

Dos micrófonos, a una milla de distancia entre sí, registran una explosión. El micrófono A recibe el sonido 2 segundos antes que el micrófono B. ¿Dónde fue la explosión?



$2c = 5\,280$
$d_2 - d_1 = 2a = 2\,200$
Figura 10.18

Solución Suponiendo que el sonido viaja a 1 100 pies por segundo, se sabe que la explosión tuvo lugar 2 200 pies más lejos de B que de A, como se observa en la figura 10.18. El lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran 2 200 pies más cercanos a A que a B es una rama de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, donde

$$c = \frac{1 \text{ milla}}{2} = \frac{5\,280 \text{ pies}}{2} = 2\,640 \text{ pies.}$$

y

$$a = \frac{2\,200 \text{ pies}}{2} = 1100 \text{ pies}$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 \\ &= 5\,759\,600 \end{aligned}$$

y se puede concluir que la explosión ocurrió en algún lugar sobre la rama derecha de la hipérbola dada por

$$\frac{x^2}{1\,210\,000} - \frac{y^2}{5\,759\,600} = 1.$$


Mary Evans Picture Library

CAROLINE HERSCHEL (1750-1848)

La primera mujer a la que se atribuyó haber detectado un nuevo cometa fue la astrónoma inglesa Caroline Herschel. Durante su vida, Caroline Herschel descubrió ocho cometas.

En el ejemplo 8, sólo se pudo determinar la hipérbola en la que ocurrió la explosión, pero no la localización exacta de la explosión. Sin embargo, si se hubiera recibido el sonido también en una tercera posición C, entonces se habrían determinado otras dos hipérbolas. La localización exacta de la explosión sería el punto en el que se cortan estas tres hipérbolas.

Otra aplicación interesante de las cónicas está relacionada con las órbitas de los cometas en nuestro sistema solar. De los 610 cometas identificados antes de 1970, 245 tienen órbitas elípticas, 295 tienen órbitas parabólicas y 70 tienen órbitas hiperbólicas. El centro del Sol es un foco de cada órbita, y cada órbita tiene un vértice en el punto en el que el cometa se encuentra más cerca del Sol. Sin lugar a dudas, aún no se identifican muchos cometas con órbitas parabólicas e hiperbólicas, ya que dichos cometas pasan una sola vez por nuestro sistema solar. Sólo los cometas con órbitas elípticas como la del cometa Halley permanecen en nuestro sistema solar.

El tipo de órbita de un cometa puede determinarse de la forma siguiente.

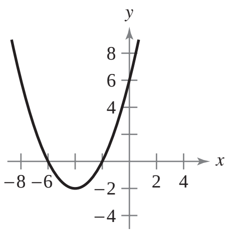
1. Elipse: $v < \sqrt{2GM/p}$
2. Parábola: $v = \sqrt{2GM/p}$
3. Hipérbola: $v > \sqrt{2GM/p}$

En estas tres fórmulas, p es la distancia entre un vértice y un foco de la órbita del cometa (en metros), v es la velocidad del cometa en el vértice (en metros por segundo), $M \approx 1.989 \times 10^{30}$ kilogramos es la masa del Sol y $G \approx 6.67 \times 10^{-8}$ metros cúbicos por kilogramo por segundo cuadrado es la constante de gravedad.

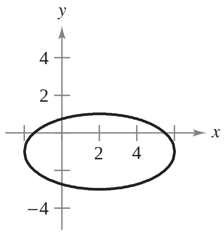
10.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, relacionar la ecuación con su gráfica. [Las gráficas están marcadas *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*), *g*) y *h*).]

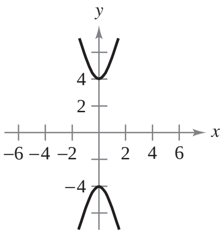
a)



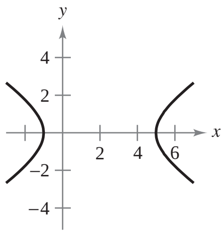
b)



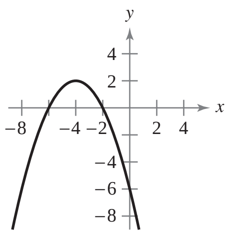
c)



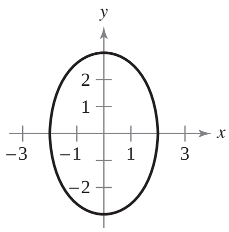
d)



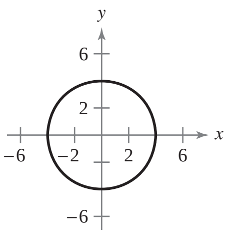
e)



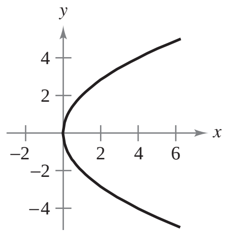
f)



g)



h)



1. $y^2 = 4x$

2. $(x + 4)^2 = 2(y + 2)$

3. $(x + 4)^2 = -2(y - 2)$

4. $\dfrac{(x - 2)^2}{16} + \dfrac{(y + 1)^2}{4} = 1$

5. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

6. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

7. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{1} = 1$

8. $\dfrac{(x - 2)^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

En los ejercicios 9 a 16, hallar el vértice, el foco y la directriz de la parábola, y trazar su gráfica.

9. $y^2 = -8x$

10. $x^2 + 6y = 0$

11. $(x + 5) + (y - 3)^2 = 0$

12. $(x - 6)^2 + 8(y + 7) = 0$

13. $y^2 - 4y - 4x = 0$

14. $y^2 + 6y + 8x + 25 = 0$

15. $x^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

16. $y^2 + 4y + 8x - 12 = 0$

En los ejercicios 17 a 20, hallar el vértice, el foco y la directriz de la parábola. Luego usar una herramienta de graficación para representar la parábola.

17. $y^2 + x + y = 0$

18. $y = -\frac{1}{6}(x^2 - 8x + 6)$

19. $y^2 - 4x - 4 = 0$

20. $x^2 - 2x + 8y + 9 = 0$

En los ejercicios 21 a 28, hallar una ecuación de la parábola.

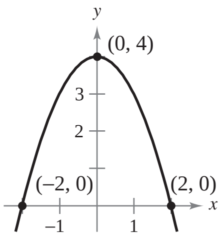
21. Vértice: $(5, 4)$
Foco: $(3, 4)$

22. Vértice: $(-2, 1)$
Foco: $(-2, -1)$

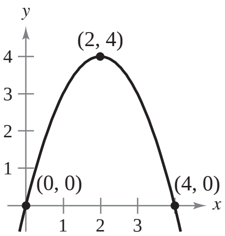
23. Vértice: $(0, 5)$
Directriz: $y = -3$

24. Foco: $(2, 2)$
Directriz: $x = -2$

25.



26.



27. El eje es paralelo al eje y; la gráfica pasa por $(0, 3)$, $(3, 4)$ y $(4, 11)$.

28. Directriz: $y = -2$; extremos del lado recto (*latus rectum*) son $(0, 2)$ y $(8, 2)$.

En los ejercicios 29 a 34, hallar el centro, el foco, el vértice y la excentricidad de la elipse y trazar su gráfica.

29. $16x^2 + y^2 = 16$

30. $3x^2 + 7y^2 = 63$

31. $\dfrac{(x - 3)^2}{16} + \dfrac{(y - 1)^2}{25} = 1$

32. $(x + 4)^2 + \dfrac{(y + 6)^2}{1/4} = 1$

33. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$

34. $16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y + 279 = 0$

En los ejercicios 35 a 38, hallar el centro, el foco y el vértice de la elipse. Con ayuda de una herramienta de graficación representar la elipse.

35. $12x^2 + 20y^2 - 12x + 40y - 37 = 0$

36. $36x^2 + 9y^2 + 48x - 36y + 43 = 0$

37. $x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 0.25 = 0$

38. $2x^2 + y^2 + 4.8x - 6.4y + 3.12 = 0$

En los ejercicios 39 a 44, hallar una ecuación de la elipse.

39. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(5, 0)$
Vértice: $(6, 0)$

40. Vértices: $(0, 3)$, $(8, 3)$
Excentricidad: $\frac{3}{4}$

41. Vértices: $(3, 1)$, $(3, 9)$
Longitud del eje menor: 6

42. Foco: $(0, \pm 9)$
Longitud del eje mayor: 22

43. Centro: $(0, 0)$
Eje mayor: horizontal
Puntos en la elipse:
$(3, 1)$, $(4, 0)$

44. Centro: $(1, 2)$
Eje mayor: vertical
Puntos en la elipse:
$(1, 6)$, $(3, 2)$

En los ejercicios 45 a 52, hallar el centro, el foco y el vértice de la hipérbola, y trazar su gráfica usando las asíntotas como ayuda.

45. $y^2 - \dfrac{x^2}{9} = 1$

46. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

47. $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{1} = 1$

48. $\dfrac{(y+3)^2}{225} - \dfrac{(x-5)^2}{64} = 1$

49. $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$

50. $y^2 - 16x^2 + 64x - 208 = 0$

51. $x^2 - 9y^2 + 2x - 54y - 80 = 0$

52. $9x^2 - 4y^2 + 54x + 8y + 78 = 0$

En los ejercicios 53 a 56, hallar el centro, el foco y el vértice de la hipérbola. Trazar la hipérbola y sus asíntotas con ayuda de una herramienta de graficación.

53. $9y^2 - x^2 + 2x + 54y + 62 = 0$

54. $9x^2 - y^2 + 54x + 10y + 55 = 0$

55. $3x^2 - 2y^2 - 6x - 12y - 27 = 0$

56. $3y^2 - x^2 + 6x - 12y = 0$

En los ejercicios 57 a 64, hallar una ecuación de la hipérbola.

57. Vértice: $(\pm 1, 0)$
Asíntota: $y = \pm 5x$

58. Vértice: $(0, \pm 4)$
Asíntota: $y = \pm 2x$

59. Vértice: $(2, \pm 3)$
Punto de una gráfica: $(0, 5)$

60. Vértice: $(2, \pm 3)$
Foco: $(2, \pm 5)$

61. Centro: $(0, 0)$
Vértice: $(0, 2)$
Foco: $(0, 4)$

62. Centro: $(0, 0)$
Vértice: $(6, 0)$
Foco: $(10, 0)$

63. Vértices: $(0, 2), (6, 2)$
Asíntota: $y = \frac{2}{3}x$
$y = 4 - \frac{2}{3}x$

64. Foco: $(20, 0)$
Asíntota: $y = \pm\frac{3}{4}x$

En los ejercicios 65 y 66, hallar ecuaciones de *a*) las rectas tangentes y *b*) las rectas normales a la hipérbola para el valor dado de *x*.

65. $\dfrac{x^2}{9} - y^2 = 1, \quad x = 6$

66. $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{2} = 1, \quad x = 4$

En los ejercicios 67 a 76, clasificar la gráfica de la ecuación como circunferencia, parábola, elipse o hipérbola.

67. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

68. $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$

69. $y^2 - 8y - 8x = 0$

70. $25x^2 - 10x - 200y - 119 = 0$

71. $4x^2 + 4y^2 - 16y + 15 = 0$

72. $y^2 - 4y = x + 5$

73. $9x^2 + 9y^2 - 36x + 6y + 34 = 0$

74. $2x(x - y) = y(3 - y - 2x)$

75. $3(x - 1)^2 = 6 + 2(y + 1)^2$

76. $9(x + 3)^2 = 36 - 4(y - 2)^2$

Desarrollo de conceptos

77. *a*) Dar la definición de parábola.
b) Dar las formas estándar o canónicas de una parábola con vértice en (h, k).
c) Expresar, con sus propias palabras, la propiedad de reflexión de una parábola.

78. *a*) Dar la definición de elipse.
b) Dar las formas estándar o canónicas de una elipse con centro en (h, k).

79. *a*) Dar la definición de hipérbola.
b) Dar las formas estándar o canónicas de una hipérbola con centro en (h, k).
c) Dar las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola.

80. Definir la excentricidad de una elipse. Describir, con sus propias palabras, cómo afectan a la elipse las variaciones en la excentricidad.

81. ***Recolector o panel de energía solar*** Un recolector o panel de energía solar para calentar agua se construye con una hoja de acero inoxidable en forma de parábola (ver la figura). El agua fluye a través de un tubo situado en el foco de la parábola. ¿A qué distancia del vértice se encuentra el tubo?

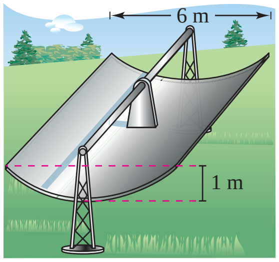
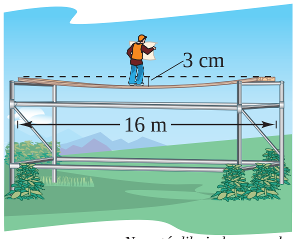


Figura para 81



No está dibujado a escala

Figura para 82

82. ***Deformación de una viga*** Una viga de 16 metros de longitud soporta una carga que se concentra en el centro (ver la figura). La viga se deforma en la parte central 3 centímetros. Suponer que, al deformarse, la viga adquiere la forma de una parábola.

a) Encontrar una ecuación de la parábola. (Suponer que el origen está en el centro de la parábola.)

b) ¿A qué distancia del centro de la viga es de 1 centímetro la deformación producida?

83. Hallar una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = ax^2$ en $x = x_0$. Demostrar que la intersección de esta recta tangente con el eje x es $(x_0/2, 0)$.

84. *a*) Demostrar que dos rectas tangentes distintas cualesquiera a una parábola se cortan o intersecan.
b) Ilustrar el resultado del inciso *a*) hallando el punto de intersección de las rectas tangentes a la parábola $x^2 - 4x - 4y = 0$ en los puntos $(0, 0)$ y $(6, 3)$.

85. *a*) Demostrar que si dos rectas tangentes a una parábola se cortan o intersecan en ángulos rectos, su punto de intersección debe estar en la directriz.
b) Ilustrar el resultado del inciso *a*) probando que las rectas tangentes a la parábola $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ en los puntos $(-2, 5)$ y $\left(3, \frac{5}{4}\right)$ se cortan en ángulo recto y que el punto de intersección se encuentra en la directriz.

86. Sobre la gráfica de $x^2 = 8y$ hallar el punto más cercano al foco de la parábola.

87. ***Recepción de radio y televisión*** En las áreas montañosas, la recepción de radio y televisión suele ser deficiente. Considerar un caso idealizado en el que la gráfica de la parábola $y = x - x^2$ representa una colina, en el punto $(-1, 1)$ se localiza un transmisor, y al otro lado de la colina, en el punto $(x_0, 0)$, se encuentra un receptor. ¿Qué tan cerca de la colina puede ubicarse el receptor para que la señal no se obstruya?

88. ***Modelo matemático*** La tabla siguiente muestra las cantidades promedio A de tiempo (en minutos) por día que las mujeres dedicaron a ver la televisión de 1999 a 2005. (*Fuente: Nielsen Media Research*)

Añ	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
A	280	286	291	298	305	307	317

a) Emplear las funciones de regresión de una herramienta de graficación para hallar un modelo de la forma $A = at^2 + bt + c$ para los datos, donde t represente el año y $t = 9$ corresponda a 1999.

b) Emplear una herramienta de graficación para representar los datos y la gráfica del modelo.

c) Hallar dA/dt y dibujar su gráfica para $9 \leq t \leq 15$. ¿Qué información acerca de la cantidad promedio de tiempo que las mujeres dedicaron a ver televisión proporciona la gráfica de la derivada?

89. ***Arquitectura*** El ventanal de una iglesia está limitado en la parte superior por una parábola, y en la parte inferior por el arco de una circunferencia (ver la figura). Hallar el área de la superficie del ventanal.

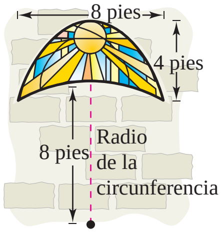


Figura para 89

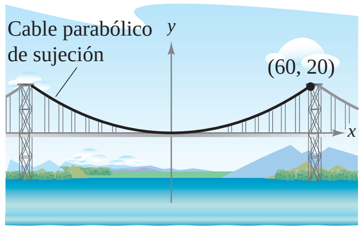


Figura para 91

90. ***Longitud de arco*** Hallar la longitud de arco de la parábola $4x - y^2 = 0$ en el intervalo $0 \leq y \leq 4$.

91. ***Diseño de un puente*** El cable de un puente colgante está suspendido (formando una parábola) de dos torres a 120 metros una de la otra y a 20 metros de altura sobre la autopista. Los cables tocan la autopista en el punto medio entre ambas torres.

a) Hallar la ecuación para la forma parabólica de cada cable.

b) Hallar la longitud del cable parabólico de suspensión.

92. ***Área de una superficie*** Un receptor de una antena satelital se forma por revolución alrededor del eje y de la parábola $x^2 = 20y$. El radio del plato es r pies. Verificar que el área de la superficie del plato está dada por

$$2\pi\int_0^r x\sqrt{1 + \left(\frac{x}{10}\right)^2}\, dx = \frac{\pi}{15}[(100 + r^2)^{3/2} - 1\,000].$$

93. ***Investigación*** En el mismo eje de coordenadas trazar las gráficas de $x^2 = 4py$ con $p = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ y 2. Analizar la variación que se presenta en las gráficas a medida que p aumenta.

94. ***Área*** Hallar una fórmula para el área de la región sombreada de la figura.

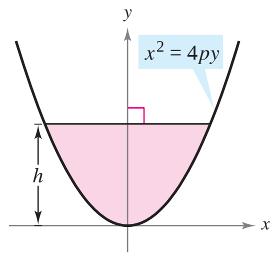


Figura para 94

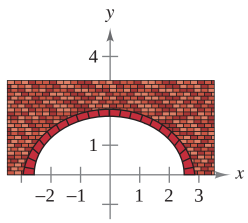


Figura para 96

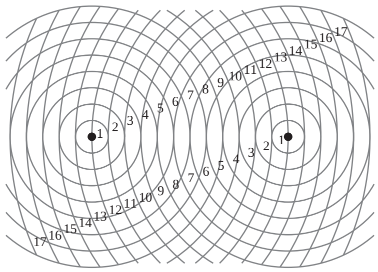
95. ***Redacción*** En la página 699 se señaló que se puede trazar una elipse usando dos alfileres, una cuerda de longitud fija (mayor a la distancia entre los dos alfileres) y un lápiz. Si los extremos de la cuerda se sujetan a los alfileres y se tensa la cuerda con el lápiz, la trayectoria que recorre el lápiz es una elipse.

a) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en términos de a?

b) Explicar por qué la trayectoria trazada por el lápiz es una elipse.

96. ***Construcción de un arco semielíptico*** Se va a construir el arco de una chimenea en forma de una semielipse. El claro debe tener 2 pies de altura en el centro y 5 pies de ancho en la base (ver la figura). El constructor bosqueja el perfil de la elipse siguiendo el método mostrado en el ejercicio 95. ¿Dónde deben colocarse los alfileres y cuál debe ser la longitud del trozo de cuerda?

97. Trazar la elipse que consta de todos los puntos (x, y) tales que la suma de las distancias entre (x, y) y dos puntos fijos es 16 unidades, y los focos se localizan en los centros de los dos conjuntos de circunferencias concéntricas que se muestran en la figura.



98. ***Órbita de la Tierra*** La Tierra se mueve en una órbita elíptica con el Sol en uno de los focos. La longitud de la mitad del eje mayor es 149 598 000 kilómetros y la excentricidad es 0.0167. Hallar la distancia mínima (*perihelio*) y la distancia máxima (*afelio*) entre la Tierra y el Sol.

99. ***Órbita de un satélite*** El *apogeo* (el punto de la órbita más lejano a la Tierra) y el *perigeo* (el punto de la órbita más cercano a la Tierra) de la órbita elíptica de un satélite de la Tierra están dados por A y P. Mostrar que la excentricidad de la órbita es

$$e = \frac{A - P}{A + P}.$$

100. ***Explorer 18*** El 27 de noviembre de 1963, Estados Unidos lanzó el Explorer 18. Sus puntos bajo y alto sobre la superficie de la Tierra fueron 119 millas y 123 000 millas, respectivamente. Hallar la excentricidad de su órbita elíptica.

101. ***Explorer 55*** El 20 de noviembre de 1975, Estados Unidos lanzó el satélite de investigación Explorer 55. Sus puntos bajo y alto sobre la superficie de la Tierra fueron de 96 millas y 1 865 millas. Encontrar la excentricidad de su órbita elíptica.

Para discusión

102. Considerar la ecuación

$$9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0.$$

a) Clasificar la gráfica de la ecuación como un círculo, una parábola, una elipse o una hipérbola.

b) Cambiar el término $4y^2$ en la ecuación por $-4y^2$. Clasificar la gráfica de la nueva ecuación.

c) Cambiar el término $9x^2$ en la ecuación original por $4x^2$. Clasificar la gráfica de la nueva ecuación.

d) Describir una manera en que se podría cambiar la ecuación original para que su gráfica fuera una parábola.

103. ***El cometa Halley*** Quizás el más conocido de todos los cometas, el cometa Halley, tiene una órbita elíptica con el Sol en uno de sus focos. Se estima que su distancia máxima al Sol es de 35.29 UA (unidad astronómica $\approx 92.956 \times 10^6$ millas) y que su distancia mínima es de 0.59 UA. Hallar la excentricidad de la órbita.

104. La ecuación de una elipse con centro en el origen puede expresarse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

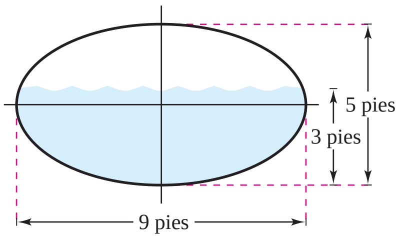
Mostrar que cuando $e \to 0$, y a permanece constante, la elipse se aproxima a una circunferencia.

105. Considerar una partícula que se mueve en el sentido de las manecillas del reloj siguiendo la trayectoria elíptica

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

La partícula abandona la órbita en el punto $(-8, 3)$ y viaja a lo largo de una recta tangente a la elipse. ¿En qué punto cruzará la partícula el eje y?

106. ***Volumen*** El tanque de agua de un carro de bomberos mide 16 pies de largo, y sus secciones transversales son elipses. Hallar el volumen de agua que hay en el tanque cuando está parcialmente lleno como se muestra en la figura.



En los ejercicios 107 y 108, determinar los puntos en los que *dy/dx* es cero, o no existe, para localizar los extremos de los ejes mayor y menor de la elipse.

107. $16x^2 + 9y^2 + 96x + 36y + 36 = 0$

108. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$

Área y volumen **En los ejercicios 109 y 110, hallar *a*) el área de la región limitada por la elipse, *b*) el volumen y el área de la superficie del sólido generado por revolución de la región alrededor de su eje mayor (esferoide prolato), y *c*) el volumen y el área de la superficie del sólido generado por revolución de la región alrededor de su eje menor (esferoide oblato).**

109. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

110. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

111. ***Longitud de arco*** Usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar, con una precisión de dos cifras decimales, la integral elíptica que representa el perímetro de la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

112. Probar el teorema 10.4 mostrando que la recta tangente a una elipse en un punto P forma ángulos iguales con las rectas a través de P y de los focos (ver la figura). [*Sugerencia:* 1) encontrar la pendiente de la recta tangente en P, 2) encontrar las tangentes de las rectas a través de P y cada uno de los focos y 3) usar la fórmula de la tangente del ángulo entre dos rectas.]

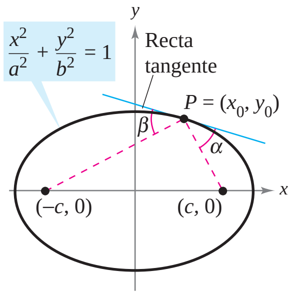


Figura para 112

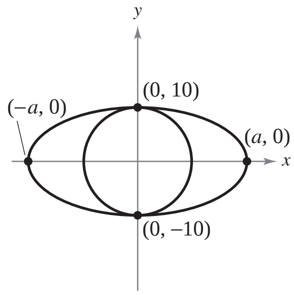


Figura para 113

113. ***Geometría*** El área de la elipse presentada en la figura es el doble del área del círculo. ¿Qué longitud tiene el eje mayor?

114. ***Conjetura***

a) Mostrar que la ecuación de una elipse puede expresarse como

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$$

b) Mediante una herramienta de graficación, representar la elipse

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{4(1-e^2)} = 1$$

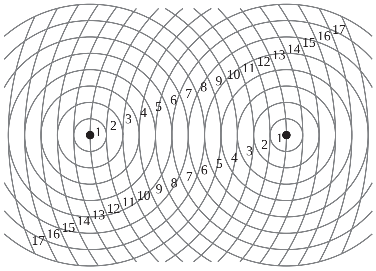
para $e = 0.95$, $e = 0.75$, $e = 0.5$, $e = 0.25$ y $e = 0$.

c) Usar los resultados del inciso *b*) para hacer una conjetura acerca de la variación en la forma de la elipse a medida que e se aproxima a 0.

115. Hallar una ecuación de la hipérbola tal que, para todo punto, la diferencia entre sus distancias a los puntos (2, 2) y (10, 2) sea 6.

116. Hallar una ecuación de la hipérbola tal que, para todo punto, la diferencia entre sus distancias a los puntos $(-3, 0)$ y $(-3, 3)$ sea 2.

117. Dibujar la hipérbola que consta de todos los puntos (x, y) tales que la diferencia de las distancias entre (x, y) y dos puntos fijos sea 10 unidades, y los focos se localicen en los centros de los dos conjuntos de circunferencias concéntricas de la figura.



118. Considerar una hipérbola centrada en el origen y con eje transversal horizontal. Emplear la definición de hipérbola para obtener su forma canónica o estándar:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

119. ***Localización del sonido*** Con un rifle posicionado en el punto $(-c, 0)$ se dispara al blanco que se encuentra en el punto $(c, 0)$. Una persona escucha al mismo tiempo el disparo del rifle y el impacto de la bala en el blanco. Demostrar que la persona se encuentra en una de las ramas de la hipérbola dada por

$$\frac{x^2}{c^2 v_s^2/v_m^2} - \frac{y^2}{c^2(v_m^2 - v_s^2)/v_m^2} = 1$$

donde v_m es la velocidad inicial de la bala y v_s es la velocidad del sonido, la cual es aproximadamente 1 100 pies por segundo.

120. ***Navegación*** El sistema LORAN (*long distance radio navigation*) para aviones y barcos usa pulsos sincronizados emitidos por estaciones de transmisión muy alejadas una de la otra. Estos pulsos viajan a la velocidad de la luz (186 000 millas por segundo). La diferencia en los tiempos de llegada de estos pulsos a un avión o a un barco es constante en una hipérbola que tiene como focos las estaciones transmisoras. Suponer que las dos estaciones, separadas a 300 millas una de la otra, están situadas en el sistema de coordenadas rectangulares en $(-150, 0)$ y $(150, 0)$ y que un barco sigue la trayectoria que describen las coordenadas $(x, 75)$. (Ver la figura.) Hallar la coordenada x de la posición del barco si la diferencia de tiempo entre los pulsos de las estaciones transmisoras es 1 000 microsegundos (0.001 segundo).

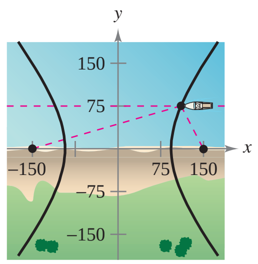


Figura para 120

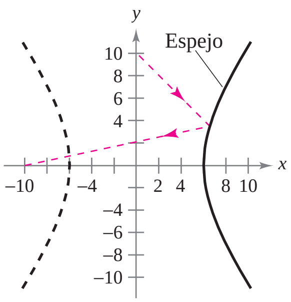


Figura para 121

121. ***Espejo hiperbólico*** Un espejo hiperbólico (como los que usan algunos telescopios) tiene la propiedad de que un rayo de luz dirigido a uno de los focos se refleja al otro foco. El espejo que muestra la figura se describe mediante la ecuación $(x^2/36) - (y^2/64) = 1$. ¿En qué punto del espejo se reflejará la luz procedente del punto $(0, 10)$ al otro foco?

122. Mostrar que la ecuación de la recta tangente a $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) es $(x_0/a^2)x - (y_0/b^2)y = 1$.

123. Mostrar que las gráficas de las ecuaciones se cortan en ángulos rectos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{2y^2}{b^2} = 1.$$

124. Demostrar que la gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una de las siguientes cónicas (excepto en los casos degenerados).

	Cónica	*Condición*
a)	Círculo	$A = C$
b)	Parábola	$A = 0$ o $C = 0$ (pero no ambas)
c)	Elipse	$AC > 0$
d)	Hipérbola	$AC < 0$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 125 a 130, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

125. Es posible que una parábola corte a su directriz.

126. En una parábola, el punto más cercano al foco es el vértice.

127. Si C es el perímetro de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b < a$$

entonces $2\pi b \le C \le 2\pi a$.

128. Si $D \neq 0$ o $E \neq 0$, entonces la gráfica de $y^2 - x^2 + Dx + Ey = 0$ es una hipérbola.

129. Si las asíntotas de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ se cortan o intersecan en ángulos rectos, entonces $a = b$.

130. Toda recta tangente a una hipérbola sólo corta o interseca a la hipérbola en el punto de tangencia.

Preparación del examen Putnam

131. Dado un punto P de una elipse, sea d la distancia del centro de la elipse a la recta tangente a la elipse en P. Demostrar que $(PF_1)(PF_2)d^2$ es constante mientras P varía en la elipse, donde PF_1 y PF_2 son las distancias de P a los focos F_1 y F_2 de la elipse.

132. Hallar el valor mínimo de $(u - v)^2 + \left(\sqrt{2 - u^2} - \dfrac{9}{v}\right)^2$ con $0 < u < \sqrt{2}$ y $v > 0$.

10.2 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

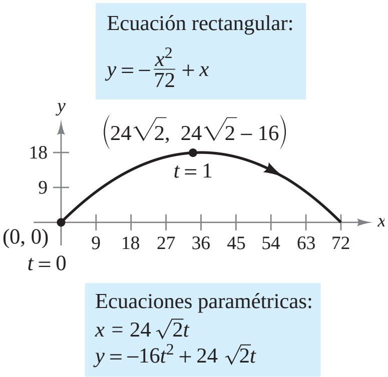
- **Trazar la gráfica de una curva dada por un conjunto de ecuaciones paramétricas.**
- **Eliminar el parámetro en un conjunto de ecuaciones paramétricas.**
- **Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar una curva.**
- **Entender dos problemas clásicos del cálculo: el problema de la tautocrona y el problema de la braquistocrona.**

Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Hasta ahora, se ha representado una gráfica mediante una sola ecuación con *dos* variables. En esta sección se estudiarán situaciones en las que se emplean *tres* variables para representar una curva en el plano.

Considérese la trayectoria que recorre un objeto lanzado al aire con un ángulo de 45°. Si la velocidad inicial del objeto es 48 pies por segundo, el objeto recorre la trayectoria parabólica dada por

$$y = -\frac{x^2}{72} + x \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$



Movimiento curvilíneo: dos variables de posición y una de tiempo
Figura 10.19

como se muestra en la figura 10.19. Sin embargo, esta ecuación no proporciona toda la información. Si bien dice dónde *se encuentra* el objeto, no dice *cuándo se encuentra* en un punto dado (x, y). Para determinar este instante, se introduce una tercera variable t, conocida como **parámetro**. Expresando x y y como funciones de t, se obtienen las **ecuaciones paramétricas**

$$x = 24\sqrt{2}\,t \qquad \text{Ecuación paramétrica para } x.$$

y

$$y = -16t^2 + 24\sqrt{2}\,t. \qquad \text{Ecuación paramétrica para } y.$$

A partir de este conjunto de ecuaciones, se puede determinar que en el instante $t = 0$, el objeto se encuentra en el punto $(0, 0)$. De manera semejante, en el instante $t = 1$, el objeto está en el punto $(24\sqrt{2}, 24\sqrt{2} - 16)$, y así sucesivamente. (Más adelante, en la sección 12.3, se estudiará un método para determinar este conjunto particular de ecuaciones paramétricas, las ecuaciones de movimiento.)

En este problema particular de movimiento, x y y son funciones continuas de t, y a la trayectoria resultante se le conoce como **curva plana**.

DEFINICIÓN DE UNA CURVA PLANA

Si f y g son funciones continuas de t en un intervalo I, entonces a las ecuaciones

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t)$$

se les llama **ecuaciones paramétricas** y a t se le llama el **parámetro**. Al conjunto de puntos (x, y) que se obtiene cuando t varía sobre el intervalo I se le llama la **gráfica** de las ecuaciones paramétricas. A las ecuaciones paramétricas y a la gráfica, juntas, es a lo que se llama una **curva plana**, que se denota por C.

NOTA Algunas veces es importante distinguir entre una gráfica (conjunto de puntos) y una curva (los puntos junto con las ecuaciones paramétricas que los definen). Cuando sea importante hacer esta distinción, se hará de manera explícita. Cuando no sea importante se empleará C para representar la gráfica o la curva, indistintamente. ■

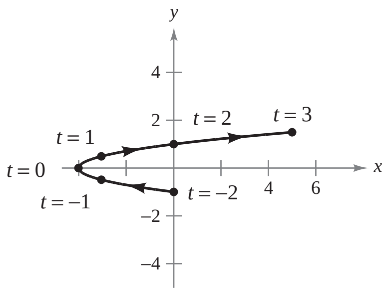
Cuando se dibuja (a mano) una curva dada por un conjunto de ecuaciones paramétricas, se trazan puntos en el plano xy. Cada conjunto de coordenadas (x, y) está determinado por un valor elegido para el parámetro t. Al trazar los puntos resultantes de valores crecientes de t, la curva se va trazando en una dirección específica. A esto se le llama la **orientación** de la curva.

EJEMPLO 1 Trazado de una curva

Trazar la curva dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 4 \quad \text{y} \quad y = \frac{t}{2}, \quad -2 \le t \le 3.$$

Solución Para valores de t en el intervalo dado, se obtienen, a partir de las ecuaciones paramétricas, los puntos (x, y) que se muestran en la tabla.



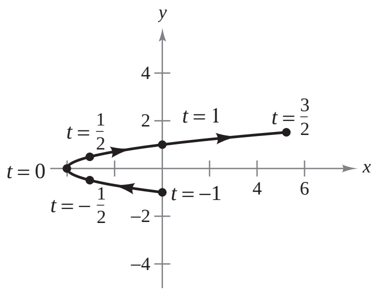
Ecuaciones paramétricas:
$x = t^2 - 4$ y $y = \frac{t}{2}$, $-2 \le t \le 3$

Figura 10.20

t	-2	-1	0	1	2	3
x	0	-3	-4	-3	0	5
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

Al trazar estos puntos en orden de valores crecientes de t y usando la continuidad de f y de g se obtiene la curva C que se muestra en la figura 10.20. Hay que observar las flechas sobre la curva que indican su orientación conforme t aumenta de -2 a 3.

NOTA De acuerdo con el criterio de la recta vertical, puede verse que la gráfica mostrada en la figura 10.20 no define y en función de x. Esto pone de manifiesto una ventaja de las ecuaciones paramétricas: pueden emplearse para representar gráficas más generales que las gráficas de funciones. ■



Ecuaciones paramétricas:
$x = 4t^2 - 4$ y $y = t$, $-1 \le t \le \frac{3}{2}$

Figura 10.21

A menudo ocurre que dos conjuntos distintos de ecuaciones paramétricas tienen la misma gráfica. Por ejemplo, el conjunto de ecuaciones paramétricas

$$x = 4t^2 - 4 \quad \text{y} \quad y = t, \quad -1 \le t \le \frac{3}{2}$$

tiene la misma gráfica que el conjunto dado en el ejemplo 1 (ver la figura 10.21). Sin embargo, al comparar los valores de t en las figuras 10.20 y 10.21, se ve que la segunda gráfica se traza con mayor *rapidez* (considerando t como tiempo) que la primera gráfica. Por tanto, en las aplicaciones, pueden emplearse distintas ecuaciones paramétricas para representar las diversas *velocidades* a las que los objetos recorren una trayectoria determinada.

TECNOLOGÍA La mayoría de las herramientas de graficación cuenta con un modo *paramétrico* de graficación. Se puede emplear uno de estos dispositivos para confirmar las gráficas mostradas en las figuras 10.20 y 10.21. ¿Representa la curva dada por

$$x = 4t^2 - 8t \quad \text{y} \quad y = 1 - t, \quad -\tfrac{1}{2} \le t \le 2$$

la misma gráfica que la mostrada en las figuras 10.20 y 10.21? ¿Qué se observa respecto a la *orientación* de esta curva?

Eliminación del parámetro

A encontrar la ecuación rectangular que representa la gráfica de un conjunto de ecuaciones paramétricas se le llama **eliminación del parámetro**. Por ejemplo, el parámetro del conjunto de ecuaciones paramétricas del ejemplo 1 se puede eliminar como sigue.

Ecuaciones paramétricas	⇨	Despejar *t* de una de las ecuaciones	⇨	Sustituir en la otra ecuación	⇨	Ecuación rectangular
$x = t^2 - 4$ $y = t/2$		$t = 2y$		$x = (2y)^2 - 4$		$x = 4y^2 - 4$

Una vez eliminado el parámetro, se ve que la ecuación $x = 4y^2 - 4$ representa una parábola con un eje horizontal y vértice en $(-4, 0)$, como se ilustra en la figura 10.20.

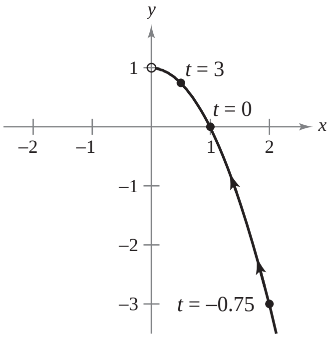
El rango de x y y implicado por las ecuaciones paramétricas puede alterarse al pasar a la forma rectangular. En esos casos, el dominio de la ecuación rectangular debe ajustarse de manera que su gráfica coincida con la gráfica de las ecuaciones paramétricas. En el ejemplo siguiente se muestra esta situación.

EJEMPLO 2 Ajustar el dominio después de la eliminación del parámetro

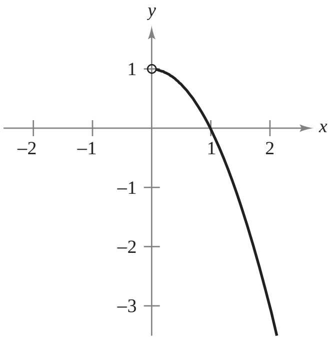
Dibujar la curva representada por las ecuaciones

$$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \quad \text{y} \quad y = \frac{t}{t+1}, \quad t > -1$$

eliminando el parámetro y ajustando el dominio de la ecuación rectangular resultante.



Ecuaciones paramétricas:
$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}}, \; y = \frac{t}{t+1}, \; t > -1$



Ecuación rectangular:
$y = 1 - x^2, \; x > 0$

Figura 10.22

Solución Para empezar se despeja t de una de las ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, se puede despejar t de la primera ecuación.

$$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \qquad \text{Ecuación paramétrica para } x.$$

$$x^2 = \frac{1}{t+1} \qquad \text{Elevar al cuadrado cada lado.}$$

$$t + 1 = \frac{1}{x^2}$$

$$t = \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1 - x^2}{x^2} \qquad \text{Despejar } t.$$

Sustituyendo ahora, en la ecuación paramétrica para y, se obtiene

$$y = \frac{t}{t+1} \qquad \text{Ecuación paramétrica para } y.$$

$$y = \frac{(1 - x^2)/x^2}{[(1 - x^2)/x^2] + 1} \qquad \text{Sustitución de } t \text{ por } (1 - x^2)/x^2.$$

$$y = 1 - x^2. \qquad \text{Simplificar.}$$

La ecuación rectangular, $y = 1 - x^2$, está definida para todos los valores de x. Sin embargo, en la ecuación paramétrica para x se ve que la curva sólo está definida para $t > -1$. Esto implica que el dominio de x debe restringirse a valores positivos, como se ilustra en la figura 10.22.

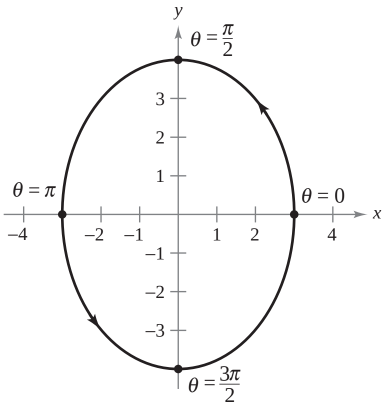
En un conjunto de ecuaciones paramétricas, el parámetro no necesariamente representa el tiempo. El siguiente ejemplo emplea un *ángulo* como parámetro.

EJEMPLO 3 Emplear trigonometría para eliminar un parámetro

Dibujar la curva representada por

$$x = 3\cos\theta \quad \text{y} \quad y = 4\,\text{sen}\,\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

al eliminar el parámetro y hallar la ecuación rectangular correspondiente.



Ecuaciones paramétricas:
$x = 3\cos\theta,\ y = 4\,\text{sen}\,\theta$
Ecuación rectangular:
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Figura 10.23

Solución Para empezar se despejan $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$ de las ecuaciones dadas.

$$\cos\theta = \frac{x}{3} \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{4} \qquad \text{Despejar } \cos\theta \text{ y sen } \theta.$$

A continuación, se hace uso de la identidad $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ para formar una ecuación en la que sólo aparezcan x y y.

$$\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 \qquad \text{Identidad trigonométrica.}$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \qquad \text{Sustituir.}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

En esta ecuación rectangular, puede verse que la gráfica es una elipse centrada en $(0, 0)$, con vértices en $(0, 4)$ y $(0, -4)$ y eje menor de longitud $2b = 6$, como se muestra en la figura 10.23. Obsérvese que la elipse está trazada *en sentido contrario al de las manecillas del reloj* ya que θ va de 0 a 2π.

El empleo de la técnica presentada en el ejemplo 3 permite concluir que la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = h + a\cos\theta \quad \text{y} \quad y = k + b\,\text{sen}\,\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

es una elipse (trazada en sentido contrario al de las manecillas del reloj) dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

La gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = h + a\,\text{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad y = k + b\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

también es una elipse (trazada en sentido de las manecillas del reloj) dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Emplear una herramienta de graficación en modo *paramétrico* para elaborar las gráficas de varias elipses.

En los ejemplos 2 y 3 es importante notar que la eliminación del parámetro es principalmente una *ayuda para trazar la curva*. Si las ecuaciones paramétricas representan la trayectoria de un objeto en movimiento, la gráfica sola no es suficiente para describir el movimiento del objeto. Se necesitan las ecuaciones paramétricas que informan sobre la *posición*, *dirección* y *velocidad*, en un instante determinado.

Hallar ecuaciones paramétricas

Los primeros tres ejemplos de esta sección ilustran técnicas para dibujar la gráfica que representa un conjunto de ecuaciones paramétricas. Ahora se investigará el problema inverso. ¿Cómo determinar un conjunto de ecuaciones paramétricas para una gráfica o una descripción física dada? Por el ejemplo 1 ya se sabe que tal representación no es única. Esto se demuestra más ampliamente en el ejemplo siguiente, en el que se encuentran dos representaciones paramétricas diferentes para una gráfica dada.

EJEMPLO 4 Hallar las ecuaciones paramétricas para una gráfica dada

Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar la gráfica de $y = 1 - x^2$, usando cada uno de los parámetros siguientes.

a) $t = x$ ***b)*** La pendiente $m = \dfrac{dy}{dx}$ en el punto (x, y)

Solución

a) Haciendo $x = t$ se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = t \quad \text{y} \quad y = 1 - x^2 = 1 - t^2.$$

b) Para expresar x y y en términos del parámetro m, se puede proceder como sigue.

$$m = \frac{dy}{dx} = -2x \qquad \text{Derivada de } y = 1 - x^2.$$

$$x = -\frac{m}{2} \qquad \text{Despejar } x.$$

Con esto se obtiene una ecuación paramétrica para x. Para obtener una ecuación paramétrica para y, en la ecuación original se sustituye x por $-m/2$.

$$y = 1 - x^2 \qquad \text{Escribir la ecuación rectangular original.}$$

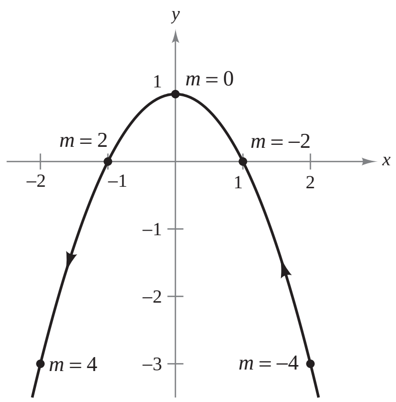
$$y = 1 - \left(-\frac{m}{2}\right)^2 \qquad \text{Sustitución de } x \text{ por } -m/2.$$

$$y = 1 - \frac{m^2}{4} \qquad \text{Simplificación.}$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas son

$$x = -\frac{m}{2} \quad \text{y} \quad y = 1 - \frac{m^2}{4}.$$

En la figura 10.24 obsérvese que la orientación de la curva resultante es de derecha a izquierda, determinada por la dirección de los valores crecientes de la pendiente m. En el inciso *a*), la curva tenía la orientación opuesta.



Ecuación rectangular: $y = 1 - x^2$
Ecuaciones paramétricas:
$x = -\frac{m}{2}, y = 1 - \frac{m^2}{4}$

Figura 10.24

TECNOLOGÍA Para usar de manera eficiente una herramienta de graficación es importante desarrollar la destreza de representar una gráfica mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas. La razón es que muchas herramientas de graficación sólo tienen tres modos de graficación: 1) funciones, 2) ecuaciones paramétricas y 3) ecuaciones polares. La mayor parte de las herramientas de graficación no están programadas para elaborar la gráfica de una ecuación general. Supóngase, por ejemplo, que se quiere elaborar la gráfica de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Para hacer la gráfica de la hipérbola en el modo *función*, se necesitan dos ecuaciones: $y = \sqrt{x^2 - 1}$ y $y = -\sqrt{x^2 - 1}$. En el modo *paramétrico*, la gráfica puede representarse mediante $x = \sec t$ y $y = \tan t$.

CICLOIDES

Galileo fue el primero en llamar la atención hacia la cicloide, recomendando que se empleara en los arcos de los puentes. En cierta ocasión, Pascal pasó ocho días tratando de resolver muchos de los problemas de las cicloides, problemas como encontrar el área bajo un arco y el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la curva sobre una recta. La cicloide tiene tantas propiedades interesantes y ha generado tantas disputas entre los matemáticos que se le ha llamado "la Helena de la geometría" y "la manzana de la discordia".

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para más información acerca de las cicloides, consultar el artículo "The Geometry of Rolling Curves" de John Bloom y Lee Whitt en *The American Mathematical Monthly*.

EJEMPLO 5 Ecuaciones paramétricas de una cicloide

Determinar la curva descrita por un punto P en la circunferencia de un círculo de radio a que rueda a lo largo de una recta en el plano. A estas curvas se les llama **cicloides**.

Solución Sea θ el parámetro que mide la rotación del círculo y supóngase que al inicio el punto $P = (x, y)$ se encuentra en el origen. Cuando $\theta = 0$, P se encuentra en el origen. Cuando $\theta = \pi$, P está en un punto máximo $(\pi a, 2a)$. Cuando $\theta = 2\pi$, P vuelve al eje x en $(2\pi a, 0)$. En la figura 10.25 se ve que $\angle APC = 180° - \theta$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}(\angle APC) = \frac{AC}{a} = \frac{BD}{a}$$

$$\cos\theta = -\cos(180° - \theta) = -\cos(\angle APC) = \frac{AP}{-a}$$

lo cual implica que $AP = -a\cos\theta$ y $BD = a\operatorname{sen}\theta$.

Como el círculo rueda a lo largo del eje x, se sabe que $OD = \widehat{PD} = a\theta$. Además, como $BA = DC = a$, se tiene

$$x = OD - BD = a\theta - a\operatorname{sen}\theta$$
$$y = BA + AP = a - a\cos\theta.$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas son $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$ y $y = a(1 - \cos\theta)$.

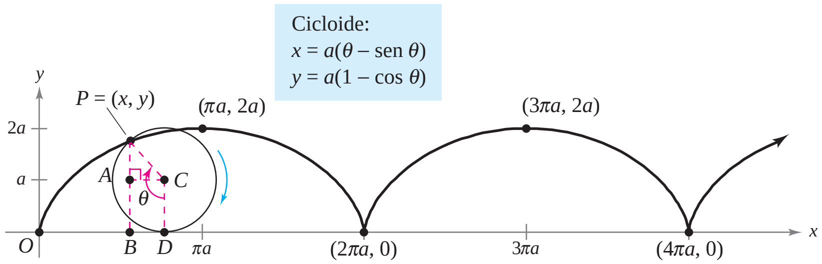


Figura 10.25

TECNOLOGÍA Algunas herramientas de graficación permiten simular el movimiento de un objeto que se mueve en el plano o en el espacio. Se recomienda usar una de estas herramientas para trazar la trayectoria de la cicloide que se muestra en la figura 10.25.

La cicloide de la figura 10.25 tiene esquinas agudas en los valores $x = 2n\pi a$. Obsérvese que las derivadas $x'(\theta)$ y $y'(\theta)$ son ambas cero en los puntos en los que $\theta = 2n\pi$.

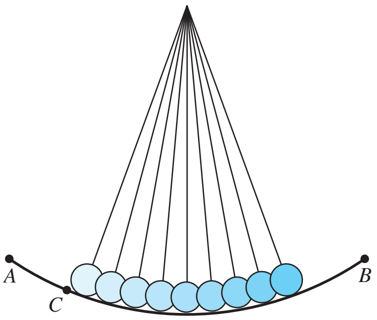
$$\begin{aligned} x(\theta) &= a(\theta - \operatorname{sen}\theta) & \qquad y(\theta) &= a(1 - \cos\theta) \\ x'(\theta) &= a - a\cos\theta & y'(\theta) &= a\operatorname{sen}\theta \\ x'(2n\pi) &= 0 & y'(2n\pi) &= 0 \end{aligned}$$

Entre estos puntos, se dice que la cicloide es **suave**.

DEFINICIÓN DE UNA CURVA SUAVE

Una curva C representada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en un intervalo I se dice que es **suave** si f' y g' son continuas en I y no son simultáneamente 0, excepto posiblemente en los puntos terminales de I. La curva C se dice que es **suave a trozos** si es suave en todo subintervalo de alguna partición de I.

Los problemas de la tautocrona y de la braquistocrona



El tiempo que requiere un péndulo para realizar una oscilación completa si parte del punto *C* es aproximadamente el mismo que si parte del punto *A*

Figura 10.26

El tipo de curva descrito en el ejemplo 5 está relacionado con uno de los más famosos pares de problemas de la historia del cálculo. El primer problema (llamado el **problema de la tautocrona**) empezó con el descubrimiento de Galileo de que el tiempo requerido para una oscilación completa de un péndulo dado es *aproximadamente* el mismo ya sea que efectúe un movimiento largo a alta velocidad o un movimiento corto a menor velocidad (ver la figura 10.26). Más tarde, Galileo (1564-1642) comprendió que podía emplear este principio para construir un reloj. Sin embargo, no logró llegar a la mecánica necesaria para construirlo. Christian Huygens (1629-1695) fue el primero en diseñar y construir un modelo que funcionara. En su trabajo con los péndulos, Huygens observó que un péndulo no realiza oscilaciones de longitudes diferentes en exactamente el mismo tiempo. (Esto no afecta al reloj de péndulo porque la longitud del arco circular se mantiene constante dándole al péndulo un ligero impulso cada vez que pasa por su punto más bajo.) Pero al estudiar el problema, Huygens descubrió que una pelotita que rueda hacia atrás y hacia adelante en una cicloide invertida completa cada ciclo en exactamente el mismo tiempo.

JAMES BERNOULLI (1654-1705)

James Bernoulli, también llamado Jacques, era el hermano mayor de John. Fue uno de los matemáticos consumados de la familia suiza Bernoulli. Los logros matemáticos de James le han dado un lugar prominente en el desarrollo inicial del cálculo.

Una cicloide invertida es la trayectoria descendente que una pelotita rodará en el tiempo más corto

Figura 10.27

El segundo problema, que fue planteado por John Bernoulli en 1696, es el llamado **problema de la braquistocrona** (en griego *brachys* significa corto y *cronos* significa tiempo). El problema consistía en determinar la trayectoria descendente por la que una partícula se desliza del punto *A* al punto *B* en el *menor tiempo*. Varios matemáticos se abocaron al problema y un año después el problema fue resuelto por Newton, Leibniz, L'Hôpital, John Bernoulli y James Bernoulli. Como se encontró, la solución no es una recta de *A* a *B*, sino una cicloide invertida que pasa por los puntos *A* y *B*, como se muestra en la figura 10.27. Lo sorprendente de la solución es que una partícula, que parte del reposo en *cualquier* otro punto *C*, entre *A* y *B*, de la cicloide tarda exactamente el mismo tiempo en llegar a *B*, como se muestra en la figura 10.28.

Una pelotita que parte del punto *C* tarda el mismo tiempo en llegar al punto *B* que una que parte del punto *A*

Figura 10.28

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para ver una demostración del famoso problema de la braquistocrona, consultar el artículo "A New Minimization Proof for the Brachistochrone" de Gary Lawlor en *The American Mathematical Monthly*.

10.2 Ejercicios

1. Considerar las ecuaciones paramétricas $x = \sqrt{t}$ y $y = 3 - t$.

a) Construir una tabla de valores para $t = 0, 1, 2, 3$ y 4.

b) Trazar los puntos (x, y) generados en la tabla y dibujar una gráfica de las ecuaciones paramétricas. Indicar la orientación de la gráfica.

c) Verificar la gráfica elaborada en el inciso *b*) empleando una herramienta de graficación.

d) Hallar la ecuación rectangular mediante eliminación del parámetro y dibujar su gráfica. Comparar la gráfica generada en el inciso *b*) con la gráfica de la ecuación rectangular.

2. Considerar las ecuaciones paramétricas $x = 4\cos^2\theta$ y $y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$.

a) Construir una tabla de valores para $\theta = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$.

b) Trazar los puntos (x, y) generados en la tabla y dibujar una gráfica de las ecuaciones paramétricas. Indicar la orientación de la gráfica.

c) Verificar la gráfica elaborada en el inciso *b*) empleando una herramienta de graficación.

d) Hallar la ecuación rectangular mediante la eliminación del parámetro y dibujar su gráfica. Comparar la gráfica generada en el inciso *b*) con la gráfica de la ecuación rectangular.

e) Si se seleccionaran valores de θ en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$ para la tabla del inciso *a*), ¿sería diferente la gráfica del inciso *b*)? Explicar el razonamiento.

En los ejercicios 3 a 20, trazar la curva que representa las ecuaciones paramétricas (indicar la orientación de la curva) y, eliminando el parámetro, dar la ecuación rectangular correspondiente.

3. $x = 2t - 3, \quad y = 3t + 1$

4. $x = 5 - 4t, \quad y = 2 + 5t$

5. $x = t + 1, \quad y = t^2$

6. $x = 2t^2, \quad y = t^4 + 1$

7. $x = t^3, \quad y = \dfrac{t^2}{2}$

8. $x = t^2 + t, \quad y = t^2 - t$

9. $x = \sqrt{t}, \quad y = t - 5$

10. $x = \sqrt[4]{t}, \quad y = 8 - t$

11. $x = t - 3, \quad y = \dfrac{t}{t - 3}$

12. $x = 1 + \dfrac{1}{t}, \quad y = t - 1$

13. $x = 2t, \quad y = |t - 2|$

14. $x = |t - 1|, \quad y = t + 2$

15. $x = e^t, \quad y = e^{3t} + 1$

16. $x = e^{-t}, \quad y = e^{2t} - 1$

17. $x = \sec\theta, \quad y = \cos\theta, \quad 0 \le \theta < \pi/2, \quad \pi/2 < \theta \le \pi$

18. $x = \tan^2\theta, \quad y = \sec^2\theta$

19. $x = 8\cos\theta, \quad y = 8\,\mathrm{sen}\,\theta$

20. $x = 3\cos\theta, \quad y = 7\,\mathrm{sen}\,\theta$

En los ejercicios 21 a 32, usar una herramienta de graficación para trazar la curva que representa las ecuaciones paramétricas (indicar la orientación de la curva). Eliminar el parámetro y dar la ecuación rectangular correspondiente.

21. $x = 6\,\mathrm{sen}\,2\theta, y = 4\cos 2\theta$

22. $x = \cos\theta, y = 2\,\mathrm{sen}\,2\theta$

23. $x = 4 + 2\cos\theta$
$y = -1 + \mathrm{sen}\,\theta$

24. $x = -2 + 3\cos\theta$
$y = -5 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta$

25. $x = -3 + 4\cos\theta$
$y = 2 + 5\,\mathrm{sen}\,\theta$

26. $x = \sec\theta$
$y = \tan\theta$

27. $x = 4\sec\theta, \quad y = 3\tan\theta$

28. $x = \cos^3\theta, \quad y = \mathrm{sen}^3\,\theta$

29. $x = t^3, \quad y = 3\ln t$

30. $x = \ln 2t, \quad y = t^2$

31. $x = e^{-t}, \quad y = e^{3t}$

32. $x = e^{2t}, \quad y = e^t$

Comparación de curvas planas **En los ejercicios 33 a 36, determinar toda diferencia entre las curvas de las ecuaciones paramétricas. ¿Son iguales las gráficas? ¿Son iguales las orientaciones? ¿Son suaves las curvas? Explicar.**

33. *a*) $x = t$, $y = 2t + 1$ *b*) $x = \cos\theta$, $y = 2\cos\theta + 1$

c) $x = e^{-t}$, $y = 2e^{-t} + 1$ *d*) $x = e^t$, $y = 2e^t + 1$

34. *a*) $x = 2\cos\theta$, $y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ *b*) $x = \sqrt{4t^2 - 1}/|t|$, $y = 1/t$

c) $x = \sqrt{t}$, $y = \sqrt{4 - t}$ *d*) $x = -\sqrt{4 - e^{2t}}$, $y = e^t$

35. *a*) $x = \cos\theta$, $y = 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$, $0 < \theta < \pi$ *b*) $x = \cos(-\theta)$, $y = 2\,\mathrm{sen}^2(-\theta)$, $0 < \theta < \pi$

36. *a*) $x = t + 1, y = t^3$ *b*) $x = -t + 1, y = (-t)^3$

37. ***Conjetura***

a) Usar una herramienta de graficación para trazar las curvas representadas por los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas.

$x = 4\cos t \qquad x = 4\cos(-t)$
$y = 3\,\mathrm{sen}\,t \qquad y = 3\,\mathrm{sen}(-t)$

b) Describir el cambio en la gráfica si se cambia el signo del parámetro.

c) Formular una conjetura respecto al cambio en la gráfica de las ecuaciones paramétricas cuando se cambia el signo del parámetro.

d) Probar la conjetura con otro conjunto de ecuaciones paramétricas.

38. ***Redacción*** Revisar los ejercicios 33 a 36 y escribir un párrafo breve que describa cómo las gráficas de curvas representadas por diferentes conjuntos de ecuaciones paramétricas pueden diferir aun cuando la eliminación del parámetro dé la misma ecuación rectangular.

En los ejercicios 39 a 42, eliminar el parámetro y obtener la forma estándar o canónica de la ecuación rectangular.

39. Recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1)$

40. Circunferencia: $x = h + r\cos\theta, \quad y = k + r\,\mathrm{sen}\,\theta$

41. Elipse: $x = h + a\cos\theta, \quad y = k + b\,\mathrm{sen}\,\theta$

42. Hipérbola: $x = h + a\sec\theta, \quad y = k + b\tan\theta$

En los ejercicios 43 a 50, emplear los resultados de los ejercicios 39 a 42 para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta o para la cónica.

43. Recta: pasa por $(0, 0)$ y $(4, -7)$

44. Recta: pasa por $(1, 4)$ y $(5, -2)$

45. Círculo: centro: $(3, 1)$; radio: 2

46. Círculo: centro: $(-6, 2)$; radio: 4

47. Elipse: vértices $(\pm 10, 0)$; foco: $(\pm 8, 0)$

48. Elipse: vértices: $(4, 7)$, $(4, -3)$; foco: $(4, 5)$, $(4, -1)$

49. Hipérbola: vértice: $(\pm 4, 0)$; foco: $(\pm 5, 0)$

50. Hipérbola: vértice: $(0, \pm 1)$; foco: $(0, \pm 2)$

En los ejercicios 51 a 54, hallar dos conjuntos diferentes de ecuaciones paramétricas para la ecuación rectangular.

51. $y = 6x - 5$

52. $y = 4/(x - 1)$

53. $y = x^3$

54. $y = x^2$

En los ejercicios 55 a 58, encontrar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la ecuación rectangular que satisface la condición dada.

51. $y = 2x - 5$, $t = 0$ en el punto $(3, 1)$

56. $y = 4x + 1$, $t = -1$ en el punto $(-2, -7)$

57. $y = x^2$, $t = 4$ en el punto $(4, 16)$

58. $y = 4 - x^2$, $t = 1$ en el punto $(1, 3)$

En los ejercicios 59 a 66, emplear una herramienta de graficación para representar la curva descrita por las ecuaciones paramétricas. Indicar la dirección de la curva e identificar todos los puntos en los que la curva no sea suave.

59. Cicloide: $x = 2(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = 2(1 - \cos\theta)$

60. Cicloide: $x = \theta + \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$

61. Cicloide alargada: $x = \theta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \frac{3}{2}\cos\theta$

62. Cicloide alargada: $x = 2\theta - 4\operatorname{sen}\theta$, $y = 2 - 4\cos\theta$

63. Hipocicloide: $x = 3\cos^3\theta$, $y = 3\operatorname{sen}^3\theta$

64. Cicloide corta: $x = 2\theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 2 - \cos\theta$

65. Hechicera o bruja de Agnesi: $x = 2\cot\theta$, $y = 2\operatorname{sen}^2\theta$

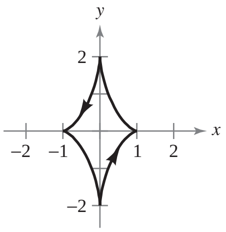
66. Hoja o folio de Descartes: $x = \dfrac{3t}{1 + t^3}$, $y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3}$

Desarrollo de conceptos

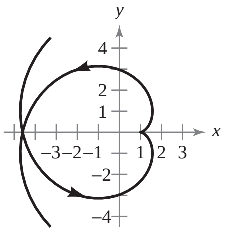
67. Explicar el proceso del trazado de una curva plana dada por ecuaciones paramétricas. ¿Qué se entiende por orientación de la curva?

68. Asociar cada conjunto de ecuaciones paramétricas con su gráfica correspondiente. [Las gráficas están etiquetadas *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).] Explicar el razonamiento.

a)

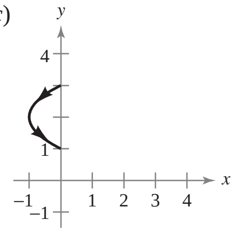


b)

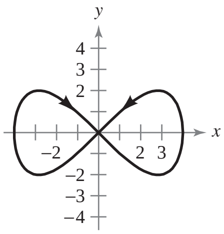


Desarrollo de conceptos (*continuación*)

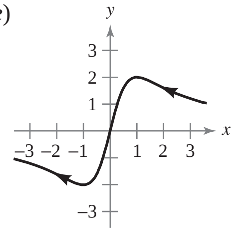
c)



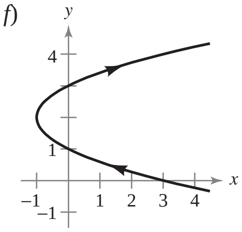
d)



e)



f)



i) $x = t^2 - 1$, $y = t + 2$

ii) $x = \operatorname{sen}^2\theta - 1$, $y = \operatorname{sen}\theta + 2$

iii) Curva de Lissajous: $x = 4\cos\theta$, $y = 2\operatorname{sen}2\theta$

iv) Evoluta de una elipse: $x = \cos^3\theta$, $y = 2\operatorname{sen}^3\theta$

v) Evolvente o involuta de un círculo: $x = \cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta$

vi) Curva serpentina: $x = \cot\theta$, $y = 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

69. ***Cicloide corta*** Un disco de radio a rueda a lo largo de una recta sin deslizar. La curva trazada por un punto P que se encuentra a b unidades del centro $(b < a)$ se denomina **cicloide corta** o **acortada** (ver la figura). Usar el ángulo θ para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para esta curva.

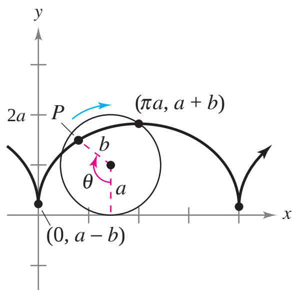


Figura para 69

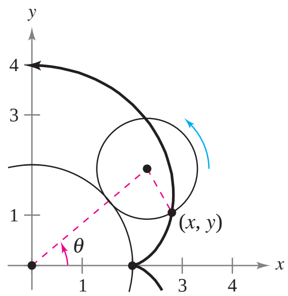


Figura para 70

70. ***Epicicloide*** Un círculo de radio 1 rueda sobre otro círculo de radio 2. La curva trazada por un punto sobre la circunferencia del círculo más pequeño se llama epicicloide (ver la figura). Usar el ángulo θ para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de esta curva.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 71 a 73, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de que sea falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre que es falsa.**

71. La gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = t^2$ y $y = t^2$ es la recta $y = x$.

72. Si y es función de t y x es función de t, entonces y es función de x.

73. La curva representada por las ecuaciones paramétricas $x = t$ y $y = \cos t$ se pueden escribir como una ecuación de la forma $y = f(x)$.

Para discusión

74. Considerar las ecuaciones paramétricas $x = 8 \cos t$ y $y = 8 \operatorname{sen} t$.

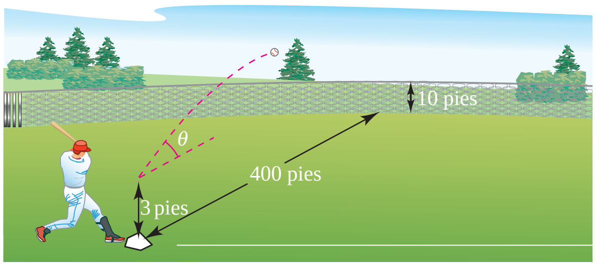
a) Describir la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

b) ¿Cómo se representa la curva por las ecuaciones paramétricas $x = 8 \cos t + 3$ y $y = 8 \operatorname{sen} t + 6$ comparada a la curva descrita en el inciso *a*)?

c) ¿Cómo cambia la curva original cuando el coseno y el seno se intercambian?

Movimiento de un proyectil **En los ejercicios 75 y 76, considerar un proyectil que se lanza a una altura de *h* pies sobre el suelo y a un ángulo θ con la horizontal. Si la velocidad inicial es v_0 pies por segundo, la trayectoria del proyectil queda descrita por las ecuaciones paramétricas $x = (v_0 \cos \theta)t$ y $y = h + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - 16t^2$.**

75. La cerca que delimita el jardín central en un parque de béisbol tiene una altura de 10 pies y se encuentra a 400 pies del plato de *home*. La pelota es golpeada por el bate a una altura de 3 pies sobre el suelo. La pelota se aleja del bate con un ángulo de θ grados con la horizontal a una velocidad de 100 millas por hora (ver la figura).



a) Dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la trayectoria de la pelota.

b) Usar una herramienta de graficación para representar la trayectoria de la pelota si $\theta = 15°$. ¿Es el golpe un *home run*?

c) Usar una herramienta de graficación para representar la trayectoria de la pelota si $\theta = 23°$. ¿Es el golpe un *home run*?

d) Hallar el ángulo mínimo al cual la pelota debe alejarse del bate si se quiere que el golpe sea un *home run*.

76. Una ecuación rectangular para la trayectoria de un proyectil es $y = 5 + x - 0.005x^2$.

a) Eliminar el parámetro *t* de la función de posición del movimiento de un proyectil para mostrar que la ecuación rectangular es

$$y = -\frac{16 \sec^2 \theta}{v_0^2} x^2 + (\tan \theta)\, x + h.$$

b) Usar el resultado del inciso *a*) para hallar h, v_0 y θ. Hallar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria.

c) Usar una herramienta de graficación para trazar la gráfica de la ecuación rectangular de la trayectoria del proyectil. Confirmar la respuesta dada en el inciso *b*) y dibujar la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

d) Usar una herramienta de graficación para aproximar la altura máxima del proyectil y su rango.

PROYECTO DE TRABAJO

Cicloides

En griego, la palabra *cycloid* significa *rueda*, la palabra *hipocicloide* significa *bajo la rueda*, y la palabra *epicicloide* significa *sobre la rueda*. Asociar la hipocicloide o epicicloide con su gráfica. [Las gráficas están marcadas *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

Hipocicloide, H(A, B)

Trayectoria descrita por un punto fijo en un círculo de radio *B* que rueda a lo largo de la cara interior de un círculo de radio *A*

$$x = (A - B) \cos t + B \cos\left(\frac{A - B}{B}\right)t$$

$$y = (A - B) \operatorname{sen} t - B \operatorname{sen}\left(\frac{A - B}{B}\right)t$$

Epicicloide, E(A, B)

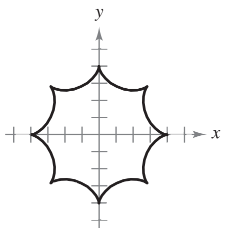
Trayectoria descrita por un punto fijo en un círculo de radio *B* que rueda a lo largo de la cara *exterior* de un círculo de radio *A*

$$x = (A + B) \cos t - B \cos\left(\frac{A + B}{B}\right)t$$

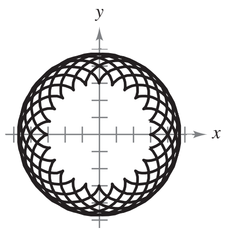
$$y = (A + B) \operatorname{sen} t - B \operatorname{sen}\left(\frac{A + B}{B}\right)t$$

I. $H(8, 3)$	II. $E(8, 3)$
III. $H(8, 7)$	IV. $E(24, 3)$
V. $H(24, 7)$	VI. $E(24, 7)$

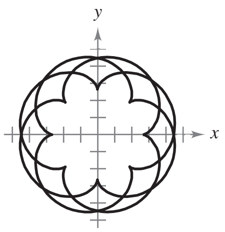
a)



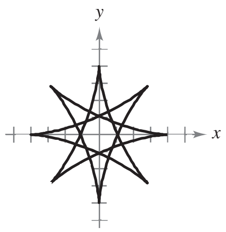
b)



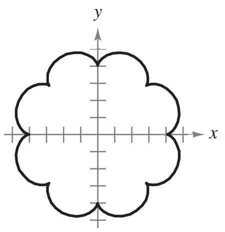
c)



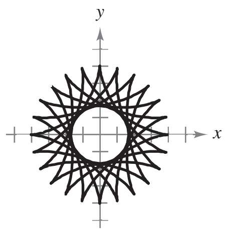
d)



e)



f)



Ejercicios basados en “Mathematical Discovery via Computer Graphics: Hypocycloids and Epicycloids” de Florence S. Gordon y Sheldon P. Gordon, *College Mathematics Journal*, noviembre de 1984, p. 441. Uso autorizado por los autores.

10.3 Ecuaciones paramétricas y cálculo

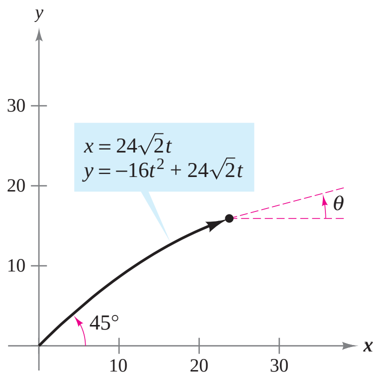
- **Hallar la pendiente de una recta tangente a una curva dada por un conjunto de ecuaciones paramétricas.**
- **Hallar la longitud de arco de una curva dada por un conjunto de ecuaciones paramétricas.**
- **Hallar el área de una superficie de revolución (forma paramétrica).**

Pendiente y rectas tangentes

Ahora que ya se sabe representar una gráfica en el plano mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas, lo natural es preguntarse cómo emplear el cálculo para estudiar estas curvas planas. Para empezar, hay que dar otra mirada al proyectil representado por las ecuaciones paramétricas

$$x = 24\sqrt{2}t \qquad \text{y} \qquad y = -16t^2 + 24\sqrt{2}t$$

como se ilustra en la figura 10.29. De lo visto en la sección 10.2, se sabe que estas ecuaciones permiten localizar la posición del proyectil en un instante dado. También se sabe que el objeto es proyectado inicialmente con un ángulo de 45°. Pero, ¿cómo puede encontrarse el ángulo θ que representa la dirección del objeto en algún otro instante t? El teorema siguiente responde a esta pregunta proporcionando una fórmula para la pendiente de la recta tangente en función de t.

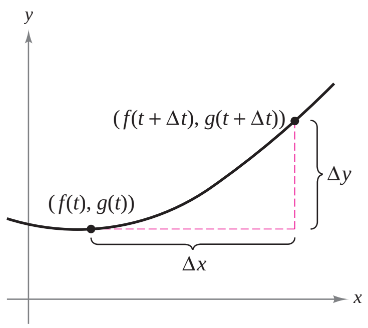


En el momento t, el ángulo de elevación del proyectil es θ, la pendiente de la recta tangente en ese punto
Figura 10.29

TEOREMA 10.7 FORMA PARAMÉTRICA DE LA DERIVADA

Si una curva suave C está dada por las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces la pendiente de C en (x, y) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \qquad \frac{dx}{dt} \neq 0.$$



La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(f(t), g(t))$ y $(f(t + \Delta t), g(t + \Delta t))$ es $\Delta y / \Delta x$
Figura 10.30

DEMOSTRACIÓN En la figura 10.30, considérese $\Delta t > 0$ y sea

$$\Delta y = g(t + \Delta t) - g(t) \qquad \text{y} \qquad \Delta x = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Como $\Delta x \to 0$ cuando $\Delta t \to 0$, se puede escribir

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{f(t + \Delta t) - f(t)}.\end{aligned}$$

Dividiendo tanto el numerador como el denominador entre Δt, se puede emplear la derivabilidad o diferenciabilidad de f y g para concluir que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[g(t + \Delta t) - g(t)]/\Delta t}{[f(t + \Delta t) - f(t)]/\Delta t}\\ &= \frac{\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}}{\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}}\\ &= \frac{g'(t)}{f'(t)}\\ &= \frac{dy/dt}{dx/dt}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Derivación o diferenciación y forma paramétrica

Hallar dy/dx para la curva dada por $x = \operatorname{sen} t$ y $y = \cos t$.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t} = -\tan t$$

AYUDA DE ESTUDIO La curva del ejemplo 1 es una circunferencia. Emplear la fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\tan t$$

para hallar su pendiente en los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Como dy/dx es función de t, puede emplearse el teorema 10.7 repetidamente para hallar las derivadas de *orden superior*. Por ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]}{dx/dt}$$ Segunda derivada.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{dx/dt}.$$ Tercera derivada.

EJEMPLO 2 Hallar pendiente y concavidad

Para la curva dada por

$$x = \sqrt{t} \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{4}(t^2 - 4), \quad t \geq 0$$

hallar la pendiente y la concavidad en el punto $(2, 3)$.

Solución Como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(1/2)t}{(1/2)t^{-1/2}} = t^{3/2}$$ Forma paramétrica de la

se puede hallar que la segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}[dy/dx]}{dx/dt} = \frac{\frac{d}{dt}[t^{3/2}]}{dx/dt} = \frac{(3/2)t^{1/2}}{(1/2)t^{-1/2}} = 3t.$$ Forma paramétrica de la segunda derivada.

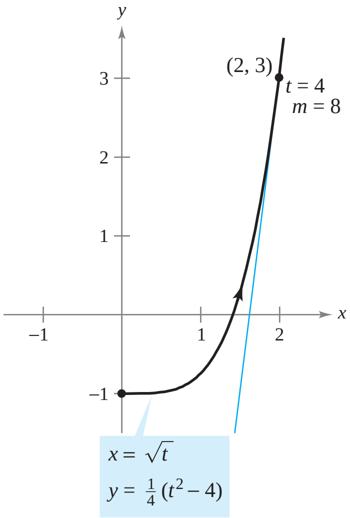
En $(x, y) = (2, 3)$, se tiene que $t = 4$, y la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = (4)^{3/2} = 8.$$

Y, cuando $t = 4$, la segunda derivada es

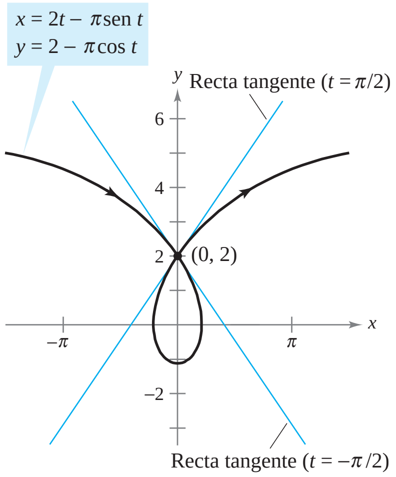
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3(4) = 12 > 0$$

por lo que puede concluirse que en $(2, 3)$ la gráfica es cóncava hacia arriba, como se muestra en la figura 10.31.



En $(2, 3)$, donde $t = 4$, la gráfica es cóncava hacia arriba
Figura 10.31

Como en las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ no se necesita que y esté definida en función de x, puede ocurrir que una curva plana forme un lazo y se corte a sí misma. En esos puntos la curva puede tener más de una recta tangente, como se muestra en el ejemplo siguiente.



Esta cicloide alargada tiene dos rectas tangentes en el punto (0, 2)
Figura 10.32

EJEMPLO 3 Una curva con dos rectas tangentes en un punto

La **cicloide alargada** dada por

$$x = 2t - \pi \operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad y = 2 - \pi \cos t$$

se corta a sí misma en el punto (0, 2), como se ilustra en la figura 10.32. Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes en este punto.

Solución Como $x = 0$ y $y = 2$ cuando $t = \pm\pi/2$, y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\pi \operatorname{sen} t}{2 - \pi \cos t}$$

se tiene $dy/dx = -\pi/2$ cuando $t = -\pi/2$ y $dy/dx = \pi/2$ cuando $t = \pi/2$. Por tanto, las dos rectas tangentes en (0, 2) son

$$y - 2 = -\left(\frac{\pi}{2}\right)x \qquad \text{Recta tangente cuando } t = -\frac{\pi}{2}.$$

y

$$y - 2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)x. \qquad \text{Recta tangente cuando } t = \frac{\pi}{2}.$$

Si $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$ cuando $t = t_0$, la curva representada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ tiene una tangente horizontal en $(f(t_0), g(t_0))$. Así, en el ejemplo 3, la curva dada tiene una tangente horizontal en el punto $(0, 2 - \pi)$ (cuando $t = 0$). De manera semejante, si $dx/dt = 0$ y $dy/dt \neq 0$ cuando $t = t_0$, la curva representada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ tiene una tangente vertical en $(f(t_0), g(t_0))$.

Longitud de arco

Se ha visto cómo pueden emplearse las ecuaciones paramétricas para describir la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano. Ahora se desarrollará una fórmula para determinar la *distancia* recorrida por una partícula a lo largo de su trayectoria.

Recuérdese de la sección 7.4 que la fórmula para hallar la longitud de arco de una curva C dada por $y = h(x)$ en el intervalo $[x_0, x_1]$ es

$$\begin{aligned} s &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [h'(x)]^2}\, dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \end{aligned}$$

Si C está representada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \le t \le b$, y si $dx/dt = f'(t) > 0$, se puede escribir

$$\begin{aligned} s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}\, dx \\ &= \int_a^b \sqrt{\frac{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}{(dx/dt)^2}}\, \frac{dx}{dt}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt. \end{aligned}$$

TEOREMA 10.8 LONGITUD DE ARCO EN FORMA PARAMÉTRICA

Si una curva suave C está dada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ y C no se corta a sí misma en el intervalo $a \leq t \leq b$ (excepto quizás en los puntos terminales), entonces la longitud de arco de C en ese intervalo está dada por

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

NOTA Al aplicar la fórmula para la longitud de arco a una curva, hay que asegurarse de que la curva se recorra una sola vez en el intervalo de integración. Por ejemplo, el círculo dado por $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$, recorre una sola vez el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, pero recorre dos veces el intervalo $0 \leq t \leq 4\pi$. ■

En la sección anterior se vio que si un círculo rueda a lo largo de una recta, cada punto de su circunferencia trazará una trayectoria llamada cicloide. Si el círculo rueda sobre otro círculo, la trayectoria del punto es una **epicicloide**. El ejemplo siguiente muestra cómo hallar la longitud de arco de una epicicloide.

ARCO DE UNA CICLOIDE

La longitud de un arco de una cicloide fue calculada por vez primera en 1658 por el arquitecto y matemático inglés Christopher Wren, famoso por reconstruir muchos edificios e iglesias en Londres, entre los que se encuentra la Catedral de St. Paul.

EJEMPLO 4 Calcular la longitud de arco

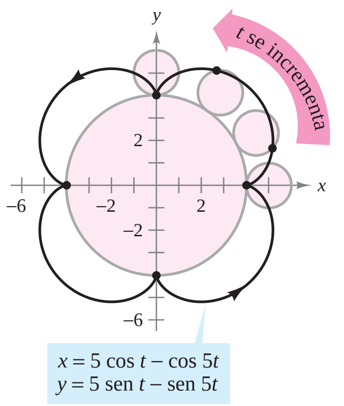
Un círculo de radio 1 rueda sobre otro círculo mayor de radio 4, como se muestra en la figura 10.33. La epicicloide trazada por un punto en el círculo más pequeño está dada por

$$x = 5\cos t - \cos 5t \quad \text{y} \quad y = 5\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t.$$

Hallar la distancia recorrida por el punto al dar una vuelta completa alrededor del círculo mayor.

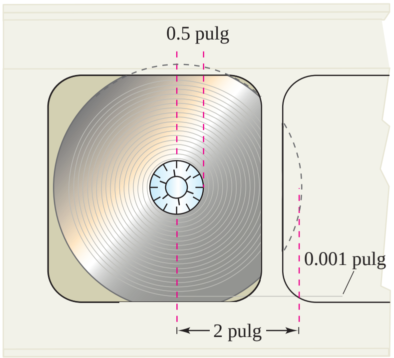
Solución Antes de aplicar el teorema 10.8, hay que observar en la figura 10.33 que la curva tiene puntos angulosos en $t = 0$ y $t = \pi/2$. Entre estos dos puntos, dx/dt y dy/dt no son simultáneamente 0. Por tanto, la porción de la curva que se genera de $t = 0$ a $t = \pi/2$ es suave. Para hallar la distancia total recorrida por el punto, calcular la longitud de arco que se encuentra en el primer cuadrante y multiplicar por 4.

$$\begin{aligned}
s &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt && \text{Forma paramétrica de la longitud de arco.}\\
&= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-5\operatorname{sen} t + 5\operatorname{sen} 5t)^2 + (5\cos t - 5\cos 5t)^2}\, dt\\
&= 20\int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2\operatorname{sen} t\operatorname{sen} 5t - 2\cos t\cos 5t}\, dt\\
&= 20\int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2\cos 4t}\, dt\\
&= 20\int_0^{\pi/2} \sqrt{4\operatorname{sen}^2 2t}\, dt && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= 40\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t\, dt\\
&= -20\Big[\cos 2t\Big]_0^{\pi/2}\\
&= 40
\end{aligned}$$



Un punto en la circunferencia pequeña es el que traza una epicicloide en la medida que el círculo pequeño rueda alrededor de la circunferencia grande
Figura 10.33

Para la epicicloide de la figura 10.33, una longitud de arco de 40 parece correcta, puesto que la circunferencia de un círculo de radio 6 es $2\pi r = 12\pi \approx 37.7$.



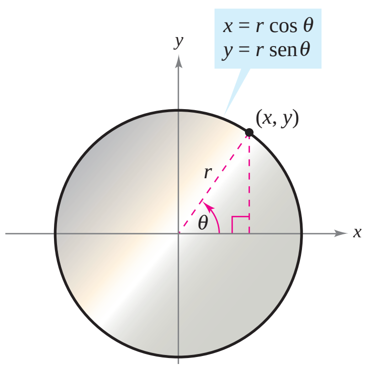


Figura 10.34

EJEMPLO 5 Longitud de una cinta magnetofónica

Una cinta magnetofónica de 0.001 pulgadas de espesor se enrolla en una bobina cuyo radio interior mide 0.5 pulgadas y cuyo radio exterior mide 2 pulgadas, como se muestra en la figura 10.34. ¿Cuánta cinta se necesita para llenar la bobina?

Solución Para crear un modelo para este problema, supóngase que a medida que la cinta se enrolla en la bobina, su distancia r al centro se incrementa en forma lineal a razón de 0.001 pulgadas por revolución, o

$$r = (0.001)\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2\,000\pi}, \qquad 1\,000\pi \le \theta \le 4\,000\pi$$

donde θ está medido en radianes. Se pueden determinar las coordenadas del punto (x, y) correspondientes a un radio dado

$$x = r\cos\theta$$

y

$$y = r\,\text{sen}\,\theta.$$

Al sustituir r, se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = \left(\frac{\theta}{2\,000\pi}\right)\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = \left(\frac{\theta}{2\,000\pi}\right)\text{sen}\,\theta.$$

La fórmula de la longitud de arco se puede emplear para determinar que la longitud total de la cinta es

$$\begin{aligned}
s &= \int_{1\,000\pi}^{4\,000\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\\
&= \frac{1}{2\,000\pi}\int_{1\,000\pi}^{4\,000\pi} \sqrt{(-\theta\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 + (\theta\cos\theta + \text{sen}\,\theta)^2}\,d\theta\\
&= \frac{1}{2\,000\pi}\int_{1\,000\pi}^{4\,000\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\,d\theta\\
&= \frac{1}{2\,000\pi}\left(\frac{1}{2}\right)\left[\theta\sqrt{\theta^2+1} + \ln\left|\theta + \sqrt{\theta^2+1}\right|\right]_{1\,000\pi}^{4\,000\pi}\\
&\approx 11\,781 \text{ pulgadas}\\
&\approx 982 \text{ pies}
\end{aligned}$$

Tablas de integración (apéndice B), fórmula 26.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre las matemáticas de una cinta magnetofónica, consultar "Tape Counters" de Richard L. Roth en *The American Mathematical Monthly*.

NOTA La gráfica de $r = a\theta$ se llama **espiral de Arquímedes**. La gráfica de $r = \theta/2\,000\pi$ (ejemplo 5) es de este tipo.

La longitud de la cinta del ejemplo 5 puede ser aproximada si se suman las porciones circulares de la cinta. El radio de la más pequeña es de 0.501 y el radio de la más grande es de 2.

$$\begin{aligned}
s &\approx 2\pi(0.501) + 2\pi(0.502) + 2\pi(0.503) + \cdots + 2\pi(2.000)\\
&= \sum_{i=1}^{1\,500} 2\pi(0.5 + 0.001i)\\
&= 2\pi[1\,500(0.5 + 0.001(1\,500)(1\,501)/2]\\
&\approx 11\,786 \text{ pulgadas}
\end{aligned}$$

Área de una superficie de revolución

La fórmula para el área de una superficie de revolución en forma rectangular puede usarse para desarrollar una fórmula para el área de la superficie en forma paramétrica.

TEOREMA 10.9 ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Si una curva suave C dada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ no se corta a sí misma en un intervalo $a \le t \le b$, entonces el área S de la superficie de revolución generada por rotación de C, en torno a uno de los ejes de coordenadas, está dada por

1. $S = 2\pi \int_a^b g(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$ Revolución en torno al eje x: $g(t) \ge 0$.

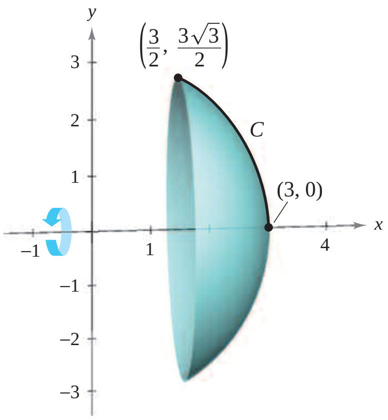
2. $S = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$ Revolución en torno al eje y: $f(t) \ge 0$.

Estas fórmulas son fáciles de recordar si se considera al diferencial de la longitud de arco como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Entonces las fórmulas se expresan como sigue.

1. $S = 2\pi \int_a^b g(t)\, ds$ **2.** $S = 2\pi \int_a^b f(t)\, ds$



Esta superficie de revolución tiene un área de superficie de 9π

Figura 10.35

EJEMPLO 6 Hallar el área de una superficie de revolución

Sea C el arco de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 9$$

que va desde (3, 0) hasta $(3/2, 3\sqrt{3}/2)$, como se ve en la figura 10.35. Encontrar el área de la superficie generada por revolución de C alrededor del eje x.

Solución C se puede representar en forma paramétrica mediante las ecuaciones

$$x = 3\cos t \quad \text{y} \quad y = 3\,\text{sen}\, t, \quad 0 \le t \le \pi/3.$$

(El intervalo para t se obtiene observando que $t = 0$ cuando $x = 3$ y $t = \pi/3$ cuando $x = 3/2$.) En este intervalo, C es suave y y es no negativa, y se puede aplicar el teorema 10.9 para obtener el área de la superficie

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^{\pi/3} (3\,\text{sen}\, t)\sqrt{(-3\,\text{sen}\, t)^2 + (3\cos t)^2}\, dt && \text{Fórmula para el área de una superficie de revolución.}\\
&= 6\pi \int_0^{\pi/3} \text{sen}\, t\sqrt{9(\text{sen}^2 t + \cos^2 t)}\, dt\\
&= 6\pi \int_0^{\pi/3} 3\,\text{sen}\, t\, dt && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= -18\pi\Big[\cos t\Big]_0^{\pi/3}\\
&= -18\pi\left(\frac{1}{2} - 1\right)\\
&= 9\pi.
\end{aligned}$$

10.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, hallar dy/dx.

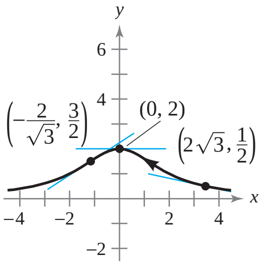
1. $x = t^2,\ y = 7 - 6t$
2. $x = \sqrt[3]{t},\ y = 4 - t$
3. $x = \operatorname{sen}^2 \theta,\ y = \cos^2 \theta$
4. $x = 2e^{\theta},\ y = e^{-\theta/2}$

En los ejercicios 5 a 14, hallar dy/dx y d^2y/dx^2, así como la pendiente y la concavidad (de ser posible) en el punto correspondiente al valor dado del parámetro.

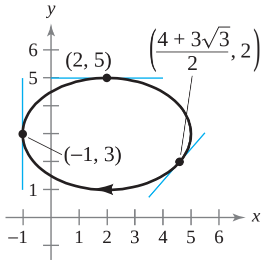
	Ecuaciones paramétricas	*Punto*
5.	$x = 4t,\ y = 3t - 2$	$t = 3$
6.	$x = \sqrt{t},\ y = 3t - 1$	$t = 1$
7.	$x = t + 1,\ y = t^2 + 3t$	$t = -1$
8.	$x = t^2 + 5t + 4,\ y = 4t$	$t = 0$
9.	$x = 4 \cos \theta,\ y = 4 \operatorname{sen} \theta$	$\theta = \frac{\pi}{4}$
10.	$x = \cos \theta,\ y = 3 \operatorname{sen} \theta$	$\theta = 0$
11.	$x = 2 + \sec \theta,\ y = 1 + 2 \tan \theta$	$\theta = \frac{\pi}{6}$
12.	$x = \sqrt{t},\ y = \sqrt{t - 1}$	$t = 2$
13.	$x = \cos^3 \theta,\ y = \operatorname{sen}^3 \theta$	$\theta = \frac{\pi}{4}$
14.	$x = \theta - \operatorname{sen} \theta,\ y = 1 - \cos \theta$	$\theta = \pi$

En los ejercicios 15 y 18, hallar una ecuación para la recta tangente en cada uno de los puntos dados de la curva.

15. $x = 2 \cot \theta$
$y = 2 \operatorname{sen}^2 \theta$



16. $x = 2 - 3 \cos \theta$
$y = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$



17. $x = t^2 - 4$
$y = t^2 - 2t$
$(0, 0), (-3, -1)$, y $(-3, 3)$

18. $x = t^4 + 2$
$y = t^3 + t$
$(2, 0), (3, -2)$, y $(18, 10)$

En los ejercicios 19 a 22, *a*) usar una herramienta de graficación para trazar la curva representada por las ecuaciones paramétricas, *b*) usar una herramienta de graficación para hallar dx/dt, dy/dt y dy/dx para el valor dado del parámetro, *c*) hallar una ecuación de la recta tangente a la curva en el valor dado del parámetro, y *d*) usar una herramienta de graficación para trazar la curva y la recta tangente del inciso *c*).

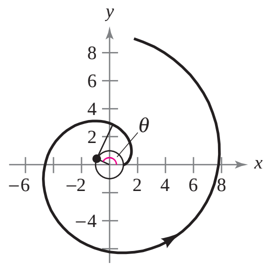
	Ecuaciones paramétricas	*Parámetro*
19.	$x = 6t,\ y = t^2 + 4$	$t = 1$
20.	$x = t - 2,\ y = \frac{1}{t} + 3$	$t = 1$
21.	$x = t^2 - t + 2,\ y = t^3 - 3t$	$t = -1$
22.	$x = 4 \cos \theta,\ y = 3 \operatorname{sen} \theta$	$\theta = \frac{3\pi}{4}$

En los ejercicios 23 a 26, hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto en el que la curva se corta a sí misma.

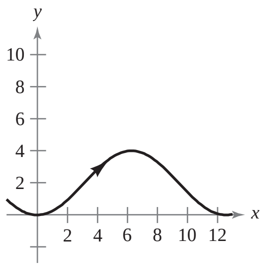
23. $x = 2 \operatorname{sen} 2t,\quad y = 3 \operatorname{sen} t$
24. $x = 2 - \pi \cos t,\quad y = 2t - \pi \operatorname{sen} t$
25. $x = t^2 - t,\quad y = t^3 - 3t - 1$
26. $x = t^3 - 6t,\quad y = t^2$

En los ejercicios 27 y 28, hallar todos los puntos de tangencia horizontal y vertical (si los hay) a la porción de la curva que se muestra.

27. Evolvente o involuta de un círculo:
$x = \cos \theta + \theta \operatorname{sen} \theta$
$y = \operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta$



28. $x = 2\theta$
$y = 2(1 - \cos \theta)$



En los ejercicios 29 a 38, hallar todos los puntos de tangencia horizontal y vertical (si los hay) a la curva. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

29. $x = 4 - t,\quad y = t^2$
30. $x = t + 1,\quad y = t^2 + 3t$
31. $x = t + 4,\quad y = t^3 - 3t$
32. $x = t^2 - t + 2,\quad y = t^3 - 3t$
33. $x = 3 \cos \theta,\quad y = 3 \operatorname{sen} \theta$
34. $x = \cos \theta,\quad y = 2 \operatorname{sen} 2\theta$
35. $x = 5 + 3 \cos \theta,\quad y = -2 + \operatorname{sen} \theta$
36. $x = 4 \cos^2 \theta,\quad y = 2 \operatorname{sen} \theta$
37. $x = \sec \theta,\quad y = \tan \theta$
38. $x = \cos^2 \theta,\quad y = \cos \theta$

En los ejercicios 39 a 44, determinar los intervalos de t en los que la curva es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba.

39. $x = 3t^2,\quad y = t^3 - t$
40. $x = 2 + t^2,\quad y = t^2 + t^3$
41. $x = 2t + \ln t,\quad y = 2t - \ln t$
42. $x = t^2,\quad y = \ln t$
43. $x = \operatorname{sen} t,\quad y = \cos t,\quad 0 < t < \pi$
44. $x = 4 \cos t,\quad y = 2 \operatorname{sen} t,\quad 0 < t < 2\pi$

Longitud de arco **En los ejercicios 45 a 48, dar una integral que represente la longitud de arco de la curva en el intervalo dado. No evaluar la integral.**

	Ecuaciones paramétricas	*Intervalo*
45.	$x = 3t - t^2, \quad y = 2t^{3/2}$	$1 \leq t \leq 3$
46.	$x = \ln t, \quad y = 4t - 3$	$1 \leq t \leq 5$
47.	$x = e^t + 2, \quad y = 2t + 1$	$-2 \leq t \leq 2$
48.	$x = t + \operatorname{sen} t, \quad y = t - \cos t$	$0 \leq t \leq \pi$

Longitud de arco **En los ejercicios 49 a 56, hallar la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.**

	Ecuaciones paramétricas	*Intervalo*
49.	$x = 3t + 5, \quad y = 7 - 2t$	$-1 \leq t \leq 3$
50.	$x = t^2, \quad y = 2t$	$0 \leq t \leq 2$
51.	$x = 6t^2, \quad y = 2t^3$	$1 \leq t \leq 4$
52.	$x = t^2 + 1, \quad y = 4t^3 + 3$	$-1 \leq t \leq 0$
53.	$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \operatorname{sen} t$	$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
54.	$x = \operatorname{arcsen} t, \quad y = \ln \sqrt{1 - t^2}$	$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$
55.	$x = \sqrt{t}, \quad y = 3t - 1$	$0 \leq t \leq 1$
56.	$x = t, \quad y = \dfrac{t^5}{10} + \dfrac{1}{6t^3}$	$1 \leq t \leq 2$

Longitud de arco **En los ejercicios 57 a 60, hallar la longitud de arco de la curva en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

57. Perímetro de una hipocicloide: $x = a \cos^3 \theta, y = a \operatorname{sen}^3 \theta$

58. Circunferencia de un círculo: $x = a \cos \theta, y = a \operatorname{sen} \theta$

59. Arco de una cicloide: $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta), y = a(1 - \cos \theta)$

60. Evolvente o involuta de un círculo:
$x = \cos \theta + \theta \operatorname{sen} \theta, y = \operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta$

61. ***Trayectoria de un proyectil*** La trayectoria de un proyectil se describe por medio de las ecuaciones paramétricas

$$x = (90 \cos 30°)t \qquad \text{y} \qquad y = (90 \operatorname{sen} 30°)t - 16t^2$$

donde x y y se miden en pies.

a) Utilizar una herramienta de graficación para trazar la trayectoria del proyectil.

b) Utilizar una herramienta de graficación para estimar el alcance del proyectil.

c) Utilizar las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de arco de la trayectoria. Comparar este resultado con el alcance del proyectil.

62. ***Trayectoria de un proyectil*** Si el proyectil del ejercicio 61 se lanza formando un ángulo θ con la horizontal, sus ecuaciones paramétricas son

$$x = (90 \cos \theta)t \quad \text{y} \quad y = (90 \operatorname{sen} \theta)t - 16t^2.$$

Usar una herramienta de graficación para hallar el ángulo que maximiza el alcance del proyectil. ¿Qué ángulo maximiza la longitud de arco de la trayectoria?

63. ***Hoja (o folio) de Descartes*** Considerar las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{4t}{1 + t^3} \quad \text{y} \quad y = \frac{4t^2}{1 + t^3}.$$

a) Usar una herramienta de graficación para trazar la curva descrita por las ecuaciones paramétricas.

b) Usar una herramienta de graficación para hallar los puntos de tangencia horizontal a la curva.

c) Usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de arco del lazo cerrado. (*Sugerencia:* Usar la simetría e integrar sobre el intervalo $0 \leq t \leq 1$.)

64. ***Hechicera o bruja de Agnesi*** Considerar las ecuaciones paramétricas

$$x = 4 \cot \theta \quad \text{y} \quad y = 4 \operatorname{sen}^2 \theta \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

a) Emplear una herramienta de graficación para trazar la curva descrita por las ecuaciones paramétricas.

b) Utilizar una herramienta de graficación para hallar los puntos de tangencia horizontal a la curva.

c) Usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de arco en el intervalo $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$.

65. ***Redacción***

a) Usar una herramienta de graficación para representar cada conjunto de ecuaciones paramétricas.

$$x = t - \operatorname{sen} t \qquad x = 2t - \operatorname{sen}(2t)$$
$$y = 1 - \cos t \qquad y = 1 - \cos(2t)$$
$$0 \leq t \leq 2\pi \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

b) Comparar las gráficas de los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas del inciso *a*). Si la curva representa el movimiento de una partícula y t es tiempo, ¿qué puede inferirse acerca de las velocidades promedio de la partícula en las trayectorias representadas por los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas?

c) Sin trazar la curva, determinar el tiempo que requiere la partícula para recorrer las mismas trayectorias que en los incisos *a*) y *b*) si la trayectoria está descrita por

$$x = \tfrac{1}{2}t - \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}t\right) \quad \text{y} \quad y = 1 - \cos\left(\tfrac{1}{2}t\right).$$

66. ***Redacción***

a) Cada conjunto de ecuaciones paramétricas representa el movimiento de una partícula. Usar una herramienta de graficación para representar cada conjunto.

Primera partícula	*Segunda partícula*
$x = 3 \cos t$	$x = 4 \operatorname{sen} t$
$y = 4 \operatorname{sen} t$	$y = 3 \cos t$
$0 \leq t \leq 2\pi$	$0 \leq t \leq 2\pi$

b) Determinar el número de puntos de intersección.

c) ¿Estarán las partículas en algún momento en el mismo lugar al mismo tiempo? Si es así, identificar esos puntos.

d) Explicar qué ocurre si el movimiento de la segunda partícula se representa por

$$x = 2 + 3 \operatorname{sen} t, \quad y = 2 - 4 \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Área de una superficie **En los ejercicios 67 a 70, dar una integral que represente el área de la superficie generada por revolución de la curva alrededor del eje *x*. Usar una herramienta de graficación para aproximar la integral.**

	Ecuaciones paramétricas	*Intervalo*
67.	$x = 4t, \quad y = t + 2$	$0 \le t \le 4$
68.	$x = \frac{1}{4}t^2, \quad y = t + 3$	$0 \le t \le 3$
69.	$x = \cos^2 \theta, \quad y = \cos \theta$	$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
70.	$x = \theta + \operatorname{sen} \theta, \quad y = \theta + \cos \theta$	$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

Área de una superficie **En los ejercicios 71 a 76, encontrar el área de la superficie generada por revolución de la curva alrededor de cada uno de los ejes dados.**

71. $x = 2t, \quad y = 3t, \quad 0 \le t \le 3,$ *a)* eje x *b)* eje y

72. $x = t, \quad y = 4 - 2t, \quad 0 \le t \le 2,$ *a)* eje x *b)* eje y

73. $x = 5 \cos \theta, \quad y = 5 \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},$ eje y

74. $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = t + 1, \quad 1 \le t \le 2,$ eje y

75. $x = a \cos^3 \theta, \quad y = a \operatorname{sen}^3 \theta, \quad 0 \le \theta \le \pi,$ eje x

76. $x = a \cos \theta, \quad y = b \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$

a) eje x *b)* eje y

Desarrollo de conceptos

77. Dar la forma paramétrica de la derivada.

En los ejercicios 78 y 79, determinar mentalmente *dy/dx*.

78. $x = t, \quad y = 3$ **79.** $x = t, \quad y = 6t - 5$

80. Dar la fórmula integral para la longitud de arco en forma paramétrica.

81. Dar las fórmulas integrales para las áreas de superficies de revolución generadas por revolución de una curva suave C alrededor *a)* del eje x y *b)* del eje y.

Para discusión

82. *a)* Dibujar la gráfica de una curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = g(t)$ y $y = f(t)$ de manera que $dx/dt > 0$ y $dy/dt < 0$ para todos los números reales t.

b) Dibujar la gráfica de una curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = g(t)$ y $y = f(t)$ de manera que $dx/dt < 0$ y $dy/dt < 0$ para todos los números reales t.

83. Mediante integración por sustitución mostrar que si y es una función continua de x en el intervalo $a \le x \le b$, donde $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces

$$\int_a^b y\, dx = \int_{t_1}^{t_2} g(t) f'(t)\, dt$$

donde $f(t_1) = a$, $f(t_2) = b$, y tanto g como f' son continuas en $[t_1, t_2]$.

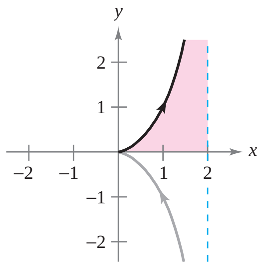
84. ***Área de una superficie*** Una porción de una esfera de radio r se elimina cortando un cono circular con vértice en el centro de la esfera. El vértice del cono forma un ángulo 2θ. Hallar el área de superficie eliminada de la esfera.

Área **En los ejercicios 85 y 86, hallar el área de la región. (Usar el resultado del ejercicio 83.)**

85. $x = 2 \operatorname{sen}^2 \theta$

$y = 2 \operatorname{sen}^2 \theta \tan \theta$

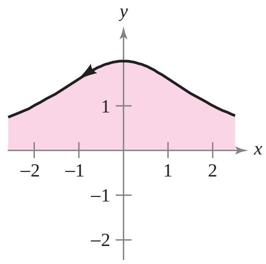
$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$



86. $x = 2 \cot \theta$

$y = 2 \operatorname{sen}^2 \theta$

$0 < \theta < \pi$



CAS ***Áreas de curvas cerradas simples*** **En los ejercicios 87 a 92, usar un sistema algebraico por computadora y el resultado del ejercicio 83 para relacionar la curva cerrada con su área. (Estos ejercicios fueron adaptados del artículo "The Surveyor's Area Formula" de Bart Braden en la publicación de septiembre de 1986 del *College Mathematics Journal*, pp. 335-337, con autorización del autor.)**

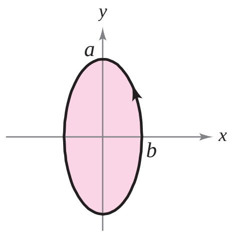
a) $\frac{8}{3}ab$ ***b)*** $\frac{3}{8}\pi a^2$ ***c)*** $2\pi a^2$

d) πab ***e)*** $2\pi ab$ ***f)*** $6\pi a^2$

87. Elipse: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = b \cos t$

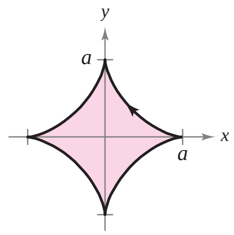
$y = a \operatorname{sen} t$



88. Astroide: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = a \cos^3 t$

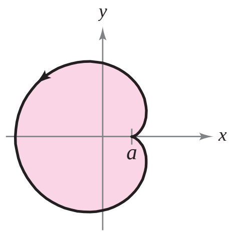
$y = a \operatorname{sen}^3 t$



89. Cardioide: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = 2a \cos t - a \cos 2t$

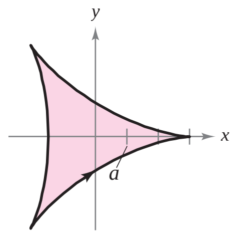
$y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t$



90. Deltoide: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = 2a \cos t + a \cos 2t$

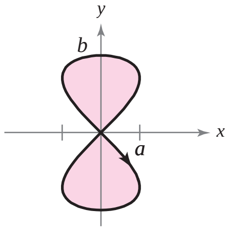
$y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t$



91. Reloj de arena: $(0 \leq t \leq 2\pi)$

$x = a \operatorname{sen} 2t$

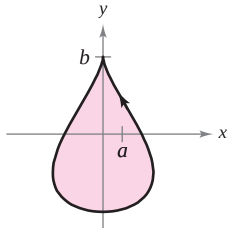
$y = b \operatorname{sen} t$



92. Lágrima: $(0 \leq t \leq 2\pi)$

$x = 2a \cos t - a \operatorname{sen} 2t$

$y = b \operatorname{sen} t$



Centroide **En los ejercicios 93 y 94, hallar el centroide de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones paramétricas y los ejes de coordenadas. (Usar el resultado del ejercicio 83.)**

93. $x = \sqrt{t}, \quad y = 4 - t$

94. $x = \sqrt{4 - t}, \quad y = \sqrt{t}$

Volumen **En los ejercicios 95 y 96, hallar el volumen del sólido generado por revolución en torno al eje x de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones dadas. (Usar el resultado del ejercicio 83.)**

95. $x = 6 \cos \theta, \quad y = 6 \operatorname{sen} \theta$

96. $x = \cos \theta, \quad y = 3 \operatorname{sen} \theta, \quad a > 0$

97. ***Cicloide*** Emplear las ecuaciones paramétricas

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta) \quad \text{y} \quad y = a(1 - \cos \theta),\ a > 0$$

para responder lo siguiente.

a) Hallar dy/dx y d^2y/dx^2.

b) Hallar las ecuaciones de la recta tangente en el punto en el que $\theta = \pi/6$.

c) Localizar todos los puntos (si los hay) de tangencia horizontal.

d) Calcular dónde es la curva cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.

e) Hallar la longitud de un arco de la curva.

98. Emplear las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2\sqrt{3} \quad \text{y} \quad y = 3t - \frac{1}{3}t^3$$

para los incisos siguientes.

a) Emplear una herramienta de graficación para trazar la curva en el intervalo $-3 \leq t \leq 3$.

b) Hallar dy/dx y d^2y/dx^2.

c) Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto $\left(\sqrt{3}, \frac{8}{3}\right)$.

d) Hallar la longitud de la curva.

e) Hallar el área de la superficie generada por revolución de la curva en torno al eje x.

99. ***Evolvente o involuta de círculo*** La evolvente o involuta de un círculo está descrita por el extremo P de una cuerda que se mantiene tensa mientras se desenrolla de un carrete que no gira (ver la figura). Mostrar que la siguiente es una representación paramétrica de la evolvente o involuta

$$x = r(\cos \theta + \theta \operatorname{sen} \theta) \quad \text{y} \quad y = r(\operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta).$$

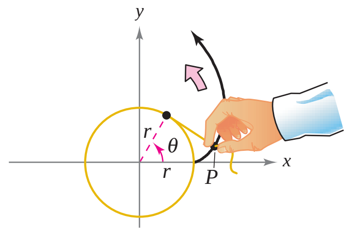


Figura para 99

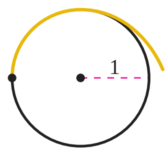


Figura para 100

100. ***Evolvente o involuta de un círculo*** La figura muestra un segmento de cuerda sujeto a un círculo de radio 1. La cuerda es justo lo suficientemente larga para llegar al lado opuesto del círculo. Encontrar el área que se cubre cuando la cuerda se desenrolla en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

101. *a*) Usar una herramienta de graficación para trazar la curva dada por

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad -20 \leq t \leq 20.$$

b) Describir la gráfica y confirmar la respuesta en forma analítica.

c) Analizar la velocidad a la cual se traza la curva cuando t aumenta de -20 a 20.

102. ***Tractriz*** Una persona se mueve desde el origen a lo largo del eje y positivo tirando un peso atado al extremo de una cuerda de 12 metros de largo. Inicialmente, el peso está situado en el punto $(12, 0)$.

a) En el ejercicio 96 de la sección 8.7 se mostró que la trayectoria del peso se describe mediante la siguiente ecuación rectangular

$$y = -12 \ln\left(\frac{12 - \sqrt{144 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{144 - x^2}$$

donde $0 < x \leq 12$. Usar una herramienta de graficación para representar la ecuación rectangular.

b) Usar una herramienta de graficación para trazar la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = 12 \operatorname{sech} \frac{t}{12} \quad \text{y} \quad y = t - 12 \tanh \frac{t}{12}$$

donde $t \geq 0$. Comparar esta gráfica con la del inciso *a*). ¿Qué gráfica (si hay alguna) representa mejor la trayectoria?

c) Emplear las ecuaciones paramétricas de la tractriz para verificar que la distancia de la intersección con el eje y de la recta tangente al punto de tangencia es independiente de la ubicación del punto de tangencia.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 103 y 104, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

103. Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces $d^2y/dx^2 = g''(t)/f''(t)$.

104. La curva dada por $x = t^3$, $y = t^2$ tiene una tangente horizontal en el origen puesto que $dy/dt = 0$ cuando $t = 0$.

105. ***Cinta de grabación*** Otro método que se puede usar para solucionar el ejemplo 5 es encontrar el área del carrete con un radio interior de 0.5 pulgadas y un radio exterior de 2 pulgadas, y después usar la fórmula para el área del rectángulo cuyo ancho es de 0.001 pulgadas. Utilizar este método para determinar cuánta cinta se necesita para llenar el carrete.

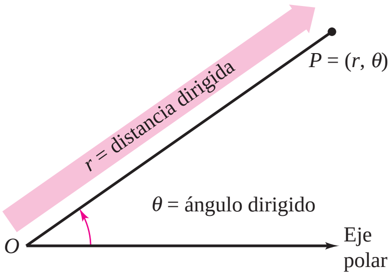
10.4 Coordenadas polares y gráficas polares

- **Comprender el sistema de coordenadas polares.**
- **Expresar coordenadas y ecuaciones rectangulares en forma polar y viceversa.**
- **Trazar la gráfica de una ecuación dada en forma polar.**
- **Hallar la pendiente de una recta tangente a una gráfica polar.**
- **Identificar diversos tipos de gráficas polares especiales.**

Coordenadas polares

Hasta ahora las gráficas se han venido representando como colecciones de puntos (x, y) en el sistema de coordenadas rectangulares. Las ecuaciones correspondientes a estas gráficas han estado en forma rectangular o en forma paramétrica. En esta sección se estudiará un sistema de coordenadas denominado **sistema de coordenadas polares**.

Para formar el sistema de coordenadas polares en el plano, se fija un punto O, llamado **polo** (u **origen**), y a partir de O se traza un rayo inicial llamado **eje polar**, como se muestra en la figura 10.36. A continuación, a cada punto P en el plano se le asignan **coordenadas polares** (r, θ), como sigue.

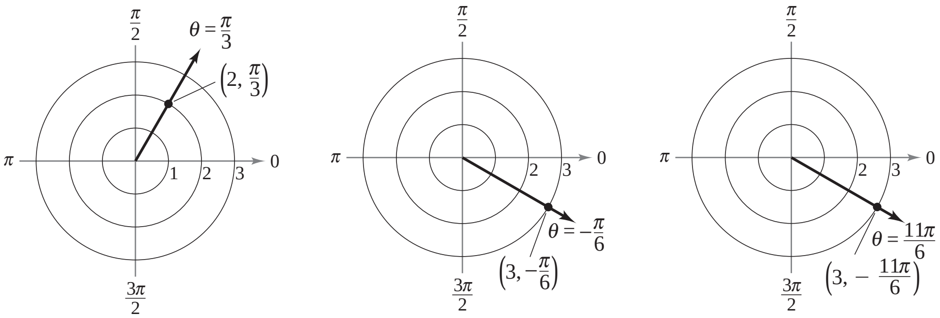


Coordenadas polares
Figura 10.36

r = *distancia dirigida* de O a P

θ = *ángulo dirigido*, en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje polar hasta el segmento $\overline{OP}$

La figura 10.37 muestra tres puntos en el sistema de coordenadas polares. Obsérvese que en este sistema es conveniente localizar los puntos con respecto a una retícula de circunferencias concéntricas cortadas por **rectas radiales** que pasan por el polo.



a) *b)* *c)*
Figura 10.37

En coordenadas rectangulares, cada punto (x, y) tiene una representación única. Esto no sucede con las coordenadas polares. Por ejemplo, las coordenadas (r, θ) y $(r, 2\pi + \theta)$ representan el mismo punto [ver los incisos *b*) y *c*) de la figura 10.37]. También, como r es una *distancia dirigida*, las coordenadas (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto. En general, el punto (r, θ) puede expresarse como

$$(r, \theta) = (r, \theta + 2n\pi)$$

o

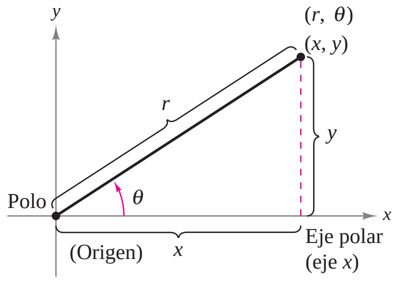
$$(r, \theta) = (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

donde n es cualquier entero. Además, el polo está representado por $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

COORDENADAS POLARES

El matemático al que se le atribuye haber usado por primera vez las coordenadas polares es James Bernoulli, quien las introdujo en 1691. Sin embargo, ciertas evidencias señalan la posibilidad de que fuera Isaac Newton el primero en usarlas.

Transformación (o cambio) de coordenadas



Relación entre coordenadas polares y rectangulares
Figura 10.38

Para establecer una relación entre coordenadas polares y rectangulares, se hace coincidir el eje polar con el eje x positivo y el polo con el origen, como se ilustra en la figura 10.38. Puesto que (x, y) se encuentra en un círculo de radio r, se sigue que $r^2 = x^2 + y^2$. Para $r > 0$, la definición de las funciones trigonométricas implica que

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}.$$

Si $r < 0$, estas relaciones también son válidas, como se puede verificar.

TEOREMA 10.10 TRANSFORMACIÓN (O CAMBIO) DE COORDENADAS

Las coordenadas polares (r, θ) de un punto están relacionadas con las coordenadas rectangulares (x, y) de ese punto como sigue.

1. $x = r\cos\theta$ **2.** $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$y = r\operatorname{sen}\theta$ $r^2 = x^2 + y^2$

EJEMPLO 1 Transformación (o cambio) de coordenadas polares a rectangulares

a) Dado el punto $(r, \theta) = (2, \pi)$,

$$x = r\cos\theta = 2\cos\pi = -2 \qquad \text{y} \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\pi = 0.$$

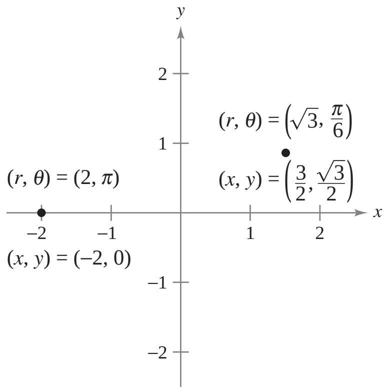
Por tanto, las coordenadas rectangulares son $(x, y) = (-2, 0)$.

b) Dado el punto $(r, \theta) = \left(\sqrt{3}, \pi/6\right)$,

$$x = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad y = \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por tanto, las coordenadas rectangulares son $(x, y) = \left(3/2, \sqrt{3}/2\right)$.

Ver la figura 10.39.



Para pasar de coordenadas polares a rectangulares, se hace $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$.
Figura 10.39

EJEMPLO 2 Transformación (o cambio) de coordenadas rectangulares a polares

a) Dado el punto del segundo cuadrante $(x, y) = (-1, 1)$,

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

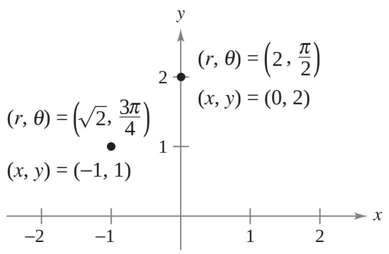
Como θ se eligió en el mismo cuadrante que (x, y), se debe usar un valor positivo para r.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Esto implica que *un* conjunto de coordenadas polares es $(r, \theta) = \left(\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$.

b) Dado que el punto $(x, y) = (0, 2)$ se encuentra en el eje y positivo, se elige $\theta = \pi/2$ y $r = 2$, y un conjunto de coordenadas polares es $(r, \theta) = (2, \pi/2)$.

Ver la figura 10.40.



Para pasar de coordenadas rectangulares a polares, se toma $\tan\theta = y/x$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Figura 10.40

Gráficas polares

Una manera de trazar la gráfica de una ecuación polar consiste en transformarla a coordenadas rectangulares para luego trazar la gráfica de la ecuación rectangular.

EJEMPLO 3 Trazado de ecuaciones polares

Describir la gráfica de cada ecuación polar. Confirmar cada descripción transformando la ecuación a ecuación rectangular.

a) $r = 2$ ***b)*** $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ ***c)*** $r = \sec\theta$

Solución

a) La gráfica de la ecuación polar $r = 2$ consta de todos los puntos que se encuentran a dos unidades del polo. En otras palabras, esta gráfica es la circunferencia que tiene su centro en el origen y radio 2. (Ver la figura 10.41*a*.) Esto se puede confirmar utilizando la relación $r^2 = x^2 + y^2$ para obtener la ecuación rectangular

$$x^2 + y^2 = 2^2. \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

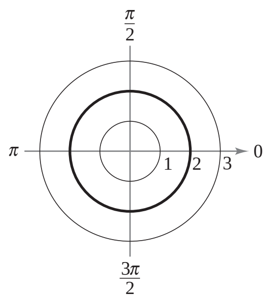
b) La gráfica de la ecuación polar $\theta = \pi/3$ consta de todos los puntos sobre la semirrecta que forma un ángulo de $\pi/3$ con el semieje x positivo. (Ver la figura 10.41*b*.) Para confirmar esto, se puede utilizar la relación $\tan\theta = y/x$ para obtener la ecuación rectangular

$$y = \sqrt{3}\,x. \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

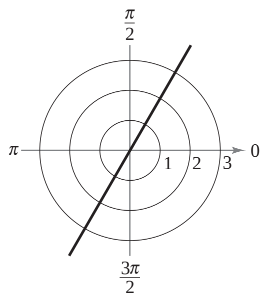
c) La gráfica de la ecuación polar $r = \sec\theta$ no resulta evidente por inspección simple, por lo que hay que empezar por pasarla a la forma rectangular mediante la relación $r\cos\theta = x$.

$$r = \sec\theta \qquad \text{Ecuación polar.}$$
$$r\cos\theta = 1$$
$$x = 1 \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

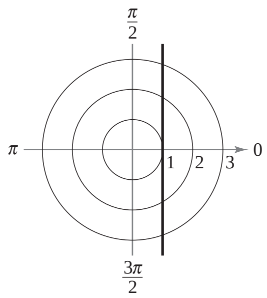
Por la ecuación rectangular se puede ver que la gráfica es una recta vertical. (Ver la figura 10.41*c*.)



a) Círculo: $r = 2$



b) Recta radial: $\theta = \dfrac{\pi}{3}$



c) Recta vertical: $r = \sec\theta$

Figura 10.41

TECNOLOGÍA Dibujar *a mano* las gráficas de ecuaciones polares complicadas puede ser tedioso. Sin embargo, con el empleo de la tecnología, la tarea no es difícil. Si la herramienta de graficación que se emplea cuenta con modo *polar*, usarlo para trazar la gráfica de las ecuaciones de la serie de ejercicios. Si la herramienta de graficación no cuenta con modo *polar*, pero sí con modo *paramétrico*, se puede trazar la gráfica de $r = f(\theta)$ expresando la ecuación como

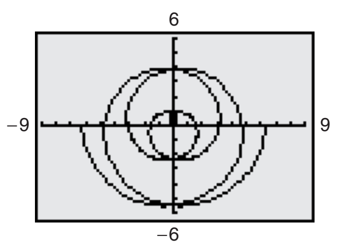
$$x = f(\theta)\cos\theta$$
$$y = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta.$$

Por ejemplo, la gráfica de $r = \frac{1}{2}\theta$ que se muestra en la figura 10.42 se generó con una herramienta de graficación en modo *paramétrico*. La gráfica de la ecuación se obtuvo usando las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{1}{2}\theta\cos\theta$$

$$y = \frac{1}{2}\theta\,\text{sen}\,\theta$$

con valores de θ que van desde -4π hasta 4π. Esta curva es de la forma $r = a\theta$ y se denomina **espiral de Arquímedes**.



Espiral de Arquímedes

Figura 10.42

EJEMPLO 4 Trazado de una gráfica polar

Dibujar la gráfica de $r = 2\cos 3\theta$.

Solución Para empezar, se expresa la ecuación polar en forma paramétrica.

$$x = 2\cos 3\theta \cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = 2\cos 3\theta \operatorname{sen}\theta$$

Tras experimentar un poco, se encuentra que la curva completa, la cual se llama **curva rosa**, puede dibujarse haciendo variar a θ desde 0 hasta π, como se muestra en la figura 10.43. Si se traza la gráfica con una herramienta de graficación, se verá que haciendo variar a θ desde 0 hasta 2π, se traza la curva entera *dos veces*.

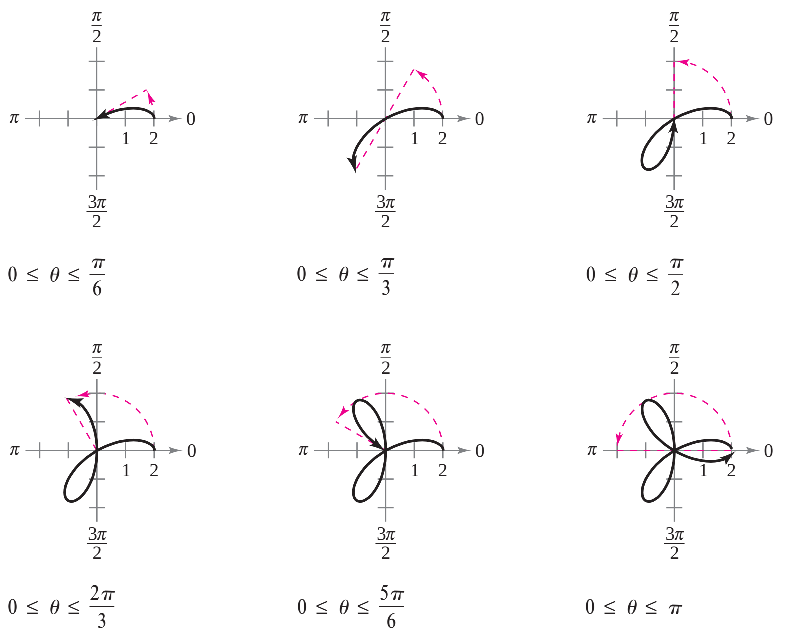


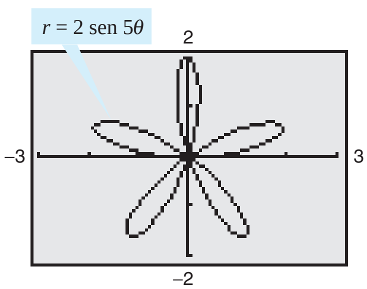
Figura 10.43

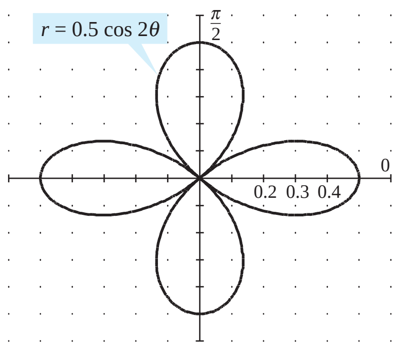
NOTA Una forma de bosquejar la gráfica de $r = 2\cos 3\theta$ a mano, es elaborar una tabla de valores.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
r	2	0	-2	0	2

Si se amplía la tabla y se representan los puntos gráficamente se obtiene la curva mostrada en el ejemplo 4. ■

Usar una herramienta de graficación para experimentar con otras curvas rosa (estas curvas son de la forma $r = a\cos n\theta$ o $r = a\operatorname{sen} n\theta$). Por ejemplo, las curvas que se muestran en la figura 10.44 son otros dos tipos de curvas rosa.





Curvas rosa
Figura 10.44

Generada con Mathematica

Pendiente y rectas tangentes

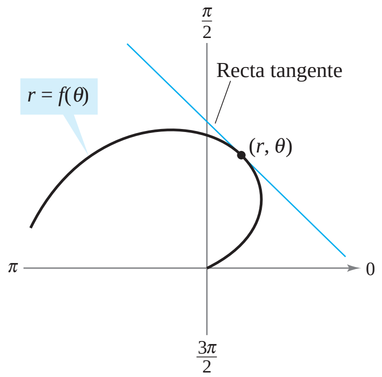
Para encontrar la pendiente de una recta tangente a una gráfica polar, considerar una función diferenciable (o derivable) $r = f(\theta)$. Para encontrar la pendiente en forma polar, se usan las ecuaciones paramétricas

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta.$$

Mediante el uso de la forma paramétrica de dy/dx dada en el teorema 10.7, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta}{-f(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f'(\theta)\cos\theta}$$

con lo cual se establece el teorema siguiente.



Recta tangente a una curva polar
Figura 10.45

TEOREMA 10.11 PENDIENTE EN FORMA POLAR

Si f es una función diferenciable (o derivable) de θ, entonces la *pendiente* de la recta tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en el punto (r, θ) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta}{-f(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f'(\theta)\cos\theta}$$

siempre que $dx/d\theta \neq 0$ en (r, θ). (Ver la figura 10.45.)

En el teorema 10.11 se pueden hacer las observaciones siguientes.

1. Las soluciones $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ dan una tangente horizontal, siempre que $\dfrac{dx}{d\theta} \neq 0$.

2. Las soluciones $\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ dan una tangente vertical, siempre que $\dfrac{dy}{d\theta} \neq 0$.

Si $dy/d\theta$ y $dx/d\theta$ *simultáneamente* son 0, no se puede extraer ninguna conclusión respecto a las rectas tangentes.

EJEMPLO 5 Hallar las rectas tangentes horizontales y verticales

Hallar las rectas tangentes horizontales y verticales a $r = \text{sen}\,\theta$, $0 \le \theta \le \pi$.

Solución Para empezar se expresa la ecuación en forma paramétrica.

$$x = r\cos\theta = \text{sen}\,\theta\cos\theta$$

y

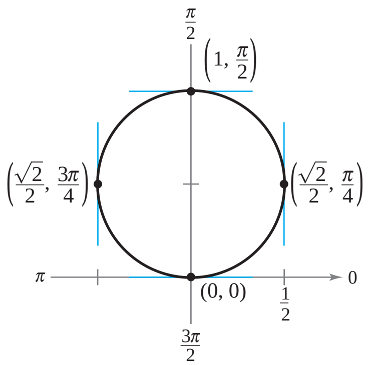
$$y = r\,\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\theta = \text{sen}^2\,\theta$$

Después, se derivan x y y con respecto de θ y se iguala a 0 cada una de las derivadas.

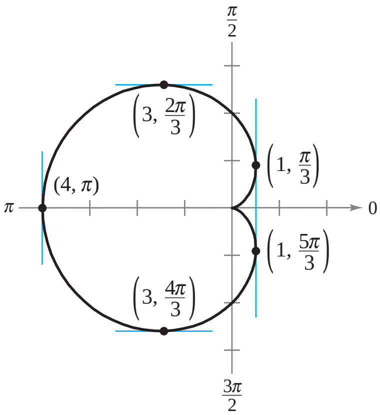
$$\frac{dx}{d\theta} = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta = \cos 2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \text{sen}\,2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0, \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la gráfica tiene rectas tangentes verticales en $\left(\sqrt{2}/2, \pi/4\right)$ y $\left(\sqrt{2}/2, 3\pi/4\right)$, y tiene rectas tangentes horizontales en $(0, 0)$ y $(1, \pi/2)$, como se muestra en la figura 10.46.



Rectas tangentes horizontales y verticales a $r = \text{sen}\,\theta$
Figura 10.46



Rectas tangentes horizontales y verticales de $r = 2(1 - \cos\theta)$
Figura 10.47

EJEMPLO 6 Hallar las rectas tangentes horizontales y verticales

Hallar las rectas tangentes horizontales y verticales a la gráfica de $r = 2(1 - \cos\theta)$.

Solución Se usa $y = r \operatorname{sen}\theta$, se deriva y $dy/d\theta$ se iguala a 0.

$$y = r \operatorname{sen}\theta = 2(1 - \cos\theta) \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2[(1 - \cos\theta)(\cos\theta) + \operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta)]$$

$$= -2(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$$

Por tanto, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ y $\cos\theta = 1$, y se concluye que $dy/d\theta = 0$ cuando $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ y 0. De manera semejante, al emplear $x = r\cos\theta$, se tiene

$$x = r\cos\theta = 2\cos\theta - 2\cos^2\theta$$

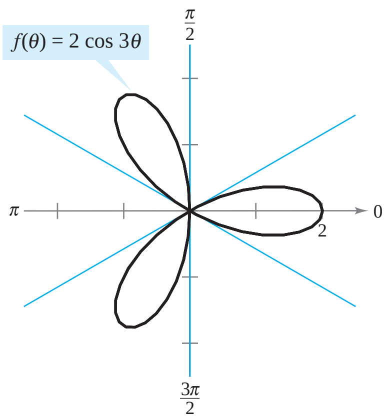
$$\frac{dx}{d\theta} = -2\operatorname{sen}\theta + 4\cos\theta \operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\theta(2\cos\theta - 1) = 0.$$

Por tanto, $\operatorname{sen}\theta = 0$ o $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, y se concluye que $dy/d\theta = 0$ cuando $\theta = 0, \pi, \pi/3$ y $5\pi/3$. A partir de estos resultados y de la gráfica que se presenta en la figura 10.47, se concluye que la gráfica tiene tangentes horizontales en $(3, 2\pi/3)$ y $(3, 4\pi/3)$, y tangentes verticales en $(1, \pi/3)$, $(1, 5\pi/3)$ y $(4, \pi)$. A esta gráfica se le llama **cardioide**. Obsérvese que cuando $\theta = 0$ ambas derivadas ($dy/d\theta$ y $dx/d\theta$) son cero (es decir, se anulan). Sin embargo, esta única información no permite saber si la gráfica tiene una recta tangente horizontal o vertical en el polo. Pero a partir de la figura 10.47 se puede observar que la gráfica tiene una cúspide (o punto anguloso o cuspidal) en el polo.

El teorema 10.11 tiene una consecuencia importante. Supóngase que la gráfica de $r = f(\theta)$ pasa por el polo cuando $\theta = \alpha$ y $f'(\alpha) \neq 0$. Entonces la fórmula para dy/dx se simplifica como sigue.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\alpha)\operatorname{sen}\alpha + f(\alpha)\cos\alpha}{f'(\alpha)\cos\alpha - f(\alpha)\operatorname{sen}\alpha} = \frac{f'(\alpha)\operatorname{sen}\alpha + 0}{f'(\alpha)\cos\alpha - 0} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

Por tanto, la recta $\theta = \alpha$ es tangente a la gráfica en el polo, $(0, \alpha)$.



Esta curva rosa tiene, en el polo, tres rectas tangentes ($\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/2$ y $\theta = 5\pi/6$)
Figura 10.48

TEOREMA 10.12 RECTAS TANGENTES EN EL POLO

Si $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$, entonces la recta $\theta = \alpha$ es tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en el polo.

El teorema 10.12 es útil porque establece que los ceros de $r = f(\theta)$ pueden usarse para encontrar las rectas tangentes en el polo. Obsérvese que, puesto que una curva polar puede cruzar el polo más de una vez, en el polo puede haber más de una recta tangente. Por ejemplo, la curva rosa

$$f(\theta) = 2\cos 3\theta$$

tiene tres rectas tangentes en el polo, como se ilustra en la figura 10.48. En esta curva, $f(\theta) = 2\cos 3\theta$ es 0 cuando θ es $\pi/6$, $\pi/2$, y $5\pi/6$. La derivada $f'(\theta) = -6\operatorname{sen}\theta$ no es 0 en estos valores de θ.

Gráficas polares especiales

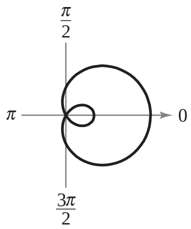
Varios tipos importantes de gráficas tienen ecuaciones que son más simples en forma polar que en forma rectangular. Por ejemplo, la ecuación polar de un círculo de radio a y centro en el origen es simplemente $r = a$. Más adelante se verán las ventajas que esto tiene. Por ahora, se muestran abajo algunos tipos de gráficas cuyas ecuaciones son más simples en forma polar. (Las cónicas se abordan en la sección 10.6.)

Caracoles

$r = a \pm b\cos\theta$

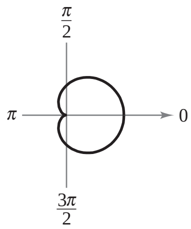
$r = a \pm b \operatorname{sen}\theta$

$(a > 0, b > 0)$



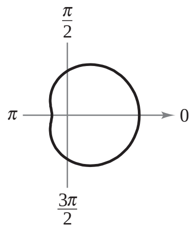
$\frac{a}{b} < 1$

Caracol con lazo interior



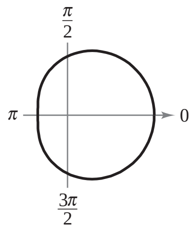
$\frac{a}{b} = 1$

Cardioide (forma de corazón)



$1 < \frac{a}{b} < 2$

Caracol con hoyuelo



$\frac{a}{b} \geq 2$

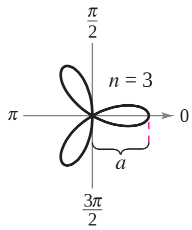
Caracol convexo

Curvas rosa

n pétalos si n es impar

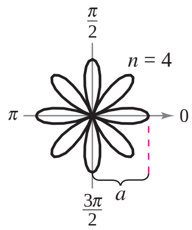
$2n$ pétalos si n es par

$(n \geq 2)$



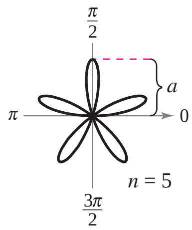
$r = a\cos n\theta$

Curva rosa



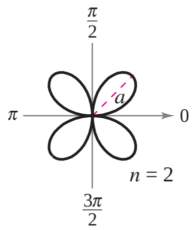
$r = a\cos n\theta$

Curva rosa



$r = a \operatorname{sen} n\theta$

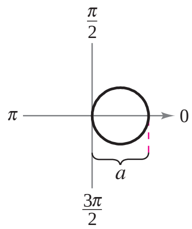
Curva rosa



$r = a \operatorname{sen} n\theta$

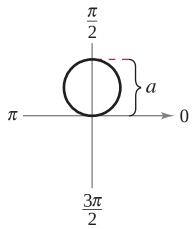
Curva rosa

Círculos y lemniscatas



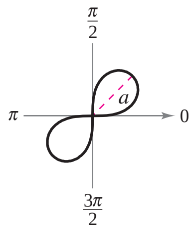
$r = a\cos\theta$

Círculo



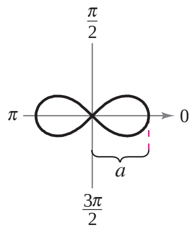
$r = a \operatorname{sen}\theta$

Círculo



$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$

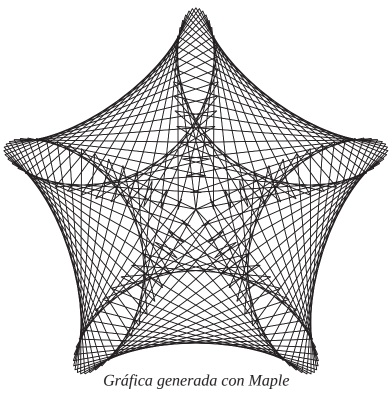
Lemniscata



$r^2 = a^2\cos 2\theta$

Lemniscata

TECNOLOGÍA Las curvas rosa descritas arriba son de la forma $r = a\cos n\theta$ o $r = a \operatorname{sen} n\theta$, donde n es un entero positivo mayor o igual a 2. Usar una herramienta de graficación para trazar las gráficas de $r = a\cos n\theta$ o $r = a \operatorname{sen} n\theta$ con valores no enteros de n. ¿Son estas gráficas también curvas rosa? Por ejemplo, trazar la gráfica de $r = \cos\frac{2}{3}\theta$, $0 \leq \theta \leq 6\pi$.



Gráfica generada con Maple

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre curvas rosa y otras curvas relacionadas con ellas, ver el artículo "A Rose is a Rose..." de Peter M. Maurer en *The American Mathematical Monthly*. La gráfica generada por computadora que se observa al lado izquierdo, es resultado de un algoritmo que Maurer llama "La rosa".

10.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, representar gráficamente el punto dado en coordenadas polares y hallar las coordenadas rectangulares correspondientes.

1. $(8, \pi/2)$
2. $(-2, 5\pi/3)$
3. $(-4, -3\pi/4)$
4. $(0, -7\pi/6)$
5. $(\sqrt{2}, 2.36)$
6. $(-3, -1.57)$

En los ejercicios 7 a 10, emplear la función *ángulo* de una herramienta de graficación para encontrar las coordenadas rectangulares del punto dado en coordenadas polares. Representar gráficamente el punto.

7. $(7, 5\pi/4)$
8. $(-2, 11\pi/6)$
9. $(-4.5, 3.5)$
10. $(9.25, 1.2)$

En los ejercicios 11 a 16, se dan las coordenadas rectangulares de un punto. Localizar gráficamente el punto y hallar *dos* conjuntos de coordenadas polares del punto con $0 \leq \theta < 2\pi$.

11. $(2, 2)$
12. $(0, -6)$
13. $(-3, 4)$
14. $(4, -2)$
15. $(-1, -\sqrt{3})$
16. $(3, -\sqrt{3})$

En los ejercicios 17 a 20, emplear la función *ángulo* de una herramienta de graficación para hallar un conjunto de coordenadas polares del punto dado en coordenadas rectangulares.

17. $(3, -2)$
18. $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$
19. $\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{2}\right)$
20. $(0, -5)$

21. Represente gráficamente el punto (4, 3.5) si el punto está dado *a*) en coordenadas rectangulares y *b*) en coordenadas polares.

22. ***Razonamiento gráfico***

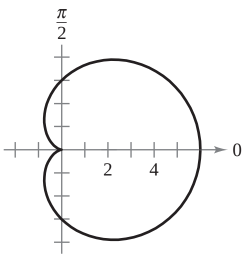
a) En una herramienta de graficación, seleccionar formato de ventana para coordenadas polares y colocar el cursor en cualquier posición fuera de los ejes. Mover el cursor en sentido horizontal y en sentido vertical. Describir todo cambio en las coordenadas de los puntos.

b) En una herramienta de graficación, seleccionar el formato de ventana para coordenadas polares y colocar el cursor en cualquier posición fuera de los ejes. Mover el cursor en sentido horizontal y en sentido vertical. Describir todo cambio en las coordenadas de los puntos.

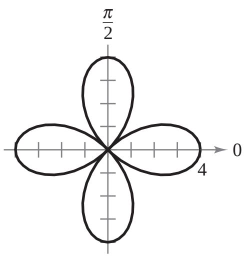
c) ¿Por qué difieren los resultados obtenidos en los incisos *a*) y *b*)?

En los ejercicios 23 a 26, hacer que corresponda la gráfica con su ecuación polar. [Las gráficas están etiquetadas *a*), *b*), *c*) y *d*).]

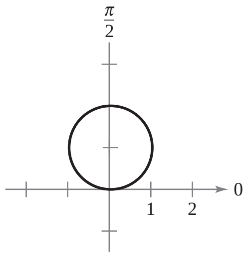
***a*)**



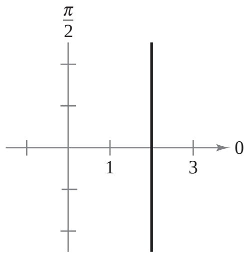
***b*)**



***c*)**



***d*)**



23. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$
24. $r = 4 \cos 2\theta$
25. $r = 3(1 + \cos \theta)$
26. $r = 2 \sec \theta$

En los ejercicios 27 a 36, transformar la ecuación rectangular a la forma polar y trazar su gráfica.

27. $x^2 + y^2 = 9$
28. $x^2 - y^2 = 9$
29. $x^2 + y^2 = a^2$
30. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$
31. $y = 8$
32. $x = 10$
33. $3x - y + 2 = 0$
34. $xy = 4$
35. $y^2 = 9x$
36. $(x^2 + y^2)^2 - 9(x^2 - y^2) = 0$

En los ejercicios 37 a 46, pasar la ecuación polar a la forma rectangular y trazar su gráfica.

37. $r = 4$
38. $r = -5$
39. $r = \operatorname{sen} \theta$
40. $r = 5 \cos \theta$
41. $r = \theta$
42. $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$
43. $r = 3 \sec \theta$
44. $r = 2 \csc \theta$
45. $r = \sec \theta \tan \theta$
46. $r = \cot \theta \csc \theta$

En los ejercicios 47 a 56, emplear una herramienta de graficación para representar la ecuación polar. Hallar un intervalo para θ en el que la gráfica se trace *sólo una vez*.

47. $r = 2 - 5 \cos \theta$
48. $r = 3(1 - 4 \operatorname{sen} \theta)$
49. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$
50. $r = 4 + 3 \cos \theta$
51. $r = \dfrac{2}{1 + \cos \theta}$
52. $r = \dfrac{2}{4 - 3 \operatorname{sen} \theta}$
53. $r = 2 \cos\left(\dfrac{3\theta}{2}\right)$
54. $r = 3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{5\theta}{2}\right)$
55. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$
56. $r^2 = \dfrac{1}{\theta}$

57. Pasar la ecuación

$$r = 2(h \cos \theta + k \operatorname{sen} \theta)$$

a la forma rectangular y verificar que sea la ecuación de un círculo. Hallar el radio y las coordenadas rectangulares de su centro.

58. ***Fórmula para la distancia***

a) Verificar que la fórmula para la distancia entre dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) dados en coordenadas polares es

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

b) Describir las posiciones de los puntos, en relación uno con otro, si $\theta_1 = \theta_2$. Simplificar la fórmula de la distancia para este caso. ¿Es la simplificación lo que se esperaba? Explicar por qué.

c) Simplificar la fórmula de la distancia si $\theta_1 - \theta_2 = 90°$. ¿Es la simplificación lo que se esperaba? Explicar por qué.

d) Elegir dos puntos en el sistema de coordenadas polares y encontrar la distancia entre ellos. Luego elegir representaciones polares diferentes para los mismos dos puntos y aplicar la fórmula para la distancia. Analizar el resultado.

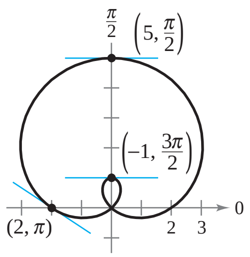
En los ejercicios 59 a 62, usar el resultado del ejercicio 58 para aproximar la distancia entre los dos puntos descritos en coordenadas polares.

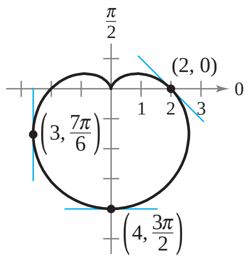
59. $\left(1, \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ **60.** $\left(8, \frac{7\pi}{4}\right)$, $(5, \pi)$

61. $(2, 0.5)$, $(7, 1.2)$ **62.** $(4, 2.5)$, $(12, 1)$

En los ejercicios 63 y 64, hallar *dy/dx* y las pendientes de las rectas tangentes que se muestran en las gráficas de las ecuaciones polares.

63. $r = 2 + 3\,\text{sen}\,\theta$ **64.** $r = 2(1 - \text{sen}\,\theta)$





En los ejercicios 65 a 68, usar una herramienta de graficación y *a*) trazar la gráfica de la ecuación polar, *b*) dibujar la recta tangente en el valor dado de θ y *c*) hallar *dy/dx* en el valor dado de θ. (*Sugerencia:* Tomar incrementos de θ iguales a $\pi/24$.)

65. $r = 3(1 - \cos\theta)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ **66.** $r = 3 - 2\cos\theta$, $\theta = 0$

67. $r = 3\,\text{sen}\,\theta$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ **68.** $r = 4$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

En los ejercicios 69 y 70, hallar los puntos de tangencia horizontal y vertical (si los hay) a la curva polar.

69. $r = 1 - \text{sen}\,\theta$ **70.** $r = a\,\text{sen}\,\theta$

En los ejercicios 71 y 72, hallar los puntos de tangencia horizontal (si los hay) a la curva polar.

71. $r = 2\csc\theta + 3$ **72.** $r = a\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta$

En los ejercicios 73 a 76, usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar y hallar todos los puntos de tangencia horizontal.

73. $r = 4\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta$ **74.** $r = 3\cos 2\theta\sec\theta$

75. $r = 2\csc\theta + 5$ **76.** $r = 2\cos(3\theta - 2)$

En los ejercicios 77 a 84, dibujar la gráfica de la ecuación polar y hallar las tangentes en el polo.

77. $r = 3\,\text{sen}\,\theta$ **78.** $r = 5\cos\theta$

79. $r = 2(1 - \text{sen}\,\theta)$ **80.** $r = 3(1 - \cos\theta)$

81. $r = 2\cos 3\theta$ **82.** $r = -\text{sen}\,5\theta$

83. $r = 3\,\text{sen}\,2\theta$ **84.** $r = 3\cos 2\theta$

En los ejercicios 85 a 96, trazar la gráfica de la ecuación polar.

85. $r = 8$ **86.** $r = 1$

87. $r = 4(1 + \cos\theta)$ **88.** $r = 1 + \text{sen}\,\theta$

89. $r = 3 - 2\cos\theta$ **90.** $r = 5 - 4\,\text{sen}\,\theta$

91. $r = 3\csc\theta$ **92.** $r = \dfrac{6}{2\,\text{sen}\,\theta - 3\cos\theta}$

93. $r = 2\theta$ **94.** $r = \dfrac{1}{\theta}$

95. $r^2 = 4\cos 2\theta$ **96.** $r^2 = 4\,\text{sen}\,\theta$

En los ejercicios 97 a 100, usar una herramienta de graficación para representar la ecuación y mostrar que la recta dada es una asíntota de la gráfica.

	Nombre de la gráfica	*Ecuación polar*	*Asíntota*
97.	Concoide	$r = 2 - \sec\theta$	$x = -1$
98.	Concoide	$r = 2 + \csc\theta$	$y = 1$
99.	Espiral hiperbólica	$r = 2/\theta$	$y = 2$
100.	Estrofoide	$r = 2\cos 2\theta\sec\theta$	$x = -2$

Desarrollo de conceptos

101. Describir las diferencias entre el sistema de coordenadas rectangulares y el sistema de coordenadas polares.

102. Dar las ecuaciones para pasar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares y viceversa.

103. ¿Cómo se determinan las pendientes de rectas tangentes en coordenadas polares? ¿Qué son las rectas tangentes en el polo y cómo se determinan?

Para discusión

104. Describir las gráficas de las siguientes ecuaciones polares.

a) $r = 7$ *b*) $r^2 = 7$

c) $r = \dfrac{7}{\cos\theta}$ *d*) $r = \dfrac{7}{\text{sen}\,\theta}$

e) $r = 7\cos\theta$ *f*) $r = 7\,\text{sen}\,\theta$

105. Trazar la gráfica de $r = 4\,\text{sen}\,\theta$ en el intervalo dado.

a) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ *b*) $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ *c*) $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

106. ***Para pensar*** Utilizar una herramienta graficadora para representar la ecuación polar $r = 6[1 + \cos(\theta - \phi)]$ para *a*) $\phi = 0$, *b*) $\phi = \pi/4$ y *c*) $\phi = \pi/2$. Usar las gráficas para describir el efecto del ángulo ϕ. Escribir la ecuación como función de $\text{sen}\,\theta$ para el inciso *c*).

107. Verificar que si la curva correspondiente a la ecuación polar $r = f(\theta)$ gira un ángulo ϕ, alrededor del polo, entonces la ecuación de la curva girada es $r = f(\theta - \phi)$.

108. La forma polar de una ecuación de una curva es $r = f(\operatorname{sen}\theta)$. Comprobar que la forma se convierte en

a) $r = f(-\cos\theta)$ si la curva gira $\pi/2$ radianes alrededor del polo en sentido contrario a las manecillas del reloj.

b) $r = f(-\operatorname{sen}\theta)$ si la curva gira π radianes alrededor del polo en sentido contrario a las manecillas del reloj.

c) $r = f(\cos\theta)$ si la curva gira $3\pi/2$ radianes alrededor del polo en sentido contrario a las manecillas del reloj.

En los ejercicios 109 a 112, usar los resultados de los ejercicios 107 y 108.

109. Dar la ecuación del caracol $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$ después de girar la cantidad indicada. Utilizar una herramienta de graficación para representar el giro del caracol.

a) $\dfrac{\pi}{4}$ *b)* $\dfrac{\pi}{2}$ *c)* π *d)* $\dfrac{3\pi}{2}$

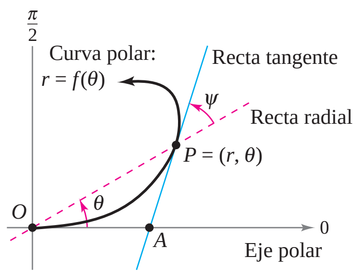
110. Dar una ecuación para la curva rosa $r = 2\operatorname{sen}2\theta$ después de girar la cantidad dada. Verificar los resultados usando una herramienta de graficación para representar el giro de la curva rosa.

a) $\dfrac{\pi}{6}$ *b)* $\dfrac{\pi}{2}$ *c)* $\dfrac{2\pi}{3}$ *d)* π

111. Dibujar la gráfica de cada ecuación.

a) $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$ *b)* $r = 1 - \operatorname{sen}\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

112. Demostrar que la tangente del ángulo $\psi = 0 \le \psi \le \pi/2)$ entre la recta radial y la recta tangente en el punto (r, θ) en la gráfica de $r = f(\theta)$ (ver la figura) está dada por $\tan\psi = |r/(dr/d\theta)|$.



En los ejercicios 113 a 118, usar los resultados del ejercicio 112 para hallar el ángulo ψ entre las rectas radial y tangente a la gráfica en el valor indicado de θ. Usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar, de la recta radial y la recta tangente en el valor indicado de θ. Identificar el ángulo ψ.

	Ecuación polar	*Valor de θ*
113.	$r = 2(1 - \cos\theta)$	$\theta = \pi$
114.	$r = 3(1 - \cos\theta)$	$\theta = 3\pi/4$
115.	$r = 2\cos 3\theta$	$\theta = \pi/4$
116.	$r = 4\operatorname{sen}2\theta$	$\theta = \pi/6$
117.	$r = \dfrac{6}{1 - \cos\theta}$	$\theta = 2\pi/3$
118.	$r = 5$	$\theta = \pi/6$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 119 a 122, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre que es falsa.**

119. Si (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) representan el mismo punto en el sistema de coordenadas polares, entonces $|r_1| = |r_2|$.

120. Si (r, θ_1) y (r, θ_2) representan el mismo punto en el sistema de coordenadas polares, entonces $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi n$ para algún entero n.

121. Si $x > 0$, entonces el punto (x, y) en el sistema de coordenadas rectangulares (o cartesianas) puede representarse mediante (r, θ) en el sistema de coordenadas polares, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan(y/x)$.

122. Las ecuaciones polares $r = \operatorname{sen}2\theta$ y $r = -\operatorname{sen}2\theta$ tienen la misma gráfica.

PROYECTO DE TRABAJO

Arte anamórfico

El arte anamórfico parece distorsionado, pero cuando se ve desde un particular punto de vista o con un dispositivo como un espejo parece que está normal. Usar las siguientes transformaciones anamórficas

$$r = y + 16 \quad \text{y} \quad \theta = -\frac{\pi}{8}x, \quad -\frac{3\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$$

para dibujar la imagen polar transformada de la gráfica rectangular. Cuando se observa la reflexión (en un espejo cilíndrico centrado en el polo) de una imagen polar desde el eje polar, el espectador ve la imagen rectangular original.

a) $y = 3$ *b)* $x = 2$ *c)* $y = x + 5$ *d)* $x^2 + (y - 5)^2 = 5^2$

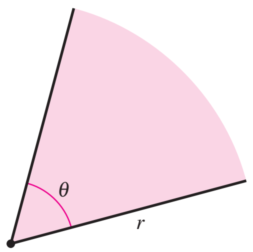
Tomado de Millington-Barnard Collection of Scientific Apparatus, ca 1855 The University of Mississippi Museum, Oxford, Mississippi.

Este ejemplo de arte anamórfico es de la Colección Millington-Barnard en la Universidad de Mississippi. Cuando se observa el reflejo de la "pintura polar" transformada en el espejo, el espectador ve el arte distorsionado en sus proporciones adecuadas.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre arte anamórfico, consultar al artículo "Anamorphisms" de Philip Hickin en *Mathematical Gazette*.

10.5 Área y longitud de arco en coordenadas polares

- **Hallar el área de una región limitada por una gráfica polar.**
- **Hallar los puntos de intersección de dos gráficas polares.**
- **Hallar la longitud de arco de una gráfica polar.**
- **Hallar el área de una superficie de revolución (forma polar).**



El área de un sector circular es $A = \frac{1}{2}\theta r^2$.
Figura 10.49

Área de una región polar

El desarrollo de una fórmula para el área de una región polar se asemeja al del área de una región en el sistema de coordenadas rectangulares (o cartesianas), pero en lugar de rectángulos se usan sectores circulares como elementos básicos del área. En la figura 10.49, obsérvese que el área de un sector circular de radio r es $\frac{1}{2}\theta r^2$, siempre que θ esté dado en radianes.

Considérese la función dada por $r = f(\theta)$, donde f es continua y no negativa en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$. La región limitada por la gráfica de f y las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ se muestra en la figura 10.50*a*. Para encontrar el área de esta región, se hace una partición del intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos iguales

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdot \cdot \cdot < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta.$$

A continuación, se aproxima el área de la región por medio de la suma de las áreas de los n sectores, como se muestra en la figura 10.50*b*.

$$\text{Radio del } i\text{-ésimo sector} = f(\theta_i)$$

$$\text{Ángulo central del } i\text{-ésimo sector} = \frac{\beta - \alpha}{n} = \Delta\theta$$

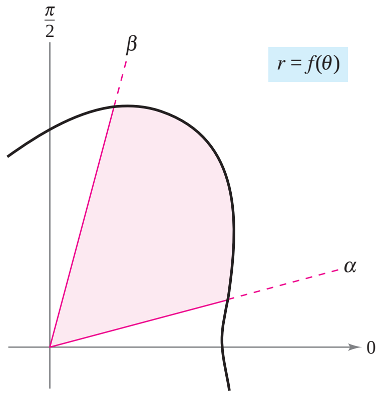
$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right) \Delta\theta [f(\theta_i)]^2$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene

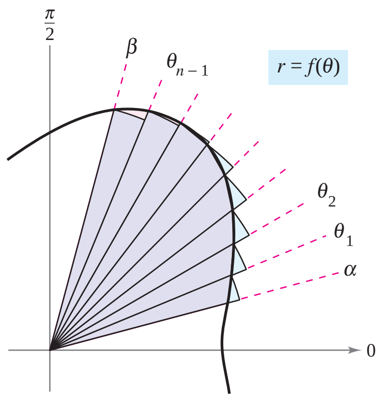
$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [f(\theta_i)]^2 \, \Delta\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta$$

lo cual conduce al teorema siguiente.



a)



b)
Figura 10.50

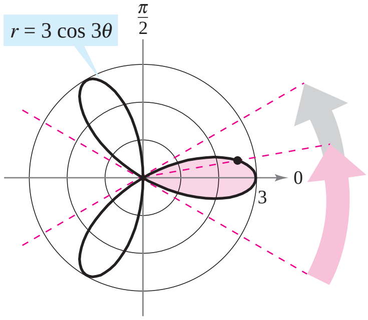
TEOREMA 10.13 ÁREA EN COORDENADAS POLARES

Si f es continua y no negativa en el intervalo $[\alpha, \beta]$, $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces el área de la región limitada (o acotada) por la gráfica de $r = f(\theta)$ entre las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ está dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta. \qquad 0 < \beta - \alpha \leq 2\pi.$$

NOTA La misma fórmula se puede usar para hallar el área de una región limitada por la gráfica de una función continua *no positiva*. Sin embargo, la fórmula no es necesariamente válida si f toma valores tanto positivos *como* negativos en el intervalo $[\alpha, \beta]$.



El área de un pétalo de la curva rosa que se encuentra entre las rectas radiales $\theta = -\pi/6$ y $\theta = \pi/6$ es $3\pi/4$.
Figura 10.51

EJEMPLO 1 Encontrar el área de una región polar

Encontrar el área de un pétalo de la curva rosa dada por $r = 3\cos 3\theta$.

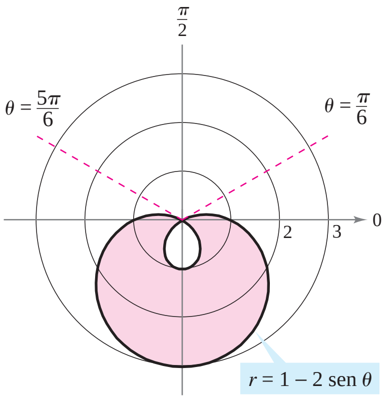
Solución En la figura 10.51 se puede ver que el pétalo al lado derecho se recorre a medida que θ aumenta de $-\pi/6$ a $\pi/6$. Por tanto, el área es

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (3\cos 3\theta)^2\,d\theta && \text{Fórmula para el área en coordenadas polares.}\\
&= \frac{9}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1+\cos 6\theta}{2}\,d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \frac{9}{4}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 6\theta}{6}\right]_{-\pi/6}^{\pi/6}\\
&= \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

NOTA Para hallar el área de la región comprendida dentro de los tres pétalos de la curva rosa del ejemplo 1, no se puede simplemente integrar entre 0 y 2π. Si se hace así, se obtiene $9\pi/2$, que es el doble del área de los tres pétalos. Esta duplicación ocurre debido a que la curva rosa es trazada dos veces cuando θ aumenta de 0 a 2π. ■

EJEMPLO 2 Hallar el área limitada por una sola curva

Hallar el área de la región comprendida entre los lazos interior y exterior del caracol $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$.



El área entre los lazos interior y exterior es aproximadamente 8.34
Figura 10.52

Solución En la figura 10.52, obsérvese que el lazo interior es trazado a medida que θ aumenta de $\pi/6$ a $5\pi/6$. Por tanto, el área comprendida por el *lazo interior* es

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1-2\operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta && \text{Fórmula para el área en coordenadas polares.}\\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1-4\operatorname{sen}\theta+4\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left[1-4\operatorname{sen}\theta+4\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\right]d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3-4\operatorname{sen}\theta-2\cos 2\theta)\,d\theta && \text{Simplificación.}\\
&= \frac{1}{2}\Big[3\theta+4\cos\theta-\operatorname{sen} 2\theta\Big]_{\pi/6}^{5\pi/6}\\
&= \frac{1}{2}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)\\
&= \pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

De manera similar, se puede integrar de $5\pi/6$ a $13\pi/6$ para hallar que el área de la región comprendida por el *lazo exterior* es $A_2 = 2\pi + \left(3\sqrt{3}/2\right)$. El área de la región comprendida entre los dos lazos es la diferencia entre A_2 y A_1.

$$A = A_2 - A_1 = \left(2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \pi+3\sqrt{3} \approx 8.34$$

Puntos de intersección de gráficas polares

Debido a que un punto en coordenadas polares se puede representar de diferentes maneras, hay que tener cuidado al determinar los puntos de intersección de dos gráficas. Por ejemplo, considérense los puntos de intersección de las gráficas de

$$r = 1 - 2\cos\theta \quad \text{y} \quad r = 1$$

mostradas en la figura 10.53. Si, como se hace con ecuaciones rectangulares, se trata de hallar los puntos de intersección resolviendo las dos ecuaciones en forma simultánea, se obtiene

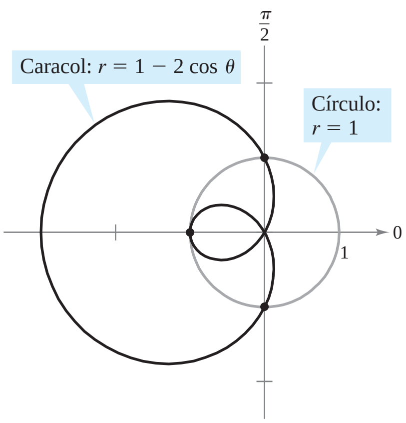
$$r = 1 - 2\cos\theta \qquad \text{Primera ecuación.}$$
$$1 = 1 - 2\cos\theta \qquad \text{Sustitución de } r = 1 \text{ de la segunda ecuación en la primera ecuación.}$$
$$\cos\theta = 0 \qquad \text{Simplificación.}$$
$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}. \qquad \text{Despejar } \theta.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre el uso de la tecnología para encontrar puntos de intersección, consultar el artículo "Finding Points of Intersection of Polar-Coordinate Graphs" de Warren W. Esty en *Mathematics Teacher*.

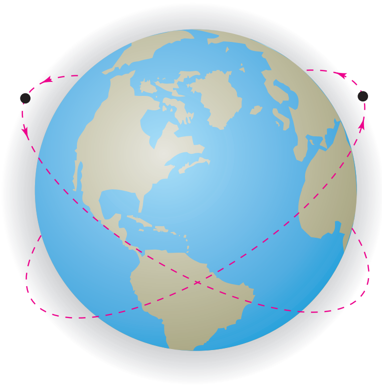
Los puntos de intersección correspondientes son $(1, \pi/2)$ y $(1, 3\pi/2)$. Sin embargo, en la figura 10.53 se ve que hay un *tercer* punto de intersección que no apareció al resolver simultáneamente las dos ecuaciones polares. (Ésta es una de las razones por las que es necesario trazar una gráfica cuando se busca el área de una región polar.) La razón por la que el tercer punto no se encontró es que no aparece con las mismas coordenadas en ambas gráficas. En la gráfica de $r = 1$, el punto se encuentra en las coordenadas $(1, \pi)$, mientras que en la gráfica de $r = 1 - 2\cos\theta$, el punto se encuentra en las coordenadas $(-1, 0)$.

El problema de hallar los puntos de intersección de dos gráficas polares se puede comparar con el problema de encontrar puntos de colisión de dos satélites cuyas órbitas alrededor de la Tierra se cortan, como se ilustra en la figura 10.54. Los satélites no colisionan mientras lleguen a los puntos de intersección en momentos diferentes (valores de θ). Las colisiones sólo ocurren en los puntos de intersección que sean "puntos simultáneos", puntos a los que llegan al mismo tiempo (valor de θ).

NOTA Puesto que el polo puede representarse mediante $(0, \theta)$, donde θ es *cualquier* ángulo, el polo debe verificarse por separado cuando se buscan puntos de intersección. ■



Tres puntos de intersección: $(1, \pi/2)$, $(-1, 0)$, $(1, 3\pi/2)$
Figura 10.53



Las trayectorias de los satélites pueden cruzarse sin causar colisiones
Figura 10.54

EJEMPLO 3 Hallar el área de la región entre dos curvas

Hallar el área de la región común a las dos regiones limitadas por las curvas siguientes.

$$r = -6\cos\theta \qquad \text{Circunferencia.}$$

$$r = 2 - 2\cos\theta \qquad \text{Cardioide.}$$

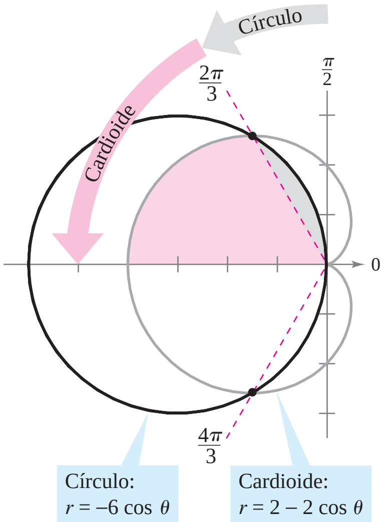


Figura 10.55

Solución Debido a que ambas curvas son simétricas respecto al eje x, se puede trabajar con la mitad superior del plano (o semiplano superior), como se ilustra en la figura 10.55. La región sombreada en gris se encuentra entre la circunferencia y la recta radial $\theta = 2\pi/3$. Puesto que la circunferencia tiene coordenadas $(0, \pi/2)$ en el polo, se puede integrar entre $\pi/2$ y $2\pi/3$ para obtener el área de esta región. La región sombreada en rojo está limitada por las rectas radiales $\theta = 2\pi/3$ y $\theta = \pi$ y la cardioide. Por tanto, el área de esta segunda región se puede encontrar por integración entre $2\pi/3$ y π. La suma de estas dos integrales da el área de la región común que se encuentra *sobre* la recta radial $\theta = \pi$.

$$\frac{A}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{2\pi/3} (-6\cos\theta)^2\, d\theta}_{\text{Región entre la circunferencia y la recta radial } \theta = 2\pi/3} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi} (2 - 2\cos\theta)^2\, d\theta}_{\text{Región entre la cardioide y las rectas radiales } \theta = 2\pi/3 \text{ y } \theta = \pi}$$

$$= 18\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \cos^2\theta\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi} (4 - 8\cos\theta + 4\cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= 9\int_{\pi/2}^{2\pi/3} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta + \int_{2\pi/3}^{\pi} (3 - 4\cos\theta + \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 9\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_{\pi/2}^{2\pi/3} + \left[3\theta - 4\operatorname{sen}\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_{2\pi/3}^{\pi}$$

$$= 9\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \left(3\pi - 2\pi + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \frac{5\pi}{2}$$

$$\approx 7.85$$

Por último, multiplicando por 2 se concluye que el área total es 5π.

NOTA Para verificar que el resultado obtenido en el ejemplo 3 es razonable, adviértase que el área de la región circular es $\pi r^2 = 9\pi$. Por tanto, parece razonable que el área de la región que se encuentra dentro de la circunferencia y dentro de la cardioide sea 5π. ■

Para apreciar la ventaja de las coordenadas polares al encontrar el área del ejemplo 3, considérese la integral siguiente, que da el área en coordenadas rectangulares (o cartesianas).

$$\frac{A}{2} = \int_{-4}^{-3/2} \sqrt{2\sqrt{1 - 2x} - x^2 - 2x + 2}\, dx + \int_{-3/2}^{0} \sqrt{-x^2 - 6x}\, dx$$

Emplear las funciones de integración de una herramienta de graficación para comprobar que se obtiene la misma área encontrada en el ejemplo 3.

Longitud de arco en forma polar

NOTA Cuando se aplica la fórmula de la longitud de arco a una curva polar, es necesario asegurarse de que la curva esté trazada (se recorra) sólo una vez en el intervalo de integración. Por ejemplo, la rosa dada por $r = \cos 3\theta$ está trazada (se recorre) una sola vez en el intervalo $0 \le \theta \le \pi$, pero está trazada (se recorre) dos veces en el intervalo $0 \le \theta \le 2\pi$. ■

La fórmula para la longitud de un arco en coordenadas polares se obtiene a partir de la fórmula para la longitud de arco de una curva descrita mediante ecuaciones paramétricas. (Ver el ejercicio 89.)

TEOREMA 10.14 LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA POLAR

Sea f una función cuya derivada es continua en un intervalo $\alpha \le \theta \le \beta$. La longitud de la gráfica de $r = f(\theta)$, desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$ es

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

EJEMPLO 4 Encontrar la longitud de una curva polar

Encontrar la longitud del arco que va de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$ en la cardioide

$$r = f(\theta) = 2 - 2\cos\theta$$

que se muestra en la figura 10.56.

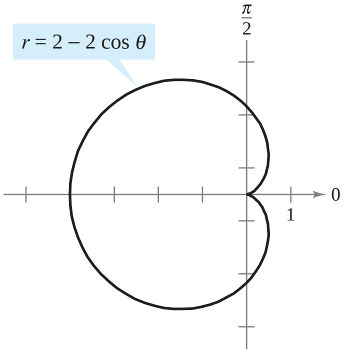


Figura 10.56

Solución Como $f'(\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta$, se puede encontrar la longitud de arco de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
s &= \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta && \text{Fórmula para la longitud de arco de una curva polar.}\\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(2 - 2\cos\theta)^2 + (2\,\text{sen}\,\theta)^2}\, d\theta \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\theta}\, d\theta && \text{Simplificación.}\\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta && \text{Identidad trigonométrica.}\\
&= 4\int_0^{2\pi} \text{sen}\,\frac{\theta}{2}\, d\theta && \text{sen}\,\frac{\theta}{2} \ge 0 \text{ para } 0 \le \theta \le 2\pi.\\
&= 8\Big[-\cos\frac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} \\
&= 8(1 + 1) \\
&= 16
\end{aligned}$$

En el quinto paso de la solución, es legítimo escribir

$$\sqrt{2\,\text{sen}^2(\theta/2)} = \sqrt{2}\,|\text{sen}\,(\theta/2)|$$

en lugar de

$$\sqrt{2\,\text{sen}^2(\theta/2)} = \sqrt{2}\,|\text{sen}\,(\theta/2)|$$

porque $\text{sen}(\theta/2) \ge 0$ para $0 \le \theta \le 2\pi$.

NOTA Empleando la figura 10.56 se puede ver que esta respuesta es razonable mediante comparación con la circunferencia de un círculo. Por ejemplo, un círculo con radio $\frac{5}{2}$ tiene una circunferencia de $5\pi \approx 15.7$. ■

Área de una superficie de revolución

La versión, en coordenadas polares, de las fórmulas para el área de una superficie de revolución se puede obtener a partir de las versiones paramétricas dadas en el teorema 10.9, usando las ecuaciones $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$.

TEOREMA 10.15 ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Sea f una función cuya derivada es continua en un intervalo $\alpha \le \theta \le \beta$. El área de la superficie generada por revolución de la gráfica de $r = f(\theta)$, desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$, alrededor de la recta indicada es la siguiente.

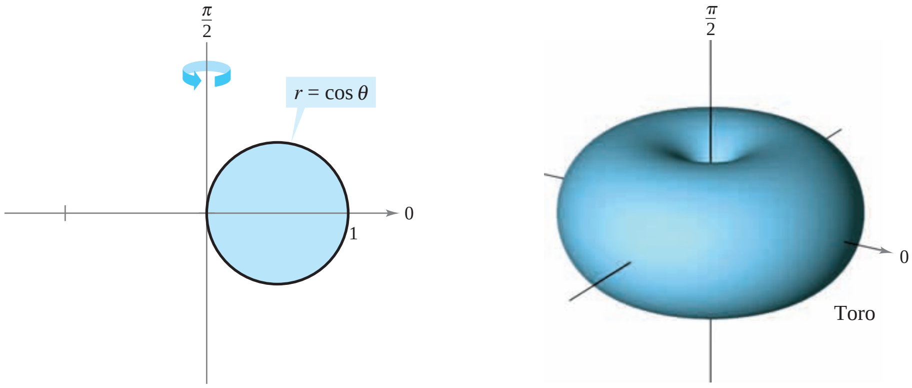
1. $S = 2\pi \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta$ Alrededor del eje polar.

2. $S = 2\pi \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\cos\theta\sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta$ Alrededor de la recta $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

NOTA Al aplicar el teorema 10.15, hay que verificar que la gráfica de $r = f(\theta)$ se recorra una sola vez en el intervalo $\alpha \le \theta \le \beta$. Por ejemplo, la circunferencia dada por $r = \cos\theta$ se recorre sólo una vez en el intervalo $0 \le \theta \le \pi$.

EJEMPLO 5 Hallar el área de una superficie de revolución

Hallar el área de la superficie obtenida por revolución de la circunferencia $r = f(\theta) = \cos\theta$ alrededor de la recta $\theta = \pi/2$, como se ilustra en la figura 10.57.



a) *b)*
Figura 10.57

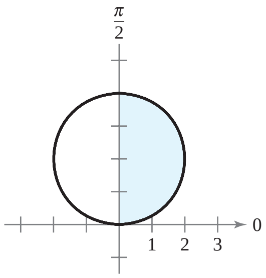
Solución Se puede usar la segunda fórmula dada en el teorema 10.15 con $f'(\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$. Puesto que la circunferencia se recorre sólo una vez cuando θ aumenta de 0 a π, se tiene

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\cos\theta\sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta && \text{Fórmula para el área de una superficie de revolución.} \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \cos\theta(\cos\theta)\sqrt{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta}\,d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2\theta\,d\theta && \text{Identidad trigonométrica.} \\ &= \pi \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta)\,d\theta && \text{Identidad trigonométrica.} \\ &= \pi\left[\theta + \frac{\mathrm{sen}2\theta}{2}\right]_0^{\pi} = \pi^2. \end{aligned}$$

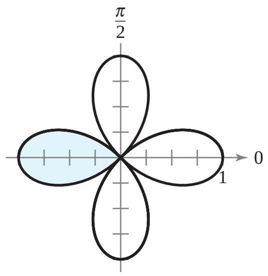
10.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, dar una integral que represente el área de la región sombreada que se muestra en la figura. No evaluar la integral.

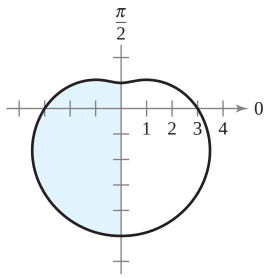
1. $r = 4 \text{ sen } \theta$



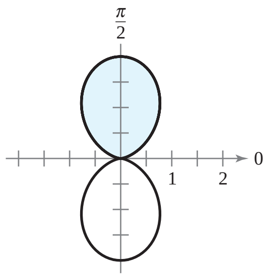
2. $r = \cos 2\theta$



3. $r = 3 - 2 \text{ sen } \theta$



4. $r = 1 - \cos 2\theta$



En los ejercicios 5 a 16, hallar el área de la región.

5. Interior de $r = 6 \text{ sen } \theta$

6. Interior de $r = 3 \cos \theta$

7. Un pétalo de $r = 2 \cos 3\theta$

8. Un pétalo de $r = 4 \text{ sen } 3\theta$

9. Un pétalo de $r = \text{sen } 2\theta$

10. Un pétalo de $r = \cos 5\theta$

11. Interior de $r = 1 - \text{sen } \theta$

12. Interior de $r = 1 - \text{sen } \theta$ (arriba del eje polar)

13. Interior de $r = 5 + 2 \text{ sen } \theta$

14. Interior de $r = 4 - 4 \cos \theta$

15. Interior de $r^2 = 4 \cos 2\theta$

16. Interior de $r^2 = 6 \text{ sen } 2\theta$

En los ejercicios 17 a 24, emplear una herramienta de graficación para representar la ecuación polar y encontrar el área de la región indicada.

17. Lazo interior de $r = 1 + 2 \cos \theta$

18. Lazo interior de $r = 2 - 4 \cos \theta$

19. Lazo interior de $r = 1 + 2 \text{ sen } \theta$

20. Lazo interior de $r = 4 - 6 \text{ sen } \theta$

21. Entre los lazos de $r = 1 + 2 \cos \theta$

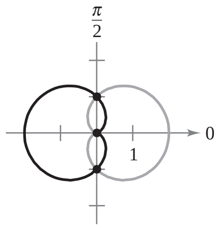
22. Entre los lazos de $r = 2\,(1 + 2 \text{ sen } \theta)$

23. Entre los lazos de $r = 3 - 6 \text{ sen } \theta$

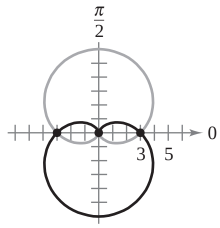
24. Entre los lazos de $r = \frac{1}{2} + \cos \theta$

En los ejercicios 25 a 34, hallar los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones.

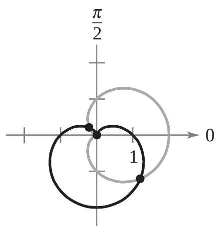
25. $r = 1 + \cos \theta$
$r = 1 - \cos \theta$



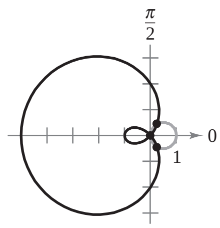
26. $r = 3(1 + \text{sen } \theta)$
$r = 3(1 - \text{sen } \theta)$



27. $r = 1 + \cos \theta$
$r = 1 - \text{sen } \theta$



28. $r = 2 - 3 \cos \theta$
$r = \cos \theta$



29. $r = 4 - 5 \text{ sen } \theta$
$r = 3 \text{ sen } \theta$

30. $r = 1 + \cos \theta$
$r = 3 \cos \theta$

31. $r = \dfrac{\theta}{2}$
$r = 2$

32. $\theta = \dfrac{\pi}{4}$
$r = 2$

33. $r = 4 \text{ sen } 2\theta$
$r = 1$

34. $r = 3 + \text{sen } \theta$
$r = 2 \csc \theta$

En los ejercicios 35 y 36, emplear una herramienta de graficación para aproximar los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones polares. Confirmar los resultados en forma analítica.

35. $r = 2 + 3 \cos \theta$
$r = \dfrac{\sec \theta}{2}$

36. $r = 3(1 - \cos \theta)$
$r = \dfrac{6}{1 - \cos \theta}$

Redacción **En los ejercicios 37 y 38, usar una herramienta de graficación para hallar los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones polares. En la ventana, observar cómo se van trazando las gráficas. Explicar por qué el polo no es un punto de intersección que se obtenga al resolver las ecuaciones en forma simultánea.**

37. $r = \cos \theta$
$r = 2 - 3 \text{ sen } \theta$

38. $r = 4 \text{ sen } \theta$
$r = 2(1 + \text{sen } \theta)$

En los ejercicios 39 a 46, emplear una herramienta de graficación para representar las ecuaciones polares y hallar el área de la región dada.

39. Interior común a $r = 4\,\text{sen}\,2\theta$ y $r = 2$

40. Interior común a $r = 3(1 + \cos\theta)$ y $r = 2(1 - \cos\theta)$

41. Interior común a $r = 3 - 2\,\text{sen}\,\theta$ y $r = -3 + 2\,\text{sen}\,\theta$

42. Interior común a $r = 5 - 3\,\text{sen}\,\theta$ y $r = 5 - 3\cos\theta$

43. Interior común a $r = 4\,\text{sen}\,\theta$ y $r = 2$

44. Interior común de $r = 2\cos\theta$ y $r = 2\,\text{sen}\,\theta$

45. Interior $r = 2\cos\theta$ y exterior $r = 1$

46. Interior $r = 3\,\text{sen}\,\theta$ y exterior $r = 1 + \text{sen}\,\theta$

En los ejercicios 47 a 50, hallar el área de la región.

47. En el interior de $r = a(1 + \cos\theta)$ y en el exterior de $r = a\cos\theta$

48. En el interior de $r = 2a\cos\theta$ y en el exterior de $r = a$

49. Interior común a $r = a(1 + \cos\theta)$ y $r = a\,\text{sen}\,\theta$

50. Interior común a $r = a\cos\theta$ y a $r = a\,\text{sen}\,\theta$ donde $a > 0$

51. ***Radiación de una antena*** La radiación proveniente de una antena de transmisión no es uniforme en todas direcciones. La intensidad de la transmisión proveniente de una determinada antena se describe por medio del modelo $r = a\cos^2\theta$.

a) Transformar la ecuación polar a la forma rectangular.

b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar el modelo con $a = 4$ y $a = 6$.

c) Hallar el área de la región geográfica que se encuentra entre las dos curvas del inciso *b*).

52. ***Área*** El área en el interior de una o más de las tres circunferencias entrelazadas $r = 2a\cos\theta$, $r = 2a\,\text{sen}\,\theta$, y $r = a$ está dividida en siete regiones. Hallar el área de cada región.

53. ***Conjetura*** Hallar el área de la región limitada por

$$r = a\cos(n\theta)$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Con base en los resultados formular una conjetura acerca del área limitada por la función cuando n es par y cuando n es impar.

54. ***Área*** Dibujar la estrofoide

$$r = \sec\theta - 2\cos\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Transformar estas ecuaciones a coordenadas rectangulares (o cartesianas). Encontrar el área comprendida en el lazo.

En los ejercicios 55 a 60, hallar la longitud de la curva sobre el intervalo indicado.

	Ecuación polar	*Intervalo*
55.	$r = 8$	$0 \le \theta \le 2\pi$
56.	$r = a$	$0 \le \theta \le 2\pi$
57.	$r = 4\,\text{sen}\,\theta$	$0 \le \theta \le 2\pi$
58.	$r = 2a\cos\theta$	$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
59.	$r = 1 + \text{sen}\,\theta$	$0 \le \theta \le 2\pi$
60.	$r = 8(1 + \cos\theta)$	$0 \le \theta \le 2\pi$

En los ejercicios 61 a 66, utilizar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar sobre el intervalo dado. Emplear las funciones de integración de una herramienta de graficación para estimar la longitud de la curva con una precisión de dos decimales.

61. $r = 2\theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

62. $r = \sec\theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$

63. $r = \frac{1}{\theta}, \quad \pi \le \theta \le 2\pi$

64. $r = e^{\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi$

65. $r = \text{sen}(3\cos\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi$

66. $r = 2\,\text{sen}(2\cos\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi$

En los ejercicios 67 a 70, encontrar el área de la superficie generada por revolución de la curva en torno a la recta dada.

	Ecuación polar	*Intervalo*	*Eje de revolución*
67.	$r = 6\cos\theta$	$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$	Eje polar
68.	$r = a\cos\theta$	$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
69.	$r = e^{a\theta}$	$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
70.	$r = a(1 + \cos\theta)$	$0 \le \theta \le \pi$	Eje polar

En los ejercicios 71 y 72, usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para estimar, con una precisión de dos cifras decimales, el área de la superficie generada por revolución de la curva alrededor del eje polar.

71. $r = 4\cos 2\theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

72. $r = \theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$

Desarrollo de conceptos

73. Explicar por qué para encontrar puntos de intersección de gráficas polares es necesario efectuar un análisis además de resolver dos ecuaciones en forma simultánea.

74. ¿Cuál de las integrales da la longitud de arco de $r = 3(1 - \cos 2\theta)$? Decir por qué las otras integrales son incorrectas.

a) $3\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos 2\theta)^2 + 4\,\text{sen}^2\,2\theta}\,d\theta$

b) $12\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{(1 - \cos 2\theta)^2 + 4\,\text{sen}^2\,2\theta}\,d\theta$

c) $3\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{(1 - \cos 2\theta)^2 + 4\,\text{sen}^2\,2\theta}\,d\theta$

d) $6\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{(1 - \cos 2\theta)^2 + 4\,\text{sen}^2\,2\theta}\,d\theta$

75. Dar las fórmulas de las integrales para el área de una superficie de revolución generada por la gráfica de $r = f(\theta)$ alrededor *a*) del eje x y *b*) del eje y.

Para discusión

76. Para cada ecuación polar, dibujar su gráfica, determinar el intervalo que traza la gráfica sólo una vez y encontrar el área de la región acotada por la gráfica utilizando una fórmula geométrica e integración.

a) $r = 10 \cos \theta$ *b*) $r = 5 \operatorname{sen} \theta$

77. ***Área de la superficie de un toro*** Hallar el área de la superficie del toro generado por revolución de la circunferencia $r = 2$ alrededor de la recta $r = 5 \sec \theta$.

78. ***Área de la superficie de un toro*** Hallar el área de la superficie del toro generado por revolución de la circunferencia $r = a$ en torno a la recta $r = b \sec \theta$, donde $0 < a < b$.

79. ***Aproximación de un área*** Considerar la circunferencia $r = 8 \cos \theta$.

a) Hallar el área del círculo.

b) Completar la tabla dando las áreas A de los sectores circulares entre $\theta = 0$ y los valores de θ dados en la tabla.

θ	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
A							

c) Emplear la tabla del inciso *b*) para aproximar los valores de θ para los cuales el sector circular contiene $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, y $\frac{3}{4}$ del área total de la circunferencia.

d) Usar una herramienta de graficación para aproximar, con una precisión de dos cifras decimales, los ángulos θ para los cuales el sector circular contiene $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ del área total de la circunferencia.

e) ¿Dependen los resultados del inciso *d*) del radio del círcu-lo? Explicar la respuesta.

80. ***Área aproximada*** Dado el círculo $r = 3 \operatorname{sen} \theta$.

a) Hallar el área de la circunferencia correspondiente.

b) Completar la tabla dando las áreas A de los sectores circulares comprendidos entre $\theta = 0$ y los valores de θ dados en la tabla.

θ	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
A							

c) Utilizar la tabla del inciso *b*) para aproximar los valores de θ para los cuales el sector circular representa $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, y $\frac{1}{2}$ del área total de la circunferencia.

d) Usar una herramienta de graficación para aproximar, con una precisión de dos cifras decimales, los ángulos θ para los que el sector circular representa $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ del área total del círculo.

81. ¿Qué sección cónica representa la siguiente ecuación polar?

$$r = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta$$

82. ***Área*** Hallar el área del círculo dado por $r = \operatorname{sen} \theta + \cos \theta$. Comprobar el resultado transformando la ecuación polar a la forma rectangular y usando después la fórmula para el área del círculo.

83. ***Espiral de Arquímedes*** La curva representada por la ecuación $r = a\theta$, donde a es una constante, se llama espiral de Arquímedes.

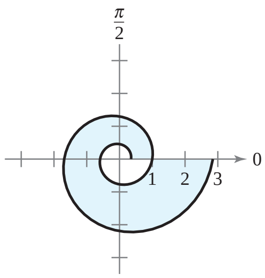
a) Emplear una herramienta de graficación para trazar la gráfica de $r = \theta$, donde $\theta \geq 0$. ¿Qué ocurre con la gráfica de $r = a\theta$ a medida que a aumenta? ¿Qué pasa si $\theta \leq 0$?

b) Determinar los puntos de la espiral $r = a\theta$ $(a > 0, \theta \geq 0)$, en los que la curva cruza el eje polar.

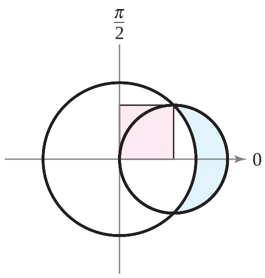
c) Hallar la longitud de $r = \theta$ sobre el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

d) Hallar el área bajo la curva $r = \theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

84. ***Espiral logarítmica*** La curva descrita por la ecuación $r = ae^{b\theta}$, donde a y b son constantes, se denomina **espiral logarítmica**. La figura siguiente muestra la gráfica de $r = e^{\theta/6}$, $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Hallar el área de la zona sombreada.



85. La mayor de las circunferencias mostradas en la figura siguiente es la gráfica de $r = 1$. Hallar la ecuación polar para la circunferencia menor de manera que las áreas sombreadas sean iguales.



86. ***Hoja (o folio) de Descartes*** Una curva llamada **hoja (o folio) de Descartes** puede representarse por medio de las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{3t}{1 + t^3} \quad \text{y} \quad y = \frac{3t^2}{1 + t^3}.$$

a) Convertir las ecuaciones paramétricas a la forma polar.

b) Dibujar la gráfica de la ecuación polar del inciso *a*).

c) Emplear una herramienta de graficación para aproximar el área comprendida en el lazo de la curva.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 87 y 88, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

87. Si $f(\theta) > 0$ para todo θ y $g(\theta) < 0$ para todo θ, entonces las gráficas de $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ no se cortan.

88. Si $f(\theta) = g(\theta)$ para $\theta = 0$, $\pi/2$ y $3\pi/2$, entonces las gráficas de $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ tienen cuando menos cuatro puntos de intersección.

89. Usar la fórmula para la longitud de arco de una curva en forma paramétrica para obtener la fórmula de la longitud de arco de una curva polar.

10.6 Ecuaciones polares de las cónicas y leyes de Kepler

- **Analizar y dar las ecuaciones polares de las cónicas.**
- **Entender y emplear las leyes del movimiento planetario de Kepler.**

> **EXPLORACIÓN**
>
> ***Representación gráfica de cónicas*** En una herramienta de graficación elegir el modo polar e introducir ecuaciones polares de la forma
>
> $$r = \frac{a}{1 \pm b\cos\theta}$$
>
> o
>
> $$r = \frac{a}{1 \pm b\,\mathrm{sen}\,\theta}.$$
>
> Si $a \neq 0$, la gráfica será una cónica. Describir los valores de a y b que generan parábolas. ¿Qué valores generan elipses? ¿Qué valores generan hipérbolas?

Ecuaciones polares de las cónicas

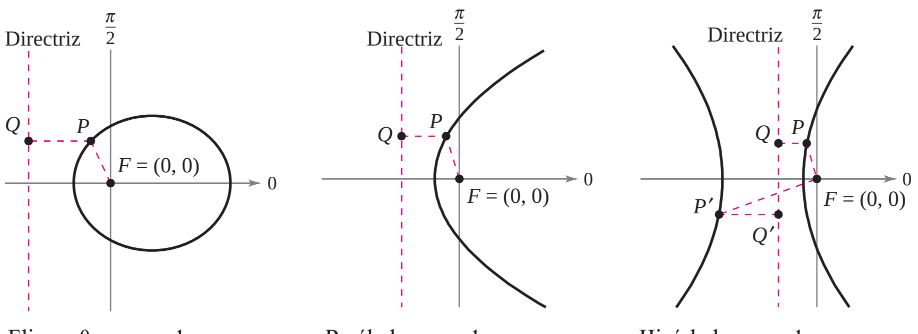
En este capítulo se ha visto que las ecuaciones rectangulares de elipses e hipérbolas adquieren formas simples cuando sus *centros* se encuentran en el origen. Sin embargo, existen muchas aplicaciones importantes de las cónicas en las cuales resulta más conveniente usar uno de los focos como punto de referencia (el origen) del sistema de coordenadas. Por ejemplo, el Sol se encuentra en uno de los focos de la órbita de la Tierra; la fuente de luz en un reflector parabólico se encuentra en su foco. En esta sección se verá que las ecuaciones polares de las cónicas adoptan formas simples si uno de los focos se encuentra en el polo.

El teorema siguiente usa el concepto de *excentricidad*, definido en la sección 10.1, para clasificar los tres tipos básicos de cónicas. En el apéndice A se da una demostración de este teorema.

TEOREMA 10.16 CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS DE ACUERDO CON LA EXCENTRICIDAD

Sean F un punto fijo (*foco*) y D una recta fija (*directriz*) en el plano. Sean P otro punto en el plano y e (*excentricidad*) el cociente obtenido al dividir la distancia de P a F entre la distancia de P a D. El conjunto de todos los puntos P con una determinada excentricidad es una cónica.

1. La cónica es una elipse si $0 < e < 1$.
2. La cónica es una parábola si $e = 1$.
3. La cónica es una hipérbola si $e > 1$.



Elipse: $0 < e < 1$ $\quad \frac{PF}{PQ} < 1$

Parábola: $e = 1$ $\quad PF = PQ$

Hipérbola: $e > 1$ $\quad \frac{PF}{PQ} = \frac{P'F}{P'Q'} > 1$

Figura 10.58

En la figura 10.58, obsérvese que en todos los tipos de cónicas el polo coincide con el punto fijo (foco) que se da en la definición. La ventaja de esta ubicación se aprecia en la demostración del teorema siguiente.

TEOREMA 10.17 ECUACIONES POLARES DE LAS CÓNICAS

La gráfica de una ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{ed}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta}$$

es una cónica, donde $e > 0$ es la excentricidad y $|d|$ es la distancia entre el foco, en el polo, y la directriz correspondiente.

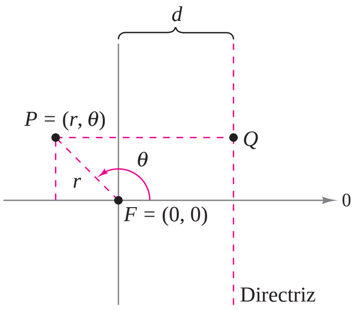


Figura 10.59

DEMOSTRACIÓN La siguiente es una demostración de $r = ed/(1 + e \cos \theta)$ con $d > 0$. En la figura 10.59, considérese una directriz vertical que se encuentra d unidades a la derecha del foco $F = (0, 0)$. Si $P = (r, \theta)$ es un punto en la gráfica de $r = ed/(1 + e \cos \theta)$, se puede demostrar que la distancia entre P y la directriz es

$$PQ = |d - x| = |d - r \cos \theta| = \left| \frac{r(1 + e \cos \theta)}{e} - r \cos \theta \right| = \left| \frac{r}{e} \right|.$$

Como la distancia entre P y el polo es simplemente $PF = |r|$, el radio PF entre PQ es $PF/PQ = |r|/|r/e| = |e| = e$ y, de acuerdo con el teorema 10.16, la gráfica de la ecuación debe ser una cónica. Las demostraciones de los otros casos son similares.

Los cuatro tipos de ecuaciones que se indican en el teorema 10.17 se pueden clasificar como sigue, siendo $d > 0$.

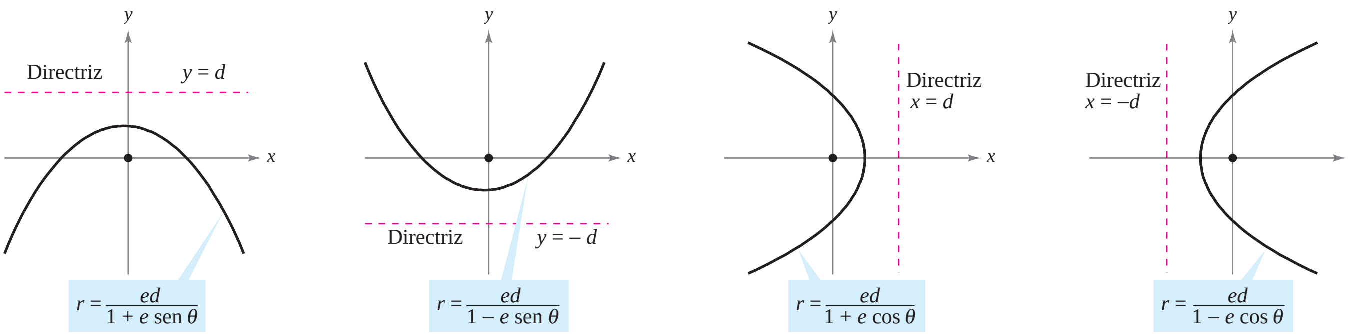
***a*)** Directriz horizontal arriba del polo: $r = \dfrac{ed}{1 + e \quad \theta}$

***b*)** Directriz horizontal abajo del polo: $r = \dfrac{ed}{1 - e \quad \theta}$

***c*)** Directriz vertical a la derecha del polo: $r = \dfrac{ed}{1 + e \cos \theta}$

***d*)** Directriz vertical a la izquierda del polo: $r = \dfrac{ed}{1 - e \cos \theta}$

La figura 10.60 ilustra estas cuatro posibilidades en el caso de una parábola.



***a*)** ***b*)** ***c*)** ***d*)**

Los cuatro tipos de ecuaciones polares para una parábola
Figura 10.60

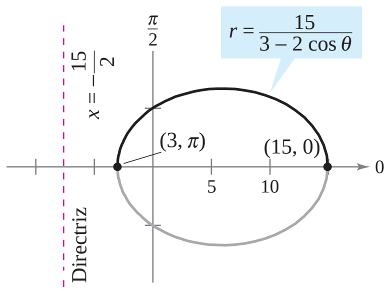
EJEMPLO 1 Determinar una cónica a partir de su ecuación

Dibujar la gráfica de la cónica descrita por $r = \dfrac{15}{3 - 2\cos\theta}$.

Solución Para determinar el tipo de cónica, reescribir la ecuación como sigue

$$r = \frac{15}{3 - 2\cos\theta} \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$= \frac{5}{1 - (2/3)\cos\theta}. \qquad \text{Dividir el numerador y el denominador entre 3.}$$



La gráfica de la cónica es una elipse con $e = \frac{2}{3}$.
Figura 10.61

Por tanto, la gráfica es una elipse con $e = \frac{2}{3}$. Se traza la mitad superior de la elipse localizando gráficamente los puntos desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$, como se muestra en la figura 10.61. Luego, empleando la simetría respecto al eje polar se traza la mitad inferior de la elipse.

En la elipse en la figura 10.61, el eje mayor es horizontal y los vértices se encuentran en $(15, 0)$ y $(3, \pi)$. Por tanto, la longitud del eje *mayor* es $2a = 18$. Para encontrar la longitud del eje menor, se usan las ecuaciones $e = c/a$ y $b^2 = a^2 - c^2$ para concluir que

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - (ea)^2 = a^2(1 - e^2). \qquad \text{Elipse.}$$

Como $e = \frac{2}{3}$, se tiene

$$b^2 = 9^2\left[1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^2\right] = 45$$

lo cual implica que $b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Por tanto, la longitud del eje menor es $2b = 6\sqrt{5}$. Un análisis similar para la hipérbola da

$$b^2 = c^2 - a^2 = (ea)^2 - a^2 = a^2(e^2 - 1). \qquad \text{Hipérbola.}$$

EJEMPLO 2 Trazar una cónica a partir de su ecuación polar

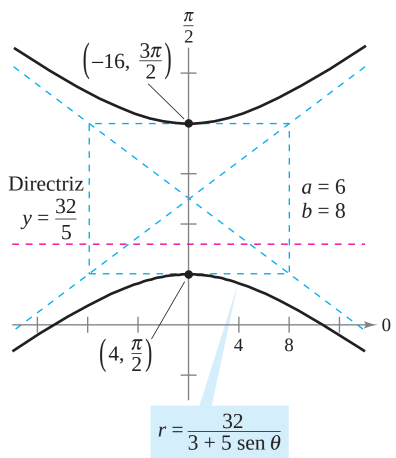
Trazar la gráfica de la ecuación polar $r = \dfrac{32}{3 + 5\,\text{sen}\,\theta}$.

Solución Se divide el numerador y el denominador entre 3 y se obtiene

$$r = \frac{32/3}{1 + (5/3)\,\text{sen}\,\theta}.$$

Como $e = \frac{5}{3} > 1$, la gráfica es una hipérbola. Como $d = \frac{32}{5}$, la directriz es la recta $y = \frac{32}{5}$. El eje transversal de la hipérbola se encuentra en la recta $\theta = \pi/2$, y los vértices se encuentran en

$$(r, \theta) = \left(4, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad (r, \theta) = \left(-16, \frac{3\pi}{2}\right).$$



La gráfica de la cónica es una hipérbola con $e = \frac{5}{3}$.
Figura 10.62

Dado que la longitud del eje transversal es 12, puede verse que $a = 6$. Para encontrar b, se escribe

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) = 6^2\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1\right] = 64.$$

Por tanto, $b = 8$. Por último, se usan a y b para determinar las asíntotas de la hipérbola y obtener la gráfica que se muestra en la figura 10.62.


Mary Evans Picture Library

JOHANNES KEPLER (1571-1630)

Kepler formuló sus tres leyes a partir de la extensa recopilación de datos del astrónomo danés Tycho Brahe, así como de la observación directa de la órbita de Marte.

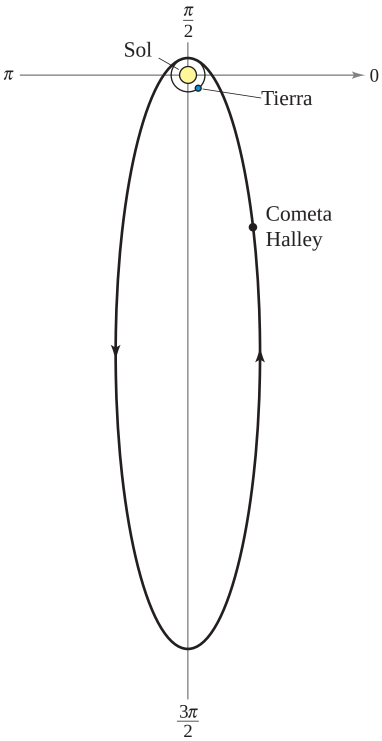


Figura 10.63

Leyes de Kepler

Las leyes de Kepler, las cuales deben su nombre al astrónomo alemán Johannes Kepler, se emplean para describir las órbitas de los planetas alrededor del Sol.

1. Todo planeta se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol.
2. Un rayo que va del Sol al planeta barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.
3. El cuadrado del periodo es proporcional al cubo de la distancia media entre el planeta y el Sol.*

Aun cuando Kepler dedujo estas leyes de manera empírica, más tarde fueron confirmadas por Newton. De hecho, Newton demostró que todas las leyes pueden deducirse de un conjunto de leyes universales del movimiento y la gravitación que gobiernan los movimientos de todos los cuerpos celestes, incluyendo cometas y satélites. Esto se muestra en el ejemplo siguiente con el cometa que debe su nombre al matemático inglés Edmund Halley (1656-1742).

EJEMPLO 3 Cometa Halley

El cometa Halley tiene una órbita elíptica, con el Sol en uno de sus focos y una excentricidad $e \approx 0.967$. La longitud del eje mayor de la órbita es aproximadamente 35.88 unidades astronómicas (UA). (Una unidad astronómica se define como la distancia media entre la Tierra y el Sol, 93 millones de millas.) Hallar una ecuación polar de la órbita. ¿Qué tan cerca llega a pasar el cometa Halley del Sol?

Solución Utilizando un eje vertical, se puede elegir una ecuación de la forma

$$r = \frac{ed}{(1 + e \operatorname{sen} \theta)}.$$

Como los vértices de la elipse se encuentran en $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$, la longitud del eje mayor es la suma de los valores r en los vértices, como se observa en la figura 10.63. Es decir,

$$2a = \frac{0.967d}{1 + 0.967} + \frac{0.967d}{1 - 0.967}$$

$$35.88 \approx 27.79d. \qquad 2a \approx 35.88$$

Por tanto, $d \approx 1.204$ y $ed \approx (0.967)(1.204) \approx 1.164$. Usando este valor en la ecuación se obtiene

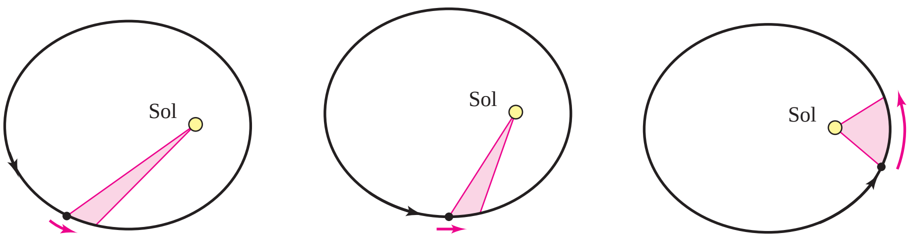
$$r = \frac{1.164}{1 + 0.967 \operatorname{sen} \theta}$$

donde r se mide en unidades astronómicas. Para hallar el punto más cercano al Sol (el foco), se escribe $c = ea \approx (0.967)(17.94) \approx 17.35$. Puesto que c es la distancia entre el foco y el centro, el punto más cercano es

$$\begin{aligned} a - c &\approx 17.94 - 17.35 \\ &\approx 0.59 \text{ UA} \\ &\approx 55\,000\,000 \text{ millas.} \end{aligned}$$

** Si se usa como referencia la Tierra, cuyo periodo es 1 año y cuya distancia media es 1 unidad astronómica, la constante de proporcionalidad es 1. Por ejemplo, como la distancia media de Marte al Sol es $D = 1.524$ UA, su periodo P está dado por $D^3 = P^2$. Por tanto, el periodo de Marte es $P = 1.88$.*

La segunda ley de Kepler establece que cuando un planeta se mueve alrededor del Sol, un rayo que va del Sol hacia el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. Esta ley también puede aplicarse a cometas y asteroides con órbitas elípticas. Por ejemplo, la figura 10.64 muestra la órbita del asteroide Apolo alrededor del Sol. Aplicando la segunda ley de Kepler a este asteroide, se sabe que cuanto más cerca está del Sol mayor es su velocidad, ya que un rayo corto debe moverse más rápido para barrer la misma área que barre un rayo largo.



Un rayo que va del Sol al asteroide barre áreas iguales en tiempos iguales
Figura 10.64

EJEMPLO 4 El asteroide Apolo

El periodo del asteroide Apolo es de 661 días terrestres, y su órbita queda descrita aproximadamente por la elipse

$$r = \frac{1}{1 + (5/9)\cos\theta} = \frac{9}{9 + 5\cos\theta}$$

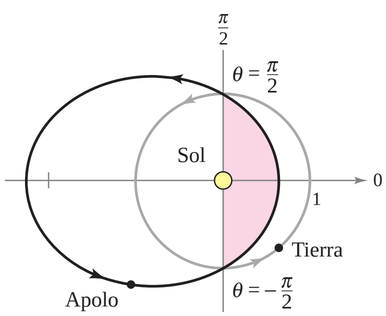


Figura 10.65

donde r se mide en unidades astronómicas. ¿Cuánto tiempo necesita Apolo para moverse de la posición dada por $\theta = -\pi/2$ a $\theta = \pi/2$, como se ilustra en la figura 10.65?

Solución Para empezar se encuentra el área barrida cuando θ aumenta de $-\pi/2$ a $\pi/2$.

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta \qquad \text{Fórmula para el área de una gráfica polar.}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{9}{9 + 5\cos\theta}\right)^2 d\theta$$

Usando la sustitución $u = \tan(\theta/2)$, analizada en la sección 8.6, se obtiene

$$A = \frac{81}{112}\left[\frac{-5\,\text{sen}\,\theta}{9 + 5\cos\theta} + \frac{18}{\sqrt{56}}\arctan\frac{\sqrt{56}\tan(\theta/2)}{14}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \approx 0.90429.$$

Como el eje mayor de la elipse tiene longitud $2a = 81/28$ y la excentricidad es $e = 5/9$, se encuentra que $b = a\sqrt{1 - e^2} = 9/\sqrt{56}$. Por tanto, el área de la elipse es

$$\text{Área de la elipse} = \pi ab = \pi\left(\frac{81}{56}\right)\left(\frac{9}{\sqrt{56}}\right) \approx 5.46507.$$

Como el tiempo requerido para recorrer la órbita es 661 días, se puede aplicar la segunda ley de Kepler para concluir que el tiempo t requerido para moverse de la posición $\theta = -\pi/2$ a la posición $\theta = \pi/2$ está dado por

$$\frac{t}{661} = \frac{\text{área del segmento elíptico}}{\text{área de la elipse}} \approx \frac{0.90429}{5.46507}$$

lo cual implica que $t \approx 109$ días.

10.6 Ejercicios

Razonamiento gráfico **En los ejercicios 1 a 4, usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar cuando *a*) $e = 1$, *b*) $e = 0.5$ y *c*) $e = 1.5$. Identificar la cónica.**

1. $r = \dfrac{2e}{1 + e\cos\theta}$ **2.** $r = \dfrac{2e}{1 - e\cos\theta}$

3. $r = \dfrac{2e}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}$ **4.** $r = \dfrac{2e}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$

5. ***Redacción*** Considerar la ecuación polar

$$r = \frac{4}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}.$$

a) Usar una herramienta de graficación para representar la ecuación con $e = 0.1$, $e = 0.25$, $e = 0.5$, $e = 0.75$, y $e = 0.9$. Identificar la cónica y analizar la variación en su forma cuando $e \to 1^-$ y $e \to 0^+$.

b) Usar una herramienta de graficación para representar la ecuación cuando $e = 1$. Identificar la cónica.

c) Usar una herramienta de graficación para representar la ecuación cuando $e = 1.1$, $e = 1.5$ y $e = 2$. Identificar la cónica y analizar la variación en su forma a medida que $e \to 1^+$ y $e \to \infty$.

6. Considerar la ecuación polar

$$r = \frac{4}{1 - 0.4\cos\theta}.$$

a) Identificar la cónica sin elaborar la gráfica de la ecuación.

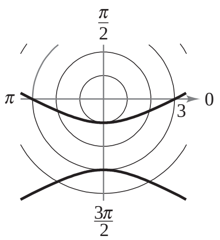
b) Sin elaborar la gráfica de las ecuaciones polares siguientes, describir la diferencia de cada una con la ecuación polar de arriba.

$$r = \frac{4}{1 + 0.4\cos\theta}, \quad r = \frac{4}{1 - 0.4\,\text{sen}\,\theta}$$

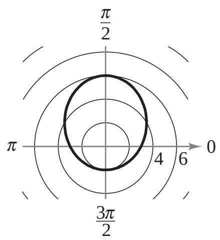
c) Verificar en forma gráfica los resultados del inciso *b*).

En los ejercicios 7 a 12 hacer corresponder la ecuación polar con su gráfica. [Las gráficas están etiquetadas *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

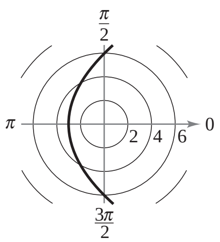
***a*)**



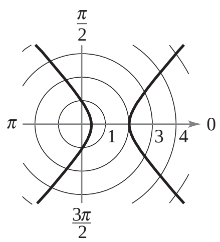
***b*)**



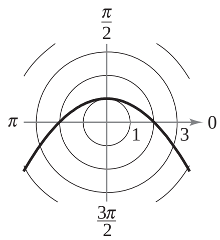
***c*)**



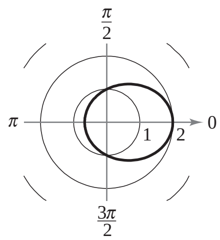
***d*)**



***e*)**



***f*)**



7. $r = \dfrac{6}{1 - \cos\theta}$ **8.** $r = \dfrac{2}{2 - \cos\theta}$

9. $r = \dfrac{3}{1 - 2\,\text{sen}\,\theta}$ **10.** $r = \dfrac{2}{1 + \text{sen}\,\theta}$

11. $r = \dfrac{6}{2 - \text{sen}\,\theta}$ **12.** $r = \dfrac{2}{2 + 3\cos\theta}$

En los ejercicios 13 a 26, hallar la excentricidad y la distancia del polo a la directriz de la cónica. Después trazar e identificar la gráfica. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

13. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$ **14.** $r = \dfrac{1}{1 + \text{sen}\,\theta}$

15. $r = \dfrac{-4}{1 - \text{sen}\,\theta}$ **16.** $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$

17. $r = \dfrac{6}{2 + \cos\theta}$

18. $r = \dfrac{10}{5 + 4\,\text{sen}\,\theta}$

19. $r(2 + \text{sen}\,\theta) = 4$

20. $r(3 - 2\cos\theta) = 6$

21. $r = \dfrac{5}{-1 + 2\cos\theta}$

22. $r = \dfrac{-6}{3 + 7\,\text{sen}\,\theta}$

23. $r = \dfrac{3}{2 + 6\,\text{sen}\,\theta}$

24. $r = \dfrac{8}{1 + 4\cos\theta}$

25. $r = \dfrac{300}{-12 + 6\,\text{sen}\,\theta}$

26. $r = \dfrac{180}{15 - 3.75\cos\theta}$

En los ejercicios 27 a 30, usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar. Identificar la gráfica.

27. $r = \dfrac{3}{-4 + 2\,\text{sen}\,\theta}$ **28.** $r = \dfrac{-15}{2 + 8\,\text{sen}\,\theta}$

29. $r = \dfrac{-10}{1 - \cos\theta}$ **30.** $r = \dfrac{6}{6 + 7\cos\theta}$

En los ejercicios 31 a 34, usar una graficadora para representar la cónica. Describir en qué difiere la gráfica de la del ejercicio indicado.

31. $r = \dfrac{-4}{1 - \operatorname{sen}(\theta - \pi/4)}$ (Ver ejercicio 15.)

32. $r = \dfrac{4}{1 + \cos(\theta - \pi/3)}$ (Ver ejercicio 16.)

33. $r = \dfrac{6}{2 + \cos(\theta + \pi/6)}$ (Ver ejercicio 17.)

34. $r = \dfrac{-6}{3 + 7\operatorname{sen}(\theta + 2\pi/3)}$ (Ver ejercicio 22.)

35. Dar la ecuación de la elipse que se obtiene al girar $\pi/6$ radianes en sentido de las manecillas del reloj la elipse

$$r = \frac{8}{8 + 5\cos\theta}.$$

36. Dar la ecuación de la parábola que se obtiene al girar $\pi/4$ radianes en sentido contrario a las manecillas del reloj la parábola

$$r = \frac{9}{1 + \operatorname{sen}\theta}.$$

En los ejercicios 37 a 48, hallar una ecuación polar de la cónica con foco en el polo. (Por conveniencia, la ecuación de la directriz está dada en forma rectangular.)

	Cónica	*Excentricidad*	*Directriz*
37.	Parábola	$e = 1$	$x = -1$
38.	Parábola	$e = 1$	$y = 1$
39.	Elipse	$e = \frac{1}{2}$	$y = 1$
40.	Elipse	$e = \frac{3}{4}$	$y = -2$
41.	Hipérbola	$e = 2$	$x = 1$
42.	Hipérbola	$e = \frac{3}{2}$	$x = -1$

	Cónica	*Vértice o vértices*
43.	Parábola	$\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$
44.	Parábola	$(5, \pi)$
45.	Elipse	$(2, 0),\ (8, \pi)$
46.	Elipse	$\left(2, \frac{\pi}{2}\right),\ \left(4, \frac{3\pi}{2}\right)$
47.	Hipérbola	$\left(1, \frac{3\pi}{2}\right),\ \left(9, \frac{3\pi}{2}\right)$
48.	Hipérbola	$(2, 0),\ (10, 0)$

49. Encontrar la ecuación para la elipse con foco (0, 0), excentricidad de $\frac{1}{2}$ y directriz en $r = 4 \sec\theta$.

50. Encontrar la ecuación para una hipérbola con foco (0, 0), excentricidad de 2 y directriz en $r = -8 \csc\theta$.

Desarrollo de conceptos

51. Clasificar las cónicas de acuerdo con su excentricidad.

52. Identificar cada cónica.

a) $r = \dfrac{5}{1 - 2\cos\theta}$ *b)* $r = \dfrac{5}{10 - \operatorname{sen}\theta}$

c) $r = \dfrac{5}{3 - 3\cos\theta}$ *d)* $r = \dfrac{5}{1 - 3\operatorname{sen}(\theta - \pi/4)}$

53. Describir qué pasa con la distancia entre la directriz y el centro de una elipse si los focos permanecen fijos y e se aproxima a 0.

Para discusión

54. Explicar en qué difiere la gráfica de cada cónica de la gráfica de $r = \dfrac{4}{1 + \operatorname{sen}\theta}$.

a) $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$ *b)* $r = \dfrac{4}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

c) $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$ *d)* $r = \dfrac{4}{1 - \operatorname{sen}(\theta - \pi/4)}$

55. Demostrar que la ecuación polar de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\theta}.$$ Elipse.

56. Demostrar que la ecuación polar de $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es

$$r^2 = \frac{-b^2}{1 - e^2\cos^2\theta}.$$ Hipérbola.

En los ejercicios 57 a 60, usar los resultados de los ejercicios 55 y 56 para dar la forma polar de la ecuación de la cónica.

57. Elipse: foco en (4, 0); vértices en (5, 0), $(5, \pi)$

58. Hipérbola: foco en (5, 0); vértices en (4, 0), $(4, \pi)$

59. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

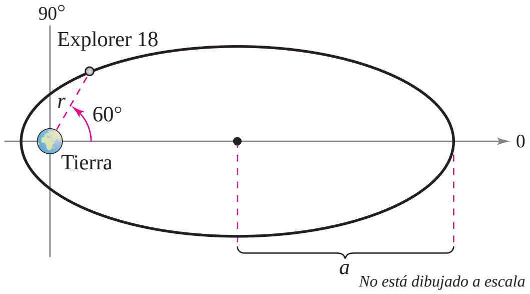
60. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

En los ejercicios 61 a 64, usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para estimar con una precisión de dos cifras decimales el área de la región limitada por la gráfica de la ecuación polar.

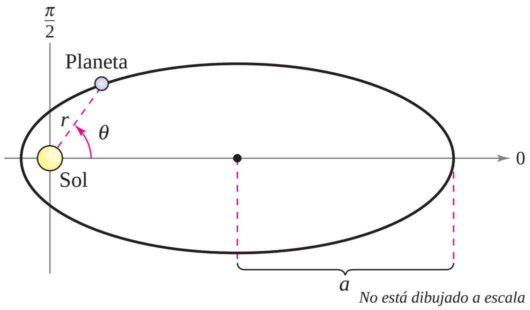
61. $r = \dfrac{3}{2 - \cos\theta}$ **62.** $r = \dfrac{9}{4 + \cos\theta}$

63. $r = \dfrac{2}{3 - 2\operatorname{sen}\theta}$ **64.** $r = \dfrac{3}{6 + 5\operatorname{sen}\theta}$

65. ***Explorer 18*** El 27 de noviembre de 1963, Estados Unidos lanzó el Explorer 18. Sus puntos bajo y alto sobre la superficie de la Tierra fueron aproximadamente 119 millas y 123 000 millas, respectivamente (ver la figura). El centro de la Tierra es el foco de la órbita. Hallar la ecuación polar de la órbita y hallar la distancia entre la superficie de la Tierra y el satélite cuando $\theta = 60°$. (Tomar como radio de la Tierra 4 000 millas.)



66. ***Movimiento planetario*** Los planetas giran en órbitas elípticas con el Sol como uno de sus focos, como se muestra en la figura.



a) Mostrar que la ecuación polar de la órbita está dada por

$$r = \frac{(1 - e^2)a}{1 - e\cos\theta}$$

donde e es la excentricidad.

b) Mostrar que la distancia mínima (*perihelio*) entre el Sol y el planeta es $r = a(1 - e)$ y que la distancia máxima (*afelio*) es $r = a(1 + e)$.

En los ejercicios 67 a 70, usar el ejercicio 66 para hallar la ecuación polar de la órbita elíptica del planeta, así como las distancias en el perihelio y en el afelio.

67. Tierra $a = 1.496 \times 10^8$ kilómetros
$e = 0.0167$

68. Saturno $a = 1.427 \times 10^9$ kilómetros
$e = 0.0542$

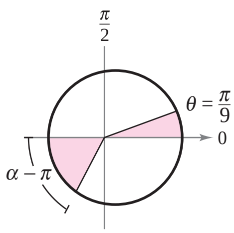
69. Neptuno $a = 4.498 \times 10^9$ kilómetros
$e = 0.0086$

70. Mercurio $a = 5.791 \times 10^7$ kilómetros
$e = 0.2056$

CAS **71.** ***Movimiento planetario*** En el ejercicio 69 se encontró la ecuación polar para la órbita elíptica de Neptuno. Usar la ecuación y un sistema algebraico por computadora.

a) Aproximar el área que barre un rayo que va del Sol al planeta cuando θ aumenta de 0 a $\pi/9$. Emplear este resultado para determinar cuántos años necesita Neptuno para recorrer este arco, si el periodo de una revolución alrededor del Sol es de 165 años.

b) Por ensayo y error, aproximar el ángulo α tal que el área barrida por un rayo que va del Sol al planeta cuando θ aumenta de π a α sea igual al área encontrada en el inciso *a*) (ver la figura). ¿Barre el rayo un ángulo mayor o menor que el del inciso *a*), para generar la misma área? ¿A qué se debe?



c) Aproximar las distancias que recorrió el planeta en los incisos *a*) y *b*). Usar estas distancias para aproximar la cantidad promedio de kilómetros al año que recorrió el planeta en los dos casos.

72. ***Cometa Hale-Bopp*** El cometa Hale-Bopp tiene una órbita elíptica con el Sol en uno de sus focos y una excentricidad de $e \approx 0.995$. La longitud del eje mayor de la órbita es aproximadamente 500 unidades astronómicas.

a) Hallar la longitud del eje menor.

b) Hallar la ecuación polar de la órbita.

c) Hallar distancias en el perihelio y en el afelio.

En los ejercicios 73 y 74, sea r_0 la distancia del foco al vértice más cercano, y r_1 la distancia del foco al vértice más lejano.

73. Mostrar que la excentricidad de una elipse puede expresarse como

$$e = \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}. \text{ Después mostrar que } \frac{r_1}{r_0} = \frac{1 + e}{1 - e}.$$

74. Mostrar que la excentricidad de una hipérbola puede expresarse como

$$e = \frac{r_1 + r_0}{r_1 - r_0}. \text{ Después, mostrar que } \frac{r_1}{r_0} = \frac{e + 1}{e - 1}.$$

En los ejercicios 75 y 76, mostrar que las gráficas de las ecuaciones dadas se cortan en ángulo recto.

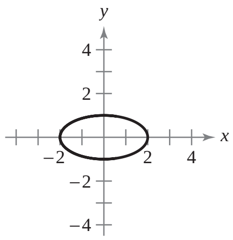
75. $r = \dfrac{ed}{1 + \operatorname{sen}\theta}$ y $r = \dfrac{ed}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

76. $r = \dfrac{c}{1 + \cos\theta}$ y $r = \dfrac{d}{1 - \cos\theta}$

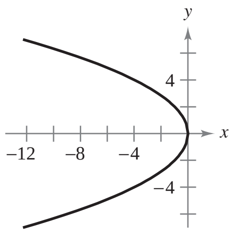
10 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 a 6, hacer corresponder la ecuación con su gráfica. [Las gráficas están etiquetadas *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

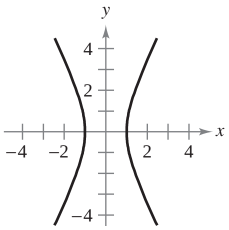
a)



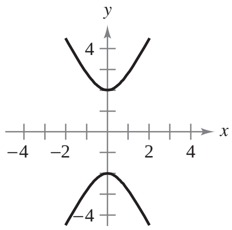
b)



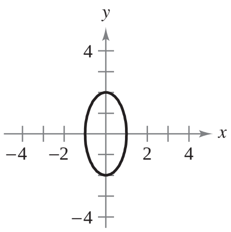
c)



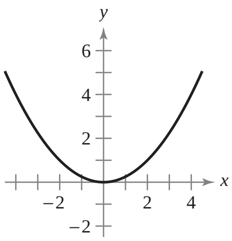
d)



e)



f)



1. $4x^2 + y^2 = 4$

2. $4x^2 - y^2 = 4$

3. $y^2 = -4x$

4. $y^2 - 4x^2 = 4$

5. $x^2 + 4y^2 = 4$

6. $x^2 = 4y$

En los ejercicios 7 a 12, analizar la ecuación y trazar su gráfica. Emplear una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

7. $16x^2 + 16y^2 - 16x + 24y - 3 = 0$

8. $y^2 - 12y - 8x + 20 = 0$

9. $3x^2 - 2y^2 + 24x + 12y + 24 = 0$

10. $5x^2 + y^2 - 20x + 19 = 0$

11. $3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y + 29 = 0$

12. $12x^2 - 12y^2 - 12x + 24y - 45 = 0$

En los ejercicios 13 y 14, hallar una ecuación de la parábola.

13. Vértice: $(0, 2)$; directriz: $x = -3$

14. Vértice: $(2, 6)$; foco: $(2, 4)$

En los ejercicios 15 y 16, hallar la ecuación de la elipse.

15. Vértices: $(-5, 0)$ $(7, 0)$; focos: $(-3, 0)$ $(5, 0)$

16. Centro: $(0, 0)$; puntos solución: $(1, 2)$, $(2, 0)$

En los ejercicios 17 y 18, hallar la ecuación de la hipérbola.

17. Vértice: $(\pm 7, 0)$; foco: $(\pm 9, 0)$

18. Foco: $(0, \pm 8)$; asíntotas: $y = \pm 4x$

En los ejercicios 19 y 20, usar una herramienta graficadora para aproximar al perímetro de la elipse.

19. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

20. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

21. Una recta es tangente a la parábola $y = x^2 - 2x + 2$ y perpendicular a la recta $y = x - 2$. Hallar la ecuación de la recta.

22. Una recta es tangente a la parábola $3x^2 + y = x - 6$ y perpendicular a la recta $2x + y = 5$. Hallar la ecuación de la recta.

23. ***Antena satelital*** La sección transversal de una gran antena parabólica se modela por medio de la gráfica de

$$y = \frac{x^2}{200}, \quad -100 \le x \le 100.$$

El equipo de recepción y transmisión se coloca en el foco.

a) Hallar las coordenadas del foco.

b) Hallar el área de la superficie de la antena.

24. ***Camión de bomberos*** Considerar un camión de bomberos con un tanque de agua que mide 16 pies de longitud, cuyas secciones transversales verticales son elipses que se describen por la ecuación

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

a) Hallar el volumen del tanque.

b) Hallar la fuerza ejercida sobre el fondo del tanque cuando está lleno de agua. (La densidad del agua es 62.4 libras por pie cuadrado.)

c) Hallar la profundidad del agua en el tanque si está lleno a $\frac{3}{4}$ de su capacidad (en volumen) y el camión se encuentra sobre un terreno nivelado.

d) Aproximar el área en la superficie del tanque.

En los ejercicios 25 a 32, trazar la curva representada por las ecuaciones paramétricas (indicar la orientación de la curva) y dar las ecuaciones rectangulares correspondientes mediante la eliminación del parámetro.

25. $x = 1 + 8t, \ y = 3 - 4t$

26. $x = t - 6, \ y = t^2$

27. $x = e^t - 1, \ y = e^{3t}$

28. $x = e^{4t}, \ y = t + 4$

29. $x = 6 \cos \theta, \ y = 6 \operatorname{sen} \theta$

30. $x = 2 + 5 \cos t, \ y = 3 + 2 \operatorname{sen} t$

31. $x = 2 + \sec \theta, \ y = 3 + \tan \theta$

32. $x = 5 \operatorname{sen}^3 \theta, \ y = 5 \cos^3 \theta$

En los ejercicios 33 a 36, hallar una representación paramétrica de la recta o cónica.

33. Recta: pasa por $(-2, 6)$ y $(3, 2)$

34. Circunferencia: centro en $(-4, -5)$; radio 3

35. Elipse: centro en $(-3, 4)$; longitud del eje mayor horizontal 8 y longitud del eje menor 6

36. Hipérbola: vértice en $(0, \pm 4)$; foco en $(0, \pm 5)$

37. ***Motor rotatorio*** El motor rotatorio fue inventado por Felix Wankel en la década de los cincuenta. Contiene un rotor que es un triángulo equilátero modificado. El rotor se mueve en una cámara que, en dos dimensiones, es un epitrocoide. Usar una herramienta de graficación para trazar la cámara que describen las ecuaciones paramétricas.

$$x = \cos 3\theta + 5 \cos \theta$$

y

$$y = \operatorname{sen} 3\theta + 5 \operatorname{sen} \theta.$$

38. ***Curva serpentina*** Considerar las ecuaciones paramétricas $x = 2 \cot \theta$ y $y = 4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$, $0 < \theta < \pi$.

a) Usar una herramienta de graficación para trazar la curva.

b) Eliminar el parámetro para mostrar que la ecuación rectangular de la curva serpentina es $(4 + x^2)y = 8x$.

En los ejercicios 39 a 48, *a*) hallar dy/dx y los puntos de tangencia horizontal, *b*) eliminar el parámetro cuando sea posible y *c*) trazar la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

39. $x = 2 + 5t, \quad y = 1 - 4t$

40. $x = t - 6, \quad y = t^2$

41. $x = \dfrac{1}{t}, \quad y = 2t + 3$

42. $x = \dfrac{1}{t}, \quad y = t^2$

43. $x = \dfrac{1}{2t + 1}$, $y = \dfrac{1}{t^2 - 2t}$

44. $x = 2t - 1$, $y = \dfrac{1}{t^2 - 2t}$

45. $x = 5 + \cos \theta$, $y = 3 + 4 \operatorname{sen} \theta$

46. $x = 10 \cos \theta$, $y = 10 \operatorname{sen} \theta$

47. $x = \cos^3 \theta$, $y = 4 \operatorname{sen}^3 \theta$

48. $x = e^t$, $y = e^{-t}$

En los ejercicios 49 a 52, hallar todos los puntos (si los hay) de tangencia horizontal y vertical a la curva. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

49. $x = 5 - t, \quad y = 2t^2$

50. $x = t + 2, \quad y = t^3 - 2t$

51. $x = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta, \quad y = 1 + \cos \theta$

52. $x = 2 - 2 \cos \theta, \quad y = 2 \operatorname{sen} 2\theta$

En los ejercicios 53 y 54, *a*) usar una herramienta de graficación para trazar la curva representada por las ecuaciones paramétricas, *b*) usar una herramienta de graficación para hallar $dx/d\theta$, $dy/d\theta$ y dy/dx para $\theta = \pi/6$, y *c*) usar una herramienta de graficación para trazar la recta tangente a la curva cuando $\theta = \pi/6$.

53. $x = \cot \theta$, $y = \operatorname{sen} 2\theta$

54. $x = 2\theta - \operatorname{sen} \theta$, $y = 2 - \cos \theta$

Longitud de arco **En los ejercicios 55 y 56, hallar la longitud de arco de la curva en el intervalo que se indica.**

55. $x = r(\cos \theta + \theta \operatorname{sen} \theta)$, $y = r(\operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta)$, $0 \le \theta \le \pi$

56. $x = 6 \cos \theta$, $y = 6 \operatorname{sen} \theta$, $0 \le \theta \le \pi$

Área de una superficie **En los ejercicios 57 y 58, hallar el área de la superficie generada por revolución de la curva en torno *a*) al eje *x* y *b*) al eje *y*.**

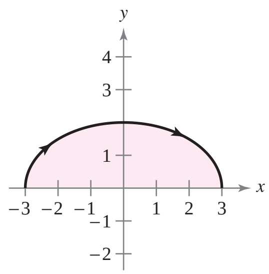
57. $x = t, \quad y = 3t, \quad 0 \le t \le 2$

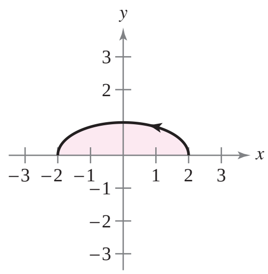
58. $x = 2 \cos \theta, \quad y = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

Área **En los ejercicios 59 y 60, hallar el área de la región.**

59. $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, $y = 2 \cos \theta$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

60. $x = 2 \cos \theta$, $y = \operatorname{sen} \theta$, $0 \le \theta \le \pi$





En los ejercicios 61 a 64, representar gráficamente el punto en coordenadas polares y hallar las coordenadas rectangulares correspondientes al punto.

61. $\left(5, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

62. $\left(-6, \dfrac{7\pi}{6}\right)$

63. $\left(\sqrt{3}, 1.56\right)$

64. $(-2, -2.45)$

En los ejercicios 65 a 68, se dan las coordenadas rectangulares de un punto. Representar gráficamente el punto y hallar *dos* pares de coordenadas polares del punto para $0 \le \theta < 2\pi$.

65. $(4, -4)$

66. $(0, -7)$

67. $(-1, 3)$

68. $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$

En los ejercicios 69 a 76, pasar la ecuación polar a la forma rectangular.

69. $r = 3\cos\theta$

70. $r = 10$

71. $r = -2(1 + \cos\theta)$

72. $r = \dfrac{1}{2 - \cos\theta}$

73. $r^2 = \cos 2\theta$

74. $r = 4\sec\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$

75. $r = 4\cos 2\theta \sec\theta$

76. $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

En los ejercicios 77 a 80, transformar la ecuación rectangular a la forma polar.

77. $(x^2 + y^2)^2 = ax^2y$

78. $x^2 + y^2 - 4x = 0$

79. $x^2 + y^2 = a^2\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)^2$

80. $(x^2 + y^2)\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)^2 = a^2$

En los ejercicios 81 a 92, trazar la gráfica de la ecuación polar.

81. $r = 6$

82. $\theta = \dfrac{\pi}{12}$

83. $r = -\sec\theta$

84. $r = 3\csc\theta$

85. $r = -2(1 + \cos\theta)$

86. $r = 3 - 4\cos\theta$

87. $r = 4 - 3\cos\theta$

88. $r = 4\theta$

89. $r = -3\cos 2\theta$

90. $r = \cos 5\theta$

91. $r^2 = 4\,\text{sen}^2\, 2\theta$

92. $r^2 = \cos 2\theta$

En los ejercicios 93 a 96, usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar.

93. $r = \dfrac{3}{\cos(\theta - \pi/4)}$

94. $r = 2\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta$

95. $r = 4\cos 2\theta\sec\theta$

96. $r = 4(\sec\theta - \cos\theta)$

En los ejercicios 97 y 98, *a*) hallar las tangentes en el polo, *b*) hallar todos los puntos de tangencia horizontal y vertical, y *c*) usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar y dibujar una recta tangente a la gráfica en $\theta = \pi/6$.

97. $r = 1 - 2\cos\theta$

98. $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$

En los ejercicios 99 y 100, mostrar que las gráficas de las ecuaciones polares son ortogonales en el punto de intersección. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

99. $r = 1 + \cos\theta$
$r = 1 - \cos\theta$

100. $r = a\,\text{sen}\,\theta$
$r = a\cos\theta$

En los ejercicios 101 a 106, hallar el área de la región.

101. Un pétalo de $r = 3\cos 5\theta$

102. Un pétalo de $r = 2\,\text{sen}\,6\theta$

103. Interior de $r = 2 + \cos\theta$

104. Interior de $r = 5(1 - \text{sen}\,\theta)$

105. Interior de $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$

106. Interior común a $r = 4\cos\theta$ y $r = 2$

107. Encontrar los puntos de intersección de las gráficas de $r = 1 - \cos\theta$ y $r = 1 + \text{sen}\,\theta$.

108. Encontrar los puntos de intersección de las gráficas de $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ y $r = 3\,\text{sen}\,\theta$.

En los ejercicios 109 a 112, usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar. Dar una integral para encontrar el área de la región dada y usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar el valor de la integral con una precisión de dos cifras decimales.

109. Interior de $r = \text{sen}\,\theta\cos^2\theta$

110. Interior de $r = 4\,\text{sen}\,3\theta$

111. Interior común de $r = 3$ y $r^2 = 18\,\text{sen}\,2\theta$

112. Región limitada por el eje polar $r = e^{\theta}$ para $0 \leq \theta \leq \pi$

En los ejercicios 113 y 114, hallar la longitud de la curva sobre el intervalo dado.

	Ecuación polar	*Intervalo*
113.	$r = a(1 - \cos\theta)$	$0 \leq \theta \leq \pi$
114.	$r = a\cos 2\theta$	$-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

En los ejercicios 115 y 116, dar una integral que represente el área de la superficie generada por revolución de la curva en torno a una recta dada. Usar una herramienta de graficación para aproximar la integral.

	Ecuación polar	*Intervalo*	*Eje de revolución*
115.	$r = 1 + 4\cos\theta$	$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$	Eje polar
116.	$r = 2\,\text{sen}\,\theta$	$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$	$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

En los ejercicios 117 a 122, trazar e identificar la gráfica. Usar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

117. $r = \dfrac{2}{1 - \text{sen}\,\theta}$

118. $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$

119. $r = \dfrac{6}{3 + 2\cos\theta}$

120. $r = \dfrac{4}{5 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

121. $r = \dfrac{4}{2 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

122. $r = \dfrac{8}{2 - 5\cos\theta}$

En los ejercicios 123 a 128, hallar la ecuación polar de la recta o cónica con su foco en el polo.

123. Círculo
Centro: $(5, \pi/2)$
Punto solución: $(0, 0)$

124. Recta
Punto solución: $(0, 0)$
Pendiente: $\sqrt{3}$

125. Parábola
Vértice: $(2, \pi)$

126. Parábola
Vértice: $(2, \pi/2)$

127. Elipse
Vértices: $(5, 0)$, $(1, \pi)$

128. Hipérbola
Vértices: $(1, 0)$, $(7, 0)$

SP Solución de problemas

1. Considerar la parábola $x^2 = 4y$ y la cuerda focal $y = \frac{3}{4}x + 1$.

a) Dibujar la gráfica de la parábola y la cuerda focal.

b) Mostrar que las rectas tangentes a la parábola en los extremos de la cuerda focal se cortan en ángulo recto.

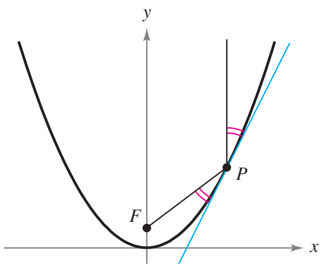
c) Mostrar que las rectas tangentes a la parábola en los extremos de la cuerda focal se cortan en la directriz de la parábola.

2. Considerar la parábola $x^2 = 4py$ y una de sus cuerdas focales.

a) Mostrar que las rectas tangentes a la parábola en los extremos de la cuerda focal se cortan en ángulos rectos.

b) Mostrar que las rectas tangentes a la parábola en los extremos de la cuerda focal se cortan en la directriz de la parábola.

3. Demostrar el teorema 10.2, la propiedad de reflexión de una parábola, como se ilustra en la figura.



4. Considerar la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con focos F_1 y F_2, como se ilustra en la figura. Sea T la recta tangente en un punto M de la hipérbola. Mostrar que los rayos de luz incidente en un foco son reflejados por un espejo hiperbólico hacia el otro foco.

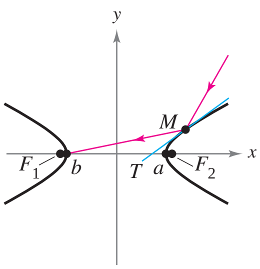


Figura para 4

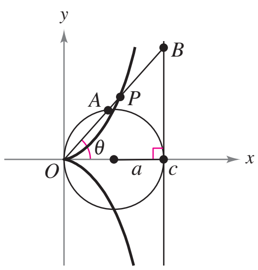


Figura para 5

5. Considerar un círculo con radio a tangente al eje y y a la recta $x = 2a$, como se ilustra en la figura. Sea A el punto en el cual el segmento OB corta el círculo. La **cisoide de Diocles** consiste de todos los puntos P tales que $OP = AB$.

a) Hallar una ecuación polar de la cisoide.

b) Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la cisoide que no contengan funciones trigonométricas.

c) Hallar la ecuación rectangular de la cisoide.

6. Considerar la región limitada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, con excentricidad $e = c/a$.

a) Mostrar que el área de la región es πab.

b) Mostrar que el volumen del sólido (esferoide oblato) generado por revolución de la región en torno al eje menor de la elipse es $V = 4\pi^2 b/3$ y el área de la superficie es

$$S = 2\pi a^2 + \pi\left(\frac{b^2}{e}\right)\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right).$$

c) Comprobar que el volumen del sólido (esferoide prolato) generado por revolución de la región alrededor del eje mayor de la elipse es $V = 4\pi ab^2/3$ y el área de la superficie es

$$S = 2\pi b^2 + 2\pi\left(\frac{ab}{e}\right)\text{arcsen } e.$$

7. La curva descrita por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$$

se denomina **estrofoide**.

a) Hallar una ecuación rectangular de la estrofoide.

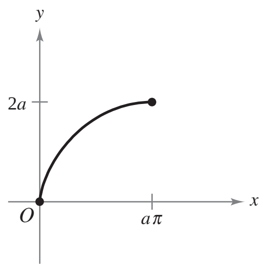
b) Hallar una ecuación polar de la estrofoide.

c) Trazar una gráfica de la estrofoide.

d) Hallar la ecuación de las dos rectas tangentes en el origen.

e) Hallar los puntos de la gráfica en los que las rectas tangentes son horizontales.

8. Hallar una ecuación rectangular para la porción de la cicloide dada por las ecuaciones paramétricas $x = a(\theta - \text{sen } \theta)$ y $y = a(1 - \cos \theta)$, $0 \le \theta \le \pi$, como se muestra en la figura.



9. Considerar la **espiral de Cornu** dada por

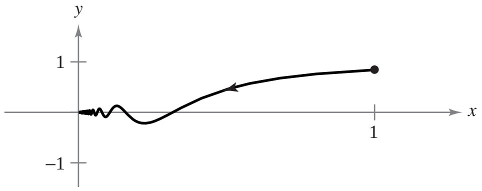
$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \quad \text{y} \quad y(t) = \int_0^t \text{sen}\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du.$$

a) Usar una herramienta de graficación para representar la espiral en el intervalo $-\pi \le t \le \pi$.

b) Mostrar que la espiral cornu es simétrica respecto al origen.

c) Hallar la longitud de la espiral cornu desde $t = 0$ hasta $t = a$. ¿Cuál es la longitud de la espiral desde $t = -\pi$ hasta $t = \pi$?

10. Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria descrita por las ecuaciones paramétricas $x = 1/t$ y $y = \operatorname{sen} t/t$, con $1 \le t < \infty$, como se muestra en la figura. Hallar la longitud de esta trayectoria.



11. Sean a y b constantes positivas. Hallar el área de la región del primer cuadrante limitada por la gráfica de la ecuación polar

$$r = \frac{ab}{(a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta)}, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

12. Considerar el triángulo rectángulo de la figura.

a) Mostrar que el área del triángulo es $A(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} \sec^2 \theta \, d\theta.$

b) Mostrar que $\tan \alpha = \int_0^{\alpha} \sec^2 \theta \, d\theta.$

c) Usar el inciso *b*) para deducir la fórmula para la derivada de la función tangente.

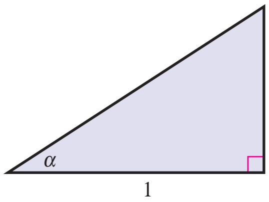


Figura para 12

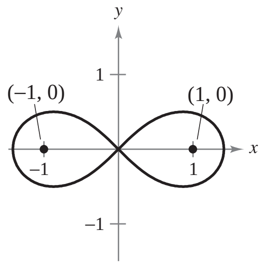
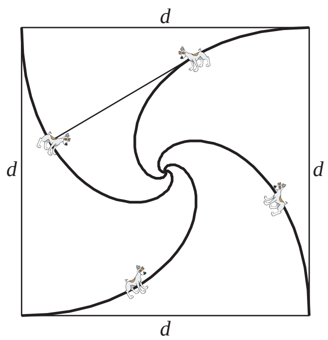


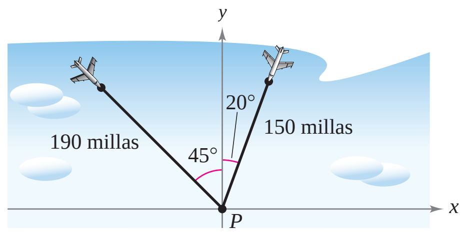
Figura para 13

13. Determinar la ecuación polar del conjunto de todos los puntos (r, θ), el producto de cuyas distancias desde los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ es igual a 1, como se observa en la figura.

14. Cuatro perros se encuentran en las esquinas de un cuadrado con lados de longitud d. Todos los perros se mueven en sentido contrario al de las manecillas del reloj a la misma velocidad y en dirección al siguiente perro, como se muestra en la figura. Hallar la ecuación polar de la trayectoria de un perro a medida que se acerca en espiral hacia el centro del cuadrado.



15. Un controlador de tráfico aéreo ubica a la misma altitud dos aviones que vuelan uno hacia el otro (ver la figura). Sus trayectorias de vuelo son 20° y 315°. Un avión está a 150 millas del punto P con una velocidad de 375 millas por hora. El otro se encuentra a 190 millas del punto P con una velocidad de 450 millas por hora.



a) Hallar ecuaciones paramétricas para la trayectoria de cada avión donde t es tiempo en horas, y $t = 0$ corresponde al instante en que el controlador de tráfico aéreo localiza a los aviones.

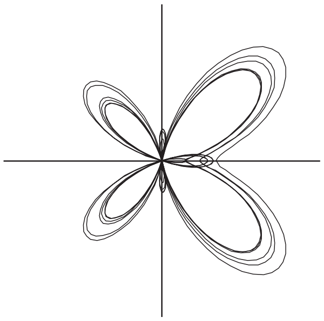
b) Emplear el resultado del inciso *a*) para expresar la distancia entre los aviones como función de t.

c) Usar una herramienta de graficación para representar la función del inciso *b*). ¿Cuándo será mínima la distancia entre los aviones? Si los aviones deben conservar una distancia entre ellos de por lo menos tres millas, ¿se satisface este requerimiento?

16. Usar una herramienta de graficación para trazar la curva que se muestra abajo. La curva está dada por

$$r = e^{\cos \theta} - 2 \cos 4\theta + \operatorname{sen}^5 \frac{\theta}{12}.$$

¿Sobre qué intervalo debe variar θ para generar la curva?



PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre esta curva, consultar el artículo “A Study in Step Size” de Temple H. Fay en *Mathematics Magazine*.

17. Usar una herramienta de graficación para representar la ecuación polar $r = \cos 5\theta + n \cos \theta$, para $0 \le \theta < \pi$ y para los enteros desde $n = -5$ hasta $n = 5$. ¿Qué valores de n producen la porción de la curva en forma de “corazón”? ¿Qué valores de n producen la porción de la curva en forma de “campana”? (Esta curva, creada por Michael W. Chamberlin, fue publicada en *The College Mathematics Journal*.)

11 Vectores y la geometría del espacio

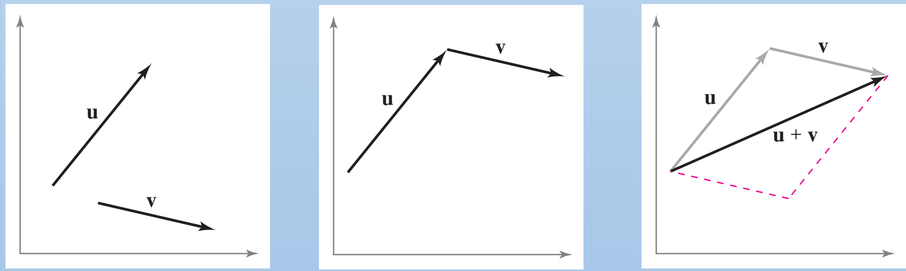
En este capítulo se introducen los vectores y el sistema de coordenadas tridimensional. Los vectores se usan para representar rectas y planos, y también para representar cantidades como fuerza y velocidad. El sistema de coordenadas tridimensional se utiliza para representar superficies como elipsoides y conos elípticos. Gran parte del material en los capítulos restantes se fundamenta en el entendimiento de este sistema.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo escribir vectores, realizar operaciones vectoriales básicas y representar vectores de manera gráfica. (11.1)
- Cómo determinar puntos en un sistema de coordenadas tridimensional y analizar vectores en el espacio. (11.2)
- Cómo encontrar el producto escalar de dos vectores (en el plano y en el espacio). (11.3)
- Cómo encontrar el producto vectorial de dos vectores (en el espacio). (11.4)
- Cómo encontrar las ecuaciones de rectas y planos en el espacio, y cómo dibujar sus gráficas. (11.5)
- Cómo reconocer y escribir ecuaciones de superficies cilíndricas y cuadráticas y las superficies de revolución. (11.6)
- Cómo utilizar coordenadas cilíndricas y esféricas para representar superficies en el espacio. (11.7)

Mark Hunt/Hunt Stock

Dos remolcadores están empujando un barco trasatlántico, como se muestra en la foto. Cada barco ejerce una fuerza de 400 libras. ¿Cuál es la fuerza resultante en el barco trasatlántico? (Ver la sección 11.1, ejemplo 7.)

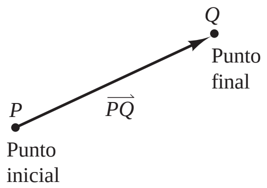


Los *vectores* indican cantidades que implican tanto magnitud como dirección. En el capítulo 11 se estudiarán operaciones de vectores en el plano y en el espacio. También se aprenderá cómo representar operaciones de vectores de manera geométrica. Por ejemplo, las gráficas que se muestran arriba representan adición de vectores en el plano.

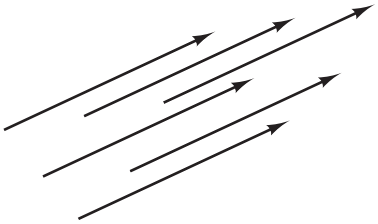
11.1 Vectores en el plano

- Expresar un vector mediante sus componentes.
- Realizar operaciones vectoriales e interpretar los resultados geométricamente.
- Expresar un vector como combinación lineal de vectores unitarios estándar o canónicos.
- Usar vectores para resolver problemas de fuerza o velocidad.

Las componentes de un vector



Un segmento de recta dirigido
Figura 11.1



Segmentos de recta dirigidos equivalentes
Figura 11.2

Muchas cantidades en geometría y física, como el área, el volumen, la temperatura, la masa y el tiempo, se pueden caracterizar por medio de un solo número real en unidades de medición apropiadas. Estas cantidades se llaman **escalares**, y al número real se le llama **escalar**.

Otras cantidades, como la fuerza, la velocidad y la aceleración, tienen magnitud y dirección y no pueden caracterizarse completamente por medio de un solo número real. Para representar estas cantidades se usa un **segmento de recta dirigido**, como se muestra en la figura 11.1. El segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ tiene como **punto inicial** P y como **punto final** Q y su **longitud** (o **magnitud**) se denota por $\|\overrightarrow{PQ}\|$. Segmentos de recta dirigidos que tienen la misma longitud y dirección son **equivalentes**, como se muestra en la figura 11.2. El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos que son equivalentes a un segmento de recta dirigido dado $\overrightarrow{PQ}$ es un **vector en el plano** y se denota por $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$. En los libros, los vectores se denotan normalmente con letras minúsculas, en negrita, como **u**, **v** y **w**. Cuando se escriben a mano, se suelen denotar por medio de letras con una flecha sobre ellas, como $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Es importante notar que un vector en el plano se puede representar por medio de muchos segmentos de recta dirigidos diferentes, todos apuntando en la misma dirección y todos de la misma longitud.

EJEMPLO 1 Representación de vectores por medio de segmentos de recta dirigidos

Sea **v** el vector representado por el segmento dirigido que va de (0, 0) a (3, 2), y sea **u** el vector representado por el segmento dirigido que va de (1, 2) a (4, 4). Mostrar que **v** y **u** son equivalentes.

Solución Sean $P(0, 0)$ y $Q(3, 2)$ los puntos inicial y final de **v**, y sean $R(1, 2)$ y $S(4, 4)$ los puntos inicial y final de **u**, como se muestra en la figura 11.3. Para mostrar que $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la *misma longitud* se usa la fórmula de la distancia.

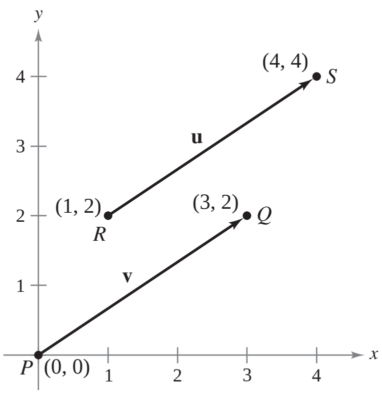
$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13} \qquad \text{Longitud de } \overrightarrow{PQ}.$$
$$\|\overrightarrow{RS}\| = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13} \qquad \text{Longitud de } \overrightarrow{RS}.$$

Los dos segmentos tienen la *misma dirección*, porque ambos están dirigidos hacia la derecha y hacia arriba sobre rectas que tienen la misma pendiente.

$$\text{Pendiente de } \overrightarrow{PQ} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3}$$

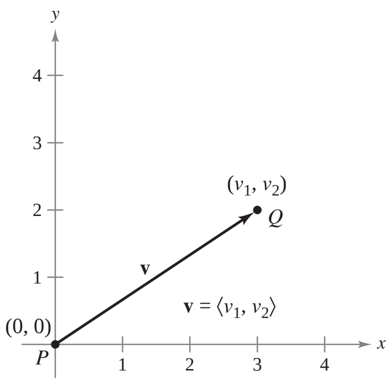
y

$$\text{Pendiente de } \overrightarrow{RS} = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}$$



Los vectores **u** y **v** son iguales
Figura 11.3

Como $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma longitud y la misma dirección, se concluye que los dos vectores son equivalentes. Es decir, **v** y **u** son equivalentes.



Posición estándar de un vector
Figura 11.4

El segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen a menudo se considera el representante más adecuado de un conjunto de segmentos de recta dirigidos equivalentes como los que se muestran en la figura 11.3. Se dice que esta representación de **v** está en la **posición canónica** o **estándar**. Un segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen puede representarse de manera única por medio de las coordenadas de su punto final $Q(v_1, v_2)$, como se muestra en la figura 11.4.

DEFINICIÓN DE UN VECTOR EN EL PLANO MEDIANTE SUS COMPONENTES

Si **v** es un vector en el plano cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto final es (v_1, v_2), entonces el vector **v** queda dado mediante sus componentes de la siguiente manera

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Las coordenadas v_1 y v_2 son las **componentes de v**. Si el punto inicial y el punto final están en el origen, entonces **v** es el **vector cero** (o **vector nulo**) y se denota por $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$.

Esta definición implica que dos vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ son **iguales** si y sólo si $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$.

Los procedimientos siguientes pueden usarse para convertir un vector dado mediante un segmento de recta dirigido en un vector dado mediante sus componentes o viceversa.

1. Si $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$ son los puntos inicial y final de un segmento de recta dirigido, el vector **v** representado por $\overrightarrow{PQ}$, dado mediante sus componentes, es $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2 \rangle$. Además, de la fórmula de la distancia es posible ver que la **longitud** (o **magnitud**) **de v** es

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

Longitud de un vector.

2. Si $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, **v** puede representarse por el segmento de recta dirigido, en la posición canónica o estándar, que va de $P(0, 0)$ a $Q(v_1, v_2)$.

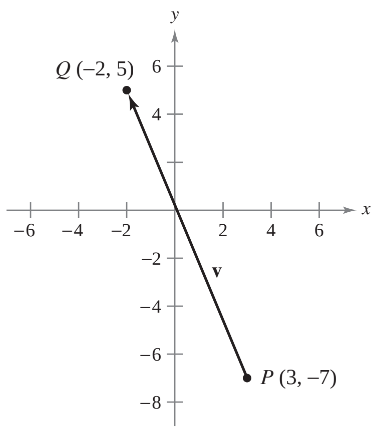
A la longitud de **v** también se le llama la **norma de v**. Si $\|\mathbf{v}\| = 1$, **v** es un **vector unitario**. Y $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si **v** es el vector cero **0**.

EJEMPLO 2 Hallar las componentes y la longitud de un vector

Hallar las componentes y la longitud del vector **v** que tiene el punto inicial $(3, -7)$ y el punto final $(-2, 5)$.

Solución Sean $P(3, -7) = (p_1, p_2)$ y $Q(-2, 5) = (q_1, q_2)$. Entonces las componentes de $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ son

$$v_1 = q_1 - p_1 = -2 - 3 = -5$$
$$v_2 = q_2 - p_2 = 5 - (-7) = 12.$$



Vector **v** dado por medio de sus componentes: $\mathbf{v} = \langle -5, 12 \rangle$
Figura 11.5

Así, como se muestra en la figura 11.5, $\mathbf{v} = \langle -5, 12 \rangle$, y la longitud de **v** es

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13. \end{aligned}$$

Operaciones con vectores

DEFINICIÓN DE LA SUMA DE VECTORES Y DE LA MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

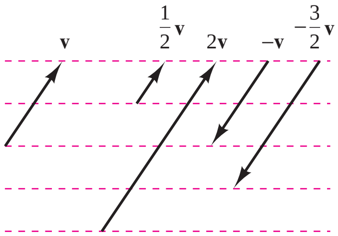
Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ vectores y sea c un escalar.

1. La **suma vectorial** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle$.
2. El **múltiplo escalar** de c y $\mathbf{u}$ es el vector $c\mathbf{u} = \langle cu_1, cu_2 \rangle$.
3. El **negativo** de $\mathbf{v}$ es el vector

$$-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} = \langle -v_1, -v_2 \rangle.$$

4. La **diferencia** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es

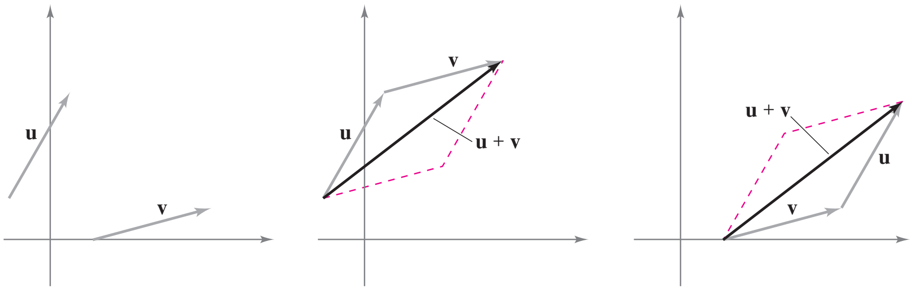
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle.$$



La multiplicación escalar por un vector **v**
Figura 11.6

Geométricamente, el múltiplo escalar de un vector $\mathbf{v}$ y un escalar c es el vector que tiene $|c|$ veces la longitud de $\mathbf{v}$, como se muestra en la figura 11.6. Si c es positivo, $c\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$. Si c es negativo, $c\mathbf{v}$ tiene dirección opuesta.

La suma de dos vectores puede representarse geométricamente colocando los vectores (sin cambiar sus magnitudes o sus direcciones) de manera que el punto inicial de uno coincida con el punto final del otro, como se muestra en la figura 11.7. El vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, llamado el **vector resultante**, es la diagonal de un paralelogramo que tiene $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como lados adyacentes.



Para hallar $\mathbf{u} + \mathbf{v}$,

1) hacer coincidir el punto inicial de **v** con el punto final de **u**, o bien

2) hacer coincidir el punto inicial de **u** con el punto final de **v**

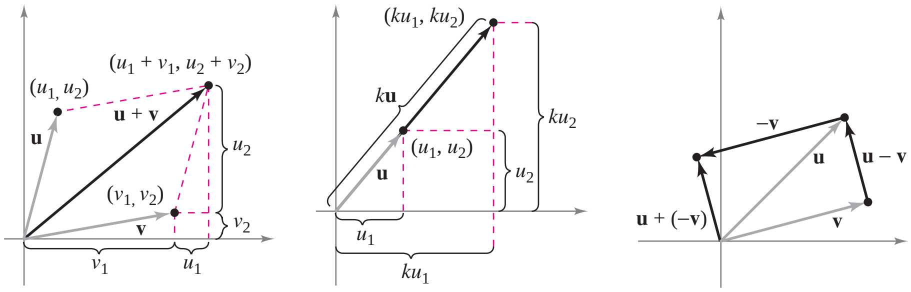
Figura 11.7

The Granger Collection

William Rowan Hamilton (1805-1865)

Algunos de los primeros trabajos con vectores fueron realizados por el matemático irlandés William Rowan Hamilton. Hamilton dedicó muchos años a desarrollar un sistema de cantidades semejantes a vectores llamados *cuaterniones*. Aunque Hamilton estaba convencido de las ventajas de los cuaterniones, las operaciones que definió no resultaron ser buenos modelos para los fenómenos físicos. No fue sino hasta la segunda mitad del siglo XIX cuando el físico escocés James Maxwell (1831-1879) reestructuró la teoría de los cuaterniones de Hamilton dándole una forma útil para la representación de cantidades como fuerza, velocidad y aceleración.

La figura 11.8 muestra la equivalencia de las definiciones geométricas y algebraicas de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar y presenta (en el extremo derecho) una interpretación geométrica de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.



Suma vectorial

Multiplicación escalar

Sustracción de vectores

Figura 11.8

EJEMPLO 3 Operaciones con vectores

Dados $\mathbf{v} = \langle -2, 5\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 3, 4\rangle$, encontrar cada uno de los vectores.

a) $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ *b)* $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ *c)* $\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$

Solución

a) $\frac{1}{2}\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}(-2), \frac{1}{2}(5)\right\rangle = \left\langle -1, \frac{5}{2}\right\rangle$

b) $\mathbf{w} - \mathbf{v} = \langle w_1 - v_1, w_2 - v_2\rangle = \langle 3 - (-2), 4 - 5\rangle = \langle 5, -1\rangle$

c) Usando $2\mathbf{w} = \langle 6, 8\rangle$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{v} + 2\mathbf{w} &= \langle -2, 5\rangle + \langle 6, 8\rangle \\ &= \langle -2 + 6, 5 + 8\rangle \\ &= \langle 4, 13\rangle.\end{aligned}$$

La suma de vectores y la multiplicación por un escalar comparten muchas propiedades con la aritmética ordinaria, como se muestra en el teorema siguiente.

TEOREMA 11.1 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON VECTORES

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ los vectores en el plano, y sean c y d escalares.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ Propiedad conmutativa.
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ Propiedad asociativa.
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ Propiedad de la identidad aditiva.
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ Propiedad del inverso aditivo.
5. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
6. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ Propiedad distributiva.
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ Propiedad distributiva.
8. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

DEMOSTRACIÓN La demostración de la *propiedad asociativa* de la suma de vectores utiliza la propiedad asociativa de la suma de números reales.

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= [\langle u_1, u_2\rangle + \langle v_1, v_2\rangle] + \langle w_1, w_2\rangle \\ &= \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2\rangle + \langle w_1, w_2\rangle \\ &= \langle (u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2\rangle \\ &= \langle u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2)\rangle \\ &= \langle u_1, u_2\rangle + \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2\rangle = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})\end{aligned}$$

Asimismo, la demostración de la *propiedad distributiva* de la multiplicación escalar depende de la propiedad distributiva para los números reales.

$$\begin{aligned}(c + d)\mathbf{u} &= (c + d)\langle u_1, u_2\rangle \\ &= \langle (c + d)u_1, (c + d)u_2\rangle \\ &= \langle cu_1 + du_1, cu_2 + du_2\rangle \\ &= \langle cu_1, cu_2\rangle + \langle du_1, du_2\rangle = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}\end{aligned}$$

Las otras propiedades pueden demostrarse de manera similar.

EMMY NOETHER (1882-1935)

La matemática alemana Emmy Noether contribuyó a nuestro conocimiento de los sistemas axiomáticos. Noether generalmente se reconoce como la principal matemática de la historia reciente.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para más información acerca de Emmy Noether, ver el artículo "Emmy Noether, Greatest Woman Mathematician" de Clark Kimberling en *The Mathematics Teacher*.

Cualquier conjunto de vectores (junto con un conjunto de escalares) que satisfaga las ocho propiedades dadas en el teorema 11.1 es un **espacio vectorial**.* Las ocho propiedades son los *axiomas del espacio vectorial*. Por tanto, este teorema establece que el conjunto de vectores en el plano (con el conjunto de los números reales) forma un espacio vectorial.

TEOREMA 11.2 LONGITUD DE UN MÚLTIPLO ESCALAR

Sea $\mathbf{v}$ un vector y sea c un escalar. Entonces

$$\|c\mathbf{v}\| = |c|\,\|\mathbf{v}\|.$$ $|c|$ es el valor absoluto de c.

DEMOSTRACIÓN Como $c\mathbf{v} = \langle cv_1, cv_2\rangle$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|c\mathbf{v}\| = \|\langle cv_1, cv_2\rangle\| &= \sqrt{(cv_1)^2 + (cv_2)^2}\\ &= \sqrt{c^2v_1^2 + c^2v_2^2}\\ &= \sqrt{c^2(v_1^2 + v_2^2)}\\ &= |c|\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\\ &= |c|\,\|\mathbf{v}\|.\end{aligned}$$

En muchas aplicaciones de los vectores, es útil encontrar un vector unitario que tenga la misma dirección que un vector dado. El teorema siguiente da un procedimiento para hacer esto.

TEOREMA 11.3 VECTOR UNITARIO EN LA DIRECCIÓN DE v

Si $\mathbf{v}$ es un vector distinto de cero en el plano, entonces el vector

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

tiene longitud 1 y la misma dirección que $\mathbf{v}$.

DEMOSTRACIÓN Como $1/\|\mathbf{v}\|$ es positivo y $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$, se puede concluir que $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$. Para ver que $\|\mathbf{u}\| = 1$, se observa que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\| &= \left\|\left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\right)\mathbf{v}\right\|\\ &= \left|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\right|\,\|\mathbf{v}\|\\ &= \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\|\\ &= 1.\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathbf{u}$ tiene longitud 1 y la misma dirección que $\mathbf{v}$.

Al vector $\mathbf{u}$ del teorema 11.3 se le llama un **vector unitario en la dirección de v**. El proceso de multiplicar $\mathbf{v}$ por $1/\|\mathbf{v}\|$ para obtener un vector unitario se llama **normalización de v**.

---

* *Para más información sobre espacios vectoriales, ver* Elementary Linear Algebra, *6a. ed., por Larson, Edwards y Falvo (Boston: Houghton Mifflin Company, 2009).*

EJEMPLO 4 Hallar un vector unitario

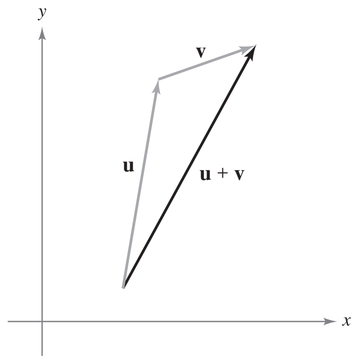
Hallar un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \langle -2, 5\rangle$ y verificar que tiene longitud 1.

Solución Por el teorema 11.3, el vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ es

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle -2, 5\rangle}{\sqrt{(-2)^2 + (5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{29}}\langle -2, 5\rangle = \left\langle \frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right\rangle.$$

Este vector tiene longitud 1, porque

$$\sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{29} + \frac{25}{29}} = \sqrt{\frac{29}{29}} = 1.$$



Desigualdad del triángulo
Figura 11.9

Generalmente, la longitud de la suma de dos vectores no es igual a la suma de sus longitudes. Para ver esto, basta tomar los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de la figura 11.9. Considerando a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como dos de los lados de un triángulo, se puede ver que la longitud del tercer lado es $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$, y se tiene

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

La igualdad sólo se da si los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la *misma dirección*. A este resultado se le llama la **desigualdad del triángulo** para vectores. (En el ejercicio 91, sección 11.3, se pide demostrar esto.)

Vectores unitarios canónicos o estándar

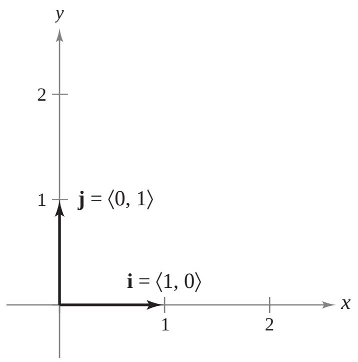
A los vectores unitarios $\langle 1, 0\rangle$ y $\langle 0, 1\rangle$ se les llama **vectores unitarios canónicos o estándar** en el plano y se denotan por

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$$ Vectores unitarios canónicos o estándar.

como se muestra en la figura 11.10. Estos vectores pueden usarse para representar cualquier vector de manera única, como sigue.

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, 0\rangle + \langle 0, v_2\rangle = v_1\langle 1, 0\rangle + v_2\langle 0, 1\rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$$

Al vector $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ se le llama una **combinación lineal** de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. A los escalares v_1 y v_2 se les llama las **componentes horizontal** y **vertical de v**.



Vectores unitarios canónicos o estándar **i** y **j**
Figura 11.10

EJEMPLO 5 Expresar un vector como combinación lineal de vectores unitarios

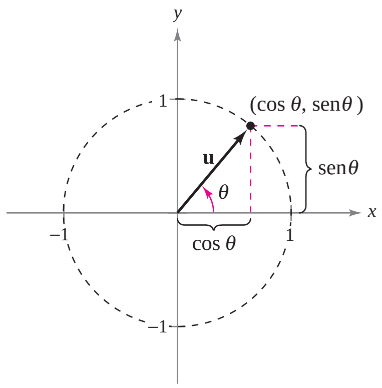
Sea $\mathbf{u}$ el vector con punto inicial $(2, -5)$ y punto final $(-1, 3)$, y sea $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Expresar cada vector como combinación lineal de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

a) $\mathbf{u}$ ***b)*** $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

Solución

a) $$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2\rangle \\ &= \langle -1 - 2, 3 - (-5)\rangle \\ &= \langle -3, 8\rangle = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} &= 2(-3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) - 3(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \\ &= -6\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \\ &= -12\mathbf{i} + 19\mathbf{j}\end{aligned}$$



Ángulo θ desde el eje x positivo hasta el vector **u**
Figura 11.11

Si **u** es un vector unitario y θ es el ángulo (medido en sentido contrario a las manecillas del reloj) desde el eje x positivo hasta **u**, el punto final de **u** está en el círculo unitario, y se tiene

$$\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} \qquad \text{Vector unitario.}$$

como se muestra en la figura 11.11. Además, cualquier vector distinto de cero **v** que forma un ángulo θ con el eje x positivo tiene la misma dirección que **u** y se puede escribir

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle = \|\mathbf{v}\|\cos\theta\mathbf{i} + \|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta\mathbf{j}.$$

EJEMPLO 6 Escribir un vector de magnitud y dirección dadas

El vector **v** tiene una magnitud de 3 y forma un ángulo de $30° = \pi/6$ con el eje x positivo. Expresar **v** como combinación lineal de los vectores unitarios **i** y **j**.

Solución Como el ángulo entre **v** y el eje x positivo es $\theta = \pi/6$, se puede escribir lo siguiente.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \|\mathbf{v}\|\cos\theta\mathbf{i} + \|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta\mathbf{j}\\ &= 3\cos\frac{\pi}{6}\mathbf{i} + 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\mathbf{j}\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}\end{aligned}$$

Aplicaciones de los vectores

Los vectores tienen muchas aplicaciones en física e ingeniería. Un ejemplo es la fuerza. Un vector puede usarse para representar fuerza porque la fuerza tiene magnitud y dirección. Si dos o más fuerzas están actuando sobre un objeto, entonces la **fuerza resultante** sobre el objeto es la suma vectorial de los vectores que representan las fuerzas.

EJEMPLO 7 Hallar la fuerza resultante

Dos botes remolcadores están empujando un barco, como se muestra en la figura 11.12. Cada bote remolcador está ejerciendo una fuerza de 400 libras. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre el barco?

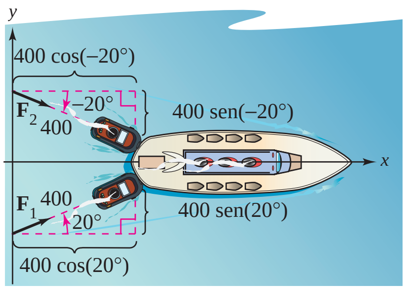
Solución Usando la figura 11.12, se pueden representar las fuerzas ejercidas por el primer y segundo botes remolcadores como

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= 400\langle \cos 20°, \operatorname{sen} 20° \rangle\\ &= 400\cos(20°)\mathbf{i} + 400\operatorname{sen}(20°)\mathbf{j}\\ \mathbf{F}_2 &= 400\langle \cos(-20°), \operatorname{sen}(-20°) \rangle\\ &= 400\cos(20°)\mathbf{i} - 400\operatorname{sen}(20°)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

La fuerza resultante sobre el barco es

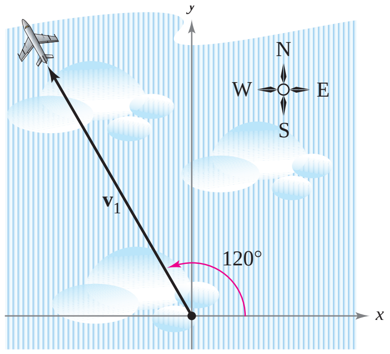
$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\\ &= [400\cos(20°)\mathbf{i} + 400\operatorname{sen}(20°)\mathbf{j}] + [400\cos(20°)\mathbf{i} - 400\operatorname{sen}(20°)\mathbf{j}]\\ &= 800\cos(20°)\mathbf{i}\\ &\approx 752\mathbf{i}.\end{aligned}$$

Por tanto, la fuerza resultante sobre el barco es aproximadamente 752 libras en la dirección del eje x positivo.

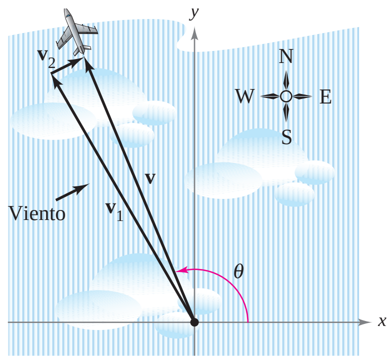


Fuerza resultante sobre el barco ejercida por los dos remolcadores
Figura 11.12

En levantamientos topográficos y en la navegación, un **rumbo** es una dirección que mide el ángulo agudo que una trayectoria o línea de mira forma con una recta fija norte-sur. En la navegación aérea, los rumbos se miden en el sentido de las manecillas del reloj en grados desde el norte.



a) Dirección sin viento



b) Dirección con viento
Figura 11.13

EJEMPLO 8 Hallar una velocidad

Un avión viaja a una altitud fija con un factor de viento despreciable, y mantiene una velocidad de 500 millas por hora con un rumbo de 330°, como se muestra en la figura 11.13*a*. Cuando alcanza cierto punto, el avión encuentra un viento con una velocidad de 70 millas por hora en dirección 45° NE (45° este del norte), como se muestra en la figura 11.13*b*. ¿Cuáles son la velocidad y la dirección resultantes del avión?

Solución Usando la figura 11.13*a*, representar la velocidad del avión (solo) como

$$\mathbf{v}_1 = 500\cos(120°)\mathbf{i} + 500\,\text{sen}(120°)\mathbf{j}.$$

La velocidad del viento se representa por el vector

$$\mathbf{v}_2 = 70\cos(45°)\mathbf{i} + 70\,\text{sen}(45°)\mathbf{j}.$$

La velocidad resultante del avión (en el viento) es

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &= 500\cos(120°)\mathbf{i} + 500\,\text{sen}(120°)\mathbf{j} + 70\cos(45°)\mathbf{i} + 70\,\text{sen}(45°)\mathbf{j}\\ &\approx -200.5\mathbf{i} + 482.5\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Para encontrar la velocidad y la dirección resultantes, escribir $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|(\cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\,\mathbf{j})$. Como $\|\mathbf{v}\| \approx \sqrt{(-200.5)^2 + (482.5)^2} \approx 522.5$, se puede escribir

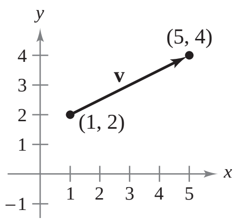
$$\mathbf{v} \approx 522.5\left(\frac{-200.5}{522.5}\mathbf{i} + \frac{482.5}{522.5}\mathbf{j}\right) \approx 522.5[\cos(112.6°)\mathbf{i} + \text{sen}(112.6°)\mathbf{j}].$$

La nueva velocidad del avión, alterada por el viento, es aproximadamente 522.5 millas por hora en una trayectoria que forma un ángulo de 112.6° con el eje x positivo.

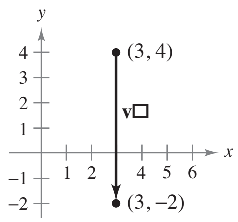
11.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, *a*) dar el vector v mediante sus componentes y *b*) dibujar el vector con su punto inicial en el origen.

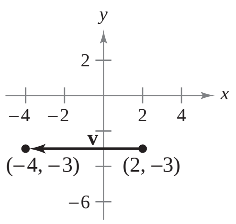
1.



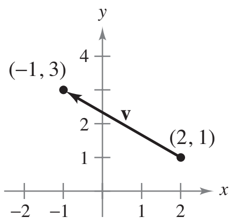
2.



3.



4.



En los ejercicios 5 a 8, hallar los vectores u y v cuyos puntos inicial y final se dan. Mostrar que u y v son equivalentes.

5. **u**: $(3, 2)$, $(5, 6)$
v: $(1, 4)$, $(3, 8)$

6. **u**: $(-4, 0)$, $(1, 8)$
v: $(2, -1)$, $(7, 7)$

7. **u**: $(0, 3)$, $(6, -2)$
v: $(3, 10)$, $(9, 5)$

8. **u**: $(-4, -1)$, $(11, -4)$
v: $(10, 13)$, $(25, 10)$

En los ejercicios 9 a 16, se dan los puntos inicial y final de un vector v. *a*) Dibujar el segmento de recta dirigido dado, *b*) expresar el vector mediante sus componentes, *c*) expresar el vector como la combinación lineal de los vectores unitarios estándar i y j y *d*) dibujar el vector con el punto inicial en el origen.

	Punto inicial	*Punto final*		*Punto inicial*	*Punto final*
9.	$(2, 0)$	$(5, 5)$	**10.**	$(4, -6)$	$(3, 6)$
11.	$(8, 3)$	$(6, -1)$	**12.**	$(0, -4)$	$(-5, -1)$

	Punto inicial	*Punto final*		*Punto inicial*	*Punto final*
13.	$(6, 2)$	$(6, 6)$	**14.**	$(7, -1)$	$(-3, -1)$
15.	$\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 3\right)$	**16.**	$(0.12, 0.60)$	$(0.84, 1.25)$

En los ejercicios 17 y 18, dibujar cada uno de los múltiplos escalares de v.

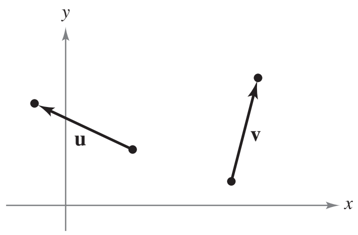
17. $\mathbf{v} = \langle 3, 5\rangle$

a) $2\mathbf{v}$ *b)* $-3\mathbf{v}$ *c)* $\frac{7}{2}\mathbf{v}$ *d)* $\frac{2}{3}\mathbf{v}$

18. $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$

a) $4\mathbf{v}$ *b)* $-\frac{1}{2}\mathbf{v}$ *c)* $0\mathbf{v}$ *d)* $-6\mathbf{v}$

En los ejercicios 19 a 22, usar la figura para representar gráficamente el vector.



19. $-\mathbf{u}$

20. $2\mathbf{u}$

21. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

22. $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

En los ejercicios 23 y 24, hallar *a)* $\frac{2}{3}\mathbf{u}$, *b)* $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ y *c)* $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$.

23. $\mathbf{u} = \langle 4, 9\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -5\rangle$

24. $\mathbf{u} = \langle -3, -8\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 8, 25\rangle$

En los ejercicios 25 a 28, hallar el vector v donde $\mathbf{u} = \langle 2, -1\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 1, 2\rangle$. Ilustrar geométricamente las operaciones vectoriales.

25. $\mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{u}$

26. $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$

27. $\mathbf{v} = \mathbf{u} + 2\mathbf{w}$

28. $\mathbf{v} = 5\mathbf{u} - 3\mathbf{w}$

En los ejercicios 29 y 30 se dan el vector v y su punto inicial. Hallar el punto final.

29. $\mathbf{v} = \langle -1, 3\rangle$; punto inicial: $(4, 2)$

30. $\mathbf{v} = \langle 4, -9\rangle$; punto inicial: $(5, 3)$

En los ejercicios 31 a 36, encontrar la magnitud de v.

31. $\mathbf{v} = 7\mathbf{i}$

32. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i}$

33. $\mathbf{v} = \langle 4, 3\rangle$

34. $\mathbf{v} = \langle 12, -5\rangle$

35. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

36. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

En los ejercicios 37 a 40, hallar el vector unitario en la dirección de v y verificar que tiene longitud 1.

37. $\mathbf{v} = \langle 3, 12\rangle$

38. $\mathbf{v} = \langle -5, 15\rangle$

39. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$

40. $\mathbf{v} = \langle -6.2, 3.4\rangle$

En los ejercicios 41 a 44, hallar lo siguiente.

a) $\|\mathbf{u}\|$ *b)* $\|\mathbf{v}\|$ *c)* $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

d) $\left\|\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right\|$ *e)* $\left\|\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\|$ *f)* $\left\|\dfrac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|}\right\|$

41. $\mathbf{u} = \langle 1, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2\rangle$

42. $\mathbf{u} = \langle 0, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

43. $\mathbf{u} = \left\langle 1, \frac{1}{2}\right\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 3\rangle$

44. $\mathbf{u} = \langle 2, -4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 5\rangle$

En los ejercicios 45 y 46, representar gráficamente u, v y u + v. Después demostrar la desigualdad del triángulo usando los vectores u y v.

45. $\mathbf{u} = \langle 2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 4\rangle$

46. $\mathbf{u} = \langle -3, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -2\rangle$

En los ejercicios 47 a 50, hallar el vector v de la magnitud dada y en la misma dirección que u.

	Magnitud	*Dirección*
47.	$\|\mathbf{v}\| = 6$	$\mathbf{u} = \langle 0, 3\rangle$
48.	$\|\mathbf{v}\| = 4$	$\mathbf{u} = \langle 1, 1\rangle$
49.	$\|\mathbf{v}\| = 5$	$\mathbf{u} = \langle -1, 2\rangle$
50.	$\|\mathbf{v}\| = 2$	$\mathbf{u} = \langle \sqrt{3}, 3\rangle$

En los ejercicios 51 a 54, hallar las componentes de v dadas su magnitud y el ángulo que forma con el eje *x* positivo.

51. $\|\mathbf{v}\| = 3, \quad \theta = 0°$

52. $\|\mathbf{v}\| = 5, \quad \theta = 120°$

53. $\|\mathbf{v}\| = 2, \quad \theta = 150°$

54. $\|\mathbf{v}\| = 4, \quad \theta = 3.5°$

En los ejercicios 55 a 58, hallar las componentes de u + v dadas las longitudes de u y v y los ángulos que u y v forman con el eje *x* positivo.

55. $\|\mathbf{u}\| = 1, \quad \theta_{\mathbf{u}} = 0°$; $\|\mathbf{v}\| = 3, \quad \theta_{\mathbf{v}} = 45°$

56. $\|\mathbf{u}\| = 4, \quad \theta_{\mathbf{u}} = 0°$; $\|\mathbf{v}\| = 2, \quad \theta_{\mathbf{v}} = 60°$

57. $\|\mathbf{u}\| = 2, \quad \theta_{\mathbf{u}} = 4$; $\|\mathbf{v}\| = 1, \quad \theta_{\mathbf{v}} = 2$

58. $\|\mathbf{u}\| = 5, \quad \theta_{\mathbf{u}} = -0.5$; $\|\mathbf{v}\| = 5, \quad \theta_{\mathbf{v}} = 0.5$

Desarrollo de conceptos

59. Explicar, con sus propias palabras, la diferencia entre un escalar y un vector. Dar ejemplos de cada uno.

60. Describir geométricamente las operaciones de suma de vectores y de multiplicación de un vector por un escalar.

61. Identificar la cantidad como escalar o como vector. Explicar el razonamiento.

a) La velocidad en la boca de cañón de un arma de fuego.

b) El precio de las acciones de una empresa.

62. Identificar la cantidad como escalar o como vector. Explicar el razonamiento.

a) La temperatura del aire en un cuarto.

b) El peso de un automóvil.

En los ejercicios 63 a 68, hallar a y b tales que $\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b\mathbf{w}$, donde $\mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 1, -1\rangle$.

63. $\mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$ **64.** $\mathbf{v} = \langle 0, 3\rangle$

65. $\mathbf{v} = \langle 3, 0\rangle$ **66.** $\mathbf{v} = \langle 3, 3\rangle$

67. $\mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$ **68.** $\mathbf{v} = \langle -1, 7\rangle$

En los ejercicios 69 a 74, hallar un vector unitario *a*) paralelo y *b*) normal a la gráfica de f en el punto dado. Después representar gráficamente los vectores y la función.

	Función	*Punto*
69.	$f(x) = x^2$	$(3, 9)$
70.	$f(x) = -x^2 + 5$	$(1, 4)$
71.	$f(x) = x^3$	$(1, 1)$
72.	$f(x) = x^3$	$(-2, -8)$
73.	$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$	$(3, 4)$
74.	$f(x) = \tan x$	$\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

En los ejercicios 75 y 76, expresar v mediante sus componentes, dadas las magnitudes de u y de u + v y los ángulos que u y u + v forman con el eje x positivo.

75. $\|\mathbf{u}\| = 1, \theta = 45°$
$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{2}, \theta = 90°$

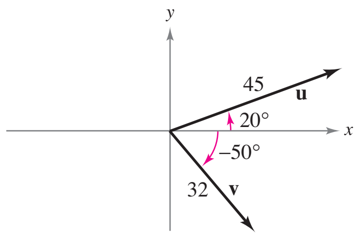
76. $\|\mathbf{u}\| = 4, \theta = 30°$
$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 6, \theta = 120°$

77. ***Programación*** Se dan las magnitudes de **u** y **v** y los ángulos que **u** y **v** forman con el eje x positivo. Escribir un programa para una herramienta de graficación que calcule lo siguiente.

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *b*) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

c) El ángulo que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ forma con el eje x positivo

d) Utilizar el programa para encontrar la magnitud y la dirección de la resultante de los vectores indicados.



Para discusión

78. Los puntos inicial y final del vector **v** son (3, –4) y (9, 1), respectivamente.

a) Escribir **v** en forma de componentes.

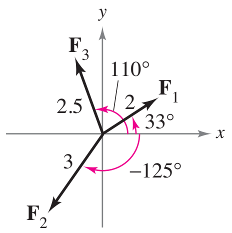
b) Escribir **v** como la combinación lineal de los vectores unitarios estándar **i** y **j**.

c) Dibujar **v** con su punto inicial en el origen.

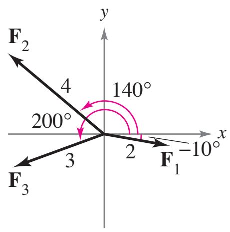
d) Encontrar la magnitud de **v**.

En los ejercicios 79 y 80, usar una herramienta de graficación para encontrar la magnitud y la dirección de la resultante de los vectores.

79.



80.



81. ***Fuerza resultante*** Fuerzas con magnitudes de 500 libras y 200 libras actúan sobre una pieza de la máquina a ángulos de 30° y $-45°$, respectivamente, con el eje x (ver la figura). Hallar la dirección y la magnitud de la fuerza resultante.

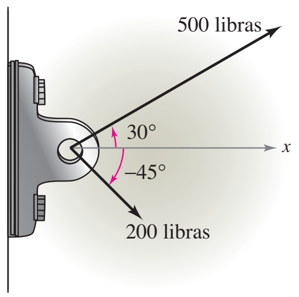


Figura para 81

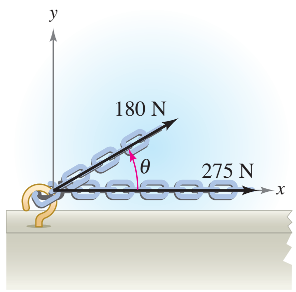


Figura para 82

82. ***Análisis numérico y gráfico*** Fuerzas con magnitudes de 180 newtons y 275 newtons actúan sobre un gancho (ver la figura). El ángulo entre las dos fuerzas es de θ grados.

a) Si $\theta = 30°$, hallar la dirección y la magnitud de la fuerza resultante.

b) Expresar la magnitud M y la dirección α de la fuerza resultante en funciones de θ, donde $0° \leq \theta \leq 180°$.

c) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
M							
α							

d) Usar una herramienta de graficación para representar las dos funciones M y α.

e) Explicar por qué una de las funciones disminuye cuando θ aumenta mientras que la otra no.

83. ***Fuerza resultante*** Tres fuerzas de magnitudes de 75 libras, 100 libras y 125 libras actúan sobre un objeto a ángulos de 30°, 45° y 120°, respectivamente, con el eje x positivo. Hallar la dirección y la magnitud de la fuerza resultante.

84. ***Fuerza resultante*** Tres fuerzas de magnitudes de 400 newtons, 280 newtons y 350 newtons, actúan sobre un objeto a ángulos de $-30°$, 45° y 135°, respectivamente, con el eje x positivo. Hallar la dirección y la magnitud de la fuerza resultante.

85. ***Para pensar*** Considerar dos fuerzas de la misma magnitud que actúan sobre un punto.

a) Si la magnitud de la resultante es la suma de las magnitudes de las dos fuerzas, hacer una conjetura acerca del ángulo entre las fuerzas.

b) Si la resultante de las fuerzas es **0**, hacer una conjetura acerca del ángulo entre las fuerzas.

c) ¿Puede ser la magnitud de la resultante mayor que la suma de las magnitudes de las dos fuerzas? Explicar la respuesta.

86. ***Razonamiento gráfico*** Considerar dos fuerzas $\mathbf{F}_1 = \langle 20, 0\rangle$ y $\mathbf{F}_2 = 10\langle\cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle$.

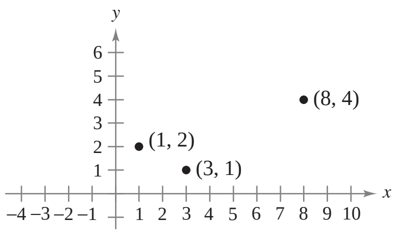
a) Hallar $\|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\|$.

b) Determinar la magnitud de la resultante como función de θ. Usar una herramienta de graficación para representar la función para $0 \leq \theta < 2\pi$.

c) Usar la gráfica en el inciso *b*) para determinar el rango de la función. ¿Cuál es su máximo y con qué valor de θ se obtiene? ¿Cuál es su mínimo y con qué valor de θ se obtiene?

d) Explicar por qué la magnitud de la resultante nunca es 0.

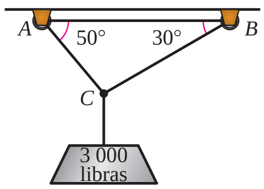
87. Tres de los vértices de un paralelogramo son (1, 2), (3, 1) y (8, 4). Hallar las tres posibilidades para el cuarto vértice (ver la figura).



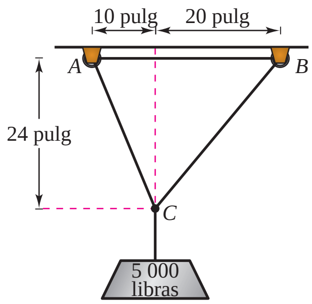
88. Usar vectores para encontrar los puntos de trisección del segmento de recta con puntos terminales (1, 2) y (7, 5).

Tensión de un cable **En los ejercicios 89 y 90, usar la figura para determinar la tensión en cada cable que sostiene la carga dada.**

89.



90.



91. ***Movimiento de un proyectil*** Un arma con una velocidad en la boca de cañón de 1 200 pies por segundo se dispara a un ángulo de 6° sobre la horizontal. Encontrar las componentes horizontal y vertical de la velocidad.

92. ***Carga compartida*** Para llevar una pesa cilíndrica de 100 libras, dos trabajadores sostienen los extremos de unas sogas cortas atadas a un aro en el centro de la parte superior del cilindro. Una soga forma un ángulo de 20° con la vertical y la otra forma un ángulo de 30° (ver la figura).

a) Hallar la tensión de cada soga si la fuerza resultante es vertical.

b) Hallar la componente vertical de la fuerza de cada trabajador.

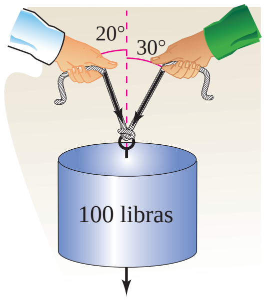


Figura para 92

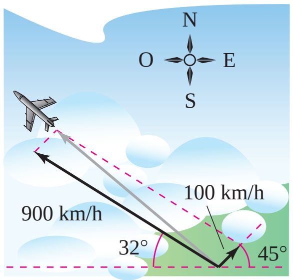


Figura para 93

93. ***Navegación*** Un avión vuela en dirección 302°. Su velocidad con respecto al aire es de 900 kilómetros por hora. El viento a la altitud del avión viene del suroeste a 100 kilómetros por hora (ver la figura). ¿Cuál es la verdadera dirección del avión y cuál es su velocidad respecto al suelo?

94. ***Navegación*** Un avión vuela a una velocidad constante de 400 millas por hora hacia el este, respecto al suelo, y se encuentra con un viento de 50 millas por hora proveniente del noroeste. Encontrar la velocidad relativa al aire y el rumbo que permitirán al avión mantener su velocidad respecto al suelo y su dirección hacia el este.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 95 a 100, determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

95. Si **u** y **v** tienen la misma magnitud y dirección, entonces **u** y **v** son equivalentes.

96. Si **u** es un vector unitario en la dirección de **v**, entonces $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\,\mathbf{u}$.

97. Si $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es un vector unitario, entonces $a^2 + b^2 = 1$.

98. Si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = \mathbf{0}$, entonces $a = -b$.

99. Si $a = b$, entonces $\|a\mathbf{i} + b\mathbf{j}\| = \sqrt{2}a$.

100. Si **u** y **v** tienen la misma magnitud pero direcciones opuestas, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

101. Demostrar que $\mathbf{u} = (\cos\theta)\mathbf{i} - (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$ son vectores unitarios para todo ángulo θ.

102. ***Geometría*** Usando vectores, demostrar que el segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo y mide la mitad de longitud, del tercer lado.

103. ***Geometría*** Usando vectores, demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan a la mitad.

104. Demostrar que el vector $\mathbf{w} = \|\mathbf{u}\|\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$ corta a la mitad el ángulo entre **u** y **v**.

105. Considerar el vector $\mathbf{u} = \langle x, y\rangle$. Describir el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $\|\mathbf{u}\| = 5$.

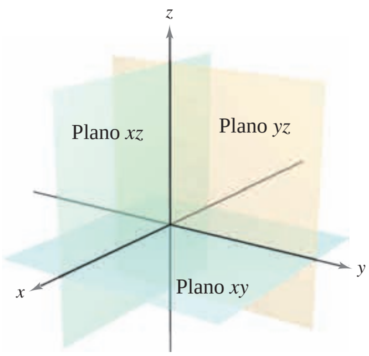
Preparación del examen Putman

106. Un arma de artillería de costa puede ser disparada a cualquier ángulo de elevación entre 0° y 90° en un plano vertical fijo. Si se desprecia la resistencia del aire y la velocidad en la boca de cañón es constante $(= v_0)$, determinar el conjunto *H* de puntos en el plano y sobre la horizontal que puede ser golpeado.

11.2 Coordenadas y vectores en el espacio

- **Entender el sistema de coordenadas rectangulares tridimensional.**
- **Analizar vectores en el espacio.**
- **Utilizar vectores tridimensionales para resolver problemas de la vida real.**

Coordenadas en el espacio



Sistema de coordenadas tridimensional
Figura 11.14

Hasta este punto del texto ha interesado principalmente el sistema de coordenadas bidimensional. En buena parte de lo que resta del estudio del cálculo se emplea el sistema de coordenadas tridimensional.

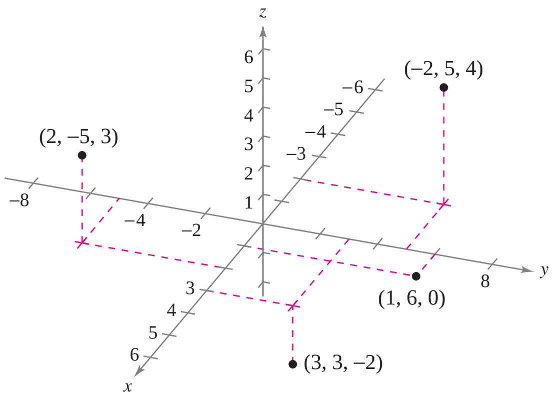
Antes de extender el concepto de vector a tres dimensiones, se debe poder identificar puntos en el **sistema de coordenadas tridimensional**. Se puede construir este sistema trazando en el origen un eje z perpendicular al eje x y al eje y. La figura 11.14 muestra la porción positiva de cada eje de coordenadas. Tomados por pares, los ejes determinan tres **planos coordenados**: el **plano** $\boldsymbol{xy}$, el **plano** $\boldsymbol{xz}$ y el **plano** $\boldsymbol{yz}$. Estos tres planos coordenados dividen el espacio tridimensional en ocho **octantes**. El primer octante es en el que todas las coordenadas son positivas. En este sistema tridimensional, un punto P en el espacio está determinado por una terna ordenada (x, y, z) donde x, y y z son:

$x =$ distancia dirigida que va del plano yz a P

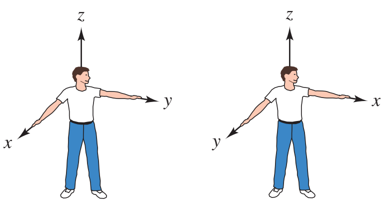
$y =$ distancia dirigida que va del plano xz a P

$z =$ distancia dirigida que va del plano xy a P

En la figura 11.15 se muestran varios puntos.

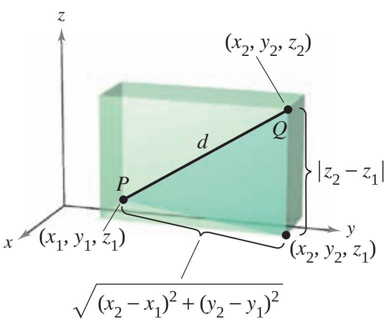


Los puntos en el sistema de coordenadas tridimensional se representan por medio de ternas ordenadas
Figura 11.15



Sistema dextrógiro   Sistema levógiro
Figura 11.16

Un sistema de coordenadas tridimensional puede tener orientación **levógira** o **dextrógira**. Para determinar la orientación de un sistema, se puede imaginar de pie en el origen, con los brazos apuntando en dirección de los ejes x y y positivo y el eje z apuntando hacia arriba, como se muestra en la figura 11.16. El sistema es dextrógiro o levógiro dependiendo de qué mano queda apuntando a lo largo del eje x. En este texto, se trabaja exclusivamente con el sistema dextrógiro.



Distancia entre dos puntos en el espacio
Figura 11.17

Muchas de las fórmulas establecidas para el sistema de coordenadas bidimensional pueden extenderse a tres dimensiones. Por ejemplo, para encontrar la distancia entre dos puntos en el espacio, se usa dos veces el teorema pitagórico, como se muestra en la figura 11.17. Haciendo esto, se obtiene la fórmula de la distancia entre los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2).

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Fórmula de la distancia.

EJEMPLO 1 Distancia entre dos puntos en el espacio

La distancia entre los puntos $(2, -1, 3)$ y $(1, 0, -2)$ es

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 + 1)^2 + (-2 - 3)^2} \\ &= \sqrt{1 + 1 + 25} \\ &= \sqrt{27} \\ &= 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Fórmula de la distancia.

Una **esfera** con centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r está definida como el conjunto de todos los puntos (x, y, z) tales que la distancia entre (x, y, z) y (x_0, y_0, z_0) es r. Se puede usar la fórmula de la distancia para encontrar la **ecuación canónica o estándar de una esfera** de radio r, con centro en (x_0, y_0, z_0). Si (x, y, z) es un punto arbitrario en la esfera, la ecuación de la esfera es

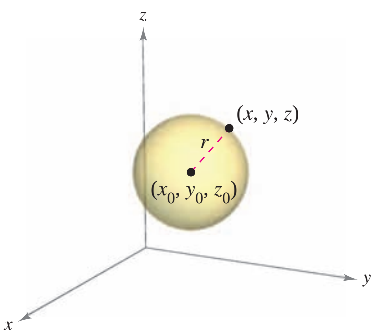


Figura 11.18

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Ecuación de la esfera.

como se muestra en la figura 11.18. El punto medio del segmento de recta que une a los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) tiene coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Regla del punto medio.

EJEMPLO 2 Ecuación de una esfera

Hallar la ecuación canónica o estándar de la esfera que tiene los puntos (5, –2, 3) y (0, 4, –3) como extremos de un diámetro.

Solución Según la regla del punto medio, el centro de la esfera es

$$\left(\frac{5 + 0}{2}, \frac{-2 + 4}{2}, \frac{3 - 3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 1, 0\right).$$

Regla del punto medio.

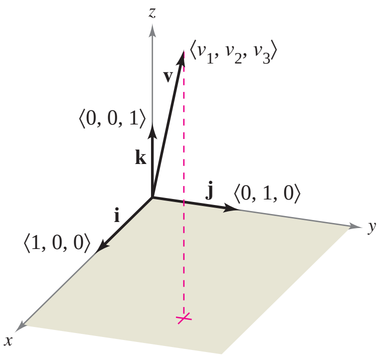
Según la fórmula de la distancia, el radio es

$$r = \sqrt{\left(0 - \frac{5}{2}\right)^2 + (4 - 1)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{\frac{97}{4}} = \frac{\sqrt{97}}{2}.$$

Por consiguiente, la ecuación canónica o estándar de la esfera es

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \frac{97}{4}.$$

Ecuación de la esfera.



Los vectores unitarios canónicos o estándar en el espacio
Figura 11.19

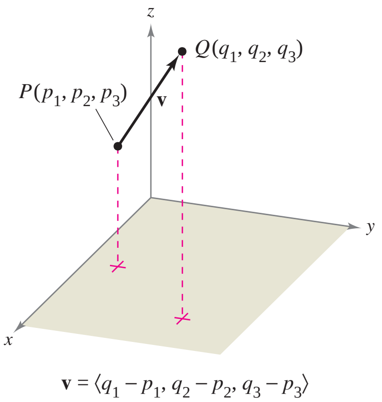


Figura 11.20

Vectores en el espacio

En el espacio los vectores se denotan mediante ternas ordenadas $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$. El **vector cero** se denota por $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$. Usando los vectores unitarios $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ en la dirección del eje positivo z, la **notación empleando los vectores unitarios canónicos o estándar** para $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

como se muestra en la figura 11.19. Si $\mathbf{v}$ se representa por el segmento de recta dirigido de $P(p_1, p_2, p_3)$ a $Q(q_1, q_2, q_3)$, como se muestra en la figura 11.20, las componentes de $\mathbf{v}$ se obtienen restando las coordenadas del punto inicial de las coordenadas del punto final, como sigue

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3\rangle$$

VECTORES EN EL ESPACIO

Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ vectores en el espacio y sea c un escalar.

1. *Igualdad de vectores:* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ si y sólo si $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ y $u_3 = v_3$.
2. *Expresión mediante las componentes:* Si $\mathbf{v}$ se representa por el segmento de recta dirigido de $P(p_1, p_2, p_3)$ a $Q(q_1, q_2, q_3)$, entonces
$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3\rangle.$$
3. *Longitud:* $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
4. *Vector unitario en la dirección de* $\mathbf{v}$: $\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\right)\langle v_1, v_2, v_3\rangle, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
5. *Suma de vectores:* $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \langle v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3\rangle$
6. *Multiplicación por un escalar:* $c\mathbf{v} = \langle cv_1, cv_2, cv_3\rangle$

NOTA Las propiedades de la suma de vectores y de la multiplicación por un escalar dadas en el teorema 11.1 son también válidas para vectores en el espacio. ■

EJEMPLO 3 Hallar las componentes de un vector en el espacio

Hallar las componentes y la longitud del vector $\mathbf{v}$ que tiene punto inicial $(-2, 3, 1)$ y punto final $(0, -4, 4)$. Después, hallar un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$.

Solución El vector $\mathbf{v}$ dado mediante sus componentes es

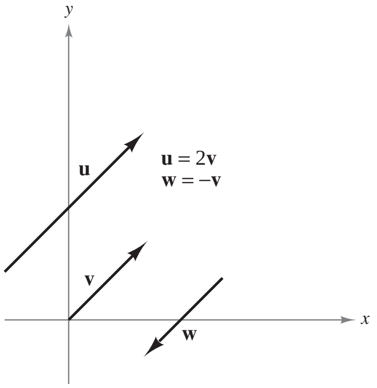
$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3\rangle &= \langle 0 - (-2), -4 - 3, 4 - 1\rangle \\ &= \langle 2, -7, 3\rangle\end{aligned}$$

lo cual implica que su longitud es

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + 3^2} = \sqrt{62}.$$

El vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{62}}\langle 2, -7, 3\rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{62}}, \frac{-7}{\sqrt{62}}, \frac{3}{\sqrt{62}}\right\rangle.$$



Vectores paralelos
Figura 11.21

Recordar que en la definición de la multiplicación por un escalar se vio que múltiplos escalares positivos de un vector **v** distinto de cero tienen la misma dirección que **v**, mientras que múltiplos negativos tienen dirección opuesta a la de **v**. En general, dos vectores distintos de cero **u** y **v** son **paralelos** si existe algún escalar c tal que $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$.

DEFINICIÓN DE VECTORES PARALELOS

Dos vectores distintos de cero **u** y **v** son **paralelos** si hay algún escalar c tal que $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$.

Por ejemplo, en la figura 11.21, los vectores **u**, **v** y **w** son paralelos porque $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$.

EJEMPLO 4 Vectores paralelos

El vector **w** tiene punto inicial $(2, -1, 3)$ y punto final $(-4, 7, 5)$. ¿Cuál de los vectores siguientes es paralelo a **w**?

a) $\mathbf{u} = \langle 3, -4, -1\rangle$

b) $\mathbf{v} = \langle 12, -16, 4\rangle$

Solución Empezar expresando **w** mediante sus componentes.

$$\mathbf{w} = \langle -4 - 2, 7 - (-1), 5 - 3\rangle = \langle -6, 8, 2\rangle$$

a) Como $\mathbf{u} = \langle 3, -4, -1\rangle = -\frac{1}{2}\langle -6, 8, 2\rangle = -\frac{1}{2}\mathbf{w}$, se puede concluir que **u** es paralelo a **w**.

b) En este caso, se quiere encontrar un escalar c tal que

$$\langle 12, -16, 4\rangle = c\langle -6, 8, 2\rangle.$$

$$\begin{aligned} 12 &= -6c \rightarrow c = -2 \\ -16 &= 8c \rightarrow c = -2 \\ 4 &= 2c \rightarrow c = 2 \end{aligned}$$

Como no hay un c para el cual la ecuación tenga solución, los vectores no son paralelos.

EJEMPLO 5 Uso de vectores para determinar puntos colineales

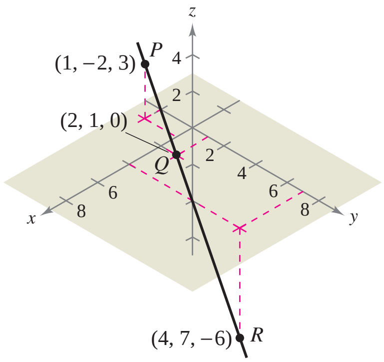
Determinar si los puntos $P(1, -2, 3)$, $Q(2, 1, 0)$ y $R(4, 7, -6)$ son colineales.

Solución Los componentes de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 2 - 1, 1 - (-2), 0 - 3\rangle = \langle 1, 3, -3\rangle$$

y

$$\overrightarrow{PR} = \langle 4 - 1, 7 - (-2), -6 - 3\rangle = \langle 3, 9, -9\rangle.$$



Los puntos P, Q y R están en la misma recta
Figura 11.22

Estos dos vectores tienen un punto inicial común. Por tanto, P, Q y R están en la misma recta si y sólo si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son paralelos. $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son paralelos ya que $\overrightarrow{PR} = 3\,\overrightarrow{PQ}$, como se muestra en la figura 11.22.

EJEMPLO 6 Notación empleando los vectores unitarios canónicos

a) Expresar el vector $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$ por medio de sus componentes.

b) Hallar el punto final del vector $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, dado que el punto inicial es $P(-2, 3, 5)$.

Solución

a) Como falta $\mathbf{j}$, su componente es 0 y

$$\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{k} = \langle 4, 0, -5\rangle.$$

b) Se necesita encontrar $Q(q_1, q_2, q_3)$ tal que $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = 7\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Esto implica que $q_1 - (-2) = 7$, $q_2 - 3 = -1$ y $q_3 - 5 = 3$. La solución de estas tres ecuaciones es $q_1 = 5$, $q_2 = 2$ y $q_3 = 8$. Por tanto, Q es $(5, 2, 8)$.

Aplicación

EJEMPLO 7 Magnitud de una fuerza

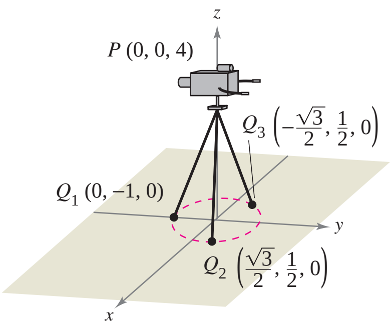


Figura 11.23

Una cámara de televisión de 120 libras está colocada en un trípode, como se muestra en la figura 11.23. Representar la fuerza ejercida en cada pata del trípode como un vector.

Solución Sean los vectores $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ las fuerzas ejercidas en las tres patas. A partir de la figura 11.23, se puede determinar que las direcciones de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ son las siguientes.

$$\overrightarrow{PQ_1} = \langle 0 - 0, -1 - 0, 0 - 4\rangle = \langle 0, -1, -4\rangle$$

$$\overrightarrow{PQ_2} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2} - 0, \frac{1}{2} - 0, 0 - 4\right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4\right\rangle$$

$$\overrightarrow{PQ_3} = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2} - 0, \frac{1}{2} - 0, 0 - 4\right\rangle = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4\right\rangle$$

Como cada pata tiene la misma longitud, y la fuerza total se distribuye igualmente entre las tres patas, se sabe que $\|\mathbf{F}_1\| = \|\mathbf{F}_2\| = \|\mathbf{F}_3\|$. Por tanto, existe una constante c tal que

$$\mathbf{F}_1 = c\langle 0, -1, -4\rangle, \quad \mathbf{F}_2 = c\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4\right\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_3 = c\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4\right\rangle.$$

Sea la fuerza total ejercida por el objeto la dada por $\mathbf{F} = \langle 0, 0, -120\rangle$. Entonces, usando el hecho que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

se puede concluir que $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ tienen todas una componente vertical de -40. Esto implica que $c(-4) = -40$ y $c = 10$. Por tanto, las fuerzas ejercidas sobre las patas pueden representarse por

$$\mathbf{F}_1 = \langle 0, -10, -40\rangle$$

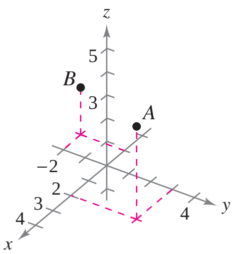
$$\mathbf{F}_2 = \left\langle 5\sqrt{3}, 5, -40\right\rangle$$

$$\mathbf{F}_3 = \left\langle -5\sqrt{3}, 5, -40\right\rangle.$$

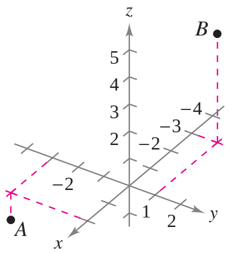
11.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, aproximar las coordenadas de los puntos.

1.



2.



En los ejercicios 3 a 6, representar los puntos en el mismo sistema de coordenadas tridimensional.

3. *a*) $(2, 1, 3)$ *b*) $(-1, 2, 1)$

4. *a*) $(3, -2, 5)$ *b*) $\left(\frac{3}{2}, 4, -2\right)$

5. *a*) $(5, -2, 2)$ *b*) $(5, -2, -2)$

6. *a*) $(0, 4, -5)$ *b*) $(4, 0, 5)$

En los ejercicios 7 a 10, hallar las coordenadas del punto.

7. El punto se localiza tres unidades detrás del plano *yz*, cuatro unidades a la derecha del plano *xz* y cinco unidades arriba del plano *xy*.

8. El punto se localiza siete unidades delante del plano *yz*, dos unidades a la izquierda del plano *xz* y una unidad debajo del plano *xy*.

9. El punto se localiza en el eje *x*, 12 unidades delante del plano *yz*.

10. El punto se localiza en el plano *yz*, tres unidades a la derecha del plano *xz* y dos unidades arriba del plano *xy*.

11. ***Para pensar*** ¿Cuál es la coordenada *z* de todo punto en el plano *xy*?

12. ***Para pensar*** ¿Cuál es la coordenada *x* de todo punto en el plano *yz*?

En los ejercicios 13 a 24, determinar la localización de un punto (x, y, z) que satisfaga la(s) condición(es).

13. $z = 6$ **14.** $y = 2$

15. $x = -3$ **16.** $z = -\frac{5}{2}$

17. $y < 0$ **18.** $x > 0$

19. $|y| \leq 3$ **20.** $|x| > 4$

21. $xy > 0, \quad z = -3$ **22.** $xy < 0, \quad z = 4$

23. $xyz < 0$ **24.** $xyz > 0$

En los ejercicios 25 a 28, hallar la distancia entre los puntos.

25. $(0, 0, 0), \quad (-4, 2, 7)$

26. $(-2, 3, 2), \quad (2, -5, -2)$

27. $(1, -2, 4), \quad (6, -2, -2)$

28. $(2, 2, 3), \quad (4, -5, 6)$

En los ejercicios 29 a 32, hallar las longitudes de los lados del triángulo con los vértices que se indican, y determinar si el triángulo es un triángulo rectángulo, un triángulo isósceles, o ninguna de ambas cosas.

29. $(0, 0, 4), (2, 6, 7), (6, 4, -8)$

30. $(3, 4, 1), (0, 6, 2), (3, 5, 6)$

31. $(-1, 0, -2), (-1, 5, 2), (-3, -1, 1)$

32. $(4, -1, -1), (2, 0, -4), (3, 5, -1)$

33. ***Para pensar*** El triángulo del ejercicio 29 se traslada cinco unidades hacia arriba a lo largo del eje *z*. Determinar las coordenadas del triángulo trasladado.

34. ***Para pensar*** El triángulo del ejercicio 30 se traslada tres unidades a la derecha a lo largo del eje *y*. Determinar las coordenadas del triángulo trasladado.

En los ejercicios 35 y 36, hallar las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une los puntos.

35. $(5, -9, 7), (-2, 3, 3)$ **36.** $(4, 0, -6), (8, 8, 20)$

En los ejercicios 37 a 40, hallar la ecuación estándar de la esfera.

37. Centro: $(0, 2, 5)$
Radio: 2

38. Centro: $(4, -1, 1)$
Radio: 5

39. Puntos terminales de un diámetro: $(2, 0, 0), (0, 6, 0)$

40. Centro: $(-3, 2, 4)$, tangente al plano *yz*

En los ejercicios 41 a 44, completar el cuadrado para dar la ecuación de la esfera en forma canónica o estándar. Hallar el centro y el radio.

41. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 8z + 1 = 0$

42. $x^2 + y^2 + z^2 + 9x - 2y + 10z + 19 = 0$

43. $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6x + 18y + 1 = 0$

44. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 24x - 4y + 8z - 23 = 0$

En los ejercicios 45 a 48, describir el sólido que satisface la condición.

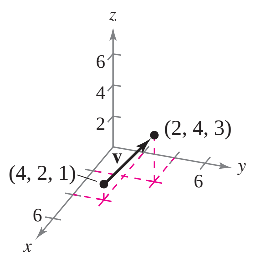
45. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ **46.** $x^2 + y^2 + z^2 > 4$

47. $x^2 + y^2 + z^2 < 4x - 6y + 8z - 13$

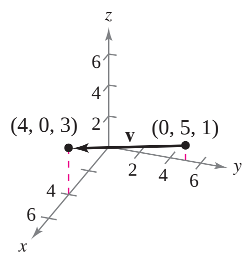
48. $x^2 + y^2 + z^2 > -4x + 6y - 8z - 13$

En los ejercicios 49 a 52, *a*) encontrar las componentes del vector v, *b*) escribir el vector utilizando la notación del vector unitario estándar y *c*) dibujar el vector con su punto inicial en el origen.

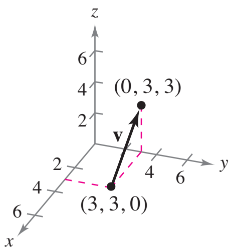
49.



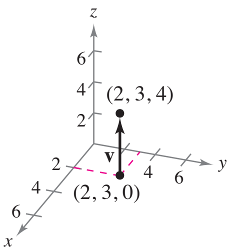
50.



51.



52.



En los ejercicios 53 a 56, hallar las componentes y la magnitud del vector v, dados sus puntos inicial y final. Después hallar un vector unitario en la dirección de v.

	Punto inicial	*Punto final*
53.	$(3, 2, 0)$	$(4, 1, 6)$
54.	$(4, -5, 2)$	$(-1, 7, -3)$
55.	$(-4, 3, 1)$	$(-5, 3, 0)$
56.	$(1, -2, 4)$	$(2, 4, -2)$

En los ejercicios 57 y 58 se indican los puntos inicial y final de un vector v. *a*) Dibujar el segmento de recta dirigido, *b*) encontrar las componentes del vector, *c*) escribir el vector usando la notación del vector unitario estándar y *d*) dibujar el vector con su punto inicial en el origen.

57. Punto inicial: $(-1, 2, 3)$
Punto final: $(3, 3, 4)$

58. Punto inicial: $(2, -1, -2)$
Punto final: $(-4, 3, 7)$

En los ejercicios 59 y 60, se dan el vector v y su punto inicial. Encontrar el punto final.

59. $\mathbf{v} = \langle 3, -5, 6 \rangle$
Punto inicial: $(0, 6, 2)$

60. $\mathbf{v} = \left\langle 1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right\rangle$
Punto inicial: $\left(0, 2, \frac{5}{2}\right)$

En los ejercicios 61 y 62, hallar cada uno de los múltiplos escalares de v y representar su gráfica.

61. $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 2 \rangle$
a) $2\mathbf{v}$ *b*) $-\mathbf{v}$
c) $\frac{3}{2}\mathbf{v}$ *d*) $0\mathbf{v}$

62. $\mathbf{v} = \langle 2, -2, 1 \rangle$
a) $-\mathbf{v}$ *b*) $2\mathbf{v}$
c) $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ *d*) $\frac{5}{2}\mathbf{v}$

En los ejercicios 63 a 68, encontrar el vector z, dado que $\mathbf{u} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 4, 0, -4 \rangle$.

63. $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$

64. $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{v} + 2\mathbf{w}$

65. $\mathbf{z} = 2\mathbf{u} + 4\mathbf{v} - \mathbf{w}$

66. $\mathbf{z} = 5\mathbf{u} - 3\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{w}$

67. $2\mathbf{z} - 3\mathbf{u} = \mathbf{w}$

68. $2\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w} + 3\mathbf{z} = \mathbf{0}$

En los ejercicios 69 a 72, determinar cuáles de los vectores son paralelos a z. Usar una herramienta de graficación para confirmar sus resultados.

69. $\mathbf{z} = \langle 3, 2, -5 \rangle$
a) $\langle -6, -4, 10 \rangle$
b) $\left\langle 2, \frac{4}{3}, -\frac{10}{3} \right\rangle$
c) $\langle 6, 4, 10 \rangle$
d) $\langle 1, -4, 2 \rangle$

70. $\mathbf{z} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{3}{4}\mathbf{k}$
a) $6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
b) $-\mathbf{i} + \frac{4}{3}\mathbf{j} - \frac{3}{2}\mathbf{k}$
c) $12\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$
d) $\frac{3}{4}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{9}{8}\mathbf{k}$

71. $\mathbf{z}$ tiene el punto inicial $(1, -1, 3)$ y el punto final $(-2, 3, 5)$.
a) $-6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ *b*) $4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

72. $\mathbf{z}$ tiene el punto inicial $(5, 4, 1)$ y el punto final $(-2, -4, 4)$.
a) $\langle 7, 6, 2 \rangle$ *b*) $\langle 14, 16, -6 \rangle$

En los ejercicios 73 a 76, usar vectores para determinar si los puntos son colineales.

73. $(0, -2, -5), (3, 4, 4), (2, 2, 1)$

74. $(4, -2, 7), (-2, 0, 3), (7, -3, 9)$

75. $(1, 2, 4), (2, 5, 0), (0, 1, 5)$

76. $(0, 0, 0), (1, 3, -2), (2, -6, 4)$

En los ejercicios 77 y 78, usar vectores para demostrar que los puntos son vértices de un paralelogramo.

77. $(2, 9, 1), (3, 11, 4), (0, 10, 2), (1, 12, 5)$

78. $(1, 1, 3), (9, -1, -2), (11, 2, -9), (3, 4, -4)$

En los ejercicios 79 a 84, hallar la longitud de v.

79. $\mathbf{v} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

80. $\mathbf{v} = \langle 1, 0, 3 \rangle$

81. $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

82. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$

83. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

84. $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

En los ejercicios 85 a 88, hallar un vector unitario *a*) en la dirección de v y *b*) en la dirección opuesta a u.

85. $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 2 \rangle$

86. $\mathbf{v} = \langle 6, 0, 8 \rangle$

87. $\mathbf{v} = \langle 3, 2, -5 \rangle$

88. $\mathbf{v} = \langle 8, 0, 0 \rangle$

89. ***Programación*** Se dan las componentes de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Escribir un programa para una herramienta de graficación donde el resultado es *a*) las componentes de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, *b*) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$, *c*) $\|\mathbf{u}\|$ y *d*) $\|\mathbf{v}\|$. *e*) Ejecutar el programa para los vectores $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 4 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 5, 4.5, -6 \rangle$.

Para discusión

90. Considerar dos vectores distintos de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y sean s y t números reales. Describir la figura geométrica generada por los puntos finales de los tres vectores $t\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ y $s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$.

En los ejercicios 91 y 92, determinar los valores de *c* que satisfacen la ecuación. Sea $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

91. $\|c\mathbf{v}\| = 7$

92. $\|c\mathbf{u}\| = 4$

En los ejercicios 93 a 96, encontrar el vector v con la magnitud dada y en dirección de u.

	Magnitud	*Dirección*
93.	10	$\mathbf{u} = \langle 0, 3, 3 \rangle$
94.	3	$\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$
95.	$\frac{3}{2}$	$\mathbf{u} = \langle 2, -2, 1 \rangle$
96.	7	$\mathbf{u} = \langle -4, 6, 2 \rangle$

En los ejercicios 97 y 98, dibujar el vector v y dar sus componentes.

97. $\mathbf{v}$ está en el plano yz, tiene magnitud 2 y forma un ángulo de 30° con el eje y positivo.

98. $\mathbf{v}$ está en el plano xz, tiene magnitud 5 y forma un ángulo de 45° con el eje z positivo.

En los ejercicios 99 y 100, usar vectores para encontrar el punto que se encuentra a dos tercios del camino de *P* a *Q*.

99. $P(4, 3, 0)$, $Q(1, -3, 3)$ **100.** $P(1, 2, 5)$, $Q(6, 8, 2)$

101. Sean $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$.

a) Dibujar $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

b) Si $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, demostrar que tanto a como b deben ser cero.

c) Hallar a y b tales que $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

d) Probar que ninguna elección de a y b da $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

102. ***Redacción*** Los puntos inicial y final del vector $\mathbf{v}$ son (x_1, y_1, z_1) y (x, y, z). Describir el conjunto de todos los puntos (x, y, z) tales que $\|\mathbf{v}\| = 4$.

Desarrollo de conceptos

103. Un punto en el sistema de coordenadas tridimensional tiene las coordenadas (x_0, y_0, z_0). Describir qué mide cada una de las coordenadas.

104. Dar la fórmula para la distancia entre los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2).

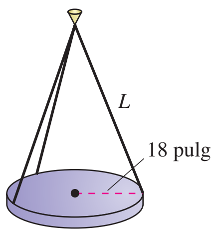
105. Dar la ecuación canónica o estándar de una esfera de radio r, centrada en (x_0, y_0, z_0).

106. Dar la definición de vectores paralelos.

107. Sean A, B y C los vértices de un triángulo. Encontrar $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

108. Sean $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 1, 1 \rangle$. Describir el conjunto de todos los puntos (x, y, z) tales que $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = 2$.

109. ***Análisis numérico, gráfico y analítico*** Los focos en un auditorio son discos de 24 libras y 18 pulgadas de radio. Cada disco está sostenido por tres cables igualmente espaciados de L pulgadas de longitud (ver la figura).



a) Expresar la tensión T de cada cable en función de L. Determinar el dominio de la función.

b) Usar una herramienta de graficación y la función del inciso *a*) para completar la tabla.

L	20	25	30	35	40	45	50
T							

c) Representar en la herramienta de graficación el modelo del inciso *a*) y determinar las asíntotas de su gráfica.

d) Comprobar analíticamente las asíntotas obtenidas en el inciso *c*).

e) Calcular la longitud mínima que debe tener cada cable, si un cable está diseñado para llevar una carga máxima de 10 libras.

110. ***Para pensar*** Suponer que cada cable en el ejercicio 109 tiene una longitud fija $L = a$, y que el radio de cada disco es r_0 pulgadas. Hacer una conjetura acerca del límite $\lim_{r_0 \to a^-} T$ y justificar la respuesta.

111. ***Diagonal de un cubo*** Hallar las componentes del vector unitario $\mathbf{v}$ en la dirección de la diagonal del cubo que se muestra en la figura.

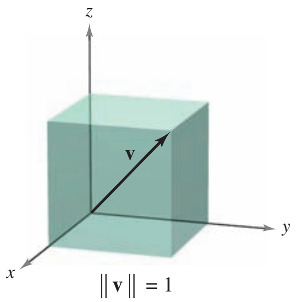


Figura para 111

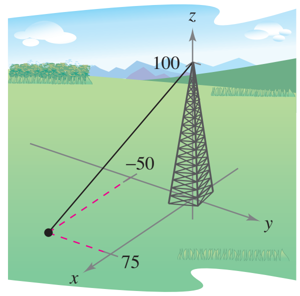


Figura para 112

112. ***Cable de sujeción*** El cable de sujeción de una torre de 100 pies tiene una tensión de 550 libras. Usar las distancias mostradas en la figura, y dar las componentes del vector $\mathbf{F}$ que represente la tensión del cable.

113. ***Soportes de cargas*** Hallar la tensión en cada uno de los cables de soporte mostrados en la figura si el peso de la caja es de 500 newtons.

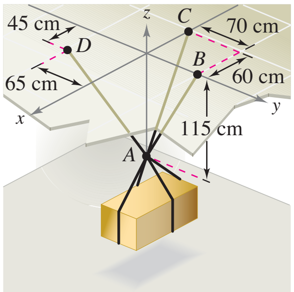


Figura para 113

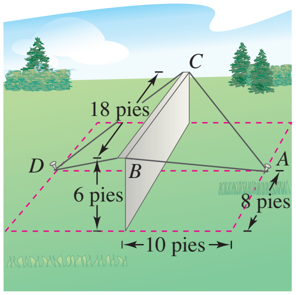


Figura para 114

114. ***Construcción de edificios*** Un muro de hormigón es sostenido temporalmente en posición vertical por medio de cuerdas (ver la figura). Hallar la fuerza total ejercida sobre la clavija en posición A. Las tensiones en AB y AC son 420 libras y 650 libras.

115. Escribir una ecuación cuya gráfica conste del conjunto de puntos $P(x, y, z)$ que distan el doble de $A(0, -1, 1)$ que de $B(1, 2, 0)$.

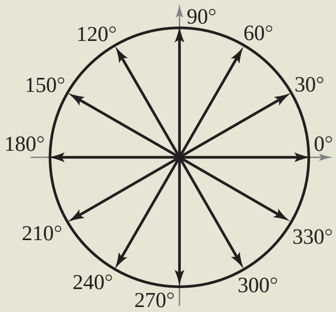
11.3 El producto escalar de dos vectores

- Usar las propiedades del producto escalar de dos vectores.
- Hallar el ángulo entre dos vectores usando el producto escalar.
- Hallar los cosenos directores de un vector en el espacio.
- Hallar la proyección de un vector sobre otro vector.
- Usar los vectores para calcular el trabajo realizado por una fuerza constante.

El producto escalar

EXPLORACIÓN

Interpretación de un producto escalar En la figura se muestran varios vectores en el círculo unidad. Hallar los productos escalares de varios pares de vectores. Después encontrar el ángulo entre cada par usado. Hacer una conjetura sobre la relación entre el producto escalar de dos vectores y el ángulo entre los vectores.



Hasta ahora se han estudiado dos operaciones con vectores —la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar— cada una de las cuales da como resultado otro vector. En esta sección se presenta una tercera operación con vectores, llamada el **producto escalar**. Este producto da como resultado un escalar, y no un vector.

DEFINICIÓN DE PRODUCTO ESCALAR

El **producto escalar** de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ es

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

El **producto escalar** de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ es

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

NOTA El producto escalar de dos vectores recibe este nombre debido a que da como resultado un escalar; también se le llama **producto interno** de los dos vectores. ■

TEOREMA 11.4 PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en el plano o en el espacio y sea c un escalar.

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ Propiedad conmutativa.
2. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ Propiedad distributiva.
3. $c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = c\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot c\mathbf{v}$
4. $\mathbf{0}\cdot\mathbf{v} = 0$
5. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la primera propiedad, sea $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3\\ &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}.\end{aligned}$$

Para la quinta propiedad, sea $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\\ &= \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\right)^2\\ &= \|\mathbf{v}\|^2.\end{aligned}$$

Se dejan las demostraciones de las otras propiedades al lector.

EJEMPLO 1 Cálculo de productos escalares

Dados $\mathbf{u} = \langle 2, -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 8 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -4, 3 \rangle$, encontrar

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ *b)* $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

c) $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v})$ *d)* $\|\mathbf{w}\|^2$

Solución

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle 2, -2 \rangle \cdot \langle 5, 8 \rangle = 2(5) + (-2)(8) = -6$

b) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = -6\langle -4, 3 \rangle = \langle 24, -18 \rangle$

c) $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v}) = 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 2(-6) = -12$ Teorema 11.4.

d) $\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ Teorema 11.4.

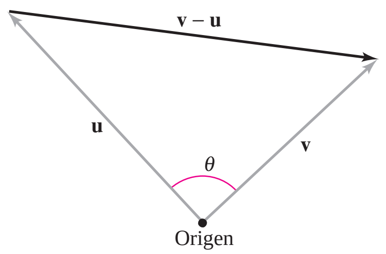
$= \langle -4, 3 \rangle \cdot \langle -4, 3 \rangle$ Sustituir $\mathbf{w}$ por $\langle -4, 3 \rangle$.

$= (-4)(-4) + (3)(3)$ Definición del producto escalar.

$= 25$ Simplificar.

Observar que el resultado del inciso *b*) es una cantidad *vectorial*, mientras que los resultados de los otros tres incisos son cantidades *escalares*.

Ángulo entre dos vectores



El ángulo entre dos vectores
Figura 11.24

El **ángulo entre dos vectores distintos de cero** es el ángulo θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, entre sus respectivos vectores en posición canónica o estándar, como se muestra en la figura 11.24. El siguiente teorema muestra cómo encontrar este ángulo usando el producto escalar. (Observar que el ángulo entre el vector cero y otro vector no está definido aquí.)

TEOREMA 11.5 ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

Si θ es el ángulo entre dos vectores distintos de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

DEMOSTRACIÓN Considerar el triángulo determinado por los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, como se muestra en la figura 11.24. Por la ley de los cosenos, se puede escribir

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta.$$

Usando las propiedades del producto escalar, el lado izquierdo puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})\\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}\\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ley de los cosenos se obtiene

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta\\ -2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= -2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta\\ \cos\theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.\end{aligned}$$

Si el ángulo entre dos vectores es conocido, reescribiendo el teorema 11.5 en la forma

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

Forma alternativa del producto escalar.

se obtiene una manera alternativa de calcular el producto escalar. De esta forma, se puede ver que como $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\|$ siempre son positivos, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y $\cos \theta$ siempre tendrán el mismo signo. La figura 11.25 muestra las orientaciones posibles de los dos vectores.

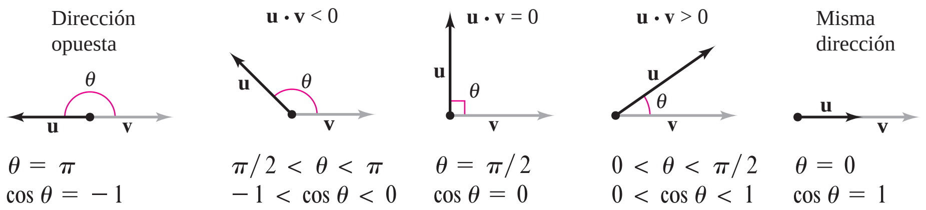


Figura 11.25

De acuerdo con el teorema 11.5, se puede ver que dos vectores distintos de cero forman un ángulo recto si y sólo si su producto escalar es cero; entonces se dice que los dos vectores son **ortogonales**.

DEFINICIÓN DE VECTORES ORTOGONALES

Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

NOTA Los términos “perpendicular”, “ortogonal” y “normal” significan esencialmente lo mismo: formar ángulos rectos. Sin embargo, es común decir que dos vectores son *ortogonales*, dos rectas o planos son *perpendiculares* y que un vector es *normal* a una recta o plano dado. ■

De esta definición se sigue que el vector cero es ortogonal a todo vector $\mathbf{u}$, ya que $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$. Si $0 \le \theta \le \pi$, entonces se sabe que $\cos \theta = 0$ si y sólo si $\theta = \pi/2$. Por tanto, se puede usar el teorema 11.5 para concluir que dos vectores *distintos de cero* son ortogonales si y sólo si el ángulo entre ellos es $\pi/2$.

EJEMPLO 2 Hallar el ángulo entre dos vectores

Si $\mathbf{u} = \langle 3, -1, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 0, 2\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 1, -1, -2\rangle$ y $\mathbf{z} = \langle 2, 0, -1\rangle$, hallar el ángulo entre cada uno de los siguientes pares de vectores.

a) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ *b)* $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ *c)* $\mathbf{v}$ y $\mathbf{z}$

Solución

a) $$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} = \frac{-12 + 0 + 4}{\sqrt{14}\sqrt{20}} = \frac{-8}{2\sqrt{14}\sqrt{5}} = \frac{-4}{\sqrt{70}}$$

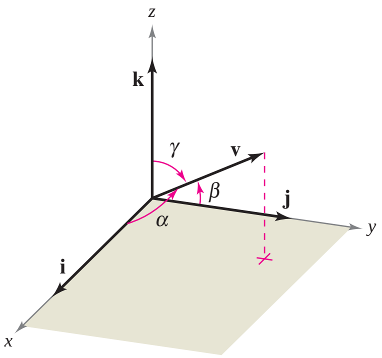
Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, $\theta = \arccos \dfrac{-4}{\sqrt{70}} \approx 2.069$ radianes.

b) $$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{w}\|} = \frac{3 + 1 - 4}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{0}{\sqrt{84}} = 0$$

Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ son *ortogonales*. Así, $\theta = \pi/2$.

c) $$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{z}\|} = \frac{-8 + 0 - 2}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = \frac{-10}{\sqrt{100}} = -1$$

Por consiguiente, $\theta = \pi$. Observar que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{z}$ son paralelos, con $\mathbf{v} = -2\mathbf{z}$.



Ángulos de dirección
Figura 11.26

Cosenos directores

En el caso de un vector en el plano, se ha visto que es conveniente medir su dirección en términos del ángulo, medido en sentido contrario a las manecillas del reloj, *desde* el eje x positivo *hasta* el vector. En el espacio es más conveniente medir la dirección en términos de los ángulos *entre* el vector $\mathbf{v}$ distinto de cero y los tres vectores unitarios **i**, **j** y **k**, como se muestra en la figura 11.26. Los ángulos α, β y γ son los **ángulos de dirección de v**, y $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los **cosenos directores de v**. Como

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{i}\|\cos\alpha = \|\mathbf{v}\|\cos\alpha$$

y

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle\cdot\langle 1, 0, 0\rangle = v_1$$

se sigue que $\cos\alpha = v_1/\|\mathbf{v}\|$. Mediante un razonamiento similar con los vectores unitarios **j** y **k**, se tiene

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}$$ α es el ángulo entre **v** e **i**.

$$\cos\beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}$$ β es el ángulo entre **v** y **j**.

$$\cos\gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}.$$ γ es el ángulo entre **v** y **k**.

Por consiguiente, cualquier vector $\mathbf{v}$ distinto de cero en el espacio tiene la forma normalizada

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{i} + \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{j} + \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{k} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$$

y como $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ es un vector unitario, se sigue que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

EJEMPLO 3 Cálculo de los ángulos de dirección

Hallar los cosenos y los ángulos directores del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, y mostrar que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Solución Como $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$, se puede escribir lo siguiente.

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha \approx 68.2^\circ$$ Ángulo entre **v** e **i**.

$$\cos\beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{29}} \Rightarrow \beta \approx 56.1^\circ$$ Ángulo entre **v** y **j**.

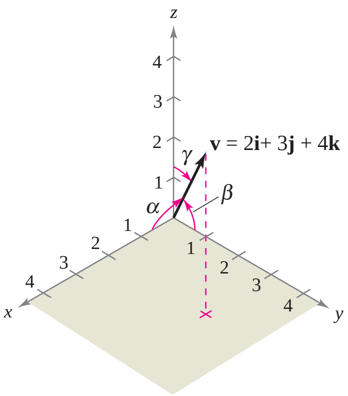
$$\cos\gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{29}} \Rightarrow \gamma \approx 42.0^\circ$$ Ángulo entre **v** y **k**.

Además, la suma de los cuadrados de los cosenos directores es

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{29} + \frac{9}{29} + \frac{16}{29} = \frac{29}{29} = 1.$$

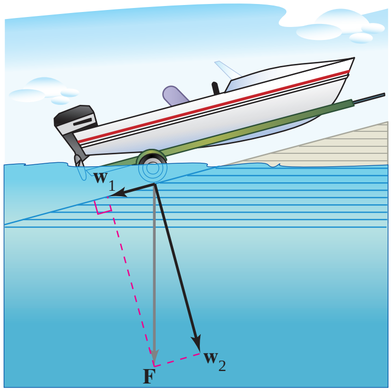
Ver figura 11.27.

α = ángulo entre **v** e **i**
β = ángulo entre **v** y **j**
γ = ángulo entre **v** y **k**



Ángulos de dirección de **v**
Figura 11.27

Proyecciones y componentes vectoriales



La fuerza debida a la gravedad empuja la lancha contra la rampa y hacia abajo por la rampa
Figura 11.28

Ya se han visto aplicaciones en las que se suman dos vectores para obtener un vector resultante. Muchas aplicaciones en la física o en la ingeniería plantean el problema inverso: descomponer un vector dado en la suma de dos **componentes vectoriales**. El ejemplo físico siguiente permitirá comprender la utilidad de este procedimiento.

Considerar una lancha sobre una rampa inclinada, como se muestra en la figura 11.28. La fuerza $\mathbf{F}$ debida a la gravedad empuja la lancha hacia *abajo* de la rampa y *contra* la rampa. Estas dos fuerzas, $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$, son ortogonales; se les llama las componentes vectoriales de $\mathbf{F}$.

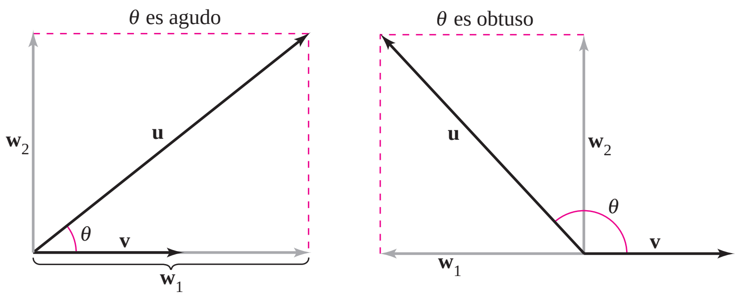
$$\mathbf{F} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \qquad \text{Componentes vectoriales de } \mathbf{F}.$$

Las fuerzas $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ ayudan a analizar el efecto de la gravedad sobre la lancha. Por ejemplo, $\mathbf{w}_1$ representa la fuerza necesaria para impedir que la lancha se deslice hacia abajo por la rampa, mientras que $\mathbf{w}_2$ representa la fuerza que deben soportar los neumáticos.

DEFINICIÓN DE PROYECCIÓN Y DE LAS COMPONENTES VECTORIALES

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores distintos de cero. Sea $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}_1$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}_2$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, como se muestra en la figura 11.29.

1. A $\mathbf{w}_1$ se le llama la **proyección de u en v** o la **componente vectorial de u a lo largo de v**, y se denota por $\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.
2. A $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$ se le llama la **componente vectorial de u ortogonal a v**.



$\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ = la proyección de $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ = componente vectorial de $\mathbf{u}$ en dirección de $\mathbf{v}$
$\mathbf{w}_2$ = componente vectorial de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{v}$
Figura 11.29

EJEMPLO 4 Hallar la componente vectorial de u ortogonal a v

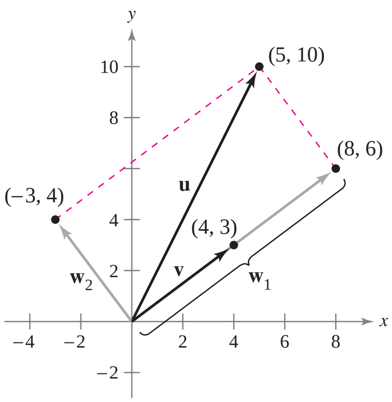
Encontrar la componente del vector de $\mathbf{u} = \langle 5, 10\rangle$ que es ortogonal a $\mathbf{v} = \langle 4, 3\rangle$, dado que $\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \langle 8, 6\rangle$ y

$$\mathbf{u} = \langle 5, 10\rangle = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2.$$

Solución Como $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}_1$ es paralelo a $\mathbf{v}$, se sigue que $\mathbf{w}_2$ es la componente vectorial de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{v}$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_2 &= \mathbf{u} - \mathbf{w}_1\\ &= \langle 5, 10\rangle - \langle 8, 6\rangle\\ &= \langle -3, 4\rangle.\end{aligned}$$

Verificar que $\mathbf{w}_2$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, como se muestra en la figura 11.30.



$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$
Figura 11.30

Del ejemplo 4, se puede ver que es fácil encontrar la componente vectorial $\mathbf{w}_2$ una vez que se ha hallado la proyección $\mathbf{w}_1$ de $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$. Para encontrar esta proyección, se usa el producto escalar como establece el teorema siguiente, el cual se demuestra en el ejercicio 92.

NOTA Ver la diferencia entre los términos "componente" y "componente vectorial". Por ejemplo, usando los vectores unitarios canónicos o estándar con $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, u_1 es la *componente* de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{i}$ y $u_1\mathbf{i}$ es la *componente vectorial* de $\mathbf{u}$ en la dirección $\mathbf{i}$. ■

TEOREMA 11.6 PROYECCIÓN UTILIZANDO EL PRODUCTO ESCALAR

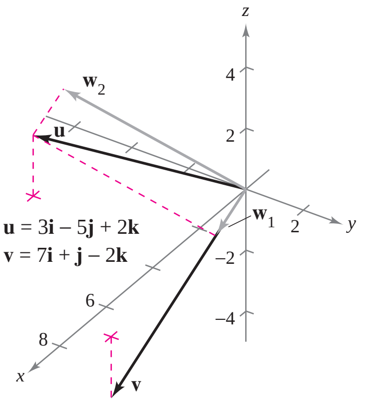
Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores distintos de cero, entonces la proyección de $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ está dada por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v}.$$

La proyección de $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ puede expresarse como un múltiplo escalar de un vector unitario en dirección de $\mathbf{v}$. Es decir,

$$\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = (k)\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad\Rightarrow\quad k = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbf{u}\|\cos\theta.$$

Al escalar k se le llama la **componente de u en la dirección de v**.



$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$
Figura 11.31

EJEMPLO 5 Descomposición de un vector en componentes vectoriales

Hallar la proyección de $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ y la componente vectorial de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{v}$ de los vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ mostrados en la figura 11.31.

Solución La proyección de $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = \left(\frac{12}{54}\right)(7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{14}{9}\mathbf{i} + \frac{2}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}.$$

La componente vectorial de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{v}$ es el vector

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = (3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) - \left(\frac{14}{9}\mathbf{i} + \frac{2}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}\right) = \frac{13}{9}\mathbf{i} - \frac{47}{9}\mathbf{j} + \frac{22}{9}\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 6 Cálculo de una fuerza

Una lancha de 600 libras se encuentra sobre una rampa inclinada 30°, como se muestra en la figura 11.32. ¿Qué fuerza se requiere para impedir que la lancha resbale cuesta abajo por la rampa?

Solución Como la fuerza debida a la gravedad es vertical y hacia abajo, se puede representar la fuerza de la gravedad mediante el vector $\mathbf{F} = -600\mathbf{j}$. Para encontrar la fuerza requerida para impedir que la lancha resbale por la rampa, se proyecta $\mathbf{F}$ en un vector unitario $\mathbf{v}$ en la dirección de la rampa, como sigue.

$$\mathbf{v} = \cos 30°\,\mathbf{i} + \text{sen}\, 30°\,\mathbf{j} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} \qquad \text{Vector unitario en la dirección de la rampa.}$$

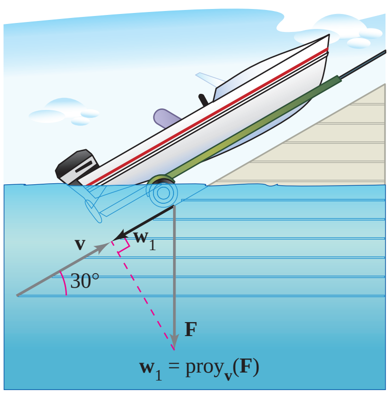
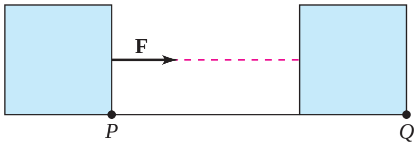


Figura 11.32

Por tanto, la proyección de $\mathbf{F}$ en $\mathbf{v}$ está dada por

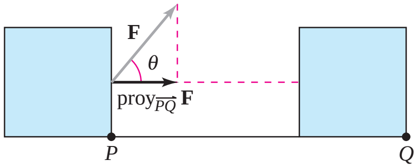
$$\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} = (-600)\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{v} = -300\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right).$$

La magnitud de esta fuerza es 300, y por consiguiente se requiere una fuerza de 300 libras para impedir que la lancha resbale por la rampa.



Trabajo = $\|\mathbf{F}\|\|\overrightarrow{PQ}\|$

a) La fuerza actúa a lo largo de la recta de movimiento



Trabajo = $\|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\,\mathbf{F}\|\|\overrightarrow{PQ}\|$

b) La fuerza actúa formando un ángulo θ con la recta de movimiento

Figura 11.33

Trabajo

El trabajo W realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$ que actúa a lo largo de la recta de movimiento de un objeto está dado por

$$W = (\text{magnitud de fuerza})(\text{distancia}) = \|\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\|$$

como se muestra en la figura 11.33*a*. Si la fuerza constante $\mathbf{F}$ no está dirigida a lo largo de la recta de movimiento, se puede ver en la figura 11.33*b* que el trabajo realizado W por la fuerza es

$$W = \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\| = (\cos\theta)\|\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\| = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{PQ}.$$

Esta noción de trabajo se resume en la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE TRABAJO

El trabajo W realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$ a medida que su punto de aplicación se mueve a lo largo del vector $\overrightarrow{PQ}$ está dado por las siguientes expresiones.

1. $W = \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\|$ En forma de proyección.
2. $W = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{PQ}$ En forma de producto escalar.

EJEMPLO 7 Cálculo de trabajo

Para cerrar una puerta corrediza, una persona tira de una cuerda con una fuerza constante de 50 libras y un ángulo constante de 60°, como se muestra en la figura 11.34. Hallar el trabajo realizado al mover la puerta 12 pies hacia la posición en que queda cerrada.

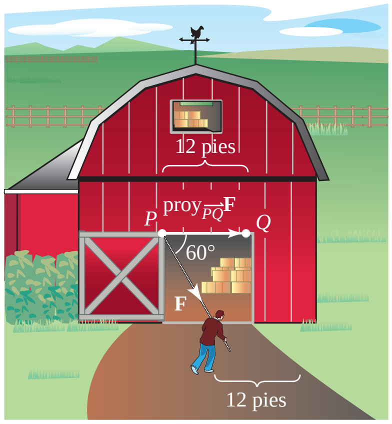


Figura 11.34

Solución Usando una proyección, se puede calcular el trabajo como sigue.

$$\begin{aligned} W &= \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\| && \text{Forma de proyección para el trabajo.}\\ &= \cos(60°)\,\|\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\| \\ &= \frac{1}{2}(50)(12) \\ &= 300 \text{ libras-pie} \end{aligned}$$

11.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, hallar *a*) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, *b*) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$, *c*) $\|\mathbf{u}\|^2$, *d*) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}$ y *e*) $\mathbf{u}\cdot(2\mathbf{v})$.

1. $\mathbf{u} = \langle 3, 4\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -1, 5\rangle$
2. $\mathbf{u} = \langle 4, 10\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$
3. $\mathbf{u} = \langle 6, -4\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$
4. $\mathbf{u} = \langle -4, 8\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 7, 5\rangle$
5. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 4\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 0, 6, 5\rangle$
6. $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i}$
7. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
   $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$
8. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
   $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los ejercicios 9 y 10, calcular $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

9. $\|\mathbf{u}\| = 8$, $\|\mathbf{v}\| = 5$, y el ángulo entre **u** y **v** es $\pi/3$.
10. $\|\mathbf{u}\| = 40$, $\|\mathbf{v}\| = 25$, y el ángulo entre **u** y **v** es $5\pi/6$.

En los ejercicios 11 a 18, calcular el ángulo θ entre los vectores.

11. $\mathbf{u} = \langle 1, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -2\rangle$
12. $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -1\rangle$
13. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
14. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{j}$
    $\mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{j}$
15. $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1\rangle$
    $\mathbf{v} = \langle 2, 1, -1\rangle$
16. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
    $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
17. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
    $\mathbf{v} = -2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
18. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$
    $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los ejercicios 19 a 26, determinar si u y v son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos cosas.

19. $\mathbf{u} = \langle 4, 0\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$
20. $\mathbf{u} = \langle 2, 18\rangle, \quad \mathbf{v} = \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{6}\right\rangle$

21. $\mathbf{u} = \langle 4, 3 \rangle$
$\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{2}{3} \right\rangle$

22. $\mathbf{u} = -\frac{1}{3}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$
$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

23. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
$\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

24. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

25. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 1 \rangle$
$\mathbf{v} = \langle -1, -1, -1 \rangle$

26. $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -1 \rangle$
$\mathbf{v} = \langle \operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, 0 \rangle$

En los ejercicios 27 a 30, se dan los vértices de un triángulo. Determinar si el triángulo es un triángulo agudo, un triángulo obtuso o un triángulo recto. Explicar el razonamiento.

27. $(1, 2, 0), (0, 0, 0), (-2, 1, 0)$

28. $(-3, 0, 0), (0, 0, 0), (1, 2, 3)$

29. $(2, 0, 1), (0, 1, 2), (-0.5, 1.5, 0)$

30. $(2, -7, 3), (-1, 5, 8), (4, 6, -1)$

En los ejercicios 31 a 34, encontrar los cosenos directores de u y demostrar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es 1.

31. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

32. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

33. $\mathbf{u} = \langle 0, 6, -4 \rangle$

34. $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$

En los ejercicios 35 a 38, encontrar los ángulos de dirección del vector.

35. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

36. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

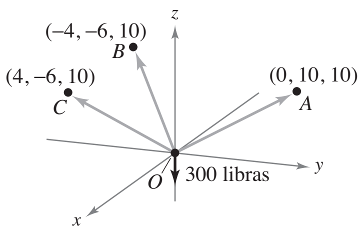
37. $\mathbf{u} = \langle -1, 5, 2 \rangle$

38. $\mathbf{u} = \langle -2, 6, 1 \rangle$

En los ejercicios 39 y 40, usar una herramienta de graficación para encontrar la magnitud y los ángulos de dirección de la resultante de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con puntos iniciales en el origen. Se dan la magnitud y el punto final de cada vector.

	Vector	*Magnitud*	*Punto final*
39.	$\mathbf{F}_1$	50 lb	$(10, 5, 3)$
	$\mathbf{F}_2$	80 lb	$(12, 7, -5)$
40.	$\mathbf{F}_1$	300 N	$(-20, -10, 5)$
	$\mathbf{F}_2$	100 N	$(5, 15, 0)$

41. ***Cables que soportan una carga*** Una carga es soportada por tres cables, como se muestra en la figura. Calcular los ángulos de dirección del cable de soporte *OA*.



42. ***Cables que soportan una carga*** La tensión en el cable *OA* del ejercicio 41 es 200 newtons. Determinar el peso de la carga.

En los ejercicios 43 a 50, *a*) encontrar la proyección de u sobre v y *b*) encontrar la componente del vector de u ortogonal a v.

43. $\mathbf{u} = \langle 6, 7 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 4 \rangle$

44. $\mathbf{u} = \langle 9, 7 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$

45. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$

46. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

47. $\mathbf{u} = \langle 0, 3, 3 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -1, 1, 1 \rangle$

48. $\mathbf{u} = \langle 8, 2, 0 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 2, 1, -1 \rangle$

49. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

50. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

Desarrollo de conceptos

51. Definir el producto escalar de los vectores **u** y **v**.

52. Dar la definición de vectores ortogonales. Si los vectores no son paralelos ni ortogonales, ¿cómo se encuentra el ángulo entre ellos? Explicar.

53. Determinar cuál de las siguientes expresiones están definidas para vectores distintos de cero **u**, **v** y **w**. Explicar el razonamiento.

a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *b*) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}$ *d*) $\|\mathbf{u}\| \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

54. Describir los cosenos directores y los ángulos de dirección de un vector **v**.

55. Dar una descripción geométrica de la proyección de **u** en **v**.

56. ¿Qué puede decirse sobre los vectores **u** y **v** si *a*) la proyección de **u** en **v** es igual a **u** y *b*) la proyección de **u** en **v** es igual a **0**?

57. ¿Si la proyección de **u** en **v** tiene la misma magnitud que la proyección de **v** en **u**, ¿se puede concluir que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$? Explicar.

Para discusión

58. ¿Qué se sabe acerca de θ, el ángulo entre dos vectores distintos de cero **u** y **v**, si

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$? *b*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$? *c*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$?

59. ***Ingresos*** El vector $\mathbf{u} = \langle 3\,240, 1\,450, 2\,235 \rangle$ da el número de hamburguesas, bocadillos de pollo y hamburguesas con queso, respectivamente, vendidos en una semana en un restaurante de comida rápida. El vector $\mathbf{v} = \langle 1.35, 2.65, 1.85 \rangle$ da los precios (en dólares) por unidad de los tres artículos alimenticios. Encontrar el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y explicar qué información proporciona.

60. ***Ingresos*** Repita el ejercicio 59 después de incrementar los precios 4%. Identificar la operación vectorial usada para incrementar los precios 4%.

61. ***Programación*** Dados los vectores **u** y **v** mediante sus componentes, escribir un programa para una herramienta de graficación que calcule *a*) $\|\mathbf{u}\|$, *b*) $\|\mathbf{v}\|$,y *c*) ángulo entre **u** y **v**.

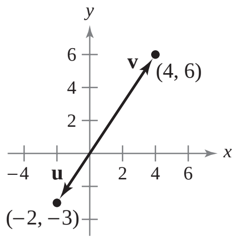
62. ***Programación*** Con el programa escrito en el ejercicio 61 encontrar el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = \langle 8, -4, 2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, 5, 2 \rangle$.

63. ***Programación*** Dados los vectores **u** y **v** mediante sus componentes, escribir un programa para herramienta de graficación que calcule las componentes de la proyección de **u** en **v**.

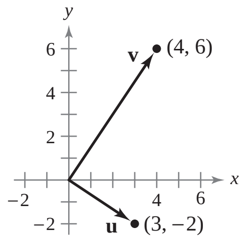
64. ***Programación*** Usar el programa escrito en el ejercicio 63 para encontrar la proyección de **u** en **v** si $\mathbf{u} = \langle 5, 6, 2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 3, 4\rangle$.

Para pensar **En los ejercicios 65 y 66, usar la figura para determinar mentalmente la proyección de u en v (se dan las coordenadas de los puntos finales de los vectores en la posición estándar). Verificar los resultados analíticamente.**

65.



66.



En los ejercicios 67 a 70, encontrar dos vectores en direcciones opuestas que sean ortogonales al vector u. (Las respuestas no son únicas.)

67. $\mathbf{u} = -\frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}$

68. $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

69. $\mathbf{u} = \langle 3, 1, -2\rangle$

70. $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 6\rangle$

71. ***Fuerza de frenado*** Un camión de 48 000 libras está estacionado sobre una pendiente de 10° (ver la figura). Si se supone que la única fuerza a vencer es la de la gravedad, hallar *a*) la fuerza requerida para evitar que el camión ruede cuesta abajo y *b*) la fuerza perpendicular a la pendiente.

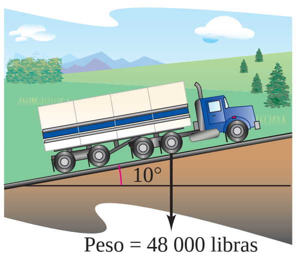


Figura para 71

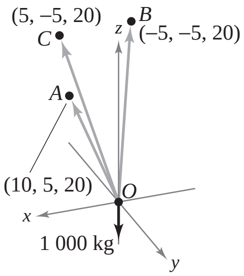


Figura para 72

72. ***Cables que soportan una carga*** Calcular la magnitud de la proyección del cable *OA* en el eje *z* positivo como se muestra en la figura.

73. ***Trabajo*** Un objeto es jalado 10 pies por el suelo, usando una fuerza de 85 libras. La dirección de la fuerza es 60° sobre la horizontal (ver la figura). Calcular el trabajo realizado.

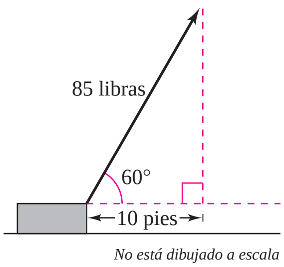


Figura para 73

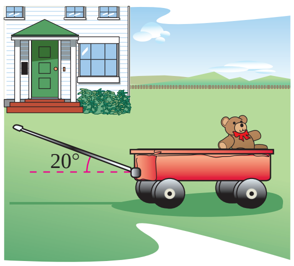


Figura para 74

74. ***Trabajo*** Un coche de juguete se jala ejerciendo una fuerza de 25 libras sobre una manivela que forma un ángulo de 20° con la horizontal (ver la figura). Calcular el trabajo realizado al jalar el coche 50 pies.

75. ***Trabajo*** Un carro se remolca usando una fuerza de 1 600 newtons. La cadena que se usa para jalar el carro forma un ángulo de 25° con la horizontal. Encontrar el trabajo que se realiza al remolcar el carro 2 kilómetros.

76. ***Trabajo*** Se tira de un trineo ejerciendo una fuerza de 100 newtons en una cuerda que hace un ángulo de 25° con la horizontal. Encontrar el trabajo efectuado al jalar el trineo 40 metros.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 77 y 78, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

77. Si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

78. Si **u** y **v** son ortogonales a **w**, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es ortogonal a **w**.

79. Encontrar el ángulo entre la diagonal de un cubo y una de sus aristas.

80. Encontrar el ángulo entre la diagonal de un cubo y la diagonal de uno de sus lados.

En los ejercicios 81 a 84, *a*) encontrar todos los puntos de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones; *b*) encontrar los vectores unitarios tangentes a cada curva en los puntos de intersección y *c*) hallar los ángulos ($0° \le \theta \le 90°$) entre las curvas en sus puntos de intersección.

81. $y = x^2, \quad y = x^{1/3}$

82. $y = x^3, \quad y = x^{1/3}$

83. $y = 1 - x^2, \quad y = x^2 - 1$

84. $(y + 1)^2 = x, \quad y = x^3 - 1$

85. Usar vectores para demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

86. Usar vectores para demostrar que un paralelogramo es un rectángulo si y sólo si sus diagonales son iguales en longitud.

87. ***Ángulo de enlace*** Considerar un tetraedro regular con los vértices $(0, 0, 0)$, $(k, k, 0)$, $(k, 0, k)$ y $(0, k, k)$, donde k es un número real positivo.

a) Dibujar la gráfica del tetraedro.

b) Hallar la longitud de cada arista.

c) Hallar el ángulo entre cada dos aristas.

d) Hallar el ángulo entre los segmentos de recta desde el centroide $(k/2, k/2, k/2)$ a dos de los vértices. Éste es el ángulo de enlace en una molécula como CH_4 o $PbCl_4$, cuya estructura es un tetraedro.

88. Considerar los vectores $\mathbf{u} = \langle \cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 0\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle \cos\beta, \operatorname{sen}\beta, 0\rangle$, donde $\alpha > \beta$. Calcular el producto escalar de los vectores y usar el resultado para demostrar la identidad

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

89. Demostrar que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

90. Demostrar la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$.

91. Demostrar la desigualdad del triángulo $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

92. Demostrar el teorema 11.6.

11.4 El producto vectorial de dos vectores en el espacio

- **Hallar el producto vectorial de dos vectores en el espacio.**
- **Usar el producto escalar triple de tres vectores en el espacio.**

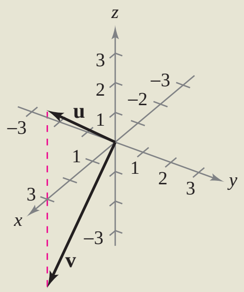
El producto vectorial

En muchas aplicaciones en física, ingeniería y geometría hay que encontrar un vector en el espacio ortogonal a dos vectores dados. En esta sección se estudia un producto que da como resultado ese vector. Se llama **producto vectorial** y se define y calcula de manera más adecuada utilizando los vectores unitarios canónicos o estándar. El producto vectorial debe su nombre a que da como resultado un vector. Al producto vectorial también se le suele llamar **producto cruz**.

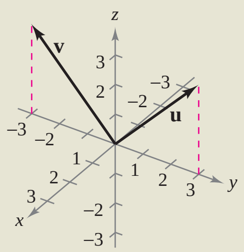
EXPLORACIÓN

Propiedad geométrica del producto vectorial Se muestran abajo tres pares de vectores. Usar la definición para encontrar el producto vectorial de cada par. Dibujar los tres vectores en un sistema tridimensional. Describir toda relación entre los tres vectores. Usar la descripción para escribir una conjetura acerca de **u**, **v** y **u** × **v**.

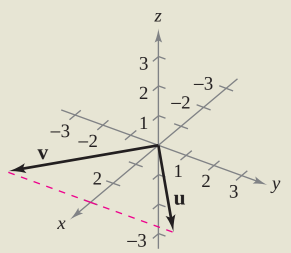
a) $\mathbf{u} = \langle 3, 0, 3\rangle,\ \mathbf{v} = \langle 3, 0, -3\rangle$



b) $\mathbf{u} = \langle 0, 3, 3\rangle,\ \mathbf{v} = \langle 0, -3, 3\rangle$



c) $\mathbf{u} = \langle 3, 3, 0\rangle,\ \mathbf{v} = \langle 3, -3, 0\rangle$



DEFINICIÓN DE PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES EN EL ESPACIO

Sean $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vectores en el espacio. El **producto cruz** de **u** y **v** es el vector

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

NOTA Asegurarse de ver que esta definición sólo aplica a vectores tridimensionales. El producto vectorial no está definido para vectores bidimensionales. ■

Una manera adecuada para calcular **u** × **v** es usar *determinantes* con expansión de cofactores. (Esta forma empleando determinantes 3 × 3 se usa sólo para ayudar a recordar la fórmula del producto vectorial, pero técnicamente no es un determinante porque las entradas de la matriz correspondiente no son todas números reales.)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \longleftarrow \text{Poner “}\mathbf{u}\text{” en la fila 2.} \\ \longleftarrow \text{Poner “}\mathbf{v}\text{” en la fila 3.} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

Notar el signo menos delante de la componente **j**. Cada uno de los tres determinantes 2 × 2 se pueden evaluar usando el modelo diagonal siguiente.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Aquí están un par de ejemplos.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1) - (4)(3) = -2 - 12 = -14$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (0)(-6) = 12$$

Notación para los productos escalar y vectorial

La notación para el producto escalar y para el producto vectorial la introdujo el físico estadounidense Josiah Willard Gibbs (1839-1903). A comienzos de la década de 1880, Gibbs construyó un sistema para representar cantidades físicas llamado "análisis vectorial". El sistema fue una variante de la teoría de los cuaterniones de Hamilton.

EJEMPLO 1 Hallar el producto vectorial

Dados $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, hallar cada uno de los siguientes productos vectoriales.

a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *b)* $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ *c)* $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$

Solución

$$a)\ \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (4 - 1)\mathbf{i} - (-2 - 3)\mathbf{j} + (1 + 6)\mathbf{k}$$

$$= 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

$$b)\ \mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (1 - 4)\mathbf{i} - (3 + 2)\mathbf{j} + (-6 - 1)\mathbf{k}$$

$$= -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

Notar que este resultado es el negativo del obtenido en el inciso *a*).

$$c)\ \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Los resultados obtenidos en el ejemplo 1 sugieren algunas propiedades *algebraicas* interesantes del producto vectorial. Por ejemplo, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Estas propiedades, y algunas otras, se presentan en forma resumida en el teorema siguiente.

TEOREMA 11.7 PROPIEDADES ALGEBRAICAS DEL PRODUCTO VECTORIAL

Sean **u**, **v** y **w** vectores en el espacio, y sea c un escalar.

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la propiedad 1, sean $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $v = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. Entonces,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (v_2u_3 - v_3u_2)\mathbf{i} - (v_1u_3 - v_3u_1)\mathbf{j} + (v_1u_2 - v_2u_1)\mathbf{k}$$

la cual implica que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$. Las demostraciones de las propiedades 2, 3, 5 y 6 se dejan como ejercicios (ver ejercicios 59 a 62).

Observar que la propiedad 1 del teorema 11.7 indica que el producto vectorial *no es conmutativo*. En particular, esta propiedad indica que los vectores $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ tienen longitudes iguales pero direcciones opuestas. El teorema siguiente da una lista de algunas otras de las propiedades *geométricas* del producto vectorial de dos vectores.

NOTA De las propiedades 1 y 2 presentadas en el teorema 11.8 se desprende que si $\mathbf{n}$ es un vector unitario ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$, entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \pm(\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta)\mathbf{n}.$$

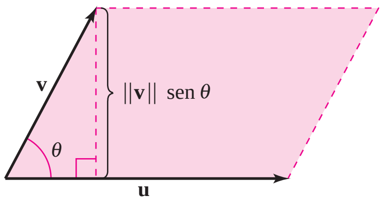
TEOREMA 11.8 PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL PRODUCTO VECTORIAL

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores distintos de cero en el espacio, y sea θ el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$.
2. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta$
3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son múltiplos escalares uno de otro.
4. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| =$ área del paralelogramo que tiene $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como lados adyacentes.

DEMOSTRACIÓN Para la propiedad 2, observar que como $\cos\theta = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})/(\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta &= \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|\sqrt{1-\cos^2\theta}\\
&= \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|\sqrt{1-\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2}}\\
&= \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}\\
&= \sqrt{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2}\\
&= \sqrt{(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_1v_3-u_3v_1)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2}\\
&= \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|.
\end{aligned}$$



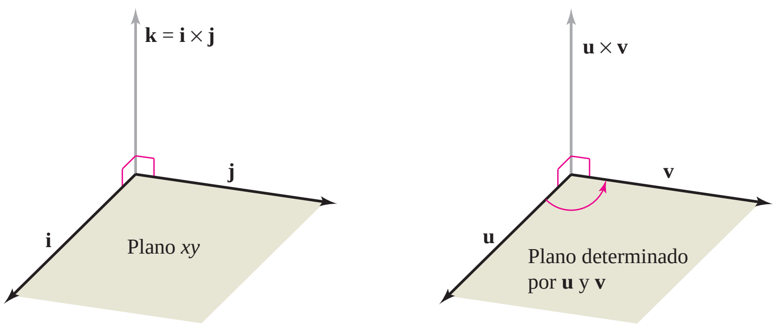
Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son los lados adyacentes de un paralelogramo
Figura 11.35

Para demostrar la propiedad 4, ir a la figura 11.35 que es un paralelogramo que tiene $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ como lados adyacentes. Como la altura del paralelogramo es $\|\mathbf{v}\|$ sen θ, el área es

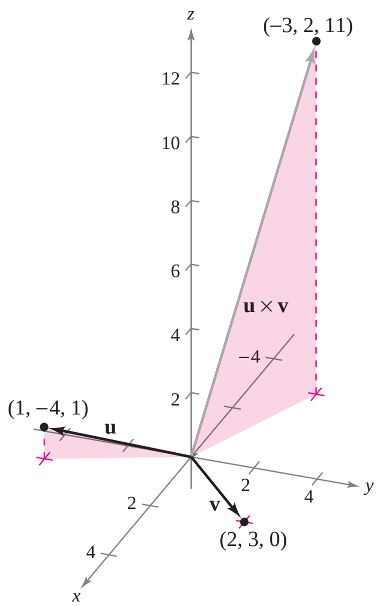
$$\begin{aligned}
\text{Área} &= (\text{base})(\text{altura})\\
&= \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta\\
&= \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|.
\end{aligned}$$

Las demostraciones de las propiedades 1 y 3 se dejan como ejercicios (ver ejercicios 63 y 64).

Tanto $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ como $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ son perpendiculares al plano determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Una manera de recordar las orientaciones de los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es compararlos con los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$, como se muestra en la figura 11.36. Los tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ forman un *sistema dextrógiro*, mientras que los tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ forman un *sistema levógiro*.



Sistemas dextrógiros
Figura 11.36



El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$
Figura 11.37

EJEMPLO 2 Utilización del producto vectorial

Hallar un vector unitario que es ortogonal tanto a

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{como a} \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

Solución El producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, como se muestra en la figura 11.37, es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{Producto vectorial.}$$

$$= -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

Como

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 11^2} = \sqrt{134}$$

un vector unitario ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$ es

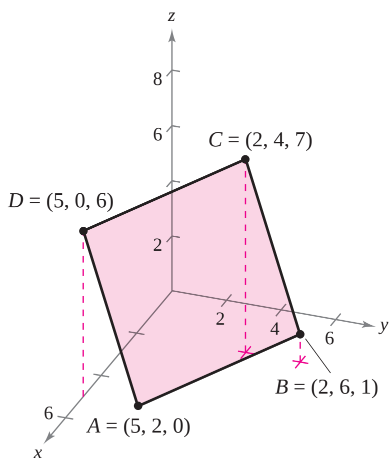
$$\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = -\frac{3}{\sqrt{134}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{134}}\mathbf{j} + \frac{11}{\sqrt{134}}\mathbf{k}.$$

NOTA En el ejemplo 2, notar que se podría haber usado el producto vectorial $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ para formar un vector unitario ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$. Con esa opción, se habría obtenido el negativo del vector unitario encontrado en el ejemplo. ■

EJEMPLO 3 Aplicación geométrica del producto vectorial

Mostrar que el cuadrilátero con vértices en los puntos siguientes es un paralelogramo y calcular su área.

$$A = (5, 2, 0) \qquad B = (2, 6, 1)$$
$$C = (2, 4, 7) \qquad D = (5, 0, 6)$$



El área del paralelogramo es aproximadamente 32.19
Figura 11.38

Solución En la figura 11.38 se puede ver que los lados del cuadrilátero corresponden a los siguientes cuatro vectores.

$$\overrightarrow{AB} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad \overrightarrow{CD} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k} = -\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AD} = 0\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \qquad \overrightarrow{CB} = 0\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k} = -\overrightarrow{AD}$$

Por tanto, $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AD}$ es paralelo a $\overrightarrow{CB}$, y se puede concluir que el cuadrilátero es un paralelogramo con $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ como lados adyacentes. Como

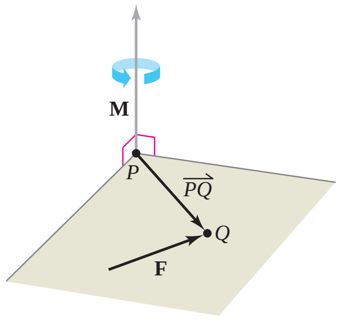
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} \qquad \text{Producto vectorial.}$$

$$= 26\mathbf{i} + 18\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

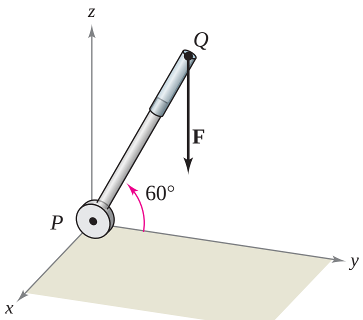
el área del paralelogramo es

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{1036} \approx 32.19.$$

¿Es el paralelogramo un rectángulo? Para decidir si lo es o no, se calcula el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.



El momento de **F** respecto a P
Figura 11.39



Una fuerza vertical de 50 libras se aplica en el punto Q
Figura 11.40

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para ver cómo el producto vectorial se usa para modelar el momento de un brazo de robot de un transbordador espacial, ver el artículo "The Long Arm of Calculus" de Ethan Berkove y Rich Marchand en *The College Mathematics Journal*.

En física, el producto vectorial puede usarse para medir el **momento M de una fuerza F respecto a un punto *P***, como se muestra en la figura 11.39. Si el punto de aplicación de la fuerza es Q, el momento de **F** respecto a P está dado por

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F}.$$

Momento de **F** respecto a P.

La magnitud del momento **M** mide la tendencia del vector $\overrightarrow{PQ}$ al girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj (usando la regla de la mano derecha) respecto a un eje en dirección del vector **M**.

EJEMPLO 4 Una aplicación del producto vectorial

Se aplica una fuerza vertical de 50 libras al extremo de una palanca de un pie de longitud unida a un eje en el punto P, como se muestra en la figura 11.40. Calcular el momento de esta fuerza respecto al punto P cuando $\theta = 60°$.

Solución Si se representa la fuerza de 50 libras como $\mathbf{F} = -50\mathbf{k}$ y la palanca como

$$\overrightarrow{PQ} = \cos(60°)\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}(60°)\mathbf{k} = \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}$$

el momento de **F** respecto a P está dado por

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -50 \end{vmatrix} = -25\mathbf{i}.$$

Momento de **F** respecto a P.

La magnitud de este momento es 25 libras-pie.

NOTA En el ejemplo 4, notar que el momento (la tendencia de la palanca a girar sobre su eje) depende del ángulo θ. Cuando $\theta = \pi/2$, el momento es 0. El momento es máximo cuando $\theta = 0$. ■

El triple producto escalar (o producto mixto)

Dados vectores **u**, **v** y **w** en el espacio, al producto escalar de **u** y $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

se le llama **triple producto escalar**, como se define en el teorema 11.9. La demostración de este teorema se deja como ejercicio (ver ejercicio 67).

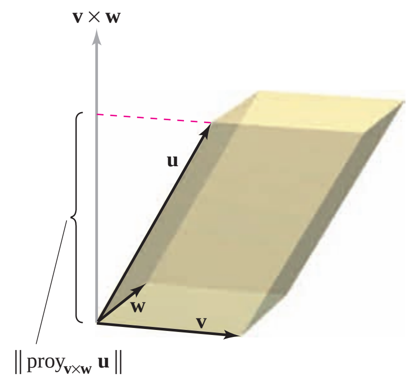
TEOREMA 11.9 EL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

Para $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$, el triple producto escalar está dado por

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

NOTA El valor de un determinante se multiplica por -1 si se intercambian dos de sus filas. Después de estos dos intercambios, el valor del determinante queda inalterado. Por tanto, los triples productos escalares siguientes son equivalentes.

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$ ■



Área de la base $= \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$
Volumen de paralelepípedo
$= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$
Figura 11.41

Si los vectores **u**, **v** y **w** no están en el mismo plano, el triple producto escalar $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ puede usarse para determinar el volumen del paralelepípedo (un poliedro, en el que todas sus caras son paralelogramos) con **u**, **v** y **w** como aristas adyacentes, como se muestra en la figura 11.41. Esto se establece en el teorema siguiente.

TEOREMA 11.10 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

El volumen V de un paralelepípedo con vectores **u**, **v** y **w** como aristas adyacentes está dado por

$$V = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|.$$

DEMOSTRACIÓN En la figura 11.41 se observa que

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \text{área de la base}$$

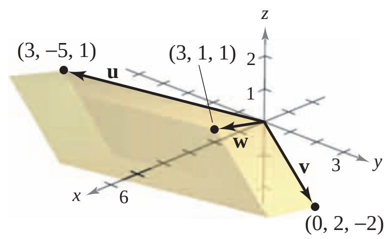
y

$$\|\text{proy}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mathbf{u}\| = \text{altura de paralelepípedo.}$$

Por consiguiente, el volumen es

$$\begin{aligned} V &= (\text{altura})(\text{área de la base}) = \|\text{proy}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \\ &= \left|\frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|}\right| \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \\ &= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Cálculo de un volumen por medio del triple producto escalar



El paralelepípedo tiene un volumen de 36
Figura 11.42

Calcular el volumen del paralelepípedo mostrado en la figura 11.42 que tiene $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ como aristas adyacentes.

Solución Por el teorema 11.10, se tiene

$$\begin{aligned} V &= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \qquad \text{Triple producto escalar.} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(4) + 5(6) + 1(-6) \\ &= 36. \end{aligned}$$

Una consecuencia natural del teorema 11.10 es que el volumen del paralelepípedo es 0 si y sólo si los tres vectores son coplanares. Es decir, si los vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ tienen el mismo punto inicial, se encuentran en el mismo plano si y sólo si

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

11.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, calcular el producto vectorial de los vectores unitarios y dibujar su resultado.

1. $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$
2. $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$
3. $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$
4. $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$
5. $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$
6. $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$

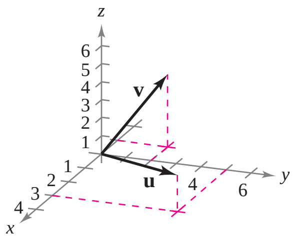
En los ejercicios 7 a 10, calcular *a*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, *b*) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ y *c*) $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$.

7. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
   $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
8. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$
   $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
9. $\mathbf{u} = \langle 7, 3, 2\rangle$
   $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 5\rangle$
10. $\mathbf{u} = \langle 3, -2, -2\rangle$
    $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 1\rangle$

En los ejercicios 11 a 16, calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y probar que es ortogonal tanto a u como a v.

11. $\mathbf{u} = \langle 12, -3, 0\rangle$
    $\mathbf{v} = \langle -2, 5, 0\rangle$
12. $\mathbf{u} = \langle -1, 1, 2\rangle$
    $\mathbf{v} = \langle 0, 1, 0\rangle$
13. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 1\rangle$
    $\mathbf{v} = \langle 1, -2, 1\rangle$
14. $\mathbf{u} = \langle -10, 0, 6\rangle$
    $\mathbf{v} = \langle 5, -3, 0\rangle$
15. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
    $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
16. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
    $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

Para pensar **En los ejercicios 17 a 20, usar los vectores u y v mostrados en la figura para dibujar en un sistema dextrógiro un vector en la dirección del producto vectorial indicado.**



17. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
18. $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
19. $(-\mathbf{v}) \times \mathbf{u}$
20. $\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

CAS **En los ejercicios 21 a 24, usar un sistema algebraico por computadora para encontrar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y un vector unitario ortogonal a u y a v.**

21. $\mathbf{u} = \langle 4, -3.5, 7\rangle$
    $\mathbf{v} = \langle 2.5, 9, 3\rangle$
22. $\mathbf{u} = \langle -8, -6, 4\rangle$
    $\mathbf{v} = \langle 10, -12, -2\rangle$
23. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$
    $\mathbf{v} = 0.4\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k}$
24. $\mathbf{u} = 0.7\mathbf{k}$
    $\mathbf{v} = 1.5\mathbf{i} + 6.2\mathbf{k}$

25. ***Programación*** Dadas las componentes de los vectores **u** y **v**, escribir un programa para herramienta de graficación que calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

26. ***Programación*** Usar el programa escrito en el ejercicio 25 para encontrar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ para $\mathbf{u} = \langle -2, 6, 10\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 3, 8, 5\rangle$.

Área **En los ejercicios 27 a 30, calcular el área del paralelogramo que tiene los vectores dados como lados adyacentes. Usar un sistema algebraico por computadora o una herramienta de graficación para verificar el resultado.**

27. $\mathbf{u} = \mathbf{j}$
    $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
28. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
    $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
29. $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle$
    $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3\rangle$
30. $\mathbf{u} = \langle 2, -1, 0\rangle$
    $\mathbf{v} = \langle -1, 2, 0\rangle$

Área **En los ejercicios 31 y 32, verificar que los puntos son los vértices de un paralelogramo, y calcular su área.**

31. $A(0, 3, 2)$, $B(1, 5, 5)$, $C(6, 9, 5)$, $D(5, 7, 2)$
32. $A(2, -3, 1)$, $B(6, 5, -1)$, $C(7, 2, 2)$, $D(3, -6, 4)$

Área **En los ejercicios 33 a 36, calcular el área del triángulo con los vértices dados. (*Sugerencia:* $\frac{1}{2}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ es el área del triángulo que tiene u y v como lados adyacentes.)**

33. $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 3)$, $C(-3, 2, 0)$
34. $A(2, -3, 4)$, $B(0, 1, 2)$, $C(-1, 2, 0)$
35. $A(2, -7, 3)$, $B(-1, 5, 8)$, $C(4, 6, -1)$
36. $A(1, 2, 0)$, $B(-2, 1, 0)$, $C(0, 0, 0)$

37. ***Momento*** Un niño frena en una bicicleta aplicando una fuerza dirigida hacia abajo de 20 libras sobre el pedal cuando la manivela forma un ángulo de 40° con la horizontal (ver la figura). La manivela tiene 6 pulgadas de longitud. Calcular el momento respecto a *P*.

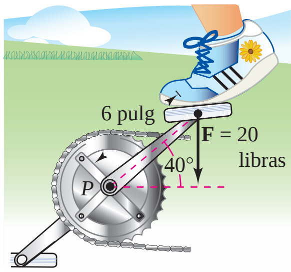


Figura para 37

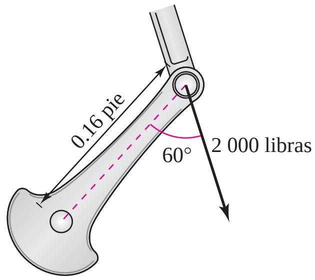


Figura para 38

38. ***Momento*** La magnitud y la dirección de la fuerza sobre un cigüeñal cambian cuando éste gira. Calcular el momento sobre el cigüeñal usando la posición y los datos mostrados en la figura.

39. ***Optimización*** Una fuerza de 56 libras actúa sobre la llave inglesa mostrada en la figura que se encuentra en la página siguiente.
    a) Calcular la magnitud del momento respecto a *O* evaluando $\|\overrightarrow{OA} \times \mathbf{F}\|$. Usar una herramienta de graficación para representar la función de θ que se obtiene.
    b) Usar el resultado del inciso *a*) para determinar la magnitud del momento cuando $\theta = 45°$.
    c) Usar el resultado del inciso *a*) para determinar el ángulo θ cuando la magnitud del momento es máxima. ¿Es la respuesta lo que se esperaba? ¿Por qué sí o por qué no?

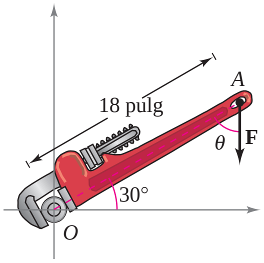


Figura para 39

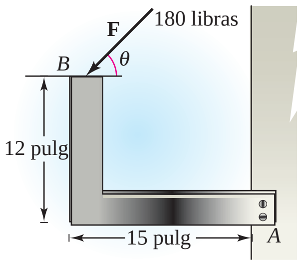


Figura para 40

40. ***Optimización*** Una fuerza de 180 libras actúa sobre el soporte mostrado en la figura.

a) Determinar el vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector **F** que representa la fuerza. (**F** estará en términos de θ.)

b) Calcular la magnitud del momento respecto a A evaluando $\|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{F}\|$.

c) Usar el resultado del inciso *b*) para determinar la magnitud del momento cuando $\theta = 30°$.

d) Usar el resultado del inciso *b*) para determinar el ángulo θ cuando la magnitud del momento es máxima. A ese ángulo, ¿cuál es la relación entre los vectores **F** y $\overrightarrow{AB}$? ¿Es lo que se esperaba? ¿Por qué sí o por qué no?

e) Usar una herramienta de graficación para representar la función de la magnitud del momento respecto a A para $0° \leq \theta \leq 180°$. Hallar el cero de la función en el dominio dado. Interpretar el significado del cero en el contexto del problema.

En los ejercicios 41 a 44, calcular $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

41. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{k}$

42. $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 1, 0\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 0, 0, 1\rangle$

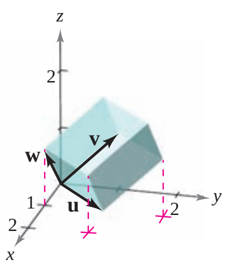
43. $\mathbf{u} = \langle 2, 0, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 3, 0\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 0, 0, 1\rangle$

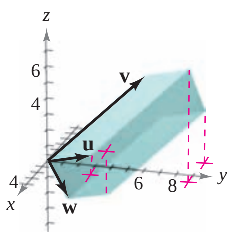
44. $\mathbf{u} = \langle 2, 0, 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 0, 2, 2\rangle$

Volumen **En los ejercicios 45 y 46, usar el triple producto escalar para encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas adyacentes u, v y w.**

45. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

46. $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 6, 6\rangle$, $\mathbf{w} = \langle -4, 0, -4\rangle$





Volumen **En los ejercicios 47 y 48, encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene vértices dados (ver las figuras).**

47. $(0, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 5, 1), (2, 0, 5)$
$(3, 5, 1), (5, 0, 5), (2, 5, 6), (5, 5, 6)$

48. $(0, 0, 0), (0, 4, 0), (-3, 0, 0), (-1, 1, 5)$
$(-3, 4, 0), (-1, 5, 5), (-4, 1, 5), (-4, 5, 5)$

49. Si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, ¿qué se puede concluir acerca de **u** y **v**?

50. Identificar los productos vectoriales que son iguales. Explicar el razonamiento. (Suponer que **u**, **v** y **w** son vectores distintos de cero.)

***a*)** $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ ***b*)** $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$

***c*)** $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ ***d*)** $(\mathbf{u} \times -\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$

***e*)** $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$ ***f*)** $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

***g*)** $(-\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ ***h*)** $(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

Desarrollo de conceptos

51. Definir el producto vectorial de los vectores **u** y **v**.

52. Dar las propiedades geométricas del producto vectorial.

53. Si las magnitudes de dos vectores se duplican, ¿cómo se modificará la magnitud del producto vectorial de los vectores? Explicar.

Para discusión

54. Los vértices de un triángulo en el espacio son (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3). Explicar cómo encontrar un vector perpendicular al triángulo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 55 a 58, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

55. Es posible encontrar el producto vectorial de dos vectores en un sistema de coordenadas bidimensional.

56. Si **u** y **v** son vectores en el espacio que son distintos de cero y no paralelos, entonces $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

57. Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

58. Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

En los ejercicios 59 a 66, demostrar la propiedad del producto vectorial.

59. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

60. $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$

61. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

62. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

63. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a **u** como a **v**.

64. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si **u** y **v** son múltiplos escalares uno del otro.

65. Demostrar que $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|$ si **u** y **v** son ortogonales.

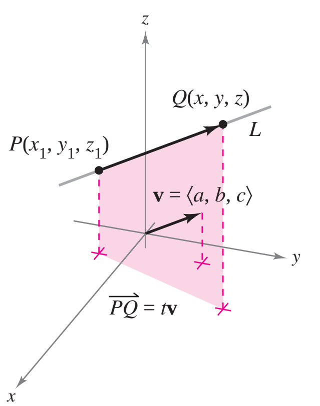
66. Demostrar que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$.

67. Demostrar el teorema 11.9.

11.5 Rectas y planos en el espacio

- Dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para una recta en el espacio.
- Dar una ecuación lineal para representar un plano en el espacio.
- Dibujar el plano dado por una ecuación lineal.
- Hallar las distancias entre puntos, planos y rectas en el espacio.

Rectas en el espacio



La recta L y su vector de dirección **v**
Figura 11.43

En el plano se usa la *pendiente* para determinar una ecuación de una recta. En el espacio es más conveniente usar *vectores* para determinar la ecuación de una recta.

En la figura 11.43 se considera la recta L a través del punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$. El vector **v** es un **vector de dirección** o director de la recta L, y a, b y c son los **números de dirección** (o directores). Una manera de describir la recta L es decir que consta de todos los puntos $Q(x, y, z)$ para los que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo a **v**. Esto significa que $\overrightarrow{PQ}$ es un múltiplo escalar de **v**, y se puede escribir a $\overrightarrow{PQ} = t\mathbf{v}$, donde t es un escalar (un número real).

$$\overrightarrow{PQ} = \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1\rangle = \langle at, bt, ct\rangle = t\mathbf{v}$$

Igualando los componentes correspondientes, se obtienen las **ecuaciones paramétricas** de una recta en el espacio.

TEOREMA 11.11 ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE UNA RECTA EN EL ESPACIO

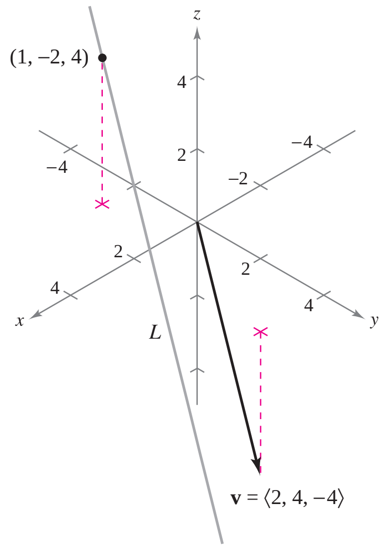
Una recta L paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ y que pasa por el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ se representa por medio de las **ecuaciones paramétricas**

$$x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt \quad \text{y} \quad z = z_1 + ct.$$

Si todos los números directores a, b y c son distintos de cero, se puede eliminar el parámetro t para obtener las **ecuaciones simétricas** (o cartesianas) de la recta.

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Ecuaciones simétricas.



El vector **v** es paralelo a la recta L
Figura 11.44

EJEMPLO 1 Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas

Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta L que pasa por el punto $(1, -2, 4)$ y es paralela a $\mathbf{v} = \langle 2, 4, -4\rangle$.

Solución Para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta, se usan las coordenadas $x_1 = 1$, $y_1 = -2$,y $z_1 = 4$, y los números de dirección $a = 2$, $b = 4$ y $c = -4$ (ver figura 11.44).

$$x = 1 + 2t, \quad y = -2 + 4t, \quad z = 4 - 4t$$

Ecuaciones paramétricas.

Como a, b y c son todos diferentes de cero, un conjunto de ecuaciones simétricas es

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 4}{-4}.$$

Ecuaciones simétricas.

Ni las ecuaciones paramétricas ni las ecuaciones simétricas de una recta dada son únicas. Así, en el ejemplo 1, tomando $t = 1$ en las ecuaciones paramétricas se obtiene el punto $(3, 2, 0)$. Usando este punto con los números de dirección $a = 2$, $b = 4$ y $c = -4$ se obtiene un conjunto diferente de ecuaciones paramétricas

$$x = 3 + 2t, \quad y = 2 + 4t \quad \text{y} \quad z = -4t.$$

EJEMPLO 2 Ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por dos puntos

Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $(-2, 1, 0)$ y $(1, 3, 5)$.

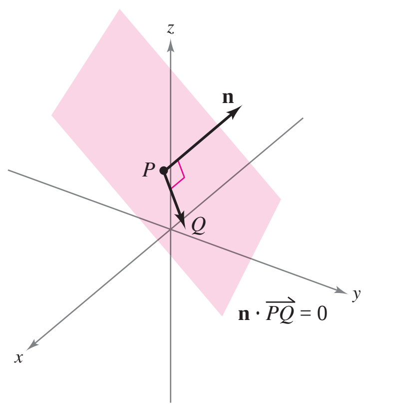
Solución Se empieza por usar los puntos $P(-2, 1, 0)$ y $Q(1, 3, 5)$ para hallar un vector de dirección de la recta que pasa por P y Q, dado por

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 1 - (-2), 3 - 1, 5 - 0\rangle = \langle 3, 2, 5\rangle = \langle a, b, c\rangle.$$

Usando los números de dirección $a = 3$, $b = 2$ y $c = 5$ junto con el punto $P(-2, 1, 0)$, se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = -2 + 3t, \quad y = 1 + 2t \quad \text{y} \quad z = 5t.$$

NOTA Como t varía sobre todos los números reales, las ecuaciones paramétricas del ejemplo 2 determinan los puntos (x, y, z) sobre la recta. En particular, hay que observar que $t = 0$ y $t = 1$ dan los puntos originales $(-2, 1, 0)$ y $(1, 3, 5)$. ■



El vector normal **n** es ortogonal a todo vector $\overrightarrow{PQ}$ en el plano
Figura 11.45

Planos en el espacio

Se ha visto cómo se puede obtener una ecuación de una recta en el espacio a partir de un punto sobre la recta y un vector *paralelo* a ella. Ahora se verá que una ecuación de un plano en el espacio se puede obtener a partir de un punto en el plano y de un vector *normal* (perpendicular) al plano.

Considerar el plano que contiene el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y que tiene un vector normal distinto de cero $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$, como se muestra en la figura 11.45. Este plano consta de todos los puntos $Q(x, y, z)$ para los cuales el vector $\overrightarrow{PQ}$ es ortogonal a $\mathbf{n}$. Usando el producto vectorial, se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0 \\ \langle a, b, c\rangle \cdot \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1\rangle &= 0 \\ a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) &= 0 \end{aligned}$$

La tercera ecuación del plano se dice que está en **forma canónica** o **estándar**.

TEOREMA 11.12 ECUACIÓN CANÓNICA O ESTÁNDAR DE UN PLANO EN EL ESPACIO

El plano que contiene el punto (x_1, y_1, z_1) y tiene un vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ puede representarse en **forma canónica** o **estándar**, por medio de la ecuación

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Reagrupando términos, se obtiene la **forma general** de la ecuación de un plano en el espacio.

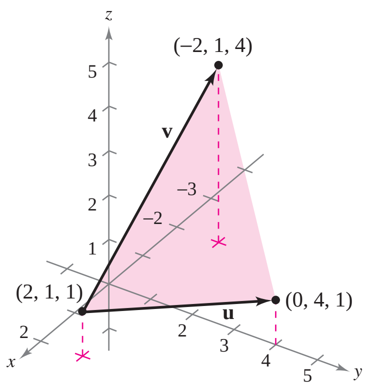
$$ax + by + cz + d = 0$$

Forma general de la ecuación de un plano en el espacio.

Dada la forma general de la ecuación de un plano, es fácil hallar un vector normal al plano. Simplemente se usan los coeficientes de x, y y z para escribir $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$.

EJEMPLO 3 Hallar una ecuación de un plano en el espacio tridimensional

Hallar la ecuación general del plano que contiene a los puntos $(2, 1, 1)$, $(0, 4, 1)$ y $(-2, 1, 4)$.



Un plano determinado por **u** y **v**
Figura 11.46

Solución Para aplicar el teorema 11.12 se necesita un punto en el plano y un vector que sea normal al plano. Hay tres opciones para el punto, pero no se da ningún vector normal. Para obtener un vector normal, se usa el producto vectorial de los vectores **u** y **v** que van del punto $(2, 1, 1)$ a los puntos $(0, 4, 1)$ y $(-2, 1, 4)$, como se muestra en la figura 11.46. Los vectores **u** y **v** dados mediante sus componentes son

$$\mathbf{u} = \langle 0-2, 4-1, 1-1\rangle = \langle -2, 3, 0\rangle$$
$$\mathbf{v} = \langle -2-2, 1-1, 4-1\rangle = \langle -4, 0, 3\rangle$$

así que

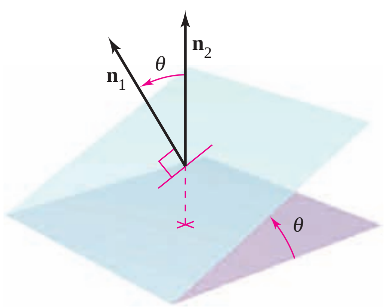
$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{u}\times\mathbf{v}\\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -2 & 3 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{vmatrix}\\ &= 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}\\ &= \langle a, b, c\rangle\end{aligned}$$

es normal al plano dado. Usando los números de dirección para **n** y el punto $(x_1, y_1, z_1) = (2, 1, 1)$, se puede determinar que una ecuación del plano es

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$
$$9(x-2) + 6(y-1) + 12(z-1) = 0 \qquad \text{Forma canónica o estándar.}$$
$$9x + 6y + 12z - 36 = 0 \qquad \text{Forma general.}$$
$$3x + 2y + 4z - 12 = 0. \qquad \text{Forma general simplificada.}$$

NOTA En el ejemplo 3, verificar que cada uno de los tres puntos originales satisfacen la ecuación $3x + 2y + 4z - 12 = 0$. ■

Dos planos distintos en el espacio tridimensional o son paralelos o se cortan en una recta. Si se cortan, se puede determinar el ángulo $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ entre ellos a partir del ángulo entre sus vectores normales, como se muestra en la figura 11.47. Específicamente, si los vectores $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son normales a dos planos que se cortan, el ángulo θ entre los vectores normales es igual al ángulo entre los dos planos y está dado por



Ángulo θ entre dos planos
Figura 11.47

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\|\,\|\mathbf{n}_2\|}. \qquad \text{Ángulo entre dos planos.}$$

Por consiguiente, dos planos con vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son

1. *perpendiculares* si $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$.
2. *paralelos* si $\mathbf{n}_1$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{n}_2$.

EJEMPLO 4 Hallar la recta de intersección de dos planos

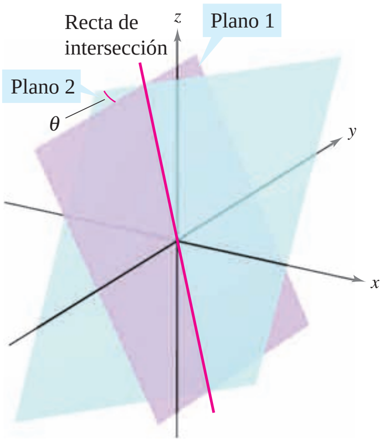


Figura 11.48

Hallar el ángulo entre los dos planos dados por

$$x - 2y + z = 0 \qquad \text{Ecuación de plano 1.}$$

$$2x + 3y - 2z = 0 \qquad \text{Ecuación de plano 2.}$$

y hallar las ecuaciones paramétricas de su recta de intersección (ver figura 11.48).

Solución Los vectores normales a los planos son $\mathbf{n}_1 = \langle 1, -2, 1\rangle$ y $\mathbf{n}_2 = \langle 2, 3, -2\rangle$. Por consiguiente, el ángulo entre los dos planos está determinado como sigue.

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\|\,\|\mathbf{n}_2\|} \qquad \text{Coseno del ángulo entre } \mathbf{n}_1 \text{ y } \mathbf{n}_2.\\ &= \frac{|-6|}{\sqrt{6}\,\sqrt{17}}\\ &= \frac{6}{\sqrt{102}}\\ &\approx 0.59409\end{aligned}$$

Esto implica que el ángulo entre los dos planos es $\theta \approx 53.55°$. La recta de intersección de los dos planos se puede hallar resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones lineales que representan a los planos. Una manera de hacer esto es multiplicar la primera ecuación por -2 y sumar el resultado a la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 &\Rightarrow\quad -2x + 4y - 2z &= 0\\ 2x + 3y - 2z &= 0 & \underline{2x + 3y - 2z} &\underline{= 0}\\ & & 7y - 4z &= 0 \quad\Rightarrow\quad y = \frac{4z}{7}\end{aligned}$$

Sustituyendo $y = 4z/7$ en una de las ecuaciones originales, se determina que $x = z/7$. Finalmente, haciendo $t = z/7$, se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = 4t \quad \text{y} \quad z = 7t \qquad \text{Recta de intersección.}$$

lo cual indica que 1, 4 y 7 son los números de dirección de la recta de intersección.

Hay que observar que los números de dirección del ejemplo 4 se pueden obtener a partir del producto vectorial de los dos vectores normales como sigue.

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} -2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\mathbf{k}\\ &= \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}\end{aligned}$$

Esto significa que la recta de intersección de los dos planos es paralela al producto vectorial de sus vectores normales.

Trazado de planos en el espacio

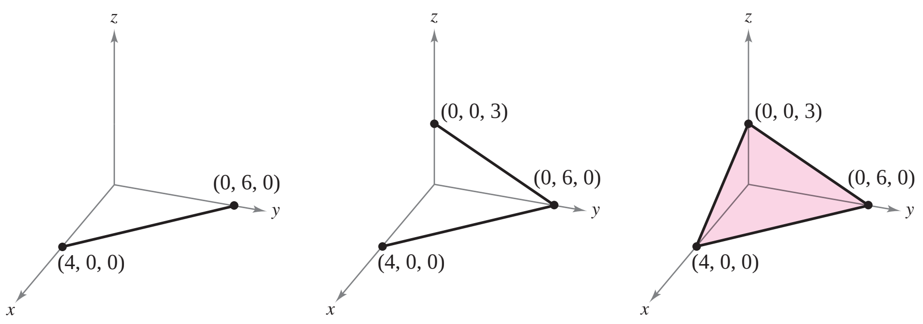
Si un plano en el espacio corta uno de los planos coordenados, a la recta de intersección se le llama la **traza** del plano dado en el plano coordenado. Para dibujar un plano en el espacio, es útil hallar sus puntos de intersección con los ejes coordenados y sus trazas en los planos coordenados. Por ejemplo, considerar el plano dado por

$$3x + 2y + 4z = 12. \qquad \text{Ecuación del plano.}$$

Se puede hallar la traza xy, haciendo $z = 0$ y dibujando la recta

$$3x + 2y = 12 \qquad \text{Traza } xy\text{-}$$

en el plano xy. Esta recta corta el eje x en $(4, 0, 0)$ y el eje y en $(0, 6, 0)$. En la figura 11.49 se continúa con este proceso encontrando la traza yz y la traza xz, y sombreando la región triangular que se encuentra en el primer octante.



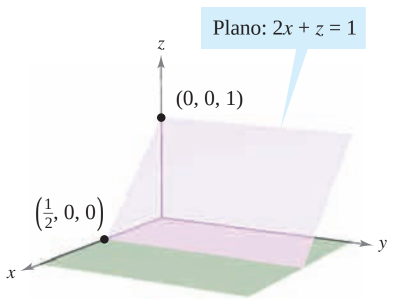
traza xy $(z = 0)$: $3x + 2y = 12$

traza yz $(x = 0)$: $2y + 4z = 12$

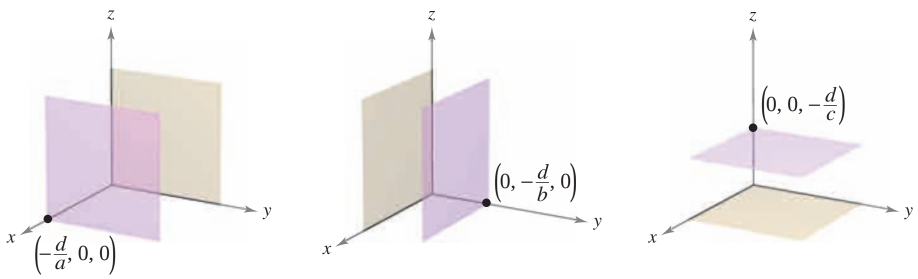
traza xz $(y = 0)$: $3x + 4z = 12$

Trazas del plano $3x + 2y + 4z = 12$
Figura 11.49

Si en una ecuación de un plano está ausente una variable, como en la ecuación $2x + z = 1$, el plano debe ser *paralelo al eje* correspondiente a la variable ausente, como se muestra en la figura 11.50. Si en la ecuación de un plano faltan dos variables, éste es *paralelo al plano coordenado* correspondiente a las variables ausentes, como se muestra en la figura 11.51.



El plano $2x + z = 1$ es paralelo al eje y
Figura 11.50



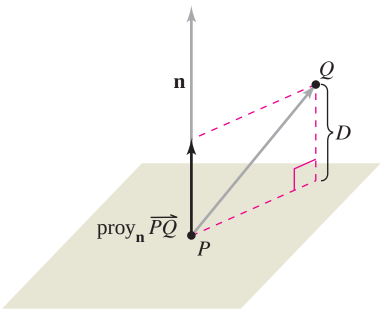
El plano $ax + d = 0$ es paralelo al plano yz

El plano $by + d = 0$ es paralelo al plano xz

El plano $cz + d = 0$ es paralelo al plano xy

Figura 11.51

Distancias entre puntos, planos y rectas



$D = \|\text{proy}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ}\|$

La distancia de un punto a un plano
Figura 11.52

Esta sección concluye con el análisis de dos tipos básicos de problemas sobre distancias en el espacio.

1. Calcular la distancia de un punto a un plano.
2. Calcular la distancia de un punto a una recta.

Las soluciones de estos problemas ilustran la versatilidad y utilidad de los vectores en la geometría analítica: el primer problema usa el *producto escalar* de dos vectores, y el segundo problema usa el *producto vectorial*.

La distancia D de un punto Q a un plano es la longitud del segmento de recta más corto que une a Q con el plano, como se muestra en la figura 11.52. Si P es un punto *cualquiera* del plano, esta distancia se puede hallar proyectando el vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre el vector normal $\mathbf{n}$. La longitud de esta proyección es la distancia buscada.

TEOREMA 11.13 DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

La distancia de un punto a un plano Q (no en el plano) es

$$D = \|\text{proy}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ}\| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

donde P es un punto en el plano y $\mathbf{n}$ es normal al plano.

Para encontrar un punto en el plano dado por $ax + by + cz + d = 0$ $(a \neq 0)$, se hace $y = 0$ y $z = 0$. Entonces, de la ecuación $ax + d = 0$, se puede concluir que el punto $(-d/a, 0, 0)$ está en el plano.

EJEMPLO 5 Calcular la distancia de un punto a un plano

Calcular la distancia del punto $Q(1, 5, -4)$ al plano dado por

$$3x - y + 2z = 6.$$

Solución Se sabe que $\mathbf{n} = \langle 3, -1, 2\rangle$ es normal al plano dado. Para hallar un punto en el plano, se hace $y = 0$ y $z = 0$, y se obtiene el punto $P(2, 0, 0)$. El vector que va de P a Q está dado por

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \langle 1 - 2, 5 - 0, -4 - 0\rangle \\ &= \langle -1, 5, -4\rangle.\end{aligned}$$

Usando la fórmula para la distancia dada en el teorema 11.13 se tiene

$$\begin{aligned}D = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} &= \frac{|\langle -1, 5, -4\rangle \cdot \langle 3, -1, 2\rangle|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} \qquad \text{Distancia de un punto a un plano.} \\ &= \frac{|-3 - 5 - 8|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{16}{\sqrt{14}}.\end{aligned}$$

NOTA El punto P que se eligió en el ejemplo 5 es arbitrario. Seleccionar un punto diferente en el plano para verificar que se obtiene la misma distancia.

Del teorema 11.13 se puede determinar que la distancia del punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ al plano dado por $ax + by + cz + d = 0$ es

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

o

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

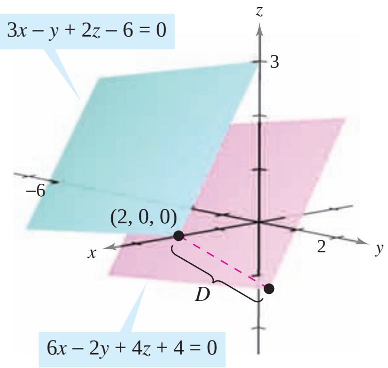
Distancia de un punto a un plano.

donde $P(x_1, y_1, z_1)$ es un punto en el plano y $d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$.

EJEMPLO 6 Encontrar la distancia entre dos planos paralelos

Encontrar la distancia entre los dos planos paralelos dados por

$$3x - y + 2z - 6 = 0 \quad \text{y} \quad 6x - 2y + 4z + 4 = 0.$$



La distancia entre los planos paralelos es aproximadamente 2.14
Figura 11.53

Solución Los dos planos se muestran en la figura 11.53. Para hallar la distancia entre los planos, elegir un punto en el primer plano, digamos $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 0)$. Después, del segundo plano, se puede determinar que $a = 6$, $b = -2$, $c = 4$ y $d = 4$, y concluir que la distancia es

$$\begin{aligned} D &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|6(2) + (-2)(0) + (4)(0) + 4|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 4^2}} \\ &= \frac{16}{\sqrt{56}} = \frac{8}{\sqrt{14}} \approx 2.14. \end{aligned}$$

Distancia de un punto a un plano.

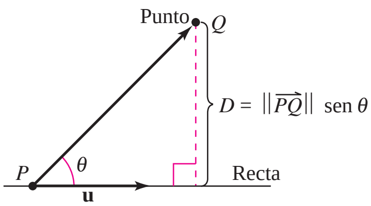
La fórmula para la distancia de un punto a una recta en el espacio se parece a la de la distancia de un punto a un plano, excepto que se reemplaza el producto vectorial por la magnitud del producto vectorial y el vector normal **n** por un vector de dirección para la recta.

TEOREMA 11.14 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN EL ESPACIO

La distancia de un punto Q a una recta en el espacio está dada por

$$D = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

donde **u** es un vector de dirección para la recta y P es un punto sobre la recta.



Distancia de un punto a una recta
Figura 11.54

DEMOSTRACIÓN En la figura 11.54, sea D la distancia del punto Q a la recta dada. Entonces $D = \|\overrightarrow{PQ}\| \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre **u** y $\overrightarrow{PQ}$. Por el teorema 11.8, se tiene

$$\|\mathbf{u}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\| \operatorname{sen}\theta = \|\mathbf{u} \times \overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u}\|.$$

Por consiguiente,

$$D = \|\overrightarrow{PQ}\| \operatorname{sen}\theta = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

EJEMPLO 7 Hallar la distancia de un punto a una recta

Hallar la distancia del punto $Q(3, -1, 4)$ a la recta dada por

$$x = -2 + 3t, \quad y = -2t \quad \text{y} \quad z = 1 + 4t.$$

Solución Usando los números de dirección 3, -2 y 4, se sabe que un vector de dirección de la recta es

$$\mathbf{u} = \langle 3, -2, 4 \rangle. \qquad \text{Vector de dirección de la recta.}$$

Para determinar un punto en la recta, se hace $t = 0$ y se obtiene

$$P = (-2, 0, 1). \qquad \text{Punto sobre la recta.}$$

Así,

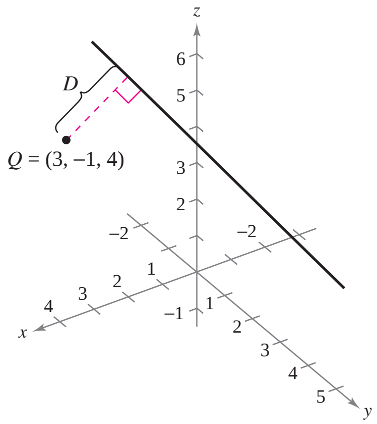
$$\overrightarrow{PQ} = \langle 3 - (-2), -1 - 0, 4 - 1 \rangle = \langle 5, -1, 3 \rangle$$

y se puede formar el producto vectorial

$$\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = \langle 2, -11, -7 \rangle.$$

Por último, usando el teorema 11.14, se encuentra que la distancia es

$$D = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6} \approx 2.45. \qquad \text{Ver figura 11.55.}$$

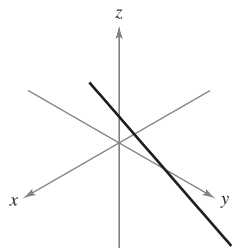


La distancia del punto Q a la recta es $\sqrt{6} \approx 2.45$
Figura 11.55

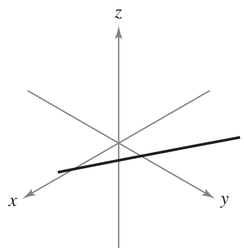
11-5 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, la figura muestra la gráfica de una recta dada por las ecuaciones paramétricas. *a*) Dibujar una flecha sobre la recta para indicar su dirección. *b*) Hallar las coordenadas de dos puntos, *P* y *Q*, en la recta. Determinar el vector $\overrightarrow{PQ}$. ¿Cuál es la relación entre las componentes del vector y los coeficientes de *t* en las ecuaciones paramétricas? ¿Cuál es la razón de esta relación? *c*) Determinar las coordenadas de todos los puntos de intersección con los planos coordenados. Si la recta no corta a uno de los planos coordenados, explicar por qué.

1. $x = 1 + 3t$
$y = 2 - t$
$z = 2 + 5t$



2. $x = 2 - 3t$
$y = 2$
$z = 1 - t$



En los ejercicios 3 y 4, determinar si cada punto yace sobre la recta.

3. $x = -2 + t,\ y = 3t,\ z = 4 + t$
a) $(0, 6, 6)$ *b*) $(2, 3, 5)$

4. $\dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y - 7}{8} = z + 2$
a) $(7, 23, 0)$ *b*) $(1, -1, -3)$

En los ejercicios 5 a 10, hallar conjuntos de *a*) ecuaciones paramétricas y *b*) ecuaciones simétricas de la recta por el punto paralela al vector o recta dado (si es posible). (Para cada recta, escribir los números de dirección como enteros.)

	Punto	*Paralela a*
5.	$(0, 0, 0)$	$\mathbf{v} = \langle 3, 1, 5 \rangle$
6.	$(0, 0, 0)$	$\mathbf{v} = \left\langle -2, \frac{5}{2}, 1 \right\rangle$
7.	$(-2, 0, 3)$	$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
8.	$(-3, 0, 2)$	$\mathbf{v} = 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
9.	$(1, 0, 1)$	$x = 3 + 3t,\ y = 5 - 2t,\ z = -7 + t$
10.	$(-3, 5, 4)$	$\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y + 1}{-2} = z - 3$

En los ejercicios 11 a 14, hallar conjuntos de *a*) ecuaciones paramétricas y *b*) ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los dos puntos (si es posible). (Para cada recta, escribir los números de dirección como enteros.)

11. $(5, -3, -2), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ **12.** $(0, 4, 3), (-1, 2, 5)$

13. $(7, -2, 6), (-3, 0, 6)$ **14.** $(0, 0, 25), (10, 10, 0)$

En los ejercicios 15 a 22, hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta.

15. La recta pasa por el punto $(2, 3, 4)$ y es paralela al plano xz y al plano yz.

16. La recta pasa por el punto $(-4, 5, 2)$ y es paralela al plano xy y al plano yz.

17. La recta pasa por el punto $(2, 3, 4)$ y es perpendicular al plano dado por $3x + 2y - z = 6$.

18. La recta pasa por el punto $(-4, 5, 2)$ y es perpendicular al plano dado por $-x + 2y + z = 5$.

19. La recta pasa por el punto $(5, -3, -4)$ y es paralela a $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 3 \rangle$.

20. La recta pasa por el punto $(-1, 4, -3)$ y es paralela a $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

21. La recta pasa por el punto $(2, 1, 2)$ y es paralela a la recta $x = -t, y = 1 + t, z = -2 + t$.

22. La recta pasa por el punto $(-6, 0, 8)$ y es paralela a la recta $x = 5 - 2t, y = -4 + 2t, z = 0$.

En los ejercicios 23 a 26, hallar las coordenadas de un punto *P* sobre la recta y un vector v paralelo a la recta.

23. $x = 3 - t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = -2$

24. $x = 4t, \quad y = 5 - t, \quad z = 4 + 3t$

25. $\dfrac{x - 7}{4} = \dfrac{y + 6}{2} = z + 2$ **26.** $\dfrac{x + 3}{5} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z - 3}{6}$

En los ejercicios 27 a 30, determinar si algunas de las rectas son paralelas o idénticas.

27. L_1: $x = 6 - 3t, \quad y = -2 + 2t, \quad z = 5 + 4t$

L_2: $x = 6t, \quad y = 2 - 4t, \quad z = 13 - 8t$

L_3: $x = 10 - 6t, \quad y = 3 + 4t, \quad z = 7 + 8t$

L_4: $x = -4 + 6t, \quad y = 3 + 4t, \quad z = 5 - 6t$

28. L_1: $x = 3 + 2t, \quad y = -6t, \quad z = 1 - 2t$

L_2: $x = 1 + 2t, \quad y = -1 - t, \quad z = 3t$

L_3: $x = -1 + 2t, \quad y = 3 - 10t, \quad z = 1 - 4t$

L_4: $x = 5 + 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 8 + 3t$

29. L_1: $\dfrac{x - 8}{4} = \dfrac{y + 5}{-2} = \dfrac{z + 9}{3}$

L_2: $\dfrac{x + 7}{2} = \dfrac{y - 4}{1} = \dfrac{z + 6}{5}$

L_3: $\dfrac{x + 4}{-8} = \dfrac{y - 1}{4} = \dfrac{z + 18}{-6}$

L_4: $\dfrac{x - 2}{-2} = \dfrac{y + 3}{1} = \dfrac{z - 4}{1.5}$

30. L_1: $\dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y - 2}{1} = \dfrac{z + 2}{2}$

L_2: $\dfrac{x - 1}{4} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z + 3}{4}$

L_3: $\dfrac{x + 2}{1} = \dfrac{y - 1}{0.5} = \dfrac{z - 3}{1}$

L_4: $\dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y + 1}{4} = \dfrac{z - 2}{-1}$

En los ejercicios 31 a 34, determinar si las rectas se cortan, y si es así, hallar el punto de intersección y el coseno del ángulo de intersección.

31. $x = 4t + 2, \quad y = 3, \quad z = -t + 1$

$x = 2s + 2, \quad y = 2s + 3, \quad z = s + 1$

32. $x = -3t + 1, y = 4t + 1, z = 2t + 4$

$x = 3s + 1, y = 2s + 4, z = -s + 1$

33. $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y - 2}{-1} = z + 1, \quad \dfrac{x - 1}{4} = y + 2 = \dfrac{z + 3}{-3}$

34. $\dfrac{x - 2}{-3} = \dfrac{y - 2}{6} = z - 3, \quad \dfrac{x - 3}{2} = y + 5 = \dfrac{z + 2}{4}$

CAS **En los ejercicios 35 y 36, usar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente el par de rectas que se cortan y hallar el punto de intersección.**

35. $x = 2t + 3, y = 5t - 2, z = -t + 1$

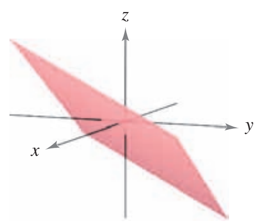
$x = -2s + 7, y = s + 8, z = 2s - 1$

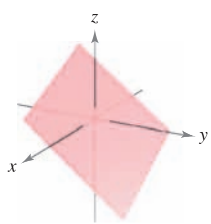
36. $x = 2t - 1, y = -4t + 10, z = t$

$x = -5s - 12, y = 3s + 11, z = -2s - 4$

Producto vectorial **En los ejercicios 37 y 38, *a*) hallar las coordenadas de tres puntos *P*, *Q* y *R* en el plano, y determinar los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$. *b*) Hallar $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. ¿Cuál es la relación entre las componentes del producto vectorial y los coeficientes de la ecuación del plano? ¿Cuál es la razón?**

37. $4x - 3y - 6z = 6$ **38.** $2x + 3y + 4z = 4$





En los ejercicios 39 y 40, determinar si el plano pasa por cada punto.

39. $x + 2y - 4z - 1 = 0$

a) $(-7, 2, -1)$ *b*) $(5, 2, 2)$

40. $2x + y + 3z - 6 = 0$

a) $(3, 6, -2)$ *b*) $(-1, 5, -1)$

En los ejercicios 41 a 46, hallar una ecuación del plano que pasa por el punto y es perpendicular al vector o recta dado.

	Punto	*Perpendicular a*
41.	$(1, 3, -7)$	$\mathbf{n} = \mathbf{j}$
42.	$(0, -1, 4)$	$\mathbf{n} = \mathbf{k}$
43.	$(3, 2, 2)$	$\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
44.	$(0, 0, 0)$	$\mathbf{n} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$
45.	$(-1, 4, 0)$	$x = -1 + 2t, y = 5 - t, z = 3 - 2t$
46.	$(3, 2, 2)$	$\dfrac{x-1}{4} = y + 2 = \dfrac{z+3}{-3}$

En los ejercicios 47 a 58, hallar una ecuación del plano.

47. El plano que pasa por (0, 0, 0), (2, 0, 3) y (−3, –1, 5).

48. El plano que pasa por (3, –1, 2), (2, 1, 5) y (1,−2, –2).

49. El plano que pasa por (1, 2, 3), (3, 2, 1) y (−1, −2, 2).

50. El plano que pasa por el punto (1, 2, 3) y es paralelo al plano yz.

51. El plano que pasa por el punto (1, 2, 3) y es paralelo al plano xy.

52. El plano contiene el eje y y forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje x positivo.

53. El plano contiene las rectas dadas por

$$\frac{x-1}{-2} = y - 4 = z \quad \text{y} \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}.$$

54. El plano pasa por el punto (2, 2, 1) y contiene la recta dada por

$$\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-1} = z.$$

55. El plano pasa por los puntos (2, 2, 1) y (−1, 1, −1) y es perpendicular al plano $2x - 3y + z = 3$.

56. El plano pasa por los puntos (3, 2, 1) y (3, 1, −5) y es perpendicular al plano $6x + 7y + 2z = 10$.

57. El plano pasa por los puntos (1, −2, −1) y (2, 5, 6) y es paralelo al eje x.

58. El plano pasa por los puntos (4, 2, 1) y (−3, 5, 7) y es paralelo al eje z.

En los ejercicios 59 y 60, representar gráficamente la recta y hallar los puntos de intersección (si los hay) de la recta con los planos *xy*, *xz* y *yz*.

59. $x = 1 - 2t, \quad y = -2 + 3t, \quad z = -4 + t$

60. $\dfrac{x-2}{3} = y + 1 = \dfrac{z-3}{2}$

En los ejercicios 61 a 64, hallar una ecuación del plano que contiene todos los puntos equidistantes de los puntos dados

61. (2, 2, 0), (0, 2, 2)

62. (1, 0, 2), (2, 0, 1)

63. (−3, 1, 2), (6, −2, 4)

64. (−5, 1, −3), (2, −1, 6)

En los ejercicios 65 a 70, determinar si los planos son paralelos, ortogonales, o ninguna de las dos cosas. Si no son ni paralelos ni ortogonales, hallar el ángulo de intersección.

65. $5x - 3y + z = 4$, $x + 4y + 7z = 1$

66. $3x + y - 4z = 3$, $-9x - 3y + 12z = 4$

67. $x - 3y + 6z = 4$, $5x + y - z = 4$

68. $3x + 2y - z = 7$, $x - 4y + 2z = 0$

69. $x - 5y - z = 1$, $5x - 25y - 5z = -3$

70. $2x - z = 1$, $4x + y + 8z = 10$

En los ejercicios 71 a 78, marcar toda intersección y dibujar la gráfica del plano.

71. $4x + 2y + 6z = 12$

72. $3x + 6y + 2z = 6$

73. $2x - y + 3z = 4$

74. $2x - y + z = 4$

75. $x + z = 6$

76. $2x + y = 8$

77. $x = 5$

78. $z = 8$

CAS **En los ejercicios 79 a 82, usar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente el plano.**

79. $2x + y - z = 6$

80. $x - 3z = 3$

81. $-5x + 4y - 6z = -8$

82. $2.1x - 4.7y - z = -3$

En los ejercicios 83 a 86, determinar si algunos de los planos son paralelos o idénticos.

83. P_1: $15x - 6y + 24z = 17$
P_2: $-5x + 2y - 8z = 6$
P_3: $6x - 4y + 4z = 9$
P_4: $3x - 2y - 2z = 4$

84. P_1: $2x - y + 3z = 8$
P_2: $3x - 5y - 2z = 6$
P_3: $8x - 4y + 12z = 5$
P_4: $-4x - 2y + 6z = 11$

85. P_1: $3x - 2y + 5z = 10$
P_2: $-6x + 4y - 10z = 5$
P_3: $-3x + 2y + 5z = 8$
P_4: $75x - 50y + 125z = 250$

86. P_1: $-60x + 90y + 30z = 27$
P_2: $6x - 9y - 3z = 2$
P_3: $-20x + 30y + 10z = 9$
P_4: $12x - 18y + 6z = 5$

En los ejercicios 87 a 90, describir a la familia de planos representada por la ecuación, donde *c* es cualquier número real.

87. $x + y + z = c$

88. $x + y = c$

89. $cy + z = 0$

90. $x + cz = 0$

En los ejercicios 91 y 92, *a*) encontrar el ángulo entre los dos planos y *b*) hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos.

91. $3x + 2y - z = 7$, $x - 4y + 2z = 0$

92. $6x - 3y + z = 5$, $-x + y + 5z = 5$

En los ejercicios 93 a 96, hallar el o los puntos de intersección (si los hay) del plano y la recta. Investigar además si la recta se halla en el plano.

93. $2x - 2y + z = 12, \quad x - \frac{1}{2} = \frac{y + (3/2)}{-1} = \frac{z + 1}{2}$

94. $2x + 3y = -5, \quad \frac{x - 1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z - 3}{6}$

95. $2x + 3y = 10, \quad \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 1}{-2} = z - 3$

96. $5x + 3y = 17, \quad \frac{x - 4}{2} = \frac{y + 1}{-3} = \frac{z + 2}{5}$

En los ejercicios 97 a 100, hallar la distancia del punto al plano.

97. $(0, 0, 0)$
$2x + 3y + z = 12$

98. $(0, 0, 0)$
$5x + y - z = 9$

99. $(2, 8, 4)$
$2x + y + z = 5$

100. $(1, 3, -1)$
$3x - 4y + 5z = 6$

En los ejercicios 101 a 104, verificar que los dos planos son paralelos, y hallar la distancia entre ellos.

101. $x - 3y + 4z = 10$
$x - 3y + 4z = 6$

102. $4x - 4y + 9z = 7$
$4x - 4y + 9z = 18$

103. $-3x + 6y + 7z = 1$
$6x - 12y - 14z = 25$

104. $2x - 4z = 4$
$2x - 4z = 10$

En los ejercicios 105 a 108, hallar la distancia del punto a la recta dada por medio del conjunto de ecuaciones paramétricas.

105. $(1, 5, -2); \quad x = 4t - 2, \quad y = 3, \quad z = -t + 1$

106. $(1, -2, 4); \quad x = 2t, \quad y = t - 3, \quad z = 2t + 2$

107. $(-2, 1, 3); \quad x = 1 - t, \quad y = 2 + t, \quad z = -2t$

108. $(4, -1, 5); \quad x = 3, \quad y = 1 + 3t, \quad z = 1 + t$

En los ejercicios 109 y 110, verificar que las rectas son paralelas y hallar la distancia entre ellas.

109. L_1: $x = 2 - t, \quad y = 3 + 2t, \quad z = 4 + t$
L_2: $x = 3t, \quad y = 1 - 6t, \quad z = 4 - 3t$

110. L_1: $x = 3 + 6t, \quad y = -2 + 9t, \quad z = 1 - 12t$
L_2: $x = -1 + 4t, \quad y = 3 + 6t, \quad z = -8t$

Desarrollo de conceptos

111. Dar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de una recta en el espacio. Describir qué se requiere para hallar estas ecuaciones.

112. Dar la ecuación estándar de un plano en el espacio. Describir qué se requiere para hallar esta ecuación.

113. Describir un método de hallar la recta de intersección entre dos planos.

114. Describir toda superficie dada por las ecuaciones $x = a$, $y = b$ y $z = c$.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

115. Describir un método para determinar cuándo dos planos

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ y } a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

son *a*) paralelos y *b*) perpendiculares. Explicar el razonamiento.

116. Sean L_1 y L_2 rectas no paralelas que no se cortan. ¿Es posible hallar un vector **v** distinto de cero tal que **v** sea perpendicular a ambos L_1 y L_2? Explicar el razonamiento.

117. Hallar una ecuación del plano con intersección en x $(a, 0, 0)$, intersección en y $(0, b, 0)$ e intersección en z $(0, 0, c)$. (Suponer que a, b y c son distintos de cero.)

Para discusión

118. Encontrar la correspondencia entre la ecuación o conjunto de ecuaciones que cumple con la descripción indicada.

a) Conjunto de ecuaciones paramétricas de una recta

b) Conjunto de ecuaciones simétricas de una recta

c) Ecuación estándar de un plano en el espacio

d) Forma general de la ecuación de un plano en el espacio

i) $(x - 6)/2 = (y + 1)/-3 = z/1$

ii) $2x - 7y + 5z + 10 = 0$

iii) $x = 4 + 7t, y = 3 + t, z = 3 - 3t$

iv) $2(x - 1) + (y + 3) - 4(z - 5) = 0$

119. Describir y hallar una ecuación para la superficie generada por todos los puntos (x, y, z) que están a cuatro unidades del punto $(3, -2, 5)$.

120. Describir y hallar una ecuación para la superficie generada por todos los puntos (x, y, z) que están a cuatro unidades del plano $4x - 3y + z = 10$.

121. ***Modelado matemático*** Los consumos per cápita (en galones) de diferentes tipos de leche en Estados Unidos desde 1999 hasta 2005 se muestran en la tabla. El consumo de leche descremada y semidescremada, leche reducida en grasas y la leche entera se representa por las variables x, y y z, respectivamente. (*Fuente: U.S. Department of Agriculture*)

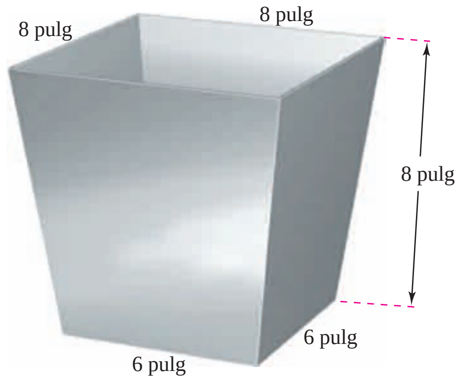
Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
x	1.4	1.4	1.4	1.6	1.6	1.7	1.7
y	7.3	7.1	7.0	7.0	6.9	6.9	6.9
z	6.2	6.1	5.9	5.8	5.6	5.5	5.6

Un modelo para los datos está dado por $0.92x - 1.03y + z = 0.02$.

a) Hacer un cuarto renglón de la tabla usando el modelo para aproximar z con los valores dados de x y y. Comparar las aproximaciones con los valores reales de z.

b) Según este modelo, cualquier incremento en el consumo de dos tipos de leche tendrá ¿qué efecto en el consumo del tercer tipo?

122. ***Diseño industrial*** Un colector en la parte superior de un montacargas de grano canaliza el grano a un contenedor. Hallar el ángulo entre dos lados adyacentes.



123. ***Distancia*** Dos insectos se arrastran a lo largo de rectas diferentes en el espacio. En el instante t (en minutos), el primer insecto está en el punto (x, y, z) sobre la recta $x = 6 + t$, $y = 8 - t$, $z = 3 + t$. También, en el instante t, el segundo insecto está en el punto (x, y, z) sobre la recta $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 2t$.

Suponer que las distancias se dan en pulgadas.

a) Hallar la distancia entre los dos insectos en el instante $t = 0$.

b) Usar una herramienta de graficación para representar la distancia entre los insectos desde $t = 0$ hasta $t = 10$.

c) Usando la gráfica del inciso *b*), ¿qué se puede concluir acerca de la distancia entre los insectos?

d) ¿Qué tanto se acercan los insectos?

124. Hallar la ecuación estándar de la esfera con el centro en $(-3, 2, 4)$ que es tangente al plano dado por $2x + 4y - 3z = 8$.

125. Hallar el punto de intersección del plano $3x - y + 4z = 7$ con la recta que pasa por $(5, 4, -3)$ y que es perpendicular a este plano.

126. Mostrar que el plano $2x - y - 3z = 4$ es paralelo a la recta $x = -2 + 2t$, $y = -1 + 4t$, $z = 4$, y hallar la distancia entre ambos.

127. Hallar el punto de intersección de la recta que pasa por $(1, -3, 1)$ y $(3, -4, 2)$, y el plano dado por $x - y + z = 2$.

128. Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(1, 0, 2)$ y es paralela al plano dado por $x + y + z = 5$, y perpendicular a la recta $x = t$, $y = 1 + t$, $z = 1 + t$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 129 a 134, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que pruebe que es falsa.**

129. Si $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ es cualquier vector en el plano dado por $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, entonces $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

130. Todo par de rectas en el espacio o se cortan o son paralelas.

131. Dos planos en el espacio o se cortan o son paralelos.

132. Si dos rectas L_1 y L_2 son paralelas a un plano P, entonces L_1 y L_2 son paralelas.

133. Dos planos perpendiculares a un tercer plano en el espacio son paralelos.

134. Un plano y una recta en el espacio se intersecan o son paralelos.

PROYECTO DE TRABAJO

Distancias en el espacio

En esta sección se han visto dos fórmulas para distancia, la distancia de un punto a un plano, y la distancia de un punto a una recta. En este proyecto se estudiará un tercer problema de distancias, la distancia de dos rectas que se cruzan. Dos rectas en el espacio *son oblicuas* si no son paralelas ni se cortan (ver la figura).

a) Considerar las siguientes dos rectas en el espacio.

L_1: $x = 4 + 5t$, $y = 5 + 5t$, $z = 1 - 4t$

L_2: $x = 4 + s$, $y = -6 + 8s$, $z = 7 - 3s$

i) Mostrar que estas rectas no son paralelas.

ii) Mostrar que estas rectas no se cortan, y por consiguiente las rectas se cruzan.

iii) Mostrar que las dos rectas están en planos paralelos.

iv) Hallar la distancia entre los planos paralelos del inciso *iii*). Ésta es la distancia entre las rectas que se cruzan originales.

b) Usar el procedimiento del inciso *a*) para encontrar la distancia entre las rectas.

L_1: $x = 2t$, $y = 4t$, $z = 6t$

L_2: $x = 1 - s$, $y = 4 + s$, $z = -1 + s$

c) Usar el procedimiento del inciso *a*) para encontrar la distancia entre las rectas.

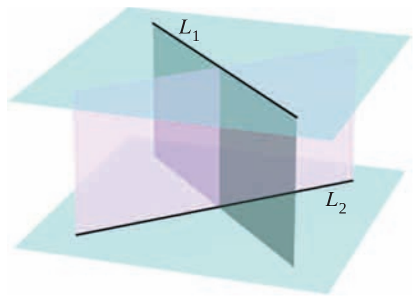
L_1: $x = 3t$, $y = 2 - t$, $z = -1 + t$

L_2: $x = 1 + 4s$, $y = -2 + s$, $z = -3 - 3s$

d) Desarrollar una fórmula para encontrar la distancia de las rectas oblicuas.

L_1: $x = x_1 + a_1t$, $y = y_1 + b_1t$, $z = z_1 + c_1t$

L_2: $x = x_2 + a_2s$, $y = y_2 + b_2s$, $z = z_2 + c_2s$



11.6 Superficies en el espacio

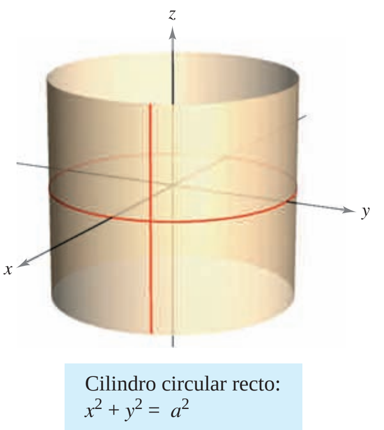
- Reconocer y dar las ecuaciones de superficies cilíndricas.
- Reconocer y dar las ecuaciones de superficies cuádricas.
- Reconocer y dar las ecuaciones de superficies de revolución.

Superficies cilíndricas

Las primeras cinco secciones de este capítulo contienen la parte vectorial de los conocimientos preliminares necesarios para el estudio del cálculo vectorial y del cálculo en el espacio. En ésta y en la próxima sección, se estudian superficies en el espacio y sistemas alternativos de coordenadas para el espacio. Ya se han estudiado dos tipos especiales de superficies.

1. Esferas: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ Sección 11.2.
2. Planos: $ax + by + cz + d = 0$ Sección 11.5.

Un tercer tipo de superficie en el espacio son las llamadas **superficies cilíndricas**, o simplemente **cilindros**. Para definir un cilindro, considerar el familiar cilindro circular recto mostrado en la figura 11.56. Se puede imaginar que este cilindro es generado por una recta vertical que se mueve alrededor del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ que se encuentra en el plano xy. A este círculo se le llama **curva directriz** (o **curva generadora**).

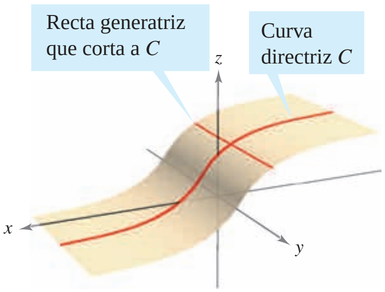


Las rectas generatrices son paralelas al eje z
Figura 11.56

DEFINICIÓN DE UN CILINDRO

Sea C una curva en un plano y sea L una recta no paralela a ese plano. Al conjunto de todas las rectas paralelas a L que cortan a C se le llama un **cilindro**. A C se le llama la **curva generadora** (o la **directriz**) del cilindro y a las rectas paralelas se les llama **rectas generatrices**.

NOTA Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que C se encuentra en uno de los tres planos coordenados. En este texto se restringe la discusión a cilindros *rectos*, es decir, a cilindros cuyas (rectas) generatrices son perpendiculares al plano coordenado que contiene a C, como se muestra en la figura 11.57. ■



Cilindro: las rectas generatrices cortan a C y son paralelas a la recta dada
Figura 11.57

La ecuación de la (curva) directriz del cilindro circular recto mostrado en la figura 11.56 es

$$x^2 + y^2 = a^2.$$ Ecuación de la curva directriz en el plano *xy*.

Para encontrar una ecuación del cilindro, hay que observar que se puede generar cualquiera de las (rectas) generatrices fijando los valores de x y y y dejando que z tome todos los valores reales. En este caso, el valor de z es arbitrario y, por consiguiente, no está incluido en la ecuación. En otras palabras, la ecuación de este cilindro simplemente es la ecuación de su curva generadora o directriz.

$$x^2 + y^2 = a^2$$ Ecuación de un cilindro en el espacio.

ECUACIÓN DE UN CILINDRO

La ecuación de un cilindro cuyas rectas generatrices son paralelas a uno de los ejes coordenados contiene sólo las variables correspondientes a los otros dos ejes.

EJEMPLO 1 Trazado de cilindros

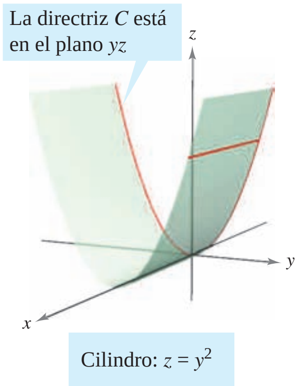
Trazar la superficie representada por cada una de las ecuaciones.

a) $z = y^2$ ***b)*** $z = \text{sen } x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

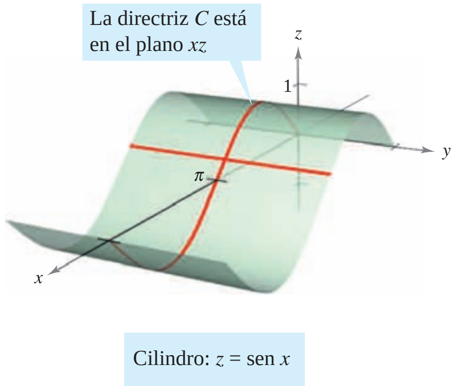
Solución

a) La gráfica es un cilindro cuya directriz, $z = y^2$, es una parábola en el plano yz. Las generatrices del cilindro son paralelas al eje x, como se muestra en la figura 11.58*a*.

b) La gráfica es un cilindro generado por la curva del seno en el plano xz. Las generatrices son paralelas al eje y, como se muestra en la figura 11.58*b*.



a) Las generatrices son paralelas al eje x



b) Las generatrices son paralelas al eje y

Figura 11.58

Superficies cuádricas

AYUDA DE ESTUDIO En la tabla de las páginas 814 y 815 se muestra sólo una de las varias orientaciones posibles de cada superficie cuádrica. Si la superficie está orientada a lo largo de un eje diferente, su ecuación estándar cambiará consecuentemente, como se ilustra en los ejemplos 2 y 3. El hecho de que los dos tipos de paraboloides tengan una variable elevada a la primera potencia puede ser útil al clasificar las superficies cuádricas. Los otros cuatro tipos de superficies cuádricas básicas tienen ecuaciones que son de *segundo grado* en las tres variables.

El cuarto tipo básico de superficies en el espacio son las **superficies cuádricas**. Éstas son los análogos tridimensionales de las secciones cónicas.

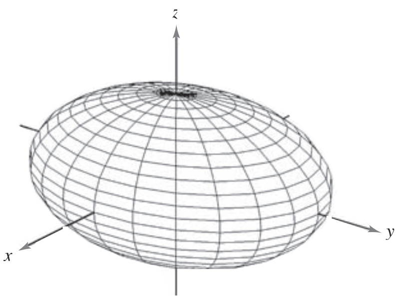
SUPERFICIES CUÁDRICAS

La ecuación de una **superficie cuádrica** en el espacio es una ecuación de segundo grado en tres variables. La **forma general** de la ecuación es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Hay seis tipos básicos de superficies cuádricas: **elipsoide**, **hiperboloide de una hoja**, **hiperboloide de dos hojas**, **cono elíptico**, **paraboloide elíptico** y **paraboloide hiperbólico**.

A la intersección de una superficie con un plano se le llama la **traza de la superficie** en el plano. Para visualizar una superficie en el espacio, es útil determinar sus trazas en algunos planos elegidos inteligentemente. Las trazas de las superficies cuádricas son cónicas. Estas trazas, junto con la **forma canónica o estándar** de la ecuación de cada superficie cuádrica, se muestran en la tabla de las páginas 814 y 815.

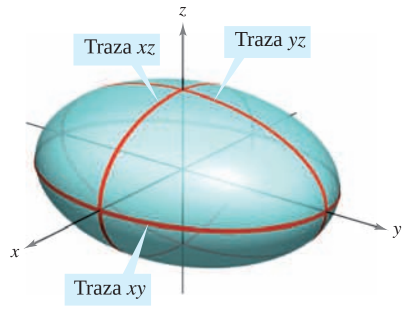


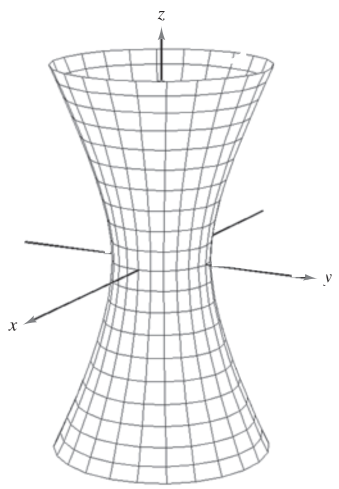
Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano *xy*
Elipse	Paralelo al plano *xz*
Elipse	Paralelo al plano *yz*

La superficie es una esfera si $a = b = c \neq 0$.



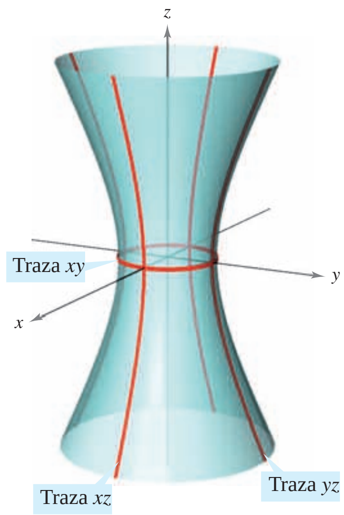


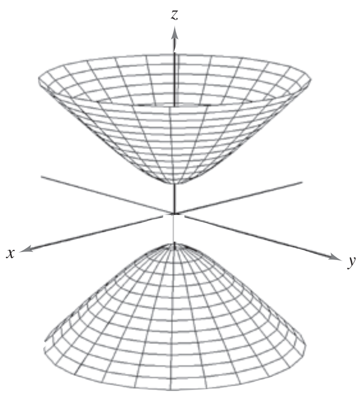
Hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano *xy*
Hipérbola	Paralelo al plano *xz*
Hipérbola	Paralelo al plano *yz*

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.



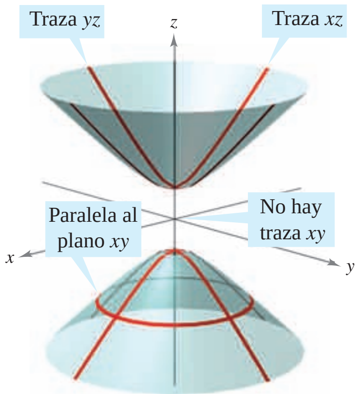


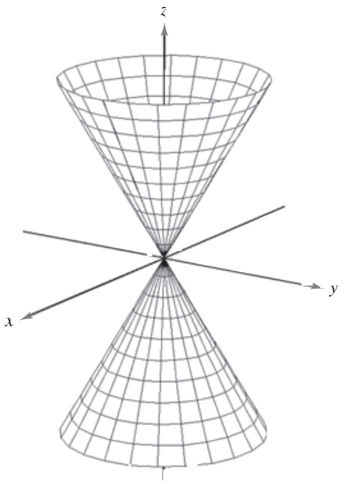
Hiperboloide de dos hojas

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano *xy*
Hipérbola	Paralelo al plano *xz*
Hipérbola	Paralelo al plano *yz*

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo. No hay traza en el plano coordenado perpendicular a este eje.



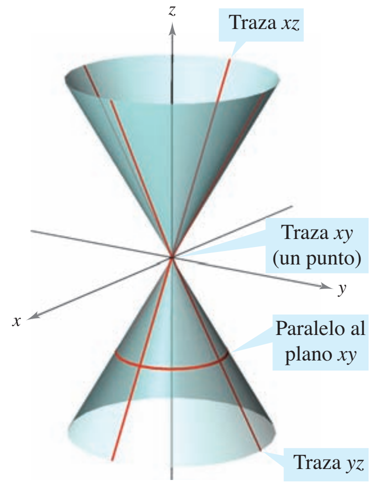


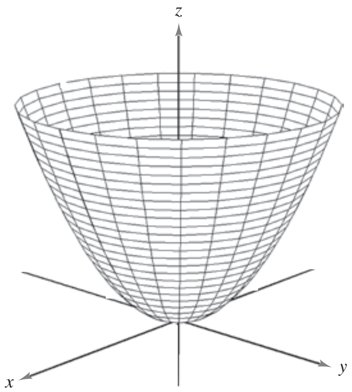
Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Hipérbola	Paralelo al plano xz
Hipérbola	Paralelo al plano yz

El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Las trazas en los planos coordenados paralelos a este eje son rectas que se cortan.



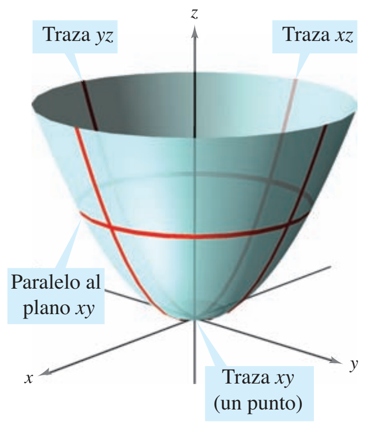


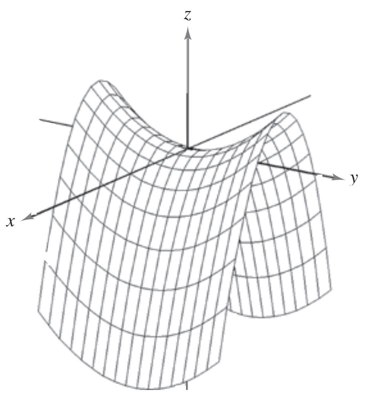
Paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Parábola	Paralelo al plano xz
Parábola	Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.



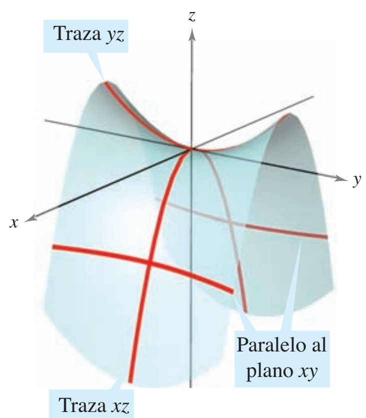


Paraboloide hiperbólica

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

Traza	*Plano*
Hipérbola	Paralelo al plano xy
Parábola	Paralelo al plano xz
Parábola	Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.



Para clasificar una superficie cuádrica, se empieza por escribir la superficie en la forma canónica o estándar. Después, se determinan varias trazas en los planos coordenados *o* en planos paralelos a los planos coordenados.

EJEMPLO 2 Trazado de una superficie cuádrica

Clasificar y dibujar la superficie dada por $4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0$.

Solución Se empieza por escribir la ecuación en forma canónica o estándar.

$$4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0 \qquad \text{Escribir la ecuación original.}$$

$$\frac{x^2}{-3} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0 \qquad \text{Dividir entre } -12.$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{1} = 1 \qquad \text{Forma canónica o estándar.}$$

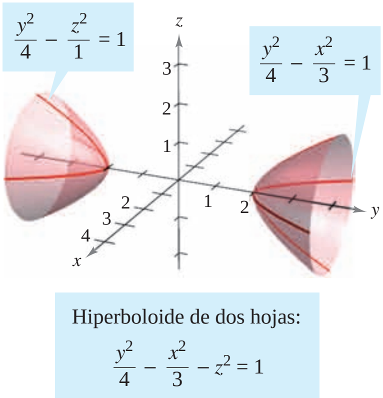


Figura 11.59

De la tabla en las páginas 814 y 815 se puede concluir que la superficie es un hiperboloide de dos hojas con el eje y como su eje. Para esbozar la gráfica de esta superficie, conviene hallar las trazas en los planos coordenados.

Traza xy $(z = 0)$: $\quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} = 1 \qquad$ Hipérbola.

Traza xz $(y = 0)$: $\quad \frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{1} = -1 \qquad$ No hay traza.

Traza yx $(x = 0)$: $\quad \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1 \qquad$ Hipérbola.

La gráfica se muestra en la figura 11.59.

EJEMPLO 3 Trazado de una superficie cuádrica

Clasificar y dibujar la superficie dada por $x - y^2 - 4z^2 = 0$.

Solución Como x está elevada sólo a la primera potencia, la superficie es un paraboloide. El eje del paraboloide es el eje x. En la forma canónica o estándar, la ecuación es

$$x = y^2 + 4z^2. \qquad \text{Forma canónica o estándar.}$$

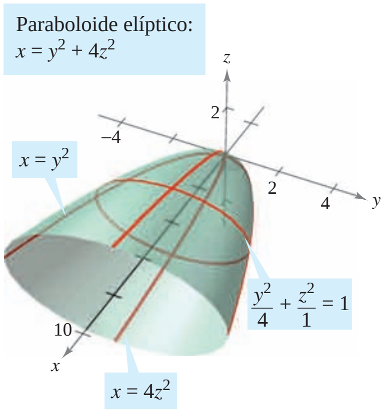


Figura 11.60

Algunas trazas útiles son las siguientes.

Traza xy $(z = 0)$: $\quad x = y^2 \qquad$ Parábola.

Traza xz $(y = 0)$: $\quad x = 4z^2 \qquad$ Parábola.

Paralelo al plano yz $(x = 4)$: $\quad \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1 \qquad$ Elipse.

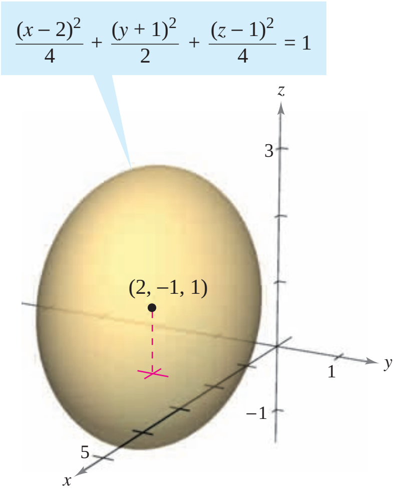
La superficie es un paraboloide *elíptico*, como se muestra en la figura 11.60.

Algunas ecuaciones de segundo grado en x, y y z no representan ninguno de los tipos básicos de superficies cuádricas. He aquí dos ejemplos.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \qquad \text{Un único punto.}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{Cilindro recto circular.}$$

En el caso de una superficie cuádrica no centrada en el origen, se puede formar la ecuación estándar completando cuadrados, como se muestra en el ejemplo 4.



Un elipsoide centrado en $(2, -1, 1)$
Figura 11.61

EJEMPLO 4 Una superficie cuádrica no centrada en el origen

Clasificar y dibujar la superficie dada por

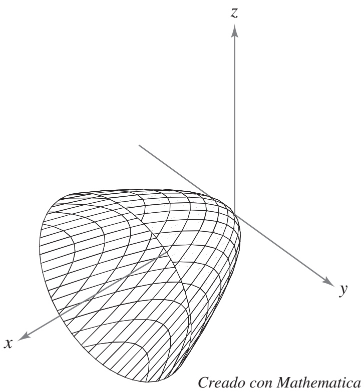
$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 3 = 0.$$

Solución Al completar el cuadrado de cada variable se obtiene:

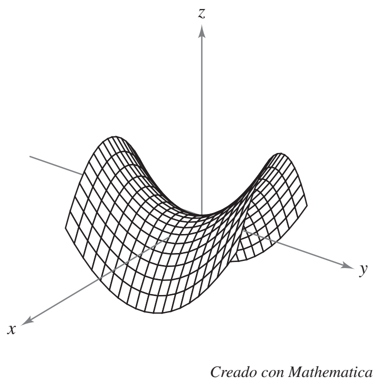
$$(x^2 - 4x + \quad) + 2(y^2 + 2y + \quad) + (z^2 - 2z + \quad) = -3$$
$$(x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) = -3 + 4 + 2 + 1$$
$$(x-2)^2 + 2(y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$$
$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{2} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$$

En esta ecuación se puede ver que la superficie cuádrica es un elipsoide centrado en el punto $(2, -1, 1)$. Su gráfica se muestra en la figura 11.61.

TECNOLOGÍA Un sistema algebraico por computadora puede ayudar a visualizar una superficie en el espacio.* La mayoría de estos sistemas algebraicos por computadora crean ilusiones tridimensionales dibujando varias trazas de la superficie y aplicando una rutina de "línea oculta" que borra las porciones de la superficie situadas detrás de otras. Abajo se muestran dos ejemplos de figuras que se generaron con *Mathematica*.



Paraboloide elíptico
$x = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$



Paraboloide hiperbólico
$z = \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16}$

Usar una herramienta de graficación para representar una superficie en el espacio requiere práctica. En primer lugar, se debe saber lo suficiente sobre la superficie en cuestión para poder especificar que dé una vista representativa de la superficie. También, a menudo se puede mejorar la vista de una superficie girando los ejes. Por ejemplo, se observa que el paraboloide elíptico de la figura se ve desde un punto más "alto" que el utilizado para ver el paraboloide hiperbólico.

** Algunas graficadoras 3-D requieren que se den las superficies mediante ecuaciones paramétricas. Para un análisis de esta técnica, ver la sección 15.5.*

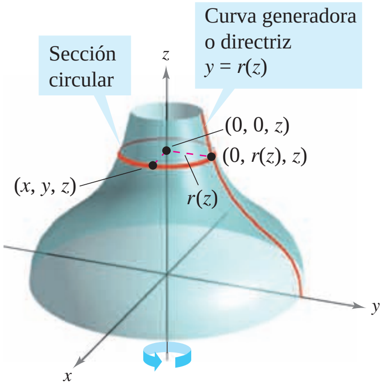


Figura 11.62

Superficies de revolución

El quinto tipo especial de superficie que se estudiará se llama **superficie de revolución**. En la sección 7.4 se estudió un método para encontrar el *área* de tales superficies. Ahora se verá un procedimiento para hallar su *ecuación*. Considerar la gráfica de la **función radio**

$$y = r(z) \qquad \text{Curva generadora o directriz.}$$

en el plano yz. Si esta gráfica se gira sobre el eje z, forma una superficie de revolución, como se muestra en la figura 11.62. La traza de la superficie en el plano $z = z_0$ es un círculo cuyo radio es $r(z_0)$ y cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 = [r(z_0)]^2. \qquad \text{Traza circular en el plano: } z = z_0.$$

Sustituyendo z_0 por z se obtiene una ecuación que es válida para todos los valores de z. De manera similar, se pueden obtener ecuaciones de superficies de revolución para los otros dos ejes, y los resultados se resumen como sigue.

SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Si la gráfica de una función radio r se gira sobre uno de los ejes coordenados, la ecuación de la superficie de revolución resultante tiene una de las formas siguientes.

1. Girada sobre el eje x: $y^2 + z^2 = [r(x)]^2$
2. Girada sobre el eje y: $x^2 + z^2 = [r(y)]^2$
3. Girada sobre el eje z: $x^2 + y^2 = [r(z)]^2$

EJEMPLO 5 Hallar una ecuación para una superficie de revolución

a) Una ecuación para la superficie de revolución generada al girar la gráfica de

$$y = \frac{1}{z} \qquad \text{Función radio.}$$

en torno al eje z es

$$x^2 + y^2 = [r(z)]^2 \qquad \text{Girada en torno al eje } z.$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{z}\right)^2. \qquad \text{Sustituir } r(z) \text{ para } 1/z.$$

b) Para encontrar una ecuación para la superficie generada al girar la gráfica de $9x^2 = y^3$ en torno al eje y, se despeja x en términos de y. Así se obtiene

$$x = \tfrac{1}{3}y^{3/2} = r(y). \qquad \text{Función radio.}$$

Por tanto, la ecuación para esta superficie es

$$x^2 + z^2 = [r(y)]^2 \qquad \text{Girada en torno al eje } y.$$

$$x^2 + z^2 = \left(\tfrac{1}{3}y^{3/2}\right)^2 \qquad \text{Sustituir } \tfrac{1}{3}y^{3/2} \text{ para } r(y).$$

$$x^2 + z^2 = \tfrac{1}{9}y^3. \qquad \text{Ecuación de la superficie.}$$

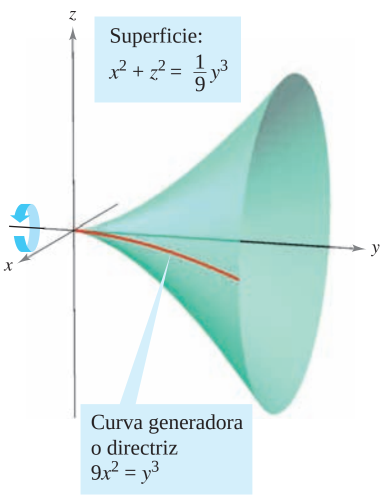


Figura 11.63

La gráfica se muestra en la figura 11.63.

La curva generadora o directriz de una superficie de revolución no es única. Por ejemplo, la superficie

$$x^2 + z^2 = e^{-2y}$$

puede generarse al girar la gráfica de $x = e^{-y}$ en torno al eje y o la gráfica de $z = e^{-y}$ sobre el eje y, como se muestra en la figura 11.64.

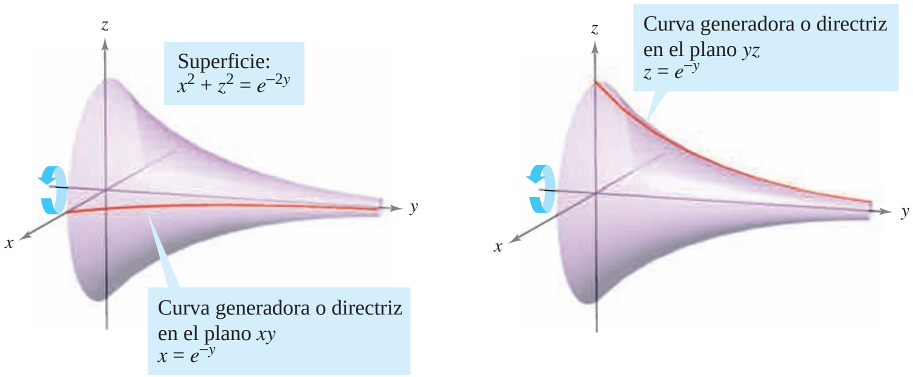


Figura 11.64

EJEMPLO 6 Hallar una directriz para una superficie de revolución

Hallar una directriz y el eje de revolución de la superficie dada por

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 9.$$

Solución Se sabe ahora que la ecuación tiene una de las formas siguientes.

$$x^2 + y^2 = [r(z)]^2 \qquad \text{Girada en torno al eje } z.$$
$$y^2 + z^2 = [r(x)]^2 \qquad \text{Girada en torno al eje } x.$$
$$x^2 + z^2 = [r(y)]^2 \qquad \text{Girada en torno al eje } y.$$

Como los coeficientes de x^2 y z^2 son iguales, se debe elegir la tercera forma y escribir

$$x^2 + z^2 = 9 - 3y^2.$$

El eje y es el eje de revolución. Se puede elegir una directriz de las trazas siguientes.

$$x^2 = 9 - 3y^2 \qquad \text{Traza en el plano } xy.$$
$$z^2 = 9 - 3y^2 \qquad \text{Traza en el plano } yz.$$

Por ejemplo, usando la primer traza, la directriz es la semielipse dada por

$$x = \sqrt{9 - 3y^2}. \qquad \text{Directriz.}$$

La gráfica de esta superficie se muestra en la figura 11.65.

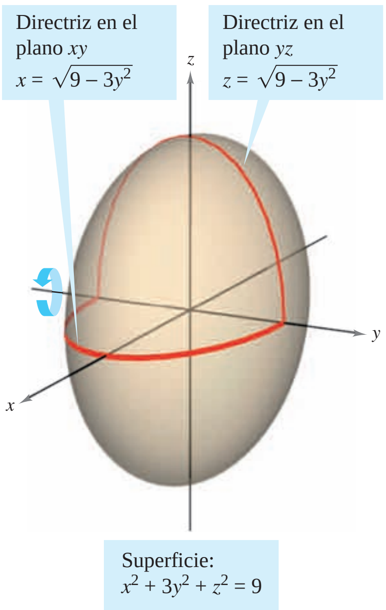
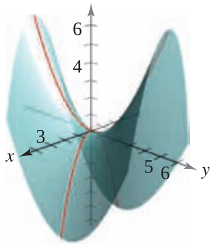


Figura 11.65

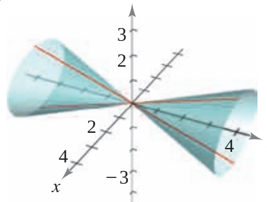
11.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, asociar la ecuación con su gráfica. [Las gráficas están marcadas *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

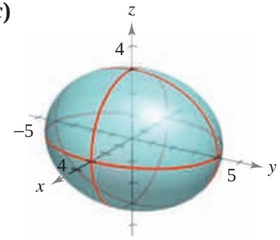
***a*)**



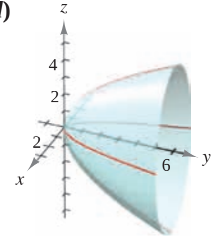
***b*)**



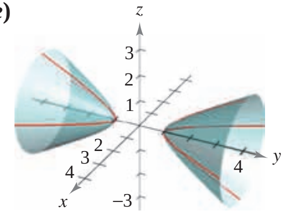
***c*)**



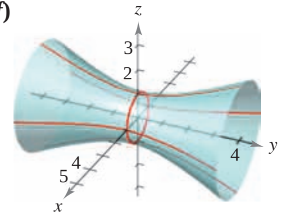
***d*)**



***e*)**



***f*)**



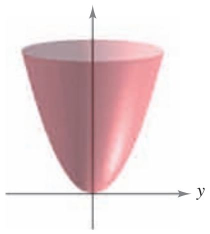
1. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1$
2. $15x^2 - 4y^2 + 15z^2 = -4$
3. $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$
4. $y^2 = 4x^2 + 9z^2$
5. $4x^2 - 4y + z^2 = 0$
6. $4x^2 - y^2 + 4z = 0$

En los ejercicios 7 a 16, describir y dibujar la superficie.

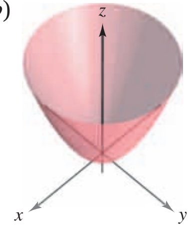
7. $y = 5$
8. $z = 2$
9. $y^2 + z^2 = 9$
10. $x^2 + z^2 = 25$
11. $x^2 - y = 0$
12. $y^2 + z = 6$
13. $4x^2 + y^2 = 4$
14. $y^2 - z^2 = 16$
15. $z - \text{sen } y = 0$
16. $z - e^y = 0$

17. ***Para pensar*** Las cuatro figuras son gráficas de la superficie cuádrica $z = x^2 + y^2$. Asociar cada una de las cuatro gráficas con el punto en el espacio desde el cual se ve el paraboloide. Los cuatro puntos son (0, 0, 20), (0, 20, 0), (20, 0, 0) y (10, 10, 20).

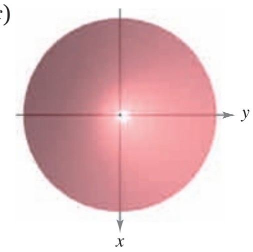
a)



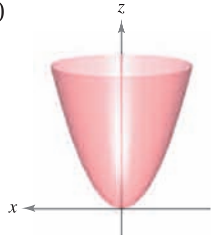
b)



c)



d)



Figuras para 17

CAS 18. Usar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ desde cada punto.

a) (10, 0, 0)

b) (0, 10, 0)

c) (10, 10, 10)

En los ejercicios 19 a 32, identificar y dibujar la superficie cuádrica. Usar un sistema algebraico por computadora para confirmar su dibujo.

19. $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$
20. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{25} = 1$
21. $16x^2 - y^2 + 16z^2 = 4$
22. $-8x^2 + 18y^2 + 18z^2 = 2$
23. $4x^2 - y^2 - z^2 = 1$
24. $z^2 - x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$
25. $x^2 - y + z^2 = 0$
26. $z = x^2 + 4y^2$
27. $x^2 - y^2 + z = 0$
28. $3z = -y^2 + x^2$
29. $z^2 = x^2 + \dfrac{y^2}{9}$
30. $x^2 = 2y^2 + 2z^2$
31. $16x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 32x - 36y + 36 = 0$
32. $9x^2 + y^2 - 9z^2 - 54x - 4y - 54z + 4 = 0$

CAS **En los ejercicios 33 a 42, usar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie. (*Sugerencia:* Puede ser necesario despejar *z* y considerar dos ecuaciones al representar gráficamente la superficie.)**

33. $z = 2\cos x$
34. $z = x^2 + 0.5y^2$
35. $z^2 = x^2 + 7.5y^2$
36. $3.25y = x^2 + z^2$
37. $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{2}{z}\right)^2$
38. $x^2 + y^2 = e^{-z}$
39. $z = 10 - \sqrt{|xy|}$
40. $z = \dfrac{-x}{8 + x^2 + y^2}$
41. $6x^2 - 4y^2 + 6z^2 = -36$
42. $9x^2 + 4y^2 - 8z^2 = 72$

En los ejercicios 43 a 46, dibujar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones.

43. $z = 2\sqrt{x^2 + y^2},\ z = 2$
44. $z = \sqrt{4 - x^2},\ y = \sqrt{4 - x^2},\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$
45. $x^2 + y^2 = 1,\ x + z = 2,\ z = 0$
46. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ y = 2z,\ z = 0$

En los ejercicios 47 a 52, hallar una ecuación para la superficie de revolución generada al girar la curva en el plano coordenado indicado sobre el eje dado.

	Ecuación de la curva	*Plano coordenado*	*Eje de revolución*
47.	$z^2 = 4y$	Plano yz	Eje y
48.	$z = 3y$	Plano yz	Eje y
49.	$z = 2y$	Plano yz	Eje z
50.	$2z = \sqrt{4 - x^2}$	Plano xz	Eje x
51.	$xy = 2$	Plano xy	Eje x
52.	$z = \ln y$	Plano yz	Eje z

En los ejercicios 53 y 54, hallar una ecuación de una directriz dada la ecuación de su superficie de revolución.

53. $x^2 + y^2 - 2z = 0$ **54.** $x^2 + z^2 = \cos^2 y$

Desarrollo de conceptos

55. Dar la definición de un cilindro.

56. ¿Qué es la traza de una superficie? ¿Cómo encuentra una traza?

57. Identificar las seis superficies cuádricas y dar la forma estándar de cada una.

Para discusión

58. ¿Qué representa la ecuación $z = x^2$ en el plano xz? ¿Qué representa en el espacio?

En los ejercicios 59 y 60, usar el método de las capas para encontrar el volumen del sólido que se encuentra debajo de la superficie de revolución y sobre el plano *xy*.

59. La curva $z = 4x - x^2$ en el plano xz se gira en torno al eje z.

60. La curva $z = \operatorname{sen} y$ $(0 \leq y \leq \pi)$ en el plano yz se gira en torno al eje z.

En los ejercicios 61 y 62, analizar la traza cuando la superficie

$$z = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}y^2$$

se corta con los planos indicados.

61. Hallar las longitudes de los ejes mayor y menor y las coordenadas del foco de la elipse generada cuando la superficie es cortada por los planos dados por

a) $z = 2$ y *b*) $z = 8$.

62. Hallar las coordenadas del foco de la parábola formada cuando la superficie se corta con los planos dados por

a) $y = 4$ y *b*) $x = 2$.

En los ejercicios 63 y 64, hallar una ecuación de la superficie que satisface las condiciones e identificar la superficie.

63. El conjunto de todos los puntos equidistantes del punto (0, 2, 0) y del plano $y = -2$.

64. El conjunto de todos los puntos equidistantes del punto (0, 0, 4) y del plano xy.

65. ***Geografía*** Debido a las fuerzas causadas por su rotación, la Tierra es un elipsoide oblongo y no una esfera. El radio ecuatorial es de 3 963 millas y el radio polar es de 3 950 millas. Hallar una ecuación del elipsoide. (Suponer que el centro de la Tierra está en el origen y que la traza formada por el plano $z = 0$ corresponde al ecuador.)

66. ***Diseño de máquinas*** La parte superior de un buje de caucho, diseñado para absorber las vibraciones en un automóvil, es la superficie de revolución generada al girar la curva $z = \frac{1}{2}y^2 + 1$ $(0 \leq y \leq 2)$ en el plano yz en torno al eje z.

a) Hallar una ecuación de la superficie de revolución.

b) Todas las medidas están en centímetros y el buje es fijo en el plano xy. Usar el método de capas para encontrar su volumen.

c) El buje tiene un orificio de 1 centímetro de diámetro que pasa por su centro y en paralelo al eje de revolución. Hallar el volumen del buje de caucho.

67. Determinar la intersección del paraboloide hiperbólico $z = y^2/b^2 - x^2/a^2$ con el plano $bx + ay - z = 0$. (Suponer $a, b > 0$.)

68. Explicar por qué la curva de intersección de las superficies $x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 2y = 4$ y $2x^2 + 6y^2 - 4z^2 - 3x = 2$ se encuentra en un plano.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 69 a 72, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que pruebe su falsedad.**

69. Una esfera es un elipsoide.

70. La directriz de una superficie de revolución es única.

71. Todas las trazas de un elipsoide son elipses.

72. Todas las trazas de un hiperboloide de una hoja son hiperboloides.

73. ***Para pensar*** Abajo se muestran tres tipos de superficies "topológicas" clásicas. La esfera y el toro tienen "interior" y "exterior". ¿Tiene la botella de Klein interior y exterior? Explicar.

Esfera

Toro

Botella de Klein

Botella de Klein

11.7 Coordenadas cilíndricas y esféricas

- **Usar coordenadas cilíndricas para representar superficies en el espacio.**
- **Usar coordenadas esféricas para representar superficies en el espacio.**

Coordenadas cilíndricas

Ya se ha visto que algunas gráficas bidimensionales son más fáciles de representar en coordenadas polares que en coordenadas rectangulares. Algo semejante ocurre con las superficies en el espacio. En esta sección se estudiarán dos sistemas alternativos de coordenadas espaciales. El primero, el **sistema de coordenadas cilíndricas**, es una extensión de las coordenadas polares del plano al espacio tridimensional.

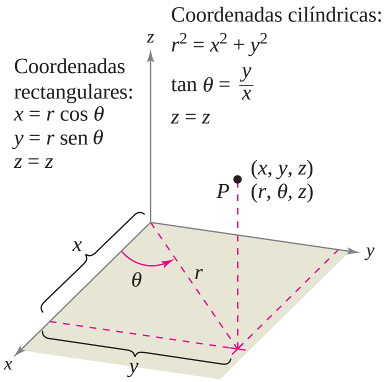


Figura 11.66

EL SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

En un **sistema de coordenadas cilíndricas**, un punto P en el espacio se representa por medio de una terna ordenada (r, θ, z).

1. (r, θ) es una representación polar de la proyección de P en el plano xy.
2. z es la distancia dirigida de (r, θ) a P.

Para convertir coordenadas rectangulares en coordenadas cilíndricas (o viceversa), hay que usar las siguientes fórmulas, basadas en las coordenadas polares, como se ilustra en la figura 11.66.

Cilíndricas a rectangulares:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z$$

Rectangulares a cilíndricas:

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad z = z$$

Al punto (0, 0, 0) se le llama el **polo**. Como la representación de un punto en el sistema de coordenadas polares no es única, la representación en el sistema de las coordenadas cilíndricas tampoco es única.

EJEMPLO 1 Conversión de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares

Convertir el punto $(r, \theta, z) = \left(4, \frac{5\pi}{6}, 3\right)$ a coordenadas rectangulares.

Solución Usando las ecuaciones de conversión de cilíndricas a rectangulares se obtiene

$$x = 4\cos\frac{5\pi}{6} = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$y = 4\,\text{sen}\frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$z = 3.$$

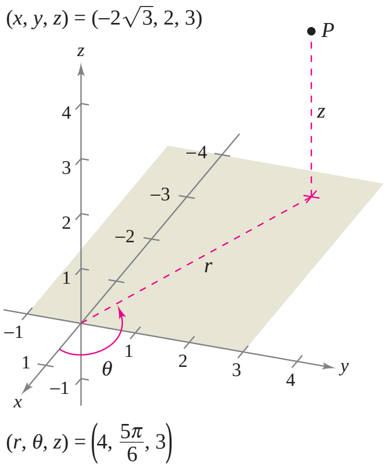


Figura 11.67

Por tanto, en coordenadas rectangulares, el punto es $(x, y, z) = \left(-2\sqrt{3}, 2, 3\right)$, como se muestra en la figura 11.67.

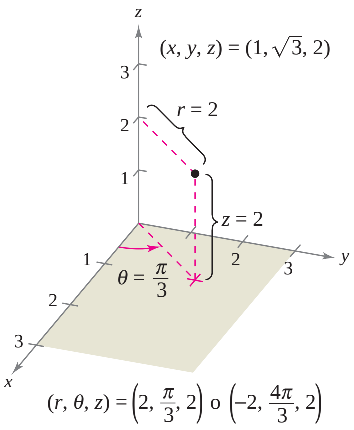


Figura 11.68

EJEMPLO 2 Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

Convertir el punto $(x, y, z) = \left(1, \sqrt{3}, 2\right)$ a coordenadas cilíndricas.

Solución Usar las ecuaciones de conversión de rectangulares a cilíndricas.

$$r = \pm\sqrt{1 + 3} = \pm 2$$

$$\tan\theta = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\sqrt{3}\right) + n\pi = \frac{\pi}{3} + n\pi$$

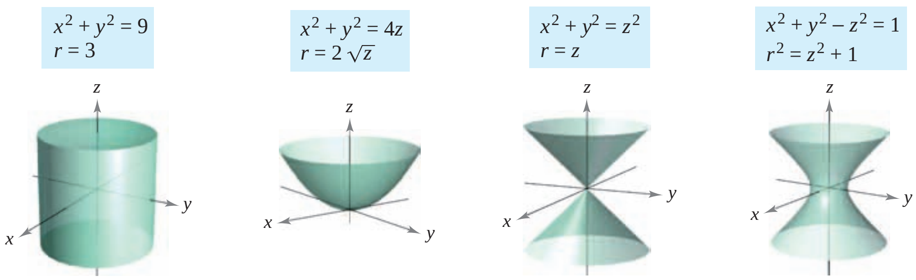
$$z = 2$$

Hay dos posibilidades para r y una cantidad infinita de posibilidades para θ. Como se muestra en la figura 11.68, dos representaciones adecuadas del punto son

$\left(2, \frac{\pi}{3}, 2\right)$ $\quad$ $r > 0$ y θ en el cuadrante I.

$\left(-2, \frac{4\pi}{3}, 2\right).$ $\quad$ $r < 0$ y θ en el cuadrante III.

Las coordenadas cilíndricas son especialmente adecuadas para representar superficies cilíndricas y superficies de revolución en las que el eje z sea el eje de simetría, como se muestra en la figura 11.69.



Cilindro Paraboloide Cono Hiperboloide

Figura 11.69

Los planos verticales que contienen el eje z y los planos horizontales también tienen ecuaciones simples de coordenadas cilíndricas, como se muestra en la figura 11.70.

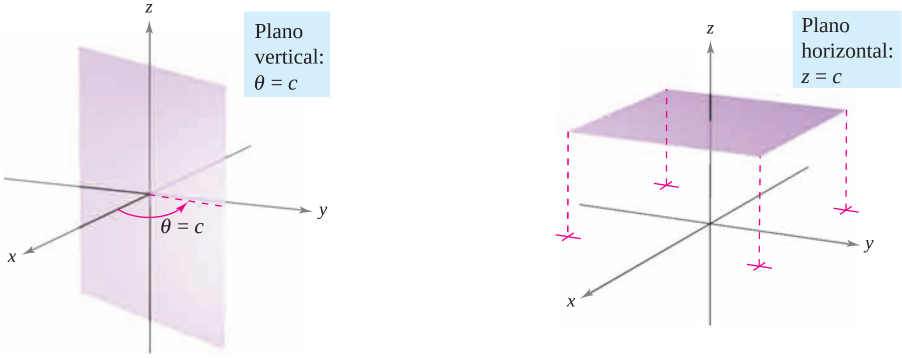


Figura 11.70

EJEMPLO 3 Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

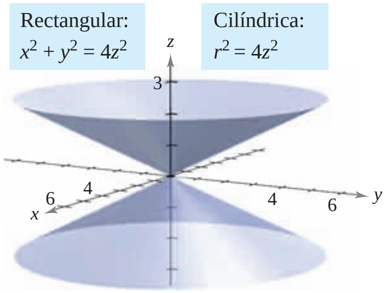


Figura 11.71

Hallar una ecuación en coordenadas cilíndricas para la superficie representada por cada ecuación rectangular.

a) $x^2 + y^2 = 4z^2$

b) $y^2 = x$

Solución

a) Según la sección anterior, se sabe que la gráfica de $x^2 + y^2 = 4z^2$ es un cono "de dos hojas" con su eje a lo largo del eje z, como se muestra en la figura 11.71. Si se sustituye $x^2 + y^2$ por r^2, la ecuación en coordenadas cilíndricas es

$$x^2 + y^2 = 4z^2 \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

$$r^2 = 4z^2. \qquad \text{Ecuación cilíndrica.}$$

b) La gráfica de la superficie $y^2 = x$ es un cilindro parabólico con rectas generatrices paralelas al eje z, como se muestra en la figura 11.72. Sustituyendo y^2 por $r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$ y x por $r \cos \theta$, se obtiene la ecuación siguiente en coordenadas cilíndricas.

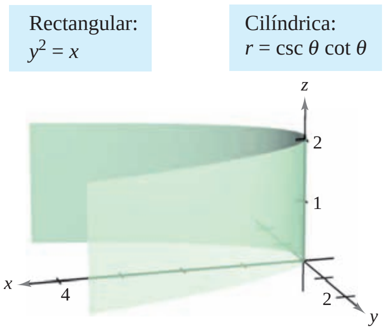


Figura 11.72

$$y^2 = x \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = r \cos \theta \qquad \text{Sustituir } y \text{ por } r \operatorname{sen} \theta \text{ y } x \text{ por } r \cos \theta.$$

$$r(r \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta) = 0 \qquad \text{Agrupar términos y factorizar.}$$

$$r \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta = 0 \qquad \text{Dividir cada lado entre } r.$$

$$r = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \qquad \text{Despejar } r.$$

$$r = \csc \theta \cot \theta \qquad \text{Ecuación cilíndrica.}$$

Hay que observar que esta ecuación comprende un punto en el que $r = 0$, por lo cual nada se pierde al dividir cada lado entre el factor r.

La conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas es más sencilla que la conversión de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares, como se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Conversión de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares

Hallar una ecuación en coordenadas rectangulares de la superficie representada por la ecuación cilíndrica

$$r^2 \cos 2\theta + z^2 + 1 = 0.$$

Solución

$$r^2 \cos 2\theta + z^2 + 1 = 0 \qquad \text{Ecuación cilíndrica.}$$

$$r^2(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + z^2 + 1 = 0 \qquad \text{Identidad trigonométrica.}$$

$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + z^2 = -1$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = -1 \qquad \text{Sustituya } r \cos \theta \text{ por } x \text{ y } r \operatorname{sen} \theta \text{ por } y.$$

$$y^2 - x^2 - z^2 = 1 \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

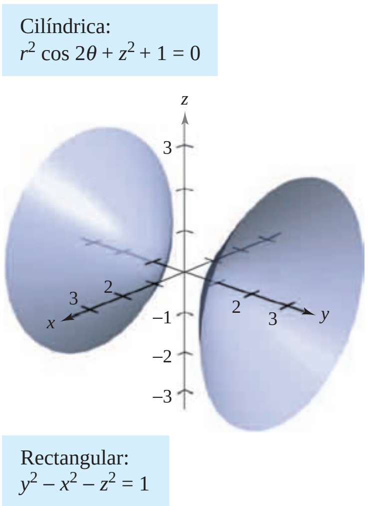


Figura 11.73

Es un hiperboloide de dos hojas cuyo eje se encuentra a lo largo del eje y, como se muestra en la figura 11.73.

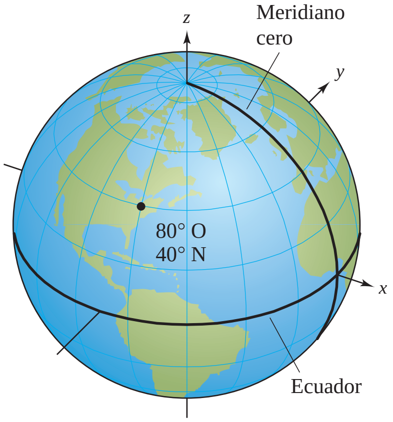


Figura 11.74

Coordenadas esféricas

En el **sistema de coordenadas esféricas**, cada punto se representa por una terna ordenada: la primera coordenada es una distancia, la segunda y la tercera coordenadas son ángulos. Este sistema es similar al sistema de latitud-longitud que se usa para identificar puntos en la superficie de la Tierra. Por ejemplo, en la figura 11.74 se muestra el punto en la superficie de la Tierra cuya latitud es 40° Norte (respecto al ecuador) y cuya longitud es 80° Oeste (respecto al meridiano cero). Si se supone que la Tierra es esférica y tiene un radio de 4 000 millas, este punto sería

$$(4\,000,\ -80°,\ 50°).$$

Radio — 80° en el sentido de las manecillas del reloj, desde el meridiano cero — 50° hacia abajo del Polo Norte

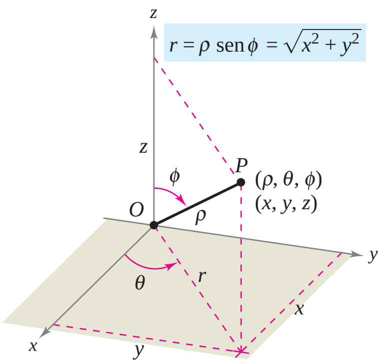
EL SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

En un **sistema de coordenadas esféricas**, un punto P en el espacio se representa por medio de una terna ordenada (ρ, θ, ϕ).

1. ρ es la distancia entre P y el origen, $\rho \geq 0$.
2. θ es el mismo ángulo utilizado en coordenadas cilíndricas para $r \geq 0$.
3. ϕ es el ángulo *entre* el eje z positivo y el segmento de recta $\overrightarrow{OP}$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

Hay que observar que la primera y tercera coordenadas, ρ y ϕ, son no negativas. ρ es la letra minúscula *ro*, y ϕ es la letra griega minúscula *fi*.

La relación entre coordenadas rectangulares y esféricas se ilustra en la figura 11.75. Para convertir de un sistema al otro, usar lo siguiente.



Coordenadas esféricas
Figura 11.75

Esféricas a rectangulares:

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \qquad z = \rho\cos\phi$$

Rectangulares a esféricas:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

Para cambiar entre los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas, usar lo siguiente.

Esféricas a cilíndricas **($r \geq 0$)*:***

$$r^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi, \qquad \theta = \theta, \qquad z = \rho\cos\phi$$

Cilíndricas a esféricas **($r \geq 0$)*:***

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \qquad \theta = \theta, \qquad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)$$

El sistema de coordenadas esféricas es útil principalmente para superficies en el espacio que tiene un *punto* o *centro* de simetría. Por ejemplo, la figura 11.76 muestra tres superficies con ecuaciones esféricas sencillas.

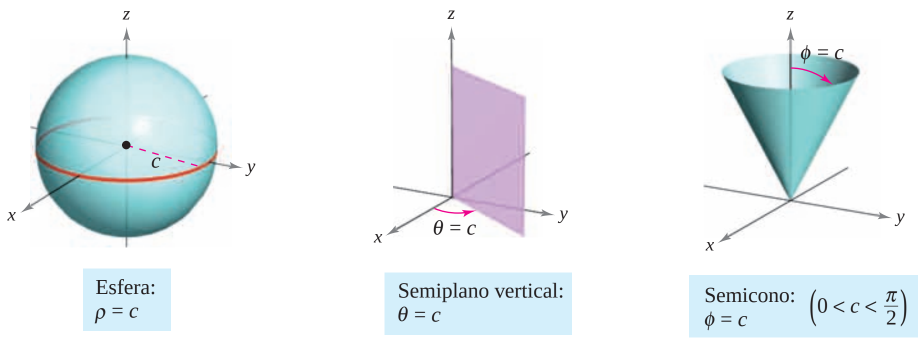


Figura 11.76

EJEMPLO 5 Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas

Hallar una ecuación en coordenadas esféricas para la superficie representada por cada una de las ecuaciones rectangulares.

a) Cono: $x^2 + y^2 = z^2$

b) Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$

Solución

a) Haciendo las sustituciones apropiadas de x, y y z en la ecuación dada se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2 \\ \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta &= \rho^2 \cos^2 \phi \\ \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \,(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) &= \rho^2 \cos^2 \phi \\ \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi &= \rho^2 \cos^2 \phi \\ \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{\cos^2 \phi} &= 1 \qquad \rho \geq 0. \\ \tan^2 \phi &= 1 \qquad \phi = \pi/4 \text{ o } \phi = 3\pi/4. \end{aligned}$$

La ecuación $\phi = \pi/4$ representa el semicono *superior*, y la ecuación $\phi = 3\pi/4$ representa el semicono *inferior*.

b) Como $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = \rho \cos \phi$, la ecuación dada tiene la forma esférica siguiente.

$$\rho^2 - 4\rho \cos \phi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho(\rho - 4 \cos \phi) = 0$$

Descartando por el momento la posibilidad de que $\rho = 0$, se obtiene la ecuación esférica

$$\rho - 4 \cos \phi = 0 \qquad \text{o} \qquad \rho = 4 \cos \phi.$$

Hay que observar que el conjunto solución de esta ecuación comprende un punto en el cual $\rho = 0$, de manera que no se pierde nada al eliminar el factor ρ. La esfera representada por la ecuación $\rho = 4 \cos \phi$ se muestra en la figura 11.77.

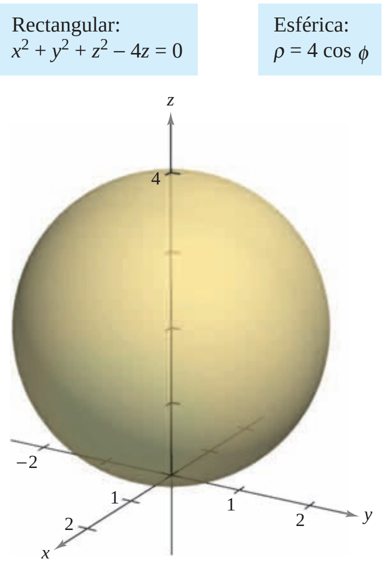


Figura 11.77

11.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, convertir las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas rectangulares.

1. $(-7, 0, 5)$
2. $(2, -\pi, -4)$
3. $(3, \pi/4, 1)$
4. $(6, -\pi/4, 2)$
5. $(4, 7\pi/6, 3)$
6. $(-0.5, 4\pi/3, 8)$

En los ejercicios 7 a 12, convertir las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas cilíndricas.

7. $(0, 5, 1)$
8. $\left(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4\right)$
9. $(2, -2, -4)$
10. $(3, -3, 7)$
11. $\left(1, \sqrt{3}, 4\right)$
12. $\left(2\sqrt{3}, -2, 6\right)$

En los ejercicios 13 a 20, hallar una ecuación en coordenadas cilíndricas de la ecuación dada en coordenadas rectangulares.

13. $z = 4$
14. $x = 9$
15. $x^2 + y^2 + z^2 = 17$
16. $z = x^2 + y^2 - 11$
17. $y = x^2$
18. $x^2 + y^2 = 8x$
19. $y^2 = 10 - z^2$
20. $x^2 + y^2 + z^2 - 3z = 0$

En los ejercicios 21 a 28, hallar una ecuación en coordenadas rectangulares de la ecuación dada en coordenadas cilíndricas y dibujar su gráfica.

21. $r = 3$
22. $z = 2$
23. $\theta = \pi/6$
24. $r = \frac{1}{2}z$
25. $r^2 + z^2 = 5$
26. $z = r^2 \cos^2 \theta$
27. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$
28. $r = 2 \cos \theta$

En los ejercicios 29 a 34, convertir las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas esféricas.

29. $(4, 0, 0)$
30. $(-4, 0, 0)$
31. $\left(-2, 2\sqrt{3}, 4\right)$
32. $\left(2, 2, 4\sqrt{2}\right)$
33. $\left(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3}\right)$
34. $(-1, 2, 1)$

En los ejercicios 35 a 40, convertir las coordenadas esféricas del punto en coordenadas rectangulares.

35. $(4, \pi/6, \pi/4)$
36. $(12, 3\pi/4, \pi/9)$
37. $(12, -\pi/4, 0)$
38. $(9, \pi/4, \pi)$
39. $(5, \pi/4, 3\pi/4)$
40. $(6, \pi, \pi/2)$

En los ejercicios 41 a 48, hallar una ecuación en coordenadas esféricas de la ecuación dada en coordenadas rectangulares.

41. $y = 2$
42. $z = 6$
43. $x^2 + y^2 + z^2 = 49$
44. $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$
45. $x^2 + y^2 = 16$
46. $x = 13$
47. $x^2 + y^2 = 2z^2$
48. $x^2 + y^2 + z^2 - 9z = 0$

En los ejercicios 49 a 56, encontrar una ecuación en coordenadas rectangulares de la ecuación dada en coordenadas esféricas y dibujar su gráfica.

49. $\rho = 5$
50. $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$
51. $\phi = \dfrac{\pi}{6}$
52. $\phi = \dfrac{\pi}{2}$
53. $\rho = 4 \cos \phi$
54. $\rho = 2 \sec \phi$
55. $\rho = \csc \phi$
56. $\rho = 4 \csc \phi \sec \theta$

En los ejercicios 57 a 64, convertir las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas esféricas.

57. $(4, \pi/4, 0)$
58. $(3, -\pi/4, 0)$
59. $(4, \pi/2, 4)$
60. $(2, 2\pi/3, -2)$
61. $(4, -\pi/6, 6)$
62. $(-4, \pi/3, 4)$
63. $(12, \pi, 5)$
64. $(4, \pi/2, 3)$

En los ejercicios 65 a 72, convertir las coordenadas esféricas del punto en coordenadas cilíndricas.

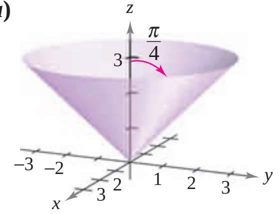
65. $(10, \pi/6, \pi/2)$
66. $(4, \pi/18, \pi/2)$
67. $(36, \pi, \pi/2)$
68. $(18, \pi/3, \pi/3)$
69. $(6, -\pi/6, \pi/3)$
70. $(5, -5\pi/6, \pi)$
71. $(8, 7\pi/6, \pi/6)$
72. $(7, \pi/4, 3\pi/4)$

CAS **En los ejercicios 73 a 88, usar un sistema algebraico por computadora o una herramienta de graficación para convertir las coordenadas del punto de un sistema a otro, entre los sistemas de coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.**

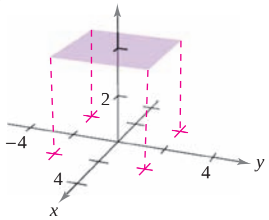
	Rectangulares	*Cilíndricas*	*Esféricas*
73.	$(4, 6, 3)$		
74.	$(6, -2, -3)$		
75.		$(5, \pi/9, 8)$	
76.		$(10, -0.75, 6)$	
77.			$(20, 2\pi/3, \pi/4)$
78.			$(7.5, 0.25, 1)$
79.	$(3, -2, 2)$		
80.	$\left(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, -3\right)$		
81.	$(5/2, 4/3, -3/2)$		
82.	$(0, -5, 4)$		
83.		$(5, 3\pi/4, -5)$	
84.		$(-2, 11\pi/6, 3)$	
85.		$(-3.5, 2.5, 6)$	
86.		$(8.25, 1.3, -4)$	
87.			$(3, 3\pi/4, \pi/3)$
88.			$(8, -\pi/6, \pi)$

En los ejercicios 89 a 94, asociar la ecuación (dada en términos de coordenadas cilíndricas o esféricas) con su gráfica. [Los gráficos se marcan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

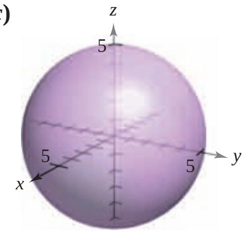
a)



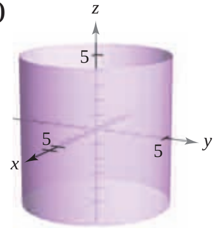
b)



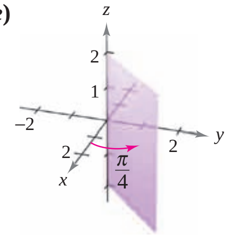
c)



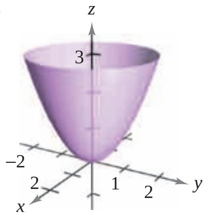
d)



e)



f)



89. $r = 5$

90. $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

91. $\rho = 5$

92. $\phi = \dfrac{\pi}{4}$

93. $r^2 = z$

94. $\rho = 4 \sec \phi$

Desarrollo de conceptos

95. Dar las ecuaciones para la conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y viceversa.

96. Explicar por qué en las coordenadas esféricas la gráfica de $\theta = c$ es un semiplano y no un plano entero.

97. Dar las ecuaciones para la conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas y viceversa.

Para discusión

98. *a*) Dadas las constantes a, b y c, describir las gráficas de las ecuaciones $r = a$, $\theta = b$ y $z = c$ en coordenadas cilíndricas.

b) Dadas las constantes a, b y c, describir las gráficas de las ecuaciones $\rho = a$, $\theta = b$ y $\phi = c$ en coordenadas esféricas.

En los ejercicios 99 a 106, convertir la ecuación rectangular a una ecuación *a*) en coordenadas cilíndricas y *b*) en coordenadas esféricas.

99. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

100. $4(x^2 + y^2) = z^2$

101. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$

102. $x^2 + y^2 = z$

103. $x^2 + y^2 = 4y$

104. $x^2 + y^2 = 36$

105. $x^2 - y^2 = 9$

106. $y = 4$

En los ejercicios 107 a 110, dibujar el sólido que tiene la descripción dada en coordenadas cilíndricas.

107. $0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le z \le 4$

108. $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le r \le 3,\ 0 \le z \le r \cos \theta$

109. $0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le a,\ r \le z \le a$

110. $0 \le \theta \le 2\pi,\ 2 \le r \le 4,\ z^2 \le -r^2 + 6r - 8$

En los ejercicios 111 a 114, dibujar el sólido que tiene la descripción dada en coordenadas esféricas.

111. $0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi/6,\ 0 \le \rho \le a \sec \phi$

112. $0 \le \theta \le 2\pi,\ \pi/4 \le \phi \le \pi/2,\ 0 \le \rho \le 1$

113. $0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \phi \le \pi/2,\ 0 \le \rho \le 2$

114. $0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le \pi/2,\ 1 \le \rho \le 3$

Para pensar **En los ejercicios 115 a 120, hallar las desigualdades que describen al sólido, y especificar el sistema de coordenadas utilizado. Posicionar al sólido en el sistema de coordenadas en el que las desigualdades sean tan sencillas como sea posible.**

115. Un cubo con cada arista de 10 centímetros de largo.

116. Una capa cilíndrica de 8 metros de longitud, 0.75 metros de diámetro interior y un diámetro exterior de 1.25 metros.

117. Una capa esférica con radios interior y exterior de 4 pulgadas y 6 pulgadas, respectivamente.

118. El sólido que queda después de perforar un orificio de 1 pulgada de diámetro a través del centro de una esfera de 6 pulgadas de diámetro.

119. El sólido dentro tanto de $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ como de $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$.

120. El sólido entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, y dentro del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 121 a 124, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que pruebe que es falsa.**

121. En coordenadas cilíndricas, la ecuación $r = z$ es un cilindro.

122. Las ecuaciones $\rho = 2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ representan la misma superficie.

123. Las coordenadas cilíndricas de un punto (x, y, z) son únicas.

124. Las coordenadas esféricas de un punto (x, y, z) son únicas.

125. Identificar la curva de intersección de las superficies (en coordenadas cilíndricas) $z = \operatorname{sen} \theta$ y $r = 1$.

126. Identificar la curva de intersección de las superficies (en coordenadas esféricas) $\rho = 2 \sec \phi$ y $\rho = 4$.

11 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, sean $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR}$, *a*) escribir u y v en la forma de componentes, *b*) escribir u como combinación lineal de vectores i y j unitarios estándar, *c*) encontrar la magnitud de v y *d*) encontrar 2u + v.

1. $P = (1, 2), Q = (4, 1), R = (5, 4)$
2. $P = (-2, -1), Q = (5, -1), R = (2, 4)$

En los ejercicios 3 y 4, encontrar las componentes del vector v dada su magnitud y el ángulo que forma con el eje *x* positivo.

3. $\|\mathbf{v}\| = 8, \ \theta = 60°$
4. $\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{2}, \ \theta = 225°$
5. Hallar las coordenadas del punto en el plano *xy* cuatro unidades a la derecha del plano *xz* y cinco unidades detrás del plano *yz*.
6. Hallar las coordenadas del punto localizado en el eje *y* y siete unidades a la izquierda del plano *xz*.

En los ejercicios 7 y 8, determinar la localización de un punto (*x*, *y*, *z*) que satisface la condición.

7. $yz > 0$
8. $xy < 0$

En los ejercicios 9 y 10, hallar la ecuación estándar de la esfera.

9. Centro: $(3, -2, 6)$; diámetro: 15
10. Puntos terminales de un diámetro: $(0, 0, 4)$, $(4, 6, 0)$

En los ejercicios 11 y 12, completar el cuadrado para dar la ecuación de la esfera en forma canónica o estándar. Hallar el centro y el radio.

11. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 4 = 0$
12. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 6y - 4z + 34 = 0$

En los ejercicios 13 y 14 se dan los puntos inicial y final de un vector, *a*) dibujar el segmento de recta dirigido, *b*) encontrar la forma componente del vector, *c*) escribir el vector usando notación vectorial unitaria estándar y *d*) dibujar el vector con su punto inicial en el origen.

13. Punto inicial: $(2, -1, 3)$
    Punto terminal: $(4, 4, -7)$
14. Punto inicial: $(6, 2, 0)$
    Punto terminal: $(3, -3, 8)$

En los ejercicios 15 y 16, utilizar vectores para determinar si los puntos son colineales.

15. $(3, 4, -1), \ (-1, 6, 9), \ (5, 3, -6)$
16. $(5, -4, 7), \ (8, -5, 5), \ (11, 6, 3)$
17. Hallar un vector unitario en la dirección de $\mathbf{u} = \langle 2, 3, 5\rangle$.
18. Hallar el vector **v** de magnitud 8 en la dirección $\langle 6, -3, 2\rangle$.

En los ejercicios 19 y 20, sean $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR}$. Hallar *a*) las componentes de u y de v, *b*) u · v y *c*) v · v.

19. $P = (5, 0, 0), \ Q = (4, 4, 0), R = (2, 0, 6)$
20. $P = (2, -1, 3), \ Q = (0, 5, 1), \ R = (5, 5, 0)$

En los ejercicios 21 y 22, determinar si u y v son ortogonales, paralelos, o ninguna de las dos cosas.

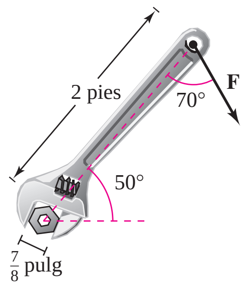
21. $\mathbf{u} = \langle 7, -2, 3\rangle$
    $\mathbf{v} = \langle -1, 4, 5\rangle$
22. $\mathbf{u} = \langle -4, 3, -6\rangle$
    $\mathbf{v} = \langle 16, -12, 24\rangle$

En los ejercicios 23 a 26, hallar el ángulo *θ* entre los vectores.

23. $\mathbf{u} = 5[\cos(3\pi/4)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(3\pi/4)\mathbf{j}]$
    $\mathbf{v} = 2[\cos(2\pi/3)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(2\pi/3)\mathbf{j}]$
24. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
25. $\mathbf{u} = \langle 10, -5, 15\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -2, 1, -3\rangle$
26. $\mathbf{u} = \langle 1, 0, -3\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 2, -2, 1\rangle$
27. Hallar dos vectores en direcciones opuestas que sean ortogonales al vector $\mathbf{u} = \langle 5, 6, -3\rangle$.
28. ***Trabajo*** Un objeto es arrastrado 8 pies por el suelo aplicando una fuerza de 75 libras. La dirección de la fuerza es de 30° sobre la horizontal. Encontrar el trabajo realizado.

En los ejercicios 29 a 38, sea $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -3\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -1, 2, 2\rangle$.

29. Probar que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$.
30. Hallar el ángulo entre **u** y **v**.
31. Determinar la proyección de **w** sobre **u**.
32. Calcular el trabajo realizado al mover un objeto a lo largo del vector **u** si la fuerza aplicada es **w**.
33. Determinar un vector unitario perpendicular al plano que contiene a **v** y a **w**.
34. Mostrar que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.
35. Calcular el volumen del sólido cuyas aristas son **u**, **v** y **w**.
36. Mostrar que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.
37. Calcular el área del paralelogramo con lados adyacentes **u** y **v**.
38. Calcular el área del triángulo con lados adyacentes **v** y **w**.
39. ***Momento*** Las especificaciones para un tractor establecen que el momento en un perno con tamaño de cabeza de $\frac{7}{8}$ de pulgada no puede exceder 200 pies-libras. Determinar la fuerza máxima $\|\mathbf{F}\|$ que puede aplicarse a la llave de la figura.



40. ***Volumen*** Usar el producto escalar triple para encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene aristas adyacentes $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = -\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

En los ejercicios 41 y 42, hallar el conjunto de *a*) ecuaciones paramétricas y *b*) ecuaciones simétricas de la recta a través de los dos puntos. (Para cada recta, dar los números directores como enteros.)

41. $(3, 0, 2)$, $(9, 11, 6)$

42. $(-1, 4, 3)$, $(8, 10, 5)$

En los ejercicios 43 a 46, *a*) hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta, *b*) encontrar un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta y *c*) dibujar una gráfica de la recta.

43. La recta pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano xz.

44. La recta pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralela a la recta dada por $x = y = z$.

45. La intersección de los planos $3x - 3y - 7z = -4$ y $x - y + 2z = 3$

46. La recta pasa por el punto $(0, 1, 4)$ y es perpendicular a $\mathbf{u} = \langle 2, -5, 1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -3, 1, 4\rangle$.

En los ejercicios 47 a 50, encontrar una ecuación del plano.

47. El plano pasa por

$(-3, -4, 2)$, $(-3, 4, 1)$ y $(1, 1, -2)$.

48. El plano pasa por el punto $(-2, 3, 1)$ y es perpendicular a $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

49. El plano contiene las rectas dadas por

$$\frac{x-1}{-2} = y = z + 1$$

y

$$\frac{x+1}{-2} = y - 1 = z - 2.$$

50. El plano pasa por los puntos $(5, 1, 3)$ y $(2, -2, 1)$ y es perpendicular al plano $2x + y - z = 4$.

51. Hallar la distancia del punto $(1, 0, 2)$ al plano $2x - 3y + 6z = 6$.

52. Hallar la distancia del punto $(3, -2, 4)$ al plano $2x - 5y + z = 10$.

53. Hallar la distancia de los planos $5x - 3y + z = 2$ y $5x - 3y + z = -3$.

54. Hallar la distancia del punto $(-5, 1, 3)$ a la recta dada por $x = 1 + t$, $y = 3 - 2t$ y $z = 5 - t$.

En los ejercicios 55 a 64, describir y dibujar la superficie.

55. $x + 2y + 3z = 6$

56. $y = z^2$

57. $y = \frac{1}{2}z$

58. $y = \cos z$

59. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$

60. $16x^2 + 16y^2 - 9z^2 = 0$

61. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} + z^2 = -1$

62. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{100} = 1$

63. $x^2 + z^2 = 4$

64. $y^2 + z^2 = 16$

65. Hallar una ecuación de una directriz de la superficie de revolución $y^2 + z^2 - 4x = 0$.

66. Encontrar una ecuación de la curva generadora de la superficie de revolución $x^2 + 2y^2 + z^2 = 3y$.

67. Determinar una ecuación para la superficie de revolución generada al rotar la curva $z^2 = 2y$ en el plano yz alrededor del eje y.

68. Encontrar una ecuación para la superficie de revolución generada al rotar la curva $2x + 3z = 1$ en el plano xz alrededor del eje x.

En los ejercicios 69 y 70, convertir las coordenadas rectangulares del punto a *a*) coordenadas cilíndricas y *b*) coordenadas esféricas.

69. $\left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2\right)$

70. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

En los ejercicios 71 y 72, convertir las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas esféricas.

71. $\left(100, -\dfrac{\pi}{6}, 50\right)$

72. $\left(81, -\dfrac{5\pi}{6}, 27\sqrt{3}\right)$

En los ejercicios 73 y 74, convertir las coordenadas esféricas del punto en coordenadas cilíndricas.

73. $\left(25, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

74. $\left(12, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$

En los ejercicios 75 y 76, convertir la ecuación rectangular a una ecuación en *a*) coordenadas cilíndricas y *b*) coordenadas esféricas.

75. $x^2 - y^2 = 2z$

76. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

En los ejercicios 77 y 78, expresar en coordenadas rectangulares la ecuación dada en coordenadas cilíndricas y dibujar su gráfica.

77. $r = 5\cos\theta$

78. $z = 4$

En los ejercicios 79 y 80, expresar en coordenadas rectangulares la ecuación dada en coordenadas esféricas y dibujar su gráfica.

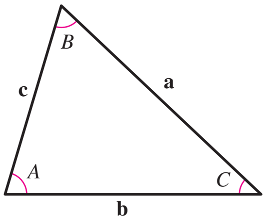
79. $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

80. $\rho = 3\cos\phi$

SP Solución de problemas

1. Utilizando vectores, demostrar la ley de los senos: Si **a**, **b** y **c** son los tres lados del triángulo de la figura, entonces

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\operatorname{sen} B}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{\operatorname{sen} C}{\|\mathbf{c}\|}.$$



2. Considerar la función $f(x) = \int_0^x \sqrt{t^4 + 1}\, dt$.

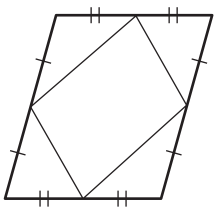
   a) Usar una herramienta de graficación para representar la función en el intervalo $-2 \le x \le 2$.

   b) Hallar un vector unitario paralelo a la gráfica de f en el punto (0, 0).

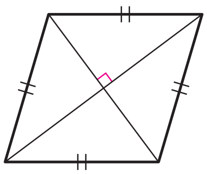
   c) Hallar un vector unitario perpendicular a la gráfica de f en el punto (0, 0).

   d) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (0, 0).

3. Utilizando vectores, demostrar que los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados de un paralelogramo forman un paralelogramo (ver la figura).



4. Utilizando vectores, demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares (ver la figura).



5. *a*) Hallar la distancia más corta entre el punto $Q(2, 0, 0)$ y la recta determinada por los puntos $P_1(0, 0, 1)$ y $P_2(0, 1, 2)$.

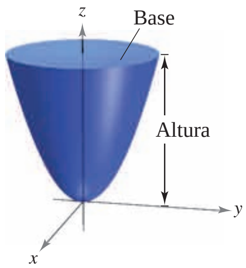
   b) Hallar la distancia más corta entre el punto $Q(2, 0, 0)$ y el segmento de recta que une los puntos $P_1(0, 0, 1)$ y $P_2(0, 1, 2)$.

6. Sea P_0 un punto en el plano con vector normal **n**. Describir el conjunto de puntos P en el plano para los que $(\mathbf{n} + \overrightarrow{PP_0})$ es el ortogonal a $(\mathbf{n} - \overrightarrow{PP_0})$.

7. *a*) Hallar el volumen del sólido limitado abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba por el plano $z = 1$.

   b) Hallar el volumen del sólido limitado abajo por el paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ y arriba por el plano $z = k$, donde $k > 0$.

   c) Mostrar que el volumen del sólido del inciso *b*) es igual a la mitad del producto del área de la base por la altura (ver la figura).



8. *a*) Usar el método de los discos para encontrar el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

   b) Hallar el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

9. Dibujar la gráfica de cada ecuación dada en coordenadas esféricas.

   a) $\rho = 2 \operatorname{sen} \phi$

   b) $\rho = 2 \cos \phi$

10. Dibujar la gráfica de cada ecuación dada en coordenadas cilíndricas.

    a) $r = 2 \cos \theta$

    b) $z = r^2 \cos 2\theta$

11. Demostrar la propiedad siguiente del producto vectorial.

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{z})\mathbf{w} - (\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{z}$$

12. Considerar la recta dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = -t + 3, \quad y = \tfrac{1}{2}t + 1, \quad z = 2t - 1$$

y el punto $(4, 3, s)$ para todo número real s.

   a) Dar la distancia entre el punto y la recta como una función de s.

   b) Usar una herramienta de graficación para representar la función del inciso *a*). Usar la gráfica para encontrar un valor de s tal que la distancia entre el punto y la recta sea mínima.

   c) Usar el *zoom* de una herramienta de graficación para amplificar varias veces la gráfica del inciso *b*). ¿Parece que la gráfica tenga asíntotas oblicuas? Explicar. Si parece tener asíntotas oblicuas, encontrarlas.

13. Una pelota que pesa 1 libra sujetada por una cuerda a un poste es lanzada en dirección opuesta al poste por una fuerza horizontal **u** que hace que la cuerda forme un ángulo de θ grados con el poste (ver la figura).

a) Determinar la tensión resultante en la cuerda y la magnitud de **u** cuando $\theta = 30°$.

b) Dar la tensión T de la cuerda y la magnitud de **u** como funciones de θ. Determinar los dominios de las funciones.

c) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
T							
$\|\mathbf{u}\|$							

d) Usar una herramienta de graficación para representar las dos funciones para $0° \leq \theta \leq 60°$.

e) Comparar T y $\|\mathbf{u}\|$ a medida que θ se aumenta.

f) Hallar (si es posible) $\lim\limits_{\theta \to \pi/2^-} T$ y $\lim\limits_{\theta \to \pi/2^-} \|\mathbf{u}\|$. ¿Son los resultados lo que se esperaba? Explicar.

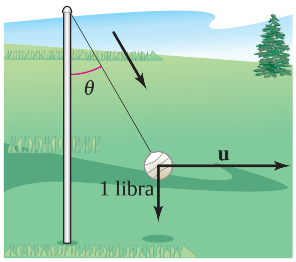


Figura para 13

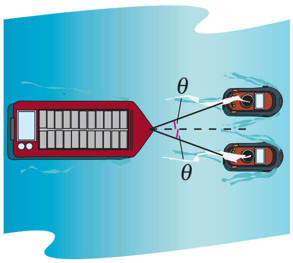


Figura para 14

14. Una barcaza cargada es remolcada por dos lanchas remolcadoras, y la magnitud de la resultante es de 6 000 libras dirigidas a lo largo del eje de la barcaza (ver la figura). Cada cuerda de remolque forma un ángulo de θ grados con el eje de la barcaza.

a) Hallar la tensión de las cuerdas del remolque si $\theta = 20°$.

b) Dar la tensión T en cada cuerda como una función de θ. Determinar el dominio de la función.

c) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

θ	10°	20°	30°	40°	50°	60°
T						

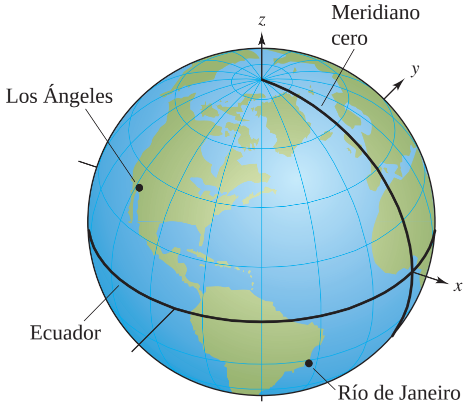
d) Usar una herramienta de graficación para representar la función tensión.

e) Explicar por qué la tensión aumenta a medida que θ aumenta.

15. Considerar los vectores $\mathbf{u} = \langle \cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 0\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle \cos\beta, \operatorname{sen}\beta, 0\rangle$, donde $\alpha > \beta$. Hallar el producto vectorial de los vectores y usar el resultado para demostrar la identidad

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

16. Los Ángeles se localiza a 34.05° de latitud Norte y 118.24° de longitud Oeste, y Río de Janeiro, Brasil, se localiza a 22.90° de latitud Sur y 43.23° de longitud Oeste (ver la figura). Suponer que la Tierra es esférica y tiene un radio de 4 000 millas.



a) Hallar las coordenadas esféricas para la ubicación de cada ciudad.

b) Hallar las coordenadas rectangulares para la ubicación de cada ciudad.

c) Hallar el ángulo (en radianes) entre los vectores del centro de la Tierra a cada ciudad.

d) Hallar la distancia s del círculo máximo entre las ciudades. (*Sugerencia*: $s = r\theta$.)

e) Repetir los incisos *a*) a *d*) con las ciudades de Boston, localizada a 42.36° latitud Norte y 71.06° longitud Oeste, y Honolulu, localizada a 21.31° latitud Norte y 157.86° longitud Oeste.

17. Considerar el plano que pasa por los puntos P, R y S. Mostrar que la distancia de un punto Q a este plano es

$$\text{Distancia} = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}$$

donde $\mathbf{u} = \overrightarrow{PR}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PS}$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{PQ}$.

18. Mostrar que la distancia entre los planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $ax + by + cz + d_2 = 0$ es

$$\text{Distancia} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

19. Mostrar que la curva de intersección del plano $z = 2y$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ es una elipse.

20. Leer el artículo "Tooth Tables: Solution of a Dental Problem by Vector Algebra" de Gary Hosler Meisters en *Mathematics Magazine*.

12 Funciones vectoriales

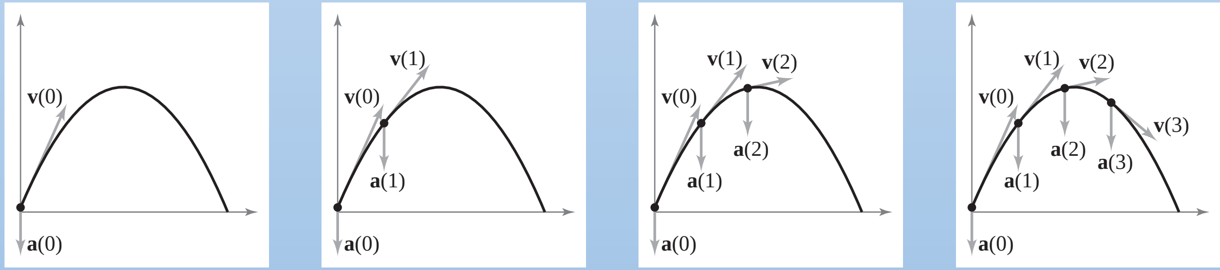
En este capítulo se introduce el concepto de funciones vectoriales. También pueden emplearse para estudiar curvas en el plano y en el espacio. Esas funciones también pueden usarse para estudiar el movimiento de un objeto a lo largo de una curva.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo analizar y bosquejar una curva en el espacio representada por una función vectorial. Cómo aplicar los conceptos de límites y continuidad a las funciones vectoriales. (12.1)
- Cómo derivar e integrar funciones vectoriales. (12.2)
- Cómo describir la velocidad y aceleración asociada con una función vectorial y cómo usar una función vectorial para analizar el movimiento de proyectiles. (12.3)
- Cómo encontrar vectores tangentes y vectores normales. (12.4)
- Cómo encontrar la longitud de arco y la curvatura de una curva. (12.5)

Jerry Driendl/Getty Images

Una rueda de la fortuna está construida usando los principios básicos de una bicicleta. Se puede usar una función vectorial para analizar el movimiento de una rueda de la fortuna, incluidas su posición y velocidad. (Ver solución de problemas, ejercicio 14.)



Una *función vectorial* mapea números reales a vectores. Se puede usar una función vectorial para representar el movimiento de una partícula a lo largo de una curva. En la sección 12.3 se usarán la primera y segunda derivadas de un vector de posición para encontrar la velocidad y aceleración de una partícula.

12.1 Funciones vectoriales

- **Analizar y dibujar una curva en el espacio dada por una función vectorial.**
- **Extender los conceptos de límite y continuidad a funciones vectoriales.**

Curvas en el espacio y funciones vectoriales

En la sección 10.2 se definió una *curva plana* como un conjunto de pares ordenados $(f(t), g(t))$ junto con sus ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \qquad \text{y} \qquad y = g(t)$$

donde f y g son funciones continuas de t en un intervalo I. Esta definición puede extenderse de manera natural al espacio tridimensional como sigue. Una **curva en el espacio** C es un conjunto de todas las ternas ordenadas $(f(t), g(t), h(t))$ junto con sus ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad \text{y} \qquad z = h(t)$$

donde f, g y h son funciones continuas de t en un intervalo I.

Antes de ver ejemplos de curvas en el espacio, se introduce un nuevo tipo de función, llamada **función vectorial**. Este tipo de función asigna vectores a números reales.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN VECTORIAL

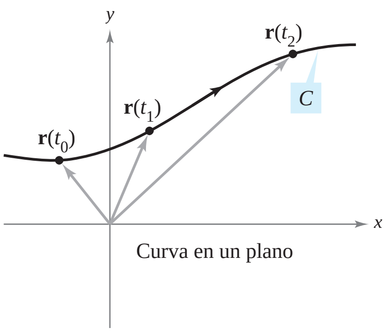
Una función de la forma

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \qquad \text{Plano.}$$

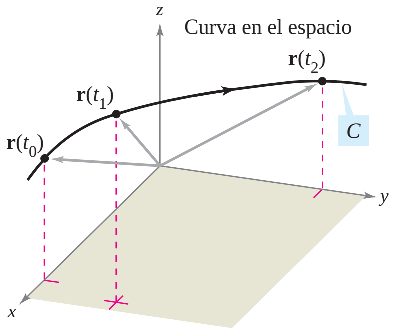
o

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \qquad \text{Espacio.}$$

es una **función vectorial**, donde las **funciones componentes** f, g y h son funciones del parámetro t. Algunas veces, las funciones vectoriales se denotan como $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t)\rangle$ o $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$.



Curva en un plano



Curva en el espacio

La curva C es trazada por el punto final del vector posición $\mathbf{r}(t)$
Figura 12.1

Técnicamente, una curva en el plano o en el espacio consiste en una colección de puntos y ecuaciones paramétricas que la definen. Dos curvas diferentes pueden tener la misma gráfica. Por ejemplo, cada una de las curvas dadas por

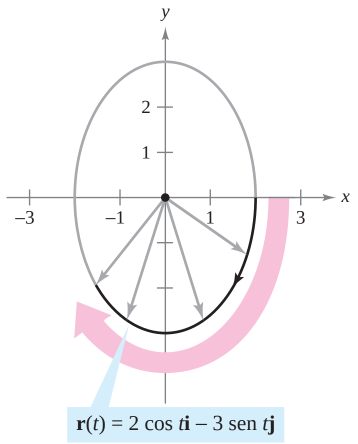
$$\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t^2\,\mathbf{i} + \cos t^2\,\mathbf{j}$$

tiene como gráfica el círculo unidad o unitario, pero estas ecuaciones no representan la misma curva porque el círculo está trazado de diferentes maneras.

Es importante asegurarse de ver la diferencia entre la función vectorial $\mathbf{r}$ y las funciones reales f, g y h. Todas son funciones de la variable real t, pero $\mathbf{r}(t)$ es un vector, mientras que $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son números reales (para cada valor específico de t).

Las funciones vectoriales juegan un doble papel en la representación de curvas. Tomando como parámetro t, que representa el tiempo, se puede usar una función vectorial para representar el *movimiento* a lo largo de una curva. O, en el caso más general, se puede usar una función vectorial para *trazar la gráfica* de una curva. En ambos casos, el punto final del vector posición $\mathbf{r}(t)$ coincide con el punto (x, y) o (x, y, z) de la curva dada por las ecuaciones paramétricas, como se muestra en la figura 12.1. La punta de flecha en la curva indica la *orientación* de la curva apuntando en la dirección de valores crecientes de t.

A menos que se especifique otra cosa, se considera que el **dominio** de una función vectorial $\mathbf{r}$ es la intersección de los dominios de las funciones componentes f, g y h. Por ejemplo, el dominio de $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + \sqrt{1-t}\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ es el intervalo $(0, 1]$.



La elipse es trazada en el sentido de las manecillas del reloj a medida que t aumenta de 0 a 2π

Figura 12.2

EJEMPLO 1 Trazado de una curva plana

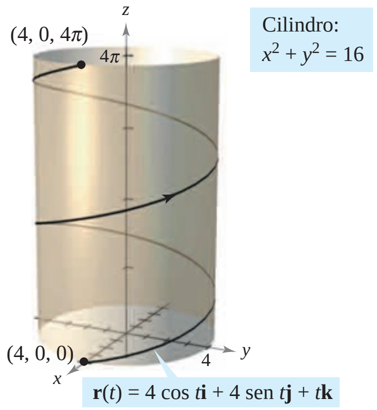
Dibujar la curva plana representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} - 3\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi. \qquad \text{Función vectorial.}$$

Solución A partir del vector de posición $\mathbf{r}(t)$, se pueden dar las ecuaciones paramétricas $x = 2\cos t$ y $y = -3\,\mathrm{sen}\,t$. Despejando $\cos t$ y $\mathrm{sen}\,t$ y utilizando la identidad $\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t = 1$ se obtiene la ecuación rectangular

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1. \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

La gráfica de esta ecuación rectangular es la elipse mostrada en la figura 12.2. La curva está orientada en el *sentido de las manecillas del reloj*. Es decir, cuando t aumenta de 0 a 2π, el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ se mueve en el sentido de las manecillas del reloj, y sus puntos finales describen la elipse.



A medida que t crece de 0 a 4π, se describen dos espirales sobre la hélice

Figura 12.3

EJEMPLO 2 Trazado de una curva en el espacio

Dibujar la curva en el espacio representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi. \qquad \text{Función vectorial.}$$

Solución De las dos primeras ecuaciones paramétricas $x = 4\cos t$ y $y = 4\,\mathrm{sen}\,t$, se obtiene

$$x^2 + y^2 = 16. \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

Esto significa que la curva se encuentra en un cilindro circular recto de radio 4, centrado en el eje z. Para localizar en este cilindro la curva, se usa la tercera ecuación paramétrica $z = t$. En la figura 12.3, nótese que a medida que t crece de 0 a 4π, el punto (x, y, z) sube en espiral por el cilindro describiendo una **hélice**. Un ejemplo de una hélice de la vida real se muestra en el dibujo inferior de la izquierda.

En 1953 Francis Crick y James D. Watson descubrieron la estructura de doble hélice del ADN.

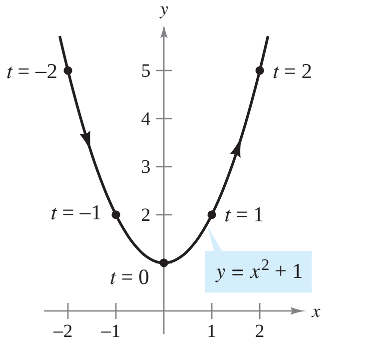
En los ejemplos 1 y 2 se dio una función vectorial y se pidió dibujar la curva correspondiente. Los dos ejemplos siguientes se refieren a la situación inversa: hallar una función vectorial para representar una gráfica dada. Claro está que si la gráfica se da en forma paramétrica, su representación por medio de una función vectorial es inmediata. Por ejemplo, para representar en el espacio la recta dada por

$$x = 2 + t, \quad y = 3t \quad \text{y} \quad z = 4 - t$$

se usa simplemente la función vectorial dada por

$$\mathbf{r}(t) = (2 + t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + (4 - t)\mathbf{k}.$$

Si no se da un conjunto de ecuaciones paramétricas para la gráfica, el problema de representar la gráfica mediante una función vectorial se reduce a hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas.



Hay muchas maneras de parametrizar esta gráfica. Una de ellas es tomar $x = t$
Figura 12.4

EJEMPLO 3 Representación de una gráfica mediante una función vectorial

Representar la parábola $y = x^2 + 1$ mediante una función vectorial.

Solución Aunque hay muchas maneras de elegir el parámetro t, una opción natural es tomar $x = t$. Entonces $y = t^2 + 1$ y se tiene

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}. \qquad \text{Función vectorial.}$$

Nótese en la figura 12.4 la orientación obtenida con esta elección particular de parámetro. Si se hubiera elegido como parámetro $x = -t$, la curva hubiera estado orientada en dirección opuesta.

EJEMPLO 4 Representación de una gráfica mediante una función vectorial

Dibujar la gráfica C representada por la intersección del semielipsoide

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{24} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z \geq 0$$

y el cilindro parabólico $y = x^2$. Después, hallar una función vectorial que represente la gráfica.

Solución En la figura 12.5 se muestra la intersección de las dos superficies. Como en el ejemplo 3, una opción natural para el parámetro es $x = t$. Con esta opción, se usa la ecuación dada $y = x^2$ para obtener $y = t^2$. Entonces

$$\frac{z^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = 1 - \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{24} = \frac{24 - 2t^2 - t^4}{24} = \frac{(6 + t^2)(4 - t^2)}{24}.$$

NOTA Las curvas en el espacio pueden especificarse de varias maneras. Por ejemplo, la curva del ejemplo 4 se describe como la intersección de dos superficies en el espacio. ■

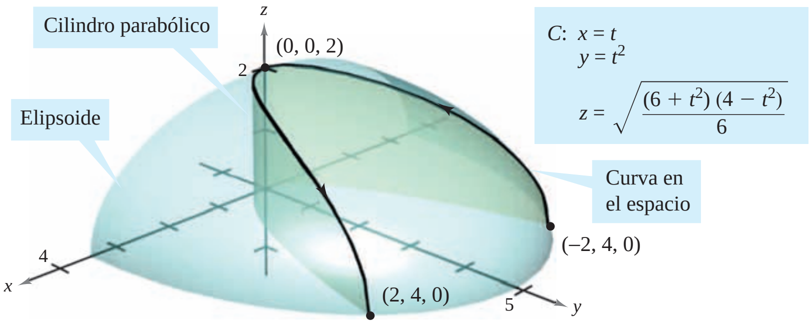
Como la curva se encuentra sobre el plano xy, hay que elegir para z la raíz cuadrada positiva. Así se obtienen las ecuaciones paramétricas siguientes.

$$x = t, \quad y = t^2 \qquad \text{y} \qquad z = \sqrt{\frac{(6 + t^2)(4 - t^2)}{6}}$$

La función vectorial resultante es

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sqrt{\frac{(6 + t^2)(4 - t^2)}{6}}\,\mathbf{k}, \quad -2 \leq t \leq 2. \qquad \text{Función vectorial.}$$

(Obsérvese que el componente $\mathbf{k}$ de $\mathbf{r}(t)$ implica $-2 \leq t \leq 2.$) De los puntos $(-2, 4, 0)$ y $(2, 4, 0)$ que se muestran en la figura 12.5, se ve que la curva es trazada a medida que t crece de -2 a 2.



La curva C es la intersección del semielipsoide y el cilindro parabólico
Figura 12.5

Límites y continuidad

Muchas de las técnicas y definiciones utilizadas en el cálculo de funciones reales se pueden aplicar a funciones vectoriales. Por ejemplo, las funciones vectoriales se pueden sumar y restar, multiplicar por un escalar, tomar su límite, derivarlas, y así sucesivamente. La estrategia básica consiste en aprovechar la linealidad de las operaciones vectoriales y extender las definiciones en una base, componente por componente. Por ejemplo, para sumar o restar dos funciones vectoriales (en el plano), se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) &= [f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] + [f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}] && \text{Suma.}\\
&= [f_1(t) + f_2(t)]\mathbf{i} + [g_1(t) + g_2(t)]\mathbf{j}\\
\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) &= [f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] - [f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}] && \text{Resta.}\\
&= [f_1(t) - f_2(t)]\mathbf{i} + [g_1(t) - g_2(t)]\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

De manera similar, para multiplicar y dividir una función vectorial por un escalar se tiene

$$\begin{aligned}
c\mathbf{r}(t) &= c[f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] && \text{Multiplicación escalar.}\\
&= cf_1(t)\mathbf{i} + cg_1(t)\mathbf{j}\\
\frac{\mathbf{r}(t)}{c} &= \frac{[f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}]}{c}, \quad c \neq 0 && \text{División escalar.}\\
&= \frac{f_1(t)}{c}\mathbf{i} + \frac{g_1(t)}{c}\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Esta extensión, componente por componente, de las operaciones con funciones reales a funciones vectoriales se ilustra más ampliamente en la definición siguiente del límite de una función vectorial.

DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

1. Si $\mathbf{r}$ es una función vectorial tal que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, entonces

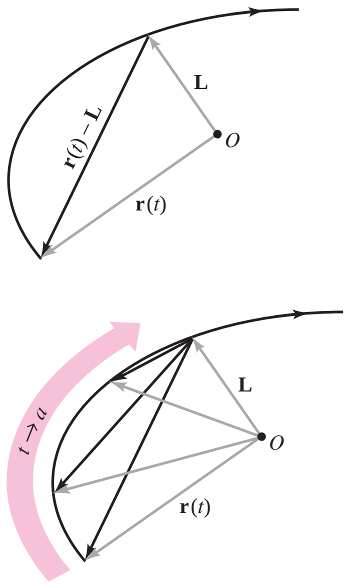
$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t\to a} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to a} g(t)\right]\mathbf{j} \qquad \text{Plano.}$$

siempre que existan los límites de f y g cuando $t \to a$.

2. Si $\mathbf{r}$ es una función vectorial tal que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, entonces

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t\to a} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to a} g(t)\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t\to a} h(t)\right]\mathbf{k} \qquad \text{Espacio.}$$

siempre que existan los límites de f, g y h cuando $t \to a$.



A medida que t tiende a a, $\mathbf{r}(t)$ tiende al límite $\mathbf{L}$. Para que el límite $\mathbf{L}$ exista, no es necesario que $\mathbf{r}(a)$ esté definida o que $\mathbf{r}(a)$ sea igual a $\mathbf{L}$

Figura 12.6

Si $\mathbf{r}(t)$ tiende al vector $\mathbf{L}$ cuando $t \to a$, la longitud del vector $\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}$ tiende a 0. Es decir,

$$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad t \to a.$$

Esto se ilustra de manera gráfica en la figura 12.6. Con esta definición del límite de una función vectorial, se pueden desarrollar versiones vectoriales de la mayor parte de los teoremas del límite dados en el capítulo 1. Por ejemplo, el límite de la suma de dos funciones vectoriales es la suma de sus límites individuales. También, se puede usar la orientación de la curva $\mathbf{r}(t)$ para definir límites unilaterales de funciones vectoriales. La definición siguiente extiende la noción de continuidad a funciones vectoriales.

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Una función vectorial $\mathbf{r}$ es **continua en un punto** dado por $t = a$ si el límite de $\mathbf{r}(t)$ cuando $t \to a$ existe y

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a).$$

Una función vectorial $\mathbf{r}$ es **continua en un intervalo** I si es continua en todos los puntos del intervalo.

De acuerdo con esta definición, una función vectorial es continua en $t = a$ si y sólo si cada una de sus funciones componentes es continua en $t = a$.

EJEMPLO 5 Continuidad de funciones vectoriales

Analizar la continuidad de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k} \qquad a \text{ es una constante.}$$

cuando $t = 0$.

Solución Cuando t tiende a 0, el límite es

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t) &= \left[\lim_{t\to 0} t\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to 0} a\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t\to 0} (a^2 - t^2)\right]\mathbf{k}\\ &= 0\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}\\ &= a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(0) &= (0)\mathbf{i} + (a)\mathbf{j} + (a^2)\mathbf{k}\\ &= a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}\end{aligned}$$

se concluye que $\mathbf{r}$ es continua en $t = 0$. Mediante un razonamiento similar, se concluye que la función vectorial $\mathbf{r}$ es continua en todo valor real de t.

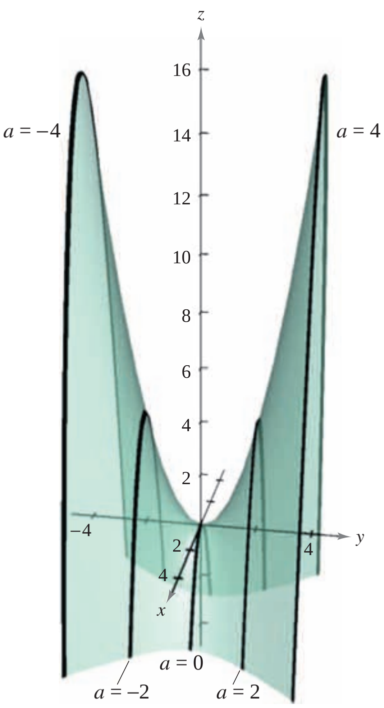
Para cada a, la curva representada por la función vectorial del ejemplo 5,

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k} \qquad a \text{ es una constante.}$$

es una parábola. Uno se puede imaginar cada una de estas parábolas como la intersección del plano vertical $y = a$ con el paraboloide hiperbólico

$$y^2 - x^2 = z$$

como se muestra en la figura 12.7.



Para todo a, la curva representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k}$ es una parábola
Figura 12.7

TECNOLOGÍA Casi cualquier tipo de dibujo tridimensional es difícil hacerlo a mano, pero trazar curvas en el espacio es especialmente difícil. El problema consiste en crear la impresión de tres dimensiones. Las herramientas de graficación usan diversas técnicas para dar la “impresión de tres dimensiones” en gráficas de curvas en el espacio: una manera es mostrar la curva en una superficie, como en la figura 12.7.

12.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, hallar el dominio de la función vectorial.

1. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{t+1}\mathbf{i} + \dfrac{t}{2}\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$

2. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{4-t^2}\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - 6t\mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} - e^t\,\mathbf{j} - t\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 4\cos t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)$ donde

$\mathbf{F}(t) = \cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \sqrt{t}\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{G}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

6. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{G}(t)$ donde

$\mathbf{F}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{G}(t) = \mathbf{i} + 4t\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}$

7. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)$ donde

$\mathbf{F}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{G}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$

8. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)$ donde

$\mathbf{F}(t) = t^3\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad \mathbf{G}(t) = \sqrt[3]{t}\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{t+1}\mathbf{j} + (t+2)\mathbf{k}$

En los ejercicios 9 a 12, evaluar (si es posible) la función vectorial en cada valor dado de *t*.

9. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} - (t-1)\mathbf{j}$

a) $\mathbf{r}(1)$ *b)* $\mathbf{r}(0)$ *c)* $\mathbf{r}(s+1)$

d) $\mathbf{r}(2+\Delta t) - \mathbf{r}(2)$

10. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

a) $\mathbf{r}(0)$ *b)* $\mathbf{r}(\pi/4)$ *c)* $\mathbf{r}(\theta - \pi)$

d) $\mathbf{r}(\pi/6 + \Delta t) - \mathbf{r}(\pi/6)$

11. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}(2)$ *b)* $\mathbf{r}(-3)$ *c)* $\mathbf{r}(t-4)$

d) $\mathbf{r}(1+\Delta t) - \mathbf{r}(1)$

12. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + t^{3/2}\,\mathbf{j} + e^{-t/4}\,\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}(0)$ *b)* $\mathbf{r}(4)$ *c)* $\mathbf{r}(c+2)$

d) $\mathbf{r}(9+\Delta t) - \mathbf{r}(9)$

En los ejercicios 13 y 14, hallar $\|\mathbf{r}(t)\|$.

14. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} 3t\,\mathbf{i} + \cos 3t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

En los ejercicios 15 a 18, representar el segmento de recta desde *P* hasta *Q* mediante una función vectorial y mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas.

15. $P\,(0, 0, 0)$, $Q\,(3, 1, 2)$ **16.** $P\,(0, 2, -1)$, $Q\,(4, 7, 2)$

17. $P\,(-2, 5, -3)$, $Q\,(-1, 4, 9)$

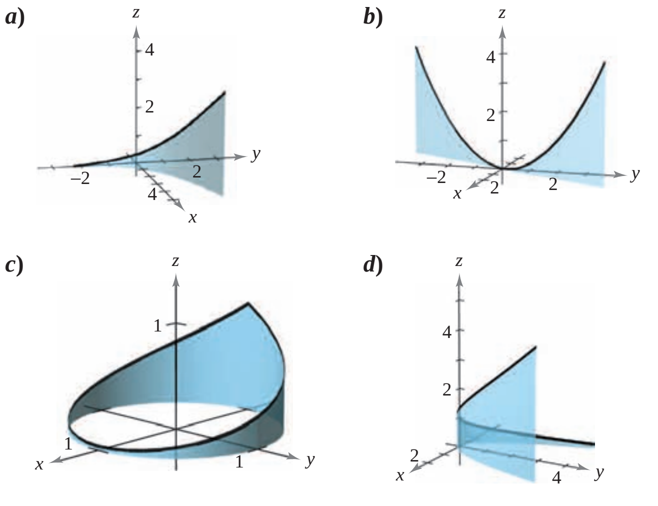
18. $P\,(1, -6, 8)$, $Q\,(-3, -2, 5)$

Para pensar **En los ejercicios 19 y 20, hallar $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)$. ¿Es el resultado una función vectorial? Explicar.**

19. $\mathbf{r}(t) = (3t-1)\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

20. $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos t, 2\operatorname{sen} t, t-2\rangle, \quad \mathbf{u}(t) = \langle 4\operatorname{sen} t, -6\cos t, t^2\rangle$

En los ejercicios 21 a 24, asociar cada ecuación con su gráfica. [Las gráficas están marcadas *a*), *b*), *c*) y *d*).]



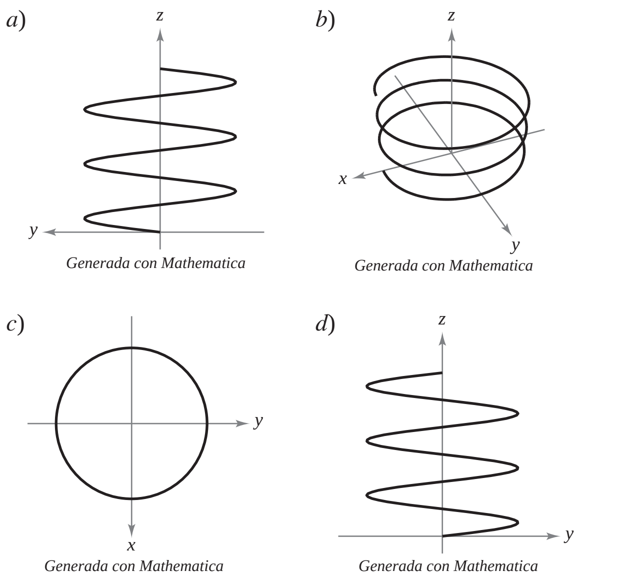
21. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad -2 \le t \le 2$

22. $\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\pi t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 1$

23. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + e^{0.75t}\,\mathbf{k}, \quad -2 \le t \le 2$

24. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} + \dfrac{2t}{3}\mathbf{k}, \quad 0.1 \le t \le 5$

25. ***Para pensar*** Las cuatro figuras siguientes son gráficas de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \dfrac{t}{4}\mathbf{k}$. Asociar cada una de las gráficas con el punto en el espacio desde el cual se ve la hélice. Los cuatro puntos son $(0, 0, 20)$, $(20, 0, 0)$, $(-20, 0, 0)$ y $(10, 20, 10)$.



26. Dibujar tres gráficas de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ vistas desde los puntos.

a) $(0, 0, 20)$ *b)* $(10, 0, 0)$ *c)* $(5, 5, 5)$

En los ejercicios 27 a 42, dibujar la curva representada por la función vectorial y dar la orientación de la curva.

27. $\mathbf{r}(t) = \frac{t}{4}\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}$

28. $\mathbf{r}(t) = (5 - t)\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}$

29. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

30. $\mathbf{r}(t) = (t^2 + t)\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j}$

31. $\mathbf{r}(\theta) = \cos\theta\mathbf{i} + 3\operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$

32. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j}$

33. $\mathbf{r}(\theta) = 3\sec\theta\mathbf{i} + 2\tan\theta\mathbf{j}$

34. $\mathbf{r}(t) = 2\cos^3 t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen}^3 t\mathbf{j}$

35. $\mathbf{r}(t) = (-t + 1)\mathbf{i} + (4t + 2)\mathbf{j} + (2t + 3)\mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

37. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

38. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{k}$

39. $\mathbf{r}(t) = 2\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$

40. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \frac{3}{2}t\mathbf{k}$

41. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, \frac{2}{3}t^3\rangle$

42. $\mathbf{r}(t) = \langle\cos t + t\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t\cos t, t\rangle$

CAS **En los ejercicios 43 a 46, usar un sistema algebraico por computadora a fin de representar gráficamente la función vectorial e identificar la curva común.**

43. $\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{k}$

44. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$

45. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}t\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{k}$

46. $\mathbf{r}(t) = -\sqrt{2}\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \sqrt{2}\operatorname{sen} t\mathbf{k}$

CAS ***Para pensar*** **En los ejercicios 47 y 48, usar un sistema algebraico por computadora a fin de representar gráficamente la función vectorial r(t). Para cada u(t), conjeturar sobre la transformación (si la hay) de la gráfica de r(t). Usar un sistema algebraico por computadora para verificar la conjetura.**

47. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

   a) $\mathbf{u}(t) = 2(\cos t - 1)\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

   b) $\mathbf{u}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

   c) $\mathbf{u}(t) = 2\cos(-t)\mathbf{i} + 2\operatorname{sen}(-t)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t)\mathbf{k}$

   d) $\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2\cos t\mathbf{k}$

   e) $\mathbf{u}(t) = 6\cos t\mathbf{i} + 6\operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

48. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

   a) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 - 2)\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

   b) $\mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

   c) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^3 + 4\right)\mathbf{k}$

   d) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{8}t^3\mathbf{k}$

   e) $\mathbf{u}(t) = (-t)\mathbf{i} + (-t)^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t)^3\mathbf{k}$

En los ejercicios 49 a 56, representar la curva plana por medio de una función vectorial. (Hay muchas respuestas correctas.)

49. $y = x + 5$

50. $2x - 3y + 5 = 0$

51. $y = (x - 2)^2$

52. $y = 4 - x^2$

53. $x^2 + y^2 = 25$

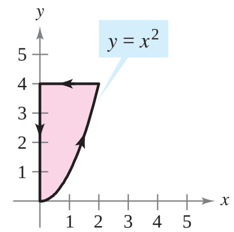
54. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

55. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

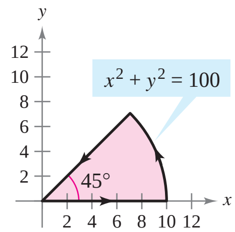
56. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

En los ejercicios 57 y 58, hallar funciones vectoriales que describan los límites de la región en la figura. Dar el intervalo correspondiente al parámetro de cada función.

57.



58.



En los ejercicios 59 a 66, dibujar la curva en el espacio representada por la intersección de las superficies. Después representar la curva por medio de una función vectorial usando el parámetro dado.

	Superficies	*Parámetro*
59.	$z = x^2 + y^2, \quad x + y = 0$	$x = t$
60.	$z = x^2 + y^2, \quad z = 4$	$x = 2\cos t$
61.	$x^2 + y^2 = 4, \quad z = x^2$	$x = 2\operatorname{sen} t$
62.	$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16, \quad x = z^2$	$z = t$
63.	$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x + z = 2$	$x = 1 + \operatorname{sen} t$
64.	$x^2 + y^2 + z^2 = 10, \quad x + y = 4$	$x = 2 + \operatorname{sen} t$
65.	$x^2 + z^2 = 4, \quad y^2 + z^2 = 4$	$x = t$ (primer octante)
66.	$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad xy = 4$	$x = t$ (primer octante)

67. Mostrar que la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\cos t\mathbf{j} + 2t\operatorname{sen} t\mathbf{k}$$

se encuentra en el cono $4x^2 = y^2 + z^2$. Dibujar la curva.

68. Mostrar que la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos t\mathbf{i} + e^{-t}\operatorname{sen} t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$$

se encuentra en el cono $z^2 = x^2 + y^2$. Dibujar la curva.

En los ejercicios 69 a 74, evaluar el límite.

69. $\lim_{t\to\pi}(t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\mathbf{k})$

70. $\lim_{t\to 2}\left(3t\mathbf{i} + \frac{2}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}\right)$

71. $\lim_{t\to 0}\left(t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \frac{1 - \cos t}{t}\mathbf{k}\right)$

72. $\lim_{t\to 1}\left(\sqrt{t}\,\mathbf{i} + \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1}{t - 1}\mathbf{k}\right)$

73. $\lim_{t\to 0}\left(e^t\mathbf{i} + \frac{\operatorname{sen} t}{t}\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}\right)$

74. $\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + \frac{t}{t^2 + 1}\mathbf{k}\right)$

En los ejercicios 75 a 80, determinar el (los) intervalo(s) en que la función vectorial es continua.

75. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}$

76. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + \sqrt{t-1}\,\mathbf{j}$

77. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \operatorname{arcsen} t\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}$

78. $\mathbf{r}(t) = 2e^{-t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \ln(t-1)\mathbf{k}$

79. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, t^2, \tan t\rangle$

80. $\mathbf{r}(t) = \left\langle 8, \sqrt{t}, \sqrt[3]{t}\right\rangle$

Desarrollo de conceptos

81. Considerar la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t-3)\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

Dar una función vectorial $\mathbf{s}(t)$ que sea la transformación especificada de $\mathbf{r}$.

a) Una traslación vertical tres unidades hacia arriba

b) Una traslación horizontal dos unidades en dirección del eje x negativo

c) Una traslación horizontal cinco unidades en dirección del eje y positivo

82. Dar la definición de continuidad para una función vectorial. Dar un ejemplo de una función vectorial que esté definida pero no sea continua en $t = 2$.

CAS **83.** El borde exterior de una resbaladilla tiene forma de una hélice de 1.5 metros de radio. La resbaladilla tiene una altura de 2 metros y hace una revolución completa desde arriba hacia abajo. Encontrar una función vectorial para la hélice. Usar un sistema algebraico por computadora para graficar la función. (Existen muchas respuestas correctas.)

Para discusión

84. ¿Cuál de las siguientes funciones vectoriales representa la misma gráfica?

a) $\mathbf{r}(t) = (-3\cos t + 1)\mathbf{i} + (5\,\text{sen}\,t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

b) $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + (-3\cos t + 1)\mathbf{j} + (5\,\text{sen}\,t + 2)\mathbf{k}$

c) $\mathbf{r}(t) = (3\cos t - 1)\mathbf{i} + (-5\,\text{sen}\,t - 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

d) $\mathbf{r}(t) = (-3\cos 2t + 1)\mathbf{i} + (5\,\text{sen}\,2t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

85. Sean $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ funciones vectoriales cuyos límites existen cuando $t \to c$. Demostrar que

$$\lim_{t\to c}\,[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \lim_{t\to c}\mathbf{r}(t) \times \lim_{t\to c}\mathbf{u}(t).$$

86. Sean $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ funciones vectoriales cuyos límites existen cuando $t \to c$. Demostrar que

$$\lim_{t\to c}\,[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \lim_{t\to c}\mathbf{r}(t) \cdot \lim_{t\to c}\mathbf{u}(t).$$

87. Demostrar que si $\mathbf{r}$ es una función vectorial continua en c, entonces $\|\mathbf{r}\|$ es continua en c.

88. Verificar que el recíproco de lo que se afirma en el ejercicio 87 no es verdad encontrando una función vectorial $\mathbf{r}$ tal que $\|\mathbf{r}\|$ sea continua en c pero $\mathbf{r}$ no sea continua en c.

En los ejercicios 89 y 90, dos partículas viajan a lo largo de las curvas de espacio r(*t*) y u(*t*). Una colisión ocurrirá en el punto de intersección *P* si ambas partículas están en *P* al mismo tiempo. ¿Colisionan las partículas? ¿Se intersecan sus trayectorias?

89. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (9t - 20)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

$\mathbf{u}(t) = (3t + 4)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (5t - 4)\mathbf{k}$

90. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

$\mathbf{u}(t) = (-2t + 3)\mathbf{i} + 8t\mathbf{j} + (12t + 2)\mathbf{k}$

Para pensar **En los ejercicios 91 y 92, dos partículas viajan a lo largo de las curvas de espacio r(*t*) y u(*t*).**

91. Si $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ se intersecan, ¿colisionarán las partículas?

92. Si las partículas colisionan, ¿se intersecan sus trayectorias $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$?

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 93 a 96, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que pruebe que es falsa.**

93. Si f, g y h son funciones polinomiales de primer grado, entonces la curva dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$ es una recta.

94. Si la curva dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$ es una recta, entonces f, g y h son funciones polinomiales de primer grado de t.

95. Dos partículas viajan a través de las curvas de espacio $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$. La intersección de sus trayectorias depende sólo de las curvas trazadas por $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ en tanto la colisión depende de la parametrización.

96. La función vectorial $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\cos t\,\mathbf{k}$ se encuentra en el paraboloide $x = y^2 + z^2$.

PROYECTO DE TRABAJO

Bruja de Agnesi

En la sección 3.5 se estudió una curva famosa llamada **bruja de Agnesi**. En este proyecto se profundiza sobre esta función.

Considérese un círculo de radio a centrado en el punto $(0, a)$ del eje y. Sea A un punto en la recta horizontal $y = 2a$, O el origen y B el punto donde el segmento OA corta el círculo. Un punto P está en la bruja de Agnesi si P se encuentra en la recta horizontal a través de B y en la recta vertical a través de A.

a) Mostrar que el punto A está descrito por la función vectorial

$$\mathbf{r}_A(\theta) = 2a\cot\theta\mathbf{i} + 2a\mathbf{j}, \quad 0 < \theta < \pi$$

donde θ es el ángulo formado por OA con el eje x positivo.

b) Mostrar que el punto B está descrito por la función vectorial

$$\mathbf{r}_B(\theta) = a\,\text{sen}\,2\theta\mathbf{i} + a(1 - \cos 2\theta)\mathbf{j}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

c) Combinar los resultados de los incisos *a*) y *b*) para hallar la función vectorial $\mathbf{r}(\theta)$ para la bruja de Agnesi. Usar una herramienta de graficación para representar esta curva para $a = 1$.

d) Describir los límites $\displaystyle\lim_{\theta\to 0^+}\mathbf{r}(\theta)$ y $\displaystyle\lim_{\theta\to \pi^-}\mathbf{r}(\theta)$.

e) Eliminar el parámetro θ y determinar la ecuación rectangular de la bruja de Agnesi. Usar una herramienta de graficación para representar esta función para $a = 1$ y comparar la gráfica con la obtenida en el inciso *c*).

12.2 Derivación e integración de funciones vectoriales

- **Derivar una función vectorial.**
- **Integrar una función vectorial.**

Derivación de funciones vectoriales

En las secciones 12.3 a 12.5 se estudian varias aplicaciones importantes que emplean cálculo de funciones vectoriales. Como preparación para ese estudio, esta sección está dedicada a las mecánicas de derivación e integración de funciones vectoriales.

La definición de la derivada de una función vectorial es paralela a la dada para funciones reales.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

La **derivada de una función vectorial r** se define como

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

para todo t para el cual existe el límite. Si $\mathbf{r}'(t)$ existe, entonces $\mathbf{r}$ es **derivable en t**. Si $\mathbf{r}'(t)$ existe para toda t en un intervalo abierto I, entonces $\mathbf{r}$ es **derivable en el intervalo I**. La derivabilidad de funciones vectoriales puede extenderse a intervalos cerrados considerando límites unilaterales.

NOTA Además de la notación $\mathbf{r}'(t)$, otras notaciones para la derivada de una función vectorial son

$$D_t[\mathbf{r}(t)], \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)] \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

La diferenciación de funciones vectoriales puede hacerse *componente por componente*. Para ver esto, considérese la función dada por

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}.$$

Aplicando la definición de derivada se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} - f(t)\mathbf{i} - g(t)\mathbf{j}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{j} \right\} \\
&= \left\{ \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \right\} \mathbf{i} + \left\{ \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \right\} \mathbf{j} \\
&= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}
\end{aligned}$$

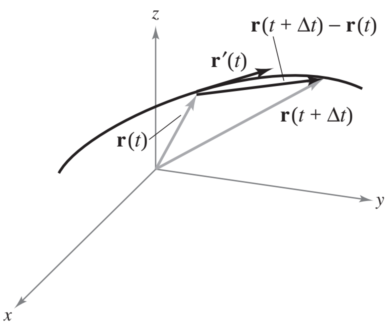


Figura 12.8

Este importante resultado se enuncia en el teorema de la página siguiente. Nótese que la derivada de la función vectorial $\mathbf{r}$ es también una función vectorial. En la figura 12.8 se ve que $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente a la curva dada por $\mathbf{r}(t)$ y que apunta en la dirección de los valores crecientes de t.

TEOREMA 12.1 DERIVACIÓN DE FUNCIONES VECTORIALES

1. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g son funciones derivables de t, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}. \qquad \text{Plano.}$$

2. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde f, g y h son funciones derivables de t, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}. \qquad \text{Espacio.}$$

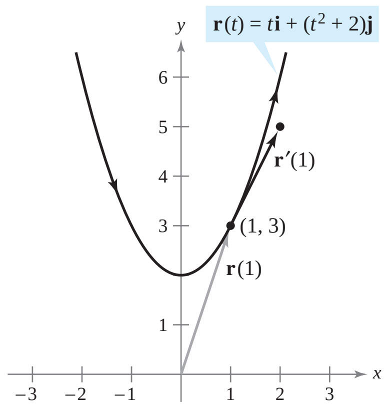


Figura 12.9

EJEMPLO 1 Derivación de funciones vectoriales

Para la función vectorial dada por $\mathbf{r}(t) + t\mathbf{i} + (t^2 + 2)\mathbf{j}$, encontrar $\mathbf{r}'(t)$. Entonces bosquejar la curva plana representada por $\mathbf{r}(t)$ y las gráficas de $\mathbf{r}(1)$ y $\mathbf{r}'(1)$.

Solución Derivar cada una de las componentes base para obtener

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \qquad \text{Derivada.}$$

Del vector de posición $\mathbf{r}(t)$, se pueden escribir las ecuaciones paramétricas $x = t$ y $y = t^2 + 2$. La ecuación rectangular correspondiente es $y = x^2 + 2$. Cuando $t = 1$, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. En la figura 12.9, $\mathbf{r}(1)$ se dibuja iniciando en el origen, y $\mathbf{r}'(1)$ se dibuja en el punto final de $\mathbf{r}(1)$.

Derivadas de orden superior de funciones vectoriales se obtienen por derivación sucesiva de cada una de las funciones componentes.

EJEMPLO 2 Derivadas de orden superior

Para la función vectorial dada por $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, hallar

a) $\mathbf{r}'(t)$ *b)* $\mathbf{r}''(t)$

c) $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$ *d)* $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$

Solución

a) $\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ Primera derivada.

b) $\mathbf{r}''(t) = -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$

$= -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ Segunda derivada.

c) $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) = \operatorname{sen} t \cos t - \operatorname{sen} t \cos t = 0$ Producto escalar.

d) $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 2 \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix}$ Producto vectorial.

$$= \begin{vmatrix} \cos t & 2 \\ -\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} t & 2 \\ -\cos t & 0 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} t & \cos t \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= 2\operatorname{sen} t\mathbf{i} - 2\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

En el inciso *c*) nótese que el producto escalar es una *función real*, no una función vectorial.

La parametrización de la curva representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

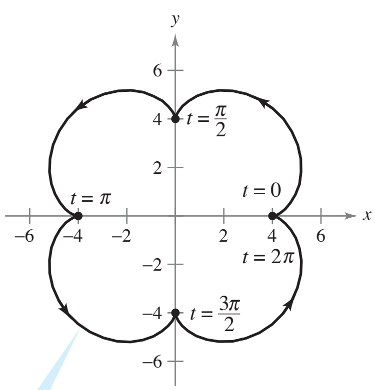
es **suave en un intervalo abierto** I si f', g' y h' son continuas en I y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo valor de t en el intervalo I.

EJEMPLO 3 Intervalos en los que una curva es suave

Hallar los intervalos en los que la epicicloide C dada por

$$\mathbf{r}(t) = (5\cos t - \cos 5t)\mathbf{i} + (5\,\mathrm{sen}\,t - \mathrm{sen}\,5t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

es suave.



$\mathbf{r}(t) = (5\cos t - \cos 5t)\mathbf{i} + (5\,\mathrm{sen}\,t - \mathrm{sen}\,5t)\mathbf{j}$

La epicicloide no es suave en los puntos en los que corta los ejes
Figura 12.10

Solución La derivada de $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{r}'(t) = (-5\,\mathrm{sen}\,t + 5\,\mathrm{sen}\,5t)\mathbf{i} + (5\cos t - 5\cos 5t)\mathbf{j}.$$

En el intervalo $[0, 2\pi]$, los únicos valores de t para los cuales

$$\mathbf{r}'(t) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$

son $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ y 2π. Por consiguiente, se concluye que C es suave en los intervalos

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

como se muestra en la figura 12.10.

NOTA En la figura 12.10, nótese que la curva no es suave en los puntos en los que tiene cambios abruptos de dirección. Tales puntos se llaman **cúspides** o **nodos**.

La mayoría de las reglas de derivación del capítulo 2 tienen sus análogas para funciones vectoriales, y varias de ellas se dan en el teorema siguiente. Nótese que el teorema contiene tres versiones de "reglas del producto". La propiedad 3 da la derivada del producto de una función real w y por una función vectorial $\mathbf{r}$, la propiedad 4 da la derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales y la propiedad 5 da la derivada del producto vectorial de dos funciones vectoriales (en el espacio). Nótese que la propiedad 5 sólo se aplica a funciones vectoriales tridimensionales, porque el producto vectorial no está definido para vectores bidimensionales.

TEOREMA 12.2 PROPIEDADES DE LA DERIVADA

Sean $\mathbf{r}$ y $\mathbf{u}$ funciones vectoriales derivables de t, w una función real derivable de t y c un escalar.

1. $D_t[c\mathbf{r}(t)] = c\mathbf{r}'(t)$
2. $D_t[\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{u}'(t)$
3. $D_t[w(t)\mathbf{r}(t)] = w(t)\mathbf{r}'(t) + w'(t)\mathbf{r}(t)$
4. $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t)$
5. $D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{u}(t)$
6. $D_t[\mathbf{r}(w(t))] = \mathbf{r}'(w(t))w'(t)$
7. Si $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c$, entonces $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la propiedad 4, sea

$$\mathbf{r}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}(t) = f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}$$

donde f_1, f_2, g_1 y g_2 son funciones derivables de t. Entonces,

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = f_1(t)f_2(t) + g_1(t)g_2(t)$$

y se sigue que

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] &= f_1(t)f_2'(t) + f_1'(t)f_2(t) + g_1(t)g_2'(t) + g_1'(t)g_2(t) \\ &= [f_1(t)f_2'(t) + g_1(t)g_2'(t)] + [f_1'(t)f_2(t) + g_1'(t)g_2(t)] \\ &= \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Las demostraciones de las otras propiedades se dejan como ejercicios (ver ejercicios 77 a 81 y ejercicio 84).

EXPLORACIÓN

Sea $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$. Dibujar la gráfica de $\mathbf{r}(t)$. Explicar por qué la gráfica es un círculo de radio 1 centrado en el origen. Calcular $\mathbf{r}(\pi/4)$ y $\mathbf{r}'(\pi/4)$. Colocar el vector $\mathbf{r}'(\pi/4)$ de manera que su punto inicial esté en el punto final de $\mathbf{r}(\pi/4)$. ¿Qué se observa? Mostrar que $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$ es constante y que $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ para todo t. ¿Qué relación tiene este ejemplo con la propiedad 7 del teorema 12.2?

EJEMPLO 4 Aplicación de las propiedades de la derivada

Para las funciones vectoriales

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln t\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

hallar

a) $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]$ y ***b)*** $D_t[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}'(t)]$.

Solución

a) Como $\mathbf{r}'(t) = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$ y $\mathbf{u}'(t) = 2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, se tiene

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] &= \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t) \\ &= \left(\frac{1}{t}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}\right) \cdot (2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{k}\right) \cdot (t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= 2 + 2 + (-1) + \frac{1}{t} \\ &= 3 + \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

b) Como $\mathbf{u}'(t) = 2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{u}''(t) = 2\mathbf{i}$, se tiene

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}'(t)] &= [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}''(t)] + [\mathbf{u}'(t) \times \mathbf{u}'(t)] \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^2 & -2t & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{0} \\ &= \begin{vmatrix} -2t & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} t^2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} t^2 & -2t \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} - (-2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}. \end{aligned}$$

NOTA Hacer de nuevo los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 4 pero formando primero los productos escalar y vectorial y derivando después para comprobar que se obtienen los mismos resultados. ■

Integración de funciones vectoriales

La siguiente definición es una consecuencia lógica de la definición de la derivada de una función vectorial.

DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

1. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g son continuas en $[a, b]$, entonces la **integral indefinida** (o **antiderivada**) de $\mathbf{r}$ es

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,dt\right]\mathbf{j}$$ Plano.

y su **integral definida** en el intervalo $a \leq t \leq b$ es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\mathbf{j}.$$

2. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde f, g y h son continuas en $[a, b]$, entonces la **integral indefinida** (o **antiderivada**) de $\mathbf{r}$ es

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int h(t)\,dt\right]\mathbf{k}$$ Espacio.

y su **integral definida** en el intervalo $a \leq t \leq b$ es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)\,dt\right]\mathbf{k}.$$

La antiderivada de una función vectorial es una familia de funciones vectoriales que difieren entre sí en un vector constante $\mathbf{C}$. Por ejemplo, si $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial tridimensional, entonces al hallar la integral indefinida $\int \mathbf{r}(t)\,dt$, se obtienen tres constantes de integración

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C_1, \qquad \int g(t)\,dt = G(t) + C_2, \qquad \int h(t)\,dt = H(t) + C_3$$

donde $F'(t) = f(t)$, $G'(t) = g(t)$ y $H'(t) = h(t)$. Estas tres constantes *escalares* forman un *vector* como constante de integración,

$$\begin{aligned}\int \mathbf{r}(t)\,dt &= [F(t) + C_1]\mathbf{i} + [G(t) + C_2]\mathbf{j} + [H(t) + C_3]\mathbf{k}\\ &= [F(t)\mathbf{i} + G(t)\mathbf{j} + H(t)\mathbf{k}] + [C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}]\\ &= \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$.

EJEMPLO 5 Integración de una función vectorial

Hallar la integral indefinida

$$\int (t\,\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\,dt.$$

Solución Integrando componente por componente se obtiene

$$\int (t\,\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\,dt = \frac{t^2}{2}\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \mathbf{C}.$$

El ejemplo 6 muestra cómo evaluar la integral definida de una función vectorial.

EJEMPLO 6 Integral definida de una función vectorial

Evaluar la integral

$$\int_0^1 \mathbf{r}(t)\,dt = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{t}\,\mathbf{i} + \frac{1}{t+1}\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}\right) dt.$$

Solución

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathbf{r}(t)\,dt &= \left(\int_0^1 t^{1/3}\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_0^1 e^{-t}\,dt\right)\mathbf{k} \\ &= \left[\left(\frac{3}{4}\right)t^{4/3}\right]_0^1 \mathbf{i} + \Big[\ln|t+1|\Big]_0^1 \mathbf{j} + \Big[-e^{-t}\Big]_0^1 \mathbf{k} \\ &= \frac{3}{4}\mathbf{i} + (\ln 2)\mathbf{j} + \left(1 - \frac{1}{e}\right)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Como ocurre con las funciones reales, se puede reducir la familia de primitivas de una función vectorial $\mathbf{r}'$ a una sola primitiva imponiendo una condición inicial a la función vectorial $\mathbf{r}$, como muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 La primitiva de una función vectorial

Hallar la primitiva de

$$\mathbf{r}'(t) = \cos 2t\mathbf{i} - 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{k}$$

que satisface la condición inicial $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{r}'(t)\,dt \\ &= \left(\int \cos 2t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int -2\operatorname{sen} t\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right)\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + C_1\right)\mathbf{i} + (2\cos t + C_2)\mathbf{j} + (\arctan t + C_3)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Haciendo $t = 0$ usando el hecho que $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(0) &= (0 + C_1)\mathbf{i} + (2 + C_2)\mathbf{j} + (0 + C_3)\mathbf{k} \\ &= 3\mathbf{i} + (-2)\mathbf{j} + \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Igualando los componentes correspondientes se obtiene

$$C_1 = 3, \qquad 2 + C_2 = -2, \qquad \text{y} \qquad C_3 = 1.$$

Por tanto, la primitiva que satisface la condición inicial dada es

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + 3\right)\mathbf{i} + (2\cos t - 4)\mathbf{j} + (\arctan t + 1)\mathbf{k}.$$

12.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, dibujar la curva plana representada por la función vectorial y dibujar los vectores $\mathbf{r}(t_0)$ y $\mathbf{r}'(t_0)$ para el valor dado de t_0. Colocar los vectores de manera que el punto inicial de $\mathbf{r}(t_0)$ esté en el origen y el punto inicial de $\mathbf{r}'(t_0)$ esté en el punto final de $\mathbf{r}(t_0)$. ¿Qué relación hay entre $\mathbf{r}'(t_0)$ y la curva?

1. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad t_0 = 2$
2. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}, \quad t_0 = 1$
3. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}, \quad t_0 = 2$
4. $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad t_0 = 1$
5. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}$
6. $\mathbf{r}(t) = 3 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j}, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}$
7. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{2t} \rangle, \quad t_0 = 0$
8. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, e^t \rangle, \quad t_0 = 0$

En los ejercicios 9 y 10, *a*) dibujar la curva en el espacio representada por la función vectorial, y *b*) dibujar los vectores $\mathbf{r}(t_0)$ y $\mathbf{r}'(t_0)$ para el valor dado de t_0.

9. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t_0 = \dfrac{3\pi}{2}$
10. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{3}{2}\mathbf{k}, \quad t_0 = 2$

En los ejercicios 11 a 22, hallar $\mathbf{r}'(t)$.

11. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} - 3t\mathbf{j}$
12. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (1 - t^3)\mathbf{j}$
13. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 5 \operatorname{sen} t \rangle$
14. $\mathbf{r}(t) = \langle t \cos t, -2 \operatorname{sen} t \rangle$
15. $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} - 7t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$
16. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{t}\mathbf{i} + 16t\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$
17. $\mathbf{r}(t) = a \cos^3 t\mathbf{i} + a \operatorname{sen}^3 t\mathbf{j} + \mathbf{k}$
18. $\mathbf{r}(t) = 4\sqrt{t}\,\mathbf{i} + t^2\sqrt{t}\,\mathbf{j} + \ln t^2\mathbf{k}$
19. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5te^t\mathbf{k}$
20. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \cos 3t, \operatorname{sen} 3t \rangle$
21. $\mathbf{r}(t) = \langle t \operatorname{sen} t, t \cos t, t \rangle$
22. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{arcsen} t, \arccos t, 0 \rangle$

En los ejercicios 23 a 30, hallar *a*) $\mathbf{r}'(t)$, *b*) $\mathbf{r}''(t)$ y *c*) $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

23. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j}$
24. $\mathbf{r}(t) = (t^2 + t)\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j}$
25. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\mathbf{j}$
26. $\mathbf{r}(t) = 8 \cos t\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j}$
27. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j} + \frac{1}{6}t^3\mathbf{k}$
28. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t + 3)\mathbf{j} + (3t - 5)\mathbf{k}$
29. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t + t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t \cos t, t \rangle$
30. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, t^2, \tan t \rangle$

En los ejercicios 31 y 32 se dan una función vectorial y su gráfica. La gráfica también muestra los vectores unitarios $\mathbf{r}'(t_0)/\|\mathbf{r}'(t_0)\|$ y $\mathbf{r}''(t_0)/\|\mathbf{r}''(t_0)\|$. Hallar estos dos vectores unitarios e identificarlos en la gráfica.

31. $\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\pi t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t_0 = -\frac{1}{4}$
32. $\mathbf{r}(t) = \frac{3}{2}t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, \quad t_0 = \frac{1}{4}$

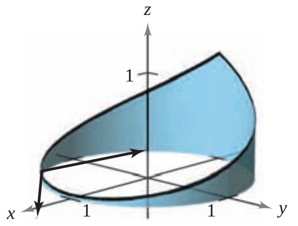


Figura para 31

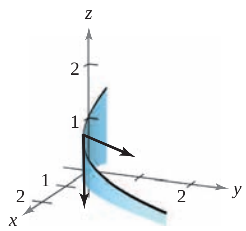


Figura para 32

En los ejercicios 33 a 42, hallar el (los) intervalo(s) abierto(s) en que la curva dada por la función vectorial es suave.

33. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$
34. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{t - 1}\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$
35. $\mathbf{r}(\theta) = 2 \cos^3 \theta\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen}^3 \theta\mathbf{j}$
36. $\mathbf{r}(\theta) = (\theta + \operatorname{sen} \theta)\mathbf{i} + (1 - \cos \theta)\mathbf{j}$
37. $\mathbf{r}(\theta) = (\theta - 2 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{i} + (1 - 2 \cos \theta)\mathbf{j}$
38. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{2t}{8 + t^3}\mathbf{i} + \dfrac{2t^2}{8 + t^3}\mathbf{j}$
39. $\mathbf{r}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$
40. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$
41. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + \tan t\mathbf{k}$
42. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + \frac{1}{4}t\mathbf{k}$

En los ejercicios 43 y 44, usar las propiedades de la derivada para encontrar lo siguiente.

a) $\mathbf{r}'(t)$ *b*) $\mathbf{r}''(t)$ *c*) $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]$

d) $D_t[3\mathbf{r}(t) - \mathbf{u}(t)]$ *e*) $D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)]$ *f*) $D_t[\|\mathbf{r}(t)\|], \quad t > 0$

43. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}(t) = 4t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$
44. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2 \cos t\mathbf{k},$

    $\mathbf{u}(t) = \dfrac{1}{t}\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2 \cos t\mathbf{k}$

En los ejercicios 45 y 46, hallar *a*) $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]$ y *b*) $D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)]$ en dos diferentes formas.

***i*) Hallar primero el producto y luego derivar.**

***ii*) Aplicar las propiedades del teorema 12.2.**

45. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}(t) = t^4\mathbf{k}$
46. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{j} + t\mathbf{k}$

En los ejercicios 47 y 48, hallar el ángulo θ entre $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ en función de t. Usar una herramienta de graficación para representar $\theta(t)$. Usar la gráfica para hallar todos los extremos de la función. Hallar todos los valores de t en que los vectores son ortogonales.

47. $\mathbf{r}(t) = 3 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j}$
48. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$

En los ejercicios 49 a 52, usar la definición de la derivada para hallar $\mathbf{r}'(t)$.

49. $\mathbf{r}(t) = (3t + 2)\mathbf{i} + (1 - t^2)\mathbf{j}$ **50.** $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + \dfrac{3}{t}\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$

51. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 0, 2t\rangle$ **52.** $\mathbf{r}(t) = \langle 0, \operatorname{sen} t, 4t\rangle$

En los ejercicios 53 a 60, hallar la integral indefinida.

53. $\displaystyle\int (2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt$ **54.** $\displaystyle\int \left(4t^3\,\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} - 4\sqrt{t}\,\mathbf{k}\right)dt$

55. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{t}\mathbf{i} + \mathbf{j} - t^{3/2}\,\mathbf{k}\right)dt$ **56.** $\displaystyle\int \left(\ln t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)dt$

57. $\displaystyle\int \left[(2t - 1)\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + 3\sqrt{t}\,\mathbf{k}\right]dt$

58. $\displaystyle\int (e^t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k})\,dt$

59. $\displaystyle\int \left(\sec^2 t\mathbf{i} + \frac{1}{1 + t^2}\mathbf{j}\right)dt$ **60.** $\displaystyle\int (e^{-t}\operatorname{sen} t\mathbf{i} + e^{-t}\cos t\mathbf{j})\,dt$

En los ejercicios 61 a 66, evaluar la integral definida.

61. $\displaystyle\int_0^1 (8t\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \mathbf{k})\,dt$ **62.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \sqrt[3]{t}\,\mathbf{k}\right)dt$

63. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} [(a\cos t)\mathbf{i} + (a\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\,dt$

64. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} [(\sec t\tan t)\mathbf{i} + (\tan t)\mathbf{j} + (2\operatorname{sen} t\cos t)\mathbf{k}]\,dt$

65. $\displaystyle\int_0^2 (t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - te^t\mathbf{k})\,dt$ **66.** $\displaystyle\int_0^3 \|t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}\|\,dt$

En los ejercicios 67 a 72, hallar $\mathbf{r}(t)$ para las condiciones dadas.

67. $\mathbf{r}'(t) = 4e^{2t}\mathbf{i} + 3e^t\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i}$

68. $\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{j} + 6\sqrt{t}\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

69. $\mathbf{r}''(t) = -32\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}'(0) = 600\sqrt{3}\mathbf{i} + 600\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

70. $\mathbf{r}''(t) = -4\cos t\mathbf{j} - 3\operatorname{sen} t\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'(0) = 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = 4\mathbf{j}$

71. $\mathbf{r}'(t) = te^{-t^2}\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

72. $\mathbf{r}'(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{t^2}\mathbf{j} + \dfrac{1}{t}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i}$

Desarrollo de conceptos

73. Definir la derivada de una función vectorial. Describir cómo hallar la derivada de una función vectorial y dar su interpretación geométrica.

74. ¿Cómo se encuentra la integral de una función vectorial?

75. Las tres componentes de la derivada de la función vectorial $\mathbf{u}$ son positivas en $t = t_0$. Describir el comportamiento de $\mathbf{u}$ en $t = t_0$.

76. La componente z de la derivada de la función vectorial $\mathbf{u}$ es 0 para t en el dominio de la función. ¿Qué implica esta información acerca de la gráfica de $\mathbf{u}$?

En los ejercicios 77 a 84, demostrar la propiedad. En todos los casos, suponer que r, u y v son funciones vectoriales derivables de *t*, que *w* es una función real derivable de *t*, y que *c* es un escalar.

77. $D_t[c\mathbf{r}(t)] = c\mathbf{r}'(t)$

78. $D_t[\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{u}'(t)$

79. $D_t[w(t)\mathbf{r}(t)] = w(t)\mathbf{r}'(t) + w'(t)\mathbf{r}(t)$

80. $D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{u}(t)$

81. $D_t[\mathbf{r}(w(t))] = \mathbf{r}'(w(t))w'(t)$

82. $D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$

83. $D_t\{\mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]\} = \mathbf{r}'(t) \cdot [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] + \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t)] + \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)]$

84. Si $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$ es una constante, entonces $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$.

85. ***Movimiento de una partícula*** Una partícula se mueve en el plano *xy* a lo largo de la curva representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$.

a) Usar una herramienta de graficación para representar $\mathbf{r}$. Describir la curva.

b) Hallar los valores mínimo y máximo de $\|\mathbf{r}'\|$ y $\|\mathbf{r}''\|$.

86. ***Movimiento de una partícula*** Una partícula se mueve en el plano *yz* a lo largo de la curva representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{j} + (3\operatorname{sen} t)\mathbf{k}$.

a) Describir la curva.

b) Hallar los valores mínimo y máximo de $\|\mathbf{r}'\|$ y $\|\mathbf{r}''\|$.

87. Considerar la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (e^t\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (e^t\cos t)\mathbf{j}.$$

Mostrar que $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ son siempre perpendiculares a cada uno.

Para discusión

88. ***Investigación*** Considerar la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j}$.

a) Trazar la gráfica de $\mathbf{r}(t)$. Usar una herramienta de graficación para verificar su gráfica.

b) Trazar los vectores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1.25)$ y $\mathbf{r}(1.25) - \mathbf{r}(1)$ sobre la gráfica en el inciso *a*).

c) Comparar el vector $\mathbf{r}'(1)$ con el vector

$$\frac{\mathbf{r}(1.25) - \mathbf{r}(1)}{1.25 - 1}.$$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 89 a 92, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre que es falsa.**

89. Si una partícula se mueve a lo largo de una esfera centrada en el origen, entonces su vector derivada es siempre tangente a la esfera.

90. La integral definida de una función vectorial es un número real.

91. $\dfrac{d}{dt}[\|\mathbf{r}(t)\|] = \|\mathbf{r}'(t)\|$

92. Si $\mathbf{r}$ y $\mathbf{u}$ son funciones vectoriales derivables de t, entonces $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}'(t)$.

12.3 Velocidad y aceleración

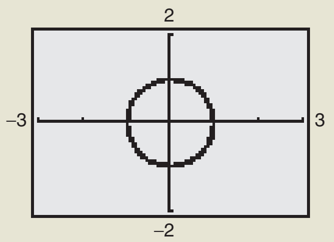
- Describir la velocidad y la aceleración relacionadas con una función vectorial.
- Usar una función vectorial para analizar el movimiento de un proyectil.

EXPLORACIÓN

Exploración de velocidad
Considérese el círculo dado por

$$\mathbf{r}(t) = (\cos \omega t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} \omega t)\mathbf{j}.$$

Usar una herramienta de graficación en modo *paramétrico* para representar este círculo para varios valores de ω. ¿Cómo afecta ω a la velocidad del punto final cuando se traza la curva? Para un valor dado de ω, ¿parece ser constante la velocidad? ¿Parece ser constante la aceleración? Explicar el razonamiento.



Velocidad y aceleración

Ahora se combina el estudio de ecuaciones paramétricas, curvas, vectores y funciones vectoriales a fin de formular un modelo para el movimiento a lo largo de una curva. Se empezará por ver el movimiento de un objeto en el plano. (El movimiento de un objeto en el espacio puede desarrollarse de manera similar.)

Conforme un objeto se mueve a lo largo de una curva en el plano, la coordenada x y la coordenada y de su centro de masa es cada una función del tiempo t. En lugar de utilizar f y g para representar estas dos funciones, es conveniente escribir $x = x(t)$ y $y = y(t)$. Por tanto, el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ toma la forma

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}. \qquad \text{Vector de posición.}$$

Lo mejor de este modelo vectorial para representar movimiento es que se pueden usar la primera y la segunda derivadas de la función vectorial $\mathbf{r}$ para hallar la velocidad y la aceleración del objeto. (Hay que recordar del capítulo anterior que la velocidad y la aceleración son cantidades vectoriales que tienen magnitud y dirección.) Para hallar los vectores velocidad y aceleración en un instante dado t, considérese un punto $Q(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$ que se aproxima al punto $P(x(t), y(t))$ a lo largo de la curva C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, como se muestra en la figura 12.11. A medida que $\Delta t \to 0$, la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$ (denotado por $\Delta\mathbf{r}$) se aproxima a la *dirección del movimiento* en el instante t.

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

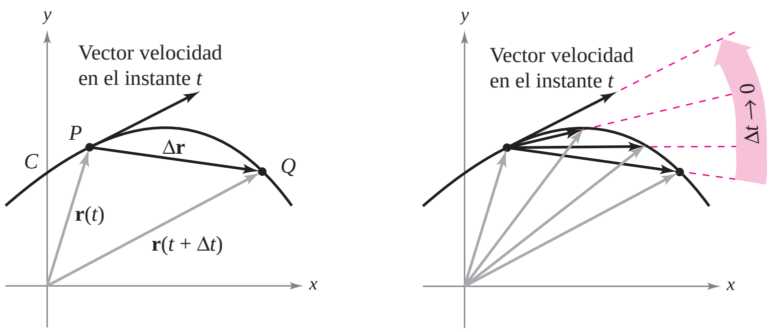
$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

Si este límite existe, se define como el **vector velocidad** o el **vector tangente** a la curva en el punto de P. Nótese que éste es el mismo límite usado en la definición de $\mathbf{r}'(t)$. Por tanto, la dirección de $\mathbf{r}'(t)$ da la dirección del movimiento en el instante t. La magnitud del vector $\mathbf{r}'(t)$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \|x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

da la **rapidez** del objeto en el instante t. De manera similar, se puede usar $\mathbf{r}''(t)$ para hallar la aceleración, como se indica en las definiciones siguientes.



Conforme $\Delta t \to 0$, $\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ se aproxima al vector velocidad

Figura 12.11

DEFINICIONES DE VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Si x y y son funciones de t que tienen primera y segunda derivadas y $\mathbf{r}$ es una función vectorial dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, entonces el vector velocidad, el vector aceleración y la rapidez en el instante t se definen como sigue.

$$\textbf{Velocidad} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$
$$\textbf{Aceleración} = \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}$$
$$\textbf{Rapidez} = \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

Para el movimiento a lo largo de una curva en el espacio, las definiciones son similares. Es decir, si $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, entonces

$$\textbf{Velocidad} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$
$$\textbf{Aceleración} = \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}$$
$$\textbf{Rapidez} = \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}.$$

EJEMPLO 1 Hallar la velocidad y la aceleración a lo largo de una curva plana

NOTA En el ejemplo 1, nótese que los vectores velocidad y aceleración son ortogonales en todo punto y en cualquier instante. Esto es característico del movimiento con rapidez constante. (Ver ejercicio 57.)

Hallar el vector velocidad, la rapidez y el vector aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de la curva plana C descrita por

$$\mathbf{r}(t) = 2\,\text{sen}\frac{t}{2}\mathbf{i} + 2\cos\frac{t}{2}\mathbf{j}.\qquad \text{Vector posición.}$$

Solución

El vector velocidad es

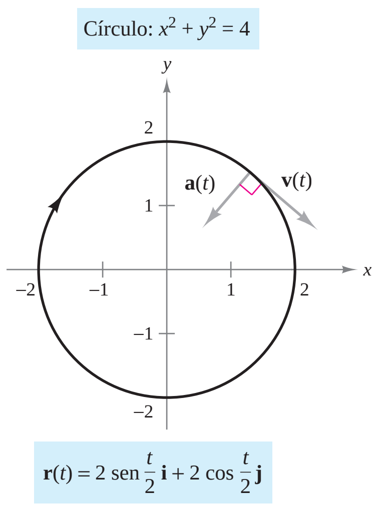
$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \cos\frac{t}{2}\mathbf{i} - \text{sen}\frac{t}{2}\mathbf{j}.\qquad \text{Vector velocidad.}$$

La rapidez (en cualquier instante) es

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\cos^2\frac{t}{2} + \text{sen}^2\frac{t}{2}} = 1.\qquad \text{Rapidez.}$$

El vector aceleración es

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -\frac{1}{2}\text{sen}\frac{t}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\mathbf{j}.\qquad \text{Vector aceleración.}$$



La partícula se mueve alrededor del círculo con rapidez constante
Figura 12.12

Las ecuaciones paramétricas de la curva del ejemplo 1 son

$$x = 2\,\text{sen}\frac{t}{2} \quad \text{y} \quad y = 2\cos\frac{t}{2}.$$

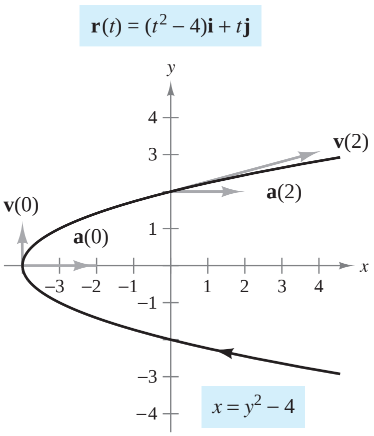
Eliminando el parámetro t, se obtiene la ecuación rectangular

$$x^2 + y^2 = 4.\qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

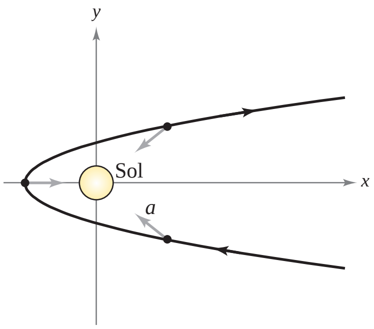
Por tanto, la curva es un círculo de radio 2 centrado en el origen, como se muestra en la figura 12.12. Como el vector velocidad

$$\mathbf{v}(t) = \cos\frac{t}{2}\mathbf{i} - \text{sen}\frac{t}{2}\mathbf{j}$$

tiene una magnitud constante pero cambia de dirección a medida que t aumenta, la partícula se mueve alrededor del círculo con una rapidez constante.



En todo punto en la curva, el vector aceleración apunta a la derecha
Figura 12.13



En todo punto de la órbita del cometa, el vector aceleración apunta hacia el Sol
Figura 12.14

EJEMPLO 2 Dibujo de los vectores velocidad y aceleración en el plano

Dibujar la trayectoria de un objeto que se mueve a lo largo de la curva plana dada por

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 4)\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} \qquad \text{Vector posición.}$$

y hallar los vectores velocidad y aceleración cuando $t = 0$ y $t = 2$.

Solución Utilizando las ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 4$ y $y = t$, se puede determinar que la curva es una parábola dada por $x = y^2 - 4$, como se muestra en la figura 12.13. El vector velocidad (en cualquier instante) es

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} \qquad \text{Vector velocidad.}$$

y el vector aceleración (en cualquier instante) es

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i}. \qquad \text{Vector aceleración.}$$

Cuando $t = 0$, los vectores velocidad y aceleración están dados por

$$\mathbf{v}(0) = 2(0)\mathbf{i} + \mathbf{j} = \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(0) = 2\mathbf{i}.$$

Cuando $t = 2$, los vectores velocidad y aceleración están dados por

$$\mathbf{v}(2) = 2(2)\mathbf{i} + \mathbf{j} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(2) = 2\mathbf{i}.$$

Si el objeto se mueve por la trayectoria mostrada en la figura 12.13, nótese que el vector aceleración es constante (tiene una magnitud de 2 y apunta hacia la derecha). Esto implica que la rapidez del objeto va decreciendo conforme el objeto se mueve hacia el vértice de la parábola, y la rapidez va creciendo conforme el objeto se aleja del vértice de la parábola.

Este tipo de movimiento *no* es el característico de cometas que describen trayectorias parabólicas en nuestro sistema solar. En estos cometas, el vector aceleración apunta siempre hacia el origen (el Sol), lo que implica que la rapidez del cometa aumenta a medida que se aproxima al vértice de su trayectoria y disminuye cuando se aleja del vértice. (Ver figura 12.14.)

EJEMPLO 3 Dibujo de los vectores velocidad y aceleración en el espacio

Dibujar la trayectoria de un objeto que se mueve a lo largo de la curva en el espacio C dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}, \quad t \geq 0 \qquad \text{Vector posición.}$$

y hallar los vectores velocidad y aceleración cuando $t = 1$.

Solución Utilizando las ecuaciones paramétricas $x = t$ y $y = t^3$, se puede determinar que la trayectoria del objeto se encuentra en el cilindro cúbico dado por $y = x^3$. Como $z = 3t$, el objeto parte de $(0, 0, 0)$ y se mueve hacia arriba a medida que t aumenta, como se muestra en la figura 12.15. Como $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, se tiene

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \qquad \text{Vector velocidad.}$$

y

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6t\mathbf{j}. \qquad \text{Vector aceleración.}$$

Cuando $t = 1$, los vectores velocidad y aceleración están dados por

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(1) = \mathbf{r}''(1) = 6\mathbf{j}.$$

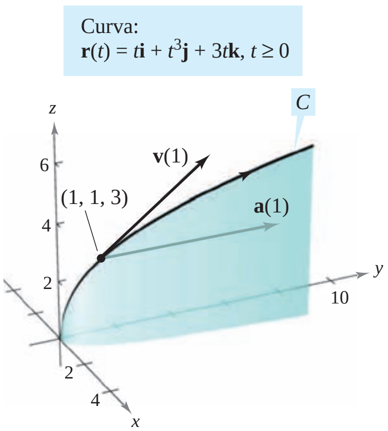


Figura 12.15

Hasta aquí se ha tratado de hallar la velocidad y la aceleración derivando la función de posición. En muchas aplicaciones prácticas se tiene el problema inverso, hallar la función de posición dadas una velocidad o una aceleración. Esto se demuestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Hallar una función posición por integración

Un objeto parte del reposo del punto $P(1, 2, 0)$ y se mueve con una aceleración

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \qquad \text{Vector aceleración.}$$

donde $\|\mathbf{a}(t)\|$ se mide en pies por segundo al cuadrado. Hallar la posición del objeto después de $t = 2$ segundos.

Solución A partir de la descripción del movimiento del objeto, se pueden deducir las *condiciones iniciales* siguientes. Como el objeto parte del reposo, se tiene

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}.$$

Como el objeto parte del punto $(x, y, z) = (1, 2, 0)$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(0) &= x(0)\mathbf{i} + y(0)\mathbf{j} + z(0)\mathbf{k}\\ &= 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\\ &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Para hallar la función de posición, hay que integrar dos veces, usando cada vez una de las condiciones iniciales para hallar la constante de integración. El vector velocidad es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,dt &= \int (\mathbf{j} + 2\mathbf{k})\,dt\\ &= t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$. Haciendo $t = 0$ y aplicando la condición inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$, se obtiene

$$\mathbf{v}(0) = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Por tanto, la *velocidad* en cualquier instante t es

$$\mathbf{v}(t) = t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}. \qquad \text{Vector velocidad.}$$

Integrando una vez más se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,dt &= \int (t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k})\,dt\\ &= \frac{t^2}{2}\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{C} = C_4\mathbf{i} + C_5\mathbf{j} + C_6\mathbf{k}$. Haciendo $t = 0$ y aplicando la condición inicial $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, se tiene

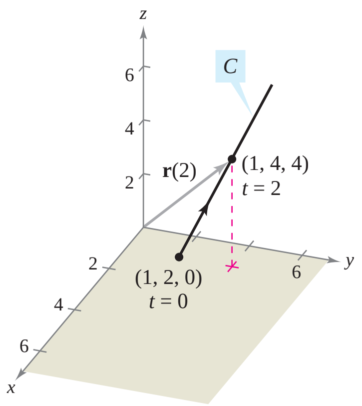
$$\mathbf{r}(0) = C_4\mathbf{i} + C_5\mathbf{j} + C_6\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad C_4 = 1,\ C_5 = 2,\ C_6 = 0.$$

Por tanto, el vector *posición* es

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \left(\frac{t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}. \qquad \text{Vector posición.}$$

La posición del objeto después de $t = 2$ segundos está dada por $\mathbf{r}(2) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, como se muestra en la figura 12.16.

Curva:
$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \left(\frac{t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$



El objeto tarda 2 segundos en moverse del punto (1, 2, 0) al punto (1, 4, 4) a lo largo de C
Figura 12.16

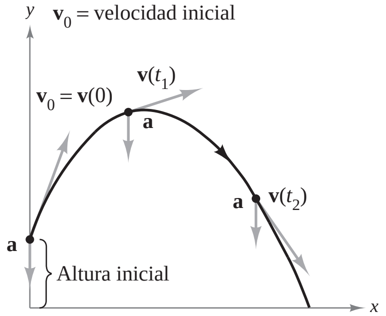


Figura 12.17

Movimiento de proyectiles

Ahora ya se dispone de lo necesario para deducir las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un proyectil. Supóngase que la gravedad es la única fuerza que actúa sobre un proyectil después de su lanzamiento. Por tanto, el movimiento ocurre en un plano vertical que puede representarse por el sistema de coordenadas xy con el origen correspondiente a un punto sobre la superficie de la Tierra (figura 12.17). Para un proyectil de masa m, la fuerza gravitatoria es

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$$ Fuerza gravitatoria.

donde la constante gravitatoria es $g = 32$ pies por segundo al cuadrado, o 9.81 metros por segundo al cuadrado. Por la **segunda ley del movimiento de Newton**, esta misma fuerza produce una aceleración $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, y satisface la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Por consiguiente, la aceleración del proyectil está dada por $m\mathbf{a} = -mg\mathbf{j}$, lo que implica que

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}.$$ Aceleración del proyectil.

EJEMPLO 5 Obtención de la función de posición de un proyectil

Un proyectil de masa m se lanza desde una posición inicial $\mathbf{r}_0$ con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$. Hallar su vector posición en función del tiempo.

Solución Se parte del vector aceleración $\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{j}$ y se integra dos veces.

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,dt = \int -g\mathbf{j}\,dt = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1$$

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,dt = \int (-gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1)\,dt = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{C}_1 t + \mathbf{C}_2$$

Se puede usar el hecho de que $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ y $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ para hallar los vectores constantes $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$. Haciendo esto se obtiene $\mathbf{C}_1 = \mathbf{v}_0$ y $\mathbf{C}_2 = \mathbf{r}_0$. Por consiguiente, el vector posición es

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0.$$ Vector posición.

En muchos problemas sobre proyectiles, los vectores constantes $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{v}_0$ no se dan explícitamente. A menudo se dan la altura inicial h, la rapidez inicial v_0 y el ángulo θ con que el proyectil es lanzado, como se muestra en la figura 12.18. De la altura dada, se puede deducir que $\mathbf{r}_0 = h\mathbf{j}$. Como la rapidez da la magnitud de la velocidad inicial, se sigue que $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$ y se puede escribir

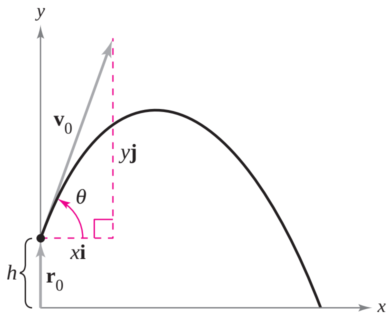
$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0 &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j}\\ &= (\|\mathbf{v}_0\| \cos\theta)\mathbf{i} + (\|\mathbf{v}_0\| \operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}\\ &= v_0 \cos\theta\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Por tanto, el vector posición puede expresarse en la forma

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0}$$ Vector posición.

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + tv_0\cos\theta\mathbf{i} + tv_0\operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + h\mathbf{j}\\ &= (v_0\cos\theta)t\mathbf{i} + \left[h + (v_0\operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}.\end{aligned}$$

$\|\mathbf{v}_0\| = v_0$ = rapidez inicial
$\|\mathbf{r}_0\| = h$ = altura inicial



$x = \|\mathbf{v}_0\| \cos\theta$
$y = \|\mathbf{v}_0\| \operatorname{sen}\theta$

Figura 12.18

TEOREMA 12.3 FUNCIÓN DE POSICIÓN DE UN PROYECTIL

Despreciando la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil lanzado de una altura inicial h con rapidez inicial v_0 y ángulo de elevación θ se describe por medio de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \theta)t\mathbf{i} + \left[h + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}$$

donde g es la constante de la gravedad.

EJEMPLO 6 La trayectoria de una pelota de béisbol

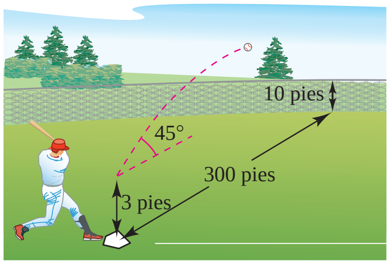


Figura 12.19

Una pelota de béisbol es golpeada 3 pies sobre el nivel del suelo a 100 pies por segundo y con un ángulo de 45° respecto al suelo, como se muestra en la figura 12.19. Hallar la altura máxima que alcanza la pelota de béisbol. ¿Pasará por encima de una valla de 10 pies de altura localizada a 300 pies del plato de lanzamiento?

Solución Se tienen dados $h = 3$, $v_0 = 100$ y $\theta = 45°$. Así, tomando $g = 32$ pies por segundo al cuadrado se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \left(100 \cos \frac{\pi}{4}\right)t\,\mathbf{i} + \left[3 + \left(100 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)t - 16t^2\right]\mathbf{j}\\ &= \left(50\sqrt{2}\,t\right)\mathbf{i} + \left(3 + 50\sqrt{2}\,t - 16t^2\right)\mathbf{j}\\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = 50\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \left(50\sqrt{2} - 32t\right)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

La altura máxima se alcanza cuando

$$y'(t) = 50\sqrt{2} - 32t = 0$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}t &= \frac{25\sqrt{2}}{16}\\ &\approx 2.21 \text{ segundos.}\end{aligned}$$

Por tanto, la altura máxima que alcanza la pelota es

$$\begin{aligned}y &= 3 + 50\sqrt{2}\left(\frac{25\sqrt{2}}{16}\right) - 16\left(\frac{25\sqrt{2}}{16}\right)^2\\ &= \frac{649}{8}\\ &\approx 81 \text{ pies.}\end{aligned}$$

Altura máxima cuando $t \approx 2.21$ segundos.

La pelota está a 300 pies de donde fue golpeada cuando

$$300 = x(t) = 50\sqrt{2}\,t.$$

Despejando t de esta ecuación se obtiene $t = 3\sqrt{2} \approx 4.24$ segundos. En este instante, la altura de la pelota es

$$\begin{aligned}y &= 3 + 50\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}\right) - 16\left(3\sqrt{2}\right)^2\\ &= 303 - 288\\ &= 15 \text{ pies.}\end{aligned}$$

Altura cuando $t \approx 4.24$ segundos.

Por consiguiente, la pelota pasará sobre la valla de 10 pies.

12.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, el vector posición r describe la trayectoria de un objeto que se mueve en el plano *xy*. Dibujar una gráfica de la trayectoria y dibujar los vectores velocidad y aceleración en el punto dado.

	Función posición	*Punto*
1.	$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}$	$(3, 0)$
2.	$\mathbf{r}(t) = (6-t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$	$(3, 3)$
3.	$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$	$(4, 2)$
4.	$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (-t^2+4)\mathbf{j}$	$(1, 3)$
5.	$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$	$(1, 1)$
6.	$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{4}t^3+1\right)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$	$(3, 2)$
7.	$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}$	$\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$
8.	$\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}$	$(3, 0)$
9.	$\mathbf{r}(t) = \langle t - \mathrm{sen}\,t, 1-\cos t\rangle$	$(\pi, 2)$
10.	$\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, e^{t}\rangle$	$(1, 1)$

En los ejercicios 11 a 20, el vector posición r describe la trayectoria de un objeto que se mueve en el espacio. Hallar velocidad, rapidez y aceleración del objeto.

11. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \dfrac{1}{4}t^2\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sqrt{9-t^2}\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 4t, 3\cos t, 3\,\mathrm{sen}\,t\rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t, t^2\rangle$

19. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t\cos t, e^t\,\mathrm{sen}\,t, e^t\rangle$

20. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln t, \dfrac{1}{t}, t^4\right\rangle$

Aproximación lineal **En los ejercicios 21 y 22 se dan la gráfica de la función vectorial r(*t*) y un vector tangente a la gráfica en $t = t_0$.**

***a*) Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la gráfica en $t = t_0$.**

***b*) Utilizar las ecuaciones de la recta para aproximar $\mathbf{r}(t_0 + 0.1)$.**

21. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, -t^2, \frac{1}{4}t^3\right\rangle, \quad t_0 = 1$

22. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \sqrt{25-t^2}, \sqrt{25-t^2}\right\rangle, \quad t_0 = 3$

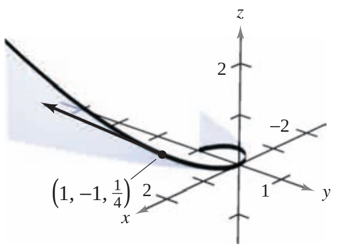


Figura para 21

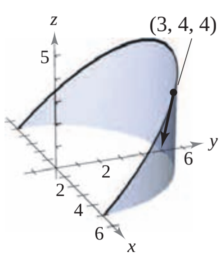


Figura para 22

En los ejercicios 23 a 28, usar la función aceleración dada para determinar los vectores velocidad y posición. Después hallar la posición en el instante $t = 2$.

23. $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

24. $\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

$\mathbf{v}(0) = 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

25. $\mathbf{a}(t) = t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

$\mathbf{v}(1) = 5\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{0}$

26. $\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{k}$

$\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

27. $\mathbf{a}(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}$

$\mathbf{v}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$

28. $\mathbf{a}(t) = e^t\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$

$\mathbf{v}(0) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

Movimiento de proyectiles **En los ejercicios 29 a 44, usar el modelo para el movimiento de un proyectil, suponiendo que no hay resistencia del aire.**

29. Hallar la función vectorial de la trayectoria de un proyectil lanzado desde una altura de 10 pies sobre el suelo con una velocidad inicial de 88 pies por segundo y con un ángulo de 30° sobre la horizontal. Usar una herramienta de graficación para representar la trayectoria del proyectil.

30. Determinar la altura máxima y el alcance de un proyectil disparado desde una altura de 3 pies sobre el nivel del suelo con velocidad inicial de 900 pies por segundo y con un ángulo de 45° sobre la horizontal.

31. Una pelota de béisbol es golpeada 3 pies sobre el nivel del suelo, se aleja del bate con un ángulo de 45° y es cachada por un jardinero a 3 pies sobre el nivel del suelo y a 300 pies del plato de lanzamiento. ¿Cuál es la rapidez inicial de la pelota y qué altura alcanza?

32. Un jugador de béisbol en segunda base lanza una pelota al jugador de primera base a 90 pies. La pelota es lanzada desde 5 pies sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de 50 millas por hora y con un ángulo de 15° con la horizontal. ¿A qué altura cacha la pelota el jugador de primera base?

33. Eliminar el parámetro t de la función de posición para el movimiento de un proyectil y mostrar que la ecuación rectangular es

$$y = -\frac{16\sec^2\theta}{v_0^2}x^2 + (\tan\theta)x + h.$$

34. La trayectoria de una pelota la da la ecuación rectangular

$y = x - 0.005x^2.$

Usar el resultado del ejercicio 33 para hallar la función de posición. Después hallar la velocidad y la dirección de la pelota en el punto en que ha recorrido 60 pies horizontalmente.

35. ***Modelo matemático*** La trayectoria de una pelota lanzada por un jugador de béisbol es videograbada y después se analiza la grabación con una cuadrícula que cubre la pantalla. La cinta se detiene tres veces y se miden las posiciones de la pelota. Las coordenadas son aproximadamente (0, 6.0), (15, 10.6) y (30, 13.4). (La coordenada x mide la distancia horizontal al jugador en pies y la coordenada y mide la altura en pies.)

a) Usar una herramienta de graficación para hallar un modelo cuadrático para los datos.

b) Usar una herramienta de graficación para representar los datos y la gráfica del modelo.

c) Determinar la altura máxima de la pelota.

d) Hallar la velocidad inicial de la pelota y el ángulo al que fue lanzada.

36. Una pelota de béisbol es golpeada desde una altura de 2.5 pies sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de 140 pies por segundo y con un ángulo de 22° sobre la horizontal. Usar una herramienta de graficación para representar la trayectoria de la pelota y determinar si pasará sobre una valla de 10 pies de altura localizada a 375 pies del plato de lanzamiento.

37. El Rogers Centre en Toronto, Ontario, tiene una cerca en su campo central que tiene 10 pies de altura y está a 400 pies del plato de lanzamiento. Una pelota es golpeada a 3 pies sobre el nivel del suelo y se da el batazo a una velocidad de 100 millas por hora.

a) La pelota se aleja del bate formando un ángulo de $\theta = \theta_0$ con la horizontal. Dar la función vectorial para la trayectoria de la pelota.

b) Usar una herramienta de graficación para representar la función vectorial para $\theta_0 = 10°$, $\theta_0 = 15°$, $\theta_0 = 20°$ y $\theta_0 = 25°$. Usar las gráficas para aproximar el ángulo mínimo requerido para que el golpe sea un *home run*.

c) Determinar analíticamente el ángulo mínimo requerido para que el golpe sea un *home run*.

38. El mariscal de campo de un equipo de fútbol americano lanza un pase a una altura de 7 pies sobre el campo de juego, y el balón de fútbol lo captura un receptor a 30 yardas a una altura de 4 pies. El pase se lanza con un ángulo de 35° con la horizontal.

a) Hallar la rapidez del balón de fútbol al ser lanzado.

b) Hallar la altura máxima del balón de fútbol.

c) Hallar el tiempo que el receptor tiene para alcanzar la posición apropiada después de que el mariscal de campo lanza el balón de fútbol.

39. Un expulsor de pacas consiste en dos bandas de velocidad variable al final del expulsor. Su función es lanzar las pacas a un camión. Al cargar la parte trasera del camión, una paca debe lanzarse a una posición 8 pies hacia arriba y 16 pies detrás del expulsor.

a) Hallar la velocidad inicial mínima de la paca y el ángulo correspondiente al que debe ser lanzada de la expulsora.

b) La expulsora tiene un ángulo fijo de 45°. Hallar la velocidad inicial requerida.

40. Un bombardero vuela a una altitud de 30 000 pies a una velocidad de 540 millas por hora (ver la figura). ¿Cuándo debe lanzar la bomba para que pegue en el blanco? (Dar la respuesta en términos del ángulo de depresión del avión con relación al blanco.) ¿Cuál es la velocidad de la bomba en el momento del impacto?

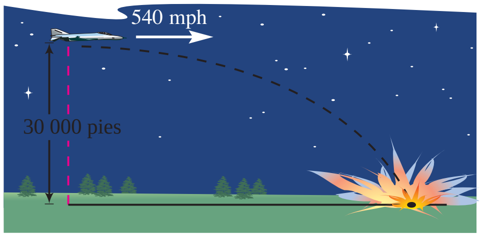


Figura para 40

41. Un disparo de un arma con una velocidad de 1 200 pies por segundo se lanza hacia un blanco a 3 000 pies de distancia. Determinar el ángulo mínimo de elevación del arma.

42. Un proyectil se lanza desde el suelo con un ángulo de 12° con la horizontal. El proyectil debe tener un alcance de 200 pies. Hallar la velocidad inicial mínima requerida.

43. Usar una herramienta de graficación para representar la trayectoria de un proyectil para los valores dados de θ y v_0. En cada caso, usar la gráfica para aproximar la altura máxima y el alcance del proyectil. (Suponer que el proyectil se lanza desde el nivel del suelo.)

a) $\theta = 10°$, $v_0 = 66$ pies/s *b*) $\theta = 10°$, $v_0 = 146$ pies/s

c) $\theta = 45°$, $v_0 = 66$ pies/s *d*) $\theta = 45°$, $v_0 = 146$ pies/s

e) $\theta = 60°$, $v_0 = 66$ pies/s *f*) $\theta = 60°$, $v_0 = 146$ pies/s

44. Hallar el ángulo con el que un objeto debe lanzarse para tener *a*) el alcance máximo y *b*) la altura máxima.

Movimiento de un proyectil **En los ejercicios 45 y 46, usar el modelo para el movimiento de un proyectil, suponiendo que no hay resistencia. [$a(t) = -9.8$ metros por segundo al cuadrado.]**

45. Determinar la altura y el alcance máximos de un proyectil disparado desde una altura de 1.5 metros sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de 100 metros por segundo y con un ángulo de 30° sobre la horizontal.

46. Un proyectil se dispara desde el nivel del suelo con un ángulo de 8° con la horizontal. El proyectil debe tener un alcance de 50 metros. Hallar la velocidad mínima necesaria.

Movimiento cicloidal **En los ejercicios 47 y 48, considerar el movimiento de un punto (o partícula) en la circunferencia de un círculo que rueda. A medida que el círculo rueda genera la cicloide $\mathbf{r}(t) = b(\omega t - \operatorname{sen} \omega t)\mathbf{i} + b(1 - \cos \omega t)\mathbf{j}$, donde ω es la velocidad angular constante del círculo y b es el radio del círculo.**

47. Hallar los vectores velocidad y aceleración de la partícula. Usar los resultados para determinar los instantes en que la rapidez de la partícula será *a*) cero y *b*) máxima.

48. Hallar la velocidad máxima de un punto de un neumático de automóvil de radio 1 pie cuando el automóvil viaja a 60 millas por hora. Comparar esta velocidad con la velocidad del automóvil.

Movimiento circular **En los ejercicios 49 a 52, considerar una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria circular de radio b descrita por $\mathbf{r}(t) = b \cos \omega t\mathbf{i} + b \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}$ donde $\omega = du/dt$ es la velocidad angular constante.**

49. Hallar el vector velocidad y mostrar que es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$.

50. *a*) Mostrar que la rapidez de la partícula es $b\omega$.

b) Usar una herramienta de graficación en modo *paramétrico* para representar el círculo para $b = 6$. Probar distintos valores de ω. ¿Dibuja la herramienta de graficación más rápido los círculos para los valores mayores de ω?

51. Hallar el vector aceleración y mostrar que su dirección es siempre hacia el centro del círculo.

52. Mostrar que la magnitud del vector aceleración es $b\omega^2$.

Movimiento circular **En los ejercicios 53 y 54, usar los resultados de los ejercicios 49 a 52.**

53. Una piedra que pesa 1 libra se ata a un cordel de dos pies de largo y se hace girar horizontalmente (ver la figura). El cordel se romperá con una fuerza de 10 libras. Hallar la velocidad máxima que la piedra puede alcanzar sin que se rompa el cordel. (Usar $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $m = \frac{1}{32}$.)

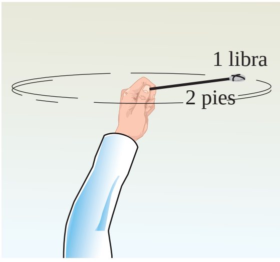


Figura para 53

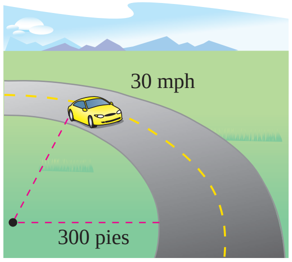


Figura para 54

54. Un automóvil de 3 400 libras está tomando una curva circular de 300 pies de radio a 30 millas por hora (ver la figura). Supuesto que la carretera está nivelada, hallar la fuerza necesaria entre los neumáticos y el pavimento para que el automóvil mantenga la trayectoria circular sin derrapar. (Usar $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $m = 3\ 400/32$.) Hallar el ángulo de peralte necesario para que ninguna fuerza de fricción lateral sea ejercida sobre los neumáticos del automóvil.

55. ***Lanzamiento de peso*** La trayectoria de un objeto lanzado con un ángulo θ es

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \theta)t\,\mathbf{i} + \left[h + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}$$

donde v_0 es la rapidez inicial, h es la altura inicial, t es el tiempo en segundos y g es la aceleración debida a la gravedad. Verificar que el objeto permanecerá en el aire

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2gh}}{g} \text{ segundos}$$

y recorrerá una distancia horizontal de

$$\frac{v_0^2 \cos \theta}{g}\left(\operatorname{sen} \theta + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{2gh}{v_0^2}}\right) \text{ pies.}$$

56. ***Lanzamiento de peso*** Un peso es lanzado desde una altura de $h = 6$ pies con rapidez inicial $v_0 = 45$ pies por segundo y con un ángulo de $\theta = 42.5°$ con la horizontal. Hallar el tiempo total de recorrido y la distancia horizontal recorrida.

57. Demostrar que si un objeto se mueve con rapidez constante, sus vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

58. Demostrar que un objeto que se mueve en línea recta a velocidad constante tiene aceleración nula.

59. ***Investigación*** Un objeto sigue una trayectoria elíptica dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 6 \cos t\,\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$.

a) Hallar $\mathbf{v}(t)$, $\|\mathbf{v}(t)\|$ y $\mathbf{a}(t)$.

b) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
Rapidez					

c) Representar gráficamente la trayectoria elíptica y los vectores velocidad y aceleración para los valores de t dados en la tabla del inciso *b*).

d) Usar los resultados de los incisos *b*) y *c*) para describir la relación geométrica entre los vectores velocidad y aceleración cuando la rapidez de la partícula aumenta y cuando disminuye.

Para discusión

60. Considerar una partícula que se mueve sobre una trayectoria elíptica descrita por $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t\,\mathbf{i} + b \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}$, donde $\omega = d\theta/dt$ es la velocidad angular constante.

a) Encontrar el vector velocidad. ¿Cuál es la rapidez de la partícula?

b) Encontrar el vector aceleración y demostrar que su dirección está siempre hacia el centro de la elipse.

Desarrollo de conceptos

61. Con las propias palabras, explicar la diferencia entre la velocidad de un objeto y su rapidez.

62. ¿Qué se conoce acerca de la rapidez de un objeto si el ángulo entre los vectores velocidad y aceleración es *a*) agudo y *b*) obtuso?

63. ***Redacción*** Considerar una partícula que se mueve sobre la trayectoria $\mathbf{r}_1(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$.

a) Analizar todo cambio en la posición, velocidad o aceleración de la partícula si su posición está dada por la función vectorial $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(2t)$.

b) Generalizar los resultados a la función posición $\mathbf{r}_3(t) = \mathbf{r}_1(\omega t)$.

64. Cuando t $= 0$, un objeto está en el punto $(0, 1)$ y tiene un vector velocidad $\mathbf{v}(0) = -\mathbf{i}$. Se mueve con aceleración $\mathbf{a}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}$. Mostrar que la trayectoria del objeto es un círculo.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 65 a 68, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que pruebe que es falsa.**

65. La aceleración de un objeto es la derivada de la rapidez.

66. La velocidad de un objeto es la derivada de la posición.

67. El vector velocidad apunta en la dirección de movimiento.

68. Si una partícula se mueve a lo largo de una línea recta, entonces los vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

12.4 Vectores tangentes y vectores normales

- Hallar un vector unitario tangente en un punto a una curva en el espacio.
- Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración.

Vectores tangentes y vectores normales

En la sección precedente se vio que el vector velocidad apunta en la dirección del movimiento. Esta observación lleva a la definición siguiente, que es válida para cualquier curva suave, no sólo para aquellas en las que el parámetro es el tiempo.

DEFINICIÓN DEL VECTOR UNITARIO TANGENTE

Sea C una curva suave en un intervalo abierto I, representada por $\mathbf{r}$. El **vector unitario tangente $\mathbf{T}(t)$** en t se define como

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}.$$

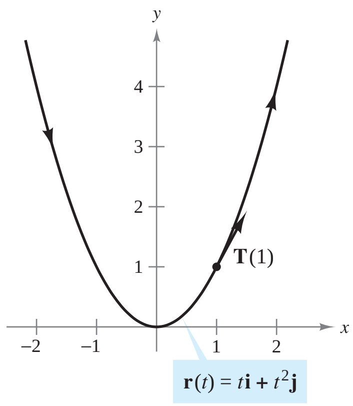
Como se recordará, una curva es *suave* en un intervalo si $\mathbf{r}'$ es continua y distinta de cero en el intervalo. Por tanto, la "suavidad" es suficiente para garantizar que una curva tenga vector unitario tangente.

EJEMPLO 1 Hallar el vector unitario tangente

Hallar el vector unitario tangente a la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

cuando $t = 1$.



La dirección del vector unitario tangente depende de la orientación de la curva
Figura 12.20

Solución La derivada de $\mathbf{r}(t)$ es

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}. \qquad \text{Derivada de } \mathbf{r}(t).$$

Por tanto, el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \qquad \text{Definición de } \mathbf{T}(t).$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}). \qquad \text{Sustituir } \mathbf{r}'(t).$$

Cuando $t = 1$, el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

como se muestra en la figura 12.20.

NOTA En el ejemplo 1, hay que observar que la dirección del vector unitario tangente depende de la orientación de la curva. Por ejemplo, si la parábola de la figura 12.20 estuviera dada por

$$\mathbf{r}(t) = -(t - 2)\mathbf{i} + (t - 2)^2\mathbf{j},$$

aunque $\mathbf{T}(1)$ también representaría el vector unitario tangente en el punto $(1, 1)$, apuntaría en dirección opuesta. Tratar de verificar esto.

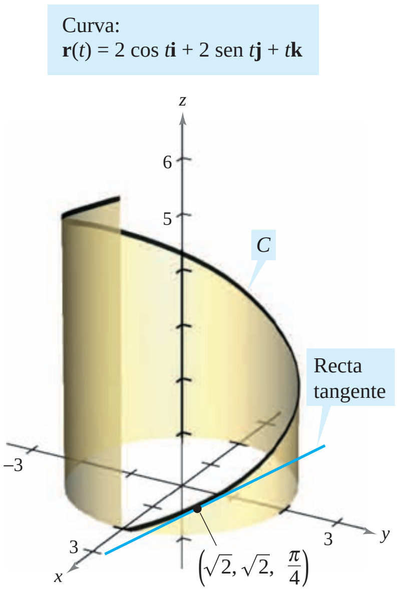
La **recta tangente a una curva** en un punto es la recta que pasa por el punto y es paralela al vector unitario tangente. En el ejemplo 2 se usa el vector unitario tangente para hallar la recta tangente a una hélice en un punto.

EJEMPLO 2 Hallar la recta tangente a una curva en un punto

Hallar $\mathbf{T}(t)$ y hallar después un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

en el punto $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.



La recta tangente a una curva en un punto está determinada por el vector unitario tangente en el punto
Figura 12.21

Solución La derivada de $\mathbf{r}(t)$ es $\mathbf{r}'(t) = -2\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, lo que implica que $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 1} = \sqrt{5}$. Por consiguiente, el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}). \qquad \text{Vector unitario tangente.}$$

En el punto $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi/4\right)$, $t = \pi/4$ y el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right).$$

Usando los números directores $a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ y $c = 1$, y el punto $(x_1, y_1, z_1) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi/4\right)$, se obtienen las ecuaciones paramétricas siguientes (dadas con el parámetro s).

$$x = x_1 + as = \sqrt{2} - \sqrt{2}s$$
$$y = y_1 + bs = \sqrt{2} + \sqrt{2}s$$
$$z = z_1 + cs = \frac{\pi}{4} + s$$

Esta recta tangente se muestra en la figura 12.21.

En el ejemplo 2 hay una cantidad infinita de vectores que son ortogonales al vector tangente $\mathbf{T}(t)$. Uno de estos vectores es el vector $\mathbf{T}'(t)$. Esto se desprende de la propiedad 7 del teorema 12.2. Es decir,

$$\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}(t) = \|\mathbf{T}(t)\|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}'(t) = 0.$$

Normalizando el vector $\mathbf{T}'(t)$, se obtiene un vector especial llamado el **vector unitario normal principal**, como se indica en la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE VECTOR UNITARIO NORMAL PRINCIPAL

Sea C una curva suave en un intervalo abierto I representada por $\mathbf{r}$. Si $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$, entonces el **vector unitario normal principal** en t se define como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}.$$

EJEMPLO 3 Hallar el vector unitario normal principal

Hallar $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{N}(1)$ para la curva representada por

$$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}.$$

Solución Derivando, se obtiene

$$\mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{9 + 16t^2}$$

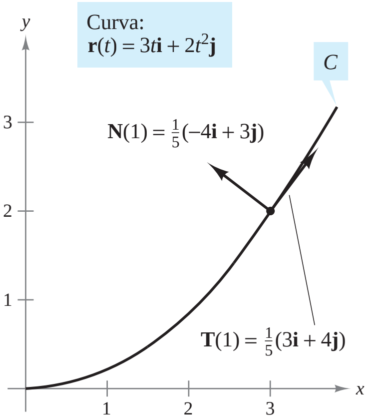
lo que implica que el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}).$$ Vector unitario tangente.

Usando el teorema 12.2, se deriva $\mathbf{T}(t)$ con respecto a t para obtener

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(4\mathbf{j}) - \frac{16t}{(9 + 16t^2)^{3/2}}(3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}) = \frac{12}{(9 + 16t^2)^{3/2}}(-4t\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = 12\sqrt{\frac{9 + 16t^2}{(9 + 16t^2)^3}} = \frac{12}{9 + 16t^2}.$$



El vector unitario normal principal apunta hacia el lado cóncavo de la curva
Figura 12.22

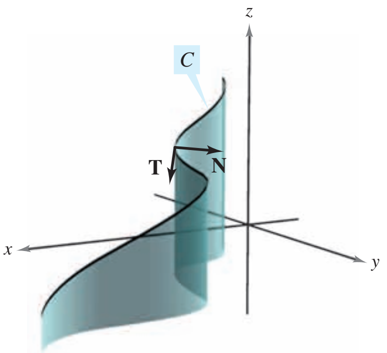
Por tanto, el vector unitario normal principal es

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(-4t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}).$$ Vector unitario normal principal.

Cuando $t = 1$, el vector unitario normal principal es

$$\mathbf{N}(1) = \frac{1}{5}(-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

como se muestra en la figura 12.22.



En todo punto de una curva, un vector unitario normal es ortogonal al vector unitario tangente. El vector unitario normal *principal* apunta hacia la dirección en que gira la curva
Figura 12.23

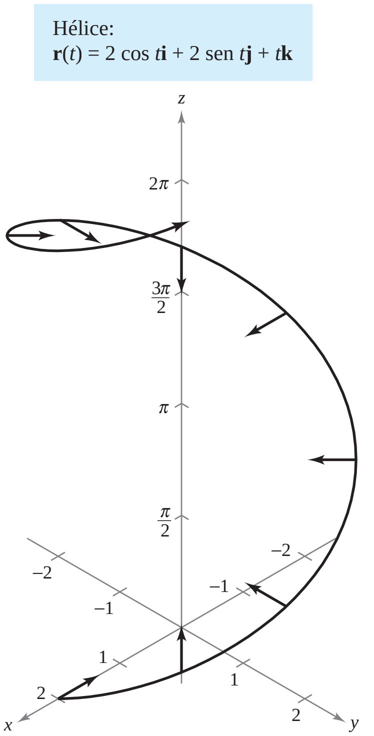
El vector unitario normal principal puede ser difícil de evaluar algebraicamente. En curvas planas, se puede simplificar el álgebra hallando

$$\mathbf{T}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$ Vector unitario tangente.

y observando que $\mathbf{N}(t)$ debe ser

$$\boxed{\mathbf{N}_1(t) = y(t)\mathbf{i} - x(t)\mathbf{j}} \qquad \text{o} \qquad \boxed{\mathbf{N}_2(t) = -y(t)\mathbf{i} + x(t)\mathbf{j}.}$$

Como $\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} = 1$, se sigue que tanto $\mathbf{N}_1(t)$ como $\mathbf{N}_2(t)$ son vectores unitarios normales. El vector unitario normal *principal* $\mathbf{N}$ es el que apunta hacia el lado cóncavo de la curva, como se muestra en la figura 12.22 (véase ejercicio 94). Esto también es válido para curvas en el espacio. Es decir, si un objeto se mueve a lo largo de la curva C en el espacio, el vector $\mathbf{T}(t)$ apunta hacia la dirección en la que se mueve el objeto, mientras que el vector $\mathbf{N}(t)$ es ortogonal a $\mathbf{T}(t)$ y apunta hacia la dirección en que gira el objeto, como se muestra en la figura 12.23.



$\mathbf{N}(t)$ es horizontal y apunta hacia el eje z

Figura 12.24

EJEMPLO 4 Hallar el vector unitario normal principal

Hallar el vector unitario normal principal para la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

Solución De acuerdo con el ejemplo 2, se sabe que el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}). \qquad \text{Vector unitario tangente.}$$

Así, $\mathbf{T}'(t)$ está dado por

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\cos t\mathbf{i} - 2\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{j}).$$

Como $\|\mathbf{T}'(t)\| = 2/\sqrt{5}$, se sigue que el vector unitario normal principal es

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(t) &= \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}\\ &= \frac{1}{2}(-2\cos t\mathbf{i} - 2\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{j})\\ &= -\cos t\mathbf{i} - \mathrm{sen}\, t\mathbf{j}. \qquad \text{Vector unitario normal principal.}\end{aligned}$$

Nótese que este vector es horizontal y apunta hacia el eje z, como se muestra en la figura 12.24.

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Ahora se vuelve al problema de describir el movimiento de un objeto a lo largo de una curva. En la sección anterior, se vio que si un objeto se mueve con *rapidez constante*, los vectores velocidad y aceleración son perpendiculares. Esto parece razonable, porque la rapidez no sería constante si alguna aceleración actuara en dirección del movimiento. Esta afirmación se puede verificar observando que

$$\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

si $\|\mathbf{r}'(t)\|$ es una constante. (Ver la propiedad 7 del teorema 12.2.)

Sin embargo, si un objeto viaja con *rapidez variable*, los vectores velocidad y aceleración no necesariamente son perpendiculares. Por ejemplo, se vio que en un proyectil el vector aceleración siempre apunta hacia abajo, sin importar la dirección del movimiento.

En general, parte de la aceleración (la componente tangencial) actúa en la línea del movimiento y otra parte (la componente normal) actúa perpendicular a la línea del movimiento. Para determinar estas dos componentes, se pueden usar los vectores unitarios $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$, que juegan un papel análogo a $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ cuando se representan los vectores en el plano. El teorema siguiente establece que el vector aceleración se encuentra en el plano determinado por $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

TEOREMA 12.4 VECTOR ACELERACIÓN

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C y $\mathbf{N}(t)$ existe, entonces el vector aceleración $\mathbf{a}(t)$ se encuentra en el plano determinado por $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

Demostración Para simplificar la notación, se escribe $\mathbf{T}$ en lugar de $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{T}'$ en lugar de $\mathbf{T}'(t)$, y así sucesivamente. Como $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/\|\mathbf{r}'\| = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, se sigue que

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}.$$

Por derivación, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} = \mathbf{v}' &= D_t[\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}' && \text{Regla del producto.}\\
&= D_t[\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}'\left(\frac{\|\mathbf{T}'\|}{\|\mathbf{T}'\|}\right)\\
&= D_t[\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{T}'\|\,\mathbf{N}. && \mathbf{N} = \mathbf{T}'/\|\mathbf{T}'\|
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{a}$ se expresa mediante una combinación lineal de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$, se sigue que $\mathbf{a}$ está en el plano determinado por $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$.

A los coeficientes de $\mathbf{T}$ y de $\mathbf{N}$ en la demostración del teorema 12.4 se les conoce como **componentes tangencial y normal de la aceleración** y se denotan por $a_{\mathbf{T}} = D_t[\|\mathbf{v}\|]$ y $a_{\mathbf{N}} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{T}'\|$. Por tanto, se puede escribir

$$\mathbf{a}(t) = a_{\mathbf{T}}\mathbf{T}(t) + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}(t).$$

El teorema siguiente da algunas fórmulas útiles para $a_{\mathbf{N}}$ y $a_{\mathbf{T}}$.

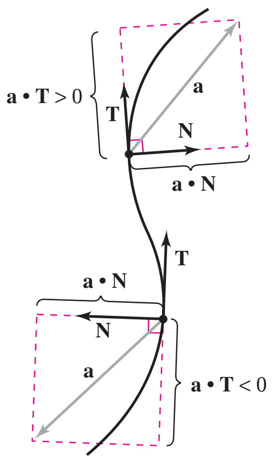
TEOREMA 12.5 COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACIÓN

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C [para la cual $\mathbf{N}(t)$ existe], entonces las componentes tangencial y normal de la aceleración son las siguientes.

$$a_{\mathbf{T}} = D_t[\|\mathbf{v}\|] = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$a_{\mathbf{N}} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{T}'\| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{N} = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2}$$

Nótese que $a_{\mathbf{N}} \geq 0$. A la componente normal de la aceleración también se le llama **componente centrípeta de la aceleración**.



Las componentes tangencial y normal de la aceleración se obtienen proyectando **a** sobre **T** y **N**
Figura 12.25

DEMOSTRACIÓN Nótese que a se encuentra en el plano de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$. Por tanto, se puede usar la figura 12.25 para concluir que, en cualquier instante t, las componentes de la proyección del vector aceleración sobre $\mathbf{T}$ y sobre $\mathbf{N}$ están dadas por $a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T}$ y $a_{\mathbf{N}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{N}$, respectivamente. Además, como $\mathbf{a} = \mathbf{v}'$ y $\mathbf{T} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, se tiene

$$\begin{aligned}
a_{\mathbf{T}} &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{T}\\
&= \mathbf{T}\cdot\mathbf{a}\\
&= \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\mathbf{a}\\
&= \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}.
\end{aligned}$$

En los ejercicios 96 y 97 se pide demostrar las otras partes del teorema.

NOTA Las fórmulas del teorema 12.5, junto con algunas otras fórmulas de este capítulo, se resumen en la página 877.

EJEMPLO 5 Componentes tangencial y normal de la aceleración

Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración para el vector posición dado por $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$.

Solución Para empezar se halla la velocidad, la rapidez y la aceleración.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$
$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{9 + 1 + 4t^2} = \sqrt{10 + 4t^2}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{k}$$

De acuerdo con el teorema 12.5, la componente tangencial de la aceleración es

$$a_{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{4t}{\sqrt{10 + 4t^2}}$$

Componente tangencial de la aceleración.

y como

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$$

la componente normal de la aceleración es

$$a_{\mathbf{N}} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\sqrt{4 + 36}}{\sqrt{10 + 4t^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10 + 4t^2}}.$$

Componente normal de la aceleración.

NOTA En el ejemplo 5 se podría haber usado la fórmula alternativa siguiente para $a_{\mathbf{N}}$.

$$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2} = \sqrt{(2)^2 - \frac{16t^2}{10 + 4t^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10 + 4t^2}}$$

EJEMPLO 6 Hallar $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ para una hélice circular

Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración para la hélice dada por $\mathbf{r}(t) = b\cos t\mathbf{i} + b\operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$, $b > 0$.

Solución

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -b\operatorname{sen} t\mathbf{i} + b\cos t\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$
$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{b^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t + c^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -b\cos t\mathbf{i} - b\operatorname{sen} t\mathbf{j}$$

De acuerdo con el teorema 12.5, la componente tangencial de la aceleración es

$$a_{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{b^2\operatorname{sen} t\cos t - b^2\operatorname{sen} t\cos t + 0}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0.$$

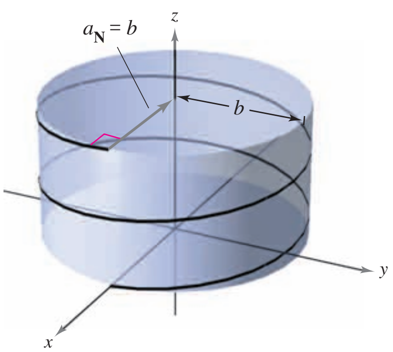
Componente tangencial de la aceleración.

Como $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{b^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t} = b$, se puede usar la fórmula alternativa para la componente normal de la aceleración para obtener

$$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2} = \sqrt{b^2 - 0^2} = b.$$

Componente normal de la aceleración.

Nótese que la componente normal de la aceleración es igual a la magnitud de la aceleración. En otras palabras, puesto que la rapidez es constante, la aceleración es perpendicular a la velocidad. Ver la figura 12.26.



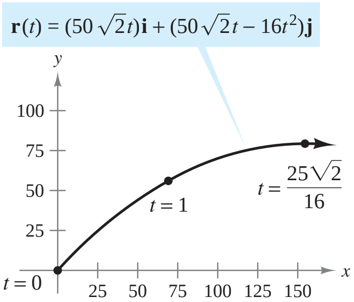
La componente normal de la aceleración es igual al radio del cilindro alrededor del cual la hélice gira en espiral
Figura 12.26

EJEMPLO 7 Movimiento de un proyectil

El vector posición para el proyectil mostrado en la figura 12.27 está dado por

$$\mathbf{r}(t) = \left(50\sqrt{2}\,t\right)\mathbf{i} + \left(50\sqrt{2}\,t - 16t^2\right)\mathbf{j}.$$ Vector posición.

Hallar la componente tangencial de la aceleración cuando $t = 0$, 1 y $25\sqrt{2}/16$.



La trayectoria de un proyectil
Figura 12.27

Solución

$$\mathbf{v}(t) = 50\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \left(50\sqrt{2} - 32t\right)\mathbf{j}$$ Vector velocidad.

$$\|\mathbf{v}(t)\| = 2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2}\,t + 16^2t^2}$$ Velocidad.

$$\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j}$$ Vector aceleración.

La componente tangencial de la aceleración es

$$a_{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{a}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{-32(50\sqrt{2} - 32t)}{2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2}\,t + 16^2t^2}}.$$ Componente tangencial de la aceleración.

En los instantes especificados, se tiene

$$a_{\mathbf{T}}(0) = \frac{-32\left(50\sqrt{2}\right)}{100} = -16\sqrt{2} \approx -22.6$$

$$a_{\mathbf{T}}(1) = \frac{-32\left(50\sqrt{2} - 32\right)}{2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2} + 16^2}} \approx -15.4$$

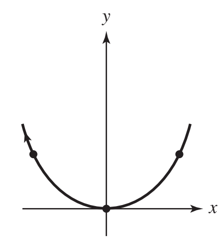
$$a_{\mathbf{T}}\left(\frac{25\sqrt{2}}{16}\right) = \frac{-32\left(50\sqrt{2} - 50\sqrt{2}\right)}{50\sqrt{2}} = 0.$$

En la figura 12.27 se puede ver que, a la altura máxima, cuando $t = 25\sqrt{2}/16$, la componente tangencial es 0. Esto es razonable porque en ese punto la dirección del movimiento es horizontal y la componente tangencial de la aceleración es igual a la componente horizontal de la aceleración.

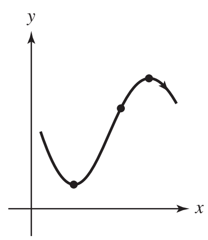
12.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, dibujar el vector unitario tangente y los vectores normales a los puntos dados.

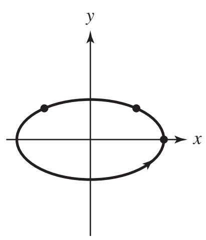
1.



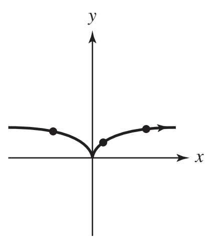
2.



3.



4.



En los ejercicios 5 a 10, hallar el vector unitario tangente a la curva en el valor especificado del parámetro.

5. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}, \quad t = 1$

6. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}, \quad t = 1$

7. $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}, \quad t = \dfrac{\pi}{4}$

8. $\mathbf{r}(t) = 6\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}, \quad t = \dfrac{\pi}{3}$

9. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} - \ln t\,\mathbf{j}, \quad t = e$

10. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}, \quad t = 0$

En los ejercicios 11 a 16, hallar el vector unitario tangente T(t) y hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en el espacio en el punto *P*.

11. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad P(0, 0, 0)$

12. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{4}{3}\mathbf{k}, \quad P\left(1, 1, \frac{4}{3}\right)$

13. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad P(3, 0, 0)$

14. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, t, \sqrt{4 - t^2}\right\rangle, \quad P\left(1, 1, \sqrt{3}\right)$

15. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t, 4\rangle, \quad P\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\right)$

16. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\,\mathrm{sen}\,t, 2\cos t, 4\,\mathrm{sen}^2 t\rangle, \quad P\left(1, \sqrt{3}, 1\right)$

CAS **En los ejercicios 17 y 18, usar un sistema algebraico por computadora para representar la gráfica de la curva en el espacio. Después hallar $\mathbf{T}(t)$ y un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva en el espacio en el punto P. Representar la gráfica de la recta tangente.**

17. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, 2t^3/3\rangle, \quad P(3, 9, 18)$

18. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 4\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\,\mathbf{k}, \quad P(0, 4, \pi/4)$

Aproximación lineal **En los ejercicios 19 y 20, hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la gráfica en $t = t_0$ y utilizar las ecuaciones de la recta para aproximar $\mathbf{r}(t_0 + 0.1)$.**

19. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \ln t, \sqrt{t}\right\rangle, \quad t_0 = 1$

20. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, 2\cos t, 2\,\text{sen}\,t\rangle, \quad t_0 = 0$

En los ejercicios 21 y 22, verificar que las curvas en el espacio se cortan en los valores dados de los parámetros. Hallar el ángulo entre los vectores tangentes a las curvas en el punto de intersección.

21. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t - 2, t^2, \frac{1}{2}t\right\rangle, \quad t = 4$

$\mathbf{u}(s) = \left\langle \frac{1}{4}s, 2s, \sqrt[3]{s}\right\rangle, \quad s = 8$

22. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos t, \text{sen}\,t\rangle, \quad t = 0$

$\mathbf{u}(s) = \left\langle -\frac{1}{2}\text{sen}^2 s - \text{sen}\,s, 1 - \frac{1}{2}\text{sen}^2 s - \text{sen}\,s, \frac{1}{2}\text{sen}\,s\cos s + \frac{1}{2}s\right\rangle, \quad s = 0$

En los ejercicios 23 a 30, encontrar el vector unitario normal principal a la curva en el valor especificado del parámetro.

23. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j}, \quad t = 2$

24. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \dfrac{6}{t}\mathbf{j}, \quad t = 3$

25. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j}, \quad t = 2$

26. $\mathbf{r}(t) = \pi\cos t\,\mathbf{i} + \pi\,\text{sen}\,t\mathbf{j}, \quad t = \dfrac{\pi}{6}$

27. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k}, \quad t = 1$

28. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, \quad t = 0$

29. $\mathbf{r}(t) = 6\cos t\,\mathbf{i} + 6\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad t = \dfrac{3\pi}{4}$

30. $\mathbf{r}(t) = \cos 3t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,3t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad t = \pi$

En los ejercicios 31 a 34, hallar $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ (si existe) para un objeto que se mueve a lo largo de la trayectoria dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Usar los resultados para determinar la forma de la trayectoria. ¿Es constante la rapidez del objeto o cambiante?

31. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i}$

32. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$

33. $\mathbf{r}(t) = 4t^2\mathbf{i}$

34. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los ejercicios 35 a 44, hallar $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $a_\mathbf{T}$ y $a_\mathbf{N}$ para la curva plana t en el instante $\mathbf{r}(t)$.

35. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}, \quad t = 1$

36. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}, \quad t = 1$

37. $\mathbf{r}(t) = (t - t^3)\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}, \quad t = 1$

38. $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 4t)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}, \quad t = 0$

39. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j}, \quad t = 0$

40. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = 0$

41. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}, \quad t = \dfrac{\pi}{2}$

42. $\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}, \quad t = 0$

43. $\mathbf{r}(t) = \langle\cos\omega t + \omega t\,\text{sen}\,\omega t, \text{sen}\,\omega t - \omega t\cos\omega t\rangle, \quad t = t_0$

44. $\mathbf{r}(t) = \langle\omega t - \text{sen}\,\omega t, 1 - \cos\omega t\rangle, \quad t = t_0$

Movimiento circular **En los ejercicios 45 a 48, considerar un objeto que se mueve según la función de posición**

$$\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}.$$

45. Hallar $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $a_\mathbf{T}$ y $a_\mathbf{N}$.

46. Determinar las direcciones de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ en relación con la función de posición $\mathbf{r}$.

47. Determinar la rapidez del objeto en cualquier instante t y explicar su valor en relación con el valor de $a_\mathbf{T}$.

48. Si la velocidad angular ω se reduce a la mitad, ¿en qué factor cambia $a_\mathbf{N}$?

En los ejercicios 49 a 54, dibujar la gráfica de la curva plana dada por la función vectorial, y, en el punto sobre la curva determinada por $\mathbf{r}(t_0)$, dibujar los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$. Observar que $\mathbf{N}$ apunta hacia el lado cóncavo de la curva.

	Función	*Instante*
49.	$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}$	$t_0 = 2$
50.	$\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t\mathbf{j}$	$t_0 = 1$
51.	$\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j}$	$t_0 = \dfrac{1}{4}$
52.	$\mathbf{r}(t) = (2t + 1)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j}$	$t_0 = 2$
53.	$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j}$	$t_0 = \dfrac{\pi}{4}$
54.	$\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j}$	$t_0 = \pi$

En los ejercicios 55 a 62, hallar $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $a_\mathbf{T}$ y $a_\mathbf{N}$ en el instante dado t para la curva espacial $\mathbf{r}(t)$. [*Sugerencia:* Hallar $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{T}(t)$ y $a_\mathbf{N}$. Resolver para $\mathbf{N}$ en la ecuación $\mathbf{a}(t) = a_\mathbf{T}\mathbf{T} + a_\mathbf{N}\mathbf{N}$.]

	Función	*Instante*
55.	$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$	$t = 1$
56.	$\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$	$t = 2$
57.	$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \text{sen}\,t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$	$t = \dfrac{\pi}{3}$
58.	$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$	$t = -1$
59.	$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$	$t = 1$
60.	$\mathbf{r}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}$	$t = 2$
61.	$\mathbf{r}(t) = e^t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + e^t\cos t\,\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$	$t = 0$
62.	$\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$	$t = 0$

CAS **En los ejercicios 63 y 66, usar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la curva espacial. Entonces hallar T(t), N(t), $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ en el instante dado t. Dibujar T(t) y N(t) en la curva en el espacio.**

Función	*Instante*
63. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j} + 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k}$	$t = \dfrac{\pi}{2}$
64. $\mathbf{r}(t) = (2 + \cos t)\mathbf{i} + (1 - \text{sen}\,t)\mathbf{j} + \dfrac{t}{3}\mathbf{k}$	$t = \pi$
65. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$	$t = 2$
66. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$	$t = 1$

Desarrollo de conceptos

67. Definir el vector unitario tangente, el vector unitario normal principal, y las componentes tangencial y normal de la aceleración.

68. ¿Cuál es la relación entre el vector unitario tangente y la orientación de una curva? Explicar.

69. *a*) Describir el movimiento de una partícula si la componente normal de la aceleración es 0.

b) Describir el movimiento de una partícula si la componente tangencial de la aceleración es 0.

Para discusión

70. Un objeto se mueve a lo largo de la trayectoria dada por

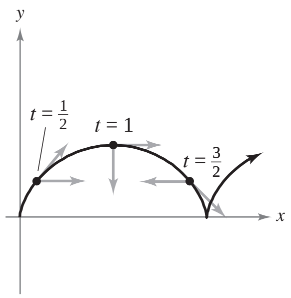
$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}$.

Encontrar $v(t)$, $a(t)$ $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ (si existe). ¿Cuál es la forma de la trayectoria? ¿Es constante o variable la velocidad del objeto?

71. ***Movimiento cicloidal*** La figura muestra la trayectoria de una partícula representada por la función vectorial

$\mathbf{r}(t) = \langle \pi t - \text{sen}\,\pi t, 1 - \cos \pi t\rangle$.

La figura muestra también los vectores $\mathbf{v}(t)/\|\mathbf{v}(t)\|$ y $\mathbf{a}(t)/\|\mathbf{a}(t)\|$ en los valores indicados de t.



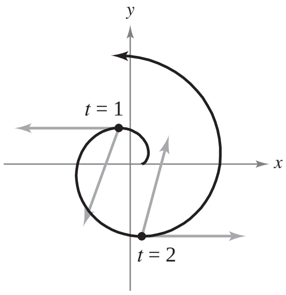
a) Hallar $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ en $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ y $t = \frac{3}{2}$.

b) En cada uno de los valores indicados de t, determinar si la rapidez de la partícula aumenta o disminuye. Dar razones para las respuestas.

72. ***Movimiento a lo largo de una involuta de un círculo*** La figura muestra una partícula que sigue la trayectoria dada por

$\mathbf{r}(t) = \langle \cos \pi t + \pi t\,\text{sen}\,\pi t, \text{sen}\,\pi t - \pi t \cos \pi t\rangle$.

La figura muestra también los vectores $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ para $t = 1$ y $t = 2$.



a) Hallar $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ en $t = 1$ y $t = 2$.

b) Determinar si la rapidez de la partícula aumenta o disminuye en cada uno de los valores indicados de t. Dar razones para las respuestas.

En los ejercicios 73 a 78, hallar los vectores T y N, y el vector unitario binormal B = T × N, de la función vectorial r(t) en el valor dado de t.

73. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + \dfrac{t}{2}\mathbf{k}$

$t_0 = \dfrac{\pi}{2}$

74. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \dfrac{t^3}{3}\mathbf{k}$

$t_0 = 1$

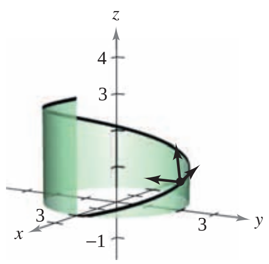


Figura para 73

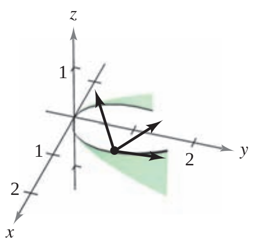


Figura para 74

75. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$, $\quad t_0 = \dfrac{\pi}{4}$

76. $\mathbf{r}(t) = 2e^t\mathbf{i} + e^t\cos t\,\mathbf{j} + e^t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k}$, $\quad t_0 = 0$

77. $\mathbf{r}(t) = 4\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 4\cos t\,\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $\quad t_0 = \dfrac{\pi}{3}$

78. $\mathbf{r}(t) = 3\cos 2t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $\quad t_0 = \dfrac{\pi}{4}$

79. ***Movimiento de un proyectil*** Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración de un proyectil disparado con un ángulo θ con la horizontal y con rapidez inicial v_0. ¿Cuáles son las componentes cuando el proyectil está en su altura máxima?

80. ***Movimiento de un proyectil*** Utilizar los resultados del ejercicio 79 para hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración de un proyectil disparado con un ángulo de 45° con la horizontal con rapidez inicial de 150 pies por segundo. ¿Cuáles son las componentes cuando el proyectil está en su altura máxima?

81. ***Movimiento de un proyectil*** Un proyectil se lanza con velocidad inicial de 120 pies por segundo desde 5 pies de altura y con un ángulo de 30° con la horizontal.

a) Determinar la función vectorial de la trayectoria del proyectil.

b) Usar una herramienta de graficación para representar la trayectoria y aproximar la altura máxima y el alcance del proyectil.

c) Hallar $\mathbf{v}(t)$, $\|\mathbf{v}(t)\|$ y $\mathbf{a}(t)$.

d) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

t	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Velocidad						

e) Usar una herramienta de graficación para representar las funciones escalares $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$. ¿Cómo cambia la velocidad del proyectil cuando $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ tienen signos opuestos?

82. ***Movimiento de un proyectil*** Un proyectil se lanza con velocidad inicial de 220 pies por segundo desde una altura de 4 pies y con un ángulo de 45° con la horizontal.

a) Determinar la función vectorial de la trayectoria del proyectil.

b) Usar una herramienta de graficación para representar la trayectoria y aproximar la altura máxima y el alcance del proyectil.

c) Hallar $\mathbf{v}(t)$, $\|\mathbf{v}(t)\|$ y $\mathbf{a}(t)$.

d) Usar una herramienta de graficación para completar la tabla.

t	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Velocidad						

83. ***Control del tráfico aéreo*** Debido a una tormenta, los controladores aéreos en tierra indican a un piloto que vuela a una altitud de 4 millas que efectúe un giro de 90° y ascienda a una altitud de 4.2 millas. El modelo de la trayectoria del avión durante esta maniobra es

$$\mathbf{r}(t) = \langle 10\cos 10\pi t,\ 10\,\mathrm{sen}\,10\pi t,\ 4 + 4t\rangle, \quad 0 \le t \le \tfrac{1}{20}$$

donde t es el tiempo en horas y $\mathbf{r}$ es la distancia en millas.

a) Determinar la rapidez del avión.

CAS *b*) Usar un sistema algebraico por computadora y calcular $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$. ¿Por qué una de éstas es igual a 0?

84. ***Movimiento de un proyectil*** Un avión volando a una altitud de 36 000 pies con rapidez de 600 millas por hora deja caer una bomba. Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración que actúan sobre la bomba.

85. ***Aceleración centrípeta*** Un objeto, atado al extremo de una cuerda, gira con rapidez constante, de acuerdo con la función de posición dada en los ejercicios 45 a 48.

a) Si la velocidad angular ω se duplica, ¿cómo se modifica la componente centrípeta de la aceleración?

b) Si la velocidad angular no se modifica pero la longitud de la cuerda se reduce a la mitad, ¿cómo cambia la componente centrípeta de la aceleración?

86. ***Fuerza centrípeta*** Un objeto de masa m se mueve con rapidez constante v siguiendo una trayectoria circular de radio r. La fuerza requerida para producir la componente centrípeta de la aceleración se llama *fuerza centrípeta* y está dada por $F = mv^2/r$. La ley de Newton de la gravitación universal establece que $F = GMm/d^2$, donde d es la distancia entre los centros de los dos cuerpos de masas M y m, y G es una constante gravitatoria. Usar esta ley para mostrar que la rapidez requerida para el movimiento circular es $v = \sqrt{GM/r}$.

Velocidad orbital **En los ejercicios 87 a 90, usar el resultado del ejercicio 86 para hallar la rapidez necesaria para la órbita circular dada alrededor de la Tierra. Tomar $GM = 9.56 \times 10^4$ millas cúbicas por segundo al cuadrado, y suponer que el radio de la Tierra es 4 000 millas.**

87. La órbita de un transbordador espacial que viaja a 115 millas sobre la superficie de la Tierra.

88. La órbita de un transbordador espacial que viaja a 245 millas sobre la superficie de la Tierra.

89. La órbita de un satélite de detección térmica que viaja a 385 millas sobre la superficie de la Tierra.

90. La órbita de un satélite de comunicación que está en órbita geosíncrona a r millas sobre la superficie de la Tierra. [El satélite realiza una órbita por día sideral (aproximadamente 23 horas, 56 minutos) y, por consiguiente, parece permanecer estacionario sobre un punto en la Tierra.]

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 91 y 92, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre que es falsa.**

91. Si el indicador de velocidad de un automóvil es constante, entonces el automóvil no puede estar acelerando.

92. Si $a_{\mathbf{N}} = 0$ en un objeto en movimiento, entonces el objeto se mueve en una línea recta.

93. Una partícula sigue una trayectoria dada por $\mathbf{r}(t) = \cosh(bt)\mathbf{i} + \mathrm{senh}(bt)\mathbf{j}$ donde b es una constante positiva.

a) Mostrar que la trayectoria de la partícula es una hipérbola.

b) Mostrar que $\mathbf{a}(t) = b^2\,\mathbf{r}(t)$.

94. Mostrar que el vector unitario normal principal $\mathbf{N}$ apunta hacia el lado cóncavo de una curva plana.

95. Mostrar que en un objeto que se mueve en línea recta el vector $\mathbf{T}'(t)$ es $\mathbf{0}$.

96. Mostrar que $a_{\mathbf{N}} = \dfrac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|}$.

97. Mostrar que $a_{\mathbf{N}} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2}$.

Preparación del examen Putnam

98. Una partícula de masa unitaria se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza que es función $f(v)$ de la velocidad v de la partícula, pero no se conoce la forma de esta función. Se observa el movimiento y se encuentra que la distancia x recorrida en el tiempo t está relacionada con t por medio de la fórmula $x = at + bt^2 + ct^3$, donde a, b y c tienen valores numéricos determinados por la observación del movimiento. Hallar la función $f(v)$ para el rango de v cubierto en el experimento.

12.5 Longitud de arco y curvatura

- Calcular la longitud de arco de una curva en el espacio.
- Utilizar el parámetro de longitud de arco para describir una curva plana o curva en el espacio.
- Calcular la curvatura de una curva en un punto en la curva.
- Utilizar una función vectorial para calcular la fuerza de rozamiento.

Longitud de arco

En la sección 10.3 se vio que la longitud de arco de una curva *plana* suave C dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$ y $y = y(t)$, $a \le t \le b$, es

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

En forma vectorial, donde C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, se puede expresar esta ecuación de la longitud de arco como

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt.$$

La fórmula para la longitud de arco de una curva plana tiene una extensión natural a una curva suave en el *espacio*, como se establece en el teorema siguiente.

EXPLORACIÓN

Fórmula para la longitud de arco La fórmula para la longitud de arco de una curva en el espacio está dada en términos de las ecuaciones paramétricas que se usan para representar la curva. ¿Significa esto que la longitud de arco de la curva depende del parámetro que se use? ¿Sería deseable que fuera así? Explicar el razonamiento.

Ésta es una representación paramétrica diferente de la curva del ejemplo 1.

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^3\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^4\mathbf{k}$$

Hallar la longitud de arco desde $t = 0$ hasta $t = \sqrt{2}$ y comparar el resultado con el encontrado en el ejemplo 1.

TEOREMA 12.6 LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA EN EL ESPACIO

Si C es una curva suave dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, en un intervalo $[a, b]$, entonces la longitud de arco de C en el intervalo es

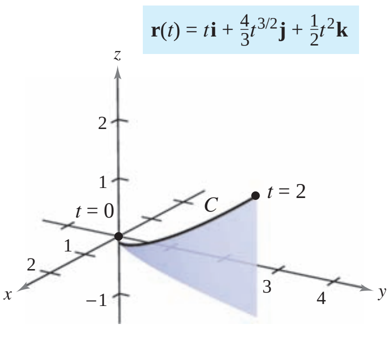
$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt.$$

EJEMPLO 1 Hallar la longitud de arco de una curva en el espacio

Hallar la longitud de arco de la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 2$, como se muestra en la figura 12.28.

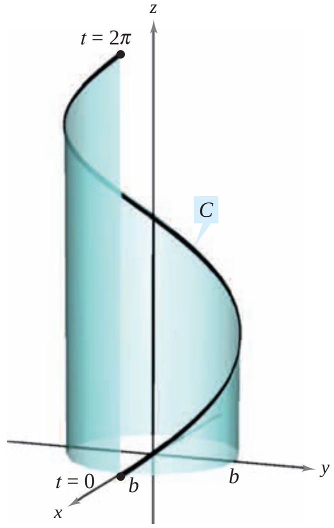


A medida que t crece de 0 a 2, el vector $\mathbf{r}(t)$ traza una curva
Figura 12.28

Solución Utilizando $x(t) = t, y(t) = \frac{4}{3}t^{3/2}$ y $z(t) = \frac{1}{2}t^2$, se obtiene $x'(t) = 1$, $y'(t) = 2t^{1/2}$ y $z'(t) = t$. Por tanto, la longitud de arco desde $t = 0$ hasta $t = 2$ está dada por

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt && \text{Fórmula para longitud de arco.}\\
&= \int_0^2 \sqrt{1 + 4t + t^2}\, dt\\
&= \int_0^2 \sqrt{(t+2)^2 - 3}\, dt && \text{Tablas de integración (apéndice B), fórmula 26.}\\
&= \left[\frac{t+2}{2}\sqrt{(t+2)^2 - 3} - \frac{3}{2}\ln\left|(t+2) + \sqrt{(t+2)^2 - 3}\right|\right]_0^2\\
&= 2\sqrt{13} - \frac{3}{2}\ln\left(4 + \sqrt{13}\right) - 1 + \frac{3}{2}\ln 3 \approx 4.816.
\end{aligned}$$

Curva:
$\mathbf{r}(t) = b\cos t\mathbf{i} + b\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{j} + \sqrt{1-b^2}\,t\mathbf{k}$



Un giro de la hélice
Figura 12.29

EJEMPLO 2 Hallar la longitud de arco de una hélice

Hallar la longitud de un giro de la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = b\cos t\mathbf{i} + b\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{j} + \sqrt{1-b^2}\,t\mathbf{k}$$

como se muestra en la figura 12.29.

Solución Se comienza hallando la derivada.

$$\mathbf{r}'(t) = -b\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{i} + b\cos t\mathbf{j} + \sqrt{1-b^2}\,\mathbf{k} \qquad \text{Derivada.}$$

Ahora, usando la fórmula para la longitud de arco, se puede encontrar la longitud de un giro de la hélice integrando $\|\mathbf{r}'(t)\|$ desde 0 hasta 2π.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt && \text{Fórmula para la longitud de arco.}\\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2(\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t) + (1-b^2)}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} dt\\ &= t\Big]_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

Por tanto, la longitud es 2π unidades.

Parámetro longitud de arco

Se ha visto que las curvas pueden representarse por medio de funciones vectoriales de maneras diferentes, dependiendo del parámetro que se elija. Para el *movimiento* a lo largo de una curva, el parámetro adecuado es el tiempo t. Sin embargo, cuando se desean estudiar las *propiedades geométricas* de una curva, el parámetro adecuado es a menudo la longitud de arco s.

$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2}\,du$

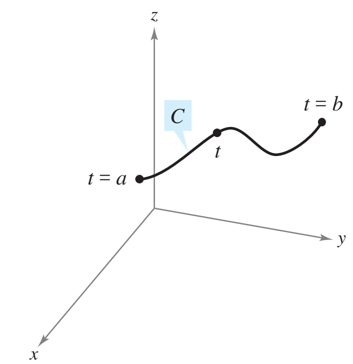


Figura 12.30

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LONGITUD DE ARCO

Sea C una curva suave dada por $\mathbf{r}(t)$ definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Para $a \le t \le b$, la **función longitud de arco** está dada por

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\|\,du = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2}\,du.$$

A la longitud de arco s se le llama **parámetro longitud de arco**. (Ver la figura 12.30.)

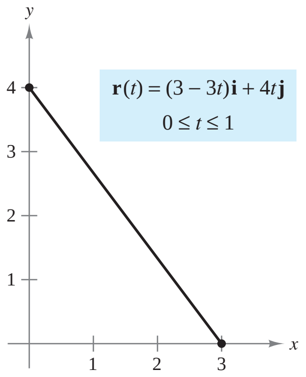
NOTA La función de longitud de arco s es *no negativa*. Mide la distancia sobre C desde el punto inicial $(x(a), y(a), z(a))$ hasta el punto $(x(t), y(t), z(t))$. ■

Usando la definición de la función longitud de arco y el segundo teorema fundamental de cálculo, se concluye que

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|. \qquad \text{Derivada de la función longitud de arco.}$$

En la forma diferencial, se escribe

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt.$$



El segmento de recta desde (3, 0) hasta (0, 4) puede parametrizarse usando el parámetro longitud de arco s
Figura 12.31

EJEMPLO 3 Hallar la función longitud de arco para una recta

Hallar la función longitud de arco $s(t)$ para el segmento de recta dado por

$$\mathbf{r}(t) = (3 - 3t)\mathbf{i} + 4t\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$$

y expresar $\mathbf{r}$ como función del parámetro s. (Ver la figura 12.31.)

Solución Como $\mathbf{r}'(t) = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

se tiene

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\mathbf{r}'(u)\|\,du \\ &= \int_0^t 5\,du \\ &= 5t. \end{aligned}$$

Usando $s = 5t$ (o $t = s/5$), se puede reescribir $\mathbf{r}$ utilizando el parámetro longitud de arco como sigue.

$$\mathbf{r}(s) = \left(3 - \tfrac{3}{5}s\right)\mathbf{i} + \tfrac{4}{5}s\,\mathbf{j}, \quad 0 \le s \le 5.$$

Una de las ventajas de escribir una función vectorial en términos del parámetro longitud de arco es que $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$. De este modo, en el ejemplo 3, se tiene

$$\|\mathbf{r}'(s)\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1.$$

Así, dada una curva suave C representada por $\mathbf{r}(s)$, donde s es el parámetro longitud de arco, la longitud de arco entre a y b es

$$\begin{aligned} \text{Longitud de arco} &= \int_a^b \|\mathbf{r}'(s)\|\,ds \\ &= \int_a^b ds \\ &= b - a \\ &= \text{longitud del intervalo.} \end{aligned}$$

Además, si t es *cualquier* parámetro tal que $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$, entonces t debe ser el parámetro longitud de arco. Estos resultados se resumen en el teorema siguiente que se presenta sin demostración.

TEOREMA 12.7 PARÁMETRO LONGITUD DE ARCO

Si C es una curva suave dada por

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} \quad \text{o} \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$$

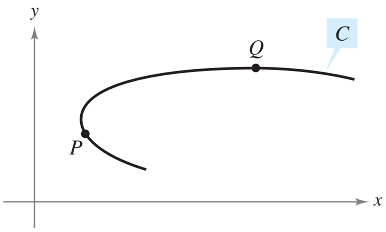
donde s es el parámetro longitud de arco, entonces

$$\|\mathbf{r}'(s)\| = 1.$$

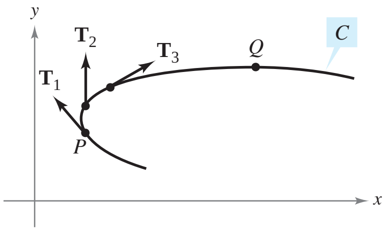
Si t es *cualquier* parámetro para la función vectorial $\mathbf{r}$ tal que $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$, entonces t debe ser el parámetro longitud de arco.

Curvatura

Un uso importante del parámetro longitud de arco es hallar la **curvatura**, la medida de cuán agudamente se dobla una curva. Por ejemplo, en la figura 12.32 la curva se dobla más agudamente en P que en Q, y se dice que la curvatura es mayor en P que en Q. Se puede hallar la curvatura calculando la magnitud de la tasa o ritmo de cambio del vector unitario tangente $\mathbf{T}$ con respecto a la longitud de arco s, como se muestra en la figura 12.33.



La curvatura en P es mayor que en Q
Figura 12.32



La magnitud de la tasa o del ritmo de cambio de $\mathbf{T}$ respecto a la longitud de arco es la curvatura de una curva
Figura 12.33

DEFINICIÓN DE CURVATURA

Sea C una curva suave (en el plano *o* en el espacio) dada por $\mathbf{r}(s)$, donde s es el parámetro longitud de arco. La **curvatura** K en s está dada por

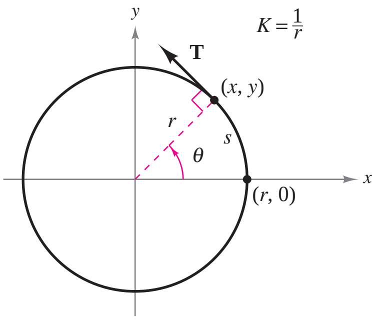
$$K = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{T}'(s)\|.$$

Un círculo tiene la misma curvatura en todos sus puntos. La curvatura y el radio del círculo están relacionados inversamente. Es decir, un círculo con un radio grande tiene una curvatura pequeña, y un círculo con un radio pequeño tiene una curvatura grande. Esta relación inversa se explica en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Hallar la curvatura de un círculo

Mostrar que la curvatura de un círculo de radio r es $K = 1/r$.

Solución Sin pérdida de generalidad, se puede considerar que el círculo está centrado en el origen. Sea (x, y) cualquier punto en el círculo y sea s la longitud de arco desde $(r, 0)$ hasta (x, y), como se muestra en la figura 12.34. Denotando por θ el ángulo central del círculo, puede representarse el círculo por



La curvatura de un círculo es constante
Figura 12.34

$$\mathbf{r}(\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}. \qquad \theta \text{ es el parámetro.}$$

Usando la fórmula para la longitud de un arco circular $s = r\theta$, se puede reescribir $\mathbf{r}(\theta)$ en términos del parámetro longitud de arco como sigue.

$$\mathbf{r}(s) = r\cos\frac{s}{r}\,\mathbf{i} + r\,\mathrm{sen}\frac{s}{r}\,\mathbf{j} \qquad \text{La longitud de arco } s \text{ es el parámetro.}$$

Así, $\mathbf{r}'(s) = -\mathrm{sen}\dfrac{s}{r}\,\mathbf{i} + \cos\dfrac{s}{r}\,\mathbf{j}$, de donde se sigue que $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$, lo que implica que el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(s) = \frac{\mathbf{r}'(s)}{\|\mathbf{r}'(s)\|} = -\mathrm{sen}\frac{s}{r}\,\mathbf{i} + \cos\frac{s}{r}\,\mathbf{j}$$

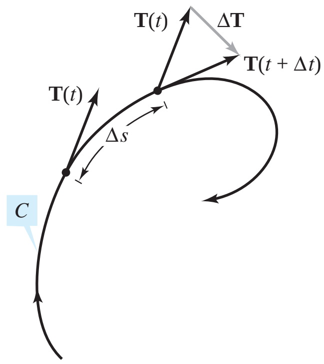
y la curvatura está dada por

$$K = \|\mathbf{T}'(s)\| = \left\| -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}\,\mathbf{i} - \frac{1}{r}\,\mathrm{sen}\frac{s}{r}\,\mathbf{j} \right\| = \frac{1}{r}$$

en todo punto del círculo.

NOTA Puesto que una recta no se curva, se esperaría que su curvatura fuera 0. Tratar de comprobar esto hallando la curvatura de la recta dada por

$$\mathbf{r}(s) = \left(3 - \frac{3}{5}s\right)\mathbf{i} + \frac{4}{5}s\mathbf{j}.$$



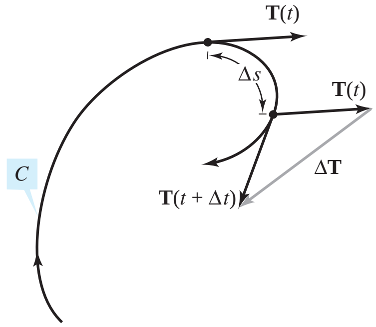


Figura 12.35

En el ejemplo 4, la curvatura se encontró aplicando directamente la definición. Esto requiere que la curva se exprese en términos del parámetro longitud de arco s. El teorema siguiente da otras dos fórmulas para encontrar la curvatura de una curva expresada en términos de un parámetro arbitrario t. La demostración de este teorema se deja como ejercicio [ver ejercicio 100, incisos *a*) y *b*)].

TEOREMA 12.8 FÓRMULAS PARA LA CURVATURA

Si C es una curva suave dada por $\mathbf{r}(t)$, entonces la curvatura K de C en t está dada por

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}.$$

Como $\|\mathbf{r}'(t)\| = ds/dt$, la primera fórmula implica que la curvatura es el cociente de la tasa o ritmo de cambio del vector tangente $\mathbf{T}$ entre la tasa o ritmo de cambio de la longitud de arco. Para ver que esto es razonable, sea Δt un número "pequeño". Entonces,

$$\frac{\mathbf{T}'(t)}{ds/dt} \approx \frac{[\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)]/\Delta t}{[s(t + \Delta t) - s(t)]/\Delta t} = \frac{\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)}{s(t + \Delta t) - s(t)} = \frac{\Delta \mathbf{T}}{\Delta s}.$$

En otras palabras, para un Δs dado, cuanto mayor sea la longitud de $\Delta\mathbf{T}$, la curva se dobla más en t, como se muestra en la figura 12.35.

EJEMPLO 5 Hallar la curvatura de una curva en el espacio

Hallar la curvatura de la curva definida por $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$.

Solución No se sabe a simple vista si este parámetro representa la longitud de arco, así es que hay que usar la fórmula $K = \|\mathbf{T}'(t)\|/\|\mathbf{r}'(t)\|$.

$$\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = t^2 + 2 \qquad \text{Longitud de } \mathbf{r}'(t).$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}}{t^2 + 2}$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{(t^2 + 2)(2\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}) - (2t)(2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k})}{(t^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{-4t\mathbf{i} + (4 - 2t^2)\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}}{(t^2 + 2)^2}$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{\sqrt{16t^2 + 16 - 16t^2 + 4t^4 + 16t^2}}{(t^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{2(t^2 + 2)}{(t^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{2}{t^2 + 2} \qquad \text{Longitud de } \mathbf{T}'(t).$$

Por tanto,

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{2}{(t^2 + 2)^2}. \qquad \text{Curvatura.}$$

El teorema siguiente presenta una fórmula para calcular la curvatura de una curva plana dada por $y = f(x)$.

TEOREMA 12.9 CURVATURA EN COORDENADAS RECTANGULARES

Si C es la gráfica de una función dos veces derivable $y = f(x)$, entonces la curvatura K en el punto (x, y) está dada por

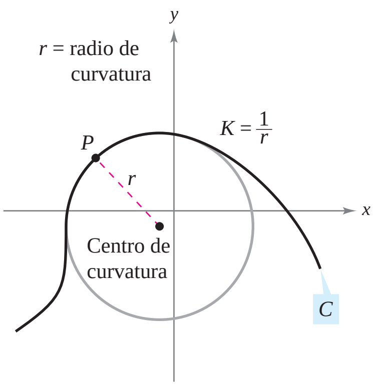
$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

DEMOSTRACIÓN Si se representa la curva C por $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ (donde x es el parámetro), se obtiene $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j}$,

$$\|\mathbf{r}'(x)\| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

y $\mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{j}$. Como $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{k}$, se sigue que la curvatura es

$$\begin{aligned} K &= \frac{\|\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x)\|}{\|\mathbf{r}'(x)\|^3} \\ &= \frac{|f''(x)|}{\{1 + [f'(x)]^2\}^{3/2}} \\ &= \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$



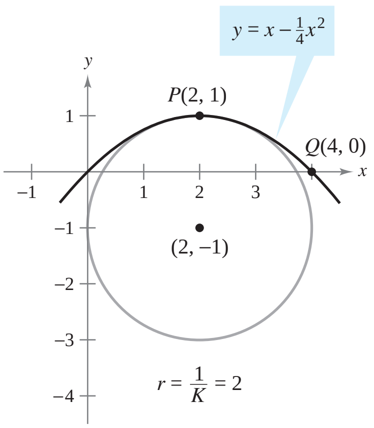
El círculo de curvatura
Figura 12.36

Sea C una curva con curvatura K en el punto P. El círculo que pasa por el punto P de radio $r = 1/K$ se denomina el **círculo de curvatura** si su centro se encuentra en el lado cóncavo de la curva y tiene en común con la curva una recta tangente en el punto P. Al radio se le llama el **radio de curvatura** en P, y al centro se le llama el **centro de curvatura**.

El círculo de curvatura permite estimar gráficamente la curvatura K en un punto P de una curva. Usando un compás, se puede trazar un círculo contra el lado cóncavo de la curva en el punto P, como se muestra en la figura 12.36. Si el círculo tiene radio r, se puede estimar que la curvatura es $K = 1/r$.

EJEMPLO 6 Hallar la curvatura en coordenadas rectangulares

Hallar la curvatura de la parábola dada por $y = x - \frac{1}{4}x^2$ en $x = 2$. Dibujar el círculo de curvatura en $(2, 1)$.



El círculo de curvatura
Figura 12.37

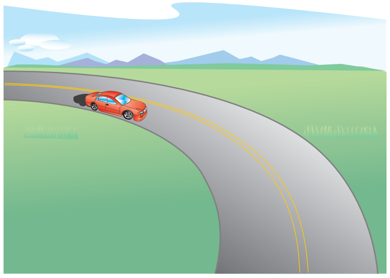
Solución La curvatura en $x = 2$ se calcula como sigue:

$$y' = 1 - \frac{x}{2} \qquad\qquad y' = 0$$

$$y'' = -\frac{1}{2} \qquad\qquad y'' = -\frac{1}{2}$$

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \qquad\qquad K = \frac{1}{2}$$

Como la curvatura en $P(2, 1)$ es $\frac{1}{2}$, el radio del círculo de curvatura en ese punto es 2. Por tanto, el centro de curvatura es $(2, -1)$, como se muestra en la figura 12.37. [En la figura, obsérvese que la curva tiene la mayor curvatura en P. Trate de mostrar que la curvatura en $Q(4, 0)$ es $1/2^{5/2} \approx 0.177$.]



La fuerza del empuje lateral que perciben los pasajeros en un automóvil que toma una curva depende de dos factores: la rapidez del automóvil y lo brusco de la curva
Figura 12.38

La longitud de arco y la curvatura están estrechamente relacionadas con las componentes tangencial y normal de la aceleración. La componente tangencial de la aceleración es la tasa o ritmo de cambio de la rapidez, que a su vez es la tasa o ritmo de cambio de la longitud de arco. Esta componente es negativa cuando un objeto en movimiento reduce su velocidad y positiva cuando la aumenta, independientemente de si el objeto gira o viaja en una recta. En consecuencia, la componente tangencial es solamente función de la longitud de arco y es independiente de la curvatura.

Por otro lado, la componente normal de la aceleración es función tanto de la rapidez como de la curvatura. Esta componente mide la aceleración que actúa perpendicular a la dirección del movimiento. Para ver por qué afectan la rapidez y la curvatura a la componente normal, imaginarse conduciendo un automóvil por una curva, como se muestra en la figura 12.38. Si la velocidad es alta y la curva muy cerrada, se sentirá empujado contra la puerta del automóvil. Al bajar la velocidad *o* tomar una curva más suave, se disminuye este efecto de empuje lateral.

El teorema siguiente establece explícitamente la relación entre rapidez, curvatura y componentes de la aceleración.

NOTA El teorema 12.10 da fórmulas adicionales para $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$.

TEOREMA 12.10 ACELERACIÓN, RAPIDEZ Y CURVATURA

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C, entonces el vector aceleración está dado por

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}$$

donde K es la curvatura de C y ds/dt es la rapidez.

DEMOSTRACIÓN Para el vector posición $\mathbf{r}(t)$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) &= a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}\\ &= D_t[\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{T}'\|\mathbf{N}\\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}(\|\mathbf{v}\|K)\mathbf{N}\\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Componentes tangencial y normal de la aceleración

Hallar $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ de la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}t^3\mathbf{k}.$$

Solución Por el ejemplo 5, se sabe que

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| = t^2 + 2 \quad \text{y} \quad K = \frac{2}{(t^2+2)^2}.$$

Por tanto,

$$a_{\mathbf{T}} = \frac{d^2s}{dt^2} = 2t \qquad \text{Componente tangencial.}$$

y

$$a_{\mathbf{N}} = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2}{(t^2+2)^2}(t^2+2)^2 = 2. \qquad \text{Componente normal.}$$

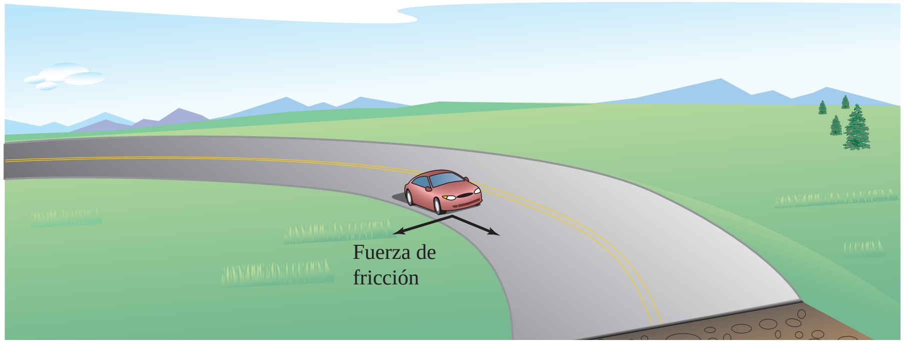
Aplicación

Hay muchas aplicaciones prácticas en física e ingeniería dinámica en las que se emplean las relaciones entre rapidez, longitud de arco, curvatura y aceleración. Una de estas aplicaciones se refiere a la fuerza de fricción o de rozamiento.

Un objeto de masa m en movimiento está en contacto con un objeto estacionario. La fuerza requerida para producir una aceleración $\mathbf{a}$ a lo largo de una trayectoria dada es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = m\mathbf{a} &= m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\mathbf{T} + mK\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}\\ &= ma_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + ma_{\mathbf{N}}\mathbf{N}.\end{aligned}$$

La porción de esta fuerza que es proporcionada por el objeto estacionario se llama **fuerza de fricción** o **de rozamiento**. Por ejemplo, si un automóvil se mueve con rapidez constante tomando una curva, la carretera ejerce una fuerza de fricción o rozamiento que impide que el automóvil salga de la carretera. Si el automóvil no se desliza, la fuerza de fricción es perpendicular a la dirección del movimiento y su magnitud es igual a la componente normal de la aceleración, como se muestra en la figura 12.39. La fuerza de rozamiento (o de fricción) potencial de una carretera en una curva puede incrementarse peraltando la carretera.



La fuerza de fricción es perpendicular a la dirección del movimiento
Figura 12.39

EJEMPLO 8 Fuerza de fricción

Un coche de carreras (kart) de 360 kilogramos viaja a una velocidad de 60 kilómetros por hora por una pista circular de 12 metros de radio, como se muestra en la figura 12.40. ¿Qué fuerza de fricción (o rozamiento) debe ejercer la superficie en los neumáticos para impedir que el coche salga de su curso?

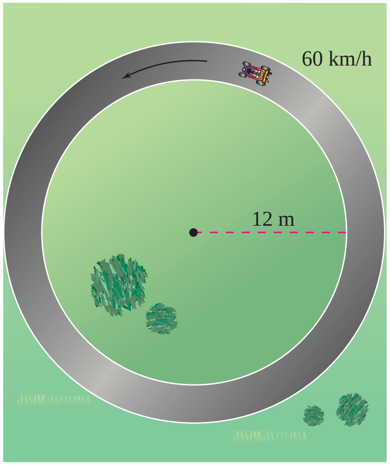


Figura 12.40

Solución La fuerza de fricción o rozamiento debe ser igual a la masa por la componente normal de aceleración. En el caso de esta pista circular, se sabe que la curvatura es

$$K = \frac{1}{12}. \qquad \text{Curvatura de la pista circular.}$$

Por consiguiente, la fuerza de fricción es

$$\begin{aligned}ma_{\mathbf{N}} &= mK\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\\ &= (360 \text{ kg})\left(\frac{1}{12 \text{ m}}\right)\left(\frac{60\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}}\right)^2\\ &\approx 8\,333 \text{ (kg)(m)/s}^2.\end{aligned}$$

Resumen sobre velocidad, aceleración y curvatura

Sea C una curva (en el plano o en el espacio) dada por la función de posición

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ — Curva en el plano.

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$ — Curva en el espacio.

Vector velocidad, rapidez y vector aceleración:

$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ — Vector velocidad.

$\|\mathbf{v}(t)\| = \dfrac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|$ — Rapidez.

$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = a_{\mathbf{T}}\mathbf{T}(t) + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}(t)$ — Vector aceleración.

Vector unitario tangente y vector unitario normal principal:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \quad \text{y} \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

Componentes de la aceleración:

$$a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$a_{\mathbf{N}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{N} = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^{\,2}} = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Fórmulas para la curvatura en el plano:

$K = \dfrac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$ — C dada por $y = f(x)$.

$K = \dfrac{|x'y'' - y'x''|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}$ — C dada por $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Fórmulas para la curvatura en el plano o en el espacio:

$K = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\mathbf{r}''(s)\|$ — s es el parámetro longitud de arco.

$K = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$ — t es el parámetro general.

$$K = \frac{\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}$$

Las fórmulas con productos vectoriales aplican sólo a curvas en el espacio.

12.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, dibujar la curva plana y hallar su longitud en el intervalo dado.

1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$, $[0, 4]$
2. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $[0, 4]$
3. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $[0, 2]$
4. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $[0, 6]$
5. $\mathbf{r}(t) = a\cos^3 t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}^3\, t\,\mathbf{j}$, $[0, 2\pi]$
6. $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\, t\,\mathbf{j}$, $[0, 2\pi]$

7. ***Movimiento de un proyectil*** Una pelota de béisbol es golpeada desde 3 pies sobre el nivel del suelo a 100 pies por segundo y con un ángulo de 45° con respecto al nivel del suelo.
   a) Hallar la función vectorial de la trayectoria de la pelota de béisbol.
   b) Hallar la altura máxima.
   c) Hallar el alcance.
   d) Hallar la longitud de arco de la trayectoria.

8. ***Movimiento de un proyectil*** Un objeto se lanza desde el nivel del suelo. Determinar el ángulo del lanzamiento para obtener *a*) la altura máxima, *b*) el alcance máximo y *c*) la longitud máxima de la trayectoria. En el inciso *c*), tomar $v_0 = 96$ pies por segundo.

En los ejercicios 9 a 14, dibujar la curva en el espacio y hallar su longitud sobre el intervalo dado.

	Función	*Intervalo*
9.	$\mathbf{r}(t) = -t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$	$[0, 1]$
10.	$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$	$[0, 2]$
11.	$\mathbf{r}(t) = \langle 4t, -\cos t, \mathrm{sen}\, t\rangle$	$\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$
12.	$\mathbf{r}(t) = \langle 2\,\mathrm{sen}\, t, 5t, 2\cos t\rangle$	$[0, \pi]$
13.	$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\, t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$	$[0, 2\pi]$
14.	$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t + t\,\mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, t - t\cos t, t^2\rangle$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

En los ejercicios 15 y 16, usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de la curva en el espacio sobre el intervalo dado.

	Función	*Intervalo*
15.	$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}$	$1 \le t \le 3$
16.	$\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} \pi t\mathbf{i} + \cos \pi t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$	$0 \le t \le 2$

17. ***Investigación*** Considerar la gráfica de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ en el intervalo $[0, 2]$.

a) Aproximar la longitud de la curva hallando la longitud del segmento de recta que une sus extremos.

b) Aproximar la longitud de la curva sumando las longitudes de los segmentos de recta que unen los extremos de los vectores $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{r}(0.5)$, $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1.5)$, y $\mathbf{r}(2)$.

c) Describir cómo obtener una estimación más exacta mediante los procesos de los incisos *a*) y *b*).

d) Usar las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de la curva. Comparar este resultado con las respuestas de los incisos *a*) y *b*).

18. ***Investigación*** Repetir el ejercicio 17 con la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 6\cos(\pi t/4)\mathbf{i} + 2\operatorname{sen}(\pi t/4)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

19. ***Investigación*** Considerar la hélice representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t\rangle$.

a) Expresar la longitud de arco s de la hélice como función de t evaluando la integral

$$s = \int_0^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2}\, du.$$

b) Despejar t en la relación deducida en el inciso *a*), y sustituir el resultado en el conjunto de ecuaciones paramétricas original. Esto da una parametrización de la curva en términos del parámetro longitud de arco s.

c) Hallar las coordenadas del punto en la hélice con longitud de arco $s = \sqrt{5}$ y $s = 4$.

d) Verificar que $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$.

20. ***Investigación*** Repetir el ejercicio 19 con la curva representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle 4(\operatorname{sen} t - t\cos t), 4(\cos t + t\operatorname{sen} t), \tfrac{3}{2}t^2\right\rangle.$$

En los ejercicios 21 a 24, hallar la curvatura *K* de la curva donde *s* es el parámetro longitud de arco.

21. $\mathbf{r}(s) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\mathbf{i} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\mathbf{j}$

22. $\mathbf{r}(s) = (3 + s)\mathbf{i} + \mathbf{j}$

23. La hélice del ejercicio 19: $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t\rangle$

24. La curva del ejercicio 20:

$\mathbf{r}(t) = \left\langle 4(\operatorname{sen} t - t\cos t), 4(\cos t + t\operatorname{sen} t), \tfrac{3}{2}t^2\right\rangle$

En los ejercicios 25 a 30, hallar la curvatura *K* de la curva plana en el valor dado del parámetro.

25. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}, \quad t = 1$

26. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad t = 2$

27. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}, \quad t = 1$

28. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \dfrac{1}{9}t^3\mathbf{j}, \quad t = 2$

29. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \operatorname{sen} t\rangle, \quad t = \dfrac{\pi}{2}$

30. $\mathbf{r}(t) = \langle 5\cos t, 4\operatorname{sen} t\rangle, \quad t = \dfrac{\pi}{3}$

En los ejercicios 31 a 40, hallar la curvatura *K* de la curva.

31. $\mathbf{r}(t) = 4\cos 2\pi t\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} 2\pi t\mathbf{j}$

32. $\mathbf{r}(t) = 2\cos \pi t\mathbf{i} + \operatorname{sen} \pi t\mathbf{j}$

33. $\mathbf{r}(t) = a\cos \omega t\mathbf{i} + a\operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}$

34. $\mathbf{r}(t) = a\cos \omega t\mathbf{i} + b\operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}$

35. $\mathbf{r}(t) = \langle a(\omega t - \operatorname{sen} \omega t), a(1 - \cos \omega t)\rangle$

36. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos \omega t + \omega t\operatorname{sen} \omega t, \operatorname{sen} \omega t - \omega t\cos \omega t\rangle$

37. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$ **38.** $\mathbf{r}(t) = 2t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \dfrac{1}{2}t^2\mathbf{k}$

39. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{k}$

40. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{2t}\cos t\mathbf{j} + e^{2t}\operatorname{sen} t\mathbf{k}$

En los ejercicios 41 a 44, encontrar la curvatura *K* de la curva en el punto *P*.

41. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}, \quad P(-3, 2)$

42. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}, \quad P(1, 0)$

43. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \dfrac{t^3}{4}\mathbf{k}, \quad P(2, 4, 2)$

44. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\mathbf{i} + e^t\operatorname{sen} t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad P(1, 0, 1)$

En los ejercicios 45 a 54, hallar la curvatura y el radio de curvatura de la curva plana en el valor dado de *x*.

45. $y = 3x - 2, \quad x = a$ **46.** $y = mx + b, \quad x = a$

47. $y = 2x^2 + 3, \quad x = -1$ **48.** $y = 2x + \dfrac{4}{x}, \quad x = 1$

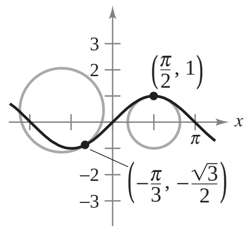
49. $y = \cos 2x, \quad x = 2\pi$ **50.** $y = e^{3x}, \quad x = 0$

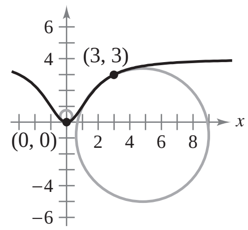
51. $y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x = 0$ **52.** $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}, \quad x = 0$

53. $y = x^3, \quad x = 2$ **54.** $y = x^n, \quad x = 1, \quad n \ge 2$

Redacción **En los ejercicios 55 y 56, se dan dos círculos de curvatura de la gráfica de la función. *a*) Hallar la ecuación del círculo menor, y *b*) escribir un párrafo corto que explique por qué los círculos tienen radios diferentes.**

55. $f(x) = \operatorname{sen} x$ **56.** $f(x) = 4x^2/(x^2 + 3)$





En los ejercicios 57 a 60, usar una herramienta de graficación para representar la función. En la misma pantalla, representar el círculo de curvatura de la gráfica en el valor dado de x.

57. $y = x + \dfrac{1}{x}, \quad x = 1$

58. $y = \ln x, \quad x = 1$

59. $y = e^x, \quad x = 0$

60. $y = \frac{1}{3}x^3, \quad x = 1$

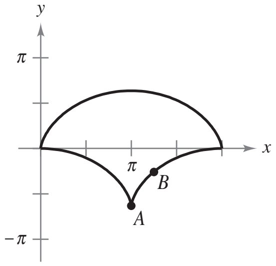
Evoluta **Un evoluta es la curva formada por el conjunto de centros de curvatura de una curva. En los ejercicios 61 y 62 se dan una curva y su evoluta. Usar un compás para trazar los círculos de curvatura con centros en los puntos A y B.**

61. Cicloide: $x = t - \operatorname{sen} t$

$y = 1 - \cos t$

Evoluta: $x = \operatorname{sen} t + t$

$y = \cos t - 1$

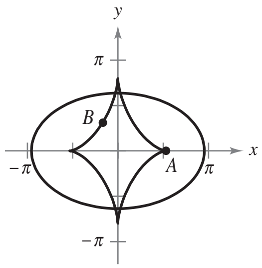


62. Elipse: $x = 3\cos t$

$y = 2\operatorname{sen} t$

Evoluta: $x = \frac{5}{3}\cos^3 t$

$y = \frac{5}{2}\operatorname{sen}^3 t$



En los ejercicios 63 a 70 *a*) hallar el punto de la curva en el que la curvatura K es máxima y *b*) hallar el límite de K cuando $x \to \infty$.

63. $y = (x - 1)^2 + 3$

64. $y = x^3$

65. $y = x^{2/3}$

66. $y = \dfrac{1}{x}$

67. $y = \ln x$

68. $y = e^x$

69. $y = \operatorname{senh} x$

70. $y = \cosh x$

En los ejercicios 71 a 74, hallar todos los puntos de la gráfica de una función en los que la curvatura es cero.

71. $y = 1 - x^3$

72. $y = (x - 1)^3 + 3$

73. $y = \cos x$

74. $y = \operatorname{sen} x$

Desarrollo de conceptos

75. *a*) Dada la fórmula para la longitud de arco de una curva suave en el espacio.

b) Dada las fórmulas para la curvatura en el plano y en el espacio.

76. Describir la gráfica de una función vectorial para la que la curvatura sea 0 en todos los valores t de su dominio.

Desarrollo de conceptos (*continuación*)

77. Dada una función dos veces derivable $y = f(x)$, determinar su curvatura en un extremo relativo. ¿Puede la curvatura tener valores mayores que los que alcanza en un extremo relativo? ¿Por qué sí o por qué no?

Para discusión

78. Una partícula se mueve a lo largo de la curva plana C descrita por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$.

a) Encontrar la longitud de C en el intervalo $0 \le t \le 2$.

b) Encontrar la curvatura K de la curva plana en $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$.

c) Describir la curvatura de C cuando t varía desde $t = 0$ hasta $t = 2$.

79. En la elipse dada por $x^2 + 4y^2 = 4$, mostrar que la curvatura es mayor en los puntos terminales del eje mayor, y es menor en los puntos terminales del eje menor.

80. ***Investigación*** Hallar todos los a y b tales que las dos curvas dadas por

$$y_1 = ax(b - x) \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{x}{x + 2}$$

se corten en un solo punto y tengan una recta tangente común y curvatura igual en ese punto. Trazar una gráfica para cada conjunto de valores de a y b.

CAS **81.** ***Investigación*** Considerar la función $f(x) = x^4 - x^2$.

a) Usar un sistema computacional para álgebra y encontrar la curvatura K de la curva como función de x.

b) Usar el resultado del inciso *a*) para hallar los círculos de curvatura de la gráfica de f en $x = 0$ y $x = 1$. Usar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función y los dos círculos de curvatura.

c) Representar gráficamente la función $K(x)$ y compararla con la gráfica de $f(x)$. Por ejemplo, ¿se presentan los extremos de f y K en los mismos números críticos? Explicar el razonamiento.

82. ***Investigación*** La superficie de una copa se forma por revolución de la gráfica de la función

$$y = \tfrac{1}{4}x^{8/5}, \quad 0 \le x \le 5$$

en torno al eje y. Las medidas se dan en centímetros.

CAS *a*) Usar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie.

b) Hallar el volumen de la copa.

c) Hallar la curvatura K de la curva generatriz como función de x. Usar una herramienta de graficación para representar K.

d) Si un objeto esférico se deja caer en la copa, ¿es posible que toque el fondo? Explicar la respuesta.

83. Una esfera de radio 4 se deja caer en el paraboloide dado por $z = x^2 + y^2$.

a) ¿Qué tanto se acercará la esfera al vértice del paraboloide?

b) ¿Cuál es el radio de la esfera mayor que toca el vértice?

84. ***Rapidez*** Cuanto menor es la curvatura en una curva de una carretera, mayor es la velocidad a la que pueden ir los automóviles. Suponer que la velocidad máxima en una curva es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la curvatura. Un automóvil que recorre la trayectoria $y = \frac{1}{3}x^3$ (x y y medidos en millas) puede ir con seguridad a 30 millas por hora en $\left(1, \frac{1}{3}\right)$. ¿Qué tan rápido puede ir en $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right)$?

85. Sea C una curva dada por $y = f(x)$. Sea K la curvatura ($K \neq 0$) en el punto $P(x_0, y_0)$ y sea

$$z = \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)}.$$

Mostrar que las coordenadas (α, β) del centro de curvatura en P son $(\alpha, \beta) = (x_0 - f'(x_0)z, y_0 + z)$.

86. Usar el resultado del ejercicio 85 para hallar el centro de curvatura de la curva en el punto dado.

a) $y = e^x, \quad (0, 1)$ *b)* $y = \dfrac{x^2}{2}, \quad \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ *c)* $y = x^2, \quad (0, 0)$

87. Se da una curva C por medio de la ecuación polar $r = f(\theta)$. Mostrar que la curvatura K en el punto (r, θ) es

$$K = \frac{[2(r')^2 - rr'' + r^2]}{[(r')^2 + r^2]^{3/2}}.$$

[*Sugerencia:* Representar la curva por $\mathbf{r}(\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$.]

88. Usar el resultado del ejercicio 87 para hallar la curvatura de cada una de las curvas polares.

a) $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ *b)* $r = \theta$ *c)* $r = a\,\text{sen}\,\theta$ *d)* $r = e^{\theta}$

89. Dada la curva polar $r = e^{a\theta}$, $a > 0$, hallar la curvatura K y determinar el límite de K cuando *a)* $\theta \to \infty$ y *b)* $a \to \infty$.

90. Mostrar que la fórmula para la curvatura de una curva polar $r = f(\theta)$ dada en el ejercicio 87 se reduce a $K = 2/|r'|$ para la curvatura *en el polo*.

En los ejercicios 91 y 92, usar el resultado del ejercicio 90 para hallar la curvatura de la curva rosa en el polo.

91. $r = 4\,\text{sen}\,2\theta$ **92.** $r = 6\cos 3\theta$

93. Para la curva suave dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, demostrar que la curvatura está dada por

$$K = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{\{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2\}^{3/2}}.$$

94. Usar el resultado del ejercicio 93 para encontrar la curvatura K de la curva representada por ecuaciones paramétricas $x(t) = t^3$ y $y(t) = \frac{1}{2}t^2$. Usar una herramienta de graficación para representar K y determinar toda asíntota horizontal. Interpretar las asíntotas en el contexto del problema.

95. Usar el resultado del ejercicio 93 para encontrar la curvatura K de la cicloide representada por las ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = a(\theta - \text{sen}\,\theta) \quad \text{y} \quad y(\theta) = a(1 - \cos\theta).$$

¿Cuáles son los valores mínimo y máximo de K?

96. Usar el teorema 12.10 para encontrar $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ de cada una de las curvas dadas por las funciones vectoriales.

a) $\mathbf{r}(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + (3t - t^3)\mathbf{j}$ *b)* $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\,\mathbf{k}$

97. ***Fuerza de rozamiento o de fricción*** Un vehículo de 5 500 libras va a una velocidad de 30 millas por hora por una glorieta de 100 pies de radio. ¿Cuál es la fuerza de fricción o de rozamiento que debe ejercer la superficie de la carretera en los neumáticos para impedir que el vehículo salga de curso?

98. ***Fuerza de rozamiento o de fricción*** Un vehículo de 6 400 libras viaja a 35 millas por hora en una glorieta de 250 pies de radio. ¿Cuál es la fuerza de fricción o de rozamiento que debe ejercer la superficie de la carretera en los neumáticos para impedir que el vehículo salga de curso?

99. Verificar que la curvatura en cualquier punto (x, y) de la gráfica de $y = \cosh x$ es $1/y^2$.

100. Usar la definición de curvatura en el espacio $K = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\mathbf{r}''(s)\|$, para verificar cada una de las fórmulas siguientes.

a) $K = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$

b) $K = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

c) $K = \dfrac{\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 101 a 104, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

101. La longitud de arco de una curva en el espacio depende de la parametrización.

102. La curvatura de un círculo es igual a su radio.

103. La curvatura de una recta es 0.

104. La componente normal de la aceleración es función tanto de la velocidad como de la curvatura.

Leyes de Kepler **En los ejercicios 105 a 112, se pide verificar las leyes de Kepler del movimiento planetario. En estos ejercicios, suponer que todo planeta se mueve en una órbita dada por la función vectorial r. Sean $r = \|\mathbf{r}\|$, G la constante gravitatoria universal, M la masa del Sol y m la masa del planeta.**

105. Demostrar que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = r\dfrac{dr}{dt}$.

106. Usando la segunda ley del movimiento de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, y la segunda ley de la gravitación de Newton, $\mathbf{F} = -(GmM/r^3)\mathbf{r}$, mostrar que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{r}$ son paralelos, y que $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t) = \mathbf{L}$ es un vector constante. Por tanto, $\mathbf{r}(t)$ se mueve en un *plano fijo*, ortogonal a $\mathbf{L}$.

107. Demostrar que $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\mathbf{r}}{r}\right] = \dfrac{1}{r^3}\{[\mathbf{r} \times \mathbf{r}'] \times \mathbf{r}\}$.

108. Mostrar que $\dfrac{\mathbf{r}'}{GM} \times \mathbf{L} - \dfrac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}$ es un vector constante.

109. Demostrar la primera ley de Kepler: todo planeta describe una órbita elíptica con el Sol como uno de sus focos.

110. Suponer que la órbita elíptica $r = ed/(1 + e\cos\theta)$ está en el plano xy, con $\mathbf{L}$ a lo largo del eje z. Demostrar que $\|\mathbf{L}\| = r^2\,d\theta/dt$.

111. Demostrar la segunda ley de Kepler: todo rayo del Sol a un planeta barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.

112. Demostrar la tercera ley de Kepler: el cuadrado del periodo de la órbita de un planeta es proporcional al cubo de la distancia media entre el planeta y el Sol.

12 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 a 4, *a*) hallar el dominio de r y *b*) determinar los valores de *t* (si los hay) en los que la función es continua.

1. $\mathbf{r}(t) = \tan t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ **2.** $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{t-4}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ **4.** $\mathbf{r}(t) = (2t+1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

En los ejercicios 5 y 6, evaluar (si es posible) la función vectorial en cada uno de los valores dados de *t*.

5. $\mathbf{r}(t) = (2t+1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - \sqrt{t+2}\,\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}(0)$ *b*) $\mathbf{r}(-2)$ *c*) $\mathbf{r}(c-1)$ *d*) $\mathbf{r}(1+\Delta t) - \mathbf{r}(1)$

6. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + (1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{j} - t\,\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}(0)$ *b*) $\mathbf{r}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ *c*) $\mathbf{r}(s-\pi)$ *d*) $\mathbf{r}(\pi+\Delta t) - \mathbf{r}(\pi)$

En los ejercicios 7 y 8, trazar la curva plana representada por la función vectorial y dar la orientación de la curva.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \pi\cos t, \pi\operatorname{sen} t\rangle$ **8.** $\mathbf{r}(t) = \langle t+2, t^2-1\rangle$

CAS **En los ejercicios 9 a 14, usar un sistema algebraico por computadora a fin de representar gráficamente la curva en el espacio representada por la función vectorial.**

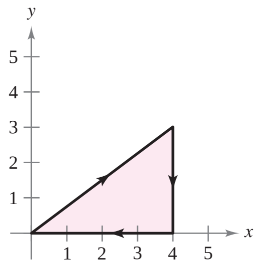
9. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$ **10.** $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle 1, \operatorname{sen} t, 1\rangle$ **12.** $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, t, 2\operatorname{sen} t\rangle$

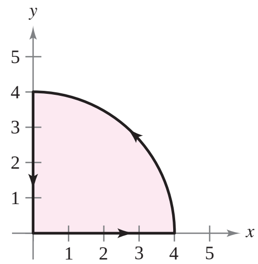
13. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \ln t, \tfrac{1}{2}t^2\right\rangle$ **14.** $\mathbf{r}(t) = \left\langle \tfrac{1}{2}t, \sqrt{t}, \tfrac{1}{4}t^3\right\rangle$

En los ejercicios 15 y 16, hallar las funciones vectoriales que describen la frontera de la región de la figura.

15.



16.



17. Una partícula se mueve en una trayectoria recta que pasa por los puntos $(-2, -3, 8)$ y $(5, 1, -2)$. Hallar una función vectorial para esta trayectoria. (Hay muchas respuestas correctas.)

18. El borde exterior de una escalera de caracol tiene forma de una hélice de 2 metros de radio. La altura de la escalera es 2 metros y gira tres cuartos de una revolución completa de abajo a arriba. Hallar una función vectorial para la hélice. (Hay muchas respuestas correctas.)

En los ejercicios 19 y 20, dibujar la curva en el espacio representada por la intersección de las superficies. Usar el parámetro $x = t$ para hallar una función vectorial para la curva en el espacio.

19. $z = x^2 + y^2, \quad x + y = 0$

20. $x^2 + z^2 = 4, \quad x - y = 0$

En los ejercicios 21 y 22, evaluar el límite.

21. $\displaystyle\lim_{t\to 4^-}\left(t\,\mathbf{i} + \sqrt{4-t}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$ **22.** $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2t}{t}\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j} + e^t\,\mathbf{k}\right)$

En los ejercicios 23 y 24, hallar lo siguiente.

a) $\mathbf{r}'(t)$ *b*) $\mathbf{r}''(t)$ *c*) $D_t[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{u}(t)]$

d) $D_t[\mathbf{u}(t) - 2\mathbf{r}(t)]$ *e*) $D_t[\|\mathbf{r}(t)\|],\ t > 0$ *f*) $D_t[\mathbf{r}(t)\times\mathbf{u}(t)]$

23. $\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}, \quad \mathbf{u}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + \tfrac{2}{3}t^3\,\mathbf{k}$

24. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \dfrac{1}{t}\,\mathbf{k}$

25. ***Redacción*** Las componentes x y y de la derivada de la función vectorial **u** son positivas en $t = t_0$, y la componente z es negativa. Describir el comportamiento de **u** en $t = t_0$.

26. ***Redacción*** La componente x de la derivada de la función vectorial **u** es 0 para t en el dominio de la función. ¿Qué implica esta información acerca de la gráfica de **u**?

En los ejercicios 27 a 30, hallar la integral indefinida.

27. $\displaystyle\int (\cos t\,\mathbf{i} + t\cos t\,\mathbf{j})\,dt$ **28.** $\displaystyle\int (\ln t\,\mathbf{i} + t\ln t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt$

29. $\displaystyle\int \|\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}\|\,dt$

30. $\displaystyle\int (t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k})\times(\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})\,dt$

En los ejercicios 31 a 34, evaluar la integral definida.

31. $\displaystyle\int_{-2}^{2} (3t\,\mathbf{i} + 2t^2\,\mathbf{j} - t^3\,\mathbf{k})\,dt$ **32.** $\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{t}\,\mathbf{j} + t\operatorname{sen} t\,\mathbf{k}\right)dt$

33. $\displaystyle\int_0^2 (e^{t/2}\,\mathbf{i} - 3t^2\,\mathbf{j} - \mathbf{k})\,dt$ **34.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3\mathbf{i} + \operatorname{arcsen} t\,\mathbf{j} - t^2\mathbf{k})\,dt$

En los ejercicios 35 y 36, hallar r(*t*) para las condiciones dadas.

35. $\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}'(t) = \sec t\,\mathbf{i} + \tan t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = 3\mathbf{k}$

En los ejercicios 37 a 40, el vector posición r describe la trayectoria de un objeto que se mueve en el espacio. Hallar la velocidad, la rapidez y la aceleración del objeto.

37. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - t\mathbf{k}$ **38.** $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

39. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, 3t\rangle$ **40.** $\mathbf{r}(t) = \langle t, -\tan t, e^t\rangle$

Aproximación lineal **En los ejercicios 41 y 42, hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la gráfica de la función vectorial en $t = t_0$. Usar las ecuaciones de la recta para aproximar $\mathbf{r}(t_0 + 0.1)$.**

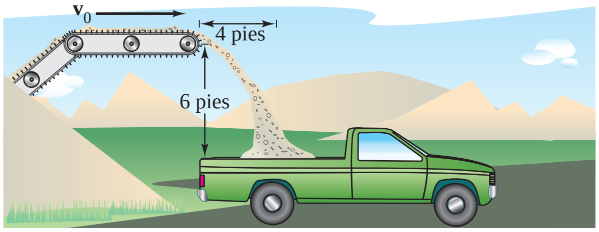
41. $\mathbf{r}(t) = \ln(t-3)\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}t\,\mathbf{k}, \quad t_0 = 4$

42. $\mathbf{r}(t) = 3\cosh t\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\,\mathbf{j} - 2t\,\mathbf{k}, \quad t_0 = 0$

Movimiento de un proyectil **En los ejercicios 43 a 46, usar el modelo para el movimiento de un proyectil, suponiendo que no hay resistencia del aire. [$a(t) = -32$ pies por segundo al cuadrado o $a(t) = -9.8$ metros por segundo al cuadrado.]**

43. Un proyectil se dispara desde el nivel del suelo a una velocidad inicial de 84 pies por segundo con un ángulo de 30° con la horizontal. Hallar el alcance del proyectil.

44. El centro de la caja de un camión está a 6 pies hacia abajo y a 4 pies horizontalmente del extremo de una cinta transportadora horizontal que descarga grava (ver la figura). Determinar la velocidad ds/dt a que la cinta transportadora debe moverse para que la grava caiga en el centro de la caja del camión.



45. Un proyectil se dispara desde el nivel del suelo con un ángulo de 20° con la horizontal. El proyectil tiene un alcance de 95 metros. Hallar la velocidad inicial mínima.

46. Usar una herramienta de graficación para representar las trayectorias de un proyectil si $v_0 = 20$ metros por segundo, $h = 0$ y *a*) $\theta = 30°$, *b*) $\theta = 45°$ y *c*) $\theta = 60°$. Usar las gráficas para aproximar en cada caso la altura máxima y el alcance máximo del proyectil.

En los ejercicios 47 a 54, hallar la velocidad, la rapidez y la aceleración en el instante t. A continuación hallar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{N}$ en el instante t.

47. $\mathbf{r}(t) = (2 - t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$

48. $\mathbf{r}(t) = (1 + 4t)\mathbf{i} + (2 - 3t)\mathbf{j}$

49. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}$

50. $\mathbf{r}(t) = 2(t + 1)\mathbf{i} + \dfrac{2}{t + 1}\mathbf{j}$

51. $\mathbf{r}(t) = e^{t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$

52. $\mathbf{r}(t) = t \cos t\,\mathbf{i} + t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

53. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \dfrac{1}{2}t^2\mathbf{k}$

54. $\mathbf{r}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \dfrac{1}{t}\mathbf{k}$

En los ejercicios 55 y 56, hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en el espacio en el punto dado.

55. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\,\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = \dfrac{\pi}{3}$

56. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}, \quad t = 2$

57. ***Órbita de un satélite*** Hallar la velocidad necesaria para que un satélite mantenga una órbita circular 550 millas sobre la superficie de la Tierra.

58. ***Fuerza centrípeta*** Un automóvil circula por una glorieta al doble de la velocidad permitida. ¿En un factor de cuánto aumenta la fuerza centrípeta sobre la que se tendría a la velocidad permitida?

En los ejercicios 59 a 62, dibujar la curva plana y hallar su longitud en el intervalo dado.

	Función	*Intervalo*
59.	$\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j}$	$[0, 5]$
60.	$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{k}$	$[0, 3]$
61.	$\mathbf{r}(t) = 10 \cos^3 t\,\mathbf{i} + 10 \operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j}$	$[0, 2\pi]$
62.	$\mathbf{r}(t) = 10 \cos t\,\mathbf{i} + 10 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$	$[0, 2\pi]$

En los ejercicios 63 a 66, dibujar la curva en el espacio y hallar su longitud en el intervalo dado.

	Función	*Intervalo*
63.	$\mathbf{r}(t) = -3t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$	$[0, 3]$
64.	$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$	$[0, 2]$
65.	$\mathbf{r}(t) = \langle 8 \cos t, 8 \operatorname{sen} t, t\rangle$	$[0, \pi/2]$
66.	$\mathbf{r}(t) = \langle 2(\operatorname{sen} t - t \cos t), 2(\cos t + t \operatorname{sen} t), t\rangle$	$[0, \pi/2]$

En los ejercicios 67 a 70, hallar la curvatura K de la curva.

67. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$

68. $\mathbf{r}(t) = 2\sqrt{t}\,\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$

69. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

70. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + 5 \cos t\,\mathbf{j} + 5 \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$

En los ejercicios 71 y 72, encontrar la curvatura K de la curva en el punto P.

71. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{2}t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \dfrac{1}{3}t^3\mathbf{k}, \quad P\left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{3}\right)$

72. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad P(-4, 0, \pi)$

En los ejercicios 73 a 76, hallar la curvatura y el radio de curvatura de la curva plana en el valor dado de x.

73. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2, \quad x = 4$

74. $y = e^{-x/2}, \quad x = 0$

75. $y = \ln x, \quad x = 1$

76. $y = \tan x, \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

77. ***Redacción*** Un ingeniero civil diseña una autopista como se muestra en la figura. BC es un arco del círculo. AB y CD son rectas tangentes al arco circular. Criticar el diseño.

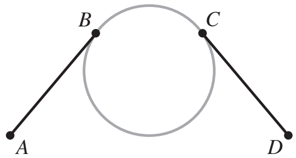


Figura para 77

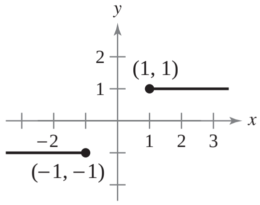


Figura para 78

78. Un segmento de recta se extiende horizontalmente a la izquierda desde el punto $(-1, -1)$. Otro segmento de recta se extiende horizontalmente a la derecha del punto $(1, 1)$, como se muestra en la figura. Hallar una curva de la forma

$$y = ax^5 + bx^3 + cx$$

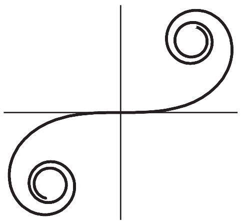
que una los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$ de manera que la pendiente y curvatura de la curva sean cero en los puntos terminales.

SP Solución de problemas

1. La **espiral de Cornu** está dada por

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \quad \text{y} \quad y(t) = \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du.$$

La espiral mostrada en la figura fue trazada sobre el intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$.



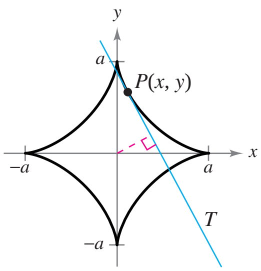
Generada con Mathematica

a) Hallar la longitud de arco de esta curva desde $t = 0$ hasta $t = a$.

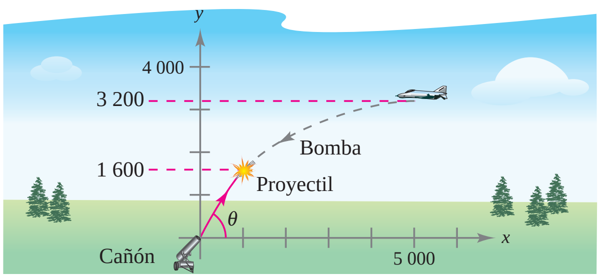
b) Hallar la curvatura de la gráfica cuando $t = a$.

c) La espiral de Cornu la descubrió James Bernoulli. Bernoulli encontró que la espiral tiene una relación interesante entre curvatura y longitud del arco. ¿Cuál es esta relación?

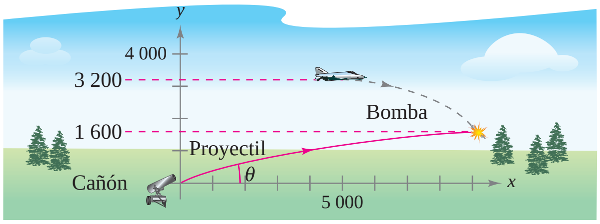
2. Sea T la recta tangente en el punto $P(x, y)$ a la gráfica de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$, como se observa en la figura. Mostrar que el radio de curvatura en P es el triple de la distancia del origen a la recta tangente T.



3. Un bombardero vuela horizontalmente a una altitud de 3 200 pies con una velocidad de 400 pies por segundo cuando suelta una bomba. Un proyectil se lanza 5 segundos después desde un cañón orientado hacia el bombardero y abajo a 5 000 pies del punto original del bombardero, como se muestra en la figura. El proyectil va a interceptar la bomba a una altitud de 1 600 pies. Determinar la velocidad inicial y el ángulo de inclinación del proyectil. (Despreciar la resistencia del aire.)



4. Repetir el ejercicio 3 si el bombardero está orientado en dirección opuesta a la del lanzamiento, como se muestra en la figura.

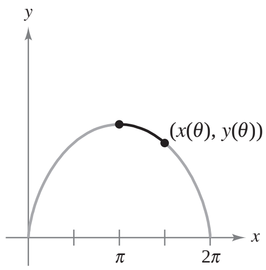


5. Considerar un arco de la cicloide

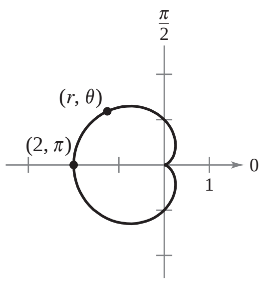
$$\mathbf{r}(\theta) = (\theta - \operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (1 - \cos\theta)\mathbf{j}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

que se muestra en la figura. Sea $s(\theta)$ la longitud de arco desde el punto más alto del arco hasta el punto $(x(\theta), y(\theta))$, y sea $\rho(\theta) = \dfrac{1}{K}$ el radio de curvatura en el punto $(x(\theta), y(\theta))$.

Mostrar que s y ρ están relacionados por la ecuación $s^2 + \rho^2 = 16$. (Esta ecuación se llama *ecuación natural* de la curva.)



6. Considere la cardioide $r = 1 - \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, que se muestra en la figura. Sea $s(\theta)$ la longitud de arco desde el punto $(2, \pi)$ de la cardioide hasta el punto (r, θ), y sea $\rho(\theta) = \dfrac{1}{K}$ el radio de curvatura en el punto (r, θ). Mostrar que s y ρ están relacionados por la ecuación $s^2 + 9\rho^2 = 16$. (Esta ecuación se llama *ecuación natural* de la curva.)



7. Si $\mathbf{r}(t)$ es una función no nula y derivable en t, demostrar que

$$\frac{d}{dt}(\|\mathbf{r}(t)\|) = \frac{1}{\|\mathbf{r}(t)\|}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

8. Un satélite de comunicaciones se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra a una distancia de 42 000 kilómetros del centro de la Tierra. La velocidad angular

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{\pi}{12} \text{ radianes por hora}$$

es constante.

a) Utilizar coordenadas polares para mostrar que el vector aceleración está dado por

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{u_r} + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\mathbf{u}_\theta$$

donde $\mathbf{u_r} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es el vector unitario en la dirección radial y $\mathbf{u}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$.

b) Hallar las componentes radial y angular de la aceleración para el satélite.

En los ejercicios 9 a 11, usar el vector binormal definido por la ecuación $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.

9. Hallar los vectores unitario tangente, unitario normal y binormal a la hélice $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ en $t = \frac{\pi}{2}$. Dibujar la hélice junto con estos tres vectores unitarios mutuamente ortogonales.

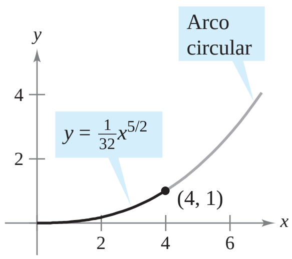
10. Hallar los vectores unitario tangente, unitario normal y binormal a la curva $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} - \mathbf{k}$ en $t = \frac{\pi}{4}$. Dibujar la hélice junto con estos tres vectores unitarios mutuamente ortogonales.

11. *a*) Demostrar que existe un escalar τ, llamado **torsión**, tal que $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$.

b) Demostrar que $\dfrac{d\mathbf{N}}{ds} = -K\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$.

(Las tres ecuaciones $d\mathbf{T}/ds = K\mathbf{N}$, $d\mathbf{N}/ds = -K\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$ y $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$ son llamadas las *fórmulas de Frenet-Serret.*)

12. Una autopista tiene una rampa de salida que empieza en el origen de un sistema coordenado y sigue la curva $y = \frac{1}{32}x^{5/2}$ hasta el punto (4, 1) (ver la figura). Después sigue una trayectoria circular cuya curvatura es la dada por la curva en (4, 1). ¿Cuál es el radio del arco circular? Explicar por qué la curva y el arco circular deben tener en (4, 1) la misma curvatura.



13. Considerar la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos\pi t, t\operatorname{sen}\pi t\rangle$, $0 \le t \le 2$.

a) Usar una herramienta de graficación para representar la función.

b) Hallar la longitud de arco en el inciso *a*).

c) Hallar la curvatura K como función de t. Hallar las curvaturas cuando t es 0, 1 y 2.

d) Usar una herramienta de graficación para representar la función K.

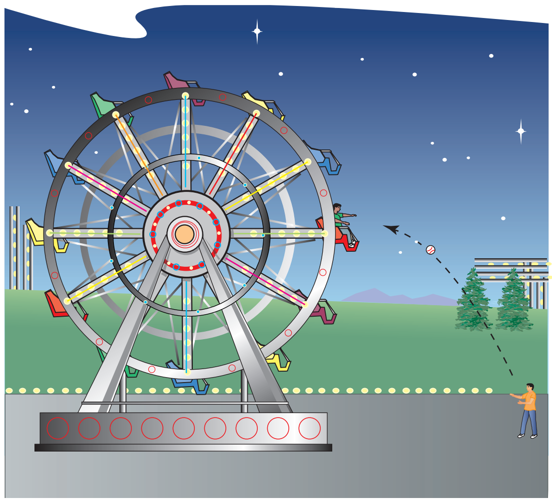
e) Hallar (si es posible) el $\lim\limits_{t\to\infty} K$.

f) Con el resultado del inciso *e*), hacer conjeturas acerca de la gráfica de $\mathbf{r}$ cuando $t \to \infty$.

14. Se quiere lanzar un objeto a un amigo que está en una rueda de la fortuna (ver la figura). Las ecuaciones paramétricas siguientes dan la trayectoria del amigo $\mathbf{r}_1(t)$ y la trayectoria del objeto $\mathbf{r}_2(t)$. La distancia está dada en metros y el tiempo en segundos.

$$\mathbf{r}_1(t) = 15\left(\operatorname{sen}\frac{\pi t}{10}\right)\mathbf{i} + \left(16 - 15\cos\frac{\pi t}{10}\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = [22 - 8.03(t - t_0)]\mathbf{i} + [1 + 11.47(t - t_0) - 4.9(t - t_0)^2]\mathbf{j}$$



a) Localizar la posición del amigo en la rueda en el instante $t = 0$.

b) Determinar el número de revoluciones por minuto de la rueda.

c) ¿Cuál es la rapidez y el ángulo de inclinación (en grados) al que el objeto es lanzado en el instante $t = t_0$?

d) Usar una herramienta de graficación para representar las funciones vectoriales usando un valor de t_0 que permite al amigo alcanzar el objeto. (Hacer esto por ensayo y error.) Explicar la importancia de t_0.

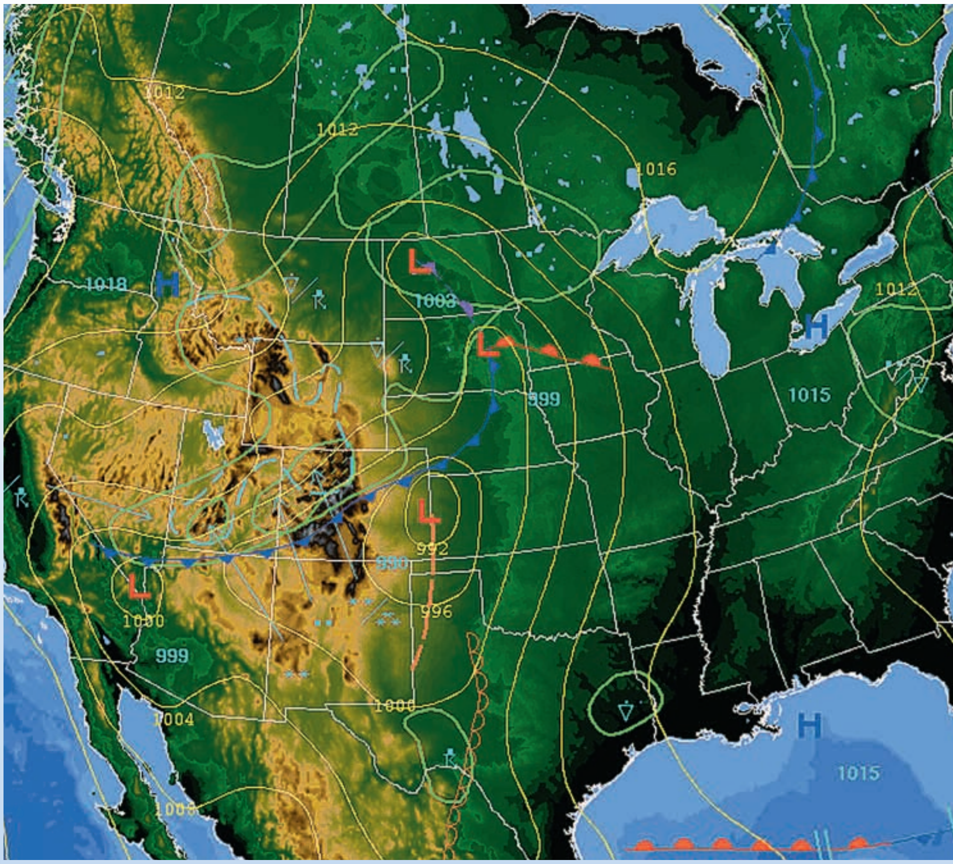
e) Hallar el instante aproximado en el que el amigo deberá poder atrapar el objeto. Aproximar las velocidades del amigo y del objeto en ese instante.

13 Funciones de varias variables

En este capítulo se estudiarán funciones de más de una variable independiente. Muchos de los conceptos presentados son extensiones de ideas familiares de capítulos recientes.

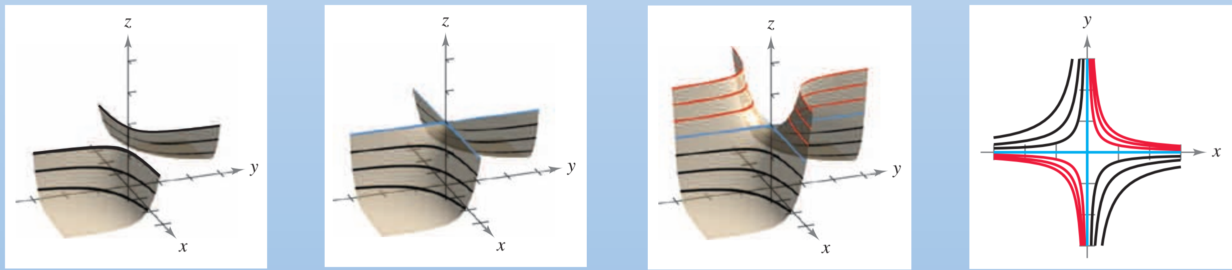
En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo trazar una gráfica, curvas de nivel y superficies de nivel. (**13.1**)
- Cómo encontrar un límite y determinar la continuidad. (**13.2**)
- Cómo encontrar y usar una derivada parcial. (**13.3**)
- Cómo encontrar y usar una diferencial total y determinar diferenciabilidad. (**13.4**)
- Cómo usar la regla de la cadena y encontrar una derivada parcial implícita. (**13.5**)
- Cómo encontrar y usar una derivada direccional y un gradiente. (**13.6**)
- Cómo encontrar una ecuación de un plano tangente y una ecuación de una recta normal a una superficie, y cómo encontrar el ángulo de inclinación de un plano. (**13.7**)
- Cómo encontrar los extremos absolutos y relativos. (**13.8**)
- Cómo resolver un problema de optimización, incluida optimización restringida usando un multiplicador de Lagrange, y cómo usar el método de mínimos cuadrados. (**13.9, 13.10**)



NOAA

Los meteorólogos usan mapas que muestran curvas de presión atmosférica igual, llamadas *isobaras*, para predecir los patrones del clima. ¿Cómo se pueden usar los gradientes de presión para determinar el área del país que tiene las mayores velocidades de viento? (Ver la sección 13.6, ejercicio 68.)



Muchas cantidades de la vida real son funciones de dos o más variables. En la sección 13.1 se aprenderá cómo graficar una función de dos variables, tal como la que se muestra arriba. Las primeras tres gráficas muestran vistas cortadas de la superficie en varios trazos. Otra forma de visualizar estas superficies es proyectar los trazos hacia el plano *xy*, tal como se muestra en la cuarta gráfica.

13.1 Introducción a las funciones de varias variables

- **Entender la notación para una función de varias variables.**
- **Dibujar la gráfica de una función de dos variables.**
- **Dibujar las curvas de nivel de una función de dos variables.**
- **Dibujar las superficies de nivel de una función de tres variables.**
- **Utilizar gráficos por computadora para representar una función de dos variables.**

Funciones de varias variables

EXPLORACIÓN

Comparación de dimensiones
Sin usar una herramienta de graficación, describir la gráfica de cada función de dos variables.

a) $z = x^2 + y^2$
b) $z = x + y$
c) $z = x^2 + y$
d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
e) $z = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$

Hasta ahora en este texto, sólo se han visto funciones de una sola variable (independiente). Sin embargo, muchos problemas comunes son funciones de dos o más variables. Por ejemplo, el trabajo realizado por una fuerza $(W = FD)$ y el volumen de un cilindro circular recto $(V = \pi r^2 h)$ son funciones de dos variables. El volumen de un sólido rectangular $(V = lwh)$ es una función de tres variables. La notación para una función de dos o más variables es similar a la utilizada para una función de una sola variable. Aquí se presentan dos ejemplos.

$$z = f\underbrace{(x, y)}_{\text{2 variables}} = x^2 + xy \qquad \text{Función de 2 variables.}$$

y

$$w = f\underbrace{(x, y, z)}_{\text{3 variables}} = x + 2y - 3z \qquad \text{Función de 3 variables.}$$

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par ordenado (x, y) de D le corresponde un único número real $f(x, y)$, entonces se dice que f es una **función de x y y**. El conjunto D es el **dominio** de f, y el correspondiente conjunto de valores $f(x, y)$ es el **rango** de f.

En la función dada por $z = f(x, y)$, x y y son las **variables independientes** y z es la **variable dependiente**.

Pueden darse definiciones similares para las funciones de tres, cuatro o n variables donde los dominios consisten en tríadas (x_1, x_2, x_3), tétradas (x_1, x_2, x_3, x_4) y n-adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. En todos los casos, rango es un conjunto de números reales. En este capítulo, sólo se estudian funciones de dos o tres variables.

Como ocurre con las funciones de una variable, la manera más común para describir una función de varias variables es por medio de una *ecuación*, y a menos que se diga explícitamente lo contrario, se puede suponer que el dominio es el conjunto de todos los puntos para los que la ecuación está definida. Por ejemplo, el dominio de la función dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

se supone que es todo el plano xy. Similarmente, el dominio de

$$f(x, y) = \ln xy$$

es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano para los que $xy > 0$. Esto consiste en todos los puntos del primer y tercer cuadrantes.

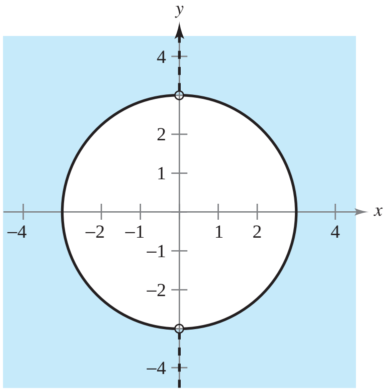
Archive Photos

MARY FAIRFAX SOMERVILLE (1780-1872)
Somerville se interesó por el problema de crear modelos geométricos de funciones de varias variables. Su libro más conocido, *The Mechanics of the Heavens*, se publicó en 1831.

EJEMPLO 1 Dominios de funciones de varias variables

Hallar el dominio de cada función.

a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$ **b)** $g(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$



Dominio de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$

Figura 13.1

Solución

a) La función f está definida para todos los puntos (x, y) tales que $x \neq 0$ y

$$x^2 + y^2 \geq 9.$$

Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los puntos que están en el círculo $x^2 + y^2 = 9$, o en su exterior, con *excepción* de los puntos en el eje y, como se muestra en la figura 13.1.

b) La función g está definida para todos los puntos (x, y, z) tales que

$$x^2 + y^2 + z^2 < 9.$$

Por consiguiente, el dominio es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) que se encuentran en el interior de la esfera de radio 3 centrada en el origen.

Las funciones de varias variables pueden combinarse de la misma manera que las funciones de una sola variable. Por ejemplo, se puede formar la suma, la diferencia, el producto y el cociente de funciones de dos variables como sigue.

$(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y)$	Suma o diferencia.
$(fg)(x, y) = f(x, y)g(x, y)$	Producto.
$\dfrac{f}{g}(x, y) = \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad g(x, y) \neq 0$	Cociente.

No se puede formar la composición de dos funciones de varias variables. Sin embargo, si h es una función de varias variables y g es una función de una sola variable, puede formarse la función **compuesta** $(g \circ h)(x, y)$ como sigue.

$$(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y)) \qquad \text{Composición.}$$

El dominio de esta función compuesta consta de todo (x, y) en el dominio de h tal que $h(x, y)$ está en el dominio de g. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$$

puede verse como la composición de la función de dos variables dadas por $h(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$ y la función de una sola variable dada por $g(u) = \sqrt{u}$. El dominio de esta función es el conjunto de todos los puntos que se encuentran en la elipse dada por $4x^2 + y^2 = 16$ o en su interior.

Una función que puede expresarse como suma de funciones de la forma $cx^m y^n$ (donde c es un número real y m y n son enteros no negativos) se llama una **función polinomial** de dos variables. Por ejemplo, las funciones dadas por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + x + 2 \quad \text{y} \quad g(x, y) = 3xy^2 + x - 2$$

son funciones polinomiales de dos variables. Una **función racional** es el cociente de dos funciones polinomiales. Terminología similar se utiliza para las funciones de más de dos variables.

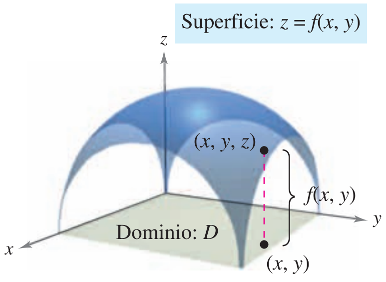


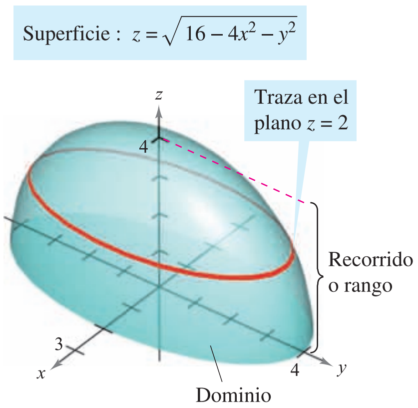
Figura 13.2

Gráfica de una función de dos variables

Como en el caso de las funciones de una sola variable, se puede saber mucho acerca del comportamiento de una función de dos variables dibujando su gráfica. La **gráfica** de una función f de dos variables es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) para los que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en el dominio de f. Esta gráfica puede interpretarse geométricamente como una *superficie en el espacio*, como se explicó en las secciones 11.5 y 11.6. En la figura 13.2 hay que observar que la gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie cuya proyección sobre el plano xy es D, el dominio de f. A cada punto (x, y) en D corresponde un punto (x, y, z) de la superficie y, viceversa, a cada punto (x, y, z) de la superficie le corresponde un punto (x, y) en D.

EJEMPLO 2 Descripción de la gráfica de una función de dos variables

¿Cuál es el rango de $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$? Describir la gráfica de f.



La gráfica de $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ es la mitad superior de un elipsoide
Figura 13.3

Solución El dominio D dado por la ecuación de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $16 - 4x^2 - y^2 \geq 0$. Por tanto, D es el conjunto de todos los puntos que pertenecen o son interiores a la elipse dada por

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1. \qquad \text{Elipse en el plano } xy.$$

El rango de f está formado por todos los valores $z = f(x, y)$ tales que $0 \leq z \leq \sqrt{16}$ o sea

$$0 \leq z \leq 4. \qquad \text{Rango de } f.$$

Un punto (x, y, z) está en la gráfica de f si y sólo si

$$z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$$
$$z^2 = 16 - 4x^2 - y^2$$
$$4x^2 + y^2 + z^2 = 16$$
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1, \qquad 0 \leq z \leq 4.$$

De acuerdo con la sección 11.6, se sabe que la gráfica de f es la mitad superior de un elipsoide, como se muestra en la figura 13.3.

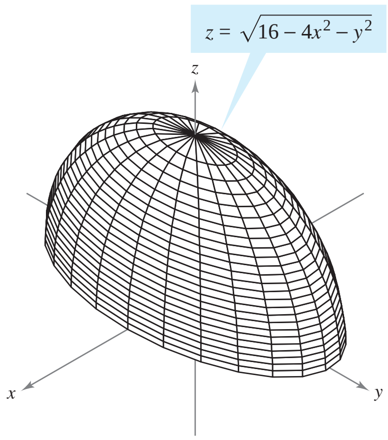


Figura 13.4

Para dibujar *a mano* una superficie en el espacio, es útil usar trazas en planos paralelos a los planos coordenados, como se muestra en la figura 13.3. Por ejemplo, para hallar la traza de la superficie en el plano $z = 2$, se sustituye $z = 2$ en la ecuación $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ y se obtiene

$$2 = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

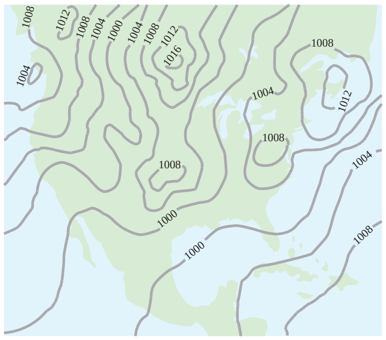
Por tanto, la traza es una elipse centrada en el punto $(0, 0, 2)$ con ejes mayor y menor de longitudes $4\sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$.

Las trazas también se usan en la mayor parte de las herramientas de graficación tridimensionales. Por ejemplo, la figura 13.4 muestra una versión generada por computadora de la superficie dada en el ejemplo 2. En esta gráfica la herramienta de graficación tomó 25 trazas paralelas al plano xy y 12 trazas en planos verticales.

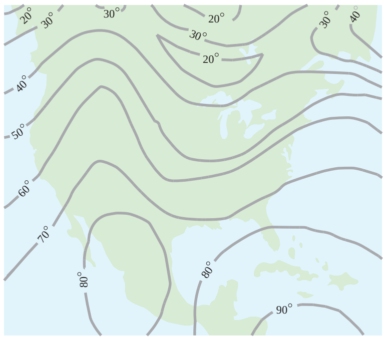
Si se dispone de una herramienta de graficación tridimensional, utilícese para representar varias superficies.

Curvas de nivel

Una segunda manera de visualizar una función de dos variables es usar un **campo escalar** en el que el escalar $z = f(x, y)$ se asigna al punto (x, y). Un campo escalar puede caracterizarse por sus **curvas de nivel** (o **líneas de contorno**) a lo largo de las cuales el valor de $f(x, y)$ es constante. Por ejemplo, el mapa climático en la figura 13.5 muestra las curvas de nivel de igual presión, llamadas **isobaras**. Las curvas de nivel que representan puntos de igual temperatura en mapas climáticos, se llaman **isotermas**, como se muestra en la figura 13.6. Otro uso común de curvas de nivel es la representación de campos de potencial eléctrico. En este tipo de mapa, las curvas de nivel se llaman **líneas equipotenciales**.



Las curvas de nivel muestran las líneas de igual presión (isobaras) medidas en milibares
Figura 13.5



Las curvas de nivel muestran líneas de igual temperatura (isotermas) medidas en grados Fahrenheit
Figura 13.6

Los mapas de contorno suelen usarse para representar regiones de la superficie de la Tierra, donde las curvas de nivel representan la altura sobre el nivel del mar. Este tipo de mapas se llama **mapa topográfico**. Por ejemplo, la montaña mostrada en la figura 13.7 se representa por el mapa topográfico de la figura 13.8.

Un mapa de contorno representa la variación de z respecto a x y y mediante espacio entre las curvas de nivel. Una separación grande entre las curvas de nivel indica que z cambia lentamente, mientras que un espacio pequeño indica un cambio rápido en z. Además, en un mapa de contorno, es importante elegir valores de *c uniformemente espaciados*, para dar una mejor ilusión tridimensional.

Alfred B. Thomas/Earth Scenes

Figura 13.7

USGS

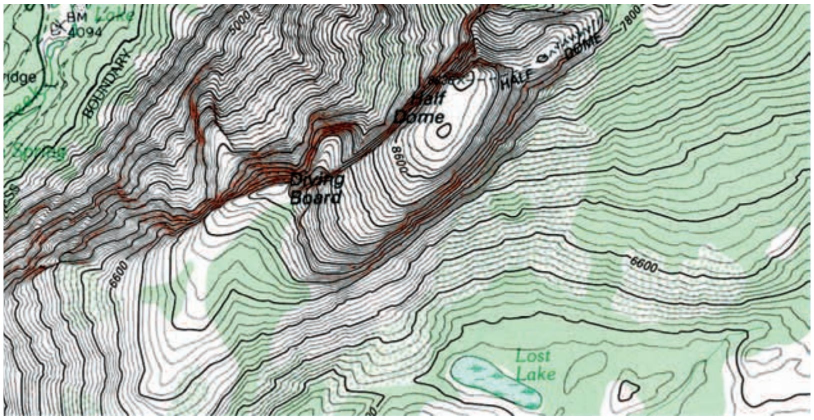


Figura 13.8

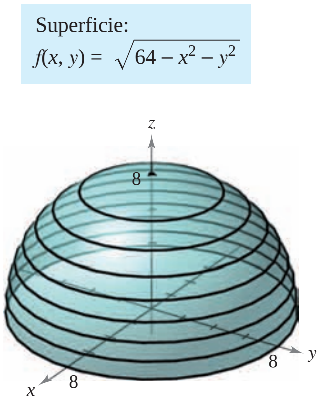
EJEMPLO 3 Dibujo de un mapa de contorno

El hemisferio dado por $f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$ se muestra en la figura 13.9. Dibujar un mapa de contorno de esta superficie utilizando curvas de nivel que correspondan a $c = 0, 1, 2, \ldots, 8$.

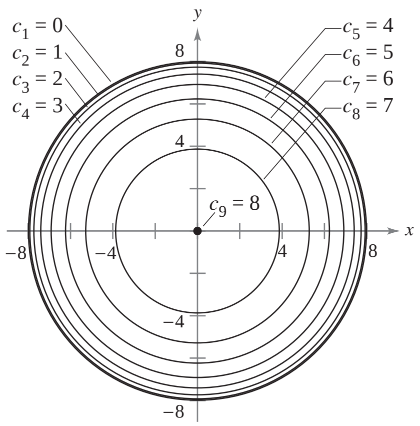
Solución Para cada c, la ecuación dada por $f(x, y) = c$ es un círculo (o un punto) en el plano xy. Por ejemplo, para $c_1 = 0$, la curva de nivel es

$$x^2 + y^2 = 64 \qquad \text{Círculo de radio 8.}$$

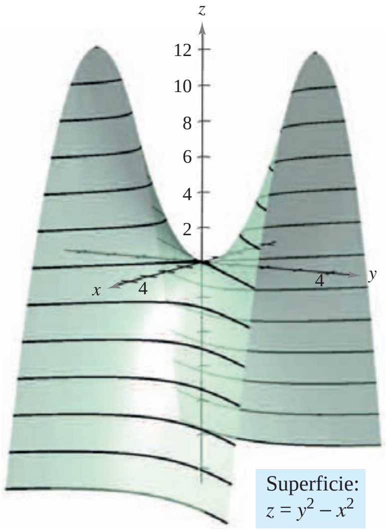
la cual es un círculo de radio 8. La figura 13.10 muestra las nueve curvas de nivel del hemisferio.



Hemisferio
Figura 13.9



Mapa de contorno
Figura 13.10



Paraboloide hiperbólico
Figura 13.11

EJEMPLO 4 Dibujo de un mapa de contorno

El paraboloide hiperbólico dado por

$$z = y^2 - x^2$$

se muestra en la figura 13.11. Dibujar un mapa de contorno de esta superficie.

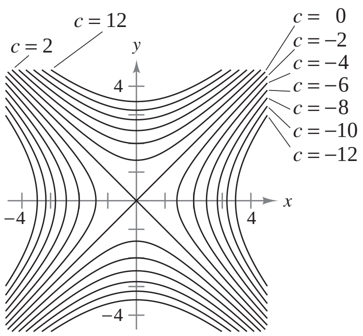
Solución Para cada valor de c, sea $f(x, y) = c$ y dibújese la curva de nivel resultante en el plano xy. Para esta función, cada una de las curvas de nivel $(c \neq 0)$ es una hipérbola cuyas asíntotas son las rectas $y = \pm x$. Si $c < 0$, el eje transversal es horizontal. Por ejemplo, la curva de nivel para $c = -4$ está dada por

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1. \qquad \text{Hipérbola con eje transversal horizontal.}$$

Si $c > 0$, el eje transversal es vertical. Por ejemplo, la curva de nivel para $c = 4$ está dada por

$$\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1. \qquad \text{Hipérbola con eje transversal vertical.}$$

Si $c = 0$, la curva de nivel es la cónica degenerada representada por las asíntotas que se cortan, como se muestra en la figura 13.12.



Curvas de nivel hiperbólicas
(con incrementos de 2)
Figura 13.12

Un ejemplo de función de dos variables utilizada en economía es la **función de producción de Cobb-Douglas**. Esta función se utiliza como un modelo para representar el número de unidades producidas al variar las cantidades de trabajo y capital. Si x mide las unidades de trabajo y y mide las unidades de capital, el número de unidades producidas está dado por

$$f(x, y) = Cx^a y^{1-a}$$

donde C y a son constantes, con $0 < a < 1$.

EJEMPLO 5 La función de producción de Cobb-Douglas

Un fabricante de juguetes estima que su función de producción es $f(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$, donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital. Comparar el nivel de producción cuando $x = 1\,000$ y $y = 500$ con el nivel de producción cuando $x = 2\,000$ y $y = 1\,000$.

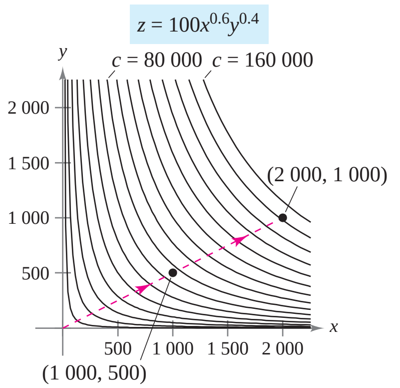
Solución Cuando $x = 1\,000$ y $y = 500$, el nivel de producción es

$$f(1\,000, 500) = 100(1\,000^{0.6})(500^{0.4}) \approx 75\,786.$$

Cuando $x = 2\,000$ y $y = 1\,000$, el nivel de producción es

$$f(2\,000, 1\,000) = 100(2\,000^{0.6})(1\,000^{0.4}) = 151\,572.$$

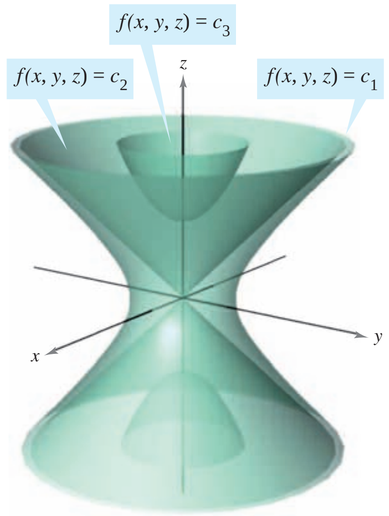
Las curvas de nivel de $z = f(x, y)$ se muestran en la figura 13.13. Nótese que al doblar ambas x y y, se duplica el nivel de producción (ver ejercicio 79).



Curvas de nivel (con incrementos de 10 000)
Figura 13.13

Superficies de nivel

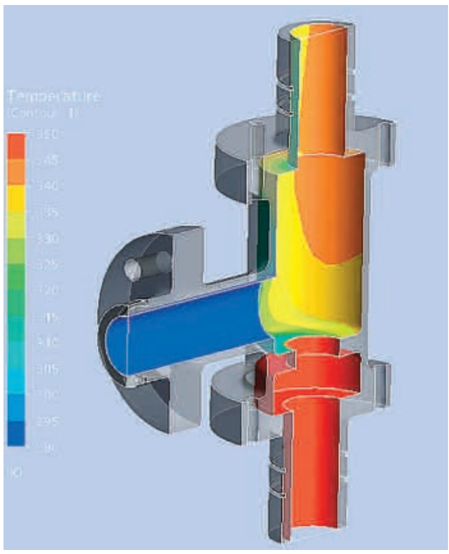
El concepto de curva de nivel puede extenderse una dimensión para definir una **superficie de nivel**. Si f es una función de tres variables y c es una constante, la gráfica de la ecuación $f(x, y, z) = c$ es una **superficie de nivel** de la función f, como se muestra en la figura 13.14.



Superficies de nivel de f
Figura 13.14

Ingenieros y científicos han desarrollado mediante computadoras otras formas de ver funciones de tres variables. Por ejemplo, la figura 13.15 muestra una simulación computacional que usa colores para representar la distribución de temperaturas del fluido que entra en el tubo.

Imagen cortesía de CADFEM GmbH



Una forma común de ANSYS CFX™ y ANSYS Mechanical™ para análisis de esfuerzos térmicos.
Figura 13.15

EJEMPLO 6 Superficies de nivel

Describir las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2.$$

Solución Cada superficie de nivel tiene una ecuación de la forma

$$4x^2 + y^2 + z^2 = c. \qquad \text{Ecuación de una superficie de nivel.}$$

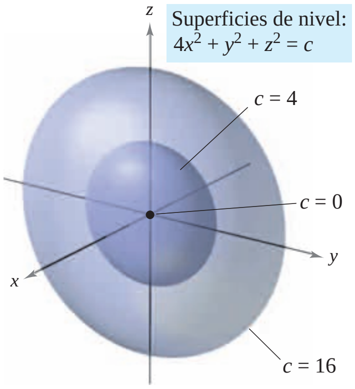


Figura 13.16

Por tanto, las superficies de nivel son elipsoides (cuyas secciones transversales paralelas al plano yz son círculos). A medida que c aumenta, los radios de las secciones transversales circulares aumentan según la raíz cuadrada de c. Por ejemplo, las superficies de nivel correspondientes a los valores $c = 0$, $c = 4$ y $c = 16$ son como sigue.

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 0 \qquad \text{Superficie de nivel para } c = 0 \text{ (un solo punto).}$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 \qquad \text{Superficie de nivel para } c = 4 \text{ (elipsoide).}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1 \qquad \text{Superficie de nivel para } c = 16 \text{ (elipsoide).}$$

Estas superficies de nivel se muestran en la figura 13.16.

NOTA Si la función del ejemplo 6 representara la *temperatura* en el punto (x, y, z), las superficies de nivel mostradas en la figura 13.16 se llamarían **superficies isotermas**.

Gráficas por computadora

El problema de dibujar la gráfica de una superficie en el espacio puede simplificarse usando una computadora. Aunque hay varios tipos de herramientas de graficación tridimensionales, la mayoría utiliza alguna forma de análisis de trazas para dar la impresión de tres dimensiones. Para usar tales herramientas de graficación, por lo general se necesita dar la ecuación de la superficie, la región del plano xy sobre la cual la superficie ha de visualizarse y el número de trazas a considerar. Por ejemplo, para representar gráficamente la superficie dada por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$$

se podrían elegir los límites siguientes para x, y y z.

$$-3 \le x \le 3 \qquad \text{Límites para } x.$$

$$-3 \le y \le 3 \qquad \text{Límites para } y.$$

$$0 \le z \le 3 \qquad \text{Límites para } z.$$

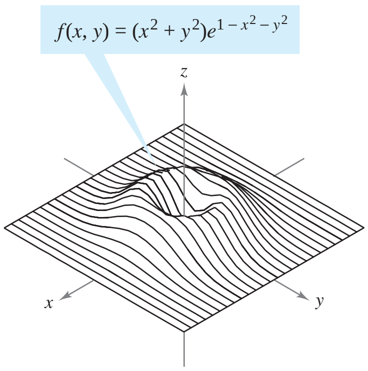
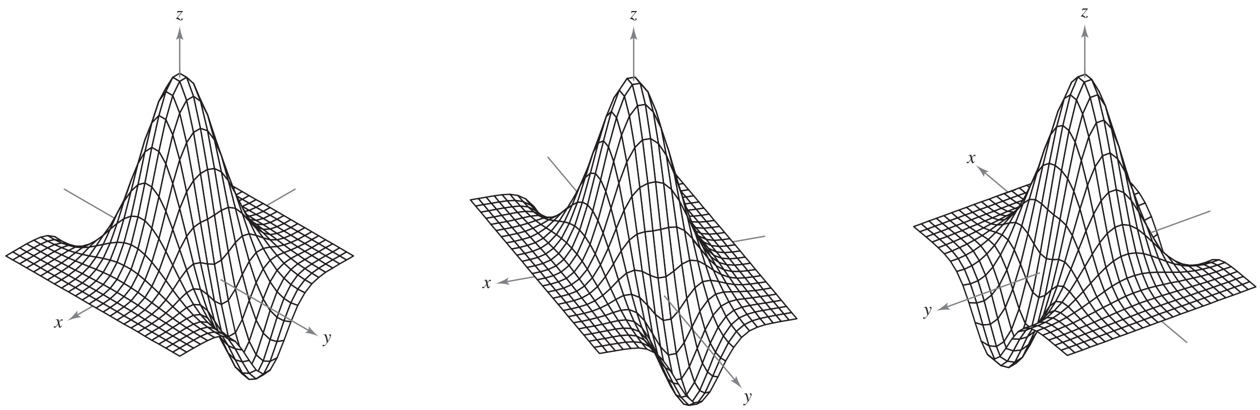


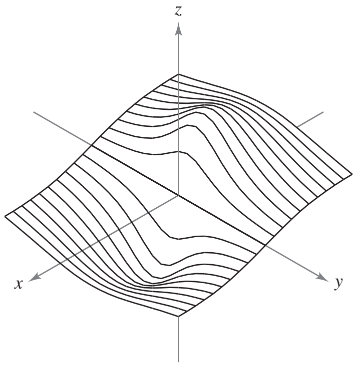
Figura 13.17

La figura 13.17 muestra una gráfica de esta superficie generada por computadora utilizando 26 trazas paralelas al plano yz. Para realizar el efecto tridimensional, el programa utiliza una rutina de "línea oculta". Es decir, comienza dibujando las trazas en primer plano (las correspondientes a los valores mayores de x), y después, a medida que se dibuja una nueva traza, el programa determina si mostrará toda o sólo parte de la traza siguiente.

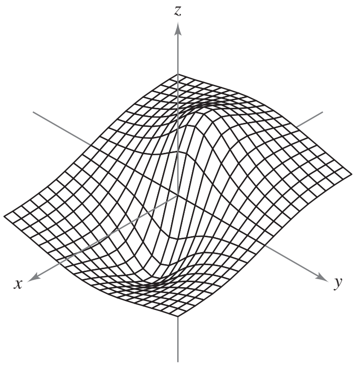
Las gráficas en la página siguiente muestran una variedad de superficies que fueron dibujadas por una computadora. Si se dispone de un programa de computadora para dibujo, podrán reproducirse estas superficies.



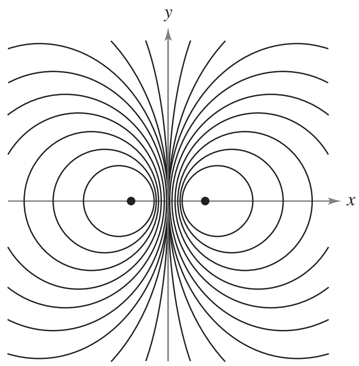
Tres vistas diferentes de la gráfica de $f(x, y) = (2 - y^2 + x^2)e^{1 - x^2 - (y^2/4)}$



Trazas simples

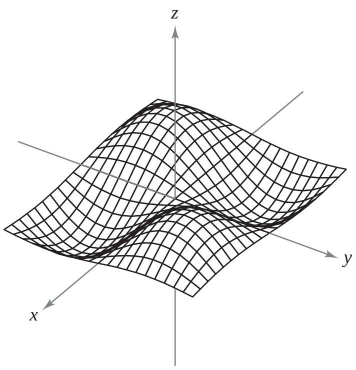


Trazas dobles

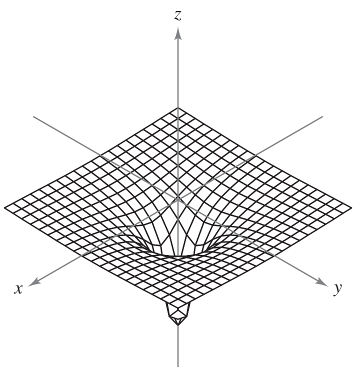


Curvas de nivel

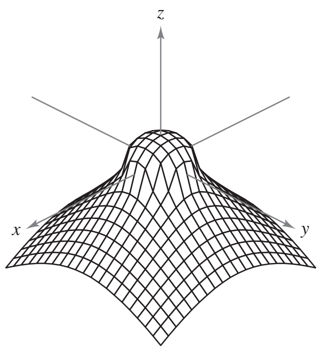
Trazas y curvas de nivel de la gráfica de $f(x, y) = \dfrac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$



$f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$



$f(x, y) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

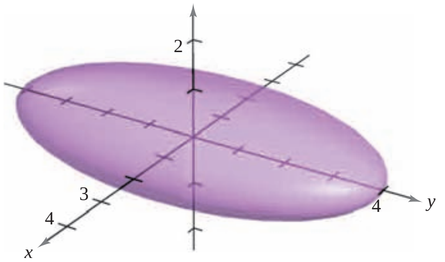


$f(x, y) = \dfrac{1 - x^2 - y^2}{\sqrt{|1 - x^2 - y^2|}}$

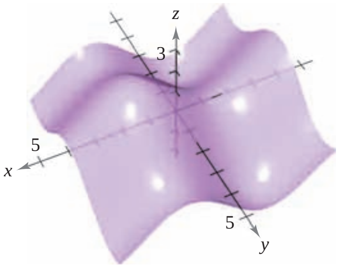
13.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, usar la gráfica para determinar si *z* es una función de *x* y *y*. Explicar.

1.



2.



En los ejercicios 3 a 6, determinar si *z* es una función de *x* y *y*.

3. $x^2z + 3y^2 - xy = 10$

4. $xz^2 + 2xy - y^2 = 4$

5. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$

6. $z + x \ln y - 8yz = 0$

En los ejercicios 7 a 18, hallar y simplificar los valores de la función.

7. $f(x, y) = xy$

a) $(3, 2)$ *b)* $(-1, 4)$ *c)* $(30, 5)$
d) $(5, y)$ *e)* $(x, 2)$ *f)* $(5, t)$

8. $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$

a) $(0, 0)$ *b)* $(0, 1)$ *c)* $(2, 3)$
d) $(1, y)$ *e)* $(x, 0)$ *f)* $(t, 1)$

9. $f(x, y) = xe^y$

a) $(5, 0)$ *b)* $(3, 2)$ *c)* $(2, -1)$
d) $(5, y)$ *e)* $(x, 2)$ *f)* (t, t)

10. $g(x, y) = \ln|x + y|$

a) $(1, 0)$ *b)* $(0, -1)$ *c)* $(0, e)$
d) $(1, 1)$ *e)* $(e, e/2)$ *f)* $(2, 5)$

11. $h(x, y, z) = \dfrac{xy}{z}$

a) $(2, 3, 9)$ *b)* $(1, 0, 1)$ *c)* $(-2, 3, 4)$ *d)* $(5, 4, -6)$

12. $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$

a) $(0, 5, 4)$ *b)* $(6, 8, -3)$
c) $(4, 6, 2)$ *d)* $(10, -4, -3)$

13. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

a) $(2, \pi/4)$ *b)* $(3, 1)$ *c)* $(-3, \pi/3)$ *d)* $(4, \pi/2)$

14. $V(r, h) = \pi r^2 h$

a) $(3, 10)$ *b)* $(5, 2)$ *c)* $(4, 8)$ *d)* $(6, 4)$

15. $g(x, y) = \displaystyle\int_x^y (2t - 3)\, dt$

a) $(4, 0)$ *b)* $(4, 1)$ *c)* $\left(4, \frac{3}{2}\right)$ *d)* $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

16. $g(x, y) = \displaystyle\int_x^y \frac{1}{t}\, dt$

a) $(4, 1)$ *b)* $(6, 3)$ *c)* $(2, 5)$ *d)* $\left(\frac{1}{2}, 7\right)$

17. $f(x, y) = 2x + y^2$

a) $\dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$

b) $\dfrac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

18. $f(x, y) = 3x^2 - 2y$

a) $\dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$

b) $\dfrac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

En los ejercicios 19 a 30, describir el dominio y rango de la función.

19. $f(x, y) = x^2 + y^2$

20. $f(x, y) = e^{xy}$

21. $g(x, y) = x\sqrt{y}$

22. $g(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$

23. $z = \dfrac{x + y}{xy}$

24. $z = \dfrac{xy}{x - y}$

25. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

26. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

27. $f(x, y) = \arccos(x + y)$

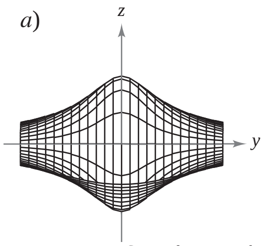
28. $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(y/x)$

29. $f(x, y) = \ln(4 - x - y)$

30. $f(x, y) = \ln(xy - 6)$

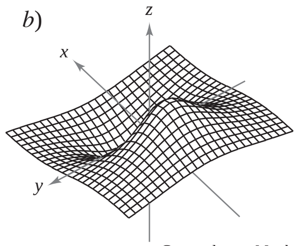
31. ***Para pensar*** Las gráficas marcadas *a*), *b*), *c*) y *d*) son gráficas de la función $f(x, y) = -4x/(x^2 + y^2 + 1)$. Asociar cada gráfica con el punto en el espacio desde el que la superficie es visualizada. Los cuatro puntos son $(20, 15, 25)$, $(-15, 10, 20)$, $(20, 20, 0)$ y $(20, 0, 0)$

a)



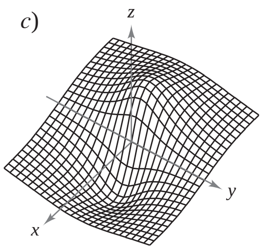
Generada con Maple

b)



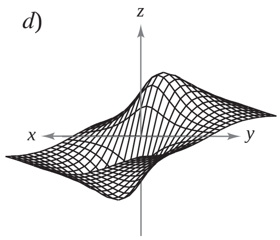
Generada con Maple

c)



Generada con Maple

d)



Generada con Maple

32. ***Para pensar*** Usar la función dada en el ejercicio 31.

a) Hallar el dominio y rango de la función.

b) Identificar los puntos en el plano *xy* donde el valor de la función es 0.

c) ¿Pasa la superficie por todos los octantes del sistema de coordenadas rectangular? Dar las razones de la respuesta.

En los ejercicios 33 a 40, dibujar la superficie dada por la función.

33. $f(x, y) = 4$ **34.** $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$

35. $f(x, y) = y^2$ **36.** $g(x, y) = \frac{1}{2}y$

37. $z = -x^2 - y^2$ **38.** $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$

39. $f(x, y) = e^{-x}$

40. $f(x, y) = \begin{cases} xy, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & x < 0 \text{ o } y < 0 \end{cases}$

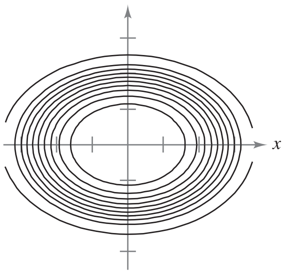
CAS **En los ejercicios 41 a 44, utilizar un sistema algebraico por computadora para álgebra y representar gráficamente la función.**

41. $z = y^2 - x^2 + 1$ **42.** $z = \frac{1}{12}\sqrt{144 - 16x^2 - 9y^2}$

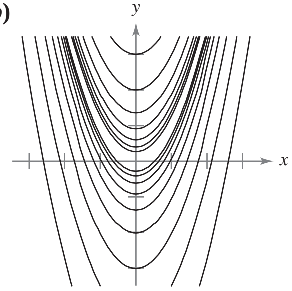
43. $f(x, y) = x^2 e^{(-xy/2)}$ **44.** $f(x, y) = x \text{ sen } y$

En los ejercicios 45 a 48, asociar la gráfica de la superficie con uno de los mapas de contorno. [Los mapas de contorno están marcados *a*), *b*), *c*) y *d*).]

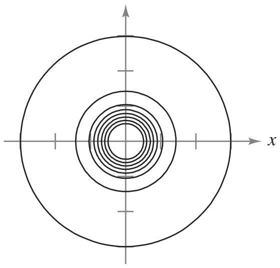
a)



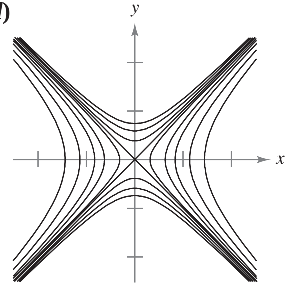
b)



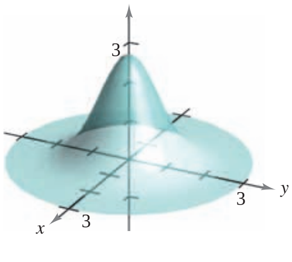
c)



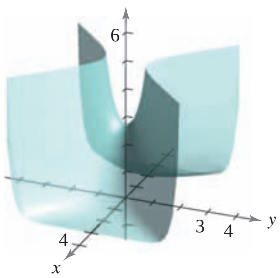
d)



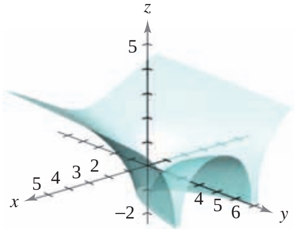
45. $f(x, y) = e^{1 - x^2 - y^2}$



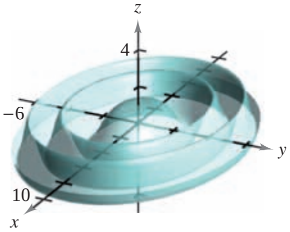
46. $f(x, y) = e^{1 - x^2 + y^2}$



47. $f(x, y) = \ln|y - x^2|$



48. $f(x, y) = \cos\left(\frac{x^2 + 2y^2}{4}\right)$



En los ejercicios 49 a 56, describir las curvas de nivel de la función. Dibujar las curvas de nivel para los valores dados de *c*.

49. $z = x + y, \quad c = -1, 0, 2, 4$

50. $z = 6 - 2x - 3y, \quad c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$

51. $z = x^2 + 4y^2, \quad c = 0, 1, 2, 3, 4$

52. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad c = 0, 1, 2, 3$

53. $f(x, y) = xy, \quad c = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 6$

54. $f(x, y) = e^{xy/2}, \quad c = 2, 3, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

55. $f(x, y) = x/(x^2 + y^2), \quad c = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2$

56. $f(x, y) = \ln(x - y), \quad c = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2$

En los ejercicios 57 a 60, utilizar una herramienta de graficación para representar seis curvas de nivel de la función.

57. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ **58.** $f(x, y) = |xy|$

59. $g(x, y) = \dfrac{8}{1 + x^2 + y^2}$ **60.** $h(x, y) = 3 \text{ sen}(|x| + |y|)$

Desarrollo de conceptos

61. ¿Qué es una gráfica de una función de dos variables? ¿Cómo se interpreta geométricamente? Describir las curvas de nivel.

62. Todas las curvas de nivel de la superficie dada por $z = f(x, y)$ son círculos concéntricos. ¿Implica esto que la gráfica de *f* es un hemisferio? Ilustrar la respuesta con un ejemplo.

63. Construir una función cuyas curvas de nivel sean rectas que pasen por el origen.

Para discusión

64. Considerar la función $f(x, y) = xy$, para $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

a) Trazar la gráfica de la superficie dada por *f*.

b) Conjeturar acerca de la relación entre las gráficas de *f* y $g(x, y) = f(x, y) - 3$. Explicar el razonamiento.

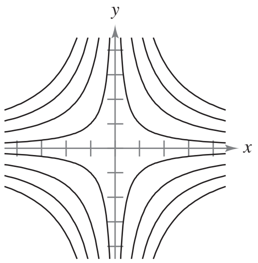
c) Conjeturar acerca de la relación entre las gráficas de *f* y $g(x, y) = -f(x, y)$. Explicar el razonamiento.

d) Conjeturar acerca de la relación entre las gráficas de *f* y $g(x, y) = \frac{1}{2}f(x, y)$. Explicar el razonamiento.

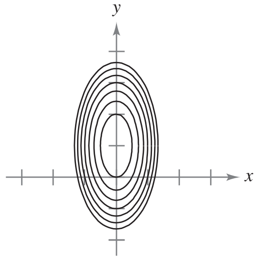
e) Sobre la superficie en el inciso *a*), trazar la gráfica de $z = f(x, x)$.

Redacción **En los ejercicios 65 y 66, utilizar las gráficas de las curvas de nivel (valores de c uniformemente espaciados) de la función f para dar una descripción de una posible gráfica de f. ¿Es única la gráfica de f? Explicar la respuesta.**

65.



66.



67. ***Inversión*** En el 2009 se efectuó una inversión de $1 000 al 6% de interés compuesto anual. Suponemos que el inversor paga una tasa de impuesto R y que la tasa de inflación anual es I. En el año 2019, el valor V de la inversión en dólares constantes de 2009 es

$$V(I, R) = 1\,000\left[\frac{1 + 0.06(1 - R)}{1 + I}\right]^{10}.$$

Utilizar esta función de dos variables para completar la tabla.

Tasa de impuestos	Tasa de inflación		
	0	0.03	0.05
0			
0.28			
0.35			

68. ***Inversión*** Se depositan $5 000 en una cuenta de ahorro a una tasa de interés compuesto continuo r (expresado en forma decimal). La cantidad $A(r, t)$ después de t años es $A(r, t) = 5\,000e^{rt}$. Utilizar esta función de dos variables para completar la tabla.

	Número de años			
Tasa	5	10	15	20
0.02				
0.03				
0.04				
0.05				

En los ejercicios 69 a 74, dibujar la gráfica de la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ para el valor de c que se especifica.

69. $f(x, y, z) = x - y + z, \quad c = 1$

70. $f(x, y, z) = 4x + y + 2z, \quad c = 4$

71. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad c = 9$

72. $f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - z, \quad c = 1$

73. $f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 - z^2, \quad c = 0$

74. $f(x, y, z) = \operatorname{sen} x - z, \quad c = 0$

75. ***Explotación forestal*** La **regla de los troncos de Doyle** es uno de varios métodos para determinar el rendimiento en madera aserrada (en tablones-pie) en términos de su diámetro d (en pulgadas) y su longitud L (en pies). El número de tablones-pie es

$$N(d, L) = \left(\frac{d - 4}{4}\right)^2 L.$$

a) Hallar el número de tablones-pie de madera aserrada producida por un tronco de 22 pulgadas de diámetro y 12 pies de longitud.

b) Evaluar $N(30, 12)$.

76. ***Modelo de filas*** La cantidad de tiempo promedio que un cliente espera en una fila para recibir un servicio es

$$W(x, y) = \frac{1}{x - y}, \quad x > y$$

donde y es el ritmo o tasa media de llegadas, expresada como número de clientes por unidad de tiempo, y x es el ritmo o tasa media de servicio, expresada en las mismas unidades. Evaluar cada una de las siguientes cantidades.

a) $W(15, 9)$ *b*) $W(15, 13)$ *c*) $W(12, 7)$ *d*) $W(5, 2)$

77. ***Distribución de temperaturas*** La temperatura T (en grados Celsius) en cualquier punto (x, y) de una placa circular de acero de 10 metros de radio es $T = 600 - 0.75x^2 - 0.75y^2$, donde x y y se miden en metros. Dibujar algunas de las curvas isotermas.

78. ***Potencial eléctrico*** El potencial eléctrico V en cualquier punto (x, y) es

$$V(x, y) = \frac{5}{\sqrt{25 + x^2 + y^2}}.$$

Dibujar las curvas equipotenciales de $V = \frac{1}{2}$, $V = \frac{1}{3}$ y $V = \frac{1}{4}$.

79. ***Función de producción de Cobb-Douglas*** Utilizar la función de producción de Cobb-Douglas (ver ejemplo 5) para mostrar que si el número de unidades de trabajo y el número de unidades de capital se duplican, el nivel de producción también se duplica.

80. ***Función de producción de Cobb-Douglas*** Mostrar que la función de producción de Cobb-Douglas $z = Cx^a y^{1-a}$ puede reescribirse como $\ln \frac{z}{y} = \ln C + a \ln \frac{x}{y}$.

81. ***Costo* de construcción*** Una caja rectangular abierta por arriba tiene x pies de longitud, y pies de ancho y z pies de alto. Construir la base cuesta $1.20 por pie cuadrado y construir los lados $0.75 por pie cuadrado. Expresar el costo C de construcción de la caja en función de x, y y z.

82. ***Volumen*** Un tanque de propano se construye soldando hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. Expresar el volumen V del tanque en función de r y l, donde r es el radio del cilindro y de los hemisferios, y l es la longitud del cilindro.

83. ***Ley de los gases ideales*** De acuerdo con la ley de los gases ideales, $PV = kT$, donde P es la presión, V es el volumen, T es la temperatura (en kelvins) y k es una constante de proporcionalidad. Un tanque contiene 2 000 pulgadas cúbicas de nitrógeno a una presión de 26 libras por pulgada cuadrada y una temperatura de 300 K.

a) Determinar k.

b) Expresar P como función de V y T y describir las curvas de nivel.

* En España se le denomina coste.

84. ***Modelo matemático*** La tabla muestra las ventas netas x (en miles de millones de dólares), los activos totales y (en miles de millones de dólares) y los derechos de los accionistas z (en miles de millones de dólares) de Wal-Mart desde 2002 hasta el 2007. (*Fuente: 2007 Annual Report for Wal-Mart*)

Año	2002	2003	2004	2005	2006	2007
x	201.2	226.5	252.8	281.5	208.9	345.0
y	79.3	90.2	102.5	117.1	135.6	151.2
z	35.2	39.5	43.6	49.4	53.2	61.6

Un modelo para estos datos es

$$z = f(x, y) = 0.026x + 0.316y + 5.04.$$

a) Utilizar una herramienta de graficación y el modelo para aproximar z para los valores dados de x y y.

b) ¿Cuál de las dos variables en este modelo tiene mayor influencia sobre los derechos de los accionistas?

c) Simplificar la expresión de $f(x, 95)$ e interpretar su significado en el contexto del problema.

85. ***Meteorología*** Los meteorólogos miden la presión atmosférica en milibares. A partir de estas observaciones elaboran mapas climáticos en los que se muestran las curvas de presión atmosférica constante (isobaras) (ver la figura). En el mapa, cuanto más juntas están las isobaras mayor es la velocidad del viento. Asociar los puntos A, B y C con *a*) la mayor presión, *b*) la menor presión y *c*) la mayor velocidad del viento.

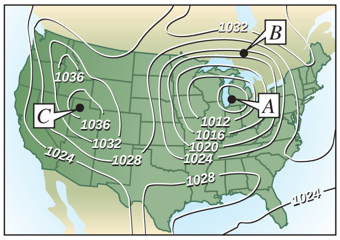


Figura para 85

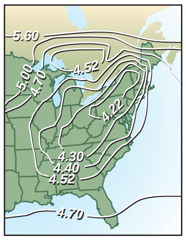
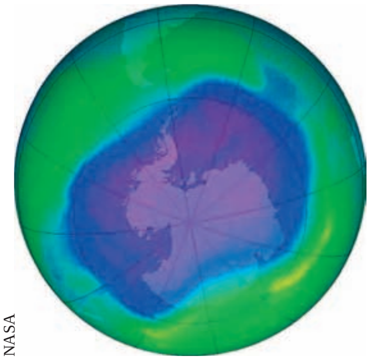


Figura para 86

86. ***Lluvia ácida*** La acidez del agua de lluvia se mide en unidades llamadas pH. Un pH de 7 es neutro, valores menores corresponden a acidez creciente, y valores mayores a alcalinidad creciente. El mapa muestra las curvas de pH constante y da evidencia de que en la dirección en la que sopla el viento de áreas muy industrializadas la acidez ha ido aumentando. Utilizar las curvas de nivel en el mapa, para determinar la dirección de los vientos dominantes en el noreste de Estados Unidos.

87. ***Atmósfera*** El contorno del mapa mostrado en la figura fue generado por computadora usando una colección de datos mediante instrumentación del satélite. El color se usa para mostrar el "agujero de ozono" en la atmósfera de la Tierra. Las áreas púrpura y azul representan los más bajos niveles de ozono y las áreas verdes representan los niveles más altos. *(Fuente: National Aeronautics and Space Administration)*



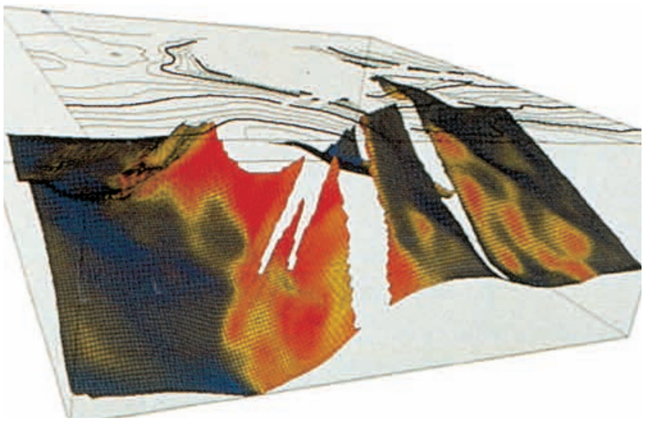
NASA

Figura para 87

a) ¿Corresponden las curvas de nivel a los mismos niveles de ozono espaciados? Explicar.

b) Describir cómo obtener un contorno de mapa más detallado.

88. ***Geología*** El mapa de contorno de la figura representa amplitudes sísmicas en código de color de una falla horizontal y un mapa de contorno proyectado que se usa en los estudios de terremotos. (*Fuente:* Adaptado de Shipman/Wilson/Todd, *An Introduction to Physical Science*, 10a. ed.)



GeoQuest Systems, Inc.

a) Analizar el uso de colores para representar las curvas de nivel.

b) ¿Corresponden las curvas de nivel a amplitudes uniformemente espaciadas? Explicar.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 89 a 92, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

89. Si $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$, entonces $x_0 = x_1$ y $y_0 = y_1$.

90. Si f es una función, entonces $f(ax, ay) = a^2 f(x, y)$.

91. Una recta vertical puede cortar la gráfica de $z = f(x, y)$ a lo sumo una vez.

92. Dos diferentes curvas de nivel de la gráfica de $z = f(x, y)$ pueden intersecarse.

13.2 Límites y continuidad

- **Entender la definición de un entorno en el plano.**
- **Entender y utilizar la definición de límite de una función de dos variables.**
- **Extender el concepto de continuidad a una función de dos variables.**
- **Extender el concepto de continuidad a una función de tres variables.**

Entornos en el plano

The Granger Collection

SONYA KOVALEVSKY (1850-1891)

Gran parte de la terminología usada para definir límites y continuidad de una función de dos o tres variables la introdujo el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897). El enfoque riguroso de Weierstrass a los límites y a otros temas en cálculo le valió la reputación de "padre del análisis moderno". Weierstrass era un maestro excelente. Una de sus alumnas más conocidas fue la matemática rusa Sonya Kovalevsky, quien aplicó muchas de las técnicas de Weierstrass a problemas de la física matemática y se convirtió en una de las primeras mujeres aceptada como investigadora matemática.

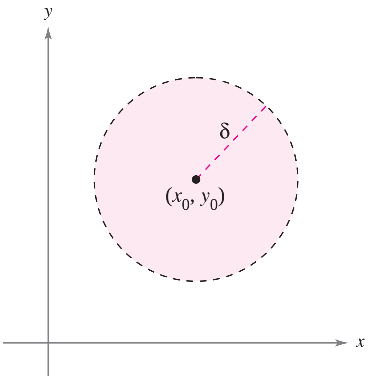
En esta sección se estudiarán límites y continuidad de funciones de dos o tres variables. La sección comienza con funciones de dos variables. Al final de la sección, los conceptos se extienden a funciones de tres variables.

El estudio del límite de una función de dos variables inicia definiendo el análogo bidimensional de un intervalo en la recta real. Utilizando la fórmula para la distancia entre dos puntos (x, y) y (x_0, y_0) en el plano, se puede definir el **entorno δ** de (x_0, y_0) como el **disco** con radio $\delta > 0$ centrado en (x_0, y_0)

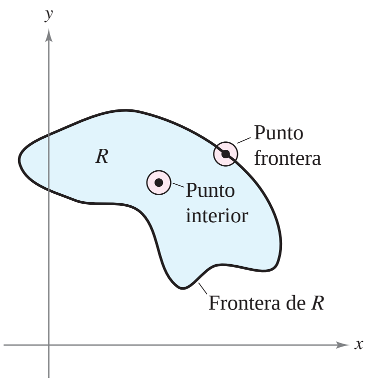
$$\left\{(x, y): \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$

Disco abierto.

como se muestra en la figura 13.18. Cuando esta fórmula contiene el signo de desigualdad *menor que*, <, al disco se le llama **abierto**, y cuando contiene el signo de desigualdad *menor o igual que*, ≤, al disco se le llama **cerrado**. Esto corresponde al uso del < y del ≤ al definir intervalos abiertos y cerrados.



Un disco abierto
Figura 13.18



La frontera y los puntos interiores de una región R
Figura 13.19

Un punto (x_0, y_0) en una región R del plano es un **punto interior** de R si existe un entorno δ de (x_0, y_0) que esté contenido completamente en R, como se muestra en la figura 13.19. Si todo punto de R es un punto interior, entonces R es una **región abierta**. Un punto (x_0, y_0) es un **punto frontera** de R si todo disco abierto centrado en (x_0, y_0) contiene puntos dentro de R y puntos fuera de R. Por definición, una región debe contener sus puntos interiores, pero no necesita contener sus puntos frontera. Si una región contiene todos sus puntos frontera, la región es **cerrada**. Una región que contiene algunos pero no todos sus puntos frontera no es ni abierta ni cerrada.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información acerca de Sonya Kovalevsky, ver el artículo "S. Kovalevsky: A Mathematical Lesson" de Karen D. Rappaport en *The American Mathematical Monthly*.

Límite de una función de dos variables

DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

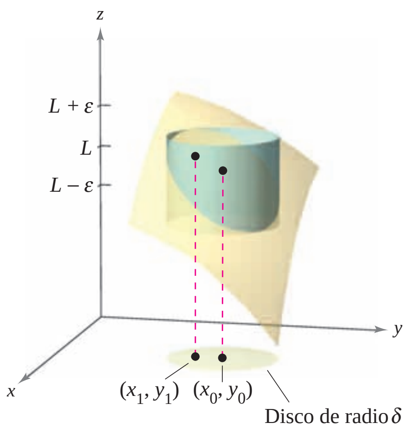
Sea f una función de dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0), excepto posiblemente en (x_0, y_0), y sea L un número real. Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$$

NOTA Gráficamente, esta definición del límite implica que para todo punto $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ en el disco de radio δ, el valor $f(x, y)$ está entre $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$, como se muestra en la figura 13.20. ■



Para todo (x, y) en el círculo de radio δ, el valor de $f(x, y)$ se encuentra entre $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$.
Figura 13.20

La definición del límite de una función en dos variables es similar a la definición del límite de una función en una sola variable, pero existe una diferencia importante. Para determinar si una función en una sola variable tiene límite, sólo se necesita ver que se aproxime al límite por ambas direcciones: por la derecha y por la izquierda. Si la función se aproxima al mismo límite por la derecha y por la izquierda, se puede concluir que el límite existe. Sin embargo, en el caso de una función de dos variables, la expresión

$$(x, y) \to (x_0, y_0)$$

significa que el punto (x, y) puede aproximarse al punto (x_0, y_0) por cualquier dirección. Si el valor de

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

no es el mismo al aproximarse por cualquier dirección, o trayectoria o **camino** a (x_0, y_0), el límite no existe.

EJEMPLO 1 Verificar un límite a partir de la definición

Mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a.$$

Solución Sea $f(x, y) = x$ y $L = a$. Se necesita mostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe un entorno δ de (a, b) tal que

$$|f(x,y) - L| = |x - a| < \varepsilon$$

siempre que $(x, y) \neq (a, b)$ se encuentre en el entorno. Primero se puede observar que

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

implica que

$$\begin{aligned} |f(x,y) - a| &= |x - a| \\ &= \sqrt{(x-a)^2} \\ &\leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Así que se puede elegir $\delta = \varepsilon$ y el límite queda verificado.

Los límites de funciones de varias variables tienen las mismas propiedades respecto a la suma, diferencia, producto y cociente que los límites de funciones de una sola variable. (Ver teorema 1.2 en la sección 1.3.) Algunas de estas propiedades se utilizan en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Cálculo de un límite

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$.

Solución Usando las propiedades de los límites de productos y de sumas, se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} 5x^2y &= 5(1^2)(2)\\ &= 10\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2+y^2) &= (1^2+2^2)\\ &= 5.\end{aligned}$$

Como el límite de un cociente es igual al cociente de los límites (y el denominador no es 0), se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} &= \frac{10}{5}\\ &= 2.\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Verificar un límite

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$.

Solución En este caso, los límites del numerador y del denominador son ambos 0, por tanto no se puede determinar la existencia (o inexistencia) del límite tomando los límites del numerador y del denominador por separado y dividiendo después. Sin embargo, por la gráfica de f (figura 13.21), parece razonable pensar que el límite pueda ser 0. En consecuencia, se puede intentar aplicar la definición de límite a $L = 0$. Primero, hay que observar que

$$|y| \le \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1.$$

Entonces, en un entorno δ de $(0, 0)$, se tiene $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, lo que, para $(x, y) \neq (0, 0)$ implica

$$\begin{aligned}|f(x,y) - 0| &= \left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right|\\ &= 5|y|\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\\ &\le 5|y|\\ &\le 5\sqrt{x^2+y^2}\\ &< 5\delta.\end{aligned}$$

Por tanto, se puede elegir $\delta = \varepsilon/5$ y concluir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

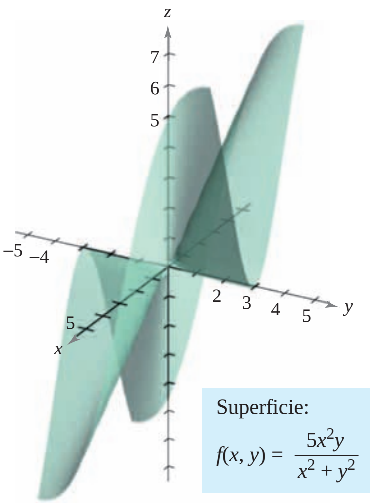
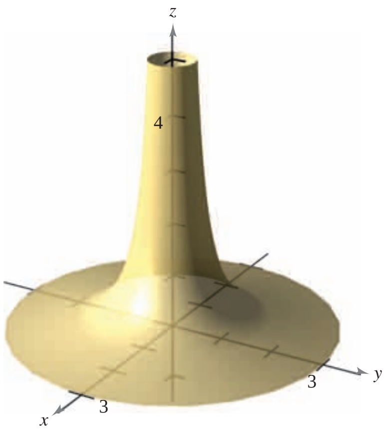


Figura 13.21



$\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ no existe
Figura 13.22

Con algunas funciones es fácil reconocer que el límite no existe. Por ejemplo, está claro que el límite

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

no existe porque el valor de $f(x, y)$ crece sin tope cuando (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de *cualquier* trayectoria (ver la figura 13.22).

Con otras funciones no es tan fácil reconocer que un límite no existe. Así, el siguiente ejemplo describe un caso en el que el límite no existe ya que la función se aproxima a valores diferentes a lo largo de trayectorias diferentes.

EJEMPLO 4 Un límite que no existe

Mostrar que el siguiente límite no existe.

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$$

Solución El dominio de la función

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$$

consta de todos los puntos en el plano xy con excepción del punto $(0, 0)$. Para mostrar que el límite no existe cuando (x, y) se aproxima a $(0, 0)$, considérense aproximaciones a $(0, 0)$ a lo largo de dos "trayectorias" diferentes, como se muestra en la figura 13.23. A lo largo del eje x, todo punto es de la forma $(x, 0)$ y el límite a lo largo de esta trayectoria es

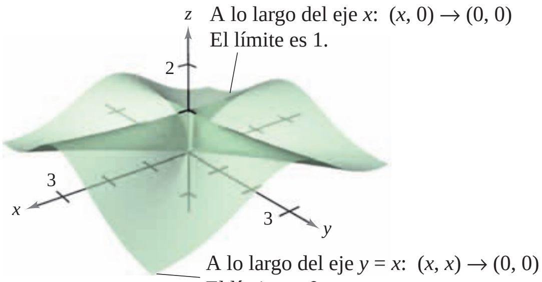
$$\lim_{(x, 0)\to(0, 0)} \left(\frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2}\right)^2 = \lim_{(x, 0)\to(0, 0)} 1^2 = 1. \qquad \text{Límite a lo largo del eje } x.$$

Sin embargo, si (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $y = x$, se obtiene

$$\lim_{(x, x)\to(0, 0)} \left(\frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2}\right)^2 = \lim_{(x, x)\to(0, 0)} \left(\frac{0}{2x^2}\right)^2 = 0. \qquad \text{Límite a lo largo de la recta } y = x.$$

Esto significa que en cualquier disco abierto centrado en $(0, 0)$ existen puntos (x, y) en los que f toma el valor 1 y otros puntos en los que f asume el valor 0. Por ejemplo, $f(x, y) = 1$ en los puntos $(1, 0)$, $(0.1, 0)$, $(0.01, 0)$, y $(0.001, 0)$ y $f(x, y) = 0$ en los puntos $(1, 1)$, $(0.1, 0.1)$, $(0.01, 0.01)$ y $(0.001, 0.001)$. Por tanto, f no tiene límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

NOTA En el ejemplo 4 se puede concluir que el límite no existe ya que se encuentran dos trayectorias que dan límites diferentes. Sin embargo, si dos trayectorias hubieran dado el mismo límite, no se podría concluir que el límite existe. Para llegar a tal conclusión, se debe mostrar que el límite es el mismo para *todas* las aproximaciones posibles. ■



$\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$ no existe
Figura 13.23

Continuidad de una función de dos variables

En el ejemplo 2 hay que observar que el límite de $f(x, y) = 5x^2y/(x^2 + y^2)$ cuando $(x, y) \to (1, 2)$ puede calcularse por sustitución directa. Es decir, el límite es $f(1, 2) = 2$. En tales casos se dice que la función f es **continua** en el punto $(1, 2)$.

NOTA Esta definición de continuidad puede extenderse a *puntos frontera* de la región abierta R considerando un tipo especial de límite en el que sólo se permite a (x, y) tender hacia (x_0, y_0) a lo largo de trayectorias que están en la región R. Esta noción es similar a la de límites unilaterales, tratada en el capítulo 1. ■

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Una función f de dos variables es **continua en un punto** $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ de una región abierta R si $f(x_0, y_0)$ es igual al límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Es decir,

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

La función f es **continua en la región abierta $\boldsymbol{R}$** si es continua en todo punto de R.

En el ejemplo 3 se mostró que la función

$$f(x, y) = \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$$

no es continua en $(0, 0)$. Sin embargo, como el límite en este punto existe, se puede eliminar la discontinuidad definiendo el valor de f en $(0, 0)$ igual a su límite. Tales discontinuidades se llaman **removibles** o **evitables**. En el ejemplo 4 se mostró que la función

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$$

tampoco es continua en $(0, 0)$, pero esta discontinuidad es **inevitable** o **no removible**.

TEOREMA 13.1 FUNCIONES CONTINUAS DE DOS VARIABLES

Si k es un número real y f y g son funciones continuas en (x_0, y_0), entonces las funciones siguientes son continuas en (x_0, y_0).

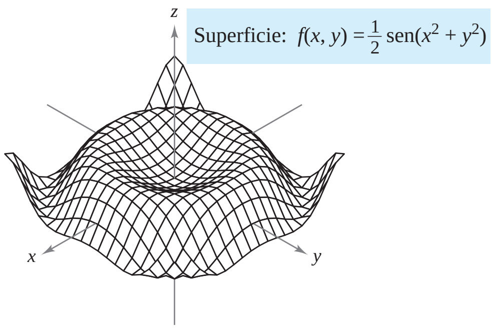
1. Múltiplo escalar: kf

2. Suma y diferencia: $f \pm g$

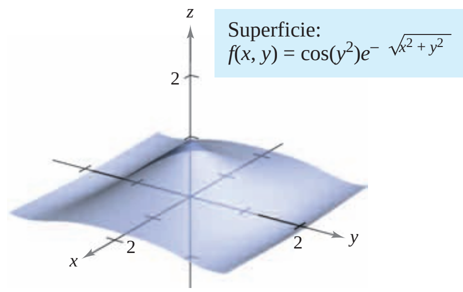
3. Producto: fg

4. Cociente: f/g, si $g(x_0, y_0) \neq 0$

El teorema 13.1 establece la continuidad de las funciones *polinomiales* y *racionales* en todo punto de su dominio. La continuidad de otros tipos de funciones puede extenderse de manera natural de una a dos variables. Por ejemplo, las funciones cuyas gráficas se muestran en las figuras 13.24 y 13.25 son continuas en todo punto del plano.



La función f es continua en todo punto del plano
Figura 13.24



La función f es continua en todo punto en el plano
Figura 13.25

EXPLORACIÓN

Sostener una cuchara a un palmo de distancia y mirar la propia imagen en la cuchara. La imagen estará invertida. Ahora, mover la cuchara más y más cerca a uno de los ojos. En algún punto, la imagen dejará de estar invertida. ¿Podría ser que la imagen ha sido deformada continuamente? Hablar sobre esta cuestión y sobre el significado general de continuidad con otros miembros de la clase. (Esta exploración la sugirió Irvin Roy Hentzel, Iowa State University.)

El siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales una función compuesta es continua.

TEOREMA 13.2 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si h es continua en (x_0, y_0) y g es continua en $h(x_0, y_0)$, entonces la función compuesta $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$ es continua en (x_0, y_0). Es decir,

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} g(h(x, y)) = g(h(x_0, y_0)).$$

NOTA En el teorema 13.2 hay que observar que h es una función de dos variables mientras que g es una función de una variable. ■

EJEMPLO 5 Análisis de la continuidad

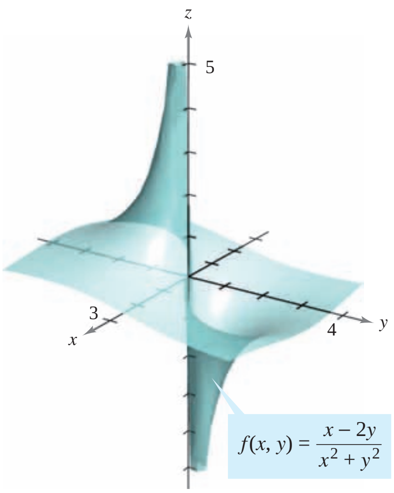
Analizar la continuidad de cada función.

a) $f(x, y) = \dfrac{x - 2y}{x^2 + y^2}$ ***b***) $g(x, y) = \dfrac{2}{y - x^2}$

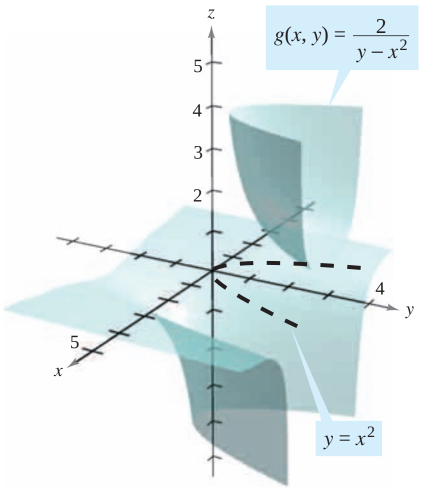
Solución

a) Como una función racional es continua en todo punto de su dominio, se puede concluir que f es continua en todo punto del plano xy excepto en $(0, 0)$, como se muestra en la figura 13.26.

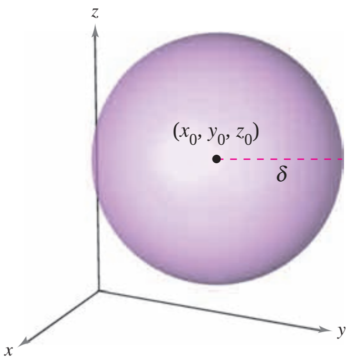
b) La función dada por $g(x, y) = 2/(y - x^2)$ es continua excepto en los puntos en los cuales el denominador es 0, $y - x^2 = 0$. Por tanto, se puede concluir que la función es continua en todos los puntos excepto en los puntos en que se encuentra la parábola $y = x^2$. En el interior de esta parábola se tiene $y > x^2$, y la superficie representada por la función se encuentra sobre el plano xy, como se muestra en la figura 13.27. En el exterior de la parábola, $y < x^2$, y la superficie se encuentra debajo del plano xy.



La función f no es continua en $(0, 0)$
Figura 13.26



La función g no es continua en la parábola $y = x^2$
Figura 13.27



Esfera abierta en el espacio
Figura 13.28

Continuidad de una función de tres variables

Las definiciones anteriores de límites y continuidad pueden extenderse a funciones de tres variables considerando los puntos (x, y, z) dentro de la *esfera abierta*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2. \qquad \text{Esfera abierta.}$$

El radio de esta esfera es δ, y la esfera está centrada en (x_0, y_0, z_0), como se muestra en la figura 13.28. Un punto (x_0, y_0, z_0) en una región R en el espacio es un **punto interior** de R si existe una δ-esfera centrada en (x_0, y_0, z_0) que está contenida completamente en R. Si todo punto de R es un punto interior, entonces se dice que R es una región **abierta**.

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DE TRES VARIABLES

Una función f de tres variables es **continua en un punto** $(\boldsymbol{x_0, y_0, z_0})$ de una región abierta R si $f(x_0, y_0, z_0)$ está definido y es igual al límite de $f(x, y, z)$ cuando (x, y, z) se aproxima a (x_0, y_0, z_0). Es decir,

$$\lim_{(x, y, z)\to(x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0).$$

La función f es **continua en una región abierta** $\boldsymbol{R}$ si es continua en todo punto de R.

EJEMPLO 6 Continuidad de una función de tres variables

La función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 - z}$$

es continua en todo punto en el espacio excepto en los puntos sobre el paraboloide dado por $z = x^2 + y^2$.

13.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, utilizar la definición de límite de una función de dos variables para verificar el límite.

1. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(1, 0)} x = 1$
2. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(4, -1)} x = 4$
3. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(1, -3)} y = -3$
4. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(a, b)} y = b$

En los ejercicios 5 a 8, hallar el límite indicado utilizando los límites

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{(x, y)\to(a, b)} g(x, y) = 3.$$

5. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(a, b)} [f(x, y) - g(x, y)]$
6. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(a, b)} \left[\frac{5f(x, y)}{g(x, y)}\right]$
7. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(a, b)} [f(x, y)g(x, y)]$
8. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(a, b)} \left[\frac{f(x, y) + g(x, y)}{f(x, y)}\right]$

En los ejercicios 9 a 22, calcular el límite y analizar la continuidad de la función.

9. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(2, 1)} (2x^2 + y)$
10. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x + 4y + 1)$
11. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(1, 2)} e^{xy}$
12. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(2, 4)} \frac{x + y}{x^2 + 1}$
13. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 2)} \frac{x}{y}$
14. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(-1, 2)} \frac{x + y}{x - y}$
15. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(1, 1)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$
16. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(1, 1)} \frac{x}{\sqrt{x + y}}$
17. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(\pi/4, 2)} y \cos xy$
18. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(2\pi, 4)} \operatorname{sen}\frac{x}{y}$
19. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 1)} \frac{\operatorname{arcsen} xy}{1 - xy}$
20. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 1)} \frac{\arccos (x/y)}{1 + xy}$
21. $\displaystyle\lim_{(x, y, z)\to(1, 3, 4)} \sqrt{x + y + z}$
22. $\displaystyle\lim_{(x, y, z)\to(-2, 1, 0)} xe^{yz}$

En los ejercicios 23 a 36, hallar el límite (si existe). Si el límite no existe, explicar por qué.

23. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-1}{1+xy}$

24. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2y}{1+xy^2}$

25. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x+y}$

26. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2y^2}$

27. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$

28. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2}$

29. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

30. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}-1}$

31. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y}$

32. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2-y^2}$

33. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{(x^2+1)(y^2+1)}$

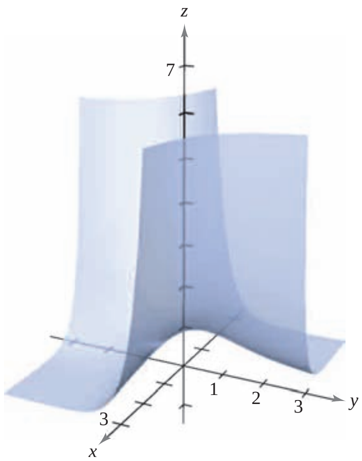
34. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(x^2+y^2)$

35. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$

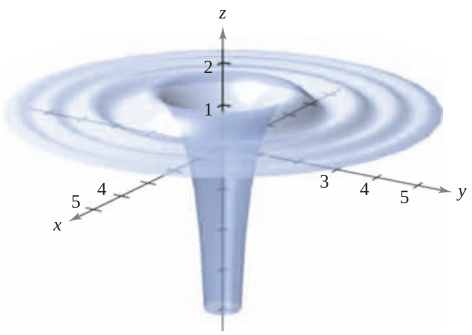
36. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^2}$

En los ejercicios 37 y 38, analizar la continuidad de la función y evaluar el límite de $f(x, y)$ (si existe) cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

37. $f(x, y) = e^{xy}$



38. $f(x, y) = 1 - \dfrac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$



En los ejercicios 39 a 42, utilizar una herramienta de graficación para elaborar una tabla que muestre los valores de $f(x, y)$ en los puntos que se especifican. Utilizar el resultado para formular una conjetura sobre el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$. Determinar analíticamente si el límite existe y discutir la continuidad de la función.

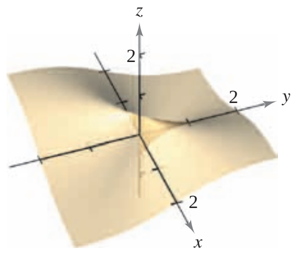
39. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Trayectoria: $y = 0$

Puntos: $(1, 0)$, $(0.5, 0)$, $(0.1, 0)$, $(0.01, 0)$, $(0.001, 0)$

Trayectoria: $y = x$

Puntos: $(1, 1)$, $(0.5, 0.5)$, $(0.1, 0.1)$, $(0.01, 0.01)$, $(0.001, 0.001)$



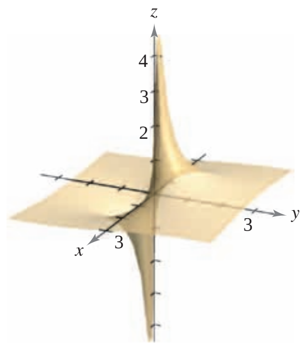
40. $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

Trayectoria: $y = 0$

Puntos: $(1, 0)$, $(0.5, 0)$, $(0.1, 0)$, $(0.01, 0)$, $(0.001, 0)$

Trayectoria: $y = x$

Puntos: $(1, 1)$, $(0.5, 0.5)$, $(0.1, 0.1)$, $(0.01, 0.01)$, $(0.001, 0.001)$



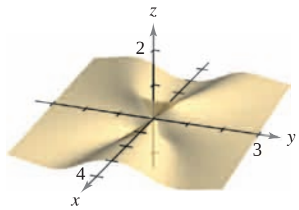
41. $f(x, y) = -\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

Trayectoria: $x = y^2$

Puntos: $(1, 1)$, $(0.25, 0.5)$, $(0.01, 0.1)$, $(0.0001, 0.01)$, $(0.000001, 0.001)$

Trayectoria: $x = -y^2$

Puntos: $(-1, 1)$, $(-0.25, 0.5)$, $(-0.01, 0.1)$, $(-0.0001, 0.01)$, $(-0.000001, 0.001)$



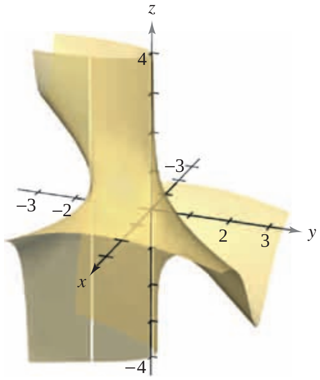
42. $f(x, y) = \dfrac{2x - y^2}{2x^2 + y}$

Trayectoria: $y = 0$

Puntos: $(1, 0)$, $(0.25, 0)$, $(0.01, 0)$, $(0.001, 0)$, $(0.000001, 0)$

Trayectoria: $y = x$

Puntos: $(1, 1)$, $(0.25, 0.25)$, $(0.01, 0.01)$, $(0.001, 0.001)$, $(0.0001, 0.0001)$



En los ejercicios 43 a 46, analizar la continuidad de las funciones *f* y *g*. Explicar cualquier diferencia.

43. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

44. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^4 - y^4}{2x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ -1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^4 - y^4}{2x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

45. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

46. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

CAS **En los ejercicios 47 a 52, utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la función y hallar $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ (si existe).**

47. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

48. $f(x, y) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} + \cos\dfrac{1}{x}$

49. $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^4 + 2y^2}$

50. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2y}$

51. $f(x, y) = \dfrac{5xy}{x^2 + 2y^2}$

52. $f(x, y) = \dfrac{6xy}{x^2 + y^2 + 1}$

En los ejercicios 53 a 58, utilizar las coordenadas polares para hallar el límite. [*Sugerencia:* Tomar $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$, y observar que $(x, y)\to(0, 0)$ implica $r\to 0$.]

53. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

54. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

55. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$

56. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

57. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \cos(x^2 + y^2)$

58. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$

En los ejercicios 59 a 62, usar las coordenadas polares y la regla de L'Hôpital para encontrar el límite.

59. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

60. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

61. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

62. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

En los ejercicios 63 a 68, analizar la continuidad de la función.

63. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

64. $f(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 + y^2 - 4}$

65. $f(x, y, z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{e^x + e^y}$

66. $f(x, y, z) = xy\operatorname{sen} z$

67. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy}, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$

68. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1, & x^2 = y^2 \end{cases}$

En los ejercicios 69 a 72, analizar la continuidad de la función compuesta $f \circ g$.

69. $f(t) = t^2$

$g(x, y) = 2x - 3y$

70. $f(t) = \dfrac{1}{t}$

$g(x, y) = x^2 + y^2$

71. $f(t) = \dfrac{1}{t}$

$g(x, y) = 2x - 3y$

72. $f(t) = \dfrac{1}{1 - t}$

$g(x, y) = x^2 + y^2$

En los ejercicios 73 a 78, hallar cada límite.

a) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$

b) $\displaystyle\lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

73. $f(x, y) = x^2 - 4y$

74. $f(x, y) = x^2 + y^2$

75. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

76. $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y}$

77. $f(x, y) = 3x + xy - 2y$

78. $f(x, y) = \sqrt{y}\,(y + 1)$

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 79 a 82, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

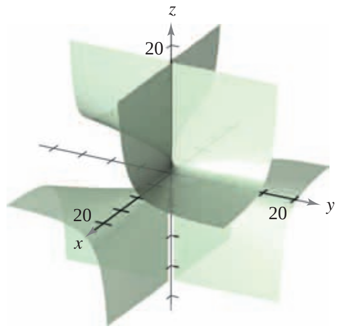
79. Si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x, 0) = 0$.

80. Si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(0, y) = 0$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

81. Si f es continua para todo x y para todo y distintos de cero, y $f(0, 0) = 0$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

82. Si g y h son funciones continuas de x y y, y $f(x, y) = g(x) + h(y)$, entonces f es continua.

83. Considerar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ (ver la figura).

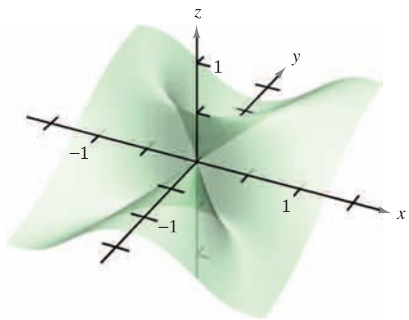


a) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de toda recta de la forma $y = ax$.

b) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de la parábola $y = x^2$.

c) ¿Existe el límite? Explicar la respuesta.

84. Considerar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ (ver la figura).



a) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de toda recta de la forma $y = ax$.

b) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de la parábola $y = x^2$.

c) ¿Existe el límite? Explicar la respuesta.

En los ejercicios 85 y 86, utilizar las coordenadas esféricas para encontrar el límite. [*Sugerencia:* Tomar $x = \rho$ sen ϕ cos θ, $y = \rho$ sen ϕ sen θ y $z = \rho$ cos ϕ, y observar que $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$ es equivalente a $\rho \to 0^+$.]

85. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

86. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \tan^{-1}\left[\dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right]$

87. Hallar el límite siguiente.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \tan^{-1}\left[\frac{x^2 + 1}{x^2 + (y - 1)^2}\right]$$

88. Dada la función

$$f(x, y) = xy\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

definir $f(0, 0)$ de manera que f sea continua en el origen.

89. Demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x, y) + g(x, y)] = L_1 + L_2$$

donde $f(x, y)$ tiende a L_1 y $g(x, y)$ se aproxima a L_2 cuando $(x, y) \to (a, b)$.

90. Demostrar que si f es continua y $f(a, b) < 0$, existe un δ-entorno de (a, b) tal que $f(x, y) < 0$ para todo punto (x, y) en la vecindad o el entorno.

Desarrollo de conceptos

91. Definir el límite de una función de dos variables. Describir un método para probar que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$$

no existe.

92. Dar la definición de continuidad de una función de dos variables.

93. Determinar si cada una de las siguientes declaraciones es verdadera o falsa. Explicar el razonamiento.

a) Si $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x, y) = 4$, entonces $\lim\limits_{x\to 2} f(x, 3) = 4$.

b) Si $\lim\limits_{x\to 2} f(x, 3) = 4$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x, y) = 4$.

c) Si $\lim\limits_{x\to 2} f(x, 3) = \lim\limits_{y\to 3} f(2, y) = 4$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x, y) = 4$.

d) Si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$, entonces para cualquier número real k, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(kx, y) = 0$.

Para discusión

94. *a*) Si $f(2, 3) = 4$, ¿se puede concluir algo acerca de $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x, y)$? Dar razones que justifiquen la respuesta.

b) Si $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x, y) = 4$, ¿se puede concluir algo acerca de $f(2, 3)$? Dar razones que justifiquen la respuesta.

13.3 Derivadas parciales

- **Hallar y utilizar las derivadas parciales de una función de dos variables.**
- **Hallar y utilizar las derivadas parciales de una función de tres o más variables.**
- **Hallar derivadas parciales de orden superior de una función de dos o tres variables.**

Derivadas parciales de una función de dos variables


Mary Evans Picture Library

JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783)

La introducción de las derivadas parciales ocurrió años después del trabajo sobre el cálculo de Newton y Leibniz. Entre 1730 y 1760, Leonhard Euler y Jean Le Rond d'Alembert publicaron por separado varios artículos sobre dinámica en los cuales establecieron gran parte de la teoría de las derivadas parciales. Estos artículos utilizaban funciones de dos o más variables para estudiar problemas de equilibrio, movimiento de fluidos y cuerdas vibrantes.

En aplicaciones de funciones de varias variables suele surgir la pregunta: ¿"Cómo afectaría al valor de una función un cambio en una de sus variables independientes"? Se puede contestar esta pregunta considerando cada una de las variables independientes por separado. Por ejemplo, para determinar el efecto de un catalizador en un experimento, un químico podría repetir el experimento varias veces usando cantidades distintas de catalizador, mientras mantiene constantes las otras variables como temperatura y presión. Para determinar la velocidad o la razón de cambio de una función f respecto a una de sus variables independientes se puede utilizar un procedimiento similar. A este proceso se le llama **derivación parcial** y el resultado se llama **derivada parcial** de f con respecto a la variable independiente elegida.

DEFINICIÓN DE LAS DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Si $z = f(x, y)$, las **primeras derivadas parciales** de f con respecto a x y y son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

siempre y cuando el límite exista.

Esta definición indica que si $z = f(x, y)$, entonces para hallar f_x *se considera* y *constante* y se deriva con respecto a x. De manera similar, para calcular f_y, *se considera* x *constante* y se deriva con respecto a y.

EJEMPLO 1 Hallar las derivadas parciales

Hallar las derivadas parciales f_x y f_y de la función

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y.$$

Solución Si se considera y como constante y se deriva con respecto a x se obtiene

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f_x(x, y) = 3 - 2xy^2 + 6x^2y. \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } x.$$

Si se considera x constante y se deriva con respecto a y obtenemos

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f_y(x, y) = -2x^2y + 2x^3. \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } y.$$

NOTACIÓN PARA LAS PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES

Si $z = f(x, y)$, las derivadas parciales f_x y f_y se denotan por

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Las primeras derivadas parciales evaluadas en el punto (a, b) se denotan por

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,\, b)} = f_x(a, b) \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,\, b)} = f_y(a, b).$$

EJEMPLO 2 Hallar y evaluar las derivadas parciales

Dada $f(x, y) = xe^{x^2 y}$, hallar f_x y f_y, y evaluar cada una en el punto $(1, \ln 2)$.

Solución Como

$$f_x(x, y) = xe^{x^2 y}(2xy) + e^{x^2 y} \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } x.$$

la derivada parcial de f con respecto a x en $(1, \ln 2)$ es

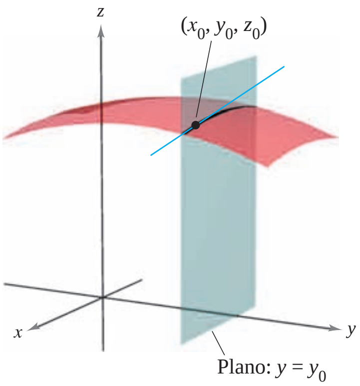
$$\begin{aligned} f_x(1, \ln 2) &= e^{\ln 2}(2 \ln 2) + e^{\ln 2} \\ &= 4 \ln 2 + 2. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= xe^{x^2 y}(x^2) \\ &= x^3 e^{x^2 y} \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } y. \end{aligned}$$

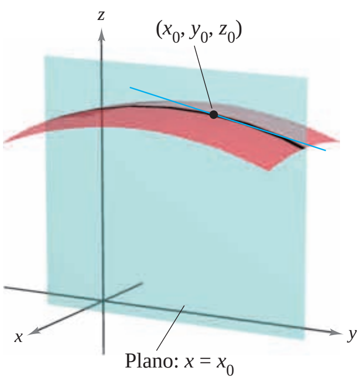
la derivada parcial de f con respecto a y en $(1, \ln 2)$ es

$$\begin{aligned} f_y(1, \ln 2) &= e^{\ln 2} \\ &= 2. \end{aligned}$$



$\frac{\partial f}{\partial x}$ = pendiente en la dirección x

Figura 13.29



$\frac{\partial f}{\partial y}$ = pendiente en la dirección y

Figura 13.30

Las derivadas parciales de una función de dos variables, $z = f(x, y)$, tienen una interpretación geométrica útil. Si $y = y_0$, entonces $z = f(x, y_0)$ representan la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$, como se muestra en la figura 13.29. Por consiguiente,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

representa la pendiente de esta curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Nótese que tanto la curva como la recta tangente se encuentran en el plano $y = y_0$. Análogamente,

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

representa la pendiente de la curva dada por la intersección de $z = f(x, y)$ y el plano $x = x_0$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, como se muestra en la figura 13.30.

Informalmente, los valores $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en (x_0, y_0, z_0) denotan las **pendientes de la superficie en las direcciones de *x* y *y***, respectivamente.

EJEMPLO 3 Hallar las pendientes de una superficie en las direcciones de *x* y de *y*

Hallar las pendientes en las direcciones de x y de y de la superficie dada por

$$f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

en el punto $\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$.

Solución Las derivadas parciales de f con respecto a x y a y son

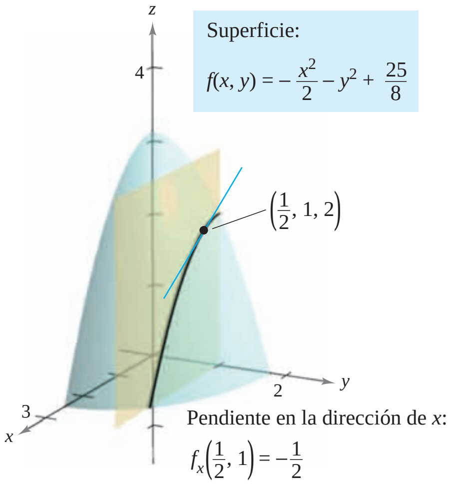
$$f_x(x, y) = -x \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2y. \qquad \text{Derivadas parciales.}$$

Por tanto, en la dirección de x, la pendiente es

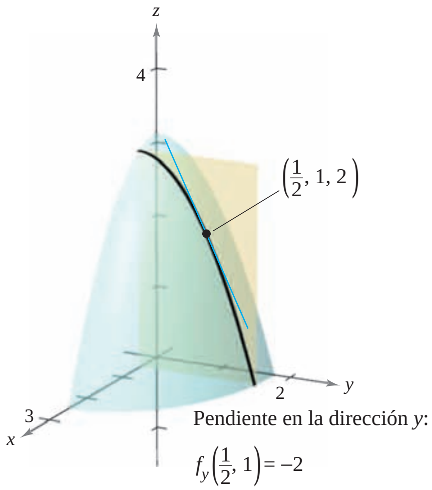
$$f_x\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2} \qquad \text{Figura 13.31}a.$$

y en la dirección de y, la pendiente es

$$f_y\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -2. \qquad \text{Figura 13.31}b.$$



a)



b)

Figura 13.31

EJEMPLO 4 Hallar las pendientes de una superficie en las direcciones de *x* y de *y*

Hallar las pendientes de la superficie dada por

$$f(x, y) = 1 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2$$

en el punto (1, 2, 1), en las direcciones de x y de y.

Solución Las derivadas parciales de f con respecto a x y y son

$$f_x(x, y) = -2(x - 1) \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2(y - 2). \qquad \text{Derivadas parciales.}$$

Por tanto, en el punto (1, 2, 1), las pendientes en las direcciones de x y de y son

$$f_x(1, 2) = -2(1 - 1) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(1, 2) = -2(2 - 2) = 0$$

como se muestra en la figura 13.32.

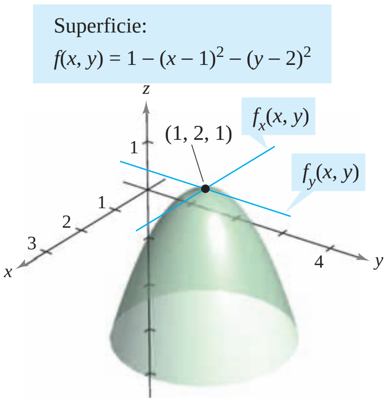
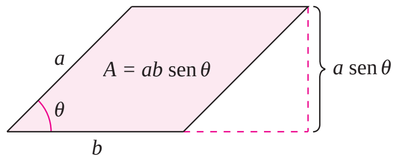


Figura 13.32

Sin importar cuántas variables haya, las derivadas parciales se pueden interpretar como *tasas*, *velocidades* o *razones de cambio*.

EJEMPLO 5 Derivadas parciales como velocidades o razones de cambio



El área del paralelogramo es $ab \operatorname{sen} \theta$
Figura 13.33

El área de un paralelogramo con lados adyacentes a y b entre los que se forma un ángulo θ está dada por $A = ab \operatorname{sen} \theta$, como se muestra en la figura 13.33.

a) Hallar la tasa o la razón de cambio de A respecto de a si $a = 10$, $b = 20$ y $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

b) Calcular la tasa o la razón de cambio de A respecto de θ si $a = 10$, $b = 20$ y $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Solución

a) Para hallar la tasa o la razón de cambio del área respecto de a, se mantienen b y θ constantes y se deriva respecto de a para obtener

$$\frac{\partial A}{\partial a} = b \operatorname{sen} \theta \qquad \text{Derivada parcial respecto a } a.$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 20 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 10. \qquad \text{Sustituir a } b \text{ y } \theta.$$

b) Para hallar la tasa o la razón de cambio del área respecto de θ, se mantiene a y b constantes y se deriva respecto de θ para obtener

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = ab \cos \theta \qquad \text{Derivada parcial respecto de } \theta.$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = 200 \cos \frac{\pi}{6} = 100\sqrt{3}. \qquad \text{Sustituir } a, b \text{ y } \theta.$$

Derivadas parciales de una función de tres o más variables

El concepto de derivada parcial puede extenderse de manera natural a funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$, existen tres derivadas parciales cada una de las cuales se forma manteniendo constantes las otras dos variables. Es decir, para definir la derivada parcial de w con respecto a x, se consideran y y z constantes y se deriva con respecto a x. Para hallar las derivadas parciales de w con respecto a y y con respecto a z se emplea un proceso similar.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

En general, si $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, hay n derivadas parciales denotadas por

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = f_{x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Para hallar la derivada parcial con respecto a una de las variables, se mantienen constantes las otras variables y se deriva con respecto a la variable dada.

EJEMPLO 6 Hallar las derivadas parciales

***a*)** Para hallar la derivada parcial de $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xz$ con respecto a z, se consideran x y y constantes y se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial z}[xy + yz^2 + xz] = 2yz + x.$$

***b*)** Para hallar la derivada parcial de $f(x, y, z) = z \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)$ con respecto a z, se consideran x y y constantes. Entonces, usando la regla del producto, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}[z\operatorname{sen}(xy^2 + 2z)] &= (z)\frac{\partial}{\partial z}[\operatorname{sen}(xy^2 + 2z)] + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)\frac{\partial}{\partial z}[z]\\ &= (z)[\cos(xy^2 + 2z)](2) + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z)\\ &= 2z\cos(xy^2 + 2z) + \operatorname{sen}(xy^2 + 2z).\end{aligned}$$

***c*)** Para calcular la derivada parcial de $f(x, y, z, w) = (x + y + z)/w$ con respecto a w, se consideran x, y y z constantes y se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{x + y + z}{w}\right] = -\frac{x + y + z}{w^2}.$$

Derivadas parciales de orden superior

Como sucede con las derivadas ordinarias, es posible hallar las segundas, terceras, etc., derivadas parciales de una función de varias variables, siempre que tales derivadas existan. Las derivadas de orden superior se denotan por el orden al que se hace la derivación. Por ejemplo, la función $z = f(x, y)$ tiene las siguientes derivadas parciales de segundo orden.

1. Derivar dos veces con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}.$$

2. Derivar dos veces con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

3. Derivar primero con respecto a x y luego con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}.$$

4. Derivar primero con respecto a y y luego con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}.$$

Los casos tercero y cuarto se llaman **derivadas parciales mixtas (cruzadas)**.

NOTA Observar que los dos tipos de notación para las derivadas parciales mixtas tienen convenciones diferentes para indicar el orden de derivación.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$ Orden de derecha a izquierda.

$$(f_x)_y = f_{xy}$$ Orden de izquierda a derecha.

Se puede recordar el orden de ambas notaciones observando que primero se deriva con respecto a la variable más "cercana" a f.

EJEMPLO 7 Hallar derivadas parciales de segundo orden

Hallar las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$, y determinar el valor de $f_{xy}(-1, 2)$.

Solución Empezar por hallar las derivadas parciales de primer orden con respecto a x y y.

$$f_x(x, y) = 3y^2 + 10xy^2 \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = 6xy - 2 + 10x^2y$$

Después, se deriva cada una de éstas con respecto a x y con respecto a y.

$$f_{xx}(x, y) = 10y^2 \qquad \text{y} \qquad f_{yy}(x, y) = 6x + 10x^2$$

$$f_{xy}(x, y) = 6y + 20xy \qquad \text{y} \qquad f_{yx}(x, y) = 6y + 20xy$$

En $(-1, 2)$, el valor de f_{xy} es $f_{xy}(-1, 2) = 12 - 40 = -28$.

NOTA En el ejemplo 7 las dos derivadas parciales mixtas son iguales. En el teorema 13.3 se dan condiciones suficientes para que esto ocurra. ■

TEOREMA 13.3 IGUALDAD DE LAS DERIVADAS PARCIALES MIXTAS

Si f es una función de x y y tal que f_{xy} y f_{yx} son continuas en un disco abierto R, entonces, para todo (x, y) en R,

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

El teorema 13.3 también se aplica a una función f de *tres o más variables* siempre y cuando las derivadas parciales de segundo orden sean continuas. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$ y todas sus derivadas parciales de segundo orden son continuas en una región abierta R, entonces en todo punto en R el orden de derivación para obtener las derivadas parciales mixtas de segundo orden es irrelevante. Si las derivadas parciales de tercer orden de f también son continuas, el orden de derivación para obtener las derivadas parciales mixtas de tercer orden es irrelevante.

EJEMPLO 8 Hallar derivadas parciales de orden superior

Mostrar que $f_{xz} = f_{zx}$ y $f_{xzz} = f_{zxz} = f_{zzx}$ para la función dada por

$$f(x, y, z) = ye^x + x \ln z.$$

Solución

Derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x, y, z) = ye^x + \ln z, \qquad f_z(x, y, z) = \frac{x}{z}$$

Derivadas parciales de segundo orden (nótese que las dos primeras son iguales):

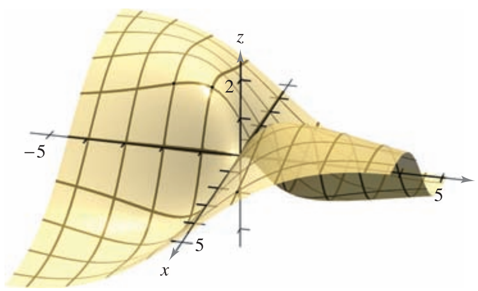
$$f_{xz}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \qquad f_{zx}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \qquad f_{zz}(x, y, z) = -\frac{x}{z^2}$$

Derivadas parciales de tercer orden (nótese que las tres son iguales):

$$f_{xzz}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \qquad f_{zxz}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \qquad f_{zzx}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}$$

13.3 Ejercicios

Para pensar **En los ejercicios 1 a 4, utilizar la gráfica de la superficie para determinar el signo de la derivada parcial indicada.**



1. $f_x(4, 1)$
2. $f_y(-1, -2)$
3. $f_y(4, 1)$
4. $f_x(-1, -1)$

En los ejercicios 5 a 8, explicar si se debe usar o no la regla del cociente para encontrar la derivada parcial. No derivar.

5. $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x-y}{x^2+1}\right)$
6. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x-y}{x^2+1}\right)$
7. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{xy}{x^2+1}\right)$
8. $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{xy}{x^2+1}\right)$

En los ejercicios 9 a 40, hallar las dos derivadas parciales de primer orden.

9. $f(x, y) = 2x - 5y + 3$
10. $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4$
11. $f(x, y) = x^2y^3$
12. $f(x, y) = 4x^3y^{-2}$
13. $z = x\sqrt{y}$
14. $z = 2y^2\sqrt{x}$
15. $z = x^2 - 4xy + 3y^2$
16. $z = y^3 - 2xy^2 - 1$
17. $z = e^{xy}$
18. $z = e^{x/y}$
19. $z = x^2e^{2y}$
20. $z = ye^{y/x}$
21. $z = \ln\dfrac{x}{y}$
22. $z = \ln\sqrt{xy}$
23. $z = \ln(x^2 + y^2)$
24. $z = \ln\dfrac{x+y}{x-y}$
25. $z = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{3y^2}{x}$
26. $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
27. $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$
28. $g(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$
29. $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$
30. $f(x, y) = \sqrt{2x+y^3}$
31. $z = \cos xy$
32. $z = \operatorname{sen}(x + 2y)$
33. $z = \tan(2x - y)$
34. $z = \operatorname{sen} 5x \cos 5y$
35. $z = e^y \operatorname{sen} xy$
36. $z = \cos(x^2 + y^2)$
37. $z = \operatorname{senh}(2x + 3y)$
38. $z = \cosh xy^2$
39. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y (t^2 - 1)\,dt$
40. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y (2t + 1)\,dt + \int_y^x (2t - 1)\,dt$

En los ejercicios 41 a 44, utilizar la definición de derivadas parciales empleando límites para calcular $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

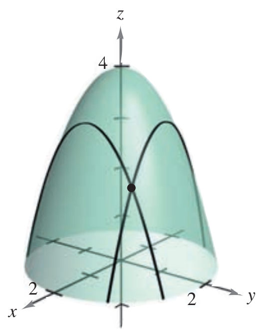
41. $f(x, y) = 3x + 2y$
42. $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$
43. $f(x, y) = \sqrt{x+y}$
44. $f(x, y) = \dfrac{1}{x+y}$

En los ejercicios 45 a 52, evaluar f_x y f_y en el punto dado.

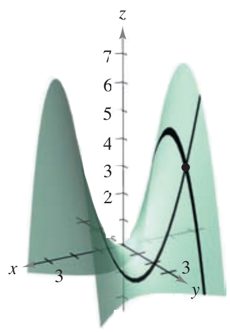
45. $f(x, y) = e^y \operatorname{sen} x,\quad (\pi, 0)$
46. $f(x, y) = e^{-x}\cos y,\quad (0, 0)$
47. $f(x, y) = \cos(2x - y),\quad \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$
48. $f(x, y) = \operatorname{sen} xy,\quad \left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$
49. $f(x, y) = \arctan\dfrac{y}{x},\quad (2, -2)$
50. $f(x, y) = \arccos xy,\quad (1, 1)$
51. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x-y},\quad (2, -2)$
52. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{\sqrt{4x^2+5y^2}},\quad (1, 1)$

En los ejercicios 53 y 54, calcular las pendientes de la superficie en las direcciones de x y de y en el punto dado.

53. $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
$(1, 1, 2)$



54. $h(x, y) = x^2 - y^2$
$(-2, 1, 3)$



CAS **En los ejercicios 55 a 58, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la curva en la intersección de la superficie con el plano. Hallar la pendiente de la curva en el punto dado.**

	Superficie	*Plano*	*Punto*
55.	$z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$	$x = 2$	$(2, 3, 6)$
56.	$z = x^2 + 4y^2$	$y = 1$	$(2, 1, 8)$
57.	$z = 9x^2 - y^2$	$y = 3$	$(1, 3, 0)$
58.	$z = 9x^2 - y^2$	$x = 1$	$(1, 3, 0)$

En los ejercicios 59 a 64, calcular las derivadas parciales de primer orden con respecto a x, y y z.

59. $H(x, y, z) = \operatorname{sen}(x + 2y + 3z)$

60. $f(x, y, z) = 3x^2y - 5xyz + 10yz^2$

61. $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ **62.** $w = \dfrac{7xz}{x + y}$

63. $F(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

64. $G(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$

En los ejercicios 65 a 70, evaluar f_x, f_y y f_z en el punto dado.

65. $f(x, y, z) = x^3yz^2, \quad (1, 1, 1)$

66. $f(x, y, z) = x^2y^3 + 2xyz - 3yz, \quad (-2, 1, 2)$

67. $f(x, y, z) = \dfrac{x}{yz}, \quad (1, -1, -1)$

68. $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{x + y + z}, \quad (3, 1, -1)$

69. $f(x, y, z) = z \operatorname{sen}(x + y), \quad \left(0, \dfrac{\pi}{2}, -4\right)$

70. $f(x, y, z) = \sqrt{3x^2 + y^2 - 2z^2}, \quad (1, -2, 1)$

En los ejercicios 71 a 80, calcular las cuatro derivadas parciales de segundo orden. Observar que las derivadas parciales mixtas de segundo orden son iguales.

71. $z = 3xy^2$ **72.** $z = x^2 + 3y^2$

73. $z = x^2 - 2xy + 3y^2$ **74.** $z = x^4 - 3x^2y^2 + y^4$

75. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ **76.** $z = \ln(x - y)$

77. $z = e^x \tan y$ **78.** $z = 2xe^y - 3ye^{-x}$

79. $z = \cos xy$ **80.** $z = \arctan \dfrac{y}{x}$

En los ejercicios 81 a 88, para $f(x, y)$, encontrar todos los valores de x y y, tal que $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ simultáneamente.

81. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y$

82. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 5x + y$

83. $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 16y + 3$

84. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

85. $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + xy$

86. $f(x, y) = 3x^3 - 12xy + y^3$

87. $f(x, y) = e^{x^2 + xy + y^2}$

88. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

CAS **En los ejercicios 89 a 92, utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar las derivadas parciales de primero y segundo orden de la función. Determinar si existen valores de x y y tales que $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ simultáneamente.**

89. $f(x, y) = x \sec y$ **90.** $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

91. $f(x, y) = \ln \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ **92.** $f(x, y) = \dfrac{xy}{x - y}$

En los ejercicios 93 a 96, mostrar que las derivadas parciales mixtas f_{xyy}, f_{yxy} y f_{yyx} son iguales.

93. $f(x, y, z) = xyz$

94. $f(x, y, z) = x^2 - 3xy + 4yz + z^3$

95. $f(x, y, z) = e^{-x} \operatorname{sen} yz$

96. $f(x, y, z) = \dfrac{2z}{x + y}$

Ecuación de Laplace **En los ejercicios 97 a 100, mostrar que la función satisface la ecuación de Laplace $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = 0$.**

97. $z = 5xy$ **98.** $z = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\operatorname{sen} x$

99. $z = e^x \operatorname{sen} y$ **100.** $z = \arctan \dfrac{y}{x}$

Ecuación de ondas **En los ejercicios 101 a 104, mostrar que la función satisface la ecuación de ondas $\partial^2 z/\partial t^2 = c^2(\partial^2 z/\partial x^2)$.**

101. $z = \operatorname{sen}(x - ct)$ **102.** $z = \cos(4x + 4ct)$

103. $z = \ln(x + ct)$ **104.** $z = \operatorname{sen} \omega ct \operatorname{sen} \omega x$

Ecuación del calor **En los ejercicios 105 y 106, mostrar que la función satisface la ecuación del calor $\partial z/\partial t = c^2(\partial^2 z/\partial x^2)$.**

105. $z = e^{-t} \cos \dfrac{x}{c}$ **106.** $z = e^{-t} \operatorname{sen} \dfrac{x}{c}$

En los ejercicios 107 y 108, determinar si existe o no una función $f(x, y)$ con las derivadas parciales dadas. Explicar el razonamiento. Si tal función existe, dar un ejemplo.

107. $f_x(x, y) = -3 \operatorname{sen}(3x - 2y), f_y(x, y) = 2 \operatorname{sen}(3x - 2y)$

108. $f_x(x, y) = 2x + y, f_y(x, y) = x - 4y$

En los ejercicios 109 y 110, encontrar la primera derivada parcial con respecto a x.

109. $f(x, y, z) = (\tan y^2z)e^{z^2 + y^{-2}\sqrt{z}}$

110. $f(x, y, z) = x\left(\operatorname{senh} \dfrac{y}{z}\right)^{(y^2 - 2\sqrt{y-1})z}$

Desarrollo de conceptos

111. Sea f una función de dos variables x y y. Describir el procedimiento para hallar las derivadas parciales de primer orden.

112. Dibujar una superficie que represente una función f de dos variables x y y. Utilizar la gráfica para dar una interpretación geométrica de $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

113. Dibujar la gráfica de una función $z = f(x, y)$ cuya derivada f_x sea siempre negativa y cuya derivada f_y sea siempre positiva.

114. Dibujar la gráfica de una función $z = f(x, y)$ cuyas derivadas f_x y f_y sean siempre positivas.

115. Si f es una función de x y y tal que f_{xy} y f_{yx} son continuas, ¿qué relación existe entre las derivadas parciales mixtas? Explicar.

Para discusión

116. Encontrar las cuatro segundas derivadas parciales de la función dada por $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - 2y)$. Mostrar que las segundas derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} son iguales.

117. ***Ingreso marginal*** Una corporación farmacéutica tiene dos plantas que producen la misma medicina. Si x_1 y x_2 son los números de unidades producidos en la planta 1 y en la planta 2, respectivamente, entonces el ingreso total del producto está dado por $R = 200x_1 + 200x_2 - 4x_1^2 - 8x_1x_2 - 4x_2^2$. Cuando $x_1 = 4$ y $x_2 = 12$, encontrar *a*) el ingreso marginal para la planta 1, $\partial R/\partial x_1$, y *b*) el ingreso marginal para la planta 2, $\partial R/\partial x_2$.

118. ***Costo marginal*** Una empresa fabrica dos tipos de estufas de combustión de madera: el modelo autoestable y el modelo para inserción en una chimenea. La función de costo para producir x estufas autoestables y y de inserción en una chimenea es

$$C = 32\sqrt{xy} + 175x + 205y + 1\,050.$$

a) Calcular los costos marginales ($\partial C/\partial x$ y $\partial C/\partial y$) cuando $x = 80$ y $y = 20$.

b) Cuando se requiera producción adicional, ¿qué modelo de estufa hará incrementar el costo con una tasa más alta? ¿Cómo puede determinarse esto a partir del modelo del costo?

119. ***Psicología*** Recientemente en el siglo XX se desarrolló una prueba de inteligencia llamada la *Prueba de Stanford-Binet* (más conocida como la *prueba IQ*). En esta prueba, una edad mental individual M es dividida entre la edad cronológica individual C, y el cociente es multiplicado por 100. El resultado es el IQ individual.

$$IQ(M, C) = \frac{M}{C} \times 100$$

Encontrar las derivadas parciales de IQ con respecto a M y con respecto a C. Evaluar las derivadas parciales en el punto (12, 10) e interpretar el resultado. (*Fuente:* Adaptado de Bernstein/Clark-Steward/Roy/Wickens, *Psicología*, 4a. ed.)

120. ***Productividad marginal*** Considerar la función de producción de Cobb-Douglas $f(x, y) = 200x^{0.7}y^{0.3}$. Si $x = 1\,000$ y $y = 500$, hallar *a*) la productividad marginal del trabajo, $\partial f/\partial x$, y *b*) la productividad marginal del capital, $\partial f/\partial y$.

121. ***Para pensar*** Sea N el número de aspirantes a una universidad, p el costo por alimentación y alojamiento en la universidad, y t el costo de la matrícula. N es una función de p y t tal que $\partial N/\partial p < 0$ y $\partial N/\partial t < 0$. ¿Qué información se obtiene al saber que ambas derivadas parciales son negativas?

122. ***Inversión*** El valor de una inversión de \$1 000 al 6% de interés compuesto anual es

$$V(I, R) = 1\,000\left[\frac{1 + 0.06(1 - R)}{1 + I}\right]^{10}$$

donde I es la tasa anual de inflación y R es la tasa de impuesto para el inversor. Calcular $V_I(0.03, 0.28)$ y $V_R(0.03, 0.28)$. Determinar si la tasa de impuesto o la tasa de inflación es el mayor factor "negativo" sobre el crecimiento de la inversión.

123. ***Distribución de temperatura*** La temperatura en cualquier punto (x, y) de una placa de acero es $T = 500 - 0.6x^2 - 1.5y^2$, donde x y y son medidos en metros. En el punto (2, 3), hallar el ritmo de cambio de la temperatura respecto a la distancia recorrida en la placa en las direcciones del eje x y y.

124. ***Temperatura aparente*** Una medida de la percepción del calor ambiental por unas personas promedio es el Índice de temperatura aparente. Un modelo para este índice es

$$A = 0.885t - 22.4h + 1.20th - 0.544$$

donde A es la temperatura aparente en grados Celsius, t es la temperatura del aire y h es la humedad relativa dada en forma decimal. (*Fuente: The UMAP Journal*)

a) Hallar $\partial A/\partial t$ y $\partial A/\partial h$ si $t = 30°$ y $h = 0.80$.

b) ¿Qué influye más sobre A, la temperatura del aire o la humedad? Explicar.

125. ***Ley de los gases ideales*** La ley de los gases ideales establece que $PV = nRT$, donde P es la presión, V es el volumen, n es el número de moles de gas, R es una constante (la constante de los gases) y T es temperatura absoluta. Mostrar que

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = -1.$$

126. ***Utilidad marginal*** La función de utilidad $U = f(x, y)$ es una medida de la utilidad (o satisfacción) que obtiene una persona por el consumo de dos productos x y y. Suponer que la función de utilidad es $U = -5x^2 + xy - 3y^2$.

a) Determinar la utilidad marginal del producto x.

b) Determinar la utilidad marginal del producto y.

c) Si $x = 2$ y $y = 3$, ¿se debe consumir una unidad más de producto x o una unidad más de producto y? Explicar el razonamiento.

CAS *d*) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función. Interpretar las utilidades marginales de productos x y y con una gráfica.

127. ***Modelo matemático*** En la tabla se muestran los consumos per cápita (en galones) de diferentes tipos de leche en Estados Unidos desde 1999 hasta 2005. El consumo de leche light y descremada, leche baja en grasa y leche entera se representa por las variables x, y y z, respectivamente. *(Fuente: U.S. Department of Agriculture)*

Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
x	1.4	1.4	1.4	1.6	1.6	1.7	1.7
y	7.3	7.1	7.0	7.0	6.9	6.9	6.9
z	6.2	6.1	5.9	5.8	5.6	5.5	5.6

Un modelo para los datos está dado por

$$z = -0.92x + 1.03y + 0.02.$$

a) Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

b) Interpretar las derivadas parciales en el contexto del problema.

128. ***Modelo matemático*** La tabla muestra el gasto en atención pública médica (en miles de millones de dólares) en compensación a trabajadores x, asistencia pública y y seguro médico del Estado z, del año 2000 al 2005. *(Fuente: Centers for Medicare and Medicaid Services)*

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005
x	24.9	28.1	30.1	31.4	32.1	33.5
y	207.5	233.2	258.4	281.9	303.2	324.9
z	224.3	247.7	265.7	283.5	312.8	342.0

Un modelo para los datos está dado por

$$z = -1.2225x^2 + 0.0096y^2 + 71.381x - 4.121y - 354.65.$$

a) Hallar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

b) Determinar la concavidad de las trazas paralelas al plano xz. Interpretar el resultado en el contexto del problema.

c) Determinar la concavidad de las trazas paralelas al plano yz. Interpretar el resultado en el contexto del problema.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 129 a 132, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

129. Si $z = f(x, y)$ y $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y$, entonces $z = c(x + y)$.

130. Si $z = f(x)g(y)$, entonces

$(\partial z/\partial x) + (\partial z/\partial y) = f'(x)g(y) + f(x)g'(y)$.

131. Si $z = e^{xy}$, entonces $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = (xy + 1)e^{xy}$.

132. Si una superficie cilíndrica $z = f(x, y)$ tiene rectas generatrices paralelas al eje y, entonces $\partial z/\partial y = 0$.

133. Considerar la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

a) Hallar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.

b) Utilizar la definición de derivadas parciales para hallar $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

$$\left[\textit{Sugerencia: } f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x}.\right]$$

c) Utilizar la definición de derivadas parciales para hallar $f_{xy}(0, 0)$ y $f_{yx}(0, 0)$.

d) Utilizando el teorema 13.3 y el resultado del inciso *c*), indicar qué puede decirse acerca de f_{xy} o f_{yx}.

134. Sea $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y \sqrt{1 + t^3}\, dt$. Hallar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

135. Mostrar la función $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$.

a) Hallar $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

b) Determinar los puntos (si los hay) en los que $f_x(x, y)$ o $f_y(x, y)$ no existe.

136. Considerar la función $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$. Mostrar que

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x}{3(x^2 + y^2)^{1/3}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este problema, ver el artículo "A Classroom Note on a Naturally Occurring Piecewise Defined Function" de Don Cohen en *Mathematics and Computer Education.*

PROYECTO DE TRABAJO

Franjas de Moiré

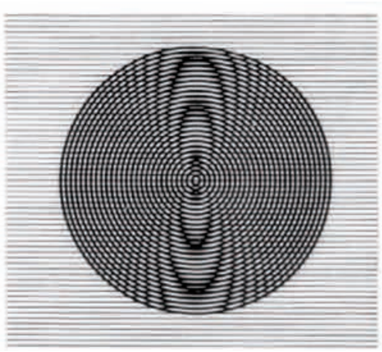
Léase el artículo "Moiré Fringes and the Conic Sections" de Mike Cullen en *The College Mathematics Journal*. El artículo describe cómo dos familias de curvas de nivel dadas por

$$f(x, y) = a \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = b$$

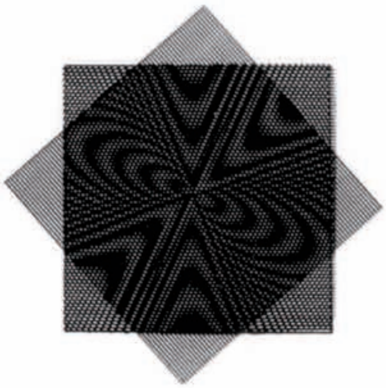
pueden formar franjas de Moiré. Después de leer el artículo, escribir un documento que explique cómo se relaciona la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$

con las franjas de Moiré formadas por la intersección de las dos familias de curvas de nivel. Utilizar como ejemplo uno de los modelos siguientes.



Mike Cullen



Mike Cullen

13.4 Diferenciales

- **Entender los conceptos de incrementos y diferenciales.**
- **Extender el concepto de diferenciabilidad a funciones de dos variables.**
- **Utilizar una diferencial como aproximación.**

Incrementos y diferenciales

En esta sección se generalizan los conceptos de incrementos y diferenciales a funciones de dos o más variables. Recuérdese que en la sección 3.9, dada $y = f(x)$, se definió la diferencial de y como

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Terminología similar se usa para una función de dos variables, $z = f(x, y)$. Es decir, Δx y Δy son los **incrementos en x y en y**, y el **incremento en z** está dado por

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \qquad \text{Incremento en } z.$$

DEFINICIÓN DE DIFERENCIAL TOTAL

Si $z = f(x, y)$ y Δx y Δy son los incrementos en x y en y, entonces las **diferenciales** de las variables independientes x y y son

$$dx = \Delta x \qquad \text{y} \qquad dy = \Delta y$$

y la **diferencial total** de la variable dependiente z es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy.$$

Esta definición puede extenderse a una función de tres o más variables. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z, u)$, entonces $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, $du = \Delta u$, y la diferencial total de w es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\, dx + \frac{\partial w}{\partial y}\, dy + \frac{\partial w}{\partial z}\, dz + \frac{\partial w}{\partial u}\, du.$$

EJEMPLO 1 Hallar la diferencial total

Hallar la diferencial total de cada función.

a) $z = 2x \operatorname{sen} y - 3x^2y^2$ ***b)*** $w = x^2 + y^2 + z^2$

Solución

a) La diferencial total dz de $z = 2x \operatorname{sen} y - 3x^2y^2$ es

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy && \text{Diferencial total } dz. \\ &= (2 \operatorname{sen} y - 6xy^2)\, dx + (2x \cos y - 6x^2y)\, dy. \end{aligned}$$

b) La diferencial total dw de $w = x^2 + y^2 + z^2$ es

$$\begin{aligned} dw &= \frac{\partial w}{\partial x}\, dx + \frac{\partial w}{\partial y}\, dy + \frac{\partial w}{\partial z}\, dz && \text{Diferencial total } dw. \\ &= 2x\, dx + 2y\, dy + 2z\, dz. \end{aligned}$$

Diferenciabilidad

En la sección 3.9 se vio que si una función dada por $y = f(x)$ es *diferenciable*, se puede utilizar la diferencial $dy = f'(x)\,dx$ como una aproximación (para Δx pequeños) al valor $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Cuando es válida una aproximación similar para una función de dos variables, se dice que la función es **diferenciable**. Esto se expresa explícitamente en la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE DIFERENCIABILIDAD

Una función f dada por $z = f(x, y)$ es **diferenciable** en (x_0, y_0) si Δz puede expresarse en la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. La función f es **diferenciable en una región *R*** si es diferenciable en todo punto de R.

EJEMPLO 2 Mostrar que una función es diferenciable

Mostrar que la función dada por

$$f(x, y) = x^2 + 3y$$

es diferenciable en todo punto del plano.

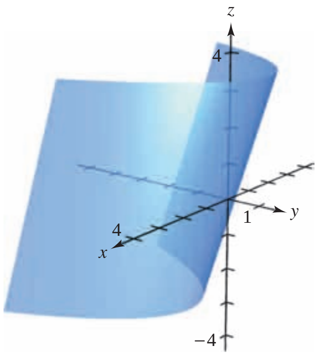


Figura 13.34

Solución Haciendo $z = f(x, y)$, el incremento de z en un punto arbitrario (x, y) en el plano es

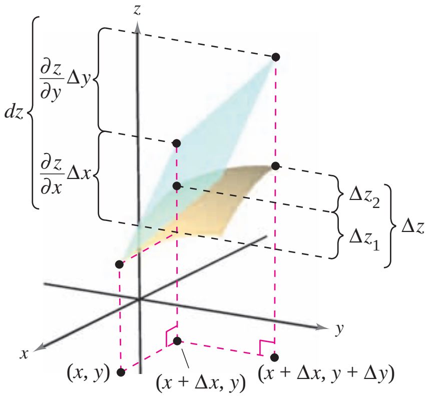
$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) && \text{Incremento de } z.\\ &= (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 3(y + \Delta y) - (x^2 + 3y)\\ &= 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta y\\ &= 2x(\Delta x) + 3(\Delta y) + \Delta x(\Delta x) + 0(\Delta y)\\ &= f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y\end{aligned}$$

donde $\varepsilon_1 = \Delta x$ y $\varepsilon_2 = 0$. Como $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, se sigue que f es diferenciable en todo punto en el plano. La gráfica de f se muestra en la figura 13.34.

Debe tenerse en cuenta que el término "diferenciable" se usa de manera diferente para funciones de dos variables y para funciones de una variable. Una función de una variable es diferenciable en un punto si su derivada existe en el punto. Sin embargo, en el caso de una función de dos variables, la existencia de las derivadas parciales f_x y f_y no garantiza que la función sea diferenciable (ver ejemplo 5). El teorema siguiente proporciona una condición *suficiente* para la diferenciabilidad de una función de dos variables. En el apéndice A se da una demostración del teorema 13.4.

TEOREMA 13.4 CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA DIFERENCIABILIDAD

Si f es una función de x y y, para la que f_x y f_y son continuas en una región abierta R, entonces f es diferenciable en R.



El cambio exacto en z es Δz.
Este cambio puede aproximarse mediante la diferencial dz.
Figura 13.35

Aproximación mediante diferenciales

El teorema 13.4 dice que se puede elegir $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ suficientemente cerca de (x, y) para hacer que $\varepsilon_1\Delta x$ y $\varepsilon_2\Delta y$ sean insignificantes. En otros términos, para Δx y Δy pequeños, se puede usar la aproximación

$$\Delta z \approx dz.$$

Esta aproximación se ilustra gráficamente en la figura 13.35. Hay que recordar que las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ pueden interpretarse como las pendientes de la superficie en las direcciones de x y de y. Esto significa que

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

representa el cambio en altura de un plano tangente a la superficie en el punto $(x, y, f(x, y))$. Como un plano en el espacio se representa mediante una ecuación lineal en las variables x, y y z, la aproximación de Δz mediante dz se llama **aproximación lineal**. Se verá más acerca de esta interpretación geométrica en la sección 13.7.

EJEMPLO 3 Uso de la diferencial como una aproximación

Utilizar la diferencial dz para aproximar el cambio en $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ cuando (x, y) se desplaza del punto (1, 1) al punto (1.01, 0.97). Comparar esta aproximación con el cambio exacto en z.

Solución Se hace $(x, y) = (1, 1)$ y $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (1.01, 0.97)$ y se obtiene $dx = \Delta x = 0.01$ y $dy = \Delta y = -0.03$. Por tanto, el cambio en z puede aproximarse mediante

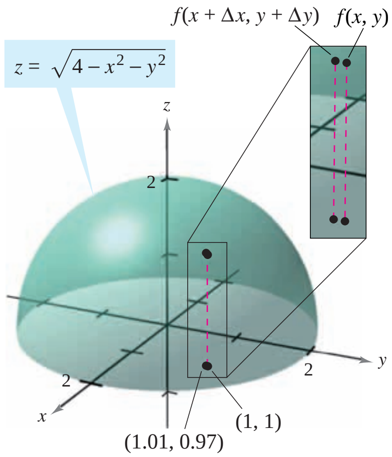
$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\Delta x + \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\Delta y.$$

Cuando $x = 1$ y $y = 1$, se tiene

$$\Delta z \approx -\frac{1}{\sqrt{2}}(0.01) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-0.03) = \frac{0.02}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,(0.01) \approx 0.0141.$$

En la figura 13.36 se puede ver que el cambio exacto corresponde a la diferencia entre las alturas de dos puntos sobre la superficie de un hemisferio. Esta diferencia está dada por

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(1.01, 0.97) - f(1, 1)\\ &= \sqrt{4 - (1.01)^2 - (0.97)^2} - \sqrt{4 - 1^2 - 1^2} \approx 0.0137.\end{aligned}$$



Cuando (x, y) se desplaza de $(1, 1)$ al punto $(1.01, 0.97)$, el valor de $f(x, y)$ cambia aproximadamente en 0.0137
Figura 13.36

Una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ se dice que es **diferenciable** en (x, y, z) si

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

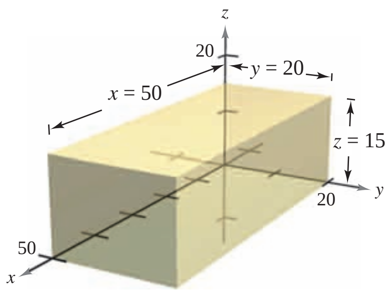
puede expresarse en la forma

$$\Delta w = f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z$$

donde ε_1, ε_2, y $\varepsilon_3 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0, 0, 0)$. Con esta definición de diferenciabilidad, el teorema 13.4 puede extenderse de la siguiente manera a funciones de tres variables: si f es una función de x, y y z, donde f, f_x, f_y y f_z son continuas en una región abierta R, entonces f es diferenciable en R.

En la sección 3.9 se utilizaron las diferenciales para aproximar el error de propagación introducido por un error en la medida. Esta aplicación de las diferenciales se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Análisis de errores



Volumen $= xyz$
Figura 13.37

El error producido al medir cada una de las dimensiones de una caja rectangular es ± 0.1 milímetros. Las dimensiones de la caja son $x = 50$ centímetros, $y = 20$ centímetros y $z = 15$ centímetros, como se muestra en la figura 13.37. Utilizar dV para estimar el error propagado y el error relativo en el volumen calculado de la caja.

Solución El volumen de la caja está dado por $V = xyz$, y por tanto

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz \\ &= yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz. \end{aligned}$$

Utilizando 0.1 milímetros $=$ 0.01 centímetros, se tiene $dx = dy = dz = \pm 0.01$, y el error propagado es aproximadamente

$$\begin{aligned} dV &= (20)(15)(\pm 0.01) + (50)(15)(\pm 0.01) + (50)(20)(\pm 0.01) \\ &= 300(\pm 0.01) + 750(\pm 0.01) + 1\,000(\pm 0.01) \\ &= 2\,050(\pm 0.01) = \pm 20.5 \text{ centímetros cúbicos.} \end{aligned}$$

Como el volumen medido es

$$V = (50)(20)(15) = 15\,000 \text{ centímetros cúbicos,}$$

el error relativo, $\Delta V/V$, es aproximadamente

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{20.5}{15\,000} \approx 0.14\%.$$

Como ocurre con una función de una sola variable, si una función de dos o más variables es diferenciable en un punto, también es continua en él.

TEOREMA 13.5 DIFERENCIABILIDAD IMPLICA CONTINUIDAD

Si una función de x y y es diferenciable en (x_0, y_0), entonces es continua en (x_0, y_0).

DEMOSTRACIÓN Sea f diferenciable en (x_0, y_0), donde $z = f(x, y)$. Entonces

$$\Delta z = [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\,\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\,\Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Sin embargo, por definición, se sabe que Δz está dada por

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Haciendo $x = x_0 + \Delta x$ y $y = y_0 + \Delta y$ se obtiene

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\,\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\,\Delta y \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2](y - y_0). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$, se obtiene

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

lo cual significa que f es continua en (x_0, y_0).

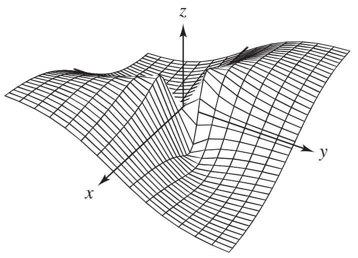
Hay que recordar que la existencia de f_x y f_y no es suficiente para garantizar la diferenciabilidad, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Una función que no es diferenciable

Mostrar que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero f no es diferenciable en $(0, 0)$, donde f está definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-3xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

TECNOLOGÍA Utilizar una herramienta de graficación para representar la función del ejemplo 5. La gráfica mostrada abajo fue generada con *Mathematica*.



Generada con Mathematica

Solución Para mostrar que f no es diferenciable en $(0, 0)$ basta mostrar que no es continua en este punto. Para ver que f no es continua en $(0, 0)$, se observan los valores de $f(x, y)$ a lo largo de dos trayectorias diferentes que se aproximan a $(0, 0)$, como se muestra en la figura 13.38. A lo largo de la recta $y = x$, el límite es

$$\lim_{(x, x)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, x)\to(0, 0)} \frac{-3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2}$$

mientras que a lo largo de $y = -x$ se tiene

$$\lim_{(x, -x)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, -x)\to(0, 0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

Así, el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ no existe, y se puede concluir que f no es continua en $(0, 0)$. Por tanto, de acuerdo con el teorema 13.5, f no es diferenciable en $(0, 0)$. Por otro lado, de acuerdo con la definición de las derivadas parciales f_x y f_y, se tiene

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

y

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

Por tanto, las derivadas parciales en $(0, 0)$ existen.

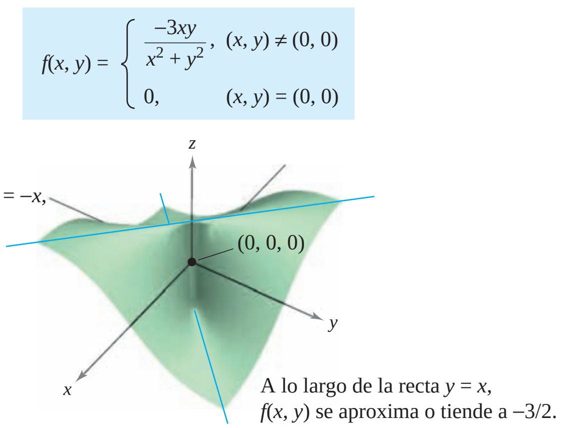


Figura 13.38

13.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, hallar la diferencial total.

1. $z = 2x^2y^3$
2. $z = \dfrac{x^2}{y}$
3. $z = \dfrac{-1}{x^2 + y^2}$
4. $w = \dfrac{x + y}{z - 3y}$
5. $z = x \cos y - y \cos x$
6. $z = \frac{1}{2}(e^{x^2+y^2} - e^{-x^2-y^2})$
7. $z = e^x \operatorname{sen} y$
8. $w = e^y \cos x + z^2$
9. $w = 2z^3y \operatorname{sen} x$
10. $w = x^2yz^2 + \operatorname{sen} yz$

En los ejercicios 11 a 16, *a*) evaluar $f(2, 1)$ y $f(2.1, 1.05)$ y calcular Δz, y *b*) usar el diferencial total dz para aproximar Δz.

11. $f(x, y) = 2x - 3y$
12. $f(x, y) = x^2 + y^2$
13. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$
14. $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$
15. $f(x, y) = ye^x$
16. $f(x, y) = x \cos y$

En los ejercicios 17 a 20, hallar $z = f(x, y)$ y utilizar la diferencial total para aproximar la cantidad.

17. $(2.01)^2(9.02) - 2^2 \cdot 9$
18. $\sqrt{(5.05)^2 + (3.1)^2} - \sqrt{5^2 + 3^2}$
19. $\dfrac{1 - (3.05)^2}{(5.95)^2} - \dfrac{1 - 3^2}{6^2}$
20. $\operatorname{sen}[(1.05)^2 + (0.95)^2] - \operatorname{sen}(1^2 + 1^2)$

Desarrollo de conceptos

21. Definir la diferencial total de una función de dos variables.
22. Describir el cambio en la exactitud de dz como aproximación a Δz cuando Δx y Δy aumentan.
23. ¿Qué se quiere decir con una aproximación lineal a $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0)$?
24. Cuando se usan diferenciales, ¿qué significan los términos de *propagación* y *error relativo*?

25. ***Área*** El área del rectángulo sombreada en la figura es $A = lh$. Los posibles errores en la longitud y la altura son Δl y Δh, respectivamente. Hallar dA e identificar las regiones de la figura cuyas áreas están dadas por los términos de dA. ¿Qué región representa la diferencia entre ΔA y dA?

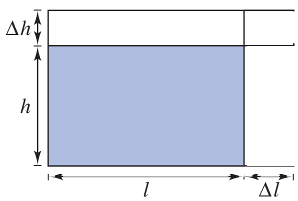


Figura para 25

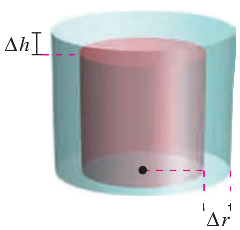


Figura para 26

26. ***Volumen*** El volumen del cilindro circular recto de color rojo en la figura es $V = \pi r^2 h$. Los posibles errores son Δr y Δh, en el radio y en la altura, respectivamente. Hallar dV e identificar los sólidos de la figura cuyos volúmenes están dados por los términos de dV. ¿Qué sólido representa la diferencia entre ΔV y dV?

27. ***Análisis numérico*** Se construye un cono circular recto de altura $h = 8$ y radio $r = 4$ y durante la medición se cometieron errores en el radio Δr y en la altura Δh. Completar la tabla para mostrar la relación entre ΔV y dV para los errores indicados.

Δr	Δh	dV o dS	ΔV o ΔS	$\Delta V - dV$ o $\Delta S - dS$
0.1	0.1			
0.1	−0.1			
0.001	0.002			
−0.0001	0.0002			

28. ***Análisis numérico*** La altura y radio de un cono circular recto midieron $h = 16$ metros y $r = 6$ metros. En la medición, se cometieron errores Δr y Δh. S es el área de la superficie lateral de un cono. Completar la tabla anterior para mostrar la relación entre ΔS y dS para los errores indicados.

29. ***Modelo matemático*** Los consumos per cápita (en galones) de diferentes tipos de leche en Estados Unidos de 1999 a 2005 se muestran en la tabla. El consumo de leche light y descremada, leche baja en grasas y leche entera se representa por las variables x, y y z, respectivamente. *(Fuente: U.S. Department of Agriculture)*

Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
x	1.4	1.4	1.4	1.6	1.6	1.7	1.7
y	7.3	7.1	7.0	7.0	6.9	6.9	6.9
z	6.2	6.1	5.9	5.8	5.6	5.5	5.6

Un modelo para los datos está dado por $z = -0.92x + 1.03y + 0.02$.

a) Hallar la diferencial total del modelo.

b) Se prevé en la industria lechera que en años futuros el consumo per cápita de leche light y descremada será de 1.9 ± 0.25 galones y que el consumo per cápita de leche baja en grasas será 7.5 ± 0.25 galones. Utilizar dz para estimar los máximos errores de propagación y relativo en el pronóstico de consumo de leche entera.

30. ***Coordenadas rectangulares a polares*** Un sistema de coordenadas rectangular se coloca sobre un mapa y las coordenadas de un punto de interés son (7.2, 2.5). Existe un posible error de 0.05 en cada coordenada. Aproximar el máximo error posible al medir las coordenadas polares del punto.

31. ***Volumen*** El radio r y la altura h de un cilindro circular recto se miden con posibles errores de 4 y 2%, respectivamente. Aproximar el máximo error porcentual posible al medir el volumen.

32. ***Área*** En un triángulo, dos lados adyacentes miden 3 y 4 pulgadas de longitud, y entre ellos forman un ángulo de $\pi/4$. Los posibles errores de medición son $\frac{1}{16}$ pulgadas en los lados y 0.02 radianes en el ángulo. Aproximar el máximo error posible al calcular el área.

33. ***Viento*** La fórmula para la frialdad producida por el viento C (en grados Fahrenheit) es

$$C = 35.74 + 0.6215T - 35.75v^{0.16} + 0.4275Tv^{0.16}$$

donde v es la velocidad del viento en millas por hora y T es la temperatura en grados Fahrenheit. La velocidad del viento es 23 ± 3 millas por hora y la temperatura es $8° \pm 1°$. Utilizar dC para estimar el posible error propagado y el error relativo máximos al calcular la frialdad producida por el viento. *(Fuente: National Oceanic and Atmospheric Administration)*

34. ***Aceleración*** La aceleración centrípeta de una partícula que se mueve en un círculo es $a = v^2/r$, donde v es la velocidad y r es el radio del círculo. Aproximar el error porcentual máximo al medir la aceleración debida a errores de 3% en v y 2% en r.

35. ***Volumen*** Un abrevadero tiene 16 pies de largo (ver la figura). Sus secciones transversales son triángulos isósceles en los que los dos lados iguales miden 18 pulgadas. El ángulo entre los dos lados iguales es θ.

a) Expresar el volumen del abrevadero en función de θ y determinar el valor de θ para el que el volumen es máximo.

b) El error máximo en las mediciones lineales es de media pulgada y el error máximo en la medida del ángulo es 2°. Aproximar el cambio a partir del volumen máximo.

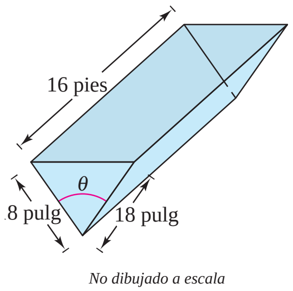


Figura para 35

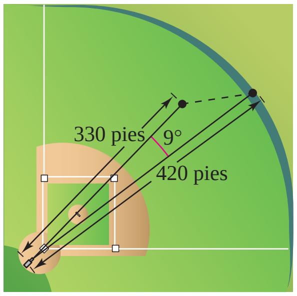


Figura para 36

36. ***Deportes*** Un jugador de béisbol en el jardín central se encuentra aproximadamente a 330 pies de una cámara de televisión que está en la base. Un bateador golpea una pelota que sale hacia una valla situada a una distancia de 420 pies de la cámara (ver la figura).

a) La cámara gira 9° para seguir la carrera. Aproximar el número de pies que el jugador central tiene que correr para atrapar la pelota.

b) La posición del jugador central podría tener un error hasta de 6 pies y el error máximo al medir la rotación de la cámara de 1°. Aproximar el máximo error posible en el resultado del inciso *a*).

37. ***Potencia*** La potencia eléctrica P está dada por $P = E^2/R$, donde E es el voltaje y R es la resistencia. Aproximar el máximo error porcentual al calcular la potencia si se aplican 120 volts a una resistencia de 2 000 ohms y los posibles errores porcentuales al medir E y R son 3 y 4%, respectivamente.

38. ***Resistencia*** La resistencia total R de dos resistencias conectadas en paralelo es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Aproximar el cambio en R cuando R_1 incrementa de 10 ohms a 10.5 ohms y R_2 decrece de 15 ohms a 13 ohms.

39. ***Inductancia*** La inductancia L (en microhenrys) de un hilo recto no magnético en el vacío es

$$L = 0.00021\left(\ln \frac{2h}{r} - 0.75\right)$$

donde h es la longitud del hilo en milímetros y r es el radio de una sección transversal circular. Aproximar L cuando $r = 2 \pm \frac{1}{16}$ milímetros y $h = 100 \pm \frac{1}{100}$ milímetros.

40. ***Péndulo*** El periodo T de un péndulo de longitud L es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Un péndulo se lleva de la zona del canal, donde $g = 32.09$ pies/s^2, a Groenlandia, donde $g = 32.23$ pies/s^2. Debido al cambio en la temperatura, la longitud del péndulo cambia de 2.5 pies a 2.48 pies. Aproximar el cambio en el periodo del péndulo.

En los ejercicios 41 a 44, mostrar que la función es diferenciable, hallando los valores de ε_1 y ε_2 que se dan en la definición de diferenciabilidad y verificar que ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

41. $f(x, y) = x^2 - 2x + y$

42. $f(x, y) = x^2 + y^2$

43. $f(x, y) = x^2y$

44. $f(x, y) = 5x - 10y + y^3$

En los ejercicios 45 y 46, utilizar la función para demostrar que *a*) $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, y *b*) f no es diferenciable en (0, 0).

45. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

46. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^3 + y^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

47. Mostrar que si $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0), entonces $f(x, y_0)$ es diferenciable en $x = x_0$. Usar este resultado para probar que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no es diferenciable en (0, 0).

Para discusión

48. Considerar la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Evaluar $f(3, 1)$ y $f(3.05, 1.1)$.

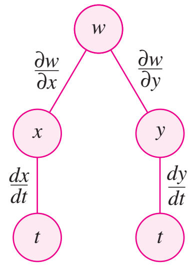
b) Usar los resultados del inciso *a*) para calcular Δz.

c) Usar la diferencial total dz para aproximar Δz. Comparar los resultados con los del inciso *b*).

13.5 Regla de la cadena para funciones de varias variables

- **Utilizar la regla de la cadena para funciones de varias variables.**
- **Hallar las derivadas parciales implícitamente.**

Regla de la cadena para funciones de varias variables



Regla de la cadena: una variable dependiente w, es función de x y y las que a su vez son funciones de t. Este diagrama representa la derivada de w con respecto a t
Figura 13.39

El trabajo con diferenciales de la sección anterior proporciona las bases para la extensión de la regla de la cadena a funciones de dos variables. Hay dos casos: el primer caso cuando w es una función de x y y, donde x y y son funciones de una sola variable independiente t. (La demostración de este teorema se da en el apéndice A.)

TEOREMA 13.6 REGLA DE LA CADENA: UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función derivable de x y y. Si $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde g y h son funciones derivables de t, entonces w es una función diferenciable de t, y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ver figura 13.39.

EJEMPLO 1 Regla de la cadena con una variable independiente

Sea $w = x^2y - y^2$, donde $x = \text{sen } t$ y $y = e^t$. Hallar dw/dt cuando $t = 0$.

Solución De acuerdo con la regla de la cadena para una variable independiente, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= 2xy(\cos t) + (x^2 - 2y)e^t\\ &= 2(\text{sen } t)(e^t)(\cos t) + (\text{sen}^2 t - 2e^t)e^t\\ &= 2e^t \text{ sen } t \cos t + e^t \text{ sen}^2 t - 2e^{2t}.\end{aligned}$$

Cuando $t = 0$, se sigue que

$$\frac{dw}{dt} = -2.$$

La regla de la cadena presentada en esta sección proporciona técnicas alternativas para resolver muchos problemas del cálculo de una sola variable. Así, en el ejemplo 1, se podrían haber usado técnicas para una sola variable para encontrar dw/dt expresando primero w como función de t,

$$\begin{aligned}w &= x^2y - y^2\\ &= (\text{sen } t)^2(e^t) - (e^t)^2\\ &= e^t \text{ sen}^2 t - e^{2t}\end{aligned}$$

y derivando después como de costumbre.

$$\frac{dw}{dt} = 2e^t \text{ sen } t \cos t + e^t \text{ sen}^2 t - 2e^{2t}$$

La regla de la cadena en el teorema 13.6 puede extenderse a cualquier número de variables. Por ejemplo, si cada x_i es una función derivable de una sola variable t, entonces para

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se tiene

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

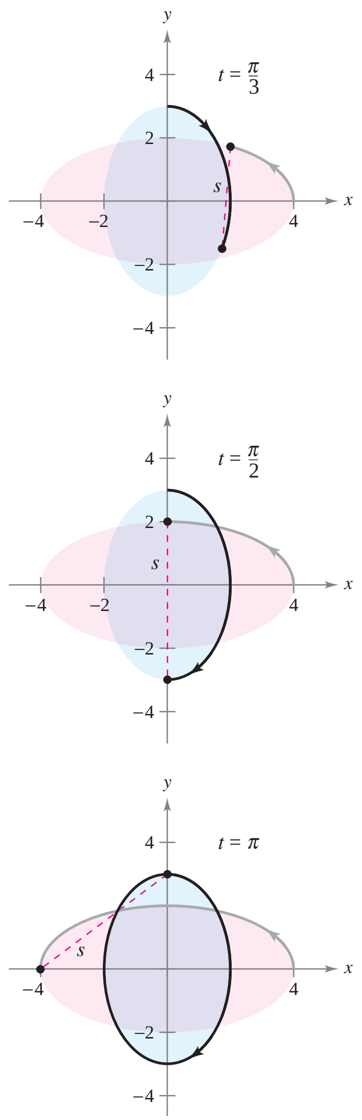
EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de la cadena a velocidades o ritmos de cambio relacionados

Dos objetos recorren trayectorias elípticas dadas por las ecuaciones paramétricas siguientes.

$x_1 = 4\cos t$ y $y_1 = 2\,\mathrm{sen}\,t$ Primer objeto.

$x_2 = 2\,\mathrm{sen}\,2t$ y $y_2 = 3\cos 2t$ Segundo objeto.

¿A qué velocidad o ritmo cambia la distancia entre los dos objetos cuando $t = \pi$?



Trayectorias de dos objetos que recorren órbitas elípticas
Figura 13.40

Solución En la figura 13.40 se puede ver que la distancia s entre los dos objetos está dada por

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

y que cuando $t = \pi$, se tiene $x_1 = -4$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 3$ y

$$s = \sqrt{(0+4)^2 + (3-0)^2} = 5.$$

Cuando $t = \pi$, las derivadas parciales de s son las siguientes.

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(0+4) = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(3-0) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(0+4) = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_2} = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(3-0) = \frac{3}{5}$$

Cuando $t = \pi$, las derivadas de x_1, y_1, x_2 y y_2 son

$$\frac{dx_1}{dt} = -4\,\mathrm{sen}\,t = 0 \qquad \frac{dy_1}{dt} = 2\cos t = -2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4\cos 2t = 4 \qquad \frac{dy_2}{dt} = -6\,\mathrm{sen}\,2t = 0.$$

Por tanto, usando la regla de la cadena apropiada, se sabe que la distancia cambia a una velocidad o ritmo

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{\partial s}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dt}\\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)(0) + \left(-\frac{3}{5}\right)(-2) + \left(\frac{4}{5}\right)(4) + \left(\frac{3}{5}\right)(0)\\ &= \frac{22}{5}.\end{aligned}$$

En el ejemplo 2, obsérvese que s es función de cuatro variables *intermedias*, x_1, y_1, x_2 y y_2, cada una de las cuales es a su vez función de una sola variable t. Otro tipo de función compuesta es aquella en la que las variables intermedias son, a su vez, funciones de más de una variable. Por ejemplo, si $w = f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$, se sigue que w es función de s y t, y se pueden considerar las derivadas parciales de w con respecto a s y t. Una manera de encontrar estas derivadas parciales es expresar w explícitamente como función de s y t sustituyendo las ecuaciones $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ en la ecuación $w = f(x, y)$. Así se pueden encontrar las derivadas parciales de la manera usual, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Hallar derivadas parciales por sustitución

Hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ para $w = 2xy$, donde $x = s^2 + t^2$ y $y = s/t$.

Solución Se comienza por sustituir $x = s^2 + t^2$ y $y = s/t$ en la ecuación $w = 2xy$ para obtener

$$w = 2xy = 2(s^2 + t^2)\left(\frac{s}{t}\right) = 2\left(\frac{s^3}{t} + st\right).$$

Después, para encontrar $\partial w/\partial s$, se mantiene t constante y se deriva con respecto a s.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= 2\left(\frac{3s^2}{t} + t\right)\\ &= \frac{6s^2 + 2t^2}{t}\end{aligned}$$

De manera similar, para hallar $\partial w/\partial t$, se mantiene s constante y se deriva con respecto a t para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= 2\left(-\frac{s^3}{t^2} + s\right)\\ &= 2\left(\frac{-s^3 + st^2}{t^2}\right)\\ &= \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}.\end{aligned}$$

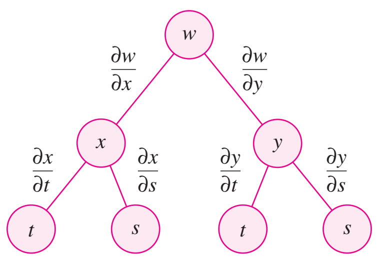
El teorema 13.7 proporciona un método alternativo para hallar las derivadas parciales del ejemplo 3, sin expresar w explícitamente como función de s y t.

TEOREMA 13.7 REGLA DE LA CADENA: DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable de x y y. Si $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son tales que las derivadas parciales de primer orden $\partial x/\partial s$, $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial s$ y $\partial y/\partial t$ existen, entonces $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ existen y están dadas por

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

DEMOSTRACIÓN Para obtener $\partial w/\partial s$, se mantiene constante t y se aplica el teorema 13.6 para obtener el resultado deseado. De manera similar, para obtener $\partial w/\partial t$ se mantiene constante s y se aplica el teorema 13.6.



La regla de la cadena: dos variables independientes
Figura 13.41

NOTA La regla de la cadena en este teorema se muestra esquemáticamente en la figura 13.41. ■

EJEMPLO 4 Regla de la cadena con dos variables independientes

Utilizar la regla de la cadena para encontrar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$, dada

$$w = 2xy$$

donde $x = s^2 + t^2$ y $y = s/t$.

Solución Nótese que estas mismas derivadas parciales fueron calculadas en el ejemplo 3. Esta vez, usando el teorema 13.7, se puede mantener constante t y derivar con respecto a s para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= 2y(2s) + 2x\left(\frac{1}{t}\right)\\ &= 2\left(\frac{s}{t}\right)(2s) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{1}{t}\right) && \text{Sustituir } y \text{ por } (s/t) \text{ y } x \text{ por } s^2 + t^2.\\ &= \frac{4s^2}{t} + \frac{2s^2 + 2t^2}{t}\\ &= \frac{6s^2 + 2t^2}{t}.\end{aligned}$$

De manera similar, manteniendo s constante se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= 2y(2t) + 2x\left(\frac{-s}{t^2}\right)\\ &= 2\left(\frac{s}{t}\right)(2t) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{-s}{t^2}\right) && \text{Sustituir } y \text{ por } (s/t) \text{ y } x \text{ por } s^2 + t^2.\\ &= 4s - \frac{2s^3 + 2st^2}{t^2}\\ &= \frac{4st^2 - 2s^3 - 2st^2}{t^2}\\ &= \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}.\end{aligned}$$

La regla de la cadena del teorema 13.7 también puede extenderse a cualquier número de variables. Por ejemplo, si w es una función diferenciable de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde cada x_i es una función diferenciable de m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$, entonces para

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t_1} &= \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}\\ \frac{\partial w}{\partial t_2} &= \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2}\\ &\vdots\\ \frac{\partial w}{\partial t_m} &= \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Regla de la cadena para una función de tres variables

Hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ si $s = 1$ y $t = 2\pi$, dada la función

$$w = xy + yz + xz$$

donde $x = s\cos t$, $y = s \operatorname{sen} t$ y $z = t$.

Solución Por extensión del teorema 13.7, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\\ &= (y + z)(\cos t) + (x + z)(\operatorname{sen} t) + (y + x)(0)\\ &= (y + z)(\cos t) + (x + z)(\operatorname{sen} t).\end{aligned}$$

Cuando $s = 1$ y $t = 2\pi$, se tiene $x = 1$, $y = 0$ y $z = 2\pi$. Así, $\partial w/\partial s = (0 + 2\pi)(1) + (1 + 2\pi)(0) = 2\pi$. Y

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\\ &= (y + z)(-s \operatorname{sen} t) + (x + z)(s\cos t) + (y + x)(1)\end{aligned}$$

y si $s = 1$ y $t = 2\pi$, se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= (0 + 2\pi)(0) + (1 + 2\pi)(1) + (0 + 1)(1)\\ &= 2 + 2\pi.\end{aligned}$$

Derivación o diferenciación parcial implícita

Esta sección concluye con una aplicación de la regla de la cadena para determinar la derivada de una función definida *implícitamente*. Supóngase que x y y están relacionadas por la ecuación $F(x, y) = 0$, donde se supone que $y = f(x)$ es función derivable de x. Para hallar dy/dx, se podría recurrir a las técnicas vistas de la sección 2.5. Sin embargo, se verá que la regla de la cadena proporciona una útil alternativa. Si se considera la función dada por

$$w = F(x, y) = F(x, f(x))$$

se puede aplicar el teorema 13.6 para obtener

$$\frac{dw}{dx} = F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx}.$$

Como $w = F(x, y) = 0$ para toda x en el dominio de f, se sabe que $dw/dx = 0$ y se tiene

$$F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Ahora, si $F_y(x, y) \neq 0$, se puede usar el hecho de que $dx/dx = 1$ para concluir que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Un procedimiento similar puede usarse para encontrar las derivadas parciales de funciones de varias variables definidas implícitamente.

TEOREMA 13.8 REGLA DE LA CADENA: DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como función derivable de x, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \qquad F_y(x, y) \neq 0.$$

Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z implícitamente como función diferenciable de x y y, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0.$$

Este teorema puede extenderse a funciones diferenciables definidas implícitamente de cualquier número de variables.

EJEMPLO 6 Hallar una derivada implícitamente

Hallar dy/dx, dada la ecuación $y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$.

Solución Se comienza por definir una función F

$$F(x, y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4.$$

Después, usando el teorema 13.8, se tiene

$$F_x(x, y) = -2x \quad \text{y} \quad F_y(x, y) = 3y^2 + 2y - 5$$

por lo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = \frac{-(-2x)}{3y^2 + 2y - 5} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}.$$

NOTA Comparar la solución del ejemplo 6 con la solución del ejemplo 2 en la sección 2.5.

EJEMPLO 7 Hallar derivadas parciales implícitamente

Encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, dada la ecuación $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$.

Solución Para aplicar el teorema 13.8, sea

$$F(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5.$$

Entonces

$$F_x(x, y, z) = 6xz - 2xy^2$$
$$F_y(x, y, z) = -2x^2y + 3z$$
$$F_z(x, y, z) = 3x^2 + 6z^2 + 3y$$

con lo que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2xy^2 - 6xz}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2x^2y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}.$$

13.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, hallar dw/dt utilizando la regla de la cadena apropiada.

1. $w = x^2 + y^2$
   $x = 2t, \quad y = 3t$
2. $w = \sqrt{x^2 + y^2}$
   $x = \cos t, \quad y = e^t$
3. $w = x \operatorname{sen} y$
   $x = e^t, \quad y = \pi - t$
4. $w = \ln \dfrac{y}{x}$
   $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t$

En los ejercicios 5 a 10, hallar dw/dt *a*) utilizando la regla de la cadena apropiada y *b*) convirtiendo w en función de t antes de derivar.

5. $w = xy, \quad x = e^t, \quad y = e^{-2t}$
6. $w = \cos(x - y), \quad x = t^2, \quad y = 1$
7. $w = x^2 + y^2 + z^2, \quad x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = e^t$
8. $w = xy \cos z, \quad x = t, \quad y = t^2, \quad z = \arccos t$
9. $w = xy + xz + yz, \quad x = t - 1, \quad y = t^2 - 1, \quad z = t$
10. $w = xy^2 + x^2z + yz^2, \quad x = t^2, \quad y = 2t, \quad z = 2$

Movimiento de un proyectil **En los ejercicios 11 y 12 se dan las ecuaciones paramétricas de las trayectorias de dos proyectiles. ¿A qué velocidad o ritmo cambia la distancia entre los dos objetos en el valor de t dado?**

11. $x_1 = 10 \cos 2t, \; y_1 = 6 \operatorname{sen} 2t$ Primer objeto.
    $x_2 = 7 \cos t, \; y_2 = 4 \operatorname{sen} t$ Segundo objeto.
    $t = \pi/2$
12. $x_1 = 48\sqrt{2}\,t, \; y_1 = 48\sqrt{2}\,t - 16t^2$ Primer objeto.
    $x_2 = 48\sqrt{3}\,t, \; y_2 = 48t - 16t^2$ Segundo objeto.
    $t = 1$

En los ejercicios 13 y 14, hallar d^2w/dt^2 utilizando la regla de la cadena apropiada. Evaluar d^2w/dt^2 en el valor de t dado.

13. $w = \ln(x + y), \quad x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad t = 0$
14. $w = \dfrac{x^2}{y}, \quad x = t^2, \quad y = t + 1, \quad t = 1$

En los ejercicios 15 a 18, hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ utilizando la regla de la cadena apropiada y evaluar cada derivada parcial en los valores de s y t dados.

	Función	*Punto*
15.	$w = x^2 + y^2$ $x = s + t, \quad y = s - t$	$s = 1, \quad t = 0$
16.	$w = y^3 - 3x^2y$ $x = e^s, \quad y = e^t$	$s = -1, \quad t = 2$
17.	$w = \operatorname{sen}(2x + 3y)$ $x = s + t, \quad y = s - t$	$s = 0, \quad t = \dfrac{\pi}{2}$
18.	$w = x^2 - y^2$ $x = s \cos t, \quad y = s \operatorname{sen} t$	$s = 3, \quad t = \dfrac{\pi}{4}$

En los ejercicios 19 a 22, hallar $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial \theta$ *a*) utilizando la regla de la cadena apropiada y *b*) convirtiendo w en una función de r y θ antes de derivar

19. $w = \dfrac{yz}{x}, \quad x = \theta^2, \quad y = r + \theta, \quad z = r - \theta$
20. $w = x^2 - 2xy + y^2, \quad x = r + \theta, \quad y = r - \theta$
21. $w = \arctan \dfrac{y}{x}, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta$
22. $w = \sqrt{25 - 5x^2 - 5y^2}, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta$

En los ejercicios 23 a 26, hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ utilizando la regla de la cadena apropiada.

23. $w = xyz, \quad x = s + t, \quad y = s - t, \quad z = st^2$
24. $w = x^2 + y^2 + z^2, \quad x = t \operatorname{sen} s, \quad y = t \cos s, \quad z = st^2$
25. $w = ze^{xy}, \quad x = s - t, \quad y = s + t, \quad z = st$
26. $w = x \cos yz, \quad x = s^2, \quad y = t^2, \quad z = s - 2t$

En los ejercicios 27 a 30, hallar dy/dx por derivación implícita.

27. $x^2 - xy + y^2 - x + y = 0$
28. $\sec xy + \tan xy + 5 = 0$
29. $\ln\sqrt{x^2 + y^2} + x + y = 4$
30. $\dfrac{x}{x^2 + y^2} - y^2 = 6$

En los ejercicios 31 a 38, hallar las primeras derivadas parciales de z por derivación implícita.

31. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
32. $xz + yz + xy = 0$
33. $x^2 + 2yz + z^2 = 1$
34. $x + \operatorname{sen}(y + z) = 0$
35. $\tan(x + y) + \tan(y + z) = 1$
36. $z = e^x \operatorname{sen}(y + z)$
37. $e^{xz} + xy = 0$
38. $x \ln y + y^2z + z^2 = 8$

En los ejercicios 39 a 42, hallar las primeras derivadas parciales de w por derivación implícita.

39. $xy + yz - wz + wx = 5$
40. $x^2 + y^2 + z^2 - 5yw + 10w^2 = 2$
41. $\cos xy + \operatorname{sen} yz + wz = 20$
42. $w - \sqrt{x - y} - \sqrt{y - z} = 0$

Funciones homogéneas **Una función f es *homogénea de grado* n si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. En los ejercicios 43 a 46, *a*) mostrar que la función es homogénea y determinar n, y *b*) mostrar que $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$.**

43. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
44. $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$
45. $f(x, y) = e^{x/y}$
46. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

47. Sean $w = f(x, y)$, $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde f, g y h son diferenciables. Usar la regla de la cadena apropiada para encontrar dw/dt cuando $t = 2$ dada la siguiente tabla de valores.

$g(2)$	$h(2)$	$g'(2)$	$h'(2)$	$f_x(4, 3)$	$f_y(4, 3)$
4	3	-1	6	-5	7

48. Sean $w = f(x, y)$, $x = g(s, t)$ y $y = h(t)$, donde f, g y h son diferenciables. Usar la regla de la cadena apropiada para encontrar $w_s(1, 2)$ y $w_t(1, 2)$ dada la siguiente tabla de valores.

$g(1, 2)$	$h(1, 2)$	$g_s(1, 2)$	$h_s(1, 2)$
4	3	-3	5

$g_t(1, 2)$	$h_t(1, 2)$	$f_x(4, 3)$	$f_y(4, 3)$
-2	8	-5	7

Desarrollo de conceptos

49. Sea $w = f(x, y)$ una función donde x y y son funciones de una sola variable t. Dar la regla de la cadena para hallar dw/dt.

50. Sea $w = f(x, y)$ una función donde x y y son funciones de dos variables s y t. Dar la regla de la cadena para hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$.

51. Si $f(x, y) = 0$, dar la regla para hallar dy/dx implícitamente. Si $f(x, y, z) = 0$, dar la regla para hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ implícitamente.

Para discusión

52. Considerar la función $f(x, y, z) = xyz$, donde $x = t^2$, $y = 2t$, $z = e^{-t}$.

a) Usar la regla de la cadena apropiada para encontrar df/dt.

b) Escribir f como una función de t y entonces encontrar df/dt. Explicar por qué este resultado es el mismo que el del inciso *a*).

53. ***Volumen y área superficial*** El radio de un cilindro circular recto se incrementa a razón de 6 pulgadas por minuto, y la altura decrece a razón de 4 pulgadas por minuto. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen y del área superficial cuando el radio es 12 pulgadas y la altura 36 pulgadas?

54. ***Volumen y área superficial*** Repetir el ejercicio 53 con un cono circular.

55. ***Ley de los gases ideales*** Según la ley de los gases ideales $pV = mRT$, donde R es una constante, m es una masa constante y p y V son funciones del tiempo. Hallar dT/dt, la velocidad o el ritmo de cambio de la temperatura con respecto al tiempo.

56. ***Área*** Sea θ el ángulo entre los lados iguales de un triángulo isósceles y sea x la longitud de estos lados. Si x se incrementa a razón de $\frac{1}{2}$ metro por hora y θ se incrementa a razón de $\pi/90$ radianes por hora, hallar la tasa de incremento del área cuando $x = 6$ y $\theta = \pi/4$.

57. ***Momento de inercia*** Un cilindro anular tiene un radio interior de r_1 y un radio exterior de r_2 (ver la figura). Su momento de inercia es $I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$ donde m es la masa. Los dos radios se incrementan a razón de 2 centímetros por segundo. Hallar la velocidad al que varía I en el instante en que los radios son 6 y 8 centímetros. (Suponer que la masa es constante.)

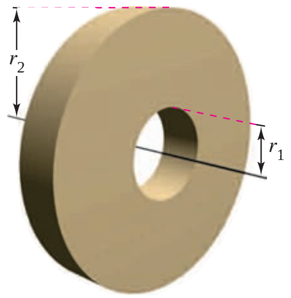


Figura para 57

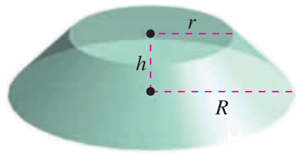


Figura para 58

58. ***Volumen y área superficial*** Los dos radios del tronco de un cono circular recto se incrementan a razón de 4 centímetros por minuto y la altura se incrementa a razón de 12 centímetros por minuto (ver la figura). Hallar a qué velocidad cambian el volumen y el área superficial cuando los radios son 15 y 25 centímetros, respectivamente, y la altura es de 10 centímetros.

59. Mostrar que $(\partial w/\partial u) + (\partial w/\partial v) = 0$ para $w = f(x, y)$, $x = u - v$ y $y = v - u$.

60. Verificar el resultado del ejercicio 59 con

$$w = (x - y)\operatorname{sen}(y - x).$$

61. Considerar la función $w = f(x, y)$, en la que $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$. Demostrar:

a) $$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

b) $$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

62. Verificar el resultado del ejercicio 61*b* con $w = \arctan(y/x)$.

63. ***Ecuaciones de Cauchy-Riemann*** Dadas las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$, verificar que las **ecuaciones diferenciales Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

pueden escribirse en coordenadas polares como

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

64. Verificar el resultado del ejercicio 63 con las funciones

$$u = \ln\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad v = \arctan\frac{y}{x}.$$

65. Demostrar que si $f(x, y)$ es homogénea de grado n, entonces

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y).$$

[*Sugerencia:* Sea $g(t) = f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Hallar $g'(t)$ y después hacer $t = 1$.]

13.6 Derivadas direccionales y gradientes

- **Hallar y usar las derivadas direccionales de una función de dos variables.**
- **Hallar el gradiente de una función de dos variables.**
- **Utilizar el gradiente de una función de dos variables en aplicaciones.**
- **Hallar las derivadas direccionales y el gradiente de funciones de tres variables.**

Derivada direccional

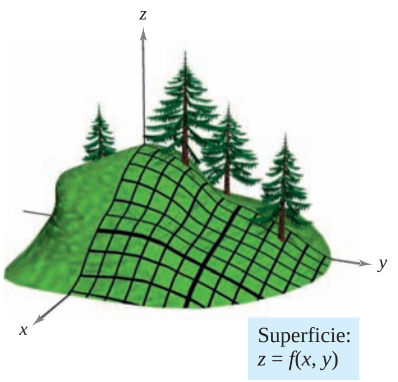


Figura 13.42

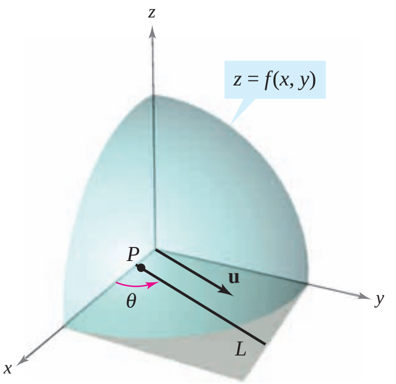


Figura 13.43

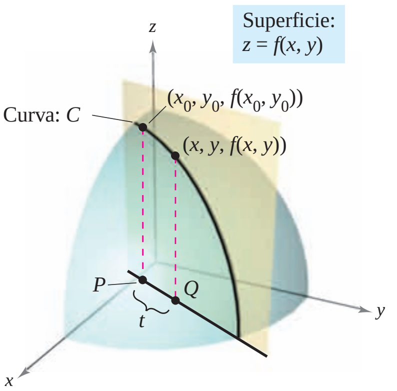


Figura 13.44

Suponer que se está en la colina de la figura 13.42 y se quiere determinar la inclinación de la colina respecto al eje z. Si la colina está representada por $z = f(x, y)$, se sabe cómo determinar la pendiente en dos direcciones diferentes: la pendiente en la dirección de y está dada por la derivada parcial $f_y(x, y)$, y la pendiente en la dirección de x está dada por la derivada parcial $f_x(x, y)$. En esta sección se verá que estas dos derivadas parciales pueden usarse para calcular la pendiente en *cualquier* dirección.

Para determinar la pendiente en un punto de una superficie, se definirá un nuevo tipo de derivada llamada **derivada direccional**. Sea $z = f(x, y)$ una *superficie* y $P(x_0, y_0)$ un *punto* en el dominio de f, como se muestra en la figura 13.43. La "dirección" de la derivada direccional está dada por un vector unitario

$$\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

donde θ es el ángulo que forma el vector con el eje x positivo. Para hallar la pendiente deseada, se reduce el problema a dos dimensiones cortando la superficie con un plano vertical que pasa por el punto P y es paralelo a $\mathbf{u}$, como se muestra en la figura 13.44. Este plano vertical corta la superficie formando una curva C. La pendiente de la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la dirección de $\mathbf{u}$ se define como la pendiente de la curva C en ese punto.

De manera informal, se puede expresar la pendiente de la curva C como un límite análogo a los usados en el cálculo de una variable. El plano vertical utilizado para formar C corta el plano xy en una recta L, representada por las ecuaciones paramétricas,

$$x = x_0 + t\cos\theta$$

y

$$y = y_0 + t\operatorname{sen}\theta$$

de manera que para todo valor de t, el punto $Q(x, y)$ se encuentra en la recta L. Para cada uno de los puntos P y Q, hay un punto correspondiente en la superficie.

$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ Punto sobre P.

$(x, y, f(x, y))$ Punto sobre Q.

Como la distancia entre P y Q es

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(t\cos\theta)^2 + (t\operatorname{sen}\theta)^2} = |t|$$

se puede escribir la pendiente de la recta secante que pasa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y $(x, y, f(x, y))$ como

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Por último, haciendo que t se aproxime a 0, se llega a la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Sea f una función de dos variables x y y, y sea $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ un vector unitario. Entonces la **derivada direccional de *f* en la dirección de u**, que se denota $D_{\mathbf{u}} f$, es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{t}$$

siempre que este límite exista.

Calcular derivadas direccionales empleando esta definición es lo mismo que encontrar la derivada de una función de una variable empleando el proceso del límite (sección 2.1). Una fórmula "de trabajo" más simple para hallar derivadas direccionales emplea las derivadas parciales f_x y f_y.

TEOREMA 13.9 DERIVADA DIRECCIONAL

Si f es una función diferenciable de x y y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta.$$

DEMOSTRACIÓN Dado un punto fijado (x_0, y_0), sea $x = x_0 + t\cos\theta$ y sea $y = y_0 + t\operatorname{sen}\theta$. Ahora, se hace $g(t) = f(x, y)$. Como f es diferenciable, se puede aplicar la regla de la cadena del teorema 13.6 para obtener

$$g'(t) = f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta.$$

Si $t = 0$, entonces $x = x_0$ y $y = y_0$, por tanto

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\operatorname{sen}\theta.$$

De acuerdo con la definición de $g'(t)$, también es verdad que

$$g'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Por consiguiente, $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\operatorname{sen}\theta$.

Hay una cantidad infinita de derivadas direccionales en un punto dado de una superficie, una para cada dirección especificada por **u**, como se muestra en la figura 13.45. Dos de éstas son las derivadas parciales f_x y f_y.

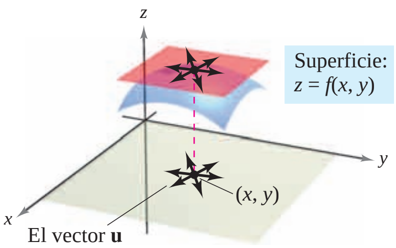


Figura 13.45

1. En la dirección del eje x positivo ($\theta = 0$): $\mathbf{u} = \cos 0\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 0\,\mathbf{j} = \mathbf{i}$

$$D_{\mathbf{i}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos 0 + f_y(x, y)\operatorname{sen} 0 = f_x(x, y)$$

2. En la dirección del eje y positivo ($\theta = \pi/2$): $\mathbf{u} = \cos\frac{\pi}{2}\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\,\mathbf{j} = \mathbf{j}$

$$D_{\mathbf{j}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\frac{\pi}{2} + f_y(x, y)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = f_y(x, y)$$

EJEMPLO 1 Hallar una derivada direccional

Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = 4 - x^2 - \tfrac{1}{4}y^2 \qquad \text{Superficie.}$$

en (1, 2) en la dirección de

$$\mathbf{u} = \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}. \qquad \text{Dirección.}$$

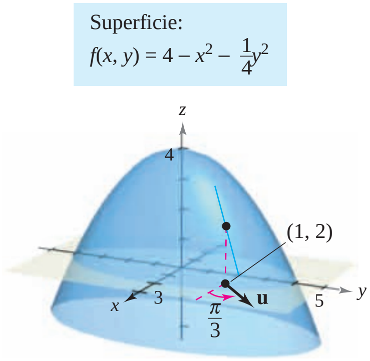


Figura 13.46

Solución Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable, y se puede aplicar el teorema 13.9.

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}\, f(x, y) &= f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \operatorname{sen} \theta \\ &= (-2x) \cos \theta + \left(-\frac{y}{2}\right) \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

Evaluando en $\theta = \pi/3$, $x = 1$ y $y = 2$ se obtiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}\, f(1, 2) &= (-2)\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\approx -1.866. \qquad \text{Ver la figura 13.46.} \end{aligned}$$

NOTA La figura 13.46 muestra que la derivada direccional se puede interpretar como la pendiente de la superficie en el punto (1, 2, 2) en la dirección del vector unitario **u**. ■

Se ha especificado la dirección por medio de un vector unitario **u**. Si la dirección está dada por un vector cuya longitud no es 1, se debe normalizar el vector antes de aplicar la fórmula del teorema 13.9.

EJEMPLO 2 Hallar una derivada direccional

Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} 2y \qquad \text{Superficie.}$$

en $(1, \pi/2)$ en la dirección de

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}. \qquad \text{Dirección.}$$

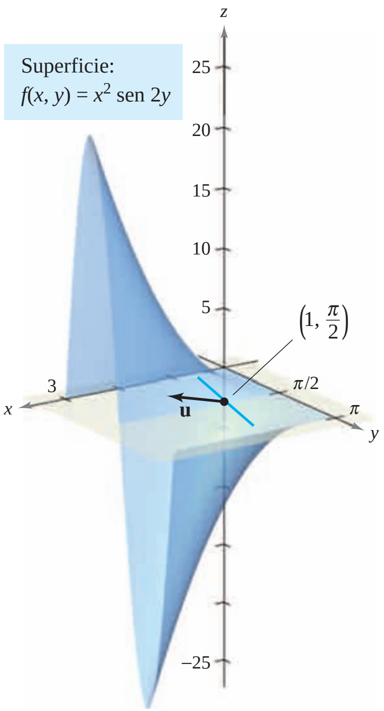


Figura 13.47

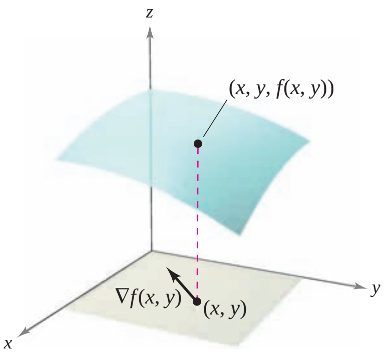
Solución Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable, y se puede aplicar el teorema 13.9. Se comienza por calcular un vector unitario en la dirección de **v**.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j} = \cos \theta\mathbf{i} + \operatorname{sen} \theta\mathbf{j}$$

Usando este vector unitario, se tiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}\, f(x, y) &= (2x \operatorname{sen} 2y)(\cos \theta) + (2x^2 \cos 2y)(\operatorname{sen} \theta) \\ D_{\mathbf{u}}\, f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) &= (2 \operatorname{sen} \pi)\left(\frac{3}{5}\right) + (2 \cos \pi)\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= (0)\left(\frac{3}{5}\right) + (-2)\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{8}{5}. \qquad \text{Ver la figura 13.47.} \end{aligned}$$

El gradiente de una función de dos variables



El gradiente de f es un vector en el plano xy
Figura 13.48

El **gradiente** de una función de dos variables es una función vectorial de dos variables. Esta función tiene múltiples aplicaciones importantes, algunas de las cuales se describen más adelante en esta misma sección.

DEFINICIÓN DE GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea $z = f(x, y)$ una función de x y y tal que f_x y f_y existen. Entonces el **gradiente de *f***, denotado por $\nabla f(x, y)$, es el vector

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}.$$

∇f se lee como "nabla f". Otra notación para el gradiente es **grad** $f(x, y)$. En la figura 13.48 hay que observar que para cada (x, y), el gradiente $\nabla f(x, y)$ es un vector en el plano (no un vector en el espacio).

NOTA El símbolo ∇ no tiene ningún valor. Es un operador de la misma manera que d/dx es un operador. Cuando ∇ opera sobre $f(x, y)$, produce el vector $\nabla f(x, y)$. ■

EJEMPLO 3 Hallar el gradiente de una función

Hallar el gradiente de $f(x, y) = y \ln x + xy^2$ en el punto $(1, 2)$.

Solución Utilizando

$$f_x(x, y) = \frac{y}{x} + y^2 \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = \ln x + 2xy$$

se tiene

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x} + y^2\right)\mathbf{i} + (\ln x + 2xy)\mathbf{j}.$$

En el punto $(1, 2)$, el gradiente es

$$\begin{aligned}\nabla f(1, 2) &= \left(\frac{2}{1} + 2^2\right)\mathbf{i} + [\ln 1 + 2(1)(2)]\mathbf{j}\\ &= 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Como el gradiente de f es un vector, se puede expresar la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ como

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \cdot [\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}].$$

En otras palabras, la derivada direccional es el producto escalar del gradiente y el vector dirección. Este útil resultado se resume en el teorema siguiente.

TEOREMA 13.10 FORMA ALTERNATIVA DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Si f es una función diferenciable de x y y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}.$$

EJEMPLO 4 Hallar una derivada direccional usando $\nabla f(x, y)$

Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$$

en $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$, en la dirección de $P\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ a $Q(0, 1)$.

Solución Como las derivadas de f son continuas, f es diferenciable y se puede aplicar el teorema 13.10. Un vector en la dirección especificada es

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} &= \left(0 + \frac{3}{4}\right)\mathbf{i} + (1 - 0)\mathbf{j} \\ &= \frac{3}{4}\mathbf{i} + \mathbf{j}\end{aligned}$$

y un vector unitario en esta dirección es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

Vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$.

Como $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = 6x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j}$, el gradiente en $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ es

$$\nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) = -\frac{9}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}.$$

Gradiente en $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$.

Por consiguiente, en $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ la derivada direccional es

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}} f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) &= \nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) \cdot \mathbf{u} \\ &= \left(-\frac{9}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}\right) \\ &= -\frac{27}{10}.\end{aligned}$$

Derivada direccional en $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$.

Ver la figura 13.49.

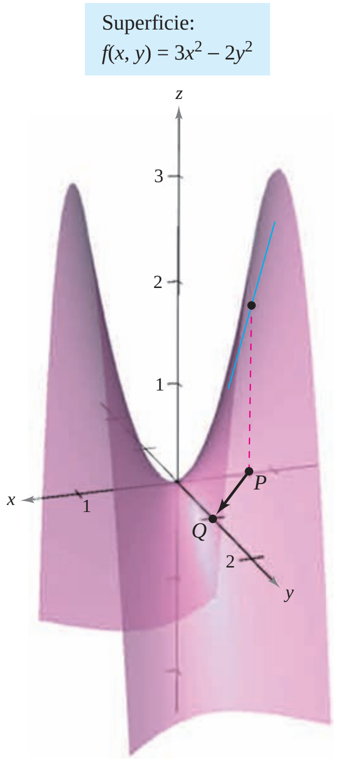


Figura 13.49

Aplicaciones del gradiente

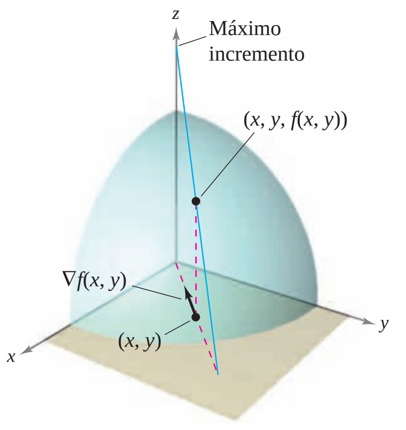
Se ha visto ya que hay muchas derivadas direccionales en un punto (x, y) de una superficie. En muchas aplicaciones, se desea saber en qué dirección moverse de manera que $f(x, y)$ crezca más rápidamente. Esta dirección se llama la dirección de mayor ascenso, y viene dada por el gradiente, como se establece en el teorema siguiente.

NOTA La parte 2 del teorema 13.11 dice que en el punto (x, y), f crece más rápidamente en dirección del gradiente, $\nabla f(x, y)$.

TEOREMA 13.11 PROPIEDADES DEL GRADIENTE

Sea f diferenciable en el punto (x, y).

1. Si $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = 0$ para todo $\mathbf{u}$.
2. La dirección de *máximo* incremento de f está dada por $\nabla f(x, y)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$.
3. La dirección de *mínimo* incremento de f está dada por $-\nabla f(x, y)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ es $-\|\nabla f(x, y)\|$.



El gradiente de f es un vector en el plano xy que apunta en dirección del máximo incremento sobre la superficie dada por $z = f(x, y)$
Figura 13.50

DEMOSTRACIÓN Si $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, entonces en cualquier dirección (con cualquier $\mathbf{u}$), se tiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \\ &= (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) \cdot (\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $\nabla f(x, y) \neq \mathbf{0}$, sea ϕ el ángulo entre $\nabla f(x, y)$ y un vector unitario $\mathbf{u}$. Usando el producto escalar se puede aplicar el teorema 11.5 para concluir que

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \, \|\mathbf{u}\| \cos\phi \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \cos\phi \end{aligned}$$

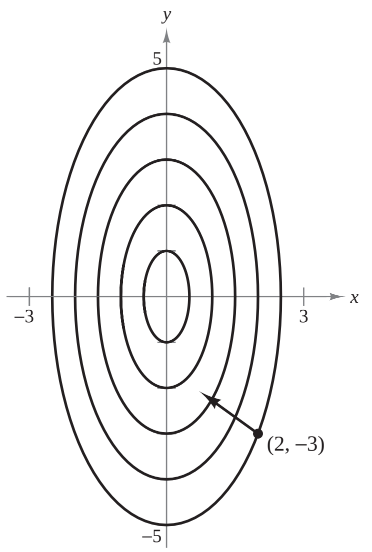
y se sigue que el valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ se presentará cuando $\cos\phi = 1$. Por tanto, $\phi = 0$, y el valor máximo de la derivada direccional se tiene cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que $\nabla f(x, y)$. Este valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ es precisamente

$$\|\nabla f(x, y)\| \cos\phi = \|\nabla f(x, y)\|.$$

De igual forma, el valor mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ puede obtenerse haciendo $\phi = \pi$ de manera que $\mathbf{u}$ apunte en dirección opuesta a $\nabla f(x, y)$, como se muestra en la figura 13.50.

Para visualizar una de las propiedades del gradiente, imaginar a un esquiador que desciende por una montaña. Si $f(x, y)$ denota la altitud a la que se encuentra el esquiador, entonces $-\nabla f(x, y)$ indica la *dirección de acuerdo con la brújula* que debe tomar el esquiador para seguir el camino de descenso más rápido. (Recuérdese que el gradiente indica una dirección en el plano xy y no apunta hacia arriba ni hacia abajo de la ladera de la montaña.)

Otra ilustración del gradiente es la temperatura $T(x, y)$ en cualquier punto (x, y) de una placa metálica plana. En este caso, $\nabla T(x, y)$ da la dirección de máximo aumento de temperatura en el punto (x, y), como se ilustra en el ejemplo siguiente.



La dirección del máximo incremento de la temperatura en $(2, -3)$ está dada por $-16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
Figura 13.51

EJEMPLO 5 Hallar la dirección de máximo incremento

La temperatura en grados Celsius en la superficie de una placa metálica es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

donde x y y se miden en centímetros. ¿En qué dirección a partir de $(2, -3)$ aumenta más rápido la temperatura? ¿Cuál es la tasa o ritmo de crecimiento?

Solución El gradiente es

$$\begin{aligned} \nabla T(x, y) &= T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= -8x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Se sigue que la dirección de máximo incremento está dada por

$$\nabla T(2, -3) = -16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

como se muestra en la figura 13.51, y la tasa de incremento es

$$\begin{aligned} \|\nabla T(2, -3)\| &= \sqrt{256 + 36} \\ &= \sqrt{292} \\ &\approx 17.09^\circ \text{ por centímetro.} \end{aligned}$$

La solución del ejemplo 5 puede entenderse erróneamente. Aunque el gradiente apunta en la dirección de máximo incremento de la temperatura, no necesariamente apunta hacia el punto más caliente de la placa. En otras palabras, el gradiente proporciona una solución local para encontrar un incremento relativo de la temperatura en el punto $(2, -3)$. *Una vez que se abandona esa posición, la dirección de máximo incremento puede cambiar.*

EJEMPLO 6 Hallar la trayectoria de un rastreador térmico

Un rastreador térmico se encuentra en el punto $(2, -3)$ sobre una placa metálica cuya temperatura en (x, y) es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2.$$

Hallar la trayectoria del rastreador, si éste se mueve continuamente en dirección de máximo incremento de temperatura.

Solución Represéntese la trayectoria por la función de posición

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

Un vector tangente en cada punto $(x(t), y(t))$ está dado por

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}.$$

Como el rastreador busca el máximo incremento de temperatura, las direcciones de $\mathbf{r}'(t)$ y $\nabla T(x, y) = -8x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ son iguales en todo punto de la trayectoria. Así,

$$-8x = k\frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad -2y = k\frac{dy}{dt}$$

donde k depende de t. Despejando en cada ecuación dt/k e igualando los resultados, se obtiene

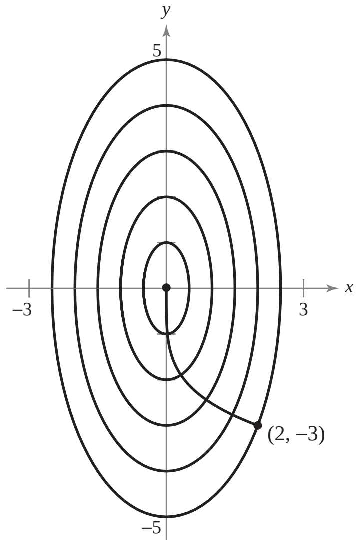
$$\frac{dx}{-8x} = \frac{dy}{-2y}.$$

La solución de esta ecuación diferencial es $x = Cy^4$. Como el rastreador comienza en el punto $(2, -3)$, se puede determinar que $C = 2/81$. Por tanto, la trayectoria del rastreador del calor es

$$x = \frac{2}{81}y^4.$$

La trayectoria se muestra en la figura 13.52.

Curvas de nivel:
$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$



Trayectoria seguida por un rastreador térmico
Figura 13.52

En la figura 13.52, la trayectoria del rastreador (determinada por el gradiente en cada punto) parece ser ortogonal a cada una de las curvas de nivel. Esto resulta claro cuando se considera que la temperatura $T(x, y)$ es constante en cada una de las curvas de nivel. Así, en cualquier punto (x, y) sobre la curva, la velocidad o razón de cambio de T en dirección de un vector unitario tangente $\mathbf{u}$ es 0, y se puede escribir

$$\nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = D_{\mathbf{u}}T(x, y) = 0. \qquad \mathbf{u} \text{ es un vector unitario tangente.}$$

Puesto que el producto escalar de $\nabla f(x, y)$ y $\mathbf{u}$ es 0, se puede concluir que deben ser ortogonales. Este resultado se establece en el teorema siguiente.

TEOREMA 13.12 EL GRADIENTE ES NORMAL A LAS CURVAS DE NIVEL

Si f es diferenciable en (x_0, y_0) y $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal (ortogonal) a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0).

EJEMPLO 7 Hallar un vector normal a una curva de nivel

Dibujar la curva de nivel que corresponde a $c = 0$ para la función dada por

$$f(x, y) = y - \operatorname{sen} x$$

y hallar un vector normal a varios puntos de la curva.

Solución La curva de nivel para $c = 0$ está dada por

$$0 = y - \operatorname{sen} x$$
$$y = \operatorname{sen} x$$

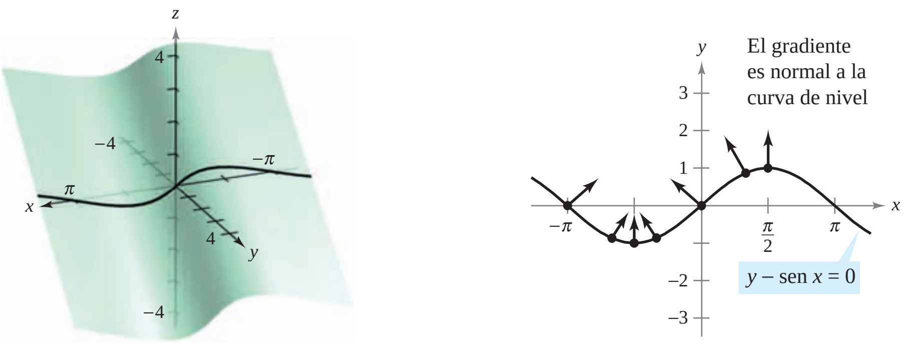
como se muestra en la figura 13.53*a*. Como el vector gradiente de f en (x, y) es

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}\\ &= -\cos x\mathbf{i} + \mathbf{j}\end{aligned}$$

se puede utilizar el teorema 13.12 para concluir que $\nabla f(x, y)$ es normal a la curva de nivel en el punto (x, y). Algunos vectores gradiente son

$$\nabla f(-\pi, 0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$
$$\nabla f\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$
$$\nabla f\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) = \mathbf{j}$$
$$\nabla f\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$
$$\nabla f(0, 0) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$
$$\nabla f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$
$$\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \mathbf{j}.$$

Estos vectores se muestran en la figura 13.53*b*.



***a*)** La superficie está dada por $f(x, y) = y - \operatorname{sen} x$ ***b*)** La curva de nivel está dada por $f(x, y) = 0$.

Figura 13.53

Funciones de tres variables

Las definiciones de derivada direccional y gradiente se pueden extender de manera natural a funciones de tres o más variables. Como a menudo pasa, algo de la interpretación geométrica se pierde al generalizar funciones de dos variables a funciones de tres variables. Por ejemplo, no se puede interpretar la derivada direccional de una función de tres variables como una pendiente.

Las definiciones y propiedades de la derivada direccional y del gradiente de una función de tres variables se dan en el resumen siguiente.

DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTE PARA FUNCIONES DE TRES VARIABLES

Sea f una función de x, y y z, con derivadas parciales de primer orden continuas. La **derivada direccional de f** en dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ está dada por

$$D_{\mathbf{u}}\, f(x, y, z) = af_x(x, y, z) + bf_y(x, y, z) + cf_z(x, y, z).$$

El **gradiente de f** se define como

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Las propiedades del gradiente son:

1. $D_{\mathbf{u}}\, f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$
2. Si $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}}\, f(x, y, z) = 0$ para toda $\mathbf{u}$.
3. La dirección de *máximo* incremento de f está dada por $\nabla f(x, y, z)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}}\, f(x, y, z)$ es

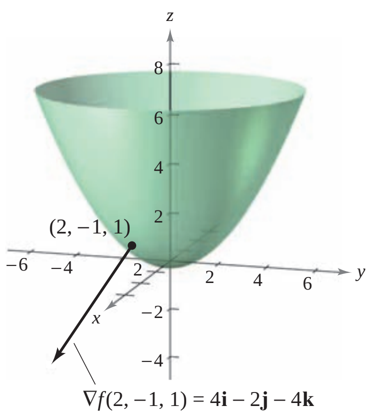
   $\|\nabla f(x, y, z)\|.$ Valor máximo de $D_{\mathbf{u}}\, f(x, y, z)$.
4. La dirección de *mínimo* incremento de f está dada por $-\nabla f(x, y, z)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}\, f(x, y, z)$ es

   $-\|\nabla f(x, y, z)\|.$ Valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}\, f(x, y, z)$.

NOTA El teorema 13.12 se puede generalizar a funciones de tres variables. Bajo las hipótesis adecuadas,

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0)$$

es normal a la superficie de nivel a través de (x_0, y_0, z_0). ■



Superficie de nivel y vector gradiente en $(2, -1, 1)$ para $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$
Figura 13.54

EJEMPLO 8 Hallar el gradiente para una función de tres variables

Hallar $\nabla f(x, y, z)$ para la función dada por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$$

y hallar la dirección de máximo incremento de f en el punto $(2, -1, 1)$.

Solución El vector gradiente está dado por

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}\\ &= 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Por tanto, la dirección de máximo incremento en $(2, -1, 1)$ es

$$\nabla f(2, -1, 1) = 4\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}.$$ Ver la figura 13.54.

13.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 12, hallar la derivada direccional de la función en P en dirección de v.

1. $f(x, y) = 3x - 4xy + 9y, \quad P(1, 2), \mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$
2. $f(x, y) = x^3 - y^3, \quad P(4, 3), \mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
3. $f(x, y) = xy, \quad P(0, -2), \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$
4. $f(x, y) = \frac{x}{y}, \quad P(1, 1), \mathbf{v} = -\mathbf{j}$
5. $h(x, y) = e^x \operatorname{sen} y, \quad P\left(1, \frac{\pi}{2}\right), \mathbf{v} = -\mathbf{i}$
6. $g(x, y) = \arccos xy, \quad P(1, 0), \mathbf{v} = \mathbf{j}$
7. $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad P(3, 4), \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
8. $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad P(0, 0), \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
9. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad P(1, 1, 1), \mathbf{v} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$
10. $f(x, y, z) = xy + yz + xz, \quad P(1, 2, -1), \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
11. $h(x, y, z) = xyz, \quad P(2, 1, 1), \mathbf{v} = \langle 2, 1, 2\rangle$
12. $h(x, y, z) = x \arctan yz, \quad P(4, 1, 1), \mathbf{v} = \langle 1, 2, -1\rangle$

En los ejercicios 13 a 16, hallar la derivada direccional de la función en dirección de $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$.

13. $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$
14. $f(x, y) = \frac{y}{x + y}, \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$
15. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + y), \quad \theta = \frac{\pi}{3}$
16. $g(x, y) = xe^y, \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$

En los ejercicios 17 a 20, hallar la derivada direccional de la función en P en dirección de Q.

17. $f(x, y) = x^2 + 3y^2, \quad P(1, 1), Q(4, 5)$
18. $f(x, y) = \cos(x + y), \quad P(0, \pi), Q\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
19. $g(x, y, z) = xye^z, \quad P(2, 4, 0), Q(0, 0, 0)$
20. $h(x, y, z) = \ln(x + y + z), \quad P(1, 0, 0), Q(4, 3, 1)$

En los ejercicios 21 a 26, hallar el gradiente de la función en el punto dado.

21. $f(x, y) = 3x + 5y^2 + 1, \quad (2, 1)$
22. $g(x, y) = 2xe^{y/x}, \quad (2, 0)$
23. $z = \ln(x^2 - y), \quad (2, 3)$
24. $z = \cos(x^2 + y^2), \quad (3, -4)$
25. $w = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2, \quad (1, 1, -2)$
26. $w = x \tan(y + z), \quad (4, 3, -1)$

En los ejercicios 27 a 30, utilizar el gradiente para hallar la derivada direccional de la función en P en la dirección de Q.

27. $g(x, y) = x^2 + y^2 + 1, \quad P(1, 2), \ Q(2, 3)$
28. $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4, \quad P(-1, 4), \ Q(3, 6)$
29. $f(x, y) = e^y \operatorname{sen} x, \quad P(0, 0), \ Q(2, 1)$
30. $f(x, y) = \operatorname{sen} 2x \cos y, \quad P(\pi, 0), \ Q\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

En los ejercicios 31 a 40, hallar el gradiente de la función y el valor máximo de la derivada direccional en el punto dado.

	Función	*Punto*
31.	$f(x, y) = x^2 + 2xy$	$(1, 0)$
32.	$f(x, y) = \frac{x + y}{y + 1}$	$(0, 1)$
33.	$h(x, y) = x \tan y$	$\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$
34.	$h(x, y) = y \cos(x - y)$	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$
35.	$g(x, y) = ye^{-x}$	$(0, 5)$
36.	$g(x, y) = \ln \sqrt[3]{x^2 + y^2}$	$(1, 2)$
37.	$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$(1, 4, 2)$
38.	$w = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$	$(0, 0, 0)$
39.	$w = xy^2z^2$	$(2, 1, 1)$
40.	$f(x, y, z) = xe^{yz}$	$(2, 0, -4)$

En los ejercicios 41 a 46, utilizar la función $f(x, y) = 3 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$.

41. Dibujar la gráfica de f en el primer octante y marcar el punto $(3, 2, 1)$ sobre la superficie.
42. Hallar $D_{\mathbf{u}} f(3, 2)$, donde $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$, usando cada valor dado de θ.

    a) $\theta = \frac{\pi}{4}$ *b*) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

    c) $\theta = \frac{4\pi}{3}$ *d*) $\theta = -\frac{\pi}{6}$

43. Hallar $D_{\mathbf{u}} f(3, 2)$, donde $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, usando cada vector $\mathbf{v}$ dado.

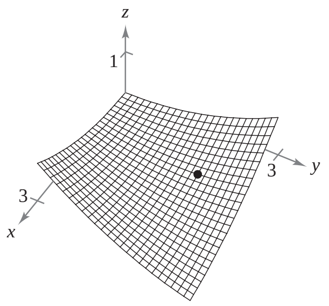
    a) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
    b) $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
    c) $\mathbf{v}$ es el vector que va de $(1, 2)$ a $(-2, 6)$.
    d) $\mathbf{v}$ es el vector que va de $(3, 2)$ a $(4, 5)$.

44. Hallar $\nabla f(x, y)$.
45. Hallar el valor máximo de la derivada direccional en $(3, 2)$.
46. Hallar un vector unitario de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\nabla f(3, 2)$ y calcular $D_{\mathbf{u}} f(3, 2)$. Analizar el significado geométrico del resultado.

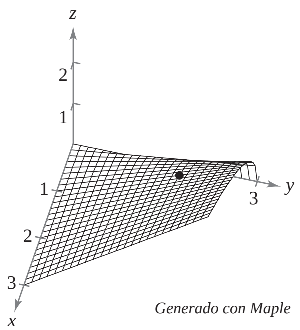
Investigación **En los ejercicios 47 y 48, *a*) utilizar la gráfica para estimar las componentes del vector en la dirección de la tasa máxima de incremento en la función en el punto dado. *b*) Hallar el gradiente en el punto y compararlo con el estimado del inciso *a*). *c*) ¿En qué dirección decrece más rápido la función? Explicar.**

47. $f(x, y) = \frac{1}{10}(x^2 - 3xy + y^2)$, $(1, 2)$

48. $f(x, y) = \frac{1}{2}y\sqrt{x}$, $(1, 2)$



Generado con Maple



Generado con Maple

CAS **49.** ***Investigación*** Considerar la función

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

en el punto $(4, -3, 7)$.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora para dibujar la superficie dada por esa función.

b) Determinar la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(4, -3)$ como función de θ, donde $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$. Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la función en el intervalo $[0, 2\pi)$.

c) Aproximar los ceros de la función del inciso *b*) e interpretar cada uno en el contexto del problema.

d) Aproximar los números críticos de la función del inciso *b*) e interpretar cada uno en el contexto del problema.

e) Hallar $\|\nabla f(4, -3)\|$ y explicar su relación con las respuestas del inciso *d*).

f) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la curva de nivel de la función f en el nivel $c = 7$. En esta curva, representar gráficamente el vector en la dirección de $\nabla f(4, -3)$, y establecer su relación con la curva de nivel.

50. ***Investigación*** Considerar la función

$$f(x, y) = \frac{8y}{1 + x^2 + y^2}$$

a) Verificar analíticamente que la curva de nivel de $f(x, y)$ para el nivel $c = 2$ es un círculo.

b) En el punto $(\sqrt{3}, 2)$ sobre la curva de nivel para la cual $c = 2$, dibujar el vector que apunta en dirección de la mayor tasa o ritmo de incremento de la función.

c) En el punto $(\sqrt{3}, 2)$ sobre la curva de nivel, dibujar el vector cuya derivada direccional sea 0.

CAS *d*) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie y verificar las respuestas a los incisos *a*) a *c*).

En los ejercicios 51 a 54, hallar un vector normal a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en P.

51. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$
$c = 6$, $P(0, 0)$

52. $f(x, y) = x^2 + y^2$
$c = 25$, $P(3, 4)$

53. $f(x, y) = xy$
$c = -3$, $P(-1, 3)$

54. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$
$c = \frac{1}{2}$, $P(1, 1)$

En los ejercicios 55 a 58, *a*) encontrar el gradiente de la función en *P*, *b*) encontrar un vector normal unitario para la curva de nivel $f(x, y) = c$ en *P*, *c*) encontrar la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en *P*, y *d*) trazar la curva de nivel, el vector unitario normal y la recta tangente en el plano *xy*.

55. $f(x, y) = 4x^2 - y$
$c = 6$, $P(2, 10)$

56. $f(x, y) = x - y^2$
$c = 3$, $P(4, -1)$

57. $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$
$c = 1$, $P(1, 1)$

58. $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$
$c = 40$, $P(2, -1)$

Desarrollo de conceptos

59. Definir la derivada de la función $z = f(x, y)$ en la dirección de $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j}$.

60. Redactar un párrafo que describa la derivada direccional de la función f en la dirección de $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j}$ cuando *a*) $\theta = 0°$ y *b*) $\theta = 90°$.

61. Definir el gradiente de una función de dos variables. Dar las propiedades del gradiente.

62. Dibujar la gráfica de una superficie y elegir un punto *P* sobre la superficie. Dibujar un vector en el plano *xy* que indique la dirección de mayor ascenso sobre la superficie en *P*.

63. Describir la relación del gradiente con las curvas de nivel de una superficie dada por $z = f(x, y)$.

Para discusión

64. Considerar la función $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$.

a) Trazar la gráfica de f en el primer octante y graficar el punto $(1, 2, 4)$ sobre la superficie.

b) Encontrar $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$, donde $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$. para $\theta = -\pi/4$.

c) Repetir el inciso *b*) para $\theta = \pi/3$.

d) Encontrar $\nabla f(1, 2)$ y $\|\nabla f(1, 2)\|$.

e) Encontrar un vector unitario $\mathbf{u}$ ortogonal para $\nabla f(1, 2)$ y calcular $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$. Discutir el significado geométrico del resultado.

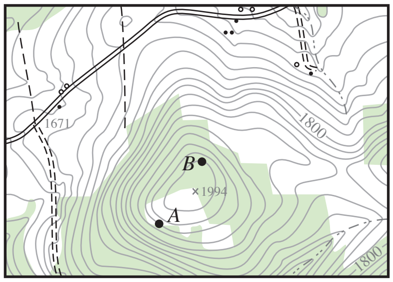
65. ***Distribución de temperatura*** La temperatura en el punto (x, y) de una placa metálica es

$$T = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

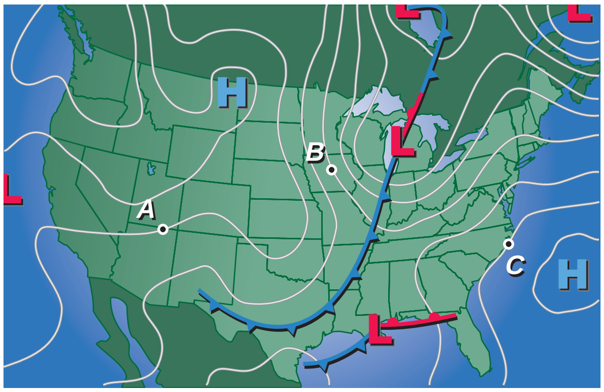
Hallar la dirección de mayor incremento de calor en el punto $(3, 4)$.

66. ***Topografía*** La superficie de una montaña se modela mediante la ecuación $h(x, y) = 5\,000 - 0.001x^2 - 0.004y^2$. Un montañista se encuentra en el punto $(500, 300, 4\,390)$. ¿En qué dirección debe moverse para ascender con la mayor rapidez?

67. ***Topografía*** La figura muestra un mapa topográfico utilizado por un grupo de excursionistas. Dibujar las trayectorias de descenso más rápidas si los excursionistas parten del punto A y si parten del punto B.



68. ***Meteorología*** Los meteorólogos miden la presión atmosférica en milibares. A partir de estas observaciones elaboran mapas climáticos en los que dibujan las curvas de igual presión atmosférica (isobaras) (ver la figura). Son curvas de nivel de una función $P(x, y)$ que dan la presión en cualquier punto. Dibujar los gradientes de las isobaras en los puntos A, B y C. Aunque no se conocen las magnitudes de los gradientes, sus longitudes relativas pueden estimarse. ¿En cuál de los tres puntos es la velocidad del viento mayor si la velocidad del viento se incrementa conforme el gradiente de presión aumenta?



Rastreador térmico **En los ejercicios 69 y 70, hallar la trayectoria de un rastreador térmico situado en el punto P de una placa metálica con un campo de temperatura $T(x, y)$.**

	Campo de temperatura	*Punto*
69.	$T(x, y) = 400 - 2x^2 - y^2$	$P(10, 10)$
70.	$T(x, y) = 100 - x^2 - 2y^2$	$P(4, 3)$

71. ***Temperatura*** La temperatura en el punto (x, y) de una placa metálica se modela mediante

$$T(x, y) = 400e^{-(x^2+y)/2}, \; x \geq 0, y \geq 0.$$

CAS *a*) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la función de distribución de temperatura.

b) Hallar las direcciones, sobre la placa en el punto $(3, 5)$, en las que no hay cambio en el calor.

c) Hallar la dirección de mayor incremento de calor en el punto $(3, 5)$.

CAS **72.** ***Investigación*** Un equipo de oceanógrafos está elaborando un mapa del fondo del océano para ayudar a recuperar un barco hundido. Utilizando el sonido, desarrollan el modelo

$$D = 250 + 30x^2 + 50 \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2}, \; o \;\leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$$

donde D es la profundidad en metros, y x y y son las distancias en kilómetros.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie.

b) Como la gráfica del inciso *a*) da la profundidad, no es un mapa del fondo del océano. ¿Cómo podría modificarse el modelo para que se pudiera obtener una gráfica del fondo del océano?

c) ¿Cuál es la profundidad a la que se encuentra el barco si se localiza en las coordenadas $x = 1$ y $y = 0.5$?

d) Determinar la pendiente del fondo del océano en la dirección del eje x positivo a partir del punto donde se encuentra el barco.

e) Determinar la pendiente del fondo del océano en la dirección del eje y positivo en el punto donde se encuentra el barco.

f) Determinar la dirección de mayor tasa de cambio de la profundidad a partir del punto donde se encuentra el barco.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 73 a 76, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

73. Si $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, entonces $D_{\mathbf{u}} f(0, 0) = 0$ para todo vector unitario $\mathbf{u}$.

74. Si $f(x, y) = x + y$, entonces $-1 \leq D_{\mathbf{u}} f(x, y) \leq 1$.

75. Si $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ existe, entonces $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = -D_{-\mathbf{u}} f(x, y)$.

76. Si $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = c$ para todo vector unitario $\mathbf{u}$, entonces $c = 0$.

77. Hallar una función f tal que

$$\nabla f = e^x \cos y\, \mathbf{i} - e^x \operatorname{sen} y\, \mathbf{j} + z\, \mathbf{k}.$$

78. Considerar la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

y el vector unitario $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

¿Existe la derivada direccional de f en $P(0, 0)$ en la dirección de $\mathbf{u}$? Si $f(0, 0)$ estuviera definido en 2 en vez de 0, ¿existiría la derivada direccional?

79. Considerar la función $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$.

a) Demostrar que f es continua en el origen.

b) Demostrar que f_x y f_y existen en el origen, pero que la derivada direccional en el origen en todas las demás direcciones no existe.

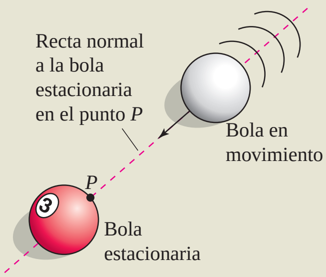
CAS *c*) Usar un sistema algebraico por computadora para graficar f cerca del origen a fin de verificar las respuestas de los incisos *a*) y *b*). Explicar.

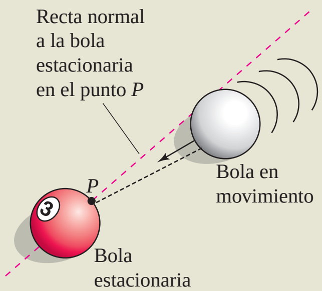
13.7 Planos tangentes y rectas normales

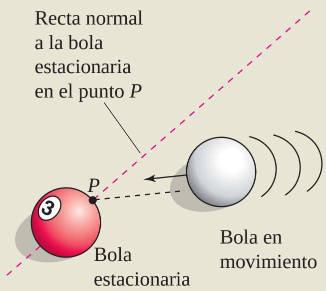
- **Hallar ecuaciones de planos tangentes y rectas normales a superficies.**
- **Hallar el ángulo de inclinación de una recta en el espacio.**
- **Comparar los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$.**

EXPLORACIÓN

Bolas de billar y rectas normales
En cada una de las tres figuras la bola en movimiento está a punto de golpear una bola estacionaria en el punto P. Explicar cómo utilizar la recta normal a la bola estacionaria en el punto P para describir el movimiento resultante en cada una de las bolas. Suponiendo que todas las bolas en movimiento tengan la misma velocidad, ¿cuál de las bolas estacionarias adquirirá mayor velocidad? ¿Cuál adquirirá menor velocidad? Explicar el razonamiento.







Plano tangente y recta normal a una superficie

Hasta ahora las superficies en el espacio se han representado principalmente por medio de ecuaciones de la forma

$$z = f(x, y). \qquad \text{Ecuación de una superficie } S.$$

Sin embargo, en el desarrollo que sigue, es conveniente utilizar la representación más general $F(x, y, z) = 0$. Una superficie S dada por $z = f(x, y)$, se puede convertir a la forma general definiendo F como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Puesto que $f(x, y) - z = 0$, se puede considerar S como la superficie de nivel de F dada por

$$F(x, y, z) = 0. \qquad \text{Ecuación alternativa de la superficie } S.$$

EJEMPLO 1 Expresar una ecuación de una superficie

Dada la función

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$$

describir la superficie de nivel dada por $F(x, y, z) = 0$.

Solución La superficie de nivel dada por $F(x, y, z) = 0$ puede expresarse como

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

la cual es una esfera de radio 2 centrada en el origen.

Se han visto muchos ejemplos acerca de la utilidad de rectas normales en aplicaciones relacionadas con curvas. Las rectas normales son igualmente importantes al analizar superficies y sólidos. Por ejemplo, considérese la colisión de dos bolas de billar. Cuando una bola estacionaria es golpeada en un punto P de su superficie, se mueve a lo largo de la **línea de impacto** determinada por P y por el centro de la bola. El impacto puede ser de *dos* maneras. Si la bola que golpea se mueve a lo largo de la línea de impacto, se detiene y transfiere todo su momento a la bola estacionaria, como se muestra en la figura 13.55. Si la bola que golpea no se mueve a lo largo de la línea de impacto, se desvía a un lado o al otro y retiene parte de su momento. La transferencia de parte de su momento a la bola estacionaria ocurre a lo largo de la línea de impacto, *sin tener en cuenta* la dirección de la bola que golpea, como se muestra en la figura 13.56. A esta línea de impacto se le llama **recta normal** a la superficie de la bola en el punto P.

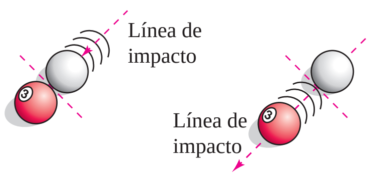


Figura 13.55

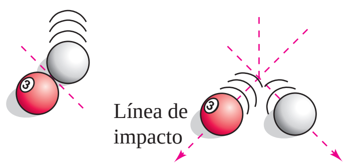


Figura 13.56

En el proceso de hallar una recta normal a una superficie, se puede también resolver el problema de encontrar un **plano tangente** a la superficie. Sea S una superficie dada por

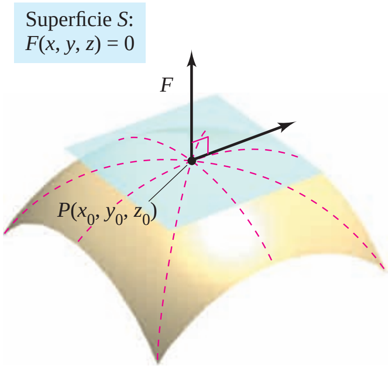
$$F(x, y, z) = 0$$

y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en S. Sea C una curva en S que pasa por P definida por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Entonces, para todo t,

$$F(x(t),\ y(t),\ z(t)) = 0.$$



Plano tangente a la superficie S en P
Figura 13.57

Si F es diferenciable y $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$ existen, se sigue por la regla de la cadena que

$$\begin{aligned} 0 &= F'(t) \\ &= F_x(x, y, z)x'(t) + F_y(x, y, z)y'(t) + F_z(x, y, z)z'(t). \end{aligned}$$

En (x_0, y_0, z_0), la forma vectorial equivalente es

$$0 = \underbrace{\nabla F(x_0, y_0, z_0)}_{\text{Gradiente}} \cdot \underbrace{\mathbf{r}'(t_0)}_{\substack{\text{Vector}\\ \text{tangente}}}.$$

Este resultado significa que el gradiente en P es ortogonal al vector tangente de toda curva en S que pase por P. Por tanto, todas las rectas tangentes en S se encuentran en un plano que es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ y contiene a P, como se muestra en la figura 13.57.

DEFINICIÓN DE PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL

Sea F diferenciable en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie S dada por $F(x, y, z) = 0$ tal que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$.

1. Al plano que pasa por P y es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama **plano tangente a *S* en *P***.
2. A la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama **recta normal a *S* en *P***.

NOTA En el resto de esta sección, se supone $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ a menos que se establezca lo contrario. ■

Para hallar una ecuación para el plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0), sea (x, y, z) un punto arbitrario en el plano tangente. Entonces el vector

$$\mathbf{v} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

se encuentra en el plano tangente. Como $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal al plano tangente en (x_0, y_0, z_0), debe ser ortogonal a todo vector en el plano tangente, y se tiene $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$, lo que demuestra el resultado enunciado en el teorema siguiente.

TEOREMA 13.13 ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0), entonces una ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0) es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

EJEMPLO 2 Hallar una ecuación de un plano tangente

Hallar una ecuación del plano tangente al hiperboloide

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$$

en el punto $(1, -1, 4)$.

Solución Se comienza por expresar la ecuación de la superficie como

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0.$$

Después, considerando

$$F(x, y, z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12$$

se tiene

$$F_x(x, y, z) = -4x, \qquad F_y(x, y, z) = -4y \qquad \text{y} \qquad F_z(x, y, z) = 2z.$$

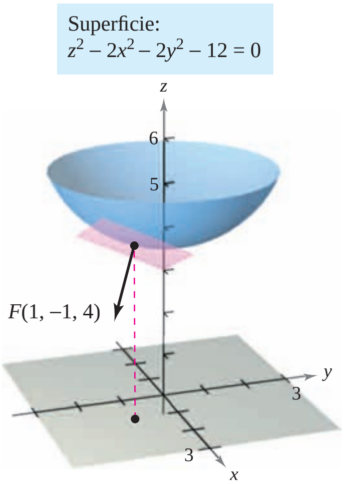
En el punto $(1, -1, 4)$ las derivadas parciales son

$$F_x(1, -1, 4) = -4, \qquad F_y(1, -1, 4) = 4 \qquad \text{y} \qquad F_z(1, -1, 4) = 8.$$

Por tanto, una ecuación del plano tangente en $(1, -1, 4)$ es

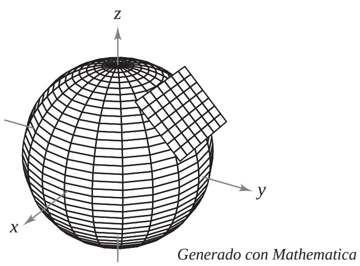
$$\begin{aligned} -4(x - 1) + 4(y + 1) + 8(z - 4) &= 0 \\ -4x + 4 + 4y + 4 + 8z - 32 &= 0 \\ -4x + 4y + 8z - 24 &= 0 \\ x - y - 2z + 6 &= 0. \end{aligned}$$

La figura 13.58 muestra una parte del hiperboloide y el plano tangente.

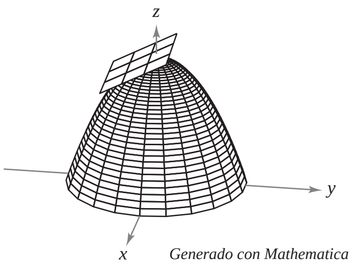


Plano tangente a la superficie
Figura 13.58

TECNOLOGÍA Algunas herramientas de graficación tridimensionales pueden representar planos tangentes a superficies. He aquí dos ejemplos.



Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



Paraboloide: $z = 2 - x^2 - y^2$

Para hallar la ecuación del plano tangente en un punto a una superficie dada por $z = f(x, y)$, se define la función F mediante

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Después se da S por medio de la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$, y por el teorema 13.13 una ecuación del plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

EJEMPLO 3 Hallar una ecuación del plano tangente

Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide

$$z = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$$

en el punto $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$.

Solución De $z = f(x, y) = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$, se obtiene

$$f_x(x, y) = -\frac{x}{5} \quad \Longrightarrow \quad f_x(1, 1) = -\frac{1}{5}$$

y

$$f_y(x, y) = -\frac{4y}{5} \quad \Longrightarrow \quad f_y(1, 1) = -\frac{4}{5}.$$

Así, una ecuación del plano tangente en $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ es

$$f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) - \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{5}(x - 1) - \frac{4}{5}(y - 1) - \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}y - z + \frac{3}{2} = 0.$$

Este plano tangente se muestra en la figura 13.59.

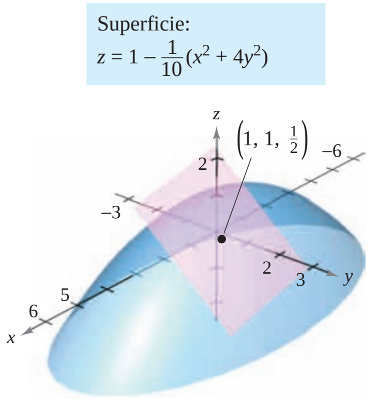


Figura 13.59

El gradiente $\nabla F(x, y, z)$ proporciona una manera adecuada de obtener ecuaciones de rectas normales, como se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Hallar una ecuación de una recta normal a una superficie

Hallar un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie dada por $xyz = 12$ en el punto $(2, -2, -3)$.

Solución Se comienza por hacer

$$F(x, y, z) = xyz - 12.$$

Entonces, el gradiente está dado por

$$\begin{aligned} \nabla F(x, y, z) &= F_x(x, y, z)\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \end{aligned}$$

y en el punto $(2, -2, -3)$ se tiene

$$\begin{aligned} \nabla F(2, -2, -3) &= (-2)(-3)\mathbf{i} + (2)(-3)\mathbf{j} + (2)(-2)\mathbf{k} \\ &= 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}. \end{aligned}$$

La recta normal en $(2, -2, -3)$ tiene números de dirección o directores $6, -6$ y -4, y el conjunto correspondiente de ecuaciones simétricas es

$$\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 2}{-6} = \frac{z + 3}{-4}.$$

Ver la figura 13.60.

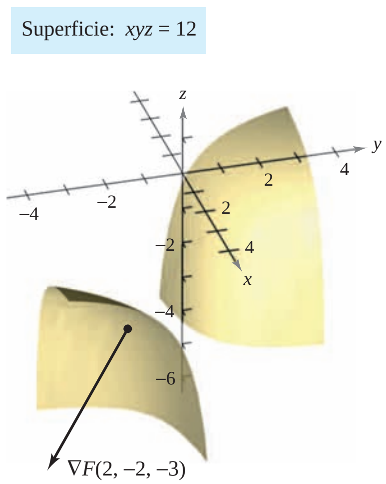


Figura 13.60

Saber que el gradiente $\nabla F(x, y, z)$ es normal a la superficie $F(x, y, z) = 0$ permite resolver diversos problemas relacionados con superficies y curvas en el espacio.

EJEMPLO 5 Hallar la ecuación de una recta tangente a una curva

Describir la recta tangente a la curva de intersección de las superficies

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 20 \qquad \text{Elipsoide.}$$

$$x^2 + y^2 + z = 4 \qquad \text{Paraboloide.}$$

en el punto (0, 1, 3), como se muestra en la figura 13.61.

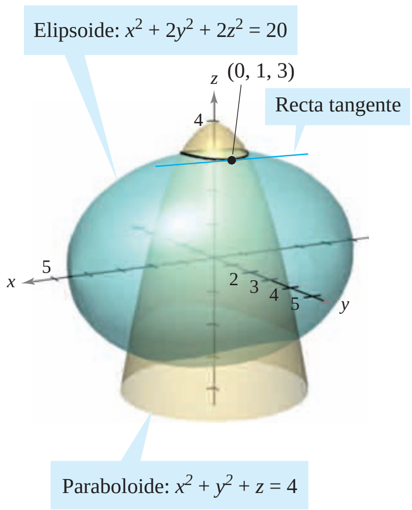


Figura 13.61

Solución Para comenzar, se calculan los gradientes de ambas superficies en el punto (0, 1, 3).

Elipsoide	*Paraboloide*
$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20$	$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 4$
$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$	$\nabla G(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$
$\nabla F(0, 1, 3) = 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$	$\nabla G(0, 1, 3) = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

El producto vectorial de estos dos gradientes es un vector tangente a ambas superficies en el punto (0, 1, 3).

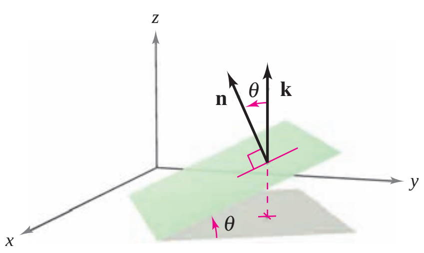
$$\nabla F(0, 1, 3) \times \nabla G(0, 1, 3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20\mathbf{i}.$$

Por tanto, la recta tangente a la curva de intersección de las dos superficies en el punto (0, 1, 3) es una recta paralela al eje x y que pasa por el punto (0, 1, 3).

El ángulo de inclinación de un plano

Otro uso del gradiente $\nabla F(x, y, z)$ es determinar el ángulo de inclinación del plano tangente a una superficie. El **ángulo de inclinación** de un plano se define como el ángulo θ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ entre el plano dado y el plano xy, como se muestra en la figura 13.62. (El ángulo de inclinación de un plano horizontal es por definición cero.) Como el vector $\mathbf{k}$ es normal al plano xy, se puede utilizar la fórmula del coseno del ángulo entre dos planos (dado en la sección 11.5) para concluir que el ángulo de inclinación de un plano con vector normal $\mathbf{n}$ está dado por

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}{\|\mathbf{n}\| \, \|\mathbf{k}\|} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}{\|\mathbf{n}\|}. \qquad \text{Ángulo de inclinación de un plano.}$$



Ángulo de inclinación
Figura 13.62

EJEMPLO 6 Hallar el ángulo de inclinación de un plano tangente

Hallar el ángulo de inclinación del plano tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$$

en el punto (2, 2, 1).

Solución Si se hace

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} - 1$$

el gradiente de F en el punto (2, 2, 1) está dado por

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{x}{6}\mathbf{i} + \frac{y}{6}\mathbf{j} + \frac{2z}{3}\mathbf{k}$$

$$\nabla F(2, 2, 1) = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

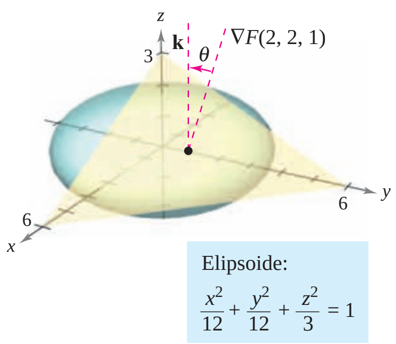


Figura 13.63

Como $\nabla F(2, 2, 1)$ es normal al plano tangente y $\mathbf{k}$ es normal al plano xy, se sigue que el ángulo de inclinación del plano tangente está dado por

$$\cos\theta = \frac{|\nabla F(2, 2, 1) \cdot \mathbf{k}|}{\|\nabla F(2, 2, 1)\|} = \frac{2/3}{\sqrt{(1/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

lo cual implica que

$$\theta = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35.3°,$$

como se muestra en la figura 13.63.

NOTA Un caso especial del procedimiento mostrado en el ejemplo 6 merece mención especial. El ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0, z_0) está dado por

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2 + 1}}.$$

Fórmula alternativa para el ángulo de inclinación (ver ejercicio 77).

Comparación de los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$

Esta sección concluye con una comparación de los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$. En la sección anterior se vio que el gradiente de una función f de dos variables es normal a las curvas de nivel de f. Específicamente, el teorema 13.12 establece que si f es diferenciable en (x_0, y_0) y $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0). Habiendo desarrollado rectas normales a superficies, ahora se puede extender este resultado a una función de tres variables. La demostración del teorema 13.14 se deja como un ejercicio (ver ejercicio 78).

TEOREMA 13.14 EL GRADIENTE ES NORMAL A LAS SUPERFICIES DE NIVEL

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel que pasa por (x_0, y_0, z_0).

Al trabajar con los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$, hay que recordar que $\nabla f(x, y)$ es un vector en el plano xy y $\nabla F(x, y, z)$ es un vector en el espacio.

13.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, describir la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$.

1. $F(x, y, z) = 3x - 5y + 3z - 15$
2. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$
3. $F(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 - 4z^2$
4. $F(x, y, z) = 16x^2 - 9y^2 + 36z$

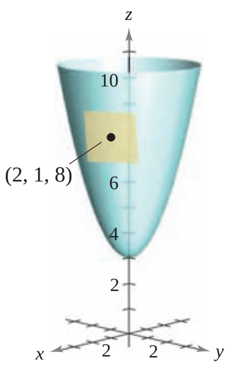
En los ejercicios 5 a 16, hallar un vector unitario normal a la superficie en el punto dado. [*Sugerencia*: Normalizar el vector gradiente $\nabla F(x, y, z)$.]

	Superficie	*Punto*
5.	$3x + 4y + 12z = 0$	$(0, 0, 0)$
6.	$x + y + z = 4$	$(2, 0, 2)$
7.	$x^2 + y^2 + z^2 = 6$	$(1, 1, 2)$
8.	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$(3, 4, 5)$
9.	$z = x^3$	$(2, -1, 8)$
10.	$x^2y^4 - z = 0$	$(1, 2, 16)$
11.	$x^2 + 3y + z^3 = 9$	$(2, -1, 2)$
12.	$x^2y^3 - y^2z + 2xz^3 = 4$	$(-1, 1, -1)$
13.	$\ln\left(\frac{x}{y - z}\right) = 0$	$(1, 4, 3)$
14.	$ze^{x^2-y^2} - 3 = 0$	$(2, 2, 3)$
15.	$z - x \operatorname{sen} y = 4$	$\left(6, \frac{\pi}{6}, 7\right)$
16.	$\operatorname{sen}(x - y) - z = 2$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$

En los ejercicios 17 a 30, hallar una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto dado.

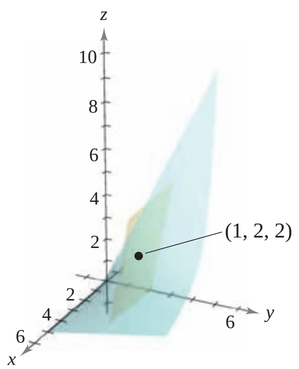
17. $z = x^2 + y^2 + 3$

$(2, 1, 8)$



18. $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$

$(1, 2, 2)$



19. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4, 5)$

20. $g(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$, $(1, 0, 0)$

21. $g(x, y) = x^2 + y^2$, $(1, -1, 2)$

22. $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$, $(1, 2, 1)$

23. $z = 2 - \frac{2}{3}x - y$, $(3, -1, 1)$

24. $z = e^x(\operatorname{sen} y + 1)$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}, 2\right)$

25. $h(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4, \ln 5)$

26. $h(x, y) = \cos y$, $\left(5, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

27. $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$, $(2, -2, 4)$

28. $x^2 + 2z^2 = y^2$, $(1, 3, -2)$

29. $xy^2 + 3x - z^2 = 8$, $(1, -3, 2)$

30. $x = y(2z - 3)$, $(4, 4, 2)$

En los ejercicios 31 a 40, hallar una ecuación del plano tangente y hallar ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie en el punto dado.

31. $x + y + z = 9$, $(3, 3, 3)$

32. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $(1, 2, 2)$

33. $x^2 + y^2 + z = 9$, $(1, 2, 4)$

34. $z = 16 - x^2 - y^2$, $(2, 2, 8)$

35. $z = x^2 - y^2$, $(3, 2, 5)$

36. $xy - z = 0$, $(-2, -3, 6)$

37. $xyz = 10$, $(1, 2, 5)$

38. $z = ye^{2xy}$, $(0, 2, 2)$

39. $z = \arctan \dfrac{y}{x}$, $\left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$

40. $y \ln xz^2 = 2$, $(e, 2, 1)$

En los ejercicios 41 a 46, *a*) encontrar ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto dado, y *b*) encontrar el coseno del ángulo entre los vectores gradiente en este punto. Establecer si son ortogonales o no las superficies en el punto de intersección.

41. $x^2 + y^2 = 2$, $z = x$, $(1, 1, 1)$

42. $z = x^2 + y^2$, $z = 4 - y$, $(2, -1, 5)$

43. $x^2 + z^2 = 25$, $y^2 + z^2 = 25$, $(3, 3, 4)$

44. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $5x - 2y + 3z = 22$, $(3, 4, 5)$

45. $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x - y - z = 0$, $(3, 1, 2)$

46. $z = x^2 + y^2$, $x + y + 6z = 33$, $(1, 2, 5)$

En los ejercicios 47 a 50, encontrar el ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie en el punto dado.

47. $3x^2 + 2y^2 - z = 15$, $(2, 2, 5)$

48. $2xy - z^3 = 0$, $(2, 2, 2)$

49. $x^2 - y^2 + z = 0$, $(1, 2, 3)$

50. $x^2 + y^2 = 5$, $(2, 1, 3)$

En los ejercicios 51 a 56, encontrar el (los) punto(s) sobre la superficie en la cual el plano tangente es horizontal.

51. $z = 3 - x^2 - y^2 + 6y$

52. $z = 3x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 5$

53. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y$

54. $z = 4x^2 + 4xy - 2y^2 + 8x - 5y - 4$

55. $z = 5xy$

56. $z = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

En los ejercicios 57 y 58, demostrar que las superficies son tangentes a cada una en el punto dado para demostrar que las superficies tienen el mismo plano tangente en este punto.

57. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 3,\ x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 10y + 14 = 0,$
$(-1, 1, 0)$

58. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 12y + 4z + 42 = 0,\ x^2 + y^2 + 2z = 7,$
$(2, 3, -3)$

En los ejercicios 59 y 60, *a*) demostrar que las superficies intersecan en el punto dado y *b*) demostrar que las superficies tienen planos tangentes perpendiculares en este punto.

59. $z = 2xy^2,\ 8x^2 - 5y^2 - 8z = -13, \quad (1, 1, 2)$

60. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 12 = 0,$
$4x^2 + y^2 + 16z^2 = 24, \quad (1, -2, 1)$

61. Encontrar un punto sobre el elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$ donde el plano tangente es perpendicular a la recta con ecuaciones paramétricas

$$x = 2 - 4t,\ y = 1 + 8t \quad \text{y} \quad z = 3 - 2t.$$

62. Encontrar un punto sobre el hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano $x + 4y - z = 0$.

Desarrollo de conceptos

63. Dar la forma estándar de la ecuación del plano tangente a una superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0).

64. En algunas superficies, las rectas normales en cualquier punto pasan por el mismo objeto geométrico. ¿Cuál es el objeto geométrico común en una esfera? ¿Cuál es el objeto geométrico común en un cilindro circular recto? Explicar.

65. Analizar la relación entre el plano tangente a una superficie y la aproximación por diferenciales.

Para discusión

66. Considerar el cono elíptico dado por

$$x^2 - y^2 + z^2 = 0.$$

a) Encontrar una ecuación del plano tangente en el punto (5, 13, –12).

b) Encontrar ecuaciones simétricas de la superficie normal en el punto (5, 13, –12).

67. ***Investigación*** Considerar la función

$$f(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$$

en los intervalos $-2 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 3$.

a) Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta normal y una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (1, 1, 1).

b) Repetir el inciso *a*) con el punto $\left(-1, 2, -\frac{4}{5}\right)$.

CAS *c*) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie, las rectas normales y los planos tangentes encontrados en los incisos *a*) y *b*).

68. ***Investigación*** Considerar la función

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen} y}{x}$$

en los intervalos $-3 \leq x \leq 3$ y $0 \leq y \leq 2\pi$.

a) Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta normal y una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto

$$\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

b) Repetir el inciso *a*) con el punto $\left(-\frac{2}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

CAS *c*) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie, las rectas normales y los planos tangentes calculados en los incisos *a*) y *b*).

69. Considerar las funciones

$$f(x, y) = 6 - x^2 - y^2/4 \quad \text{y} \quad g(x, y) = 2x + y.$$

a) Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto (1, 2, 4), y hallar el ángulo entre los vectores gradientes.

CAS *b*) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente las superficies. Representar gráficamente la recta tangente obtenida en el inciso *a*).

70. Considerar las funciones

$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 + 2x - 4y}$$

y

$$g(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - 3x^2 + y^2 + 6x + 4y}.$$

CAS *a*) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la porción del primer octante de las superficies representadas por f y g.

b) Hallar un punto en el primer octante sobre la curva intersección y mostrar que las superficies son ortogonales en este punto.

c) Estas superficies son ortogonales a lo largo de la curva intersección. ¿Demuestra este hecho el inciso *b*)? Explicar.

En los ejercicios 71 y 72, probar que el plano tangente a la superficie cuádrica en el punto (x_0, y_0, z_0) puede expresarse en la forma dada.

71. Elipsoide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Plano: $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} + \dfrac{z_0 z}{c^2} = 1$

72. Hiperboloide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Plano: $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} - \dfrac{z_0 z}{c^2} = 1$

73. Demostrar que todo plano tangente al cono

$z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$

pasa por el origen.

74. Sea f una función derivable y considérese la superficie $z = xf(y/x)$. Mostrar que el plano tangente a cualquier punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie pasa por el origen.

75. ***Aproximación*** Considerar las aproximaciones siguientes para una función $f(x, y)$ centrada en $(0, 0)$.

Aproximación lineal:

$P_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$

Aproximación cuadrática:

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \tfrac{1}{2} f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \tfrac{1}{2} f_{yy}(0, 0)y^2$$

[Observar que la aproximación lineal es el plano tangente a la superficie en $(0, 0, f(0, 0))$.]

a) Hallar la aproximación lineal a $f(x, y) = e^{(x-y)}$ centrada en $(0, 0)$.

b) Hallar la aproximación cuadrática a $f(x, y) = e^{(x-y)}$ centrada en $(0, 0)$.

c) Si $x = 0$ en la aproximación cuadrática, ¿para qué función se obtiene el polinomio de Taylor de segundo orden? Responder la misma pregunta para $y = 0$.

d) Completar la tabla.

x	y	$f(x, y)$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0			
0	0.1			
0.2	0.1			
0.2	0.5			
1	0.5			

CAS *e*) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente las superficies $z = f(x, y)$, $z = P_1(x, y)$ y $z = P_2(x, y)$.

76. ***Aproximación*** Repetir el ejercicio 75 con la función $f(x, y) = \cos(x + y)$.

77. Demostrar que el ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) está dado por

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2 + 1}}.$$

78. Demostrar el teorema 13.14.

PROYECTO DE TRABAJO

Flora silvestre

La diversidad de la flora silvestre en una pradera se puede medir contando el número de margaritas, lirios, amapolas, etc. Si existen n tipos de flores silvestres, cada una en una proporción p_i respecto a la población total, se sigue que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. La medida de diversidad de la población se define como

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i.$$

En esta definición, se entiende que $p_i \log_2 p_i = 0$ cuando $p_i = 0$. Las tablas muestran las proporciones de flores silvestres en una pradera en mayo, junio, agosto y septiembre.

Mayo

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$

Junio

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Agosto

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Septiembre

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	0	0	0	1

a) Determinar la diversidad de flores silvestres durante cada mes. ¿Cómo se interpretaría la diversidad en septiembre? ¿Qué mes tiene mayor diversidad?

b) Si la pradera contiene 10 tipos de flores silvestres en proporciones aproximadamente iguales, la diversidad de la población ¿es mayor o menor que la diversidad de una distribución similar con 4 tipos de flores? ¿Qué tipo de distribución (de 10 tipos de flores silvestres) produciría la diversidad máxima?

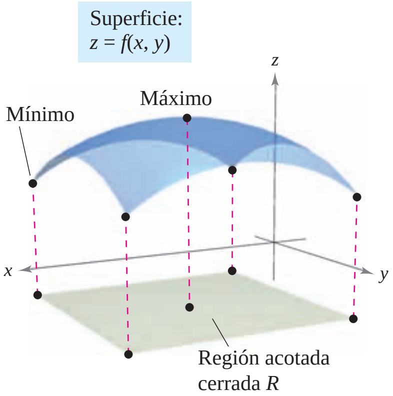
c) Sea H_n la diversidad máxima de n tipos de flores silvestres. ¿Tiende H_n a algún límite cuando $n \to \infty$?

PARA MAYOR INFORMACIÓN Los biólogos utilizan el concepto de diversidad para medir las proporciones de diferentes tipos de organismos dentro de un medio ambiente. Para más información sobre esta técnica, ver el artículo “Information Theory and Biological Diversity” de Steven Kolmes y Kevin Mitchell en la *UMAP Modules*.

13.8 Extremos de funciones de dos variables

- **Hallar extremos absolutos y relativos de una función de dos variables.**
- **Utilizar el criterio de las segundas derivadas parciales para hallar un extremo relativo de una función de dos variables.**

Extremos absolutos y extremos relativos



R contiene algún(os) punto(s) donde $f(x, y)$ es un mínimo y algún(os) punto(s) donde $f(x, y)$ es un máximo
Figura 13.64

En el capítulo 3 se estudiaron las técnicas para hallar valores extremos de una función de una (sola) variable. En esta sección se extienden estas técnicas a funciones de dos variables. Por ejemplo, en el teorema 13.15 se extiende el teorema del valor extremo para una función de una sola variable a una función de dos variables.

Considérese la función continua f de dos variables, definida en una región acotada cerrada R. Los valores $f(a, b)$ y $f(c, d)$ tales que

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d) \qquad (a, b) \text{ y } (c, d) \text{ están en } R.$$

para todo (x, y) en R se conocen como el **mínimo** y **máximo** de f en la región R, como se muestra en la figura 13.64. Recuérdese de la sección 13.2 que una región en el plano es *cerrada* si contiene todos sus puntos frontera. El teorema del valor extremo se refiere a una región en el plano que es cerrada y *acotada*. A una región en el plano se le llama **acotada** si es una subregión de un disco cerrado en el plano.

TEOREMA 13.15 TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

Sea f una función continua de dos variables x y y definida en una región acotada cerrada R en el plano xy.

1. Existe por lo menos un punto en R, en el que f toma un valor mínimo.
2. Existe por lo menos un punto en R, en el que f toma un valor máximo.

A un mínimo también se le llama un **mínimo absoluto** y a un máximo también se le llama un **máximo absoluto**. Como en el cálculo de una variable, se hace una distinción entre extremos absolutos y **extremos relativos**.

DEFINICIÓN DE EXTREMOS RELATIVOS

Sea f una función definida en una región R que contiene (x_0, y_0).

1. La función f tiene un **mínimo relativo** en (x_0, y_0) si

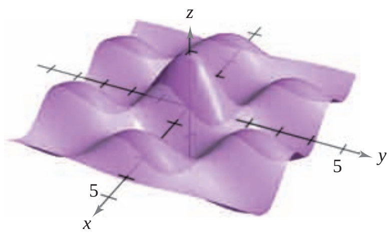
$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

para todo (x, y) en un disco *abierto* que contiene (x_0, y_0).

2. La función f tiene un **máximo relativo** en (x_0, y_0) si

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

para todo (x, y) en un disco *abierto* que contiene (x_0, y_0).



Extremos relativos
Figura 13.65

Decir que f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0) significa que el punto (x_0, y_0, z_0) es por lo menos tan alto como todos los puntos cercanos en la gráfica de $z = f(x, y)$. De manera similar, f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0) si (x_0, y_0, z_0) es por lo menos tan bajo como todos los puntos cercanos en la gráfica. (Ver la figura 13.65.)

Karl Weierstrass (1815-1897)

Aunque el teorema del valor extremo había sido ya utilizado antes por los matemáticos, el primero en proporcionar una demostración rigurosa fue el matemático alemán Karl Weierstrass. Weierstrass también proporcionó justificaciones rigurosas para muchos otros resultados matemáticos ya de uso común. A él se deben muchos de los fundamentos lógicos sobre los cuales se basa el cálculo moderno.

Para localizar los extremos relativos de f, se pueden investigar los puntos en los que el gradiente de f es **0** o los puntos en los cuales una de las derivadas parciales no exista. Tales puntos se llaman **puntos críticos** de f.

DEFINICIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

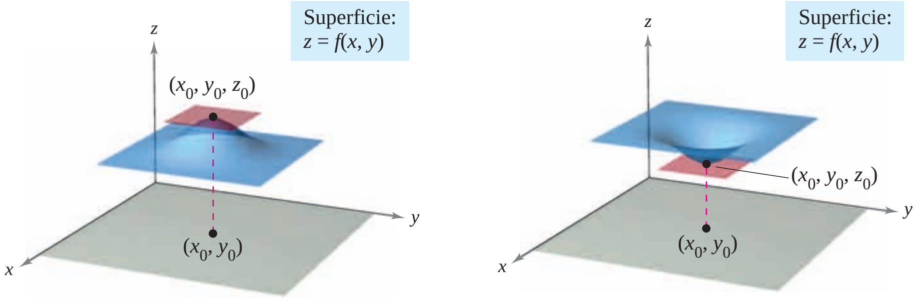
Sea f definida en una región abierta R que contiene (x_0, y_0). El punto (x_0, y_0) es un **punto crítico** de f si se satisface una de las condiciones siguientes:

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$
2. $f_x(x_0, y_0)$ o $f_y(x_0, y_0)$ no existe.

Recuérdese del teorema 13.11 que si f es diferenciable y

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}\\ &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}\end{aligned}$$

entonces toda derivada direccional en (x_0, y_0) debe ser 0. Esto implica que la función tiene un plano tangente horizontal al punto (x_0, y_0), como se muestra en la figura 13.66. Al parecer, tal punto es una localización probable para un extremo relativo. Esto es ratificado por el teorema 13.16.



Máximo relativo Mínimo relativo

Figura 13.66

TEOREMA 13.16 LOS EXTREMOS RELATIVOS SE PRESENTAN SÓLO EN PUNTOS CRÍTICOS

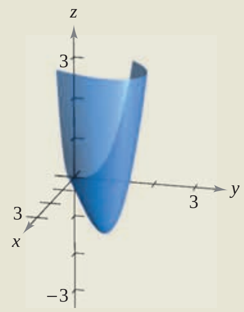
Si f tiene un extremo relativo en (x_0, y_0) en una región abierta R, entonces (x_0, y_0) es un punto crítico de f.

EXPLORACIÓN

Utilizar una herramienta de graficación para representar

$$z = x^3 - 3xy + y^3$$

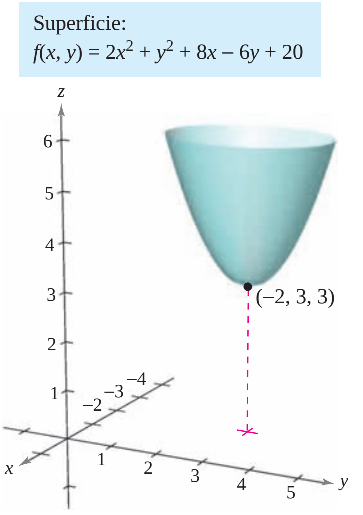
usando las cotas $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3$ y $-3 \le z \le 3$. Esta vista parece sugerir que la superficie tuviera un mínimo absoluto. Pero, ¿lo tiene?



EJEMPLO 1 Hallar un extremo relativo

Hallar los extremos relativos de

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20.$$



La función $z = f(x, y)$ tiene un mínimo relativo en $(-2, 3)$
Figura 13.67

Solución Para comenzar, encontrar los puntos críticos de f. Como

$$f_x(x, y) = 4x + 8 \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } x.$$

y

$$f_y(x, y) = 2y - 6 \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } y.$$

están definidas para todo x y y, los únicos puntos críticos son aquellos en los cuales las derivadas parciales de primer orden son 0. Para localizar estos puntos, se hacen $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ igual a 0, y se resuelven las ecuaciones

$$4x + 8 = 0 \quad \text{y} \quad 2y - 6 = 0$$

para obtener el punto crítico $(-2, 3)$. Completando cuadrados, se concluye que para todo $(x, y) \neq (-2, 3)$

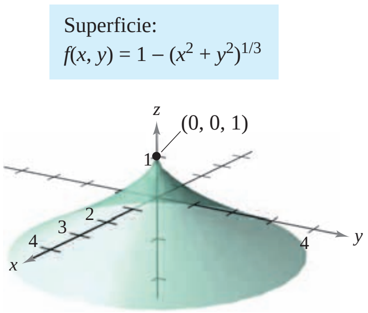
$$f(x, y) = 2(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 3 > 3.$$

Por tanto, un *mínimo* relativo de f se encuentra en $(-2, 3)$. El valor del mínimo relativo es $f(-2, 3) = 3$, como se muestra en la figura 13.67.

El ejemplo 1 muestra un mínimo relativo que se presenta en un tipo de punto crítico; el tipo en el cual ambos $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son 0. En el siguiente ejemplo se presenta un máximo relativo asociado al otro tipo de punto crítico; el tipo en el cual $f_x(x, y)$ o $f_y(x, y)$ no existe.

EJEMPLO 2 Hallar un extremo relativo

Determinar los extremos relativos de $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3}$.



$f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ están indefinidas en (0, 0)
Figura 13.68

Solución Como

$$f_x(x, y) = -\frac{2x}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } x.$$

y

$$f_y(x, y) = -\frac{2y}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \qquad \text{Derivada parcial con respecto a } y.$$

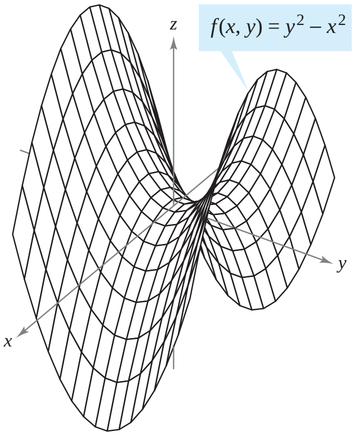
se sigue que ambas derivadas parciales existen para todo punto en el plano xy salvo para (0, 0). Como las derivadas parciales no pueden ser ambas 0 a menos que x y y sean 0, se concluye que (0, 0) es el único punto crítico. En la figura 13.68 se observa que $f(0, 0)$ es 1. Para cualquier otro (x, y) es claro que

$$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3} < 1.$$

Por tanto, f tiene un *máximo* relativo en (0, 0).

NOTA En el ejemplo 2, $f_x(x, y) = 0$ para todo punto distinto de (0, 0) en el eje y. Sin embargo, como $f_y(x, y)$ no es cero, éstos no son puntos críticos. Recuérdese que *una* de las derivadas parciales debe no existir o *las dos* deben ser 0 para tener un punto crítico. ■

El criterio de las segundas derivadas parciales



Punto silla en $(0, 0, 0)$:
$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$

Figura 13.69

El teorema 13.16 afirma que para encontrar extremos relativos sólo se necesita examinar los valores de $f(x, y)$ en los puntos críticos. Sin embargo, como sucede con una función de una variable, los puntos críticos de una función de dos variables no siempre son máximos o mínimos relativos. Algunos puntos críticos dan **puntos silla** que no son ni máximos relativos ni mínimos relativos.

Como ejemplo de un punto crítico que no es un extremo relativo, considérese la superficie dada por

$$f(x, y) = y^2 - x^2 \qquad \text{Paraboloide hiperbólico.}$$

que se muestra en la figura 13.69. En el punto $(0, 0)$, ambas derivadas parciales son 0. Sin embargo, la función f no tiene un extremo relativo en este punto ya que en todo disco abierto centrado en $(0, 0)$ la función asume valores negativos (a lo largo del eje x) y valores positivos (a lo largo del eje y). Por tanto, el punto $(0, 0, 0)$ es un punto silla de la superficie. (El término "punto silla" viene del hecho de que la superficie mostrada en la figura 13.69 se parece a una silla de montar.)

En las funciones de los ejemplos 1 y 2, fue relativamente fácil determinar los extremos relativos, porque cada una de las funciones estaba dada, o se podía expresar, en forma de cuadrado perfecto. Con funciones más complicadas, los argumentos algebraicos son menos adecuados y es mejor emplear los medios analíticos presentados en el siguiente criterio de las segundas derivadas parciales. Es el análogo, para funciones de dos variables, del criterio de las segundas derivadas para las funciones de una variable. La demostración de este teorema se deja para un curso de cálculo avanzado.

TEOREMA 13.17 CRITERIO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES

Sea f una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene un punto (a, b) para el cual

$$f_x(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(a, b) = 0.$$

Para buscar los extremos relativos de f, considérese la cantidad

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2.$$

1. Si $d > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces f tiene un **mínimo relativo** en (a, b).
2. Si $d > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces f tiene un **máximo relativo** en (a, b).
3. Si $d < 0$, entonces $(a, b, f(a, b))$ es un **punto silla**.
4. Si $d = 0$ el criterio no lleva a ninguna conclusión.

NOTA Si $d > 0$, entonces $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ deben tener el mismo signo. Esto significa que $f_{xx}(a, b)$ puede sustituirse por $f_{yy}(a, b)$ en las dos primeras partes del criterio. ■

Un recurso conveniente para recordar la fórmula de d en el criterio de las segundas derivadas parciales lo da el determinante 2×2

$$d = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

donde $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ de acuerdo al teorema 13.3.

EJEMPLO 3 Aplicación del criterio de las segundas derivadas parciales

Identificar los extremos relativos de $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Solución Para comenzar, se identifican los puntos críticos de f. Como

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 4y \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 4x - 4y$$

existen para todo x y y, los únicos puntos críticos son aquellos en los que ambas derivadas parciales de primer orden son 0. Para localizar estos puntos, se igualan a 0 $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ y se obtiene $-3x^2 + 4y = 0$ y $4x - 4y = 0$. De la segunda ecuación se sabe que $x = y$, y por sustitución en la primera ecuación, se obtienen dos soluciones: $y = x = 0$ y $y = x = \frac{4}{3}$. Como

$$f_{xx}(x, y) = -6x, \quad f_{yy}(x, y) = -4 \quad \text{y} \quad f_{xy}(x, y) = 4$$

se sigue que, para el punto crítico $(0, 0)$,

$$d = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 = 0 - 16 < 0$$

y, por el criterio de las segundas derivadas parciales, se puede concluir que $(0, 0, 1)$ es un punto silla. Para el punto crítico $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$,

$$\begin{aligned} d &= f_{xx}\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right) f_{yy}\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right) - \left[f_{xy}\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right)\right]^2 \\ &= -8(-4) - 16 \\ &= 16 \\ &> 0 \end{aligned}$$

y como $f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -8 < 0$ se concluye que f tiene un máximo relativo en $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, como se muestra en la figura 13.70.

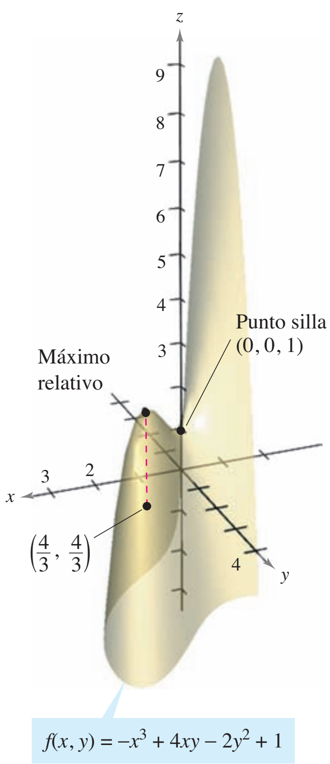


Figura 13.70

Con el criterio de las segundas derivadas parciales pueden no hallarse los extremos relativos por dos razones. Si alguna de las primeras derivadas parciales no existe, no se puede aplicar el criterio. Si

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 = 0$$

el criterio no es concluyente. En tales casos, se pueden tratar de hallar los extremos mediante la gráfica o mediante algún otro método, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Cuando el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente

Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = x^2y^2$.

Solución Como $f_x(x, y) = 2xy^2$ y $f_y(x, y) = 2x^2y$, se sabe que ambas derivadas parciales son igual a 0 si $x = 0$ o $y = 0$. Es decir, todo punto del eje x o del eje y es un punto crítico. Como

$$f_{xx}(x, y) = 2y^2, \qquad f_{yy}(x, y) = 2x^2 \qquad \text{y} \qquad f_{xy}(x, y) = 4xy$$

se sabe que si $x = 0$ o $y = 0$, entonces

$$\begin{aligned} d &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 \\ &= 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = -12x^2y^2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente, no funciona. Sin embargo, como $f(x, y) = 0$ para todo punto en los ejes x o y y $f(x, y) = x^2y^2 > 0$ en todos los otros puntos, se puede concluir que cada uno de estos puntos críticos son un mínimo absoluto, como se muestra en la figura 13.71.

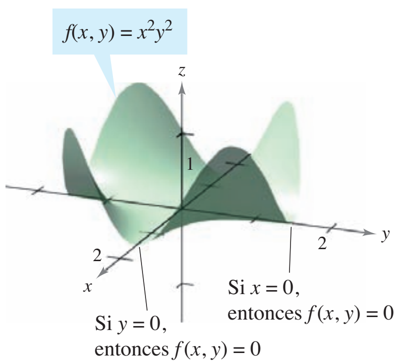


Figura 13.71

Los extremos absolutos de una función se pueden presentar de dos maneras. Primero, algunos extremos relativos también resultan ser extremos absolutos. Así, en el ejemplo 1, $f(-2, 3)$ es un mínimo absoluto de la función. (Por otro lado, el máximo relativo encontrado en el ejemplo 3 no es un máximo absoluto de la función.) Segundo, los extremos absolutos pueden presentarse en un punto frontera del dominio. Esto se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Encontrar extremos absolutos

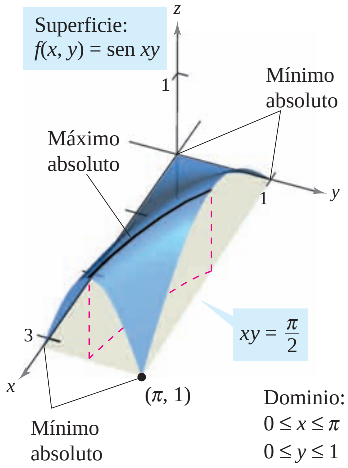


Figura 13.72

Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x, y) = \text{sen } xy$$

en la región cerrada dada por $0 \le x \le \pi$ y $0 \le y \le 1$.

Solución La expresión de las derivadas parciales

$$f_x(x, y) = y \cos xy \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = x \cos xy$$

permite ver que todo punto en la hipérbola dada por $xy = \pi/2$ es un punto crítico. En todos estos puntos el valor de f es

$$f(x, y) = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$$

el cual se sabe que es el máximo absoluto, como se muestra en la figura 13.72. El otro punto crítico de f *que se encuentra en la región dada* es $(0, 0)$. Este punto da un mínimo absoluto de 0, ya que

$$0 \le xy \le \pi$$

implica que

$$0 \le \text{sen } xy \le 1.$$

Para localizar otros extremos absolutos se deben considerar las cuatro fronteras de la región formadas por las trazas, de los planos verticales $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ y $y = 1$. Al hacer esto, se encuentra que sen $xy = 0$ en todos los puntos del eje x, en todos los puntos del eje y y en el punto $(\pi, 1)$. Cada uno de estos puntos es un mínimo absoluto de la superficie, como se muestra en la figura 13.72.

Los conceptos de extremos relativos y puntos críticos pueden extenderse a funciones de tres o más variables. Si todas las primeras derivadas parciales de

$$w = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

existen, puede mostrarse que se presenta un máximo o un mínimo relativo en $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ sólo si cada una de las primeras derivadas parciales en ese punto es 0. Esto significa que los puntos críticos se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_{x_2}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

La extensión del teorema 13.17 a tres o más variables también es posible, aunque no se considerará en este texto.

13.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, identificar los extremos de la función reconociendo su forma dada o su forma después de completar cuadrados. Verificar los resultados empleando derivadas parciales para localizar los puntos críticos y probar si son extremos relativos.

1. $g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2$
2. $g(x, y) = 5 - (x - 3)^2 - (y + 2)^2$
3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$
4. $f(x, y) = \sqrt{25 - (x - 2)^2 - y^2}$
5. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6$
6. $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 10x + 12y - 64$

En los ejercicios 7 a 16, examinar la función para localizar los extremos relativos.

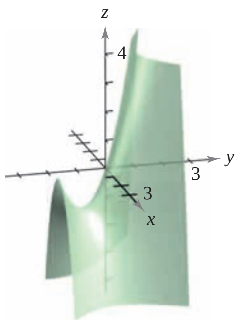
7. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 16$
8. $f(x, y) = -3x^2 - 2y^2 + 3x - 4y + 5$
9. $f(x, y) = -x^2 - 5y^2 + 10x - 10y - 28$
10. $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$
11. $z = x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 - 2x + y$
12. $z = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$
13. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
14. $h(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3} + 2$
15. $g(x, y) = 4 - |x| - |y|$
16. $f(x, y) = |x + y| - 2$

CAS **En los ejercicios 17 a 20, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar la superficie y localizar los extremos relativos y los puntos silla.**

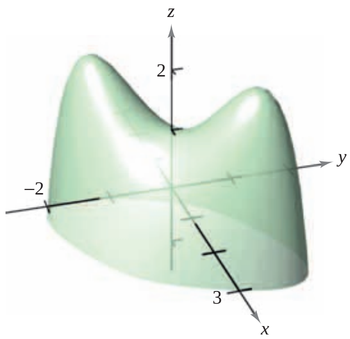
17. $z = \dfrac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$
18. $f(x, y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$
19. $z = (x^2 + 4y^2)e^{1 - x^2 - y^2}$
20. $z = e^{xy}$

En los ejercicios 21 a 28, examinar la función para localizar los extremos relativos y los puntos silla.

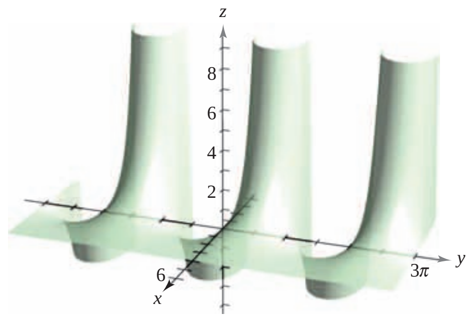
21. $h(x, y) = 80x + 80y - x^2 - y^2$
22. $g(x, y) = x^2 - y^2 - x - y$
23. $g(x, y) = xy$
24. $h(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$
25. $f(x, y) = x^2 - xy - y^2 - 3x - y$



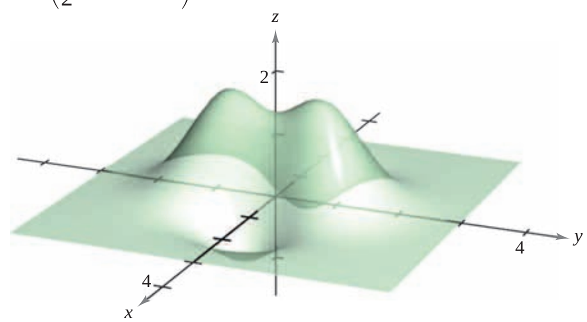
26. $f(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}(x^4 + y^4) + 1$



27. $z = e^{-x}\operatorname{sen} y$



28. $z = \left(\dfrac{1}{2} - x^2 + y^2\right)e^{1 - x^2 - y^2}$



CAS **En los ejercicios 29 y 30, buscar los extremos de la función sin utilizar los criterios de la derivada. Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie. (*Sugerencia:* Por observación, determinar si es posible que z sea negativo. ¿Cuándo z es igual a 0?)**

29. $z = \dfrac{(x - y)^4}{x^2 + y^2}$
30. $z = \dfrac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2}$

Para pensar **En los ejercicios 31 a 34, determinar si hay un máximo relativo, un mínimo relativo, un punto silla, o si la información es insuficiente para determinar la naturaleza de la función $f(x, y)$ en el punto crítico (x_0, y_0).**

31. $f_{xx}(x_0, y_0) = 9, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = 4, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = 6$
32. $f_{xx}(x_0, y_0) = -3, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = -8, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = 2$
33. $f_{xx}(x_0, y_0) = -9, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = 6, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = 10$
34. $f_{xx}(x_0, y_0) = 25, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = 8, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = 10$

35. Una función f tiene segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene el punto crítico (3, 7). La función tiene un mínimo en (3, 7) y $d > 0$ para el criterio de las segundas derivadas parciales. Determinar el intervalo para $f_{xy}(3, 7)$ si $f_{xx}(3, 7) = 2$ y $f_{yy}(3, 7) = 8$.

36. Una función f tiene segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene el punto crítico (a, b). Si $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ tiene signos opuestos, ¿qué implica esto? Explicar.

CAS **En los ejercicios 37 a 42, *a*) hallar los puntos críticos, *b*) determinar los extremos relativos, *c*) indicar los puntos críticos en los cuales el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente, y *d*) usar un sistema algebraico por computadora para trazar la función, clasificando cualesquiera puntos extremos y puntos silla.**

37. $f(x, y) = x^3 + y^3$

38. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x^2 + 9y^2 + 12x + 27y + 19$

39. $f(x, y) = (x - 1)^2(y + 4)^2$

40. $f(x, y) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}$

41. $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3}$

42. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$

En los ejercicios 43 y 44, hallar los puntos críticos de la función y, por la forma de la función, determinar si se presenta un máximo o un mínimo relativo en cada punto.

43. $f(x, y, z) = x^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2$

44. $f(x, y, z) = 9 - [x(y - 1)(z + 2)]^2$

En los ejercicios 45 a 54, hallar los extremos absolutos de la función en la región *R*. (En cada caso, *R* contiene sus puntos frontera.) Utilizar un sistema algebraico por computadora y confirmar los resultados.

45. $f(x, y) = x^2 - 4xy + 5$

$R = \{(x, y) : 1 \le x \le 4, \ 0 \le y \le 2\}$

46. $f(x, y) = x^2 + xy, \quad R = \{(x, y) : |x| \le 2, \ |y| \le 1\}$

47. $f(x, y) = 12 - 3x - 2y$

R: La región triangular en el plano xy con vértices (2, 0), (0, 1) y (1, 2)

48. $f(x, y) = (2x - y)^2$

R: La región triangular en el plano xy con vértices (2, 0), (0, 1) y (1, 2)

49. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y$

R: La región en el plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 4$

50. $f(x, y) = 2x - 2xy + y^2$

R: La región en el plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 1$

51. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2, \quad R = \{(x, y) : |x| \le 2, \ |y| \le 1\}$

52. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2, \quad R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 8\}$

53. $f(x, y) = \dfrac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$

$R = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\}$

54. $f(x, y) = \dfrac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$

$R = \{(x, y) : x \ge 0, \ y \ge 0, \ x^2 + y^2 \le 1\}$

Desarrollo de conceptos

55. La figura muestra las curvas de nivel de una función desconocida $f(x, y)$. ¿Qué información, si es que hay alguna, puede darse acerca de f en el punto A? Explicar el razonamiento.

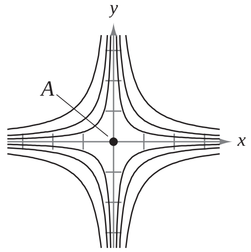


Figura para 55

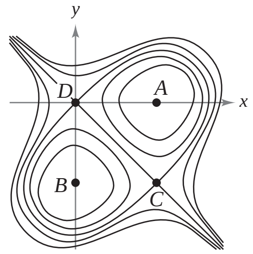


Figura para 56

56. La figura muestra las curvas de nivel de una función desconocida $f(x, y)$. ¿Qué información, si es que hay alguna, puede darse acerca de f en los puntos A, B, C y D? Explicar el razonamiento.

En los ejercicios 57 a 59, dibujar la gráfica de una función arbitraria *f* que satisfaga las condiciones dadas. Decir si la función tiene extremos o puntos silla. (Hay muchas respuestas correctas.)

57. $f_x(x, y) > 0$ y $f_y(x, y) < 0$ para todo (x, y).

58. Todas las primeras y segundas derivadas parciales de f son 0.

59. $f_x(0, 0) = 0, \ f_y(0, 0) = 0$

$$f_x(x, y)\begin{cases} < 0, & x < 0 \\ > 0, & x > 0 \end{cases}, \qquad f_y(x, y)\begin{cases} > 0, & y < 0 \\ < 0, & y > 0 \end{cases}$$

$f_{xx}(x, y) > 0, \ f_{yy}(x, y) < 0$ y $f_{xy}(x, y) = 0$ para todo (x, y).

Para discusión

60. Considerar las funciones

$f(x, y) = x^2 - y^2$ y $g(x, y) = x^2 + y^2$.

a) Demostrar que ambas funciones tienen un punto crítico en (0, 0).

b) Explicar cómo f y g se comportan de manera diferente en este punto crítico.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 61 a 64, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

61. Si f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0, z_0), entonces $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

62. Si $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, entonces f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0, z_0).

63. Entre cualesquiera dos mínimos relativos de f, aquí debe estar al menos un máximo relativo de f.

64. Si f es continua para todo x y y y tiene dos mínimos relativos, entonces f debe tener un máximo relativo por lo menos.

13.9 Aplicaciones de los extremos de funciones de dos variables

- **Resolver problemas de optimización con funciones de varias variables.**
- **Utilizar el método de mínimos cuadrados.**

Problemas de optimización aplicada

En esta sección se verán algunas de las muchas aplicaciones de los extremos de funciones de dos (o más) variables.

EJEMPLO 1 Hallar un volumen máximo

Una caja rectangular descansa en el plano xy con uno de sus vértices en el origen. El vértice opuesto está en el plano

$$6x + 4y + 3z = 24$$

como se muestra en la figura 13.73. Hallar el volumen máximo de la caja.

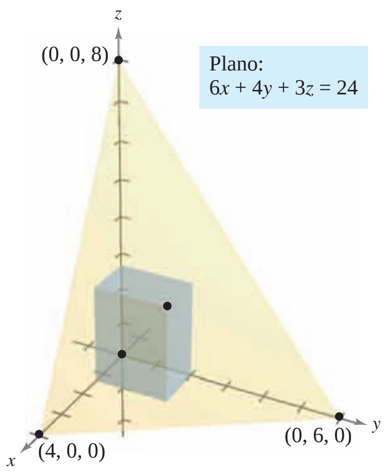


Figura 13.73

Solución Sean x, y y z el largo, ancho y la altura de la caja. Como un vértice de la caja se encuentra en el plano $6x + 4y + 3z = 24$, se sabe que $z = \frac{1}{3}(24 - 6x - 4y)$, y así se puede expresar el volumen xyz de la caja en función de dos variables.

$$\begin{aligned} V(x, y) &= (x)(y)\left[\tfrac{1}{3}(24 - 6x - 4y)\right] \\ &= \tfrac{1}{3}(24xy - 6x^2y - 4xy^2) \end{aligned}$$

Igualando a 0 las primeras derivadas parciales

$$V_x(x, y) = \tfrac{1}{3}(24y - 12xy - 4y^2) = \frac{y}{3}(24 - 12x - 4y) = 0$$

$$V_y(x, y) = \tfrac{1}{3}(24x - 6x^2 - 8xy) = \frac{x}{3}(24 - 6x - 8y) = 0$$

se obtienen los puntos críticos $(0, 0)$ y $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$. En $(0, 0)$ el volumen es 0, así que ese punto no proporciona un volumen máximo. En el punto $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$, se puede aplicar el criterio de las segundas derivadas parciales.

$$V_{xx}(x, y) = -4y$$

$$V_{yy}(x, y) = \frac{-8x}{3}$$

$$V_{xy}(x, y) = \tfrac{1}{3}(24 - 12x - 8y)$$

Como

$$V_{xx}\left(\tfrac{4}{3}, 2\right)V_{yy}\left(\tfrac{4}{3}, 2\right) - \left[V_{xy}\left(\tfrac{4}{3}, 2\right)\right]^2 = (-8)\left(-\tfrac{32}{9}\right) - \left(-\tfrac{8}{3}\right)^2 = \tfrac{64}{3} > 0$$

y

$$V_{xx}\left(\tfrac{4}{3}, 2\right) = -8 < 0$$

se concluye de acuerdo con el criterio de las segundas derivadas parciales que el volumen máximo es

$$\begin{aligned} V\left(\tfrac{4}{3}, 2\right) &= \tfrac{1}{3}\left[24\left(\tfrac{4}{3}\right)(2) - 6\left(\tfrac{4}{3}\right)^2(2) - 4\left(\tfrac{4}{3}\right)(2^2)\right] \\ &= \tfrac{64}{9} \text{ unidades cúbicas.} \end{aligned}$$

Nótese que el volumen es 0 en los puntos frontera del dominio triangular de V.

NOTA En muchos problemas prácticos, el dominio de la función a optimizar es una región acotada cerrada. Para encontrar los puntos mínimos o máximos, no sólo se deben probar los puntos críticos, sino también los valores de la función en los puntos frontera.

En las aplicaciones de los extremos a la economía y a los negocios a menudo se tiene más de una variable independiente. Por ejemplo, una empresa puede producir varios modelos de un mismo tipo de producto. El precio por unidad y la ganancia o beneficio por unidad de cada modelo son, por lo general, diferentes. La demanda de cada modelo es, a menudo, función de los precios de los otros modelos (así como su propio precio). El siguiente ejemplo ilustra una aplicación en la que hay dos productos.

EJEMPLO 2 Beneficio máximo

Un fabricante de artículos electrónicos determina que la ganancia o beneficio P (en dólares) obtenido al producir x unidades de un reproductor de DVD y y unidades de un grabador de DVD se aproxima mediante el modelo

$$P(x, y) = 8x + 10y - (0.001)(x^2 + xy + y^2) - 10\,000.$$

Hallar el nivel de producción que proporciona una ganancia o beneficio máximo. ¿Cuál es la ganancia máxima?

Solución Las derivadas parciales de la función de beneficio son

$$P_x(x, y) = 8 - (0.001)(2x + y) \qquad \text{y} \qquad P_y(x, y) = 10 - (0.001)(x + 2y).$$

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre el uso de la matemática en la economía, ver el artículo "Mathematical Methods of Economics" de Joel Franklin en *The American Mathematical Monthly*.

Igualando estas derivadas parciales a 0, se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} 8 - (0.001)(2x + y) &= 0 \\ 10 - (0.001)(x + 2y) &= 0 \end{aligned}$$

Después de simplificar, este sistema de ecuaciones lineales puede expresarse como

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8\,000 \\ x + 2y &= 10\,000. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $x = 2\,000$ y $y = 4\,000$. Las segundas derivadas parciales de P son

$$\begin{aligned} P_{xx}(2\,000, 4\,000) &= -0.002 \\ P_{yy}(2\,000, 4\,000) &= -0.002 \\ P_{xy}(2\,000, 4\,000) &= -0.001. \end{aligned}$$

Como $P_{xx} < 0$ y

$$P_{xx}(2\,000, 4\,000)P_{yy}(2\,000, 4\,000) - [P_{xy}(2\,000, 4\,000)]^2 = (-0.002)^2 - (-0.001)^2 > 0$$

se concluye que el nivel de producción con $x = 2\,000$ unidades y $y = 4\,000$ unidades proporciona el beneficio *máximo*. El beneficio máximo es

$$\begin{aligned} P(2\,000, 4\,000) &= 8(2\,000) + 10(4\,000) - (0.001)[2\,000^2 + 2\,000(4\,000) + 4\,000^2)] - 10\,000 \\ &= \$18\,000. \end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 2 se supuso que la planta industrial puede producir el número requerido de unidades para proporcionar el beneficio máximo. En la práctica, la producción estará limitada por restricciones físicas. En la sección siguiente se estudiarán tales problemas de optimización. ■

El método de mínimos cuadrados

En muchos de los ejemplos en este texto se han empleado **modelos matemáticos**, como en el caso del ejemplo 2, donde se utiliza un modelo cuadrático para el beneficio. Hay varias maneras para desarrollar tales modelos; una es la conocida como el **método de mínimos cuadrados**.

Al construir un modelo para representar un fenómeno particular, los objetivos son simplicidad y precisión. Por supuesto, estas metas entran a menudo en conflicto. Por ejemplo, un modelo lineal simple para los puntos en la figura 13.74 es

$$y = 1.8566x - 5.0246.$$

Sin embargo, la figura 13.75 muestra que si se elige el modelo cuadrático, ligeramente más complicado,* es

$$y = 0.1996x^2 - 0.7281x + 1.3749$$

se logra mayor precisión.

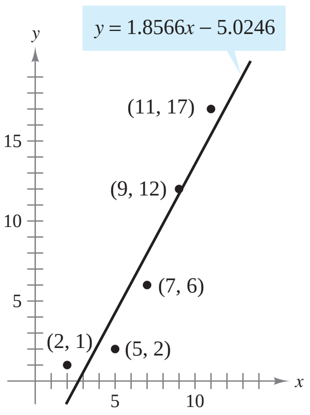


Figura 13.74

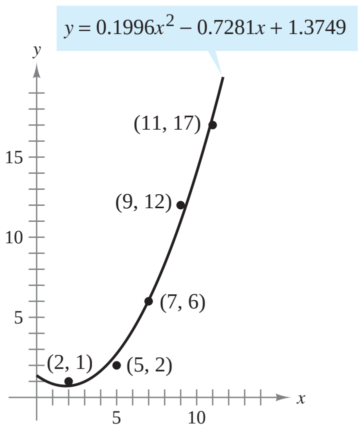


Figura 13.75

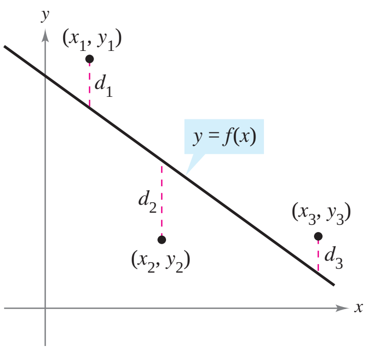
Como medida de qué tan bien se ajusta el modelo $y = f(x)$ a la colección de puntos

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

se pueden sumar los cuadrados de las diferencias entre los valores reales y y los valores dados por el modelo para obtener la **suma de los cuadrados de los errores o errores cuadráticos**

$$S = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2.$$

Suma de los cuadrados de los errores o errores cuadráticos.



Suma de los cuadrados de los errores:
$S = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$
Figura 13.76

Gráficamente, S puede interpretarse como la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre la gráfica de f y los puntos dados en el plano (los puntos de los datos), como se muestra en la figura 13.76. Si el modelo es perfecto, entonces $S = 0$. Sin embargo, cuando la perfección no es posible, podemos conformarnos con un modelo que haga mínimo el valor de S. Por ejemplo, la suma de los errores cuadráticos en el modelo lineal en la figura 13.74 es $S \approx 17$. En estadística, al *modelo lineal* que minimiza el valor de S se le llama **recta de regresión o por mínimos cuadrados**. La demostración de que esta recta realmente minimiza S requiere minimizar una función de dos variables.

** En el ejercicio 37 se describe un método para hallar el modelo de mínimos cuadrados para una colección de datos.*

ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833)

El método de mínimos cuadrados lo introdujo el matemático francés Adrien-Marie Legendre. Legendre es mejor conocido por su trabajo en geometría. De hecho, su texto "Elementos de Geometría" fue tan popular en Estados Unidos que se usó durante un periodo de más de 100 años y hubo 33 ediciones.

TEOREMA 13.18 RECTA DE REGRESIÓN DE MÍNIMOS CUADRADOS

La **recta de regresión de mínimos cuadrados** para $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ está dada por $f(x) = ax + b$, donde

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

DEMOSTRACIÓN Sea $S(a, b)$ la suma de los cuadrados de los errores para el modelo $f(x) = ax + b$ y el conjunto de puntos dado. Es decir,

$$\begin{aligned} S(a, b) &= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \end{aligned}$$

donde los puntos (x_i, y_i) representan constantes. Como S es una función de a y b, se pueden usar los métodos de la sección anterior para encontrar el valor mínimo de S. Las primeras derivadas parciales de S son

$$\begin{aligned} S_a(a, b) &= \sum_{i=1}^{n} 2x_i(ax_i + b - y_i) \\ &= 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ S_b(a, b) &= \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) \\ &= 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned}$$

Igualando estas dos derivadas parciales a 0, se obtienen los valores de a y b que indica el teorema. Se deja como ejercicio aplicar el criterio de las segundas derivadas parciales (ver ejercicio 47) para verificar que estos valores de a y b dan un mínimo.

Si los valores de x están simétricamente distribuidos respecto al eje y, entonces $\Sigma x_i = 0$ y las fórmulas para a y b se simplifican:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

y

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Esta simplificación es a menudo posible mediante una traslación de los valores x. Por ejemplo, si los valores x en una colección de datos son los años 2005, 2006, 2007, 2008 y 2009, se puede tomar 2007 como 0.

EJEMPLO 3 Hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados

Hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos $(-3, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$ y $(2, 3)$.

Solución La tabla muestra los cálculos necesarios para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados usando $n = 4$.

x	y	xy	x^2
-3	0	0	9
-1	1	-1	1
0	2	0	0
2	3	6	4
$\sum_{i=1}^{n} x_i = -2$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = 6$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 5$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 14$

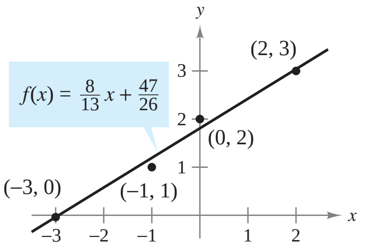
TECNOLOGÍA Muchas calculadoras tienen "incorporados" programas de regresión de mínimos cuadrados. Se puede utilizar una calculadora con estos programas para reproducir los resultados del ejemplo 3.

Aplicando el teorema 13.18 se obtiene

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{4(5) - (-2)(6)}{4(14) - (-2)^2} = \frac{8}{13}$$

y

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{4}\left[6 - \frac{8}{13}(-2)\right] = \frac{47}{26}.$$



Recta de regresión de mínimos cuadrados
Figura 13.77

La recta de regresión de mínimos cuadrados es $f(x) = \frac{8}{13}x + \frac{47}{26}$, como se muestra en la figura 13.77.

13.9 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, hallar la distancia mínima del punto al plano $x - y + z = 3$. (*Sugerencia:* Para simplificar los cálculos, minimizar el cuadrado de la distancia.)

1. $(0, 0, 0)$ **2.** $(1, 2, 3)$

En los ejercicios 3 y 4, encontrar la distancia mínima desde el punto a la superficie $z = \sqrt{1 - 2x - 2y}$. (*Sugerencia:* En el ejercicio 4, usar la operación raíz de una herramienta de graficación.)

3. $(-2, -2, 0)$

4. $(0, 0, 2)$

En los ejercicios 5 a 8, hallar tres números positivos *x*, *y* y *z* que satisfagan las condiciones dadas.

5. El producto es 27 y la suma es mínima.

6. La suma es 32 y $P = xy^2z$ es máxima.

7. La suma es 30 y la suma de los cuadrados es mínima.

8. El producto es 1 y la suma de los cuadrados es mínima.

9. ***Costos*** Un contratista de mejorías caseras está pintando las paredes y el techo de una habitación rectangular. El volumen de la habitación es de 668.25 pies cúbicos. El costo de pintura de pared es de \$0.06 por pie cuadrado y el costo de pintura de techo es de \$0.11 por pie cuadrado. Encontrar las dimensiones de la habitación que den por resultado un mínimo costo para la pintura. ¿Cuál es el mínimo costo por la pintura?

10. ***Volumen máximo*** El material para construir la base de una caja abierta cuesta 1.5 veces más por unidad de área que el material para construir los lados. Dada una cantidad fija de dinero C, hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede ser fabricada.

11. ***Volumen máximo*** El volumen de un elipsoide

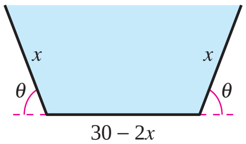
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es $4\pi abc/3$. Dada una suma fija $a + b + c$, mostrar que el elipsoide de volumen máximo es una esfera.

12. ***Volumen máximo*** Mostrar que la caja rectangular de volumen máximo inscrita en una esfera de radio r es un cubo.

13. ***Volumen y área exterior*** Mostrar que una caja rectangular de volumen dado y área exterior mínima es un cubo.

14. ***Área*** Un comedero de secciones transversales en forma de trapecio se forma doblando los extremos de una lámina de aluminio de 30 pulgadas de ancho (ver la figura). Hallar la sección transversal de área máxima.



15. ***Ingreso máximo*** Una empresa fabrica dos tipos de zapatos tenis, tenis para correr y tenis para baloncesto. El ingreso total de x_1 unidades de tenis para correr y x_2 unidades de tenis de baloncesto es $R = -5x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_1x_2 + 42x_1 + 102x_2$, donde x_1 y x_2 están en miles de unidades. Hallar las x_1 y x_2 que maximizan el ingreso.

16. ***Ganancia o beneficio máximo*** Una empresa fabrica velas en dos lugares. El costo de producción de x_1 unidades en el lugar 1 es

$$C_1 = 0.02x_1^2 + 4x_1 + 500$$

y el costo de producción de x_2 unidades en el lugar 2 es

$$C_2 = 0.05x_2^2 + 4x_2 + 275.$$

Las velas se venden a \$15 por unidad. Hallar la cantidad que debe producirse en cada lugar para aumentar al máximo el beneficio $P = 15(x_1 + x_2) - C_1 - C_2$.

17. ***Ley de Hardy-Weinberg*** Los tipos sanguíneos son genéticamente determinados por tres alelos A, B y O. (Alelo es cualquiera de las posibles formas de mutación de un gen.) Una persona cuyo tipo sanguíneo es AA, BB u OO es homocigótica. Una persona cuyo tipo sanguíneo es AB, AO o BO es heterocigótica. La ley Hardy-Weinberg establece que la proporción P de individuos heterocigótica en cualquier población dada es

$$P(p, q, r) = 2pq + 2pr + 2qr$$

donde p representa el porcentaje de alelos A en la población, q representa el porcentaje de alelos B en la población y r representa el porcentaje de alelos O en la población. Utilizar el hecho de que $p + q + r = 1$ para mostrar que la proporción máxima de individuos heterocigóticos en cualquier población es $\frac{2}{3}$.

18. ***Índice de diversidad de Shannon*** Una forma de medir diversidad de especies es usar el índice de diversidad de Shannon H. Si un hábitat consiste de tres especies, A, B y C, su índice de diversidad de Shannon es

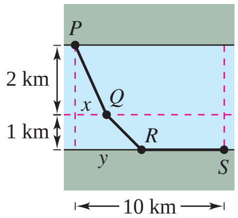
$$H = -x \ln x - y \ln y - z \ln z$$

donde x es el porcentaje de especies A en el hábitat, y es el porcentaje de especies B en el hábitat y z es el porcentaje de especies C en el hábitat.

a) Usar el factor de $x + y + z = 1$ para demostrar que el valor máximo de H ocurre cuando $x = y = z = \frac{1}{3}$.

b) Usar el resultado del inciso *a*) para demostrar que el valor máximo de H en este hábitat es de ln 3.

19. ***Costo mínimo*** Hay que construir un conducto para agua desde el punto P al punto S y debe atravesar regiones donde los costos de construcción difieren (ver la figura). El costo por kilómetro en dólares es $3k$ de P a Q, $2k$ de Q a R y k de R a S. Hallar x y y tales que el costo total C se minimice.



20. ***Distancia*** Una empresa tiene tres tiendas de ventas al menudeo localizadas en los puntos (0, 0), (2, 2) y (−2, 2) (ver la figura). La dirección planea construir un centro de distribución localizado de tal manera que la suma S de las distancias del centro a las tiendas sea mínimo. Por la simetría del problema es claro que el centro de distribución se localizará en el eje y, y por consiguiente S es una función de una variable y. Utilizando las técnicas presentadas en el capítulo 3, calcular el valor de y requerido.

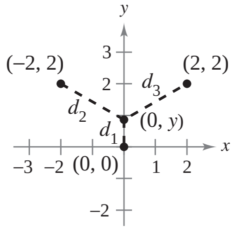


Figura para 20

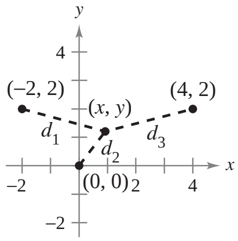


Figura para 21

CAS **21.** ***Investigación*** Las tiendas de ventas al menudeo descritas en el ejercicio 20 se localizan en (0, 0), (4, 2) y (−2, 2) (ver la figura). La localización del centro de distribución es (x, y), y por consiguiente la suma S de las distancias es una función de x y y.

a) Escribir la expresión que da la suma S de las distancias. Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar S. ¿Tiene esta superficie un mínimo?

b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y obtener S_x y S_y. Observar que resolver el sistema $S_x = 0$ y $S_y = 0$ es muy difícil. Por tanto, aproximar la localización del centro de distribución.

c) Una estimación inicial del punto crítico es $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Calcular $-\nabla S(1, 1)$ con componentes $-S_x(1, 1)$ y $-S_y(1, 1)$. ¿Qué dirección es la dada por el vector $-\nabla S(1, 1)$?

d) La segunda estimación del punto crítico es

$$(x_2, y_2) = (x_1 - S_x(x_1, y_1)t, y_1 - S_y(x_1, y_1)t).$$

Si se sustituyen estas coordenadas en $S(x, y)$, entonces S se convierte en una función de una variable t. Hallar el valor de t que minimiza S. Utilizar este valor de t para estimar (x_2, y_2).

e) Realizar dos iteraciones más del proceso del inciso *d*) para obtener (x_4, y_4). Dada esta localización del centro de distribución, ¿cuál es la suma de las distancias a las tiendas al menudeo?

f) Explicar por qué se usó $-\nabla S(x, y)$ para aproximar el valor mínimo de S. ¿En qué tipo de problemas se usaría $\nabla S(x, y)$?

22. ***Investigación*** Repetir el ejercicio 21 con tiendas de ventas al menudeo localizadas en los puntos $(-4, 0)$, $(1, 6)$ y $(12, 2)$.

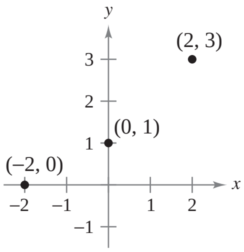
Desarrollo de conceptos

23. Con las propias palabras, describir la estrategia para la solución de problemas de aplicación de mínimos y máximos.

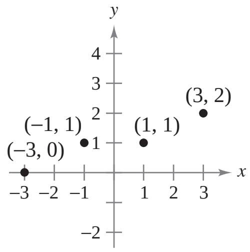
24. Con las propias palabras, describir el método de mínimos cuadrados para elaborar modelos matemáticos.

En los ejercicios 25 a 28, *a*) hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados y *b*) calcular *S*, la suma de los errores al cuadrado. Utilizar el programa para regresión de una herramienta de graficación para verificar los resultados.

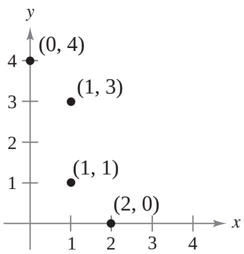
25.



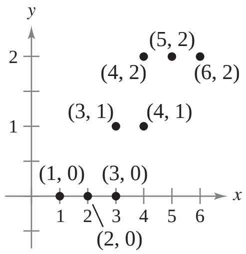
26.



27.



28.



En los ejercicios 29 a 32, hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos dados. Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para verificar los resultados. Utilizar la herramienta de graficación para trazar los puntos y representar la recta de regresión.

29. $(0, 0), (1, 1), (3, 4), (4, 2), (5, 5)$

30. $(1, 0), (3, 3), (5, 6)$

31. $(0, 6), (4, 3), (5, 0), (8, -4), (10, -5)$

32. $(6, 4), (1, 2), (3, 3), (8, 6), (11, 8), (13, 8)$

33. ***Modelo matemático*** En la tabla se muestran las edades x (en años) y las presiones arteriales sistólicas y de siete hombres.

Edad, x	16	25	39	45	49	64	70
Presión arterial sistólica, y	109	122	150	165	159	183	199

a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos.

b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los datos y representar el modelo.

c) Utilizar el modelo para aproximar la variación en la presión arterial sistólica por cada incremento de un año en la edad.

34. ***Modelo matemático*** El gerente de tienda quiere conocer la demanda y de una barra de energía en función del precio x. Las ventas diarias a tres precios diferentes de la barra de energía se muestran en la tabla.

Precio, x	\$1.29	\$1.49	\$1.69
Demanda, y	450	375	330

a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos.

b) Usar el modelo para estimar la demanda cuando el precio es \$1.59.

35. ***Modelo matemático*** Un agrónomo prueba cuatro fertilizantes en los campos de cultivo para determinar la relación entre la producción de trigo y (en bushels por acre) y la cantidad de fertilizante x (en cientos de libras por acre). Los resultados se muestran en la tabla.

Fertilizante, x	1.0	1.5	2.0	2.5
Rendimiento, y	32	41	48	53

Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos, y estimar la producción para una aplicación de 160 libras de fertilizante por acre.

36. ***Modelo matemático*** La tabla muestra los porcentajes x y los números y (en millones) de mujeres en la fuerza laboral en determinados años. *(Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics)*

Año	1970	1975	1980	1985
Porcentaje, x	43.3	46.3	51.5	54.5
Número, y	31.5	37.5	45.5	51.1

Año	1990	1995	2000	2005
Porcentaje, x	57.5	58.9	59.9	59.3
Número, y	56.8	60.9	66.3	69.3

a) Utilizar el programa para regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos.

b) Según este modelo, ¿aproximadamente cuántas mujeres ingresan a la fuerza laboral por cada incremento de un punto en el porcentaje de mujeres en la fuerza laboral?

37. Hallar un sistema de ecuaciones cuya solución proporcione los coeficientes a, b y c para el modelo cuadrático de regresión de mínimos cuadrados $y = ax^2 + bx + c$ para los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ minimizando la suma

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2.$$

Para discusión

38. La suma de las longitudes y el tamaño (perímetro de una sección transversal) de un paquete llevado por un servicio de entrega a domicilio no puede exceder 108 pulgadas. Encontrar las dimensiones del paquete rectangular de más grande volumen que puede ser enviado.

En los ejercicios 39 a 42, utilizar el resultado del ejercicio 37 para hallar el modelo cuadrático de regresión de mínimos cuadrados para los puntos dados. Usar el programa de regresión de una herramienta de graficación para confirmar los resultados. Utilizar la herramienta de graficación para trazar los puntos y representar la curva de regresión de mínimos cuadrados.

39. $(-2, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 5)$

40. $(-4, 5), (-2, 6), (2, 6), (4, 2)$

41. $(0, 0), (2, 2), (3, 6), (4, 12)$ **42.** $(0, 10), (1, 9), (2, 6), (3, 0)$

43. ***Modelo matemático*** Después de que fue desarrollado un nuevo turbopropulsor para un motor de automóvil, se obtuvieron los datos experimentales siguientes de velocidad y en millas por hora a intervalos x de dos segundos.

Tiempo, x	0	2	4	6	8	10
Velocidad, y	0	15	30	50	65	70

a) Hallar un modelo cuadrático de regresión de mínimos cuadrados para los datos. Utilizar una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los puntos y representar el modelo.

44. ***Modelo matemático*** La tabla muestra la población mundial y (en miles de millones) para cinco diferentes años. Considerar que $x = 8$ representa el año 2008. *(Fuente: U.S. Census Bureau, International Data Base)*

Año, x	1998	2000	2002	2004	2006
Población, y	5.9	6.1	6.2	6.4	6.5

a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos.

b) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar el modelo cuadrático de regresión de mínimos cuadrados para los datos.

c) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los datos y representar los modelos.

d) Utilizar ambos modelos para estimar la población mundial en el año 2014. ¿Cómo difieren los dos modelos cuando se extrapola hacia el futuro?

45. ***Modelo matemático*** Un meteorólogo mide la presión atmosférica P (en kilogramos por metro cuadrado) a una altitud h (en kilómetros). Los datos se muestran en la tabla.

Altitud, h	0	5	10	15	20
Presión, P	10 332	5 583	2 376	1 240	517

a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar una recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos $(h, \ln P)$.

b) El resultado del inciso *a*) es una ecuación de la forma $\ln P = ah + b$. Expresar esta forma logarítmica en forma exponencial.

c) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los datos originales y representar el modelo exponencial del inciso *b*).

d) Si una herramienta de graficación puede ajustar modelos logarítmicos a datos, utilizarla para verificar el resultado del inciso *b*).

46. ***Modelo matemático*** Los puntos terminales del intervalo de visión se llaman punto próximo y punto lejano del ojo. Con la edad, estos puntos cambian. La tabla muestra los puntos próximos y (en pulgadas) a varias edades x (en años). *(Fuente: Ophtalmology & Physiological Optics)*

Edad, x	16	32	44	50	60
Punto próximo, y	3.0	4.7	9.8	19.7	39.4

a) Hallar un modelo racional para los datos tomando el recíproco o inverso de los puntos próximos para generar los puntos $(x, 1/y)$. Utilizar el programa para regresión de una herramienta de graficación para hallar una recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos revisados. La recta resultante tiene la forma $1/y = ax + b$. Despejar y.

b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los datos y representar el modelo.

c) ¿Puede utilizarse el modelo para predecir el punto próximo en una persona de 70 años? Explicar.

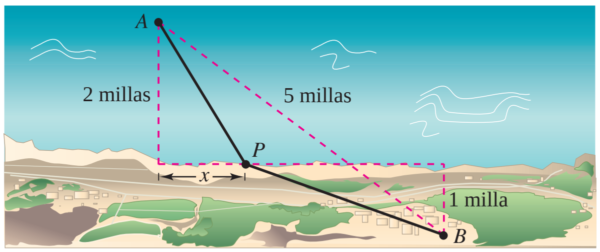
47. Usar el criterio de las segundas derivadas parciales para verificar que las fórmulas para a y b proporcionadas en el teorema 13.18 llevan a un mínimo.

$\left[\textit{Sugerencia:}\text{ Considerar el hecho que } n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.\right]$

PROYECTO DE TRABAJO

Construcción de un oleoducto

Una empresa petrolera desea construir un oleoducto desde su plataforma A hasta su refinería B. La plataforma está a 2 millas de la costa, y la refinería está 1 milla tierra adentro. Además, A y B están a 5 millas de distancia una de otra, como se muestra en la figura.



El costo de construcción del oleoducto es \$3 millones por milla en el mar, y \$4 millones por milla en tierra. Por tanto, el costo del oleoducto depende de la localización del punto P en la orilla. ¿Cuál sería la ruta más económica para el oleoducto?

Imaginar que hay que redactar un informe para la empresa petrolera acerca de este problema. Sea x la distancia mostrada en la figura. Determinar el costo de construir el oleoducto de A a P, y el costo de P a B. Analizar alguna trayectoria muestra para el oleoducto y sus costos correspondientes. Por ejemplo, ¿cuál es el costo de la ruta más directa? Utilizar después el cálculo para determinar la ruta del oleoducto que minimiza el costo. Explicar todos los pasos del desarrollo e incluir una gráfica pertinente.

13.10 Multiplicadores de Lagrange

- **Entender el método de los multiplicadores de Lagrange.**
- **Utilizar los multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de optimización con restricciones.**
- **Utilizar el método de multiplicadores de Lagrange con dos restricciones.**

Multiplicadores de Lagrange

Muchos problemas de optimización tienen **restricciones**, o **ligaduras**, para los valores que pueden usarse para dar la solución óptima. Tales restricciones tienden a complicar los problemas de optimización porque la solución óptima puede presentarse en un punto frontera del dominio. En esta sección se estudia una ingeniosa técnica para resolver tales problemas. Es el **método de los multiplicadores de Lagrange**.

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813)
El método de los multiplicadores de Lagrange debe su nombre al matemático francés Joseph Louis Lagrange. Lagrange presentó el método por primera vez en su famoso trabajo sobre mecánica, escrito cuando tenía apenas 19 años.

Para ver cómo funciona esta técnica, supóngase que se quiere hallar el rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la elipse dada por

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Sea (x, y) el vértice del rectángulo que se encuentra en el primer cuadrante, como se muestra en la figura 13.78. Como el rectángulo tiene lados de longitudes $2x$ y $2y$, su área está dada por

$$f(x, y) = 4xy. \qquad \text{Función objetivo.}$$

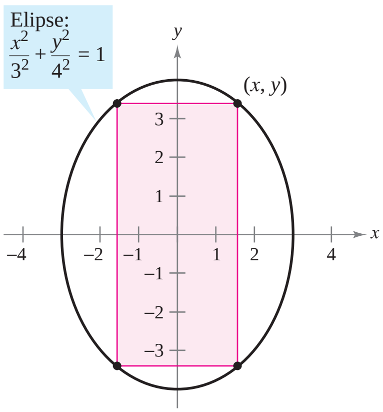
Se quieren hallar x y y tales que $f(x, y)$ es un máximo. La elección de (x, y) está restringida a puntos del primer cuadrante que están en la elipse

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1. \qquad \text{Restricción.}$$

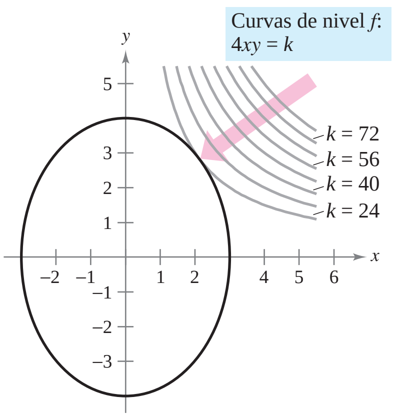
Ahora, considérese la ecuación restrictiva o de ligadura como una curva de nivel fija de

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2}.$$

Las curvas de nivel de f representan una familia de hipérbolas $f(x, y) = 4xy = k$. En esta familia, las curvas de nivel que satisfacen la restricción dada corresponden a hipérbolas que cortan a la elipse. Es más, para maximizar $f(x, y)$, se quiere hallar la hipérbola que justo satisfaga la restricción. La curva de nivel que hace esto es la que es *tangente* a la elipse, como se muestra en la figura 13.79.



Función objetivo: $f(x, y) = 4xy$
Figura 13.78



Restricción: $g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$
Figura 13.79

Para encontrar la hipérbola apropiada se usa el hecho de que dos curvas son tangentes en un punto si y sólo si sus vectores gradiente son paralelos. Esto significa que $\nabla f(x, y)$ debe ser un múltiplo escalar de $\nabla g(x, y)$ en el punto de tangencia. En el contexto de los problemas de optimización con restricciones, este escalar se denota con la letra griega λ (*lambda* minúscula del alfabeto griego).

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

Al escalar λ se le conoce como un **multiplicador de Lagrange**. El teorema 13.19 da las condiciones necesarias para la existencia de tales multiplicadores.

TEOREMA 13.19 TEOREMA DE LAGRANGE

Sean f y g funciones con primeras derivadas parciales continuas, y tales que f tiene un extremo en un punto (x_0, y_0) sobre la curva suave de restricción $g(x, y) = c$. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

DEMOSTRACIÓN Para empezar, se representa la curva suave dada por $g(x, y) = c$ mediante la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$$

donde x' y y' son continuas en un intervalo abierto I. Se define la función h como $h(t) = f(x(t), y(t))$. Entonces, como $f(x_0, y_0)$ es un valor extremo de f, se sabe que

$$h(t_0) = f(x(t_0), y(t_0)) = f(x_0, y_0)$$

es un valor extremo de h. Esto implica que $h'(t_0) = 0$, y, por la regla de la cadena,

$$h'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

Así, $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$. Por el teorema 13.12, $\nabla g(x_0, y_0)$ también es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$. Por consiguiente, los gradientes $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0)$ son paralelos y debe existir un escalar λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

NOTA Se puede demostrar que el teorema de Lagrange también es válido para funciones de tres variables, usando un argumento similar con superficies de nivel y con el teorema 13.14.

El método de los multiplicadores de Lagrange emplea el teorema 13.19 para encontrar los valores extremos de una función f sujeta a una restricción.

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Sean f y g funciones que satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange, y sea f una función que tiene un mínimo o un máximo sujeto a la restricción $g(x, y) = c$. Para hallar el mínimo o el máximo de f, seguir los pasos descritos a continuación.

1. Resolver simultáneamente las ecuaciones $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ y $g(x, y) = c$ resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) &= \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) &= c \end{aligned}$$

2. Evaluar f en cada punto solución obtenido en el primer paso. El valor mayor da el máximo de f sujeto a la restricción $g(x, y) = c$, y el valor menor da el mínimo de f sujeto a la restricción $g(x, y) = c$.

NOTA Como se verá en los ejemplos 1 y 2, el método de los multiplicadores de Lagrange requiere resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Esto a menudo requiere de alguna manipulación algebraica ingeniosa.

Problemas de optimización con restricciones o ligaduras

En el problema presentado al principio de esta sección, se quería maximizar el área de un rectángulo inscrito en una elipse. El ejemplo 1 muestra cómo usar los multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

EJEMPLO 1 Multiplicador de Lagrange con una restricción o ligadura

Hallar el valor máximo de $f(x, y) = 4xy$ donde $x > 0$ y $y > 0$, sujeto a la restricción $(x^2/3^2) + (y^2/4^2) = 1$.

Solución Para comenzar, sea

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Igualando $\nabla f(x, y) = 4y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j}$ y $\lambda \nabla g(x, y) = (2\lambda x/9)\mathbf{i} + (\lambda y/8)\mathbf{j}$, se puede obtener el sistema de ecuaciones siguiente.

$$4y = \frac{2}{9}\lambda x \qquad f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y).$$

$$4x = \frac{1}{8}\lambda y \qquad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y).$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \qquad \text{Restricción.}$$

De la primera ecuación, se obtiene $\lambda = 18y/x$, que sustituido en la segunda ecuación da

$$4x = \frac{1}{8}\left(\frac{18y}{x}\right)y \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{9}{16}y^2.$$

Sustituyendo en la tercera ecuación x^2 por este valor se tiene

$$\frac{1}{9}\left(\frac{9}{16}y^2\right) + \frac{1}{16}y^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad y^2 = 8.$$

Así, $y = \pm 2\sqrt{2}$. Como se requiere que $y > 0$, se elige el valor positivo y se halla que

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{9}{16}y^2 \\ &= \frac{9}{16}(8) = \frac{9}{2} \\ x &= \frac{3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Por tanto, el valor máximo de f es

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right) = 4xy = 4\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(2\sqrt{2}\right) = 24.$$

Nótese que el expresar la restricción como

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0$$

no afecta la solución, la constante se elimina cuando se calcula ∇g.

NOTA El ejemplo 1 también puede resolverse utilizando las técnicas aprendidas en el capítulo 3. Para ver cómo se hace esto, calcular el valor máximo de $A = 4xy$ dado que

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Para empezar, de la segunda ecuación se despeja y y se obtiene

$$y = \tfrac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}.$$

Después se sustituye este valor en la primera ecuación para obtener

$$A = 4x\left(\tfrac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}\right).$$

Por último, se usan las técnicas del capítulo 3 para maximizar A.

EJEMPLO 2 Una aplicación a la economía

La función de producción de Cobb-Douglas (ver ejemplo 5, sección 13.1) para un fabricante de software está dada por

$$f(x, y) = 100x^{3/4}y^{1/4} \qquad \text{Función objetivo.}$$

donde x representa las unidades de trabajo (a \$150 por unidad) y y representa las unidades de capital (a \$250 por unidad). El costo total de trabajo y capital está limitado a \$50 000. Hallar el nivel máximo de producción de este fabricante.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre la utilización de los multiplicadores de Lagrange en economía, ver el artículo “Lagrange Multiplier Problems in Economics” de John V. Baxley y John C. Moorhouse en *The American Mathematical Monthly*.

Solución De la función dada, se tiene

$$\nabla f(x, y) = 75x^{-1/4}y^{1/4}\mathbf{i} + 25x^{3/4}y^{-3/4}\mathbf{j}.$$

El límite para el costo de trabajo y capital se refleja en la restricción o ligadura

$$g(x, y) = 150x + 250y = 50\,000. \qquad \text{Restricción.}$$

Así, $\lambda\nabla g(x, y) = 150\lambda\mathbf{i} + 250\lambda\mathbf{j}$. Esto da lugar al sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} 75x^{-1/4}y^{1/4} &= 150\lambda && f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y). \\ 25x^{3/4}y^{-3/4} &= 250\lambda && f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y). \\ 150x + 250y &= 50\,000 && \text{Restricción.} \end{aligned}$$

Resolviendo para λ en la primera ecuación

$$\lambda = \frac{75x^{-1/4}y^{1/4}}{150} = \frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2}$$

y despejando λ de la segunda ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} 25x^{3/4}y^{-3/4} &= 250\left(\frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2}\right) \\ 25x &= 125y. && \text{Multiplicar por } x^{1/4}y^{3/4}. \end{aligned}$$

Así, $x = 5y$. Sustituyendo en la tercera ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} 150(5y) + 250y &= 50\,000 \\ 1\,000y &= 50\,000 \\ y &= 50 \text{ unidades de capital} \\ x &= 250 \text{ unidades de trabajo.} \end{aligned}$$

Por tanto, el nivel máximo de producción es

$$\begin{aligned} f(250, 50) &= 100(250)^{3/4}(50)^{1/4} \\ &\approx 16\,719 \text{ unidades del producto.} \end{aligned}$$

Los economistas llaman al multiplicador de Lagrange obtenido en una función de producción **productividad marginal del capital**. Por ejemplo, en el ejemplo 2 la productividad marginal de capital en $x = 250$ y $y = 50$ es

$$\lambda = \frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2} = \frac{(250)^{-1/4}(50)^{1/4}}{2} \approx 0.334$$

lo cual significa que por cada dólar adicional gastado en la producción, puede producirse 0.334 unidades adicionales del producto.

EJEMPLO 3 Multiplicadores de Lagrange y tres variables

Hallar el valor mínimo de

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 \qquad \text{Función objetivo.}$$

sujeto a la restricción o ligadura $2x - 3y - 4z = 49$.

Solución Sea $g(x, y, z) = 2x - 3y - 4z = 49$. Entonces, como

$$\nabla f(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \lambda\nabla g(x, y, z) = 2\lambda\mathbf{i} - 3\lambda\mathbf{j} - 4\lambda\mathbf{k}$$

se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} 4x &= 2\lambda & & f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z). \\ 2y &= -3\lambda & & f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z). \\ 6z &= -4\lambda & & f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z). \\ 2x - 3y - 4z &= 49 & & \text{Restricción.} \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $x = 3$, $y = -9$ y $z = -4$. Por tanto, el valor óptimo de f es

$$\begin{aligned} f(3, -9, -4) &= 2(3)^2 + (-9)^2 + 3(-4)^2 \\ &= 147. \end{aligned}$$

De la función original y de la restricción, resulta claro que $f(x, y, z)$ no tiene máximo. Por tanto, el valor óptimo de f determinado arriba es un mínimo.

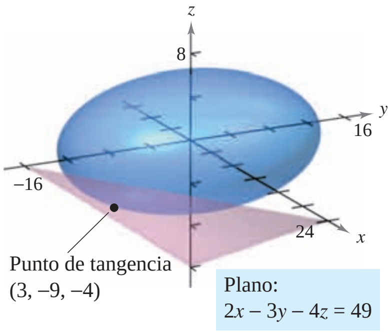


Figura 13.80

Al principio de esta sección se dio una interpretación gráfica del problema de optimización con restricciones para dos variables. Con tres variables, la interpretación es similar, sólo que se usan superficies de nivel en lugar de curvas de nivel. Así, en el ejemplo 3, las superficies de nivel de f son elipsoides centradas en el origen, y la restricción

$$2x - 3y - 4z = 49$$

es un plano. El valor mínimo de f está representado por la elipsoide tangente al plano de la restricción, como se muestra en la figura 13.80.

EJEMPLO 4 Optimización en el interior de una región

Hallar los valores extremos de

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3 \qquad \text{Función objetivo.}$$

sujeto a la restricción $x^2 + y^2 \leq 10$.

Solución Para resolver este problema, se puede dividir la restricción en dos casos.

***a*)** Para los puntos *en el círculo* $x^2 + y^2 = 10$, se pueden usar los multiplicadores de Lagrange para hallar que el valor máximo de $f(x, y)$ es 24; este valor se presenta en $(-1, 3)$ y en $(-1, -3)$. De manera similar, se puede determinar que el valor mínimo de $f(x, y)$ es aproximadamente 6.675; este valor se presenta en $\left(\sqrt{10}, 0\right)$.

***b*)** Para los puntos *interiores al círculo*, se pueden usar las técnicas analizadas en la sección 13.8 para concluir que la función tiene un mínimo relativo de 2 en el punto (1, 0).

Combinando estos dos resultados, se puede concluir que f tiene un máximo de 24 en $(-1, \pm 3)$ y un mínimo de 2 en (1, 0), como se muestra en la figura 13.81.

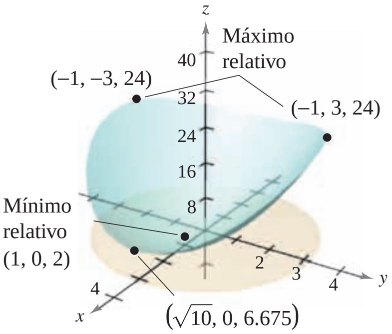


Figura 13.81

El método de multiplicadores de Lagrange con dos restricciones

En problemas de optimización que involucran *dos* funciones de restricción g y h, se puede introducir un segundo multiplicador de Lagrange, μ (letra minúscula *mu* del alfabeto griego), y resolver la ecuación

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

donde los vectores gradiente no son paralelos, como se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Optimización con dos restricciones

Sea $T(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ la temperatura en cada punto en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 11$. Hallar las temperaturas extremas en la curva formada por la intersección del plano $x + y + z = 3$ y la esfera.

Solución Las dos restricciones son

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 11 \qquad \text{y} \qquad h(x, y, z) = x + y + z = 3.$$

Usando

$$\nabla T(x, y, z) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$
$$\lambda \nabla g(x, y, z) = 2\lambda x\mathbf{i} + 2\lambda y\mathbf{j} + 2\lambda z\mathbf{k}$$

y

$$\mu \nabla h(x, y, z) = \mu\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \mu\mathbf{k}$$

se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente.

$$2 = 2\lambda x + \mu \qquad T_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z).$$
$$2 = 2\lambda y + \mu \qquad T_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z).$$
$$2z = 2\lambda z + \mu \qquad T_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z).$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 11 \qquad \text{Restricción 1.}$$
$$x + y + z = 3 \qquad \text{Restricción 2.}$$

Restando la segunda ecuación de la primera, se obtiene el sistema siguiente.

AYUDA DE ESTUDIO El sistema de ecuaciones que se obtiene en el método de los multiplicadores de Lagrange no es, en general, un sistema lineal, y a menudo hallar la solución requiere de ingenio.

$$\lambda(x - y) = 0$$
$$2z(1 - \lambda) - \mu = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 11$$
$$x + y + z = 3$$

De la primera ecuación, se concluye que $\lambda = 0$ o $x = y$. Si $\lambda = 0$, se puede demostrar que los puntos críticos son $(3, -1, 1)$ y $(-1, 3, 1)$. (Tratar de hacer esto toma un poco de trabajo.) Si $\lambda \neq 0$, entonces $x = y$ y se puede mostrar que los puntos críticos se presentan donde $x = y = (3 \pm 2\sqrt{3})/3$ y $z = (3 \mp 4\sqrt{3})/3$. Por último, para encontrar las soluciones óptimas, se deben comparar las temperaturas en los cuatro puntos críticos.

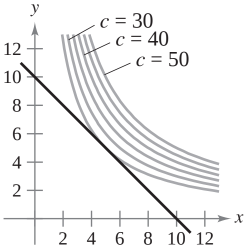
$$T(3, -1, 1) = T(-1, 3, 1) = 25$$
$$T\left(\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{91}{3} \approx 30.33$$
$$T\left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 - 4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{91}{3} \approx 30.33$$

Así, $T = 25$ es la temperatura mínima y $T = \frac{91}{3}$ es la temperatura máxima en la curva.

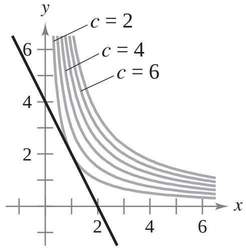
13.10 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, identificar la restricción o ligadura y las curvas de nivel de la función objetivo mostradas en la figura. Utilizar la figura para aproximar el extremo indicado, suponiendo que x y y son positivos. Utilizar los multiplicadores de Lagrange para verificar el resultado.

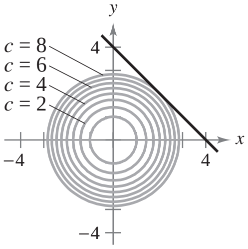
1. Maximizar $z = xy$
Restricción
o ligadura: $x + y = 10$



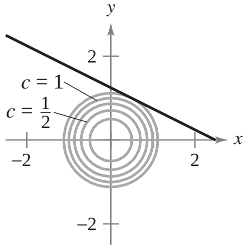
2. Maximizar $z = xy$
Restricción
o ligadura: $2x + y = 4$



3. Minimizar $z = x^2 + y^2$
Restricción o ligadura:
$x + y - 4 = 0$



4. Minimizar $z = x^2 + y^2$
Restricción o ligadura:
$2x + 4y = 5$



En los ejercicios 5 a 10, utilizar multiplicadores de Lagrange para hallar el extremo indicado, suponer que x y y son positivos.

5. Minimizar $f(x, y) = x^2 + y^2$
Restricción: $x + 2y - 5 = 0$

6. Maximizar $f(x, y) = x^2 - y^2$
Restricción: $2y - x^2 = 0$

7. Maximizar $f(x, y) = 2x + 2xy + y$
Restricción: $2x + y = 100$

8. Minimizar $f(x, y) = 3x + y + 10$
Restricción: $x^2y = 6$

9. Maximizar $f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$
Restricción: $x + y - 2 = 0$

10. Minimizar $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
Restricción: $2x + 4y - 15 = 0$

En los ejercicios 11 a 14, utilizar los multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos indicados, suponiendo que x, y y z son positivos.

11. Minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
Restricción o ligadura: $x + y + z - 9 = 0$

12. Maximizar $f(x, y, z) = xyz$
Restricción o ligadura: $x + y + z - 3 = 0$

13. Minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
Restricción: $x + y + z = 1$

14. Minimizar $f(x, y) = x^2 - 10x + y^2 - 14y + 28$
Restricción: $x + y = 10$

En los ejercicios 15 y 16, utilizar los multiplicadores de Lagrange para hallar todos los extremos de la función sujetos a la restricción $x^2 + y^2 \le 1$.

15. $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ **16.** $f(x, y) = e^{-xy/4}$

En los ejercicios 17 y 18, utilizar los multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos de f indicados sujetos a dos restricciones. En cada caso, suponer que x, y y z son no negativos.

17. Maximizar $f(x, y, z) = xyz$
Restricción: $x + y + z = 32$, $x - y + z = 0$

18. Minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
Restricción: $x + 2z = 6$, $x + y = 12$

En los ejercicios 19 a 28, usar los multiplicadores de Lagrange para encontrar la distancia mínima desde la curva o superficie al punto indicado. [*Sugerencia:* En el ejercicio 19, minimizar $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $x + y = 1$. En el ejercicio 25, usar la operación raíz de una herramienta de graficación.]

	Curva	*Punto*
19.	Recta: $x + y = 1$	$(0, 0)$
20.	Recta: $2x + 3y = -1$	$(0, 0)$
21.	Recta: $x - y = 4$	$(0, 2)$
22.	Recta: $x + 4y = 3$	$(1, 0)$
23.	Parábola: $y = x^2$	$(0, 3)$
24.	Parábola: $y = x^2$	$(-3, 0)$
25.	Parábola: $y = x^2 + 1$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
26.	Círculo: $(x - 4)^2 + y^2 = 4$	$(0, 10)$
	Superficie	*Punto*
27.	Plano: $x + y + z = 1$	$(2, 1, 1)$
28.	Cono: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$(4, 0, 0)$

En los ejercicios 29 y 30, hallar el punto más alto de la curva de intersección de las superficies.

29. Cono: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, Plano: $x + 2z = 4$

30. Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, Plano: $2x + y - z = 2$

Desarrollo de conceptos

31. Explicar qué se quiere decir con problemas de optimización con restricciones.

32. Explicar el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de optimización con restricciones.

En los ejercicios 33 a 42, usar los multiplicadores de Lagrange para resolver el ejercicio indicado en la sección 13.9.

33. Ejercicio 1 **34.** Ejercicio 2
35. Ejercicio 5 **36.** Ejercicio 6
37. Ejercicio 9 **38.** Ejercicio 10
39. Ejercicio 11 **40.** Ejercicio 12
41. Ejercicio 17 **42.** Ejercicio 18

43. ***Volumen máximo*** Utilizar multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones de la caja rectangular de volumen máximo que puede ser inscrita (con los bordes paralelos a los ejes de coordenadas) en el elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$.

Para discusión

44. La suma de las longitudes y el tamaño (perímetro de una sección transversal) de un paquete llevado por un servicio de entrega a domicilio no puede exceder 108 pulgadas.

a) Determinar si los multiplicadores de Lagrange se pueden usar para encontrar las dimensiones del paquete rectangular de más grande volumen que puede ser enviado. Explicar el razonamiento.

b) Si se pueden usar los multiplicadores de Lagrange, encontrar las dimensiones. Comparar su respuesta con la obtenida en el ejercicio 38, sección 13.9.

45. ***Costo mínimo*** Un contenedor de carga (en forma de un sólido rectangular) debe tener un volumen de 480 pies cúbicos. La parte inferior costará \$5 por pie cuadrado para construir, y los lados y la parte superior costarán \$3 por pie cuadrado para construcción. Usar los multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones del contenedor de este tamaño que tiene costo mínimo.

46. ***Medias geométrica y aritmética***

a) Utilizar los multiplicadores de Lagrange para demostrar que el producto de tres números positivos x, y y z cuya suma tiene un valor constante S, es máximo cuando los tres números son iguales. Utilizar este resultado para demostrar que

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

b) Generalizar el resultado del inciso *a*) para demostrar que el producto $x_1 x_2 x_3 \cdot \cdot \cdot x_n$ es máximo cuando $x_1 = x_2 = x_3 = \cdot \cdot \cdot = x_n$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = S$, y todo $x_i \geq 0$. Después, demostrar que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdot \cdot \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdot \cdot \cdot + x_n}{n}.$$

Esto demuestra que la media geométrica nunca es mayor que la media aritmética.

47. ***Superficie mínima*** Utilizar multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones de un cilindro circular recto con volumen de V_0 unidades cúbicas y superficie mínima.

48. ***Distribución de temperatura*** Sea $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$ la temperatura en cada punto sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 50$. Hallar la temperatura máxima en la curva formada por la intersección de la esfera y el plano $x - z = 0$.

49. ***Refracción de la luz*** Cuando las ondas de luz que viajan en un medio transparente atraviesan la superficie de un segundo medio transparente, tienden a "desviarse" para seguir la trayectoria de tiempo mínimo. Esta tendencia se llama refracción y está descrita por la **ley de refracción de Snell**, según la cual

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{v_2}$$

donde θ_1 y θ_2 son las magnitudes de los ángulos mostrados en la figura, y v_1 y v_2 son las velocidades de la luz en los dos medios. Utilizar los multiplicadores de Lagrange para deducir esta ley usando $x + y = a$.

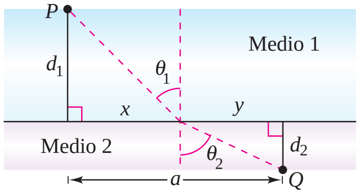


Figura para 49

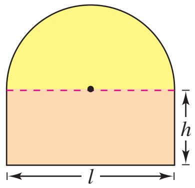


Figura para 50

50. ***Área y perímetro*** Un semicírculo está sobre un rectángulo (ver la figura). Si el área es fija y el perímetro es un mínimo, o si el perímetro es fijo y el área es un máximo, utilizar multiplicadores de Lagrange para verificar que la longitud del rectángulo es el doble de su altura.

Nivel de producción **En los ejercicios 51 y 52, hallar el máximo nivel de producción *P* si el costo total de trabajo (a \$72 por unidad) y capital (a \$60 por unidad) está restringido a \$250 000, donde *x* es el número de unidades de trabajo y *y* es el número de unidades de capital.**

51. $P(x, y) = 100x^{0.25}y^{0.75}$ **52.** $P(x, y) = 100x^{0.4}y^{0.6}$

Costo **En los ejercicios 53 y 54, hallar el costo mínimo para producir 50 000 unidades de un producto donde *x* es el número de unidades de trabajo (a \$72 por unidad) y *y* es el número de unidades de capital (a \$60 por unidad).**

53. $P(x, y) = 100x^{0.25}y^{0.75}$ **54.** $P(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$

55. ***Investigación*** Considerar la función objetivo $g(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ sujeta a la restricción o ligadura de que α, β y γ sean los ángulos de un triángulo.

a) Utilizar los multiplicadores de Lagrange para maximizar g.

CAS *b*) Utilizar la restricción o ligadura para reducir la función g a una función de dos variables independientes. Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie definida por g. Identificar en la gráfica los valores máximos.

Preparación del examen Putman

56. Una boya está hecha de tres piezas, a saber, un cilindro y dos conos iguales, la altura de cada uno de los conos es igual a la altura del cilindro. Para una superficie dada, ¿con qué forma se tendrá el volumen máximo?

13 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, trazar la gráfica de la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en el valor dado de c.

1. $f(x, y, z) = x^2 - y + z^2, \quad c = 2$

2. $f(x, y, z) = 4x^2 - y^2 + 4z^2, \quad c = 0$

3. ***Conjetura*** Considerar la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

a) Trazar la gráfica de la superficie dada por f.

b) Conjeturar la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = f(x, y) + 2$. Explicar el razonamiento.

c) Conjeturar la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = f(x, y - 2)$. Explicar el razonamiento.

d) Sobre la superficie en el inciso *a*), trazar las gráficas de $z = f(1, y)$ y $z = f(x, 1)$.

4. ***Conjetura*** Considerar la función

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

a) Trazar la gráfica de la superficie dada por f.

b) Conjeturar la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = f(x + 2, y)$. Explicar el razonamiento.

c) Conjeturar la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = 4 - f(x, y)$. Explicar el razonamiento.

d) Sobre la superficie en el inciso *a*), trazar las gráficas de $z = f(0, y)$ y $z = f(x, 0)$.

CAS **En los ejercicios 5 a 8, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente algunas de las curvas de nivel de la función.**

5. $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$

6. $f(x, y) = \ln xy$

7. $f(x, y) = x^2 - y^2$

8. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$

CAS **En los ejercicios 9 y 10, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función.**

9. $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$

10. $g(x, y) = |y|^{1 + |x|}$

En los ejercicios 11 a 14, hallar el límite y analizar la continuidad de la función (si existe).

11. $\displaystyle \lim_{(x, y) \to (1, 1)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

12. $\displaystyle \lim_{(x, y) \to (1, 1)} \frac{xy}{x^2 - y^2}$

13. $\displaystyle \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{y + xe^{-y^2}}{1 + x^2}$

14. $\displaystyle \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

En los ejercicios 15 a 24, hallar todas las primeras derivadas parciales.

15. $f(x, y) = e^x \cos y$

16. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$

17. $z = e^{-y} + e^{-x}$

18. $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

19. $g(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

20. $w = \sqrt{x^2 - y^2 - z^2}$

21. $f(x, y, z) = z \arctan \dfrac{y}{x}$

22. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}$

23. $u(x, t) = ce^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx$

24. $u(x, t) = c \operatorname{sen}(akx) \cos kt$

25. ***Para pensar*** Dibujar una gráfica de una función $z = f(x, y)$ cuyas derivadas f_x y f_y sean siempre negativas.

26. Hallar las pendientes de la superficie $z = x^2 \ln(y + 1)$ en las direcciones x y y en el punto $(2, 0, 0)$.

En los ejercicios 27 a 30, hallar todas las segundas derivadas parciales y verificar que las segundas derivadas parciales mixtas son iguales.

27. $f(x, y) = 3x^2 - xy + 2y^3$

28. $h(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$

29. $h(x, y) = x \operatorname{sen} y + y \cos x$

30. $g(x, y) = \cos(x - 2y)$

Ecuación de Laplace **En los ejercicios 31 a 34, mostrar que la función satisface la ecuación de Laplace**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

31. $z = x^2 - y^2$

32. $z = x^3 - 3xy^2$

33. $z = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

34. $z = e^y \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 35 y 36, hallar la diferencial total.

35. $z = x \operatorname{sen} xy$

36. $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

37. ***Análisis de errores*** Al medir los lados de un triángulo rectángulo se obtienen los valores de 5 y 12 centímetros, con un posible error de $\frac{1}{2}$ centímetro. Aproximar el error máximo posible al calcular la longitud de la hipotenusa. Aproximar el error porcentual máximo.

38. ***Análisis de errores*** Para determinar la altura de una torre, el ángulo de elevación a la parte superior de la torre se midió desde un punto a 100 pies $\pm \frac{1}{2}$ pie de la base. La medida del ángulo da 33°, con un posible error de 1°. Suponer que el suelo es horizontal, para aproximar el error máximo al determinar la altura de la torre.

39. ***Volumen*** Se mide un cono circular recto. Su radio y su altura son 2 y 5 pulgadas, respectivamente. El posible error de medición es $\frac{1}{8}$ de pulgada. Aproximar el error máximo posible en el cálculo del volumen.

40. ***Superficie lateral*** Aproximar el error en el cálculo de la superficie lateral del cono del ejercicio 39. (La superficie lateral está dada por $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.)

En los ejercicios 41 a 44, hallar las derivadas indicadas *a*) utilizando la regla de la cadena apropiada y *b*) por sustitución antes de derivar.

41. $w = \ln(x^2 + y), \quad \dfrac{dw}{dt}$

$x = 2t, \quad y = 4 - t$

42. $u = y^2 - x, \quad \dfrac{du}{dt}$

$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t$

43. $w = \dfrac{xy}{z}, \quad \dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial t}$

$x = 2r + t, \quad y = rt, \quad z = 2r - t$

44. $u = x^2 + y^2 + z^2, \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$

$x = r \cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t, \quad z = t$

En los ejercicios 45 y 46, derivar implícitamente para encontrar las primeras derivadas parciales de *z*.

45. $x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 = 0$

46. $xz^2 - y \operatorname{sen} z = 0$

En los ejercicios 47 a 50, hallar la derivada direccional de la función en *P* en la dirección de v.

47. $f(x, y) = x^2y, \quad (-5, 5), \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

48. $f(x, y) = \frac{1}{4}y^2 - x^2, \quad (1, 4), \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

49. $w = y^2 + xz, \quad (1, 2, 2), \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

50. $w = 5x^2 + 2xy - 3y^2z, \quad (1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

En los ejercicios 51 a 54, hallar el gradiente de la función y el valor máximo de la derivada direccional en el punto dado.

51. $z = x^2y, \quad (2, 1)$

52. $z = e^{-x} \cos y, \quad \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$

53. $z = \dfrac{y}{x^2 + y^2}, \quad (1, 1)$

54. $z = \dfrac{x^2}{x - y}, \quad (2, 1)$

En los ejercicios 55 y 56, *a*) encontrar el gradiente de la función en *P*, *b*) encontrar un vector normal a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en *P*, *c*) encontrar la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en *P*, y *d*) trazar la curva de nivel, el vector unitario normal y la recta tangente en el plano *xy*.

55. $f(x, y) = 9x^2 - 4y^2$

$c = 65, \quad P(3, 2)$

56. $f(x, y) = 4y \operatorname{sen} x - y$

$c = 3, \quad P\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

En los ejercicios 57 a 60, hallar una ecuación del plano tangente y las ecuaciones paramétricas de la recta normal a la superficie en el punto dado.

	Superficie	*Punto*
57.	$f(x, y) = x^2y$	$(2, 1, 4)$
58.	$f(x, y) = \sqrt{25 - y^2}$	$(2, 3, 4)$
59.	$z = -9 + 4x - 6y - x^2 - y^2$	$(2, -3, 4)$
60.	$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$	$(1, 2, 2)$

En los ejercicios 61 y 62, hallar las ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto dado.

	Superficies	*Punto*
61.	$z = 9 - y^2, \quad y = x$	$(2, 2, 5)$
62.	$z = x^2 - y^2, \quad z = 3$	$(2, 1, 3)$

63. Hallar el ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ en el punto $(2, 1, 3)$.

64. ***Aproximación*** Considerar las aproximaciones siguientes a una función $f(x, y)$ centrada en $(0, 0)$.

Aproximación lineal

$P_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$

Aproximación cuadrática

$P_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2$

[Observar que la aproximación lineal es el plano tangente a la superficie en $(0, 0, f(0, 0))$.]

a) Hallar la aproximación lineal de $f(x, y) = \cos x + \operatorname{sen} y$ centrada en $(0, 0)$.

b) Hallar la aproximación cuadrática de $f(x, y) = \cos x + \operatorname{sen} y$ centrada en $(0, 0)$.

c) Si $y = 0$ en la aproximación cuadrática, ¿para qué función se obtiene el polinomio de Taylor de segundo grado?

d) Completar la tabla.

x	y	$f(x, y)$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0			
0	0.1			
0.2	0.1			
0.5	0.3			
1	0.5			

CAS *e*) Utilizar un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente las superficies $z = f(x, y)$, $z = P_1(x, y)$ y $z = P_2(x, y)$. ¿Cómo varía la exactitud de las aproximaciones a medida que aumenta la distancia para $(0, 0)$?

CAS **En los ejercicios 65 a 68, localizar los extremos relativos de la función. Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función y confirmar los resultados.**

65. $f(x, y) = 2x^2 + 6xy + 9y^2 + 8x + 14$

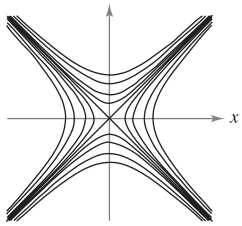
66. $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 - 5x$

67. $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

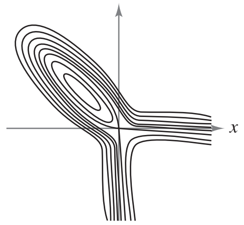
68. $z = 50(x + y) - (0.1x^3 + 20x + 150) - (0.05y^3 + 20.6y + 125)$

Redacción **En los ejercicios 69 y 70, redactar un párrafo breve sobre la superficie cuyas curvas de nivel (los valores de c espaciados uniformemente) se muestran. Hacer un comentario acerca de los posibles extremos, puntos silla, la magnitud del gradiente, etcétera.**

69.



70.



71. ***Ganancia o beneficio máximo*** Una corporación fabrica, en dos lugares, cámaras digitales. Las funciones de costo para producir x_1 unidades en el lugar 1 y x_2 unidades en el lugar 2 son

$$C_1 = 0.05x_1^2 + 15x_1 + 5\,400$$
$$C_2 = 0.03x_2^2 + 15x_2 + 6\,100$$

y la función del ingreso total es

$$R = [225 - 0.4(x_1 + x_2)](x_1 + x_2).$$

Hallar los niveles de producción en los dos lugares que maximizan el beneficio $P(x_1, x_2) = R - C_1 - C_2$.

72. ***Costo mínimo*** Un fabricante recibe una orden para 1 000 unidades de bancos de madera que pueden producirse en dos lugares. Sean x_1 y x_2 los números de unidades producidos en cada uno de los dos lugares. La función del costo es

$$C = 0.25x_1^2 + 10x_1 + 0.15x_2^2 + 12x_2.$$

Hallar la cantidad que debe producirse en cada lugar para satisfacer la orden y minimizar el costo.

73. ***Nivel de producción*** La función de producción de un fabricante de dulces es

$$f(x, y) = 4x + xy + 2y$$

donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital. Suponer que la cantidad total disponible para trabajo y capital es \$2 000, y que las unidades de trabajo y capital cuestan \$20 y \$4, respectivamente. Hallar el nivel de producción máximo de este fabricante.

74. Hallar la distancia mínima del punto (2, 2, 0) a la superficie $z = x^2 + y^2$.

75. ***Modelo matemático*** La tabla muestra la fuerza de fricción y en kilogramos de un vehículo de motor a las velocidades x, en kilómetros por hora, indicadas.

Velocidad, x	25	50	75	100	125
Fuerza de fricción, y	24	34	50	71	98

a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar un modelo cuadrático de regresión por mínimos cuadrados para los datos.

b) Utilizar el modelo para estimar la fuerza total de fricción cuando el vehículo está en movimiento a 80 kilómetros por hora.

76. ***Modelo matemático*** Los datos en la tabla muestran el rendimiento y (en miligramos) en una reacción química después de t minutos.

Minutos, t	1	2	3	4
Rendimiento, y	1.2	7.1	9.9	13.1

Minutos, t	5	6	7	8
Rendimiento, y	15.5	16.0	17.9	18.0

a) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos. Después utilizar la herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.

b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar los puntos $(\ln t, y)$. ¿Parecen seguir estos puntos un modelo lineal con más exactitud que los datos dados en el inciso *a*)?

c) Utilizar el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos $(\ln t, y)$ y obtener el modelo logarítmico $y = a + b \ln t$.

d) Utilizar una herramienta de graficación para representar los datos y los modelos lineal y logarítmico. ¿Qué modelo es mejor? Explicar.

En los ejercicios 77 y 78, utilizar multiplicadores de Lagrange para localizar y clasificar todos los extremos de la función.

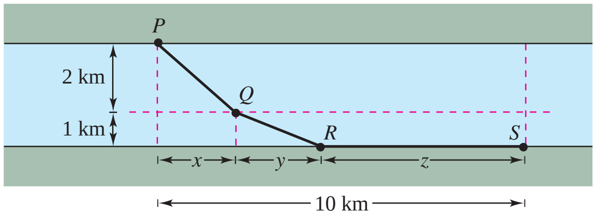
77. $w = xy + yz + xz$

Restricción: $x + y + z = 1$

78. $z = x^2y$

Restricción: $x + 2y = 2$

79. ***Costo mínimo*** Se va a construir un conducto para agua que va del punto P al punto S y que debe atravesar por regiones donde los costos de construcción difieren (ver la figura). El costo por kilómetro en dólares es $3k$ de P a Q, $2k$ de Q a R y k de R a S. Para simplificar, sea $k = 1$. Utilizar multiplicadores de Lagrange para localizar x, y y z tales que el costo total C se minimice.



CAS **80.** ***Investigación*** Considerar la función objetivo $f(x, y) = ax + by$ sujeta a la restricción $x^2/64 + y^2/36 = 1$. Suponer que x y y son positivas.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la restricción o ligadura. Si $a = 4$ y $b = 3$, utilizar el sistema algebraico por computadora y representar gráficamente las curvas de nivel de la función objetivo. Mediante ensayo y error, hallar la curva de nivel que parece ser tangente a la elipse. Utilizar el resultado para aproximar el máximo de f sujeto a la restricción o ligadura.

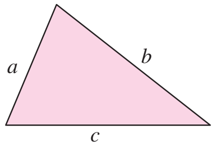
b) Repetir el inciso *a*) con $a = 4$ y $b = 9$.

SP Solución de problemas

1. La **fórmula de Heron** establece que el área de un triángulo con lados de longitudes a, b y c está dada por

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, como se muestra en la figura.

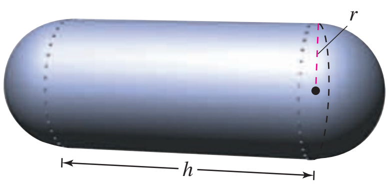


a) Utilizar la fórmula de Heron para calcular el área del triángulo con vértices (0, 0), (3, 4) y (6, 0).

b) Mostrar que, de todos los triángulos que tienen un mismo perímetro, el triángulo con el área mayor es un triángulo equilátero.

c) Mostrar que, de todos los triángulos que tienen una misma área, el triángulo con el perímetro menor es un triángulo equilátero.

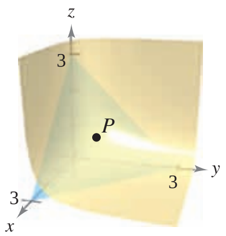
2. Un tanque industrial tiene forma cilíndrica con extremos hemisféricos, como se muestra en la figura. El depósito debe almacenar 1 000 litros de fluido. Determinar el radio r y longitud h que minimizan la cantidad de material utilizado para la construcción del tanque.



3. Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en el primer octante en la superficie $xyz = 1$.

a) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto P.

b) Mostrar que el volumen del tetraedro formado en los tres planos de coordenadas y el plano tangente es constante, independiente del punto de tangencia (ver la figura).



4. Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$ y $g(x) = x$ en la misma pantalla.

a) Mostrar que

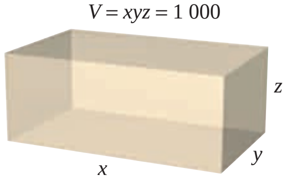
$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \text{ y } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

b) Hallar el punto en la gráfica de f que está más alejado de la gráfica de g.

5. *a*) Sean $f(x, y) = x - y$ y $g(x, y) = x^2 + y^2 = 4$. Graficar varias curvas de nivel de f y la restricción g en el plano xy. Usar la gráfica para determinar el valor mayor de f sujeto a la restricción $g = 4$. Después, verificar su resultado mediante los multiplicadores de Lagrange.

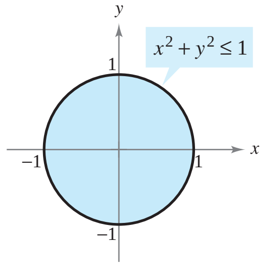
b) Sean $f(x, y) = x - y$ y $g(x, y) = x^2 + y^2 = 0$. Encontrar los valores máximos y mínimos de f sujetos a la restricción $g = 0$. ¿Funcionará el método de los multiplicadores de Lagrange en este caso? Explicar.

6. Un cuarto caliente de almacenamiento tiene la forma de una caja rectangular y un volumen de 1 000 pies cúbicos, como se muestra en la figura. Como el aire caliente sube, la pérdida de calor por unidad de área a través del techo es cinco veces mayor que la pérdida de calor a través del suelo. La pérdida de calor a través de las cuatro paredes es tres veces mayor que la pérdida de calor a través del suelo. Determinar las dimensiones del cuarto que minimizan la pérdida de calor y que por consiguiente minimizan los costos de calefacción.



7. Repetir el ejercicio 6 suponiendo que la pérdida de calor a través de las paredes y del techo sigue siendo la misma, pero el suelo se aísla de manera que no hay ninguna pérdida de calor a través del mismo.

8. Considerar una placa circular de radio 1 dada por $x^2 + y^2 \le 1$, como se muestra en la figura. La temperatura sobre cualquier punto $P(x, y)$ de la placa es $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y + 10$.



a) Dibujar las isotermas $T(x, y) = 10$.

b) Hallar el punto más caliente y el punto más frío de la placa.

9. Considerar la función de producción de Cobb-Douglas

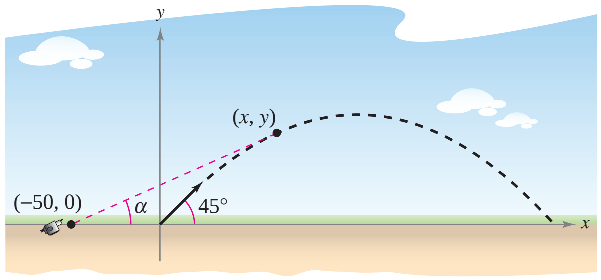
$$f(x, y) = Cx^a y^{1-a}, \quad 0 < a < 1.$$

a) Mostrar que f satisface la ecuación $x\dfrac{\partial f}{dx} + y\dfrac{\partial f}{dy} = f$.

b) Mostrar que $f(tx, ty) = tf(x, y)$.

10. Expresar la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ en coordenadas cilíndricas.

11. Un proyectil es lanzado a un ángulo de 45° respecto a la horizontal y con una velocidad inicial de 64 pies por segundo. Una cámara de televisión se localiza en el plano de la trayectoria del proyectil, 50 pies detrás del sitio del lanzamiento (ver la figura).



a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil en términos del parámetro t que representa tiempo.

b) Expresar el ángulo α que la cámara forma con la horizontal en términos de x y y y en términos de t.

c) Utilizar los resultados del inciso *b*) para calcular $d\alpha/dt$.

d) Utilizar una herramienta de graficación para representar α en términos de t. ¿Es simétrica la gráfica respecto al eje del arco parabólico del proyectil? ¿En qué momento es mayor la razón de cambio de α?

e) ¿En qué momento es máximo el ángulo α? ¿Ocurre esto cuando el proyectil está a su mayor altura?

12. Considerar la distancia d entre el sitio del lanzamiento y el proyectil del ejercicio 11.

a) Expresar la distancia d en términos de x y y y en términos del parámetro t.

b) Utilizar los resultados del inciso *a*) para hallar la razón de cambio de d.

c) Hallar la razón de cambio de la distancia cuando $t = 2$.

d) Durante el vuelo del proyectil, ¿cuándo es mínima la razón o cambio de d? ¿Ocurre esto en el momento en el que el proyectil alcanza su altura máxima?

CAS **13.** Considerar la función

$$f(x, y) = (\alpha x^2 + \beta y^2)e^{-(x^2+y^2)}, \quad 0 < |\alpha| < \beta.$$

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función empleando $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, e identificar todos los extremos o puntos silla.

b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función empleando $\alpha = -1$ y $\beta = 2$, e identificar todos los extremos o puntos silla.

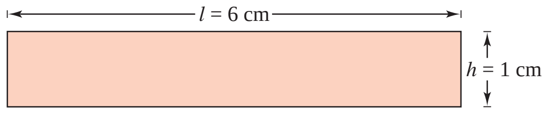
c) Generalizar los resultados de los incisos *a*) y *b*) para la función f.

14. Demostrar que si f es una función diferenciable tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$$

entonces el plano tangente en (x_0, y_0) es horizontal.

15. La figura muestra un rectángulo que tiene aproximadamente $l = 6$ centímetros de largo y $h = 1$ centímetro de altura.



a) Dibujar una franja rectangular a lo largo de la región rectangular que muestre un pequeño incremento en la longitud.

b) Dibuje una franja rectangular a lo largo de la región rectangular que muestre un pequeño incremento en la altura.

c) Utilizar los resultados en los incisos *a*) y *b*) para identificar la medida que tiene mayor efecto en el área A del rectángulo.

d) Verificar analíticamente la respuesta dada en el inciso *c*) comparando los valores de dA cuando $dl = 0.01$ y cuando $dh = 0.01$.

16. Considerar convertir un punto $(5 \pm 0.05, \pi/18 \pm 0.05)$ en coordenadas polares a coordenadas rectangulares (x, y).

a) Utilizar un argumento geométrico para determinar si la exactitud en x depende más de la exactitud en r o de la exactitud en θ. Explicar. Verificar analíticamente la respuesta.

b) Utilizar un argumento geométrico para determinar si la exactitud en y depende más de la exactitud en r o de la exactitud en θ. Explicar. Verificar analíticamente la respuesta.

17. Sea f una función de una variable derivable. Mostrar que los planos tangentes a la superficie $z = yf(x/y)$ se cortan en un punto común.

18. Considerar la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que encierra el círculo $x^2 + y^2 = 2x$. Hallar los valores de a y b que minimizan el área de la elipse.

19. Mostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x - t) + \operatorname{sen}(x + t)]$$

es una solución a la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

20. Mostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)]$$

es una solución a la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(Esta ecuación describe la vibración transversal pequeña de una cuerda elástica como las de ciertos instrumentos musicales.)

14 Integración múltiple

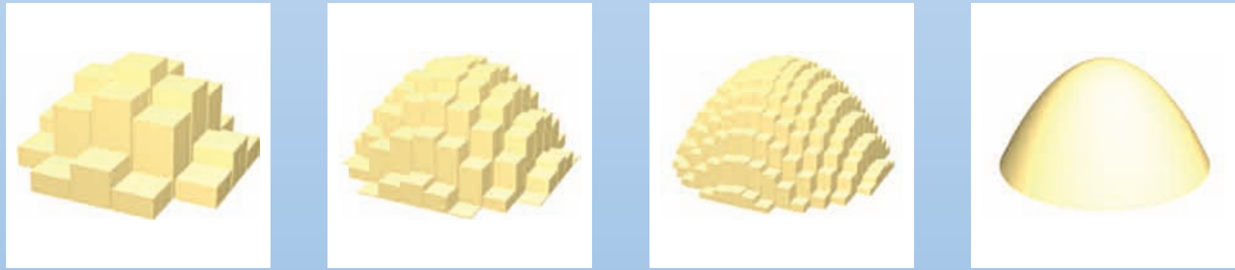
En este capítulo se introduce el concepto de integrales dobles sobre regiones en el plano e integrales triples sobre regiones en el espacio.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo evaluar una integral iterada y encontrar el área de una región plana. (14.1)
- Cómo usar una integral doble para encontrar el volumen de una región sólida. (14.2)
- Cómo escribir y evaluar integrales dobles en coordenadas polares. (14.3)
- Cómo encontrar la masa de una lámina plana, el centro de masa de una lámina plana y los momentos de inercia usando integrales dobles. (14.4)
- Cómo usar una integral doble para encontrar el área de una superficie. (14.5)
- Cómo usar una integral triple para encontrar el volumen, centro de masa y momentos de inercia de una región sólida. (14.6)
- Cómo escribir y evaluar integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas. (14.7)
- Cómo usar un jacobiano para cambiar variables en una integral doble. (14.8)

Langley Photography/Getty Images

El centro de presión de una vela es ese punto en el cual la fuerza total aerodinámica puede considerarse que actúa. Ya que la vela es representada por una región plana, ¿cómo se pueden usar las integrales dobles para encontrar el centro de presión sobre una vela? (Ver sección 14.4, sección proyecto.)



Se puede aproximar el volumen de una región sólida encontrando la suma de los volúmenes de prismas rectangulares representativos. Como aumenta el número de prismas rectangulares, la aproximación tiende a ser más y más exacta. En el capítulo 14 se aprenderá a usar integrales múltiples para encontrar el volumen de una región sólida.

14.1 Integrales iteradas y área en el plano

- **Evaluar una integral iterada.**
- **Utilizar una integral iterada para hallar el área de una región plana.**

Integrales iteradas

NOTA En los capítulos 14 y 15 se estudiarán varias aplicaciones de la integración de funciones de varias variables. Este capítulo es muy similar al capítulo 7 ya que ilustra el uso de la integración para hallar áreas planas, volúmenes, áreas de superficies, momentos y centros de masa. ■

En el capítulo 13 se vio cómo derivar funciones de varias variables con respecto a una variable manteniendo constantes las demás variables. Empleando un procedimiento similar se pueden *integrar* funciones de varias variables. Por ejemplo, dada la derivada parcial

$$f_x(x, y) = 2xy$$

entonces, considerando y constante, se puede integrar con respecto a x para obtener

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \int f_x(x, y)\, dx && \text{Integrar con respecto a } x.\\
&= \int 2xy\, dx && \text{Mantener } y \text{ constante.}\\
&= y\int 2x\, dx && \text{Sacar } y \text{ como factor constante.}\\
&= y(x^2) + C(y) && \text{Una primitiva (o antiderivada) de } 2x \text{ es } x^2.\\
&= x^2y + C(y). && C(y) \text{ es una función de } y.
\end{aligned}$$

La “constante” de integración, $C(y)$, es una función de y. En otras palabras, al integrar con respecto a x, se puede recobrar $f(x, y)$ sólo parcialmente. Cómo recobrar totalmente una función de x y y a partir de sus derivadas parciales es un tema que se estudiará en el capítulo 15. Por ahora, lo que interesa es extender las integrales definidas a funciones de varias variables. Por ejemplo, al considerar y constante, se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo para evaluar

$$\int_1^{2y} 2xy\, dx = x^2y\Big]_1^{2y} = (2y)^2y - (1)^2y = 4y^3 - y.$$

x es la variable de integración y y es fija.

Sustituir x por los límites de integración.

El resultado es una función de y.

De manera similar se puede integrar con respecto a y, manteniendo x fija. Ambos procedimientos se resumen como sigue.

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x, y)\, dx = f(x, y)\Big]_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y), y) - f(h_1(y), y) \qquad \text{Con respecto a } x.$$

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x, y)\, dy = f(x, y)\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x, g_2(x)) - f(x, g_1(x)) \qquad \text{Con respecto a } y.$$

Nótese que la variable de integración no puede aparecer en ninguno de los límites de integración. Por ejemplo, no tiene ningún sentido escribir

$$\int_0^x y\, dx.$$

EJEMPLO 1 Integrar con respecto a y

Evaluar $\displaystyle\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy.$

Solución Se considera x constante y se integra con respecto a y, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy &= \left[\frac{-2x^2}{y} + y^2\right]_1^x && \text{Integrar con respecto a } y.\\ &= \left(\frac{-2x^2}{x} + x^2\right) - \left(\frac{-2x^2}{1} + 1\right)\\ &= 3x^2 - 2x - 1.\end{aligned}$$

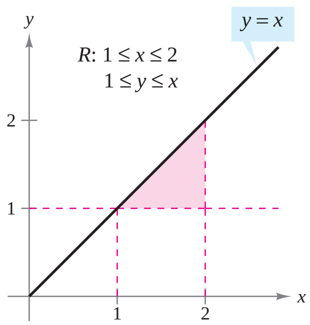
En el ejemplo 1 nótese que la integral define una función de x que puede ser integrada *ella misma*, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 La integral de una integral

Evaluar $\displaystyle\int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy\right] dx.$

Solución Utilizando el resultado del ejemplo 1, se tiene

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy\right] dx &= \int_1^2 (3x^2 - 2x - 1)\, dx\\ &= \Big[x^3 - x^2 - x\Big]_1^2 && \text{Integrar con respecto a } x.\\ &= 2 - (-1)\\ &= 3.\end{aligned}$$



La región de integración para $\displaystyle\int_1^2\int_1^x f(x, y)\, dy\, dx$

Figura 14.1

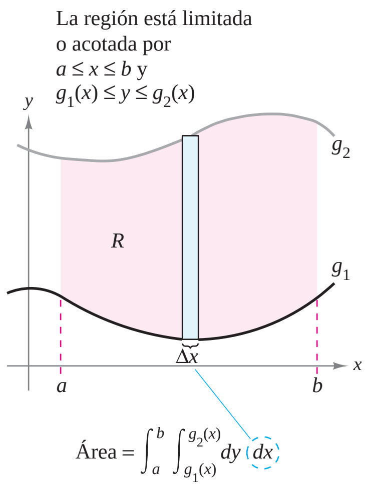
La integral del ejemplo 2 es una **integral iterada**. Los corchetes usados en el ejemplo 2 normalmente no se escriben. Las integrales iteradas se escriben normalmente como

$$\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \quad \text{y} \quad \int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Los **límites interiores de integración** pueden ser variables con respecto a la variable exterior de integración. Sin embargo, los **límites exteriores de integración** *deben ser* constantes con respecto a ambas variables de integración. Después de realizar la integración interior, se obtiene una integral definida "ordinaria" y la segunda integración produce un número real. Los límites de integración de una integral iterada definen dos intervalos para las variables. Así, en el ejemplo 2, los límites exteriores indican que x está en el intervalo $1 \le x \le 2$ y los límites interiores indican que y está en el intervalo $1 \le y \le x$. Juntos, estos dos intervalos determinan la **región de integración *R*** de la integral iterada, como se muestra en la figura 14.1.

Como una integral iterada es simplemente un tipo especial de integral definida, en el que el integrando es también una integral, se pueden utilizar las propiedades de las integrales definidas para evaluar integrales iteradas.

Área de una región plana



Región verticalmente simple
Figura 14.2

En el resto de esta sección se verá desde una perspectiva nueva un viejo problema, el de hallar el área de una región plana. Considérese la región plana R acotada por $a \le x \le b$ y $g_1(x) \le y \le g_2(x)$, como se muestra en la figura 14.2. El área de R está dada por la integral definida

$$\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx. \qquad \text{Área de } R.$$

Usando el teorema fundamental del cálculo, se puede reescribir el integrando $g_2(x) - g_1(x)$ como una integral definida. Concretamente, si se considera x fija y se deja que y varíe desde $g_1(x)$ hasta $g_2(x)$, se puede escribir

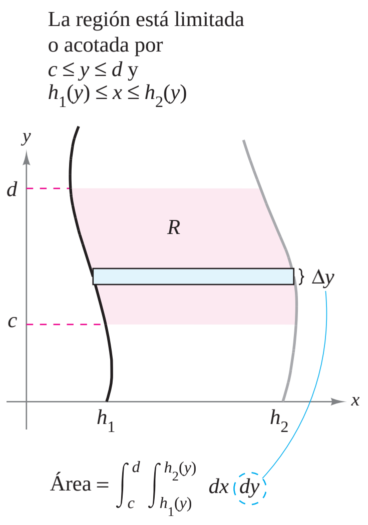
$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy = y\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = g_2(x) - g_1(x).$$

Combinando estas dos integrales, se puede expresar el área de la región R mediante una integral iterada

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx = \int_a^b y\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \qquad \text{Área de } R.$$
$$= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx.$$

Colocar un rectángulo representativo en la región R ayuda a determinar el orden y los límites de integración. Un rectángulo vertical implica el orden $dy\,dx$, donde los límites interiores corresponden a los límites o cotas superior e inferior del rectángulo, como se muestra en la figura 14.2. Este tipo de región se llama **verticalmente simple**, porque los límites exteriores de integración representan las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

De manera similar, un rectángulo horizontal implica el orden $dx\,dy$, donde los límites interiores están determinados por los límites o cotas izquierda y derecha del rectángulo, como se muestra en la figura 14.3. Este tipo de región se llama **horizontalmente simple**, porque los límites exteriores representan las rectas horizontales $y = c$ y $y = d$. Las integrales iteradas utilizadas en estos dos tipos de regiones simples se resumen como sigue.



Región horizontalmente simple
Figura 14.3

ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL PLANO

1. Si R está definida por $a \le x \le b$ y $g_1(x) \le y \le g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, R está dada por

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx. \qquad \text{Figura 14.2 (verticalmente simple).}$$

2. Si R está definida por $c \le y \le d$ y $h_1(y) \le x \le h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces el área de R está dada por

$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy. \qquad \text{Figura 14.3 (horizontalmente simple).}$$

NOTA Hay que observar que en estas dos integrales el orden de integración es diferente; el orden $dy\,dx$ corresponde a una región verticalmente simple, y el orden $dx\,dy$ corresponde a una región horizontalmente simple. ■

Si los cuatro límites de integración son constantes, la región de integración es rectangular, como ocurre en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Área de una región rectangular

Utilizar una integral iterada para representar el área del rectángulo que se muestra en la figura 14.4.

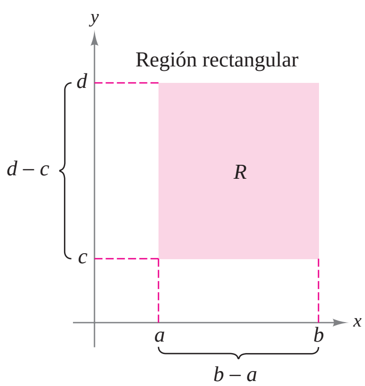


Figura 14.4

Solución La región de la figura 14.4 es verticalmente simple y horizontalmente simple, por tanto se puede emplear cualquier orden de integración. Eligiendo el orden $dy\,dx$, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_c^d dy\,dx &= \int_a^b y\Big]_c^d dx && \text{Integrar con respecto a } y.\\ &= \int_a^b (d-c)\,dx\\ &= \Big[(d-c)x\Big]_a^b && \text{Integrar con respecto a } x.\\ &= (d-c)(b-a)\end{aligned}$$

Nótese que esta respuesta es consistente con los conocimientos de la geometría.

EJEMPLO 4 Hallar el área por medio de una integral iterada

Utilizar una integral iterada para hallar el área de la región limitada o acotada por las gráficas de

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad \text{La curva seno constituye el límite o cota superior.}$$
$$g(x) = \cos x \qquad \text{La curva coseno constituye el límite o cota inferior.}$$

entre $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

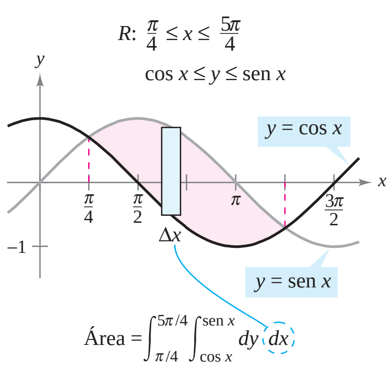


Figura 14.5

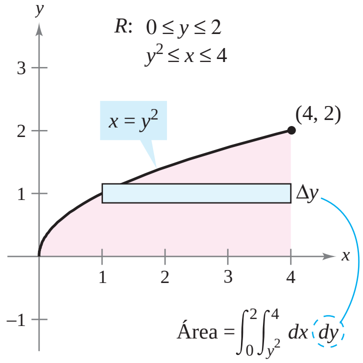
Solución Como f y g se dan como funciones de x, es conveniente un rectángulo representativo vertical, y se puede elegir $dy\,dx$ como orden de integración, como se muestra en la figura 14.5. Los límites exteriores de integración son $\pi/4 \le x \le 5\pi/4$. Dado que el rectángulo está limitado o acotado, superiormente por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e inferiormente por $g(x) = \cos x$, se tiene

$$\begin{aligned}\text{Área de } R &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4}\int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} dy\,dx\\ &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} y\Big]_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} dx && \text{Integrar con respecto a } y.\\ &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx\\ &= \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} && \text{Integrar con respecto a } x.\\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

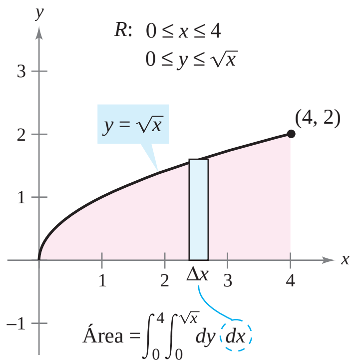
NOTA La región de integración en una integral iterada no necesariamente debe estar acotada por rectas. Por ejemplo, la región de integración que se muestra en la figura 14.5 es *verticalmente simple* aun cuando no tiene rectas verticales como fronteras izquierda y derecha. Lo que hace que la región sea verticalmente simple es que está limitada o acotada superiormente e inferiormente por gráficas de *funciones de x*.

Con frecuencia, uno de los órdenes de integración hace que un problema de integración resulte más sencillo de como resulta con el otro orden de integración. Por ejemplo, hacer de nuevo el ejemplo 4 con el orden $dx\,dy$; sorprenderá ver que la tarea es formidable. Sin embargo, si se llega al resultado, se verá que la respuesta es la misma. En otras palabras, el orden de integración afecta la complejidad de la integración, pero no el valor de la integral.

EJEMPLO 5 Comparación de diferentes órdenes de integración



a)



b)

Figura 14.6

Dibujar la región cuya área está representada por la integral

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx\,dy.$$

Después hallar otra integral iterada que utilice el orden $dy\,dx$ para representar la misma área y mostrar que ambas integrales dan el mismo valor.

Solución De acuerdo con los límites de integración dados, se sabe que

$$y^2 \le x \le 4 \qquad \text{Límites interiores de integración.}$$

lo cual significa que la región R está limitada o acotada a la izquierda por la parábola $x = y^2$ y a la derecha por la recta $x = 4$. Además, como

$$0 \le y \le 2 \qquad \text{Límites exteriores de integración.}$$

se sabe que R está limitada o acotada inferiormente por el eje x, como se muestra en la figura 14.6*a*. El valor de esta integral es

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx\,dy = \int_0^2 x\Big]_{y^2}^4 dy \qquad \text{Integrar con respecto a } x.$$

$$= \int_0^2 (4 - y^2)\,dy$$

$$= \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}. \qquad \text{Integrar con respecto a } y.$$

Para cambiar el orden de integración a $dy\,dx$, se coloca un rectángulo vertical en la región, como se muestra en la figura 14.6*b*. Con esto se puede ver que los límites o cotas constantes $0 \le x \le 4$ sirven como límites exteriores de integración. Despejando y de la ecuación $x = y^2$, se concluye que los límites interiores son $0 \le y \le \sqrt{x}$. Por tanto, el área de la región también se puede representar por

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\,dx.$$

Evaluando esta integral, se ve que tiene el mismo valor que la integral original.

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\,dx = \int_0^4 y\Big]_0^{\sqrt{x}} dx \qquad \text{Integrar con respecto a } y.$$

$$= \int_0^4 \sqrt{x}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4 = \frac{16}{3} \qquad \text{Integrar con respecto a } x.$$

Algunas veces no es posible calcular el área de una región con una sola integral iterada. En estos casos se divide la región en subregiones de manera que el área de cada subregión pueda calcularse por medio de una integral iterada. El área total es entonces la suma de las integrales iteradas.

TECNOLOGÍA Algunos paquetes de software pueden efectuar integración simbólica de integrales como las del ejemplo 6. Tales programas se pueden utilizar para evaluar las integrales de los ejercicios y ejemplos dados en esta sección.

EJEMPLO 6 Un área representada por dos integrales iteradas

Hallar el área de la región R que se encuentra bajo la parábola

$$y = 4x - x^2 \qquad \text{La parábola forma el límite o cota superior.}$$

sobre el eje x, y sobre la recta

$$y = -3x + 6. \qquad \text{La recta y el eje } x \text{ forman el límite o cota inferior.}$$

Solución Para empezar se divide R en dos subregiones R_1 y R_2 como se muestra en la figura 14.7.

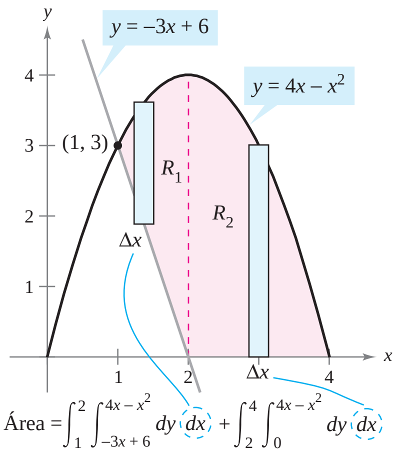


Figura 14.7

En ambas regiones es conveniente usar rectángulos verticales y se tiene

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dy\, dx + \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dy\, dx \\
&= \int_1^2 (4x - x^2 + 3x - 6)\, dx + \int_2^4 (4x - x^2)\, dx \\
&= \left[\frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x\right]_1^2 + \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_2^4 \\
&= \left(14 - \frac{8}{3} - 12 - \frac{7}{2} + \frac{1}{3} + 6\right) + \left(32 - \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{15}{2}.
\end{aligned}$$

El área de la región es 15/2 unidades cuadradas. Tratar de comprobar el resultado usando el procedimiento para hallar el área entre dos curvas, que se presentó en la sección 7.1.

NOTA En los ejemplos 3 a 6, hay que observar la ventaja de dibujar la región de integración. Se recomienda desarrollar el hábito de hacer dibujos como ayuda para determinar los límites de integración de todas las integrales iteradas de este capítulo. ■

En este punto, uno se puede preguntar para qué se necesitan las integrales iteradas. Después de todo, ya se sabe usar la integración convencional para hallar el área de una región en el plano. (Por ejemplo, comparar la solución del ejemplo 4 de esta sección con la del ejemplo 3 en la sección 7.1.) La necesidad de las integrales iteradas será más clara en la sección siguiente. En esta sección se presta especial atención a los procedimientos para determinar los límites de integración de las integrales iteradas, y el conjunto de ejercicios siguiente está diseñado para adquirir práctica en este procedimiento importante.

14.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, evaluar la integral.

1. $\displaystyle\int_0^x (x + 2y)\, dy$

2. $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{y}{x}\, dy$

3. $\displaystyle\int_1^{2y} \frac{y}{x}\, dx, \quad y > 0$

4. $\displaystyle\int_0^{\cos y} y\, dx$

5. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y\, dy$

6. $\displaystyle\int_{x^3}^{\sqrt{x}} (x^2 + 3y^2)\, dy$

7. $\displaystyle\int_{e^y}^{y} \frac{y \ln x}{x}\, dx, \quad y > 0$

8. $\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2)\, dx$

9. $\displaystyle\int_0^{x^3} y e^{-y/x}\, dy$

10. $\displaystyle\int_y^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos y\, dx$

En los ejercicios 11 a 30, evaluar la integral iterada.

11. $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 (x + y)\, dy\, dx$

12. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-2}^2 (x^2 - y^2)\, dy\, dx$

13. $\displaystyle\int_1^2\int_0^4 (x^2 - 2y^2)\, dx\, dy$

14. $\displaystyle\int_{-1}^2\int_1^3 (x + y^2)\, dx\, dy$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^1 y \cos x\, dy\, dx$

16. $\displaystyle\int_0^{\ln 4}\int_0^{\ln 3} e^{x+y}\, dy\, dx$

17. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen} x} (1 + \cos x)\, dy\, dx$

18. $\displaystyle\int_1^4\int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x}\, dy\, dx$

19. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x \sqrt{1 - x^2}\, dy\, dx$

20. $\displaystyle\int_{-4}^4\int_0^{x^2} \sqrt{64 - x^3}\, dy\, dx$

21. $\displaystyle\int_{-1}^5\int_0^{3y} \left(3 + x^2 + \frac{1}{4}y^2\right) dx\, dy$

22. $\displaystyle\int_0^2\int_y^{2y} (10 + 2x^2 + 2y^2)\, dx\, dy$

23. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x + y)\, dx\, dy$

24. $\displaystyle\int_0^2\int_{3y^2-6y}^{2y-y^2} 3y\, dx\, dy$

25. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4 - y^2}}\, dx\, dy$

26. $\displaystyle\int_1^3\int_0^y \frac{4}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

28. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

29. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} \theta r\, dr\, d\theta$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\theta} 3r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta$

En los ejercicios 31 a 34, evaluar la integral iterada impropia.

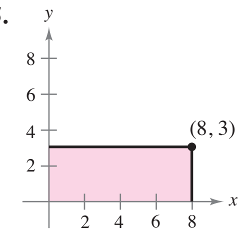
31. $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_0^{1/x} y\, dy\, dx$

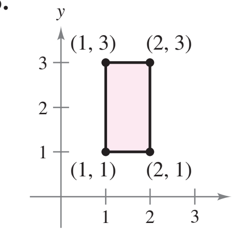
32. $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1 + y^2}\, dy\, dx$

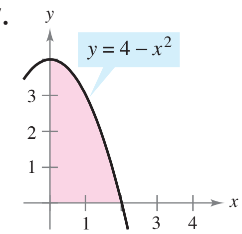
33. $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \frac{1}{xy}\, dx\, dy$

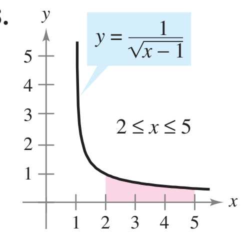
34. $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xye^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$

En los ejercicios 35 a 38, utilizar una integral iterada para hallar el área de la región.

35. 

36. 

37. 

38. 

En los ejercicios 39 a 46, utilizar una integral iterada para calcular el área de la región limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones.

39. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, \quad x = 0, \quad y = 0$

40. $y = x^{3/2}, \quad y = 2x$

41. $2x - 3y = 0, \quad x + y = 5, \quad y = 0$

42. $xy = 9, \quad y = x, \quad y = 0, \quad x = 9$

43. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

44. $y = x, \quad y = 2x, \quad x = 2$

45. $y = 4 - x^2, \quad y = x + 2$

46. $x^2 + y^2 = 4, \quad x = 0, \quad y = 0$

En los ejercicios 47 a 54, dibujar la región R de integración y cambiar el orden de integración.

47. $\displaystyle\int_0^4\int_0^y f(x, y)\, dx\, dy$

48. $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y)\, dx\, dy$

49. $\displaystyle\int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx$

50. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{4-x^2} f(x, y)\, dy\, dx$

51. $\displaystyle\int_1^{10}\int_0^{\ln y} f(x, y)\, dx\, dy$

52. $\displaystyle\int_{-1}^2\int_0^{e^{-x}} f(x, y)\, dy\, dx$

53. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{x^2}^1 f(x, y)\, dy\, dx$

54. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos x} f(x, y)\, dy\, dx$

En los ejercicios 55 a 64, dibujar la región R cuya área está dada por la integral iterada. Después cambiar el orden de integración y mostrar que ambos órdenes dan la misma área.

55. $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 dy\, dx$

56. $\displaystyle\int_1^2\int_2^4 dx\, dy$

57. $\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\, dy$

58. $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\, dx$

59. $\displaystyle\int_0^2\int_0^x dy\,dx + \int_2^4\int_0^{4-x} dy\,dx$

60. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{x/2} dy\,dx + \int_4^6\int_0^{6-x} dy\,dx$

61. $\displaystyle\int_0^2\int_{x/2}^1 dy\,dx$

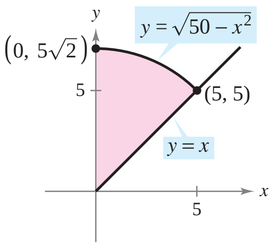
62. $\displaystyle\int_0^9\int_{\sqrt{x}}^3 dy\,dx$

63. $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx\,dy$

64. $\displaystyle\int_{-2}^2\int_0^{4-y^2} dx\,dy$

65. ***Para pensar*** **Dar un argumento geométrico para la igualdad. Verificar la igualdad analíticamente.**

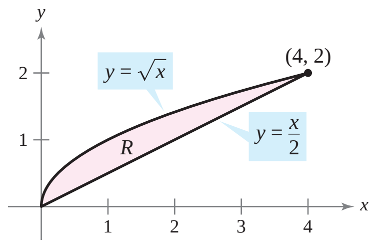
$$\int_0^5\int_x^{\sqrt{50-x^2}} x^2y^2\,dy\,dx =$$
$$\int_0^5\int_0^y x^2y^2\,dx\,dy + \int_5^{5\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{50-y^2}} x^2y^2\,dx\,dy$$



Para discusión

66. ***Para pensar*** Completar las integrales iteradas en forma tal que cada una represente el área de la región R (ver la figura). Entonces demostrar que ambas integrales tienen la misma área.

a) Área $= \displaystyle\int\int dx\,dy$ *b*) Área $= \displaystyle\int\int dy\,dx$



En los ejercicios 67 a 72, trazar la región de integración. Después evaluar la integral iterada. (Observar que es necesario cambiar el orden de integración.)

67. $\displaystyle\int_0^2\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\,dy\,dx$

68. $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{3}{2+y^3}\,dy\,dx$

69. $\displaystyle\int_0^1\int_{2x}^2 4e^{y^2}\,dy\,dx$

70. $\displaystyle\int_0^2\int_x^2 e^{-y^2}\,dy\,dx$

71. $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 \operatorname{sen} x^2\,dx\,dy$

72. $\displaystyle\int_0^2\int_{y^2}^4 \sqrt{x}\operatorname{sen} x\,dx\,dy$

CAS **En los ejercicios 73 a 76, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral iterada.**

73. $\displaystyle\int_0^2\int_{x^2}^{2x} (x^3+3y^2)\,dy\,dx$

74. $\displaystyle\int_0^1\int_y^{2y} \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy$

75. $\displaystyle\int_0^4\int_0^y \frac{2}{(x+1)(y+1)}\,dx\,dy$

76. $\displaystyle\int_0^a\int_0^{a-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx$

CAS **En los ejercicios 77 y 78, *a*) dibujar la región de integración, *b*) cambiar el orden de integración y *c*) usar un sistema algebraico por computadora y mostrar que ambos órdenes dan el mismo valor.**

77. $\displaystyle\int_0^2\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} (x^2y - xy^2)\,dx\,dy$

78. $\displaystyle\int_0^2\int_{\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2/4} \frac{xy}{x^2+y^2+1}\,dy\,dx$

CAS **En los ejercicios 79 a 82, usar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral iterada.**

79. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{4-x^2} e^{xy}\,dy\,dx$

80. $\displaystyle\int_0^2\int_x^2 \sqrt{16-x^3-y^3}\,dy\,dx$

81. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 6r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$

82. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{1+} 15\theta r\,dr\,d\theta$

Desarrollo de conceptos

83. Explicar qué se quiere decir con una integral iterada. ¿Cómo se evalúa?

84. Describir regiones que sean verticalmente simples y regiones que sean horizontalmente simples.

85. Dar una descripción geométrica de la región de integración si los límites interiores y exteriores de integración son constantes.

86. Explicar por qué algunas veces es una ventaja cambiar el orden de integración.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 87 y 88, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

87. $\displaystyle\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$

88. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^y f(x,y)\,dx\,dy$

14.2 Integrales dobles y volumen

- Utilizar una integral doble para representar el volumen de una región sólida.
- Utilizar las propiedades de las integrales dobles.
- Evaluar una integral doble como una integral iterada.
- Hallar el valor promedio de una función sobre una región.

Integrales dobles y volumen de una región sólida

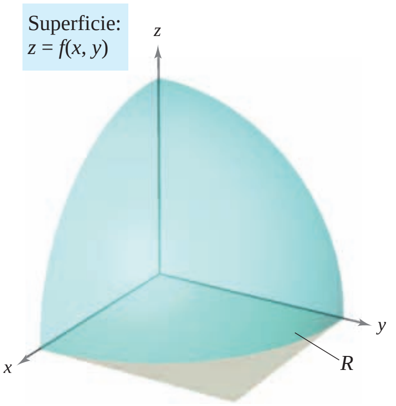


Figura 14.8

Se sabe que una integral definida sobre un *intervalo* utiliza un proceso de límite para asignar una medida a cantidades como el área, el volumen, la longitud de arco y la masa. En esta sección, se usará un proceso similar para definir la **integral doble** de una función de dos variables sobre una *región en el plano*.

Considérese una función continua f tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en una región R del plano xy. El objetivo es hallar el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie dada por

$$z = f(x, y) \qquad \text{Superficie sobre el plano } xy.$$

y el plano xy, como se muestra en la figura 14.8. Para empezar se sobrepone una red o cuadrícula rectangular sobre la región, como se muestra en la figura 14.9. Los rectángulos que se encuentran completamente dentro de R forman una **partición interior** Δ, cuya **norma** $\|\Delta\|$ está definida como la longitud de la diagonal más larga de los n rectángulos. Después, se elige un punto (x_i, y_i) en cada rectángulo y se forma el prisma rectangular cuya altura es $f(x_i, y_i)$, como se muestra en la figura 14.10. Como el área del i-ésimo rectángulo es

$$\Delta A_i \qquad \text{Área del rectángulo } i\text{-ésimo.}$$

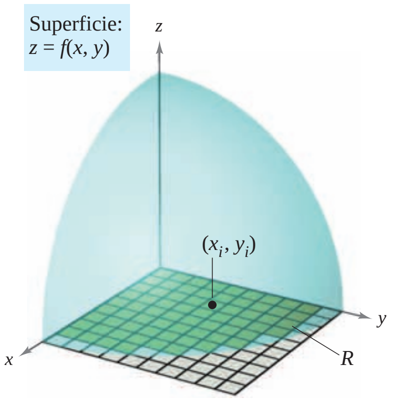
se sigue que el volumen del prisma i-ésimo es

$$f(x_i, y_i)\,\Delta A_i \qquad \text{Volumen del prisma } i\text{-ésimo.}$$

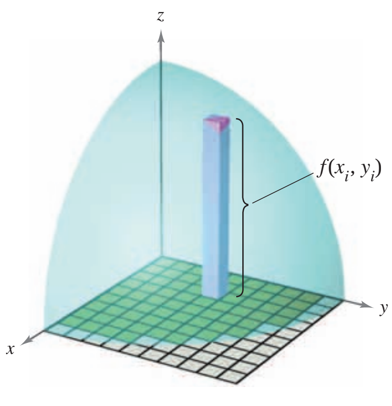
y el volumen de la región sólida se puede aproximar por la suma de Riemann de los volúmenes de todos los n prismas,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i \qquad \text{Suma de Riemann.}$$

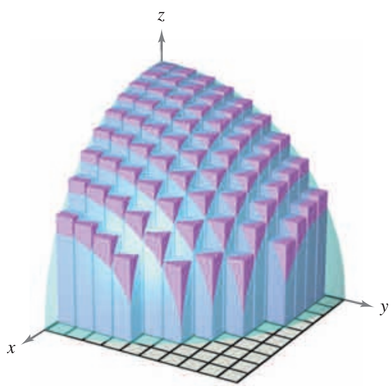
como se muestra en la figura 14.11. Esta aproximación se puede mejorar tomando redes o cuadrículas con rectángulos más y más pequeños, como se muestra en el ejemplo 1.



Los rectángulos que se encuentran dentro de R forman una partición interior de R
Figura 14.9



Prisma rectangular cuya base tiene un área de ΔA_i y cuya altura es $f(x_i, y_i)$
Figura 14.10



Volumen aproximado por prismas rectangulares
Figura 14.11

EJEMPLO 1 Aproximar el volumen de un sólido

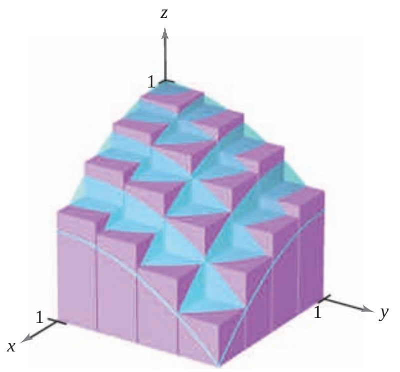
Aproximar el volumen del sólido comprendido entre el paraboloide

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

y la región cuadrada R dada por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Utilizar una partición formada por los cuadrados cuyos lados tengan una longitud de $\frac{1}{4}$.

Solución Para empezar se forma la partición especificada de R. En esta partición, es conveniente elegir los centros de las subregiones como los puntos en los que se evalúa $f(x, y)$.

$$\begin{array}{cccc}
\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) \\
\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right) \\
\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right) \\
\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right)
\end{array}$$



Superficie:
$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

Figura 14.12

Como el área de cada cuadrado es $\Delta A_i = \frac{1}{16}$, el volumen se puede aproximar por la suma

$$\sum_{i=1}^{16} f(x_i\, y_i)\,\Delta A_i = \sum_{i=1}^{16}\left(1 - \frac{1}{2}x_i^2 - \frac{1}{2}y_i^2\right)\left(\frac{1}{16}\right)$$
$$\approx 0.672.$$

Esta aproximación se muestra gráficamente en la figura 14.12. El volumen exacto del sólido es $\frac{2}{3}$ (ver el ejemplo 2). Se obtiene una mejor aproximación si se usa una partición más fina. Por ejemplo, con una partición con cuadrados con lados de longitud $\frac{1}{10}$, la aproximación es 0.668.

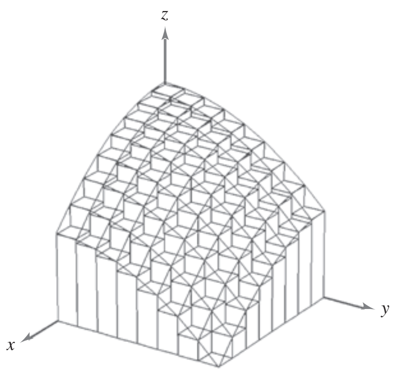


Figura 14.13

TECNOLOGÍA Algunas herramientas de graficación tridimensionales pueden representar figuras como la mostrada en la figura 14.12. La gráfica mostrada en la figura 14.13 se dibujó con una herramienta de graficación. En esta gráfica, obsérvese que cada uno de los prismas rectangulares está dentro de la región sólida.

En el ejemplo 1, hay que observar que, usando particiones más finas, se obtienen mejores aproximaciones al volumen. Esta observación sugiere que se podría obtener el volumen exacto tomando un límite. Es decir,

$$\text{Volumen} = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i.$$

El significado exacto de este límite es que el límite es igual a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left| L - \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i \right| < \varepsilon$$

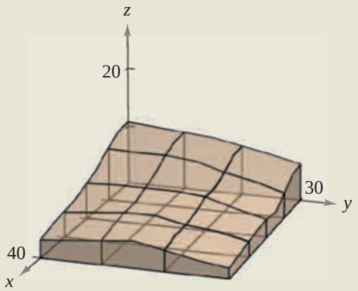
para toda partición Δ de la región plana R (que satisfaga $\|\Delta\| < \delta$) y para toda elección posible de x_i y y_i en la región i-ésima.

El uso del límite de una suma de Riemann para definir un volumen es un caso especial del uso del límite para definir una **integral doble**. Sin embargo, el caso general no requiere que la función sea positiva o continua.

EXPLORACIÓN

Las cantidades en la tabla representan la profundidad (en unidades de 10 yardas) de la tierra en el centro de cada cuadrado de la figura.

x \ y	1	2	3
1	10	9	7
2	7	7	4
3	5	5	4
4	4	5	3



Aproximar el número de yardas cúbicas de tierra en el primer octante. (Esta exploración la sugirió Robert Vojack, Ridgewood High School, Ridgewood, NJ.)

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DOBLE

Si f está definida en una región cerrada y acotada R del plano xy, entonces la **integral doble de f sobre R** está dada por

$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i$$

siempre que el límite exista. Si existe el límite, entonces f es **integrable** sobre R.

NOTA Una vez definidas las integrales dobles, se verá que una integral definida ocasionalmente se llama **integral simple**. ■

Para que la integral doble de f en la región R exista es suficiente que R pueda expresarse como la unión de un número finito de subregiones que no se sobrepongan (ver la figura 14.14) y que sean vertical u horizontalmente simples, y que f sea continua en la región R.

Una integral doble se puede usar para hallar el volumen de una región sólida que se encuentra entre el plano xy y la superficie dada por $z = f(x, y)$.

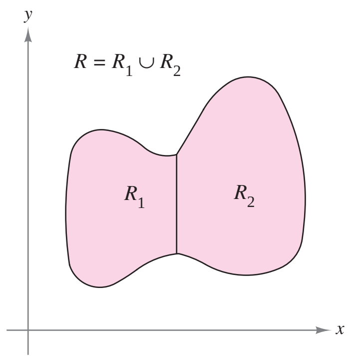
VOLUMEN DE UNA REGIÓN SÓLIDA

Si f es integrable sobre una región plana R y $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en R, entonces el volumen de la región sólida que se encuentra sobre R y bajo la gráfica de f se define como

$$V = \int_R\int f(x, y)\, dA.$$

Propiedades de las integrales dobles

Las integrales dobles tienen muchas de las propiedades de las integrales simples.



Dos regiones no se sobreponen si su intersección es un conjunto de área 0. En esta figura, el área del segmento de la recta común a R_1 y R_2 es 0

Figura 14.14

TEOREMA 14.1 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DOBLES

Sean f y g continuas en una región cerrada y acotada R del plano, y sea c una constante.

1. $\displaystyle\int_R\int cf(x, y)\, dA = c\int_R\int f(x, y)\, dA$

2. $\displaystyle\int_R\int [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dA = \int_R\int f(x, y)\, dA \pm \int_R\int g(x, y)\, dA$

3. $\displaystyle\int_R\int f(x, y)\, dA \geq 0, \qquad \text{si } f(x, y) \geq 0$

4. $\displaystyle\int_R\int f(x, y)\, dA \geq \int_R\int g(x, y)\, dA, \qquad \text{si } f(x, y) \geq g(x, y)$

5. $\displaystyle\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_{R_1}\int f(x, y)\, dA + \int_{R_2}\int f(x, y)\, dA$, donde R es la unión de dos subregiones R_1 y R_2 que no se sobreponen.

Evaluación de integrales dobles

Normalmente, el primer paso para evaluar una integral doble es reescribirla como una integral iterada. Para mostrar cómo se hace esto, se utiliza el modelo geométrico de una integral doble: el volumen de un sólido.

Considérese la región sólida acotada por el plano $z = f(x, y) = 2 - x - 2y$ y por los tres planos coordenados, como se muestra en la figura 14.15. Cada sección transversal vertical paralela al plano yz es una región triangular cuya base tiene longitud $y = (2 - x)/2$ y cuya altura es $z = 2 - x$. Esto implica que para un valor fijo de x, el área de la sección transversal triangular es

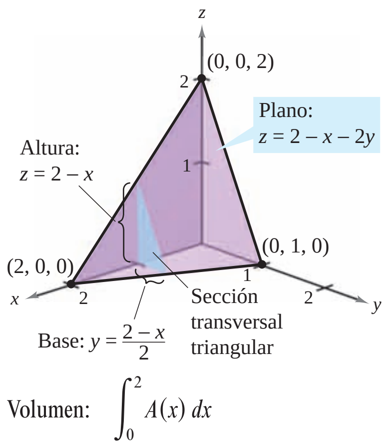
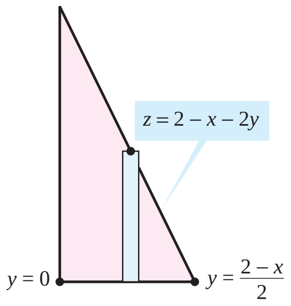


Figura 14.15

$$A(x) = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{2}\right)(2-x) = \frac{(2-x)^2}{4}.$$

De acuerdo con la fórmula para el volumen de un sólido de secciones transversales conocidas (sección 7.2), el volumen del sólido es

$$\begin{aligned}\text{Volumen} &= \int_a^b A(x)\,dx\\ &= \int_0^2 \frac{(2-x)^2}{4}\,dx\\ &= -\frac{(2-x)^3}{12}\bigg]_0^2 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$



Sección transversal triangular
Figura 14.16

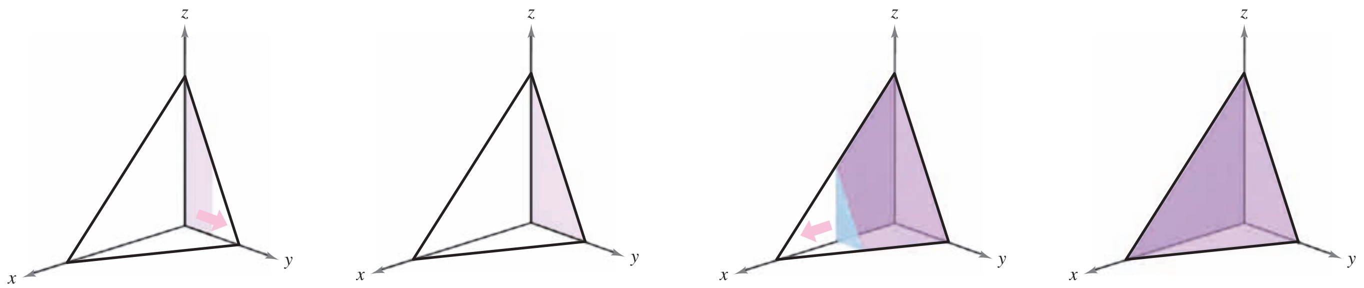
Este procedimiento funciona sin importar cómo se obtenga $A(x)$. En particular, $A(x)$ se puede hallar por integración, como se muestra en la figura 14.16. Es decir, se considera x constante, y se integra $z = 2 - x - 2y$ desde 0 hasta $(2 - x)/2$ para obtener

$$\begin{aligned}A(x) &= \int_0^{(2-x)/2} (2 - x - 2y)\,dy\\ &= \Big[(2-x)y - y^2\Big]_0^{(2-x)/2}\\ &= \frac{(2-x)^2}{4}.\end{aligned}$$

Combinando estos resultados, se tiene la *integral iterada*

$$\text{Volumen} = \int\!\!\int_R f(x, y)\,dA = \int_0^2 \int_0^{(2-x)/2} (2 - x - 2y)\,dy\,dx.$$

Para comprender mejor este procedimiento, se puede imaginar la integración como dos barridos. En la integración interior, una recta vertical barre el área de una sección transversal. En la integración exterior, la sección transversal triangular barre el volumen, como se muestra en la figura 14.17.



Integrar con respecto a y para obtener el área de la sección transversal
Integrar con respecto a x para obtener el volumen del sólido
Figura 14.17

El teorema siguiente lo demostró el matemático italiano Guido Fubini (1879-1943). El teorema establece que si R es vertical u horizontalmente simple y f es continua en R, la integral doble de f en R es igual a una integral iterada.

TEOREMA 14.2 TEOREMA DE FUBINI

Sea f continua en una región plana R.

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces

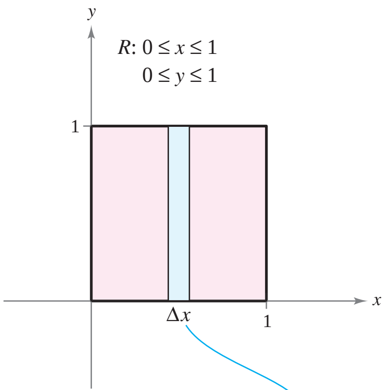
$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral doble como integral iterada

Evaluar

$$\int_R\int \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dA$$

donde R es la región dada por $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.



$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_0^1\int_0^1 f(x, y)\, dy\, dx$

El volumen de la región sólida es $\frac{2}{3}$
Figura 14.18

Solución Como la región R es un cuadrado, es vertical y horizontalmente simple y se puede emplear cualquier orden de integración. Se elige $dy\, dx$ colocando un rectángulo representativo vertical en la región, como se muestra en la figura 14.18. Con esto se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\int_R\int \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dA &= \int_0^1\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)y - \frac{y^3}{6}\right]_0^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}x^2\right) dx \\
&= \left[\frac{5}{6}x - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

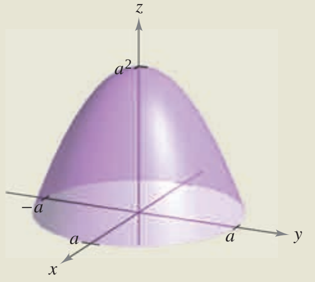
La integral doble evaluada en el ejemplo 2 representa el volumen de la región sólida que fue aproximado en el ejemplo 1. Nótese que la aproximación obtenida en el ejemplo 1 es buena $\left(0.672 \text{ contra } \frac{2}{3}\right)$ aun cuando se empleó una partición que constaba sólo en 16 cuadrados. El error se debe a que se usaron los centros de las subregiones cuadradas como los puntos para la aproximación. Esto es comparable a la aproximación de una integral simple con la regla del punto medio.

EXPLORACIÓN

El volumen de un sector de paraboloide
El sólido del ejemplo 3 tiene una base elíptica (no circular). Considerar la región limitada o acotada por el paraboloide circular

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy. ¿Cuántas maneras de hallar el volumen de este sólido se conocen ahora? Por ejemplo, se podría usar el método del disco para encontrar el volumen como un sólido de revolución. ¿Todos los métodos emplean integración?



La dificultad para evaluar una integral simple $\int_a^b f(x)\,dx$ depende normalmente de la función f, y no del intervalo $[a, b]$. Ésta es una diferencia importante entre las integrales simples y las integrales dobles. En el ejemplo siguiente se integra una función similar a la de los ejemplos 1 y 2. Nótese que una variación en la región R lleva a un problema de integración mucho más difícil.

EJEMPLO 3 Hallar el volumen por medio de una integral doble

Hallar el volumen de la región sólida acotada por el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano xy.

Solución Haciendo $z = 0$, se ve que la base de la región, en el plano xy, es la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$, como se muestra en la figura 14.19*a*. Esta región plana es vertical y horizontalmente simple, por tanto el orden $dy\,dx$ es apropiado.

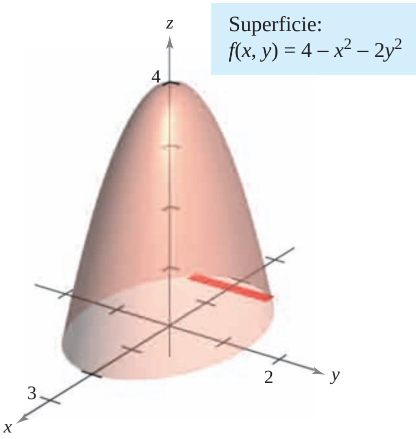
Límites o cotas variables para y: $-\sqrt{\dfrac{(4-x^2)}{2}} \le y \le \sqrt{\dfrac{(4-x^2)}{2}}$

Límites o cotas constantes para x: $-2 \le x \le 2$

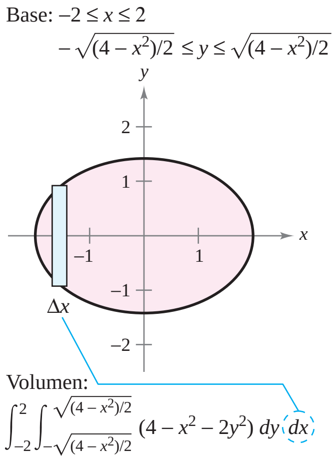
El volumen está dado por

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (4 - x^2 - 2y^2)\,dy\,dx && \text{Ver figura 14.19}b.\\
&= \int_{-2}^{2}\left[(4-x^2)y - \frac{2y^3}{3}\right]_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} dx\\
&= \frac{4}{3\sqrt{2}}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}\,dx\\
&= \frac{4}{3\sqrt{2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16\cos^4\theta\,d\theta && x = 2 \text{ sen } \theta.\\
&= \frac{64}{3\sqrt{2}}(2)\int_{0}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta\\
&= \frac{128}{3\sqrt{2}}\left(\frac{3\pi}{16}\right) && \text{Fórmula de Wallis.}\\
&= 4\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 3, observar la utilidad de la fórmula de Wallis para evaluar $\int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\,d\theta$. Esta fórmula se puede consultar en la sección 8.3. ■



a)

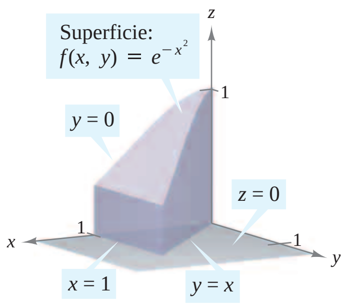


b)

Figura 14.19

En los ejemplos 2 y 3, los problemas se podrían haber resuelto empleando cualquiera de los órdenes de integración porque las regiones eran vertical y horizontalmente simples. En caso de haber usado el orden $dx\,dy$ se habrían obtenido integrales con dificultad muy parecida. Sin embargo, hay algunas ocasiones en las que uno de los órdenes de integración es mucho más conveniente que otro. El ejemplo 4 muestra uno de estos casos.

EJEMPLO 4 Comparación de diferentes órdenes de integración



La base está acotada por $y = 0$, $y = x$ y $x = 1$

Figura 14.20

Hallar el volumen de la región sólida R acotada por la superficie

$$f(x, y) = e^{-x^2} \qquad \text{Superficie.}$$

y los planos $z = 0$, $y = 0$, $y = x$ y $x = 1$, como se muestra en la figura 14.20.

Solución La base de R en el plano xy está acotada por las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $y = x$. Los dos posibles órdenes de integración se muestran en la figura 14.21.

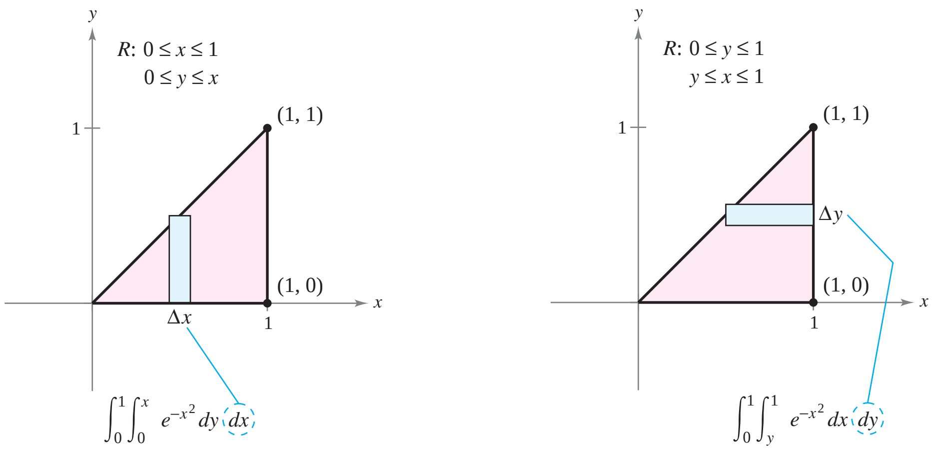


Figura 14.21

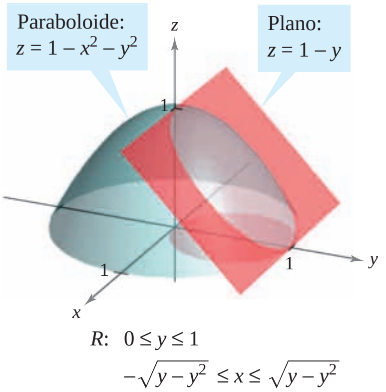
Estableciendo las integrales iteradas correspondientes, se ve que el orden $dx\,dy$ requiere la primitiva (o antiderivada) $\int e^{-x^2}\,dx$, la cual no es una función elemental. Por otro lado con el orden $dy\,dx$ se obtiene la integral

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^x e^{-x^2}\,dy\,dx &= \int_0^1 e^{-x^2} y \Big]_0^x dx \\
&= \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right) \\
&= \frac{e-1}{2e} \\
&\approx 0.316.
\end{aligned}$$

NOTA Tratar de utilizar un integrador simbólico para evaluar la integral del ejemplo 4.

EJEMPLO 5 Volumen de una región acotada por dos superficies

Hallar el volumen de la región sólida R acotada superiormente por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1 - y$, como se muestra en la figura 14.22.



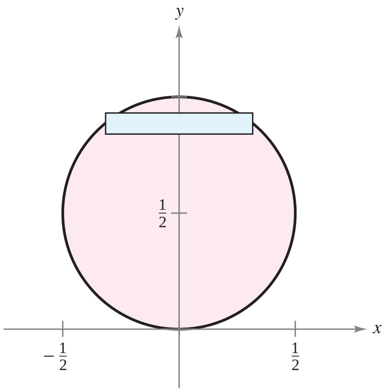


Figura 14.22

Solución Igualando los valores z, se determina que la intersección de las dos superficies se produce en el cilindro circular recto dado por

$$1 - y = 1 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y - y^2.$$

Como el volumen de R es la diferencia entre el volumen bajo el paraboloide y el volumen bajo el plano, se tiene

$$\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy - \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (y - y^2 - x^2)\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \left[(y - y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dy \\
&= \frac{4}{3} \int_0^1 (y - y^2)^{3/2}\, dy \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right) \int_0^1 [1 - (2y - 1)^2]^{3/2}\, dy \\
&= \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^4 \theta}{2}\, d\theta && 2y - 1 = \text{sen } \theta. \\
&= \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \cos^4 d\theta \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3\pi}{16}\right) = \frac{\pi}{32}. && \text{Fórmula de Wallis.}
\end{aligned}$$

Valor promedio de una función

Recordar de la sección 4.4 que para una función f en una variable, el valor promedio de f sobre $[a, b]$ es

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dada una función de f en dos variables, se puede encontrar el valor de f sobre la región R como se muestra en la siguiente definición.

DEFINICIÓN DEL VALOR PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN SOBRE UNA REGIÓN

Si f es integrable sobre la región plana R, entonces el **valor promedio** de f sobre R es

$$\frac{1}{A} \int_R \int f(x, y)\, dA$$

donde A es el área de R.

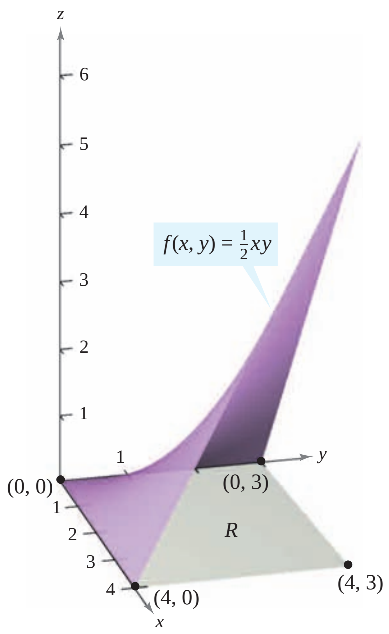


Figura 14.23

EJEMPLO 6 Encontrar el valor promedio de una función

Encontrar el valor promedio de $f(x, y) = \frac{1}{2}xy$ sobre la región R, donde R es un rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 3)$ y $(0, 3)$.

Solución El área de la región rectangular R es $A = 12$ (ver la figura 14.23). El valor promedio está dado por

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A}\int_R\int f(x, y)\, dA &= \frac{1}{12}\int_0^4\int_0^3 \frac{1}{2}xy\, dy\, dx \\
&= \frac{1}{12}\int_0^4 \frac{1}{4}xy^2\Big]_0^3\, dx \\
&= \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{9}{4}\right)\int_0^4 x\, dx \\
&= \frac{3}{16}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 \\
&= \left(\frac{3}{16}\right)(8) \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

14.2 Ejercicios

Aproximación **En los ejercicios 1 a 4, aproximar la integral $\int_R\int f(x, y)\, dA$ dividiendo el rectángulo R con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$ y $(0, 2)$ en ocho cuadrados iguales y hallando la suma $\sum_{i=1}^{8} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i$ donde (x_i, y_i) es el centro del cuadrado i-ésimo. Evaluar la integral iterada y compararla con la aproximación.**

1. $\displaystyle\int_0^4\int_0^2 (x + y)\, dy\, dx$

2. $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^4\int_0^2 x^2y\, dy\, dx$

3. $\displaystyle\int_0^4\int_0^2 (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

4. $\displaystyle\int_0^4\int_0^2 \frac{1}{(x + 1)(y + 1)}\, dy\, dx$

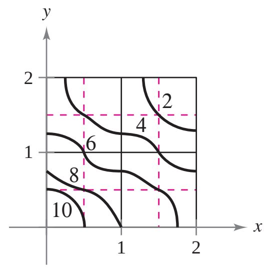
5. ***Aproximación*** La tabla muestra valores de una función f sobre una región cuadrada R. Dividir la región en 16 cuadrados iguales y elegir (x_i, y_i) como el punto más cercano al origen en el cuadrado i-ésimo. Comparar esta aproximación con la obtenida usando el punto más lejano al origen en el cuadrado i-ésimo.

$\int_0^4\int_0^4 f(x, y)\, dy\, dx$

x \ y	0	1	2	3	4
0	32	31	28	23	16
1	31	30	27	22	15
2	28	27	24	19	12
3	23	22	19	14	7
4	16	15	12	7	0

6. ***Aproximación*** La figura muestra las curvas de nivel de una función f en una región cuadrada R. Aproximar la integral empleando cuatro cuadrados y tomando el punto medio de cada cuadrado como (x_i, y_i).

$\displaystyle\int_0^2\int_0^2 f(x, y)\, dy\, dx$



En los ejercicios 7 a 12, dibujar la región R y evaluar la integral iterada $\int_R\int f(x, y)\, dA$.

7. $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 (1 + 2x + 2y)\, dy\, dx$

8. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 y\, dy\, dx$

9. $\displaystyle\int_0^6\int_{y/2}^3 (x + y)\, dx\, dy$

10. $\displaystyle\int_0^4\int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} x^2y^2\, dx\, dy$

11. $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x + y)\, dy\, dx$

12. $\displaystyle\int_0^1\int_{y-1}^0 e^{x+y}\, dx\, dy + \int_0^1\int_0^{1-y} e^{x+y}\, dx\, dy$

En los ejercicios 13 a 20, dar una integral para cada orden de integración y utilizar el orden más conveniente para evaluar la integral en la región R.

13. $\displaystyle\int_R\int xy\,dA$

R: rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 5)$, $(3, 5)$, $(3, 0)$

14. $\displaystyle\int_R\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\,dA$

R: rectángulo con vértices $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\pi, \pi/2)$, $(-\pi, \pi/2)$

15. $\displaystyle\int_R\int \frac{y}{x^2 + y^2}\,dA$

R: triángulo acotado por $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$, $x = 2$

16. $\displaystyle\int_R\int xe^y\,dA$

R: triángulo acotado por $y = 4 - x$, $y = 0$, $x = 0$

17. $\displaystyle\int_R\int -2y\,dA$

R: región acotada por $y = 4 - x^2$, $y = 4 - x$

18. $\displaystyle\int_R\int \frac{y}{1 + x^2}\,dA$

R: región acotada por $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $x = 4$

19. $\displaystyle\int_R\int x\,dA$

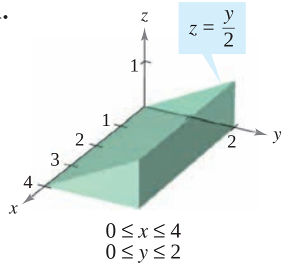
R: el sector circular en el primer cuadrante acotado por $y = \sqrt{25 - x^2}$, $3x - 4y = 0$, $y = 0$

20. $\displaystyle\int_R\int (x^2 + y^2)\,dA$

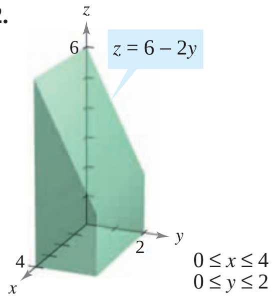
R: semicírculo acotado por $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$

En los ejercicios 21 a 30, utilizar una integral doble para hallar el volumen del sólido indicado.

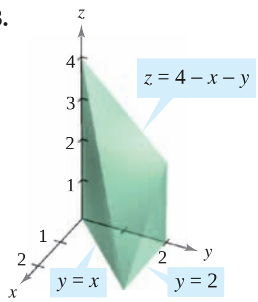
21.



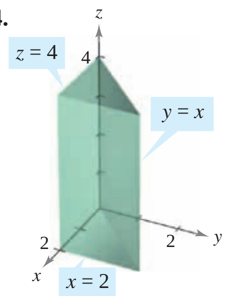
22.



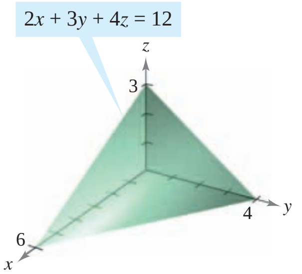
23.



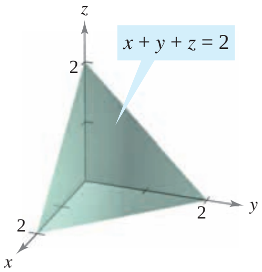
24.



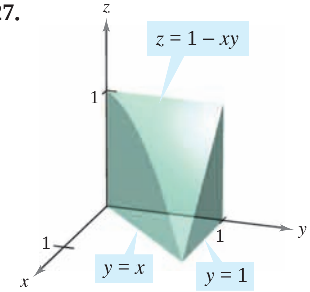
25.



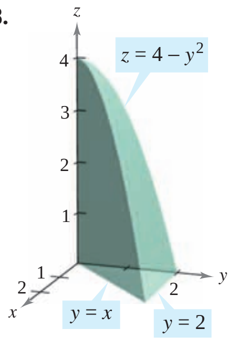
26.



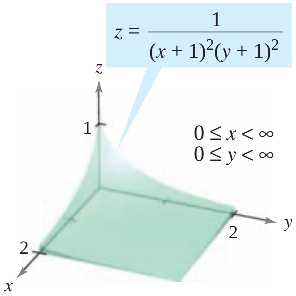
27.



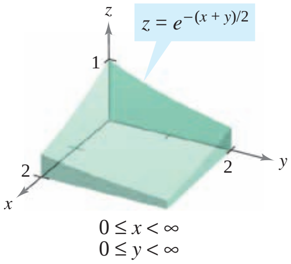
28.



29. Integral impropia

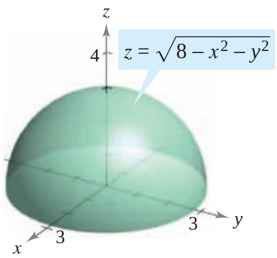


30. Integral impropia

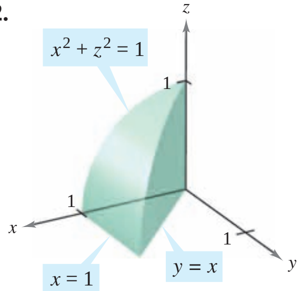


CAS **En los ejercicios 31 y 32, utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar el volumen del sólido.**

31.



32.



En los ejercicios 33 a 40, dar una integral doble para hallar el volumen del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.

33. $z = xy$, $z = 0$, $y = x$, $x = 1$, primer octante

34. $y = 0$, $z = 0$, $y = x$, $z = x$, $x = 0$, $x = 5$

35. $z = 0$, $z = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$

36. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

37. $x^2 + z^2 = 1,\ y^2 + z^2 = 1$, primer octante

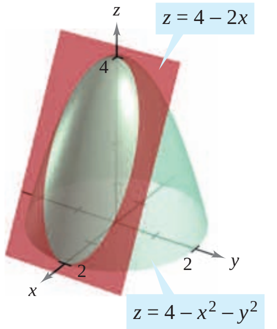
38. $y = 4 - x^2,\ z = 4 - x^2$, primer octante

39. $z = x + y,\ x^2 + y^2 = 4$, primer octante

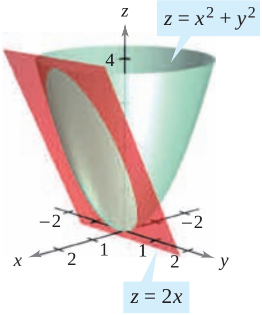
40. $z = \dfrac{1}{1 + y^2},\ x = 0,\ x = 2,\ y \geq 0$

En los ejercicios 41 a 46, establecer una integral doble para encontrar el volumen de una región sólida limitada por las gráficas de las ecuaciones. No evaluar la integral.

41.



42.



43. $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0$

44. $z = \operatorname{sen}^2 x,\ z = 0,\ 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq 5$

45. $z = x^2 + 2y^2,\ z = 4y$

46. $z = x^2 + y^2,\ z = 18 - x^2 - y^2$

CAS **En los ejercicios 47 a 50, utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar el volumen del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.**

47. $z = 9 - x^2 - y^2,\ z = 0$

48. $x^2 = 9 - y,\ z^2 = 9 - y$, primer octante

49. $z = \dfrac{2}{1 + x^2 + y^2},\ z = 0,\ y = 0,\ x = 0,\ y = -0.5x + 1$

50. $z = \ln(1 + x + y),\ z = 0,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4 - \sqrt{y}$

51. Si f es una función continua tal que $0 \leq f(x, y) \leq 1$ en una región R de área 1, demostrar que $0 \leq \int_R\int f(x, y)\, dA \leq 1$.

52. Hallar el volumen del sólido que se encuentra en el primer octante, acotado por los planos coordenados y el plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$, donde $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$.

En los ejercicios 53 a 58, trazar la región de integración. Después evaluar la integral iterada y, si es necesario, cambiar el orden de integración.

53. $\displaystyle\int_0^1\int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}\, dx\, dy$

54. $\displaystyle\int_0^{\ln 10}\int_{e^x}^{10} \frac{1}{\ln y}\, dy\, dx$

55. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4 - y^2}\, dy\, dx$

56. $\displaystyle\int_0^3\int_{y/3}^{1} \frac{1}{1 + x^4}\, dx\, dy$

57. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\arccos y} \operatorname{sen} x\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx\, dy$

58. $\displaystyle\int_0^2\int_{(1/2)x^2}^{2} \sqrt{y}\cos y\, dy\, dx$

Valor promedio **En los ejercicios 59 a 64, encontrar el valor promedio de $f(x, y)$ sobre la región R.**

59. $f(x, y) = x$
R: rectángulo con vértices (0, 0), (4, 0), (4, 2), (0, 2)

60. $f(x, y) = 2xy$
R: rectángulo con vértices (0, 0), (5, 0), (5, 3), (0, 3)

61. $f(x, y) = x^2 + y^2$
R: cuadrado con vértices (0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)

62. $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y}$
R: triángulo con vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1)

63. $f(x, y) = e^{x+y}$
R: triángulo con vértices (0, 0), (0, 1), (1, 1)

64. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$
R: rectángulo con vértices (0, 0), $(\pi, 0)$, (π, π), $(0, \pi)$

65. ***Producción promedio*** La función de producción Cobb-Douglas para un fabricante de automóviles es $f(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$ donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital. Estimar el nivel promedio de producción si el número x de unidades de trabajo varía entre 200 y 250 y el número y de unidades de capital varía entre 300 y 325.

66. ***Temperatura promedio*** La temperatura en grados Celsius sobre la superficie de una placa metálica es $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$, donde x y y están medidas en centímetros. Estimar la temperatura promedio si x varía entre 0 y 2 centímetros y y varía entre 0 y 4 centímetros.

Desarrollo de conceptos

67. Enunciar la definición de integral doble. Dar la interpretación geométrica de una integral doble si el integrando es una función no negativa sobre la región de integración.

68. Sea R una región en el plano xy cuya área es B. Si $f(x, y) = k$ para todo punto (x, y) en R, ¿cuál es el valor de $\int_R\int f(x, y)\, dA$? Explicar.

69. Sea R un condado en la parte norte de Estados Unidos, y sea $f(x, y)$ la precipitación anual de nieve en el punto (x, y) de R. Interpretar cada uno de los siguientes.

a) $\displaystyle\int_R\int f(x, y)\, dA$ *b)* $\dfrac{\displaystyle\int_R\int f(x, y)\, dA}{\displaystyle\int_R\int dA}$

70. Identificar la expresión que es inválida. Explicar el razonamiento.

a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^3 f(x, y)\, dy\, dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^2\int_0^y f(x, y)\, dy\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^2\int_x^3 f(x, y)\, dy\, dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^2\int_0^x f(x, y)\, dy\, dx$

71. Sea la región plana R un círculo unitario y el máximo valor de f sobre R sea 6. ¿Es el valor más grande posible de $\int_R\int f(x, y)\, dy\, dx$ igual a 6? ¿Por qué sí o por qué no? Si es no, ¿cuál es el valor más grande posible?

Para discusión

72. Las siguientes integrales iteradas representan la solución al mismo problema. ¿Cuál integral iterada es más fácil de evaluar? Explicar el razonamiento.

$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 \operatorname{sen} y^2 \, dy \, dx = \int_0^2 \int_0^{2y} \operatorname{sen} y^2 \, dx \, dy$$

Probabilidad **Una función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias continuas x y y es una función $f(x, y)$ que satisface las propiedades siguientes.**

a) **$f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y)** ***b)*** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dA = 1$

c) $\displaystyle P[(x, y) \in R] = \iint_R f(x, y)\, dA$

En los ejercicios 73 a 76, mostrar que la función es una función de densidad de probabilidad conjunta y hallar la probabilidad requerida.

73. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$

$P(0 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2)$

74. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}xy, & 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$

$P(0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2)$

75. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{27}(9 - x - y), & 0 \leq x \leq 3,\ 3 \leq y \leq 6 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$

$P(0 \leq x \leq 1,\ 4 \leq y \leq 6)$

76. $f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$

$P(0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1)$

77. ***Aproximación*** En una fábrica de cemento la base de un montón de arena es rectangular con dimensiones aproximadas de 20 por 30 metros. Si la base se coloca en el plano xy con un vértice en el origen, las coordenadas de la superficie del montón son (5, 5, 3), (15, 5, 6), (25, 5, 4), (5, 15, 2), (15, 15, 7) y (25, 15, 3). Aproximar el volumen de la arena en el montón.

78. ***Programación*** Considerar una función continua $f(x, y)$ sobre la región rectangular R con vértices (a, c), (b, c), (a, d) y (b, d) donde $a < b$ y $c < d$. Dividir los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ en m y n subintervalos, de modo que los subintervalos en una dirección dada sean de igual longitud. Escribir un programa para que una herramienta de graficación calcule la suma

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\,\Delta A_i \approx \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dA$$

donde (x_i, y_j) es el centro de un rectángulo representativo en R.

CAS ***Aproximación*** **En los ejercicios 79 a 82, *a*) utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral iterada, y *b*) utilizar el programa del ejercicio 78 para aproximar la integral iterada con los valores dados de m y n.**

79. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 \operatorname{sen}\sqrt{x + y}\, dy\, dx$

$m = 4,\ n = 8$

80. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^4 20e^{-x^3/8} dy\, dx$

$m = 10,\ n = 20$

81. $\displaystyle\int_4^6 \int_0^2 y \cos\sqrt{x}\, dx\, dy$

$m = 4,\ n = 8$

82. $\displaystyle\int_1^4 \int_1^2 \sqrt{x^3 + y^3}\, dx\, dy$

$m = 6,\ n = 4$

Aproximación **En los ejercicios 83 y 84, determinar qué valor aproxima mejor el volumen del sólido entre el plano *xy* y la función sobre la región. (Hacer la elección con base en un dibujo del sólido y *sin* realizar ningún cálculo.)**

83. $f(x, y) = 4x$

R: cuadrado con vértices (0, 0), (4, 0), (4, 4), (0, 4)

a) -200 *b*) 600 *c*) 50 *d*) 125 *e*) 1 000

84. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

R: círculo acotado por $x^2 + y^2 = 9$

a) 50 *b*) 500 *c*) -500 *d*) 5 *e*) 5 000

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 85 y 86, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

85. El volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ está dado por la integral

$$V = 8\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

86. Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo (x, y) en R, y f y g son continuas en R, entonces $\int_R\int f(x, y)\, dA \leq \int_R\int g(x, y)\, dA$.

87. Sea $f(x) = \int_1^x e^{t^2}\, dt$. Hallar el valor promedio de f en el intervalo $[0, 1]$.

88. Hallar $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx.$ $\left(\textit{Sugerencia:}\text{ Evaluar } \displaystyle\int_1^2 e^{-xy}\, dy.\right)$

89. Determinar la región R en el plano xy que maximiza el valor de $\int_R\int (9 - x^2 - y^2)\, dA$.

90. Determinar la región R en el plano xy que minimiza el valor de $\int_R\int (x^2 + y^2 - 4)\, dA$.

91. Hallar $\int_0^2 [\arctan(\pi x) - \arctan x]\, dx$. (*Sugerencia:* Convertir la integral en una integral doble.)

92. Utilizar un argumento geométrico para mostrar que

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \frac{9\pi}{2}.$$

Preparación del examen Putnam

93. Evaluar $\int_0^a \int_0^b e^{\text{máx}\{b^2x^2,\, a^2y^2\}}\, dy\, dx$, donde a y b son positivos.

94. Probar que si $\lambda > \frac{1}{2}$ no existe una función real u tal que, para todo x en el intervalo cerrado $0 \leq x \leq 1$, $u(x) = 1 + \lambda\int_x^1 u(y)u(y - x)\, dy$.

14.3 Cambio de variables: coordenadas polares

- **Expresar y evaluar integrales dobles en coordenadas polares.**

Integrales dobles en coordenadas polares

Algunas integrales dobles son *mucho* más fáciles de evaluar en forma polar que en forma rectangular. Esto es así especialmente cuando se trata de regiones circulares, cardioides y pétalos de una curva rosa, y de integrandos que contienen $x^2 + y^2$.

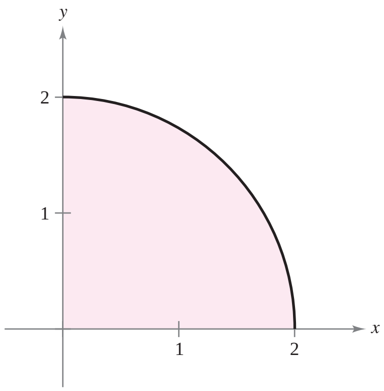
En la sección 10.4 se vio que las coordenadas polares (r, θ) de un punto están relacionadas con las coordenadas rectangulares (x, y) del punto, de la manera siguiente.

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

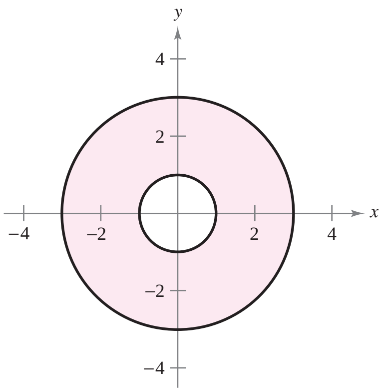
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

EJEMPLO 1 Utilizar coordenadas polares para describir una región

Utilizar coordenadas polares para describir cada una de las regiones mostradas en la figura 14.24.



a)



b)

Figura 14.24

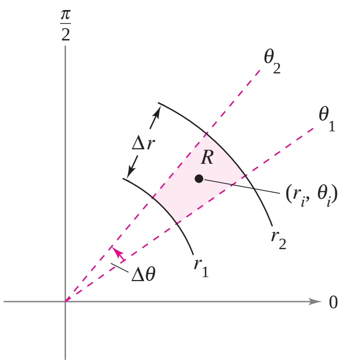
Solución

a) La región R es un cuarto del círculo de radio 2. Esta región se describe en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta): 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le \pi/2\}.$$

b) La región R consta de todos los puntos comprendidos entre los círculos concéntricos de radios 1 y 3. Esta región se describe en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta): 1 \le r \le 3, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

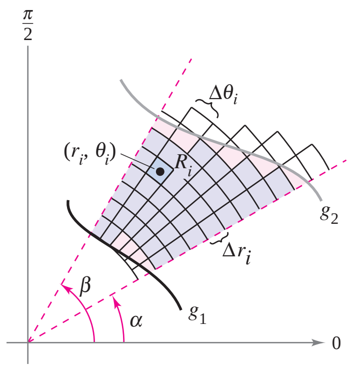


Sector polar
Figura 14.25

Las regiones del ejemplo 1 son casos especiales de **sectores polares**

$$R = \{(r, \theta): r_1 \le r \le r_2, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$$ Sector polar.

como el mostrado en la figura 14.25.



La red o cuadrícula polar se sobrepone sobre la región R
Figura 14.26

Para definir una integral doble de una función continua $z = f(x, y)$ en coordenadas polares, considerar una región R limitada o acotada por las gráficas de $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$ y las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. En lugar de hacer una partición de R en rectángulos pequeños, se utiliza una partición en sectores polares pequeños. A R se le superpone una red o cuadrícula polar formada por rayos o semirrectas radiales y arcos circulares, como se muestra en la figura 14.26. Los sectores polares R_i que se encuentran completamente dentro de R forman una **partición polar interna** Δ, cuya **norma** $\|\Delta\|$ es la longitud de la diagonal más larga en los n sectores polares.

Considerar un sector polar específico R_i, como se muestra en la figura 14.27. Se puede mostrar (ver ejercicio 75) que el área de R_i es

$$\Delta A_i = r_i \Delta r_i \Delta\theta_i \qquad \text{Área de } R_i.$$

donde $\Delta r_i = r_2 - r_1$ y $\Delta\theta_i = \theta_2 - \theta_1$. Esto implica que el volumen del sólido de altura $f(r_i \cos\theta_i, r_i \operatorname{sen}\theta_i)$ sobre R_i es aproximadamente

$$f(r_i \cos\theta_i, r_i \operatorname{sen}\theta_i) r_i \Delta r_i \Delta\theta_i$$

y se tiene

$$\int\!\!\int_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{n} f(r_i \cos\theta_i, r_i \operatorname{sen}\theta_i) r_i\, \Delta r_i\, \Delta\theta_i.$$

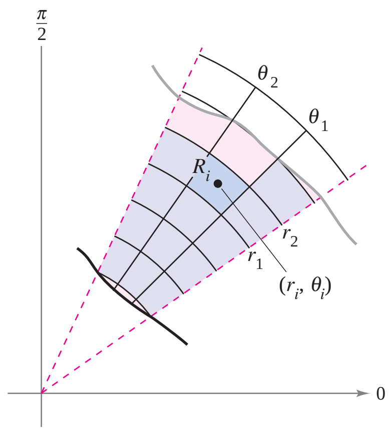
La suma de la derecha se puede interpretar como una suma de Riemann para $f(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)r$. La región R corresponde a una región S *horizontalmente simple* en el plano $r\theta$, como se muestra en la figura 14.28. Los sectores polares R_i corresponden a los rectángulos S_i, y el área ΔA_i de S_i es $\Delta r_i \Delta\theta_i$. Por tanto, el lado derecho de la ecuación corresponde a la integral doble

$$\int\!\!\int_S f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r\, dA.$$

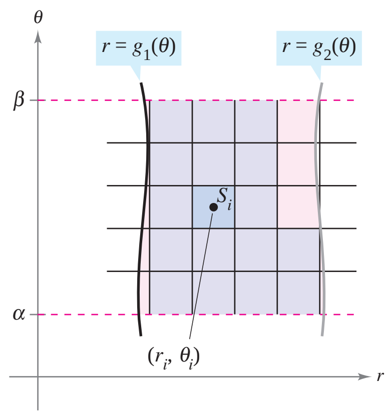
A partir de esto, se puede aplicar el teorema 14.2 para escribir

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_R f(x, y)\, dA &= \int\!\!\int_S f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r\, dA\\ &= \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r\, dr\, d\theta.\end{aligned}$$

Esto sugiere el teorema siguiente, cuya demostración se verá en la sección 14.8.



El sector polar R_i es el conjunto de todos los puntos (r, θ) tal que $r_1 \leq r \leq r_2$ y $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.
Figura 14.27



Región S horizontalmente simple
Figura 14.28

TEOREMA 14.3 CAMBIO DE VARIABLES A LA FORMA POLAR

Sea R una región plana que consta de todos los puntos $(x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ que satisfacen las condiciones $0 \le g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, donde $0 \le (\beta - \alpha) \le 2\pi$. Si g_1 y g_2 son continuas en $[\alpha, \beta]$ y f es continua en R, entonces

$$\int_R\!\!\int f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) r\, dr\, d\theta.$$

EXPLORACIÓN

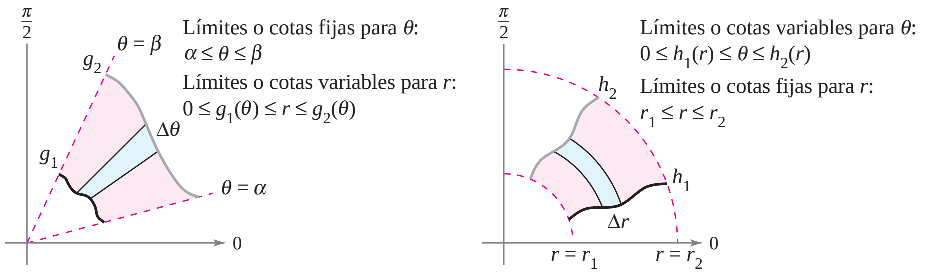
Volumen de un sector paraboloide
En la exploración de la página 997 se pidió resumir los diferentes métodos hasta ahora estudiados para calcular el volumen del sólido limitado o acotado por el paraboloide

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy. Ahora se conoce un método más. Utilizarlo para encontrar el volumen del sólido.

NOTA Si $z = f(x, y)$ es no negativa en R, entonces la integral del teorema 14.3 puede interpretarse como el volumen de la región sólida entre la gráfica de f y la región R. Cuando se usa la integral en el teorema 14.3, asegurarse de no omitir el factor extra de r en el integrando. ■

La región R puede ser de dos tipos básicos, regiones **r-simples** y regiones **θ-simples**, como se muestra en la figura 14.29.



Región r-simple
Figura 14.29

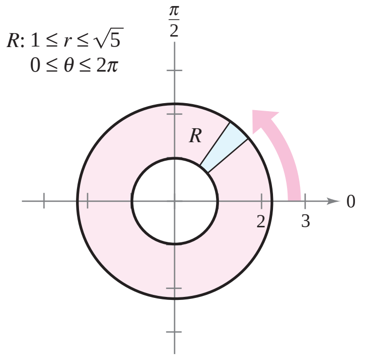
Región θ-simple

EJEMPLO 2 Evaluar una integral usando coordenadas polares doble

Sea R la región anular comprendida entre los dos círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 5$. Evaluar la integral $\int_R\!\int (x^2 + y)\, dA$.

Solución Los límites o cotas polares son $1 \le r \le \sqrt{5}$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, como se muestra en la figura 14.30. Además, $x^2 = (r\cos\theta)^2$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_R\!\!\int (x^2 + y)\, dA &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^2\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta) r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^3\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}\,\theta)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4}\cos^2\theta + \frac{r^3}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\Bigg]_1^{\sqrt{5}} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(6\cos^2\theta + \frac{5\sqrt{5} - 1}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(3 + 3\cos 2\theta + \frac{5\sqrt{5} - 1}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) d\theta \\
&= \left(3\theta + \frac{3\,\mathrm{sen}\,2\theta}{2} - \frac{5\sqrt{5} - 1}{3}\cos\theta\right)\Bigg]_0^{2\pi} \\
&= 6\pi.
\end{aligned}$$



Región r-simple
Figura 14.30

En el ejemplo 2, notar el factor extra de r en el integrando. Esto proviene de la fórmula para el área de un sector polar. En notación diferencial, se puede escribir

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

lo que indica que el área de un sector polar aumenta al alejarse del origen.

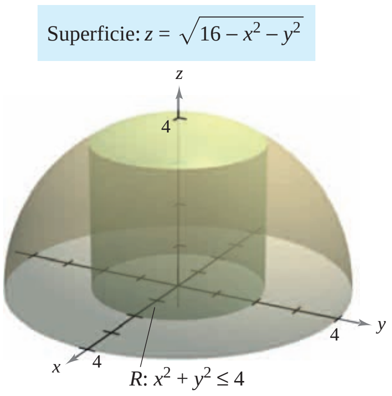


Figura 14.31

EJEMPLO 3 Cambio de variables a coordenadas polares

Utilizar las coordenadas polares para hallar el volumen de la región sólida limitada superiormente por el hemisferio

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$ Hemisferio que forma la superficie superior.

e inferiormente por la región circular R dada por

$$x^2 + y^2 \le 4$$ Región circular que forma la superficie inferior.

como se muestra en la figura 14.31.

Solución En la figura 14.31 se puede ver que R tiene como límites o cotas

$$-\sqrt{4 - y^2} \le x \le \sqrt{4 - y^2}, \quad -2 \le y \le 2$$

y que $0 \le z \le \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. En coordenadas polares, las cotas son

$$0 \le r \le 2 \quad \text{y} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

con altura $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} = \sqrt{16 - r^2}$. Por consiguiente, el volumen V está dado por

$$\begin{aligned} V = \int\!\!\int_R f(x, y)\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{16 - r^2}\,r\,dr\,d\theta \\ &= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (16 - r^2)^{3/2}\Big]_0^2\,d\theta \\ &= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(24\sqrt{3} - 64\right)d\theta \\ &= -\frac{8}{3}\left(3\sqrt{3} - 8\right)\theta\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{16\pi}{3}\left(8 - 3\sqrt{3}\right) \approx 46.979. \end{aligned}$$

NOTA Para ver la ventaja de las coordenadas polares en el ejemplo 3, hay que tratar de evaluar la integral iterada rectangular correspondiente

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{16 - x^2 - y^2}\,dx\,dy.$$

TECNOLOGÍA Todo sistema algebraico por computadora que calcula integrales dobles en coordenadas rectangulares también calcula integrales dobles en coordenadas polares. La razón es que una vez que se ha formado la integral iterada, su valor no cambia al usar variables diferentes. En otras palabras, si se usa un sistema algebraico por computadora para evaluar

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{16 - x^2}\,x\,dx\,dy$$

se deberá obtener el mismo valor que se obtuvo en el ejemplo 3.

Así como ocurre con coordenadas rectangulares, la integral doble

$$\int\!\!\int_R dA$$

puede usarse para calcular el área de una región en el plano.

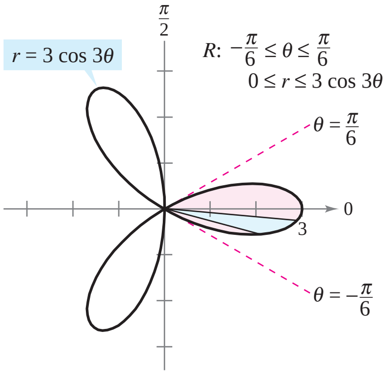


Figura 14.32

EJEMPLO 4 Hallar áreas de regiones polares

Utilizar una integral doble para hallar el área encerrada por la gráfica de $r = 3\cos 3\theta$.

Solución Sea R un pétalo de la curva mostrada en la figura 14.32. Esta región es r-simple y los límites son los siguientes.

$$-\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6} \qquad \text{Límites o cotas fijas para } \theta.$$

$$0 \le r \le 3\cos 3\theta \qquad \text{Límites o cotas variables para } r.$$

Por tanto, el área de un pétalo es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}A = \iint_R dA &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\int_0^{3\cos 3\theta} r\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{r^2}{2}\bigg]_0^{3\cos 3\theta} d\theta \\
&= \frac{9}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\theta\,d\theta \\
&= \frac{9}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (1 + \cos 6\theta)\,d\theta = \frac{9}{4}\left[\theta + \frac{1}{6}\operatorname{sen} 6\theta\right]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Así, el área total es $A = 9\pi/4$.

Como se ilustra en el ejemplo 4, el área de una región en el plano puede representarse mediante

$$A = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r\,dr\,d\theta.$$

Si $g_1(\theta) = 0$, se obtiene

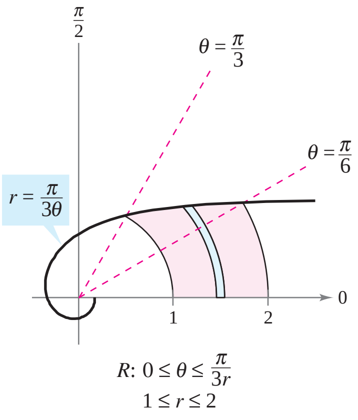
$$A = \int_\alpha^\beta \int_0^{g_2(\theta)} r\,dr\,d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{r^2}{2}\bigg]_0^{g_2(\theta)} d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(g_2(\theta))^2\,d\theta$$

lo cual concuerda con el teorema 10.13.

Hasta ahora en esta sección, todos los ejemplos de integrales iteradas en forma polar han sido de la forma

$$\int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r\,dr\,d\theta$$

en donde el orden de integración es primero con respecto a r. Algunas veces se puede simplificar el problema de integración cambiando el orden de integración, como se ilustra en el ejemplo siguiente.



Región θ-simple
Figura 14.33

EJEMPLO 5 Cambio del orden de integración

Hallar el área de la región acotada superiormente por la espiral $r = \pi/(3\theta)$ e inferiormente por el eje polar, entre $r = 1$ y $r = 2$.

Solución La región se muestra en la figura 14.33. Las cotas o límites polares de la región son

$$1 \le r \le 2 \quad \text{y} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3r}.$$

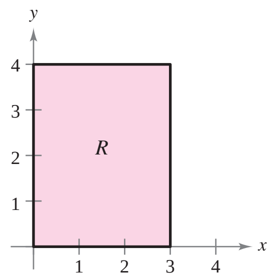
Por tanto, el área de la región puede evaluarse como sigue.

$$A = \int_1^2 \int_0^{\pi/(3r)} r\,d\theta\,dr = \int_1^2 r\theta\bigg]_0^{\pi/(3r)} dr = \int_1^2 \frac{\pi}{3}\,dr = \frac{\pi r}{3}\bigg]_1^2 = \frac{\pi}{3}$$

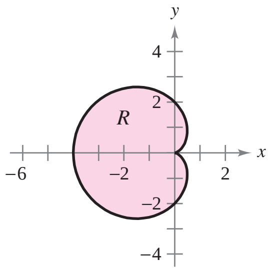
14.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4 se muestra la región R para la integral $\int_R\int f(x, y)\, dA$. Decir si serían más convenientes coordenadas rectangulares o polares para evaluar la integral.

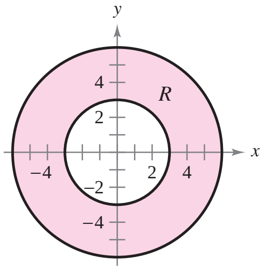
1.



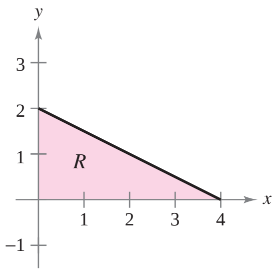
2.



3.

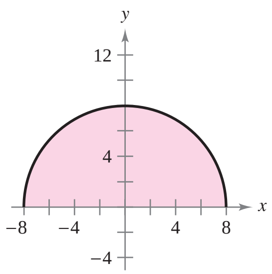


4.

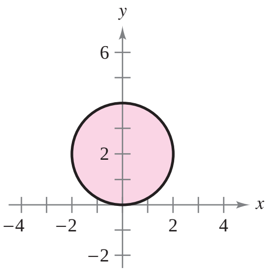


En los ejercicios 5 a 8, utilizar las coordenadas polares para describir la región mostrada.

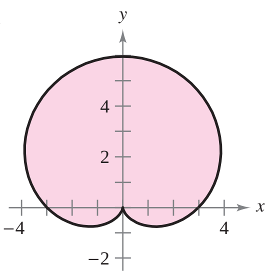
5.



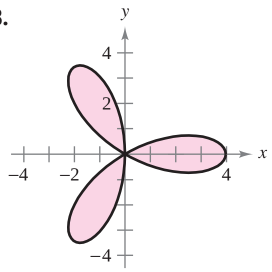
6.



7.



8.



En los ejercicios 9 a 16, evaluar la integral doble $\int_R\int f(r, \theta)\, dA$, y dibujar la región R.

9. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r^2\, dr\, d\theta$

11. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{6} 3r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta$

12. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{4} r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, dr\, d\theta$

13. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_2^{3} \sqrt{9 - r^2}\, r\, dr\, d\theta$

14. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{3} re^{-r^2}\, dr\, d\theta$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{1+\operatorname{sen}\theta} \theta r\, dr\, d\theta$

16. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{1-\cos\theta} (\operatorname{sen}\theta) r\, dr\, d\theta$

En los ejercicios 17 a 26, evaluar la integral iterada pasando a coordenadas polares.

17. $\displaystyle\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y\, dx\, dy$

18. $\displaystyle\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\, dy\, dx$

19. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

20. $\displaystyle\int_0^{1}\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dy\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^{2}\int_y^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$

23. $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy\, dy\, dx$

24. $\displaystyle\int_0^{4}\int_0^{\sqrt{4y-y^2}} x^2\, dx\, dy$

25. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2 + y^2)\, dy\, dx$

26. $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

En los ejercicios 27 y 28, combinar la suma de las dos integrales iteradas en una sola integral iterada pasando a coordenadas polares. Evaluar la integral iterada resultante.

27. $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{x} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx + \int_2^{2\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

28. $\displaystyle\int_0^{5\sqrt{2}/2}\int_0^{x} xy\, dy\, dx + \int_{5\sqrt{2}/2}^{5}\int_0^{\sqrt{25-x^2}} xy\, dy\, dx$

En los ejercicios 29 a 32, utilizar coordenadas polares para escribir y evaluar la integral doble $\int_R\int f(x, y)\, dA$.

29. $f(x, y) = x + y,\ R: x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

30. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2},\ R: x^2 + y^2 \le 25,\ x \ge 0$

31. $f(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x},\ R: x^2 + y^2 \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le y \le x$

32. $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2,\ R: x^2 + y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

Volumen **En los ejercicios 33 a 38, utilizar una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.**

33. $z = xy,\ x^2 + y^2 = 1$, primer octante

34. $z = x^2 + y^2 + 3,\ z = 0,\ x^2 + y^2 = 1$

35. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 0,\ x^2 + y^2 = 25$

36. $z = \ln(x^2 + y^2),\ z = 0,\ x^2 + y^2 \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 4$

37. Interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 - 4x = 0$

38. Interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$

39. ***Volumen*** Hallar a tal que el volumen en el interior del hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y en el exterior del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ sea la mitad del volumen del hemisferio.

40. ***Volumen*** Utilizar una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen de una esfera de radio a.

41. ***Volumen*** Determinar el diámetro de un orificio cavado verticalmente a través del centro del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones $z = 25e^{-(x^2+y^2)/4}$, $z = 0$, y $x^2 + y^2 = 16$ si se elimina la décima parte del volumen del sólido.

CAS 42. ***Diseño industrial*** Las superficies de una leva de doble lóbulo se representan por las desigualdades $\frac{1}{4} \leq r \leq \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta)$ y

$$\frac{-9}{4(x^2 + y^2 + 9)} \leq z \leq \frac{9}{4(x^2 + y^2 + 9)}$$

donde todas las medidas se dan en pulgadas.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la leva.

b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar el perímetro de la curva polar

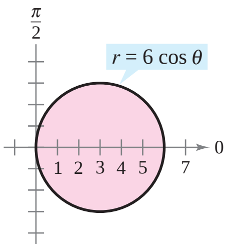
$r = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta)$.

Ésta es la distancia que recorre una pieza en contacto con la leva durante un giro completo de ésta.

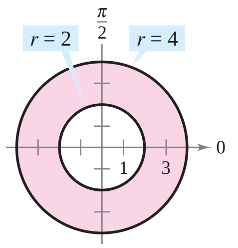
c) Utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar el volumen del acero en la leva.

Área **En los ejercicios 43 a 48, utilizar una integral doble para calcular el área de la región sombreada.**

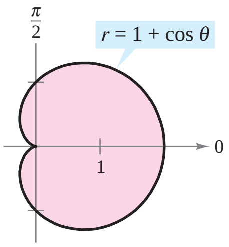
43.



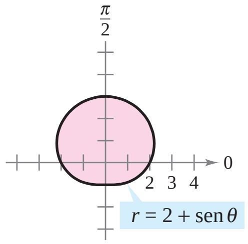
44.



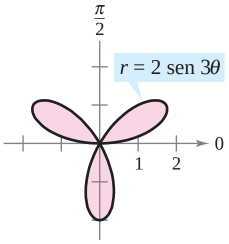
45.



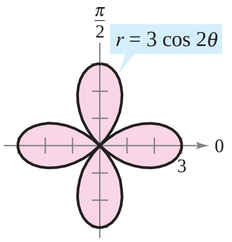
46.



47.



48.



Área **En los ejercicios 49 a 54, trazar una gráfica de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones. Después, usar una integral doble para encontrar el área de la región.**

49. Dentro del círculo $r = 2 \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 1$.

50. Dentro de la cardioide $r = 2 + 2 \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 1$.

51. Dentro del círculo $r = 3 \cos \theta$ y fuera de la cardioide $r = 1 + \cos \theta$.

52. Dentro de la cardioide $r = 1 + \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 3 \cos \theta$.

53. Dentro de la curva rosa $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$ y fuera del círculo $r = 2$.

54. Dentro del círculo $r = 2$ y fuera de la cardioide $r = 2 - 2 \cos \theta$.

Desarrollo de conceptos

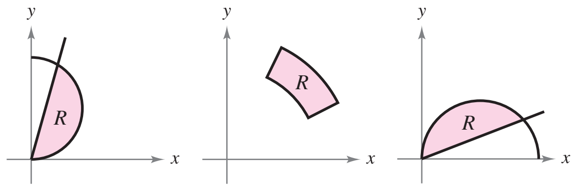
55. Describir la partición de la región de integración R en el plano xy cuando se utilizan coordenadas polares para evaluar una integral doble.

56. Explicar cómo pasar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares en una integral doble.

57. Con sus propias palabras, describir regiones r-simples y regiones θ-simples.

58. Cada figura muestra una región de integración para la integral doble $\int_R\int f(x, y)\, dA$. Para cada región, decir si es más fácil obtener los límites de integración con elementos representativos horizontales, elementos representativos verticales o con sectores polares. Explicar el razonamiento.

a) *b*) *c*)



59. Sea R la región limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$.

a) Establecer la integral $\int_R\int f(x, y)\, dA$.

b) Convertir la integral en el inciso *a*) a coordenadas polares.

c) ¿Qué integral debería elegirse para evaluar? ¿Por qué?

Para discusión

60. ***Para pensar*** Sin desarrollar cálculos, identificar la integral doble que represente la integral de $f(x) = x^2 + y^2$ sobre un círculo de radio 4. Explicar el razonamiento.

a) $\int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2\, dr\, d\theta$ *b*) $\int_0^4\int_0^{2\pi} r^3\, dr\, d\theta$

c) $\int_0^{2\pi}\int_0^4 r^3\, dr\, d\theta$ *d*) $\int_0^{2\pi}\int_{-4}^4 r^3\, dr\, d\theta$

61. ***Para pensar*** Considerar el programa escrito en el ejercicio 78 de la sección 14.2 para aproximar integrales dobles en coordenadas rectangulares. Si el programa se usa para aproximar la integral doble

$$\int_R\int f(r, \theta)\, dA$$

en coordenadas polares, ¿cómo hay que modificar f para introducirla al programa? Como los límites de integración son constantes, describir la región plana de integración.

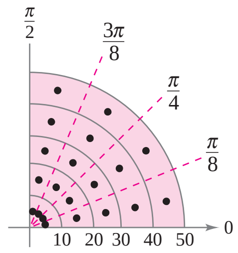
62. ***Aproximación*** Las secciones transversales horizontales de un bloque de hielo desprendido de un glaciar tienen forma de un cuarto de un círculo con radio aproximado de 50 pies. La base se divide en 20 subregiones como se muestra en la figura. En el centro de cada subregión, se mide la altura del hielo, dando los puntos siguientes en coordenadas cilíndricas.

$\left(5, \frac{\pi}{16}, 7\right), \left(15, \frac{\pi}{16}, 8\right), \left(25, \frac{\pi}{16}, 10\right), \left(35, \frac{\pi}{16}, 12\right), \left(45, \frac{\pi}{16}, 9\right),$
$\left(5, \frac{3\pi}{16}, 9\right), \left(15, \frac{3\pi}{16}, 10\right), \left(25, \frac{3\pi}{16}, 14\right), \left(35, \frac{3\pi}{16}, 15\right), \left(45, \frac{3\pi}{16}, 10\right),$
$\left(5, \frac{5\pi}{16}, 9\right), \left(15, \frac{5\pi}{16}, 11\right), \left(25, \frac{5\pi}{16}, 15\right), \left(35, \frac{5\pi}{16}, 18\right), \left(45, \frac{5\pi}{16}, 14\right),$
$\left(5, \frac{7\pi}{16}, 5\right), \left(15, \frac{7\pi}{16}, 8\right), \left(25, \frac{7\pi}{16}, 11\right), \left(35, \frac{7\pi}{16}, 16\right), \left(45, \frac{7\pi}{16}, 12\right)$

a) Aproximar el volumen del sólido.

b) El hielo pesa aproximadamente 57 libras por pie cúbico. Aproximar el peso del sólido.

c) Aproximar el número de galones de agua en el sólido si hay 7.48 galones de agua por pie cúbico.



CAS ***Aproximación*** **En los ejercicios 63 y 64, utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral iterada.**

63. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^5 r\sqrt{1 + r^3}\,\operatorname{sen}\sqrt{\theta}\, dr\, d\theta$

64. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^4 5re^{\sqrt{r\theta}}\, dr\, d\theta$

Aproximación **En los ejercicios 65 y 66, determinar qué valor se aproxima más al volumen del sólido entre el plano *xy* y la función sobre la región. (Realizar la elección a la vista de un dibujo del sólido y *no* efectuando cálculo alguno.)**

65. $f(x, y) = 15 - 2y$; R: semicírculo: $x^2 + y^2 = 16, y \geq 0$

a) 100 *b*) 200 *c*) 300 *d*) -200 *e*) 800

66. $f(x, y) = xy + 2$; R: cuarto de círculo: $x^2 + y^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0$

a) 25 *b*) 8 *c*) 100 *d*) 50 *e*) -30

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 67 y 68, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

67. Si $\int_R\int f(r, \theta)\, dA > 0$, entonces $f(r, \theta) > 0$ para todo (r, θ) en R.

68. Si $f(r, \theta)$ es una función constante y el área de la región S es el doble del área de la región R, entonces $2\int_R\int f(r, \theta)\, dA = \int_S\int f(r, \theta)\, dA$.

69. ***Probabilidad*** El valor de la integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx$ se requiere en el desarrollo de la función de densidad de probabilidad normal.

a) Utilizar coordenadas polares para evaluar la integral impropia.

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dA$$

b) Utilizar el resultado del inciso *a*) para calcular I.

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre este problema, ver el artículo "Integrating e^{-x^2} Without Polar Coordinates" de William Dunham en *Mathematics Teacher*.

70. Utilizar el resultado del ejercicio 69 y un cambio de variables para evaluar cada una de las integrales siguientes. No se requiere hacer ninguna integración.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ *b*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2}\, dx$

71. ***Población*** La densidad de población en una ciudad se aproxima mediante el modelo $f(x, y) = 4\,000e^{-0.01(x^2 + y^2)}$, $x^2 + y^2 \leq 49$, donde x y y se miden en millas. Integrar la función de densidad sobre la región circular indicada para aproximar la población de la ciudad.

72. ***Probabilidad*** Hallar k tal que la función

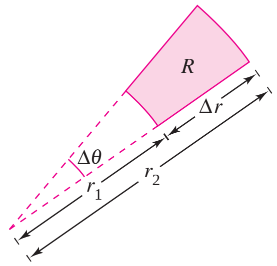
$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(x^2+y^2)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

sea una función de densidad de probabilidad.

73. ***Para pensar*** Considerar la región limitada o acotada por las gráficas de $y = 2$, $y = 4$, $y = x$ y $y = \sqrt{3}x$ y la integral doble $\int_R\int f\, dA$. Determinar los límites de integración si la región R está dividida en *a*) elementos representativos horizontales, *b*) elementos representativos verticales y *c*) sectores polares.

74. Repetir el ejercicio 73 con una región R limitada o acotada por la gráfica de la ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

75. Mostrar que el área A del sector polar R (ver la figura) es $A = r\Delta r\Delta\theta$, donde $r = (r_1 + r_2)/2$ es el radio promedio de R.



14.4 Centro de masa y momentos de inercia

- **Hallar la masa de una lámina plana utilizando una integral doble.**
- **Hallar el centro de masa de una lámina plana utilizando integrales dobles.**
- **Hallar los momentos de inercia utilizando integrales dobles.**

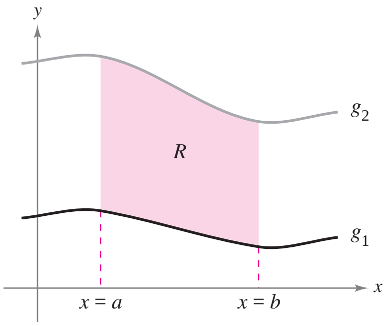


Lámina de densidad constante ρ
Figura 14.34

Masa

En la sección 7.6 se analizaron varias aplicaciones de la integración en las que se tenía una lámina plana de densidad *constante* ρ. Por ejemplo, si la lámina que corresponde a la región R, que se muestra en la figura 14.34, tiene una densidad constante ρ, entonces la masa de la lámina está dada por

$$\text{Masa} = \rho A = \rho\int\!\!\int_R dA = \int\!\!\int_R \rho\, dA. \qquad \text{Densidad constante.}$$

Si no se especifica otra cosa, se supone que una lámina tiene densidad constante. En esta sección, se extiende la definición del término *lámina* para abarcar también placas delgadas de densidad *variable*. Las integrales dobles pueden usarse para calcular la masa de una lámina de densidad variable, donde la densidad en (x, y) está dada por la **función de densidad ρ**.

DEFINICIÓN DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA DE DENSIDAD VARIABLE

Si ρ es una función de densidad continua sobre la lámina que corresponde a una región plana R, entonces la masa m de la lámina está dada por

$$m = \int\!\!\int_R \rho(x, y)\, dA. \qquad \text{Densidad variable.}$$

NOTA La densidad se expresa normalmente como masa por unidad de volumen. Sin embargo, en una lámina plana la densidad es masa por unidad de área de superficie.

EJEMPLO 1 Hallar la masa de una lámina plana

Hallar la masa de la lámina triangular con vértices $(0, 0)$, $(0, 3)$ y $(2, 3)$, dado que la densidad en (x, y) es $\rho(x, y) = 2x + y$.

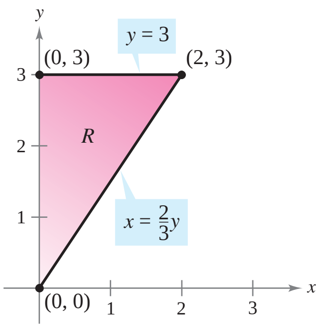


Lámina de densidad variable
$\rho(x, y) = 2x + y$
Figura 14.35

Solución Como se muestra en la figura 14.35, la región R tiene como fronteras $x = 0$, $y = 3$ y $y = 3x/2$ (o $x = 2y/3$). Por consiguiente, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} m = \int\!\!\int_R (2x + y)\, dA &= \int_0^3\int_0^{2y/3} (2x + y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^3 \Big[x^2 + xy\Big]_0^{2y/3} dy \\ &= \frac{10}{9}\int_0^3 y^2\, dy \\ &= \frac{10}{9}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 \\ &= 10. \end{aligned}$$

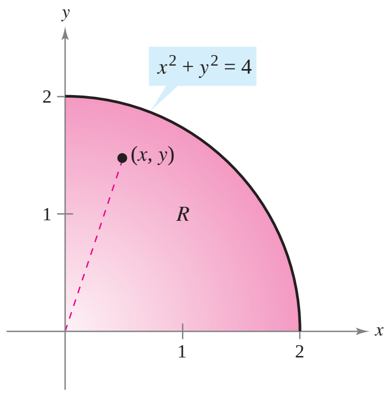
NOTA En la figura 14.35, nótese que la lámina plana está sombreada; el sombreado más oscuro corresponde a la parte más densa.

EJEMPLO 2 Hallar la masa empleando coordenadas polares

Hallar la masa de la lámina correspondiente a la porción en el primer cuadrante del círculo

$$x^2 + y^2 = 4$$

donde la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia entre el punto y el origen, como se muestra en la figura 14.36.



Densidad en (x, y): $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$
Figura 14.36

Solución En todo punto (x, y), la densidad de la lámina es

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= k\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}\\ &= k\sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Como $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$, la masa está dada por

$$\begin{aligned}m &= \int\!\!\int_R k\sqrt{x^2 + y^2}\, dA\\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} k\sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx.\end{aligned}$$

Para simplificar la integración, se puede convertir a coordenadas polares, utilizando los límites o cotas $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y $0 \leq r \leq 2$. Por tanto, la masa es

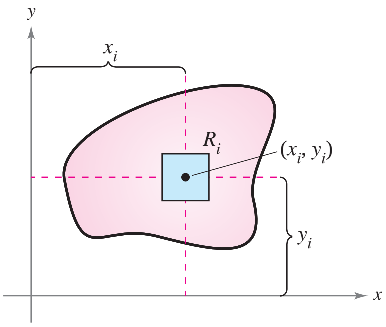
$$\begin{aligned}m = \int\!\!\int_R k\sqrt{x^2 + y^2}\, dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 k\sqrt{r^2}\, r\, dr\, d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 kr^2\, dr\, d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{kr^3}{3}\bigg]_0^2 d\theta\\ &= \frac{8k}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta\\ &= \frac{8k}{3}\bigg[\theta\bigg]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{4\pi k}{3}.\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA En muchas ocasiones, en este texto, se han mencionado las ventajas de utilizar programas de computación que realizan integración simbólica. Aun cuando se utilicen tales programas con regularidad, hay que recordar que sus mejores ventajas sólo son aprovechables en manos de un usuario conocedor. Por ejemplo, nótese la simplificación de la integral del ejemplo 2 cuando se convierte a la forma polar.

Forma rectangular	*Forma polar*
$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} k\sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$	$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 kr^2\, dr\, d\theta$

Si se tiene acceso a programas que realicen integración simbólica, se recomienda utilizarlos para evaluar ambas integrales. Algunos programas no pueden manejar la primera integral, pero cualquier programa que calcule integrales dobles puede evaluar la segunda integral.

Momentos y centros de masa



$M_x = (\text{masa})(y_i)$
$M_y = (\text{masa})(x_i)$
Figura 14.37

En láminas de densidad variable, los momentos de masa se definen de manera similar a la empleada en el caso de densidad uniforme. Dada una partición Δ de una lámina, correspondiente a una región plana R, considerar el rectángulo i-ésimo R_i de área ΔA_i, como se muestra en la figura 14.37. Suponer que la masa de R_i se concentra en uno de sus puntos interiores (x_i, y_i). El momento de masa de R_i respecto al eje x puede aproximarse por medio de

$$(\text{Masa})(y_i) \approx [\rho(x_i, y_i)\,\Delta A_i](y_i).$$

De manera similar, el momento de masa con respecto al eje y puede aproximarse por medio de

$$(\text{Masa})(x_i) \approx [\rho(x_i, y_i)\,\Delta A_i](x_i).$$

Formando la suma de Riemann de todos estos productos y tomando límites cuando la norma de Δ se aproxima a 0, se obtienen las definiciones siguientes de momentos de masa con respecto a los ejes x y y.

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA DE DENSIDAD VARIABLE

Sea ρ una función de densidad continua sobre la lámina plana R. Los **momentos de masa** con respecto a los ejes x y y son

$$M_x = \int_R\!\int y\rho(x, y)\,dA \quad \text{y} \quad M_y = \int_R\!\int x\rho(x, y)\,dA.$$

Si m es la masa de la lámina, entonces el **centro de masa** es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right).$$

Si R representa una región plana simple en lugar de una lámina, el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ se llama el **centroide** de la región.

En algunas láminas planas con densidad constante ρ, se puede determinar el centro de masa (o una de sus coordenadas) utilizando la simetría en lugar de usar integración. Por ejemplo, considerar las láminas de densidad constante mostradas en la figura 14.38. Utilizando la simetría, se puede ver que $\bar{y} = 0$ en la primera lámina y $\bar{x} = 0$ en la segunda lámina.

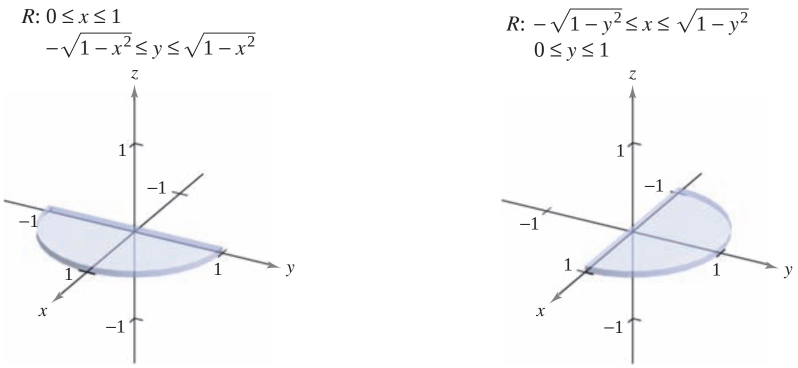


Lámina de densidad constante y simétrica con respecto al eje x

Lámina de densidad constante y simétrica con respecto al eje y

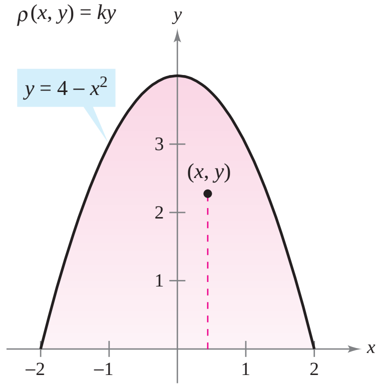
Figura 14.38

EJEMPLO 3 Hallar el centro de masa

Hallar el centro de masa de la lámina que corresponde a la región parabólica

$$0 \le y \le 4 - x^2 \qquad \text{Región parabólica.}$$

donde la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia entre (x, y) y el eje x, como se muestra en la figura 14.39.



Región parabólica de densidad variable
Figura 14.39

Solución Como la lámina es simétrica con respecto al eje y y

$$\rho(x, y) = ky$$

el centro de masa está en el eje y. Así, $\bar{x} = 0$. Para hallar $\bar{y}$, primero calcular la masa de la lámina.

$$\begin{aligned}\text{Masa} = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} ky\,dy\,dx &= \frac{k}{2}\int_{-2}^{2} y^2\Big]_0^{4-x^2} dx\\ &= \frac{k}{2}\int_{-2}^{2}(16 - 8x^2 + x^4)\,dx\\ &= \frac{k}{2}\left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2}\\ &= k\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right)\\ &= \frac{256k}{15}\end{aligned}$$

Después se halla el momento con respecto al eje x.

$$\begin{aligned}M_x = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}(y)(ky)\,dy\,dx &= \frac{k}{3}\int_{-2}^{2} y^3\Big]_0^{4-x^2} dx\\ &= \frac{k}{3}\int_{-2}^{2}(64 - 48x^2 + 12x^4 - x^6)\,dx\\ &= \frac{k}{3}\left[64x - 16x^3 + \frac{12x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right]_{-2}^{2}\\ &= \frac{4\,096k}{105}\end{aligned}$$

Así,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4\,096k/105}{256k/15} = \frac{16}{7}$$

y el centro de masa es $\left(0, \frac{16}{7}\right)$.

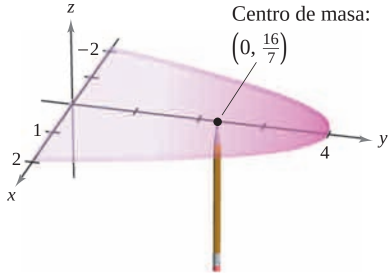


Figura 14.40

Aunque los momentos M_x y M_y se pueden interpretar como una medida de la tendencia a girar en torno a los ejes x o y, el cálculo de los momentos normalmente es un paso intermedio hacia una meta más tangible. El uso de los momentos M_x y M_y es encontrar el centro de masa. La determinación del centro de masa es útil en muchas aplicaciones, ya que permite tratar una lámina como si su masa se concentrara en un solo punto. Intuitivamente, se puede concebir el centro de masa como el punto de equilibrio de la lámina. Por ejemplo, la lámina del ejemplo 3 se mantendrá en equilibrio sobre la punta de un lápiz colocado en $\left(0, \frac{16}{7}\right)$, como se muestra en la figura 14.40.

Momentos de inercia

Los momentos M_x y M_y utilizados en la determinación del centro de masa de una lámina se suelen llamar **primeros momentos** con respecto a los ejes x y y. En cada uno de los casos, el momento es el producto de una masa por una distancia.

$$M_x = \int_R\int \underbrace{(y)}_{\substack{\text{Distancia}\\ \text{al eje } x}} \underbrace{\rho(x, y)\, dA}_{\text{Masa}} \qquad M_y = \int_R\int \underbrace{(x)}_{\substack{\text{Distancia}\\ \text{al eje } y}} \underbrace{\rho(x, y)\, dA}_{\text{Masa}}$$

Ahora se introducirá otro tipo de momento, el **segundo momento** o **momento de inercia** de una lámina respecto de una recta. Del mismo modo que la masa es una medida de la tendencia de la materia a resistirse a cambios en el movimiento rectilíneo, el momento de inercia respecto de una recta es una *medida de la tendencia de la materia a resistirse a cambios en el movimiento de rotación*. Por ejemplo, si una partícula de masa m está a una distancia d de una recta fija, su momento de inercia respecto de la recta se define como

$$I = md^2 = (\text{masa})(\text{distancia})^2.$$

Igual que ocurre con los momentos de masa, se puede generalizar este concepto para obtener los momentos de inercia de una lámina de densidad variable respecto de los ejes x y y. Estos segundos momentos se denotan por I_x e I_y, y en cada caso el momento es el producto de una masa por el cuadrado de una distancia.

$$I_x = \int_R\int \underbrace{(y^2)}_{\substack{\text{Cuadrado de}\\ \text{la distancia}\\ \text{al eje } x}} \underbrace{\rho(x, y)\, dA}_{\text{Masa}} \qquad I_y = \int_R\int \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{Cuadrado de}\\ \text{la distancia}\\ \text{al eje } y}} \underbrace{\rho(x, y)\, dA}_{\text{Masa}}$$

A la suma de los momentos I_x e I_y se le llama el **momento polar de inercia** y se denota por I_0.

NOTA En el caso de una lámina en el plano xy, I_0 representa el momento de inercia de la lámina con respecto al eje z. El término "momento polar de inercia" se debe a que en el cálculo se utiliza el cuadrado de la distancia polar r.

$$I_0 = \int_R\int (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dA$$
$$= \int_R\int r^2\rho(x, y)\, dA$$

EJEMPLO 4 Hallar el momento de inercia

Hallar el momento de inercia respecto del eje x de la lámina del ejemplo 3.

Solución De acuerdo con la definición de momento de inercia, se tiene

$$\begin{aligned}
I_x &= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} y^2(ky)\, dy\, dx\\
&= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2} y^4\Big]_0^{4-x^2} dx\\
&= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2} (256 - 256x^2 + 96x^4 - 16x^6 + x^8)\, dx\\
&= \frac{k}{4}\left[256x - \frac{256x^3}{3} + \frac{96x^5}{5} - \frac{16x^7}{7} + \frac{x^9}{9}\right]_{-2}^{2}\\
&= \frac{32\,768k}{315}.
\end{aligned}$$

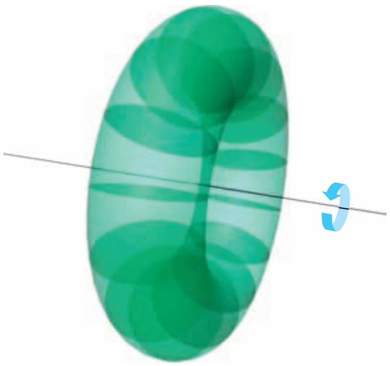


Lámina plana girando a ω radianes por segundo
Figura 14.41

El momento de inercia I de una lámina en rotación puede utilizarse para medir su energía cinética. Por ejemplo, consideremos una lámina plana que gira en torno a una recta con una **velocidad angular** de ω radianes por segundo, como se muestra en la figura 14.41. La energía cinética E de la lámina en rotación es

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2. \qquad \text{Energía cinética del movimiento giratorio.}$$

Por otro lado, la energía cinética E de una masa m que se mueve en línea recta a una velocidad v es

$$E = \frac{1}{2} mv^2. \qquad \text{Energía cinética del movimiento rectilíneo.}$$

Por lo tanto, la energía cinética de una masa que se mueve en línea recta es proporcional a su masa, pero la energía cinética de una masa que gira en torno a un eje es proporcional a su momento de inercia.

El **radio de giro** $\bar{\bar{r}}$ de una masa en rotación m con momento de inercia I se define como

$$\bar{\bar{r}} = \sqrt{\frac{I}{m}}. \qquad \text{Radio de giro.}$$

Si toda la masa se localizara a una distancia $\bar{\bar{r}}$ de su eje de giro o eje de rotación, tendría el mismo momento de inercia y, por consiguiente, la misma energía cinética. Por ejemplo, el radio de giro de la lámina del ejemplo 4 respecto al eje x está dado por

$$\bar{\bar{y}} = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \sqrt{\frac{32\,768k/315}{256k/15}} = \sqrt{\frac{128}{21}} \approx 2.469.$$

EJEMPLO 5 Cálculo del radio de giro

Hallar el radio de giro con respecto al eje y de la lámina que corresponde a la región R: $0 \le y \le \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$, donde la densidad en (x, y) está dada por $\rho(x, y) = x$.

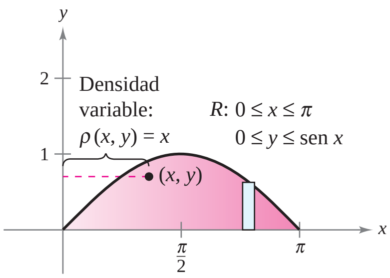


Figura 14.42

Solución La región R se muestra en la figura 14.42. Integrando $\rho(x, y) = x$ sobre la región R, se puede determinar que la masa de la región es π. El momento de inercia con respecto al eje y es

$$\begin{aligned}
I_y &= \int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen} x} x^3\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\pi} x^3 y \Big]_0^{\operatorname{sen} x} dx \\
&= \int_0^{\pi} x^3 \operatorname{sen} x\,dx \\
&= \Big[(3x^2 - 6)(\operatorname{sen} x) - (x^3 - 6x)(\cos x)\Big]_0^{\pi} \\
&= \pi^3 - 6\pi.
\end{aligned}$$

Por tanto, el radio de giro con respecto al eje y es

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{x}} &= \sqrt{\frac{I_y}{m}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi^3 - 6\pi}{\pi}} \\
&= \sqrt{\pi^2 - 6} \approx 1.967.
\end{aligned}$$

14.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, hallar la masa de la lámina descrita por las desigualdades, dado que su densidad es $\rho(x, y) = xy$. (*Sugerencia:* Algunas de las integrales son más simples en coordenadas polares.)

1. $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$

2. $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 9 - x^2$

3. $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}$

4. $x \ge 0,\ 3 \le y \le 3 + \sqrt{9 - x^2}$

En los ejercicios 5 a 8, hallar la masa y el centro de masa de la lámina con cada densidad.

5. R: cuadrado con vértices $(0, 0), (a, 0), (0, a), (a, a)$

a) $\rho = k$ *b)* $\rho = ky$ *c)* $\rho = kx$

6. R: rectángulo con vértices $(0, 0),\ (a, 0),\ (0, b),\ (a, b)$

a) $\rho = kxy$ *b)* $\rho = k(x^2 + y^2)$

7. R: triángulo con vértices $(0, 0), (0, a), (a, a)$

a) $\rho = k$ *b)* $\rho = ky$ *c)* $\rho = kx$

8. R: triángulo con vértices $(0, 0), (a/2, a), (a, 0)$

a) $\rho = k$ *b)* $\rho = kxy$

9. ***Traslaciones en el plano*** Trasladar la lámina del ejercicio 5 cinco unidades a la derecha y determinar el centro de masa resultante.

10. ***Conjetura*** Utilizar el resultado del ejercicio 9 para formular una conjetura acerca del cambio en el centro de masa cuando una lámina de densidad constante se traslada c unidades horizontalmente o d unidades verticalmente. ¿Es la conjetura verdadera si la densidad no es constante? Explicar.

En los ejercicios 11 a 22, hallar la masa y el centro de masa de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad o densidades que se especifican. (*Sugerencia:* Algunas de las integrales son más sencillas en coordenadas polares.)

11. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 1,\ \rho = ky$

12. $y = x^2,\ y = 0,\ x = 2,\ \rho = kxy$

13. $y = 4/x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4,\ \rho = kx^2$

14. $y = \dfrac{1}{1 + x^2},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1,\ \rho = k$

15. $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

a) $\rho = k$ *b)* $\rho = ky$

16. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

a) $\rho = ky$ *b)* $\rho = ky^2$

17. $y = 4 - x^2,\ y = 0,\ \rho = ky$

18. $x = 9 - y^2,\ x = 0,\ \rho = kx$

19. $y = \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{L},\ y = 0,\ x = 0,\ x = L,\ \rho = k$

20. $y = \cos \dfrac{\pi x}{L},\ y = 0,\ x = 0,\ x = \dfrac{L}{2},\ \rho = ky$

21. $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ 0 \le y \le x,\ \rho = k$

22. $x^2 + y^2 = a^2,\ 0 \le x,\ 0 \le y,\ \rho = k(x^2 + y^2)$

CAS En los ejercicios 23 a 26, utilizar un sistema algebraico por computadora para hallar la masa y el centro de masa de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad dada.

23. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2,\ \rho = ky$

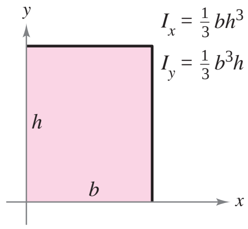
24. $y = \ln x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = e,\ \rho = kxy$

25. $r = 2 \cos 3\theta,\ -\dfrac{\pi}{6} \le \theta \le \dfrac{\pi}{6},\ \rho = k$

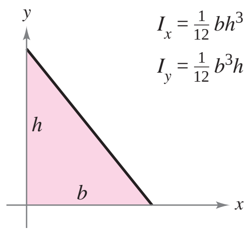
26. $r = 1 + \cos \theta,\ \rho = k$

En los ejercicios 27 a 32, verificar los momentos de inercia dados y hallar $\bar{\bar{x}}$ y $\bar{\bar{y}}$. Suponer que la densidad de cada lámina es $\rho = 1$ gramos por centímetro cuadrado. (Estas regiones son formas de uso común empleadas en diseño.)

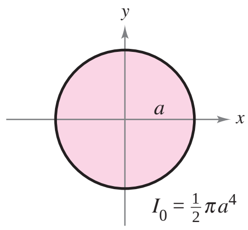
27. Rectángulo



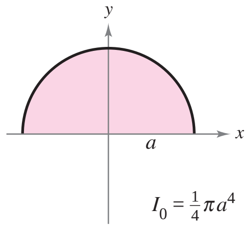
28. Triángulo rectángulo



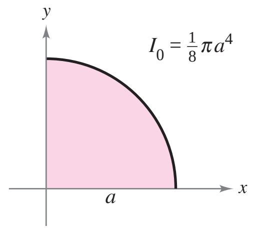
29. Círculo



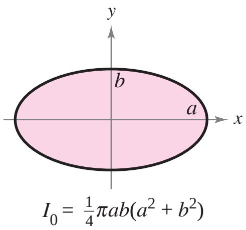
30. Semicírculo



31. Cuarto del círculo



32. Elipse



CAS En los ejercicios 33 a 40, hallar I_x, I_y, I_0, $\bar{\bar{x}}$, y $\bar{\bar{y}}$ para la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones. Utilizar un sistema algebraico por computadora a fin de evaluar las integrales dobles.

33. $y = 0,\ y = b,\ x = 0,\ x = a,\ \rho = ky$

34. $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ y = 0,\ \rho = ky$

35. $y = 4 - x^2,\ y = 0,\ x > 0,\ \rho = kx$

36. $y = x,\ y = x^2,\ \rho = kxy$

37. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4,\ \rho = kxy$

38. $y = x^2,\ y^2 = x,\ \rho = x^2 + y^2$

39. $y = x^2,\ y^2 = x,\ \rho = kx$

40. $y = x^3,\ y = 4x,\ \rho = k|y|$

CAS **En los ejercicios 41 a 46, dar la integral doble requerida para hallar el momento de inercia I, con respecto a la recta dada, de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral doble.**

41. $x^2 + y^2 = b^2$, $\rho = k$, recta: $x = a$ $(a > b)$

42. $y = 0$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 4$, $\rho = k$, recta: $x = 6$

43. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$, $\rho = kx$, recta: $x = 6$

44. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$, $\rho = ky$, recta: $y = a$

45. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$, $x \geq 0$, $\rho = k(a - y)$, recta: $y = a$

46. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $\rho = k$, recta: $y = 2$

Desarrollo de conceptos

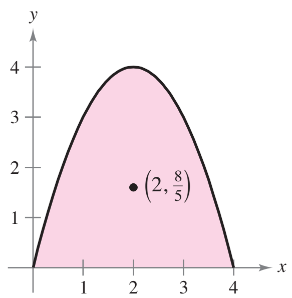
47. Dar las fórmulas para hallar los momentos y el centro de masa de una lámina plana de densidad variable.

48. Dar las fórmulas para hallar los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y de una lámina plana de densidad variable.

49. Con las propias palabras, describir qué mide el radio de giro.

Para discusión

50. El centro de masa de la lámina de densidad constante mostrado en la figura es $\left(2, \frac{8}{5}\right)$. Hacer una conjetura acerca de cómo cambiará el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ si la densidad $\rho(x, y)$ no es constante. Explicar. (Hacer la conjetura *sin* realizar cálculo alguno.)



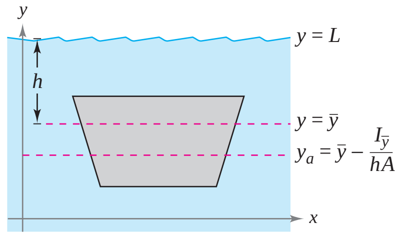
a) $\rho(x, y) = ky$ *b)* $\rho(x, y) = k|2 - x|$

c) $\rho(x, y) = kxy$ *d)* $\rho(x, y) = k(4 - x)(4 - y)$

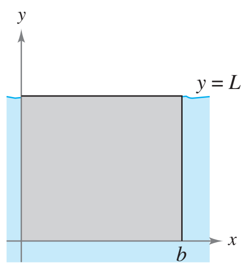
Hidráulica **En los ejercicios 51 a 54, determinar la posición del eje horizontal y_a en el que debe situarse una compuerta vertical en una presa para lograr que no haya momento que ocasione la rotación bajo la carga indicada (ver la figura). El modelo para y_a es**

$$y_a = \bar{y} - \frac{I_{\bar{y}}}{hA}$$

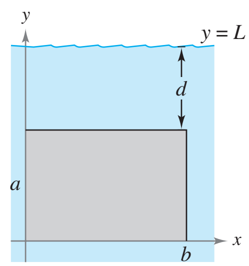
donde $\bar{y}$ es la coordenada y del centroide de la compuerta, $I_{\bar{y}}$ es el momento de inercia de la compuerta con respecto a la recta $y = \bar{y}$, h es la profundidad del centroide bajo la superficie y A es el área de la compuerta.



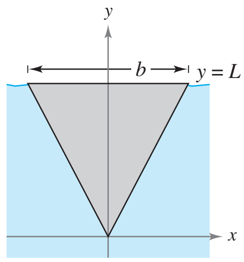
51.



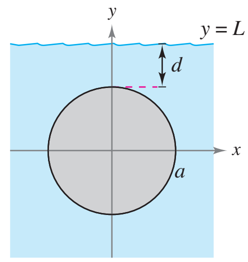
52.



53.



54.



55. Demostrar el teorema de Pappus siguiente: sea R una región plana y sea L una recta en el mismo plano tal que L no corta el interior de R. Si r es la distancia entre el centroide de R y la recta, entonces el volumen V del sólido de revolución generado por revolución de R en torno a la recta está dado por $V = 2\pi rA$, donde A es el área de R.

PROYECTO DE TRABAJO

Centro de presión sobre una vela

El centro de presión sobre una vela es aquel punto (x_p, y_p) en el cual puede suponerse que actúa la fuerza aerodinámica total. Si la vela se representa mediante una región plana R, el centro de presión es

$$x_p = \frac{\int_R\int xy\, dA}{\int_R\int y\, dA} \quad \text{y} \quad y_p = \frac{\int_R\int y^2\, dA}{\int_R\int y\, dA}.$$

Considerar una vela triangular con vértices en $(0, 0)$, $(2, 1)$ y $(0, 5)$. Verificar los valores de cada integral.

a) $\displaystyle\int_R\int y\, dA = 10$ *b)* $\displaystyle\int_R\int xy\, dA = \frac{35}{6}$ *c)* $\displaystyle\int_R\int y^2\, dA = \frac{155}{6}$

Calcular las coordenadas (x_p, y_p) del centro de presión. Dibujar una gráfica de la vela e indicar la localización del centro de presión.

14.5 Área de una superficie

■ **Utilizar una integral doble para hallar el área de una superficie.**

Área de una superficie

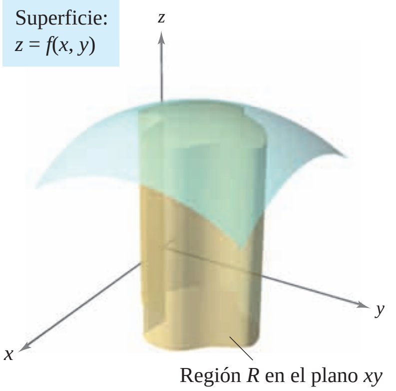


Figura 14.43

En este punto ya se tiene una gran cantidad de conocimientos acerca de la región sólida que se encuentra entre una superficie y una región R en el plano xy cerrada y limitada o acotada, como se muestra en la figura 14.43. Por ejemplo, se sabe cómo hallar los extremos de f en R (sección 13.8), el área de la base R del sólido (sección 14.1), el volumen del sólido (sección 14.2) y el centroide de la base de R (sección 14.4).

En esta sección se verá cómo hallar el **área de la superficie** superior del sólido. Más adelante se aprenderá a calcular el centroide del sólido (sección 14.6) y el área de la superficie lateral (sección 15.2).

Para empezar, considerar una superficie S dada por

$$z = f(x, y) \qquad \text{Superficie definida sobre una región } R.$$

definida sobre una región R. Suponer que R es cerrada y acotada y que f tiene primeras derivadas parciales continuas. Para hallar el área de la superficie, se construye una partición interna de R que consiste en n rectángulos donde el área del rectángulo i-ésimo R_i es $\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$, como se muestra en la figura 14.44. En cada R_i sea (x_i, y_i) el punto más próximo al origen. En el punto $(x_i, y_i, z_i) = (x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ de la superficie S, se construye un plano tangente T_i. El área de la porción del plano tangente que se encuentra directamente sobre R_i es aproximadamente igual al área de la superficie que se encuentra directamente sobre R_i. Es decir, $\Delta T_i \approx \Delta S_i$. Por tanto, el área de la superficie de S está dada por

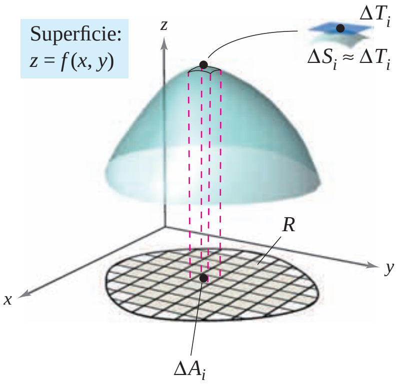


Figura 14.44

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i.$$

Para hallar el área del paralelogramo ΔT_i, notar que sus lados están dados por los vectores

$$\mathbf{u} = \Delta x_i \mathbf{i} + f_x(x_i, y_i)\,\Delta x_i \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{v} = \Delta y_i \mathbf{j} + f_y(x_i, y_i)\,\Delta y_i \mathbf{k}.$$

De acuerdo con el teorema 11.8, el área de ΔT_i está dada por $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$, donde

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_i & 0 & f_x(x_i, y_i)\,\Delta x_i \\ 0 & \Delta y_i & f_y(x_i, y_i)\,\Delta y_i \end{vmatrix} \\ &= -f_x(x_i, y_i)\,\Delta x_i \Delta y_i \mathbf{i} - f_y(x_i, y_i)\,\Delta x_i \Delta y_i \mathbf{j} + \Delta x_i \Delta y_i \mathbf{k} \\ &= (-f_x(x_i, y_i)\mathbf{i} - f_y(x_i, y_i)\mathbf{j} + \mathbf{k})\,\Delta A_i.\end{aligned}$$

Por tanto, el área de ΔT_i es $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{[f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2 + 1}\,\Delta A_i$, y

$$\begin{aligned}\text{El área de la superficie de} &\approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2}\,\Delta A_i.\end{aligned}$$

Esto sugiere la definición siguiente de área de una superficie.

DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE

Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas en la región cerrada R en el plano xy, entonces el **área de la superficie** S dada por $z = f(x, y)$ sobre R está dada por

$$\text{Área de la superficie} = \int_R\int dS = \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA.$$

Para memorizar la integral doble para el área de una superficie, es útil notar su semejanza con la integral de la longitud del arco.

Longitud sobre el eje x: $\displaystyle\int_a^b dx$

Longitud de arco en el plano xy: $\displaystyle\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

Área en el plano xy: $\displaystyle\int_R\int dA$

Área de una superficie en el espacio: $\displaystyle\int_R\int dS = \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA$

Igual que las integrales para la longitud de arco, las integrales para el área de una superficie son a menudo muy difíciles de calcular. Sin embargo, en el ejemplo siguiente se muestra un tipo que se evalúa con facilidad.

EJEMPLO 1 El área de la superficie de una región plana

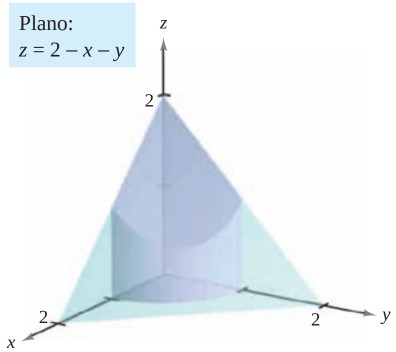


Figura 14.45

Hallar el área de la superficie de la porción del plano

$$z = 2 - x - y$$

que se encuentra sobre el círculo $x^2 + y^2 \le 1$ en el primer cuadrante, como se muestra en la figura 14.45.

Solución Como $f_x(x, y) = -1$ y $f_y(x, y) = -1$, el área de la superficie está dada por

$$S = \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA \qquad \text{Fórmula para el área de la superficie.}$$

$$= \int_R\int \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dA \qquad \text{Sustituir.}$$

$$= \int_R\int \sqrt{3}\, dA$$

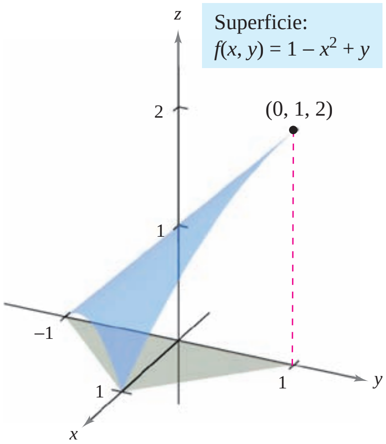
$$= \sqrt{3}\int_R\int dA.$$

Observar que la última integral es simplemente $\sqrt{3}$ por el área de la región R. R es un cuarto del círculo de radio 1, cuya área es $\frac{1}{4}\pi(1^2)$ o $\pi/4$. Por tanto, el área de S es

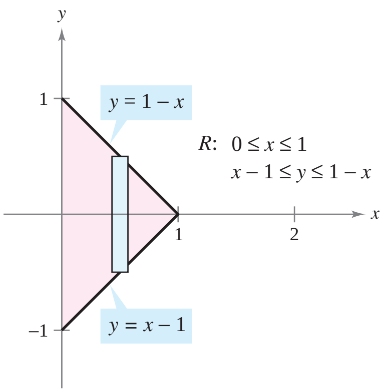
$$S = \sqrt{3}\,(\text{área de } R)$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{4}.$$



a)



b)

Figura 14.46

EJEMPLO 2 Hallar el área de una superficie

Hallar el área de la porción de la superficie

$$f(x, y) = 1 - x^2 + y$$

que se encuentra sobre la región triangular cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ y $(0, 1, 0)$, como se muestra en la figura 14.46*a*.

Solución Como $f_x(x, y) = -2x$ y $f_y(x, y) = 1$, se tiene

$$S = \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA = \int_R\int \sqrt{1 + 4x^2 + 1}\, dA.$$

En la figura 14.46*b* se ve que los límites o cotas de R son $0 \le x \le 1$ y $x - 1 \le y \le 1 - x$. Por lo que la integral será

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \sqrt{2 + 4x^2}\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 y\sqrt{2 + 4x^2}\Big]_{x-1}^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left[(1 - x)\sqrt{2 + 4x^2} - (x - 1)\sqrt{2 + 4x^2}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left(2\sqrt{2 + 4x^2} - 2x\sqrt{2 + 4x^2}\right) dx \\
&= \left[x\sqrt{2 + 4x^2} + \ln\left(2x + \sqrt{2 + 4x^2}\right) - \frac{(2 + 4x^2)^{3/2}}{6}\right]_0^1 \\
&= \sqrt{6} + \ln\left(2 + \sqrt{6}\right) - \sqrt{6} - \ln\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 1.618.
\end{aligned}$$

Tablas de integración (apéndice B). Fórmula 26 y regla de la potencia.

EJEMPLO 3 Cambio de variables a coordenadas polares

Hallar el área de la superficie del paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$ que se encuentra sobre el círculo unidad o unitario, como se muestra en la figura 14.47.

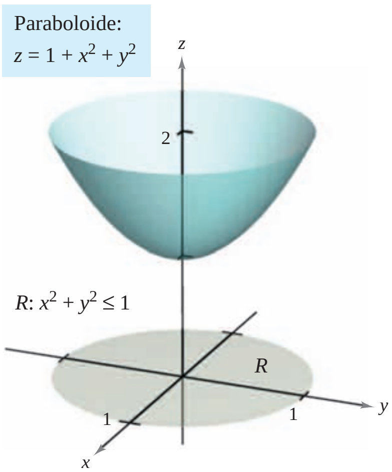


Figura 14.47

Solución Como $f_x(x, y) = 2x$ y $f_y(x, y) = 2y$, se tiene

$$S = \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA = \int_R\int \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA.$$

Se puede pasar a coordenadas polares haciendo $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Entonces, como la región R está acotada por $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, se tiene

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}\, d\theta \\
&= \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}\,\theta\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi\left(5\sqrt{5} - 1\right)}{6} \\
&\approx 5.33.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Hallar el área de una superficie

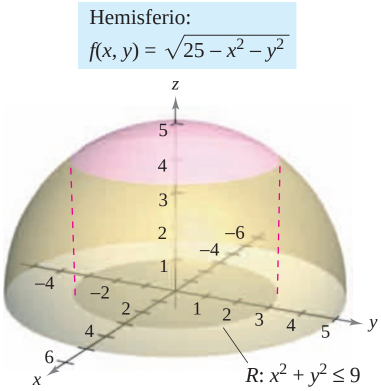


Figura 14.48

Hallar el área de la superficie S correspondiente a la porción del hemisferio

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \qquad \text{Hemisferio.}$$

que se encuentra sobre la región R limitada o acotada por el círculo $x^2 + y^2 \leq 9$, como se muestra en la figura 14.48.

Solución Las primeras derivadas parciales de f son

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

y, de acuerdo con la fórmula para el área de una superficie, se tiene

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\right)^2}\, dA \\ &= \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, dA. \end{aligned}$$

Así, el área de la superficie es

$$S = \iint_R \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, dA.$$

Se puede pasar a coordenadas polares haciendo $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$. Entonces, como la región R está acotada por $0 \leq r \leq 3$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se obtiene

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{5}{\sqrt{25 - r^2}}\, r\, dr\, d\theta \\ &= 5\int_0^{2\pi} -\sqrt{25 - r^2}\Big]_0^3\, d\theta \\ &= 5\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 10\pi. \end{aligned}$$

El procedimiento utilizado en el ejemplo 4 puede extenderse para hallar el área de la superficie de una esfera utilizando la región R limitada o acotada por el círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$, donde $0 < a < 5$, como se muestra en la figura 14.49. Se puede mostrar que el área de la superficie de la porción del hemisferio

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

que se encuentra sobre la región circular es

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{5}{\sqrt{25 - r^2}}\, r\, dr\, d\theta \\ &= 10\pi\left(5 - \sqrt{25 - a^2}\right). \end{aligned}$$

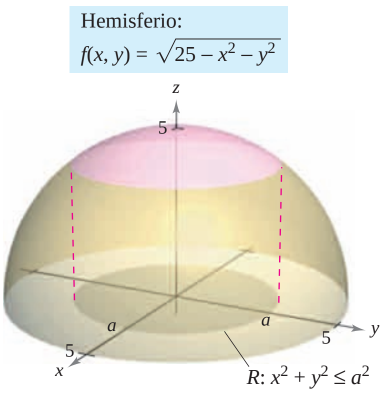


Figura 14.49

Tomando el límite cuando a tiende a 5 y multiplicando el resultado por dos, se obtiene el área total, que es 100π. (El área de la superficie de una esfera de radio r es $S = 4\pi r^2$.)

La regla de Simpson o la regla del trapecio pueden usarse para aproximar el valor de una integral doble, *siempre* que se pueda obtener la primera integral. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Aproximación del área de una superficie mediante la regla de Simpson

Hallar el área de la superficie del paraboloide

$$f(x, y) = 2 - x^2 - y^2 \qquad \text{Paraboloide.}$$

que se encuentra sobre la región cuadrada acotada por $-1 \le x \le 1$ y $-1 \le y \le 1$, como se muestra en la figura 14.50.

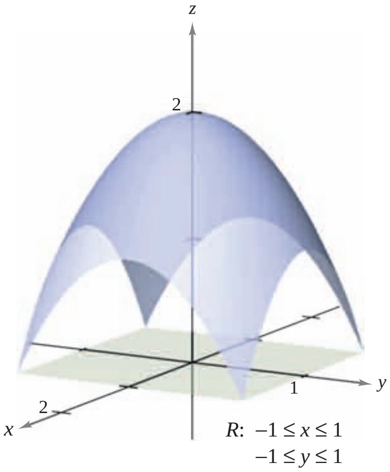


Figura 14.50

Solución Utilizando las derivadas parciales

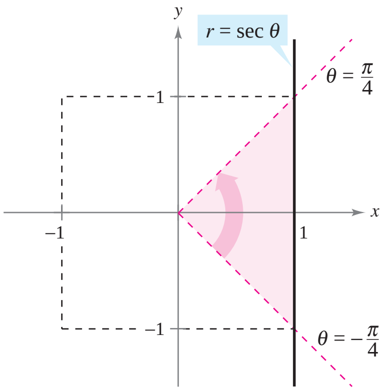
$$f_x(x, y) = -2x \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2y$$

se tiene que el área de la superficie es

$$\begin{aligned} S &= \int\!\!\int_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA \\ &= \int\!\!\int_R \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2}\, dA \\ &= \int\!\!\int_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA. \end{aligned}$$

En coordenadas polares, la recta $x = 1$ está dada por $r \cos \theta = 1$ o $r = \sec \theta$, y en la figura 14.51 se puede determinar que un cuarto de la región R está limitada o acotada por

$$0 \le r \le \sec \theta \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}.$$



Un cuarto de la región R está acotada por $0 \le r \le \sec \theta$ y $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$.

Figura 14.51

Haciendo $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S &= \frac{1}{4} \int\!\!\int_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sec \theta} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2} \Big]_0^{\sec \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{12} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(1 + 4 \sec^2 \theta)]^{3/2} - 1]\, d\theta. \end{aligned}$$

Por último, usando la regla de Simpson con $n = 10$, se aproxima esta integral simple

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(1 + 4 \sec^2 \theta)^{3/2} - 1]\, d\theta \\ &\approx 7.450. \end{aligned}$$

TECNOLOGÍA La mayor parte de los programas de computación que realizan integración simbólica con integrales múltiples también realizan técnicas de aproximación numéricas. Si se dispone de uno de estos programas, se recomienda usarlo para aproximar el valor de la integral del ejemplo 5.

14.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 14, hallar el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R. (*Sugerencia:* Algunas de las integrales son más sencillas en coordenadas polares.)

1. $f(x, y) = 2x + 2y$
   R: triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 4)$
2. $f(x, y) = 15 + 2x - 3y$
   R: cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 3)$
3. $f(x, y) = 7 + 2x + 2y$
   $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$
4. $f(x, y) = 12 + 2x - 3y$
   $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}$
5. $f(x, y) = 9 - x^2$
   R: cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$
6. $f(x, y) = y^2$
   R: cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 3)$
7. $f(x, y) = 3 + x^{3/2}$
   R: rectángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(3, 4)$, $(3, 0)$
8. $f(x, y) = 2 + \frac{2}{3}y^{3/2}$
   $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$
9. $f(x, y) = \ln|\sec x|$
   $R = \left\{(x, y): 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \tan x\right\}$
10. $f(x, y) = 13 + x^2 - y^2$
    $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$
11. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y) \leq 1\}$
12. $f(x, y) = xy$, $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 16\}$
13. $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
    $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq b^2, 0 < b < a\}$
14. $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
    $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq a^2\}$

En los ejercicios 15 a 18, hallar el área de la superficie.

15. Porción del plano $z = 24 - 3x - 2y$ en el primer octante
16. Porción del paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ en el primer octante
17. Porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 9$
18. Porción del cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

CAS **En los ejercicios 19 a 24, dar una integral doble que represente el área de la superficie $z = f(x, y)$ sobre la región R. Utilizando un sistema algebraico por computadora, evaluar la integral doble.**

19. $f(x, y) = 2y + x^2$
    R: triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$
20. $f(x, y) = 2x + y^2$
    R: triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$
21. $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$
    $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y)\}$
22. $f(x, y) = x^2 + y^2$
    $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y) \leq 16\}$
23. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
    $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
24. $f(x, y) = \frac{2}{3}x^{3/2} + \cos x$
    $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Aproximación **En los ejercicios 25 y 26, determinar qué valor se aproxima más al área de la superficie $z = f(x, y)$ sobre la región R. (Elegir el valor basándose en un dibujo de la superficie y *no* mediante la utilización de cálculos.)**

25. $f(x, y) = 10 - \frac{1}{2}y^2$
    R: cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 4)$, $(0, 4)$
    a) 16 *b)* 200 *c)* -100 *d)* 72 *e)* 36
26. $f(x, y) = \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + y^2}$
    R: círculo limitado o acotado por $x^2 + y^2 = 9$
    a) -100 *b)* 150 *c)* 9π *d)* 55 *e)* 500

CAS **En los ejercicios 27 y 28, utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral doble que represente el área de la superficie de la gráfica de f sobre la región $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.**

27. $f(x, y) = e^x$
28. $f(x, y) = \frac{2}{5}y^{5/2}$

En los ejercicios 29 a 34, formular una integral doble que proporcione el área de la superficie en la gráfica de f sobre la región R.

29. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$
    R: cuadrado cuyos vértices son $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$
30. $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$
    $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$
31. $f(x, y) = e^{-x} \operatorname{sen} y$
    $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$
32. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$
    $R = \left\{(x, y): x^2 + y^2 \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$
33. $f(x, y) = e^{xy}$
    $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 10\}$
34. $f(x, y) = e^{-x} \operatorname{sen} y$
    $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

Desarrollo de conceptos

35. Enunciar la definición, con integral doble, del área de una superficie S dada por $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy.
36. Considerar la superficie $f(x, y) = x^2 + y^2$ y el área de superficie de f sobre cada región R. Sin integrar, ordenar las áreas de superficie desde la menor hasta la mayor. Explicar el razonamiento.
    a) R: rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$
    b) R: triángulo con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$
    c) $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4$ sólo el primer cuadrante$\}$
37. ¿Aumentará el área de superficie de la gráfica de una función $z = f(x, y)$ sobre una región R si la gráfica de f cambió k unidades verticalmente? ¿Por qué sí o por qué no?

Para discusión

38. Responder las siguientes preguntas acerca del área de superficie S sobre una superficie dada por una función positiva $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy. Explicar cada respuesta.

a) ¿Es posible para S igualar el área de R?

b) ¿Puede S ser mayor que el área de R?

c) ¿Puede S ser menor que el área de R?

39. Hallar el área de la superficie del sólido intersección de los cilindros $x^2 + z^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$ (ver la figura).

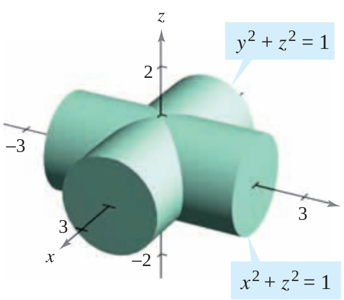


Figura para 39

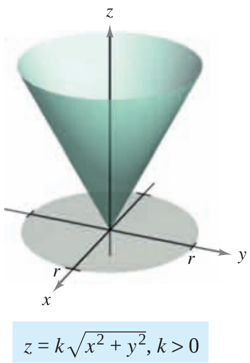
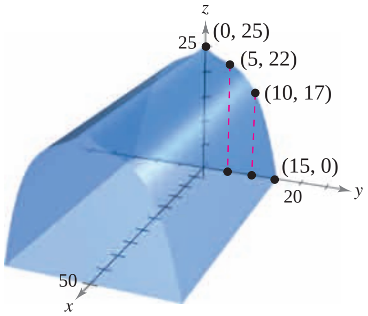


Figura para 40

40. Mostrar que el área de la superficie del cono $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $k > 0$ sobre la región circular $x^2 + y^2 \leq r^2$ en el plano xy es $\pi r^2\sqrt{k^2 + 1}$ (ver la figura).

41. ***Diseño industrial*** Una empresa produce un objeto esférico de 25 centímetros de radio. Se hace una perforación de 4 centímetros de radio a través del centro del objeto. Calcular *a*) el volumen del objeto y *b*) el área de la superficie exterior del objeto.

42. ***Modelo matemático*** Un ranchero construye un granero de dimensiones 30 por 50 pies. En la figura se muestra la forma simétrica y la altura elegidas para el tejado.



a) Utilizar las funciones de regresión de una herramienta de graficación para hallar un modelo de la forma $z = ay^3 + by^2 + cy + d$ para el perfil del techo.

b) Utilizar las funciones de integración numérica de una herramienta de graficación y el modelo del inciso *a*) para aproximar el volumen del espacio de almacenaje en el granero.

c) Utilizar las funciones de integración numérica de una herramienta de graficación y el modelo del inciso *a*) para aproximar el área de la superficie del techo.

d) Aproximar la longitud de arco de la recta del techo y calcular el área de la superficie del techo multiplicando la longitud de arco por la longitud del granero. Comparar los resultados y las integraciones con los encontrados en el inciso *c*).

PROYECTO DE TRABAJO

Capilaridad

Una propiedad muy conocida de los líquidos se llama "capilaridad", y consiste en que ascienden por conductos verticales muy estrechos. La figura muestra dos placas que forman una cuña estrecha dentro de un recipiente con líquido. La superficie superior del líquido toma una forma hiperbólica dada por

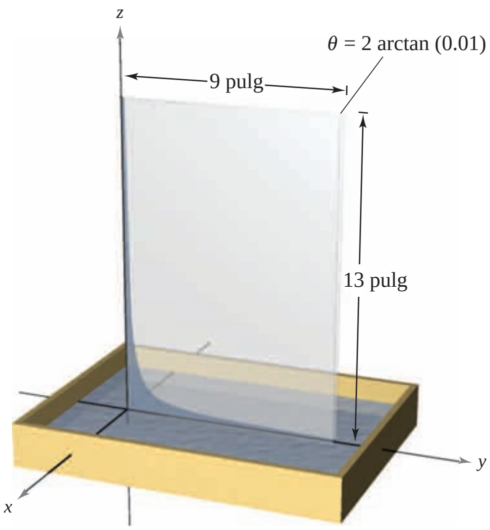
$$z = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

donde x, y y z están medidas en pulgadas. La constante k depende del ángulo de la cuña, del tipo de líquido y del material de las placas.

a) Hallar el volumen del líquido que ha ascendido por la cuña. (Tomar $k = 1$.)

b) Hallar el área de la superficie horizontal del líquido que ha ascendido por la cuña.

Adaptación de un problema sobre capilaridad de "Capillary Phenomena" de Thomas B. Greenslade, Jr., *Physics Teacher*, mayo de 1992. Con autorización del autor.



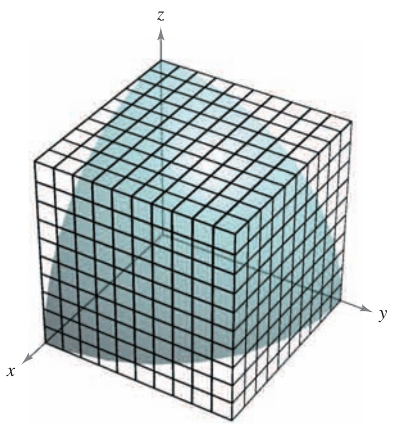
14.6 Integrales triples y aplicaciones

- **Utilizar una integral triple para calcular el volumen de una región sólida.**
- **Hallar el centro de masa y los momentos de inercia de una región sólida.**

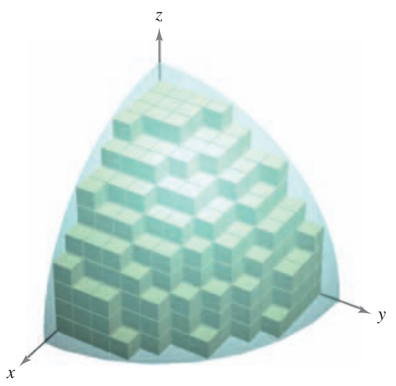
Integrales triples

El procedimiento utilizado para definir una **integral triple** es análogo al utilizarlo para integrales dobles. Considerar una función f en tres variables que es continua sobre una región sólida acotada Q. Entonces, se encierra Q en una red de cubos y se forma una **partición interna** que consta de todos los cubos que quedan completamente dentro de Q, como se muestra en la figura 14.52. El volumen del i-ésimo cubo es

$$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i. \qquad \text{Volumen del } i\text{-ésimo cubo.}$$



Región sólida Q



Volumen de $Q \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$

Figura 14.52

La **norma** $\|\Delta\|$ de la partición es la longitud de la diagonal más larga en los n cubos de la partición. En cada cubo se elige un punto (x_i, y_i, z_i) y se forma la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i.$$

Tomando el límite cuando $\|\Delta\| \to 0$ se llega a la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL TRIPLE

Si f es continua sobre una región sólida acotada Q, entonces la **integral triple de f sobre Q** se define como

$$\iiint\limits_Q f(x, y, z)\, dV = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$$

siempre que el límite exista. El **volumen** de la región sólida Q está dado por

$$\text{Volumen de } Q = \iiint\limits_Q dV.$$

Algunas de las propiedades de las integrales dobles expuestas en el teorema 14.1 pueden replantearse en términos de integrales triples.

1. $$\iiint\limits_Q cf(x, y, z)\, dV = c\iiint\limits_Q f(x, y, z)\, dV$$

2. $$\iiint\limits_Q [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)]\, dV = \iiint\limits_Q f(x, y, z)\, dV \pm \iiint\limits_Q g(x, y, z)\, dV$$

3. $$\iiint\limits_Q f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{Q_1} f(x, y, z)\, dV + \iiint\limits_{Q_2} f(x, y, z)\, dV$$

En las propiedades dadas arriba, Q es la unión de dos subregiones sólidas que no se sobreponen Q_1 y Q_2. Si la región sólida Q es simple, la integral triple $\iiint f(x, y, z)\, dV$ puede evaluarse con una integral iterada utilizando alguno de los seis posibles órdenes de integración:

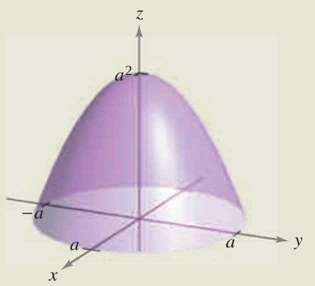
$$dx\, dy\, dz \quad dy\, dx\, dz \quad dz\, dx\, dy \quad dx\, dz\, dy \quad dy\, dz\, dx \quad dz\, dy\, dx.$$

EXPLORACIÓN

Volumen de un sector paraboloide En las páginas 997 y 1006, se pidió resumir las diferentes formas estudiadas hasta ahora para hallar el volumen del sólido limitado o acotado por el paraboloide

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy. Ahora se conoce un método más. Utilizarse para hallar el volumen del sólido.



La versión siguiente del teorema de Fubini describe una región que es considerada simple con respecto al orden $dz\,dy\,dx$. Para los otros cinco órdenes pueden formularse descripciones similares.

TEOREMA 14.4 EVALUACIÓN MEDIANTE INTEGRALES ITERADAS

Sea f continua en una región sólida definida por Q

$$a \le x \le b, \quad h_1(x) \le y \le h_2(x), \quad g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)$$

donde h_1, h_2, g_1 y g_2 son funciones continuas. Entonces,

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Para evaluar una integral iterada triple en el orden $dz\,dy\,dx$, se mantienen x y y constantes para la integración más interior. Después, se mantiene x constante para la segunda integración.

EJEMPLO 1 Evaluar una integral iterada triple

Evaluar la integral iterada triple

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x(y + 2z)\, dz\, dy\, dx.$$

Solución Para la primera integración, se mantienen x y y constantes y se integra con respecto a z.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x(y + 2z)\, dz\, dy\, dx &= \int_0^2 \int_0^x e^x(yz + z^2)\Big]_0^{x+y} dy\, dx\\ &= \int_0^2 \int_0^x e^x(x^2 + 3xy + 2y^2)\, dy\, dx\end{aligned}$$

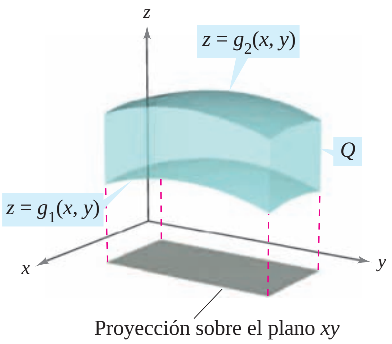
Para la segunda integración, mantener x constante y se integra con respecto a y.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^x e^x(x^2 + 3xy + 2y^2)\, dy\, dx &= \int_0^2 \left[e^x\left(x^2y + \frac{3xy^2}{2} + \frac{2y^3}{3}\right)\right]_0^x dx\\ &= \frac{19}{6}\int_0^2 x^3e^x\, dx\end{aligned}$$

Por último, se integra con respecto a x.

$$\begin{aligned}\frac{19}{6}\int_0^2 x^3e^x\, dx &= \frac{19}{6}\Big[e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\Big]_0^2\\ &= 19\left(\frac{e^2}{3} + 1\right)\\ &\approx 65.797\end{aligned}$$

El ejemplo 1 muestra el orden de integración $dz\,dy\,dx$. Con otros órdenes, se puede seguir un procedimiento similar. Por ejemplo, para evaluar una integral iterada triple en el orden $dx\,dy\,dz$, se mantienen y y z constantes para la integración más interior y se integra con respecto a x. Después, para la segunda integración, se mantiene z constante y se integra con respecto a y. Por último, para la tercera integración, se integra con respecto a z.



La región sólida Q se encuentra entre dos superficies
Figura 14.53

Para hallar los límites dado un orden determinado de integración, por lo general se aconseja determinar primero los límites más interiores, que pueden ser funciones de las dos variables exteriores. Después, proyectando el sólido Q sobre el plano coordenado de las dos variables exteriores, se pueden determinar sus límites de integración mediante los métodos usados para las integrales dobles. Por ejemplo, para evaluar

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

primero se determinan los límites de z, y entonces la integral toma la forma

$$\iint\left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right] dy\, dx.$$

Proyectando el sólido Q sobre el plano xy, se pueden determinar los límites de x y de y de la misma manera que se hizo en el caso de las integrales dobles, como se muestra en la figura 14.53.

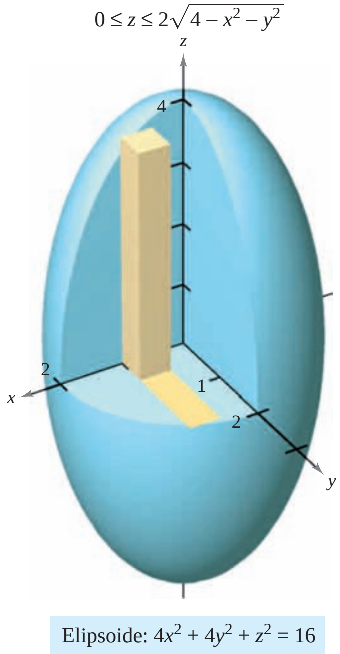


Figura 14.54

EJEMPLO 2 Integral triple para hallar un volumen

Hallar el volumen del elipsoide dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$.

Solución Como en la ecuación x, y y z juegan papeles similares, el orden de integración es probablemente irrelevante, y se puede elegir arbitrariamente $dz\, dy\, dx$. Además, se pueden simplificar los cálculos considerando sólo la porción del elipsoide que se encuentra en el primer octante, como se muestra en la figura 14.54. Para el orden $dz\, dy\, dx$, se determinan primero los límites o cotas de z.

$$0 \le z \le 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Los límites o cotas de x y y son, como se ve en la figura 14.55, x y y y $0 \le x \le 2$ y $0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$, por lo que el volumen del elipsoide es

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_Q dV \\
&= 8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx \\
&= 8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} z\Big]_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dy\, dx \\
&= 16\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{(4 - x^2) - y^2}\, dy\, dx \\
&= 8\int_0^2 \left[y\sqrt{4 - x^2 - y^2} + (4 - x^2)\operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{\sqrt{4 - x^2}}\right)\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= 8\int_0^2 [0 + (4 - x^2)\operatorname{arcsen}(1) - 0 - 0]\, dx \\
&= 8\int_0^2 (4 - x^2)\left(\frac{\pi}{2}\right) dx \\
&= 4\pi\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\
&= \frac{64\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Tablas de integración (apéndice B), fórmula 37.

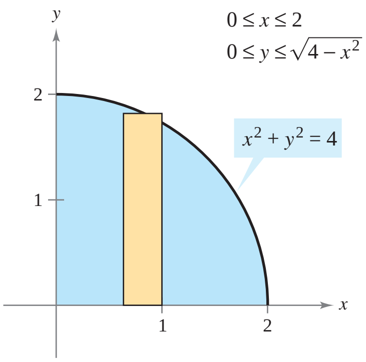


Figura 14.55

El ejemplo 2 es poco usual en el sentido de que con los seis posibles órdenes de integración se obtienen integrales de dificultad comparable. Tratar de emplear algún otro de los posibles órdenes de integración para hallar el volumen del elipsoide. Por ejemplo, con el orden $dx\,dy\,dz$ se obtiene la integral

$$V = 8\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}/2} \int_0^{\sqrt{16-4y^2-z^2}/2} dx\,dy\,dz.$$

Si se resuelve esta integral, se obtiene el mismo volumen que en el ejemplo 2. Esto es siempre así; el orden de integración no afecta el valor de la integral. Sin embargo, el orden de integración a menudo afecta la complejidad de la integral. En el ejemplo 3, el orden de integración propuesto no es conveniente, por lo que se puede cambiar el orden para simplificar el problema.

EJEMPLO 3 Cambiar el orden de integración

Evaluar $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \int_1^3 \operatorname{sen}(y^2)\,dz\,dy\,dx.$

Solución Obsérvese que después de una integración en el orden dado, se encontraría la integral $2\int \operatorname{sen}(y^2)\,dy$, que no es una función elemental. Para evitar este problema, se cambia el orden de integración a $dz\,dx\,dy$, de manera que y sea la variable exterior. Como se muestra en la figura 14.56, la región sólida Q está dada por

$$0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad x \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad 1 \le z \le 3$$

y la proyección de Q en el plano xy proporciona los límites

$$0 \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{y} \quad 0 \le x \le y.$$

Por tanto, la evaluación de la integral triple usando el orden $dz\,dx\,dy$ produce

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y \int_1^3 \operatorname{sen}(y^2)\,dz\,dx\,dy &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y z \operatorname{sen}(y^2)\Big]_1^3 dx\,dy \\
&= 2\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y \operatorname{sen}(y^2)\,dx\,dy \\
&= 2\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \operatorname{sen}(y^2)\Big]_0^y dy \\
&= 2\int_0^{\sqrt{\pi/2}} y \operatorname{sen}(y^2)\,dy \\
&= -\cos(y^2)\Big]_0^{\sqrt{\pi/2}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

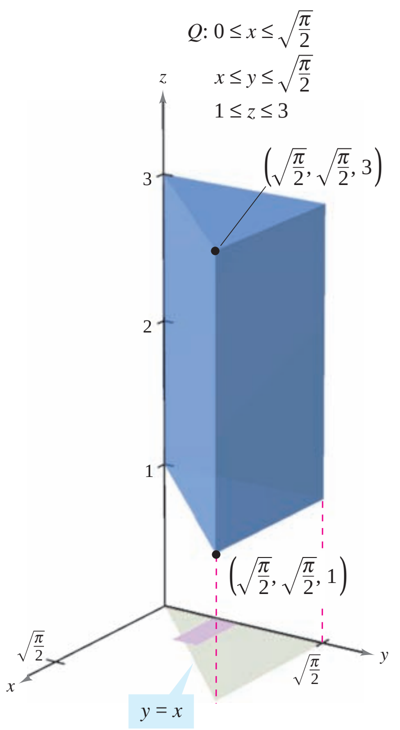
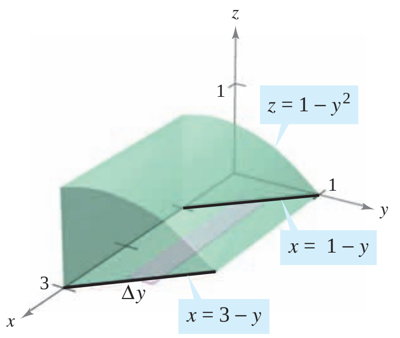
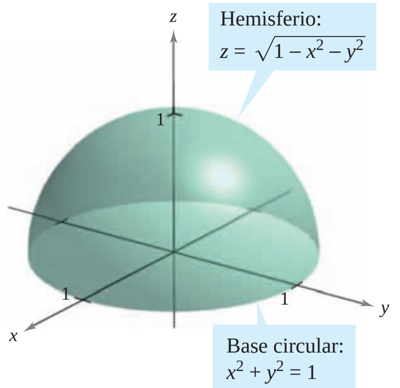


Figura 14.56



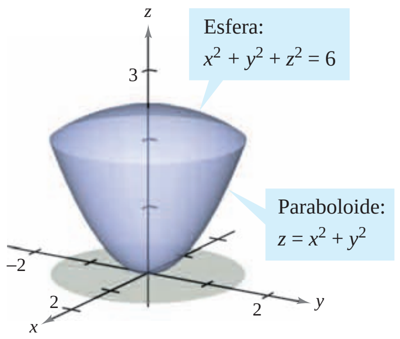
Q: $0 \le z \le 1 - y^2$
$1 - y \le x \le 3 - y$
$0 \le y \le 1$

Figura 14.57



Q: $0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
$-\sqrt{1 - y^2} \le x \le \sqrt{1 - y^2}$
$-1 \le y \le 1$

Figura 14.58



Q: $x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{6 - x^2 - y^2}$
$-\sqrt{2 - x^2} \le y \le \sqrt{2 - x^2}$
$-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$

Figura 14.59

EJEMPLO 4 Determinación de los límites de integración

Dar una integral triple para el volumen de cada una de las regiones sólidas.

a) La región en el primer octante acotada superiormente por el cilindro $z = 1 - y^2$ y comprendida entre los planos verticales $x + y = 1$ y $x + y = 3$

b) El hemisferio superior dado por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

c) La región acotada inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

Solución

a) En la figura 14.57, obsérvese que el sólido está acotado inferiormente por el plano *xy* $(z = 0)$ y superiormente por el cilindro $z = 1 - y^2$. Por tanto,

$$0 \le z \le 1 - y^2. \qquad \text{Límites o cotas para } z.$$

Proyectando la región sobre el plano *xy* se obtiene un paralelogramo. Como dos de los lados del paralelogramo son paralelos al eje *x*, se tienen las cotas siguientes:

$$1 - y \le x \le 3 - y \quad \text{y} \quad 0 \le y \le 1.$$

Por tanto, el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^1 \int_{1-y}^{3-y} \int_0^{1-y^2} dz\, dx\, dy.$$

b) Para el hemisferio superior dado por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, se tiene

$$0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \qquad \text{Cotas para } z.$$

En la figura 14.58, obsérvese que la proyección del hemisferio sobre el plano *xy* es el círculo dado por $x^2 + y^2 = 1$, y se puede usar el orden $dx\,dy$ o el orden $dy\,dx$. Eligiendo el primero se obtiene

$$-\sqrt{1 - y^2} \le x \le \sqrt{1 - y^2} \quad \text{y} \quad -1 \le y \le 1$$

lo cual implica que el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\, dx\, dy.$$

c) Para la región acotada inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, se tiene

$$x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{6 - x^2 - y^2}. \qquad \text{Cotas para } z.$$

La esfera y el paraboloide se cortan en $z = 2$. Además, en la figura 14.59 se puede ver que la proyección de la región sólida sobre el plano *xy* es el círculo dado por $x^2 + y^2 = 2$. Utilizando el orden $dy\,dx$ se obtiene

$$-\sqrt{2 - x^2} \le y \le \sqrt{2 - x^2} \quad \text{y} \quad -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$$

lo cual implica que el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx.$$

EXPLORACIÓN

Dibujar el sólido (de densidad uniforme) limitado o acotado por $z = 0$ y

$$z = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

donde $x^2 + y^2 \leq 1$. A partir del dibujo, estimar las coordenadas del centro de masa del sólido. Ahora utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar la estimación. ¿Qué se observa?

Centro de masa y momentos de inercia

En el resto de esta sección se analizan dos aplicaciones importantes de las integrales triples a la ingeniería. Considérese una región sólida Q cuya densidad está dada por la **función de densidad ρ**. El **centro de masa** de una región sólida Q de masa m está dado por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$m = \iiint_Q \rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Masa del sólido.}$$

$$M_{yz} = \iiint_Q x\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Primer momento con respecto al plano } yz.$$

$$M_{xz} = \iiint_Q y\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Primer momento con respecto al plano } xz.$$

$$M_{xy} = \iiint_Q z\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Primer momento con respecto al plano } xy.$$

y

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Las cantidades M_{yz}, M_{xz} y M_{xy} se conocen como los **primeros momentos** de la región Q con respecto a los planos yz, xz y xy, respectivamente.

Los primeros momentos de las regiones sólidas se toman con respecto a un plano, mientras que los segundos momentos de los sólidos se toman con respecto a una recta. Los **segundos momentos** (o **momentos de inercia**) con respecto a los ejes x, y y z son los siguientes.

NOTA En ingeniería y en física, el momento de inercia de una masa se usa para hallar el tiempo requerido para que una masa alcance una velocidad de rotación dada con respecto a un eje, como se muestra en la figura 14.60. Cuanto mayor es el momento de inercia, mayor es la fuerza que hay que aplicar a la masa para que alcance la velocidad deseada. ■

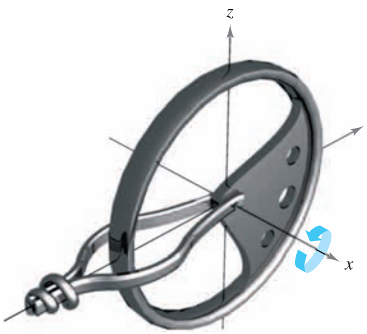


Figura 14.60

$$I_x = \iiint_Q (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Momento de inercia con respecto al eje } x.$$

$$I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Momento de inercia con respecto al eje } y.$$

$$I_z = \iiint_Q (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Momento de inercia con respecto al eje } z.$$

En problemas que requieren el cálculo de los tres momentos, puede ahorrarse una cantidad considerable de trabajo empleando la propiedad aditiva de las integrales triples y escribiendo

$$I_x = I_{xz} + I_{xy}, \quad I_y = I_{yz} + I_{xy}, \quad \text{e} \quad I_z = I_{yz} + I_{xz}$$

donde I_{xy}, I_{xz} e I_{yz} son

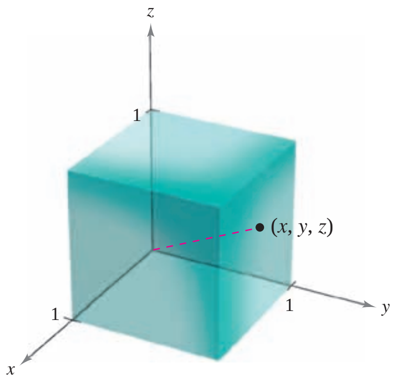
$$I_{xy} = \iiint_Q z^2\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_{xz} = \iiint_Q y^2\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_{yz} = \iiint_Q x^2\rho(x, y, z)\, dV$$

EJEMPLO 5 Hallar el centro de masa de una región sólida

Hallar el centro de masa del cubo unidad mostrado en la figura 14.61, dado que la densidad en el punto (x, y, z) es proporcional al cuadrado de su distancia al origen.



Densidad variable:
$\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$
Figura 14.61

Solución Como la densidad en (x, y, z) es proporcional al cuadrado de la distancia entre $(0, 0, 0)$ y (x, y, z), se tiene

$$\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2).$$

Esta función de densidad se puede utilizar para hallar la masa del cubo. Debido a la simetría de la región, cualquier orden de integración producirá integrales de dificultad comparable.

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 k(x^2 + y^2 + z^2)\,dz\,dy\,dx \\
&= k\int_0^1\int_0^1 \left[(x^2 + y^2)z + \frac{z^3}{3}\right]_0^1 dy\,dx \\
&= k\int_0^1\int_0^1 \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3}\right) dy\,dx \\
&= k\int_0^1 \left[\left(x^2 + \frac{1}{3}\right)y + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx \\
&= k\int_0^1 \left(x^2 + \frac{2}{3}\right) dx \\
&= k\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3}\right]_0^1 = k
\end{aligned}$$

El primer momento con respecto al plano yz es

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= k\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x(x^2 + y^2 + z^2)\,dz\,dy\,dx \\
&= k\int_0^1 x\left[\int_0^1\int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\,dz\,dy\right]dx.
\end{aligned}$$

Nótese que x puede sacarse como factor fuera de las dos integrales interiores, ya que es constante con respecto a y y a z. Después de factorizar, las dos integrales interiores son iguales con respecto a la masa m. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= k\int_0^1 x\left(x^2 + \frac{2}{3}\right) dx \\
&= k\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{7k}{12}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{7k/12}{k} = \frac{7}{12}.$$

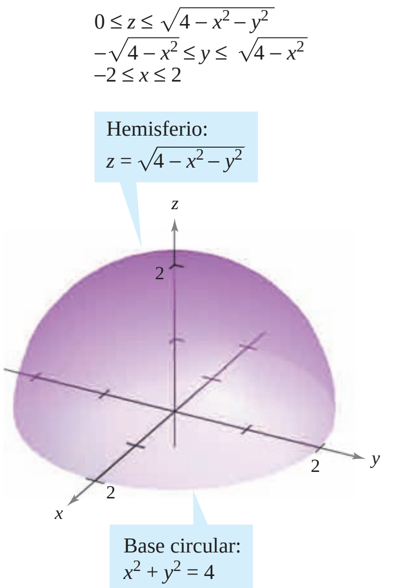
Por último, por la naturaleza de ρ y la simetría de x, y y z en esta región sólida, se tiene $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$, y el centro de masa es $\left(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12}\right)$.

EJEMPLO 6 Momentos de inercia de una región sólida

Hallar los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y de la región sólida comprendida entre el hemisferio

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

y el plano xy, dado que la densidad en (x, y, z) es proporcional a la distancia entre (x, y, z) y el plano xy.



Densidad variable: $\rho(x, y, z) = kz$
Figura 14.62

Solución La densidad de la región está dada por $\rho(x, y, z) = kz$. Considerando la simetría de este problema, se sabe que $I_x = I_y$, y sólo se necesita calcular un momento, digamos I_x. De acuerdo con la figura 14.62, se elige el orden $dz\,dy\,dx$ y se escribe

$$\begin{aligned}
I_x &= \iiint_Q (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,dV \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (y^2 + z^2)(kz)\,dz\,dy\,dx \\
&= k\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{y^2z^2}{2} + \frac{z^4}{4}\right]_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dy\,dx \\
&= k\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{y^2(4 - x^2 - y^2)}{2} + \frac{(4 - x^2 - y^2)^2}{4}\right] dy\,dx \\
&= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} [(4 - x^2)^2 - y^4]\,dy\,dx \\
&= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2} \left[(4 - x^2)^2 y - \frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2} \frac{8}{5}(4 - x^2)^{5/2}\,dx \\
&= \frac{4k}{5}\int_{0}^{2} (4 - x^2)^{5/2}\,dx && x = 2\,\mathrm{sen}\,\theta. \\
&= \frac{4k}{5}\int_{0}^{\pi/2} 64\cos^6\theta\,d\theta \\
&= \left(\frac{256k}{5}\right)\left(\frac{5\pi}{32}\right) && \text{Fórmula de Wallis.} \\
&= 8k\pi.
\end{aligned}$$

Por tanto, $I_x = 8k\pi = I_y$.

En el ejemplo 6, los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y son iguales. Sin embargo, el momento con respecto al eje z es diferente. ¿Parece que el momento de inercia con respecto al eje z deba ser menor o mayor que los momentos calculados en el ejemplo 6? Realizando los cálculos, se determina que

$$I_z = \frac{16}{3}k\pi.$$

Esto indica que el sólido mostrado en la figura 14.62 presenta resistencia mayor a la rotación en torno a los ejes x o y que en torno al eje z.

14.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, evaluar la integral iterada.

1. $\displaystyle\int_0^3\int_0^2\int_0^1 (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$
2. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 x^2y^2z^2\,dx\,dy\,dz$
3. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy} x\,dz\,dy\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^9\int_0^{y/3}\int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\,dz\,dx\,dy$
5. $\displaystyle\int_1^4\int_0^1\int_0^x 2ze^{-x^2}\,dy\,dx\,dz$
6. $\displaystyle\int_1^4\int_1^{e^2}\int_0^{1/xz} \ln z\,dy\,dz\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\pi/2}\int_0^{1-x} x\cos y\,dz\,dy\,dx$
8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{y/2}\int_0^{1/y} \operatorname{sen} y\,dz\,dx\,dy$

CAS **En los ejercicios 9 y 10, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral iterada.**

9. $\displaystyle\int_0^3\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_0^{y^2} y\,dz\,dx\,dy$
10. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} y\,dz\,dy\,dx$

CAS **En los ejercicios 11 y 12, utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la integral iterada.**

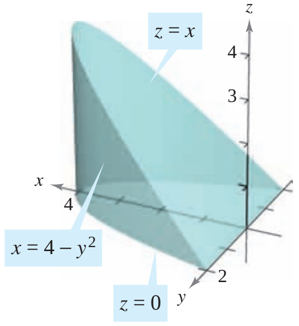
11. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_1^4 \frac{x^2\operatorname{sen} y}{z}\,dz\,dy\,dx$
12. $\displaystyle\int_0^3\int_0^{2-(2y/3)}\int_0^{6-2y-3z} ze^{-x^2y^2}\,dx\,dz\,dy$

En los ejercicios 13 a 18, dar una integral triple para el volumen del sólido.

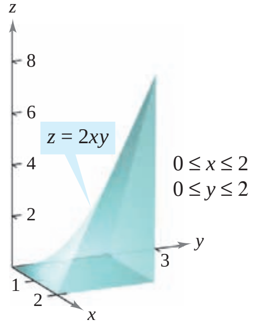
13. El sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y el plano $z = 5 - x - y$
14. El sólido acotado por $z = 9 - x^2$, $z = 0$, $y = 0$ y $y = 2x$
15. El sólido acotado por el paraboloide $z = 6 - x^2 - y^2$ y $z = 0$
16. El sólido limitado por $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y $z = 0$.
17. El sólido que es el interior común bajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 80$ y sobre el paraboloide $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$
18. El sólido limitado arriba por el cilindro $z = 4 - x^2$ y abajo por el paraboloide $z = x^2 + 3y^2$

Volumen **En los ejercicios 19 a 22, utilizar una integral triple para hallar el volumen del sólido mostrado en la figura.**

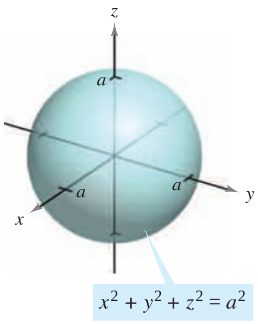
19.



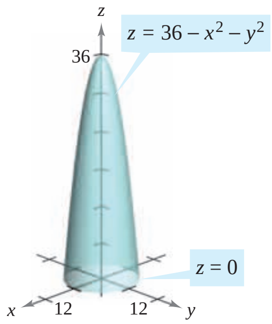
20.



21.



22.



Volumen **En los ejercicios 23 a 26, usar una integral triple para encontrar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones.**

23. $z = 4 - x^2$, $y = 4 - x^2$, primer octante
24. $z = 9 - x^3$, $y = -x^2 + 2$, $y = 0$, $z = 0$, $x \geq 0$
25. $z = 2 - y$, $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$
26. $z = x$, $y = x + 2$, $y = x^2$, primer octante

En los ejercicios 27 a 32, dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada y reescribir la integral utilizando el orden de integración indicado.

27. $\displaystyle\int_0^1\int_{-1}^0\int_0^{y^2} dz\,dy\,dx$

    Reescribir usando el orden $dy\,dz\,dx$.

28. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{y^2}^1\int_0^{1-x} dz\,dx\,dy$

    Reescribir usando el orden $dx\,dz\,dy$.

29. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{(4-x)/2}\int_0^{(12-3x-6y)/4} dz\,dy\,dx$

    Reescribir utilizando el orden $dy\,dx\,dz$.

30. $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{6-x-y} dz\,dy\,dx$

    Reescribir utilizando el orden $dz\,dx\,dy$.

31. $\displaystyle\int_0^1\int_y^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\,dx\,dy$

    Reescribir utilizando el orden $dz\,dy\,dx$.

32. $\displaystyle\int_0^2\int_{2x}^4\int_0^{\sqrt{y^2-4x^2}} dz\,dy\,dx$

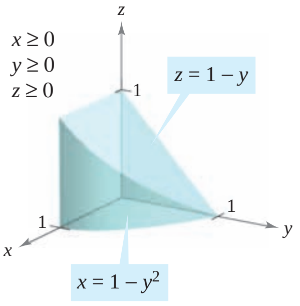
    Reescribir utilizando el orden $dx\,dy\,dz$.

En los ejercicios 33 a 36, dar los seis posibles órdenes de integración de la integral triple sobre la región sólida Q, $\iiint\limits_Q xyz\,dV$.

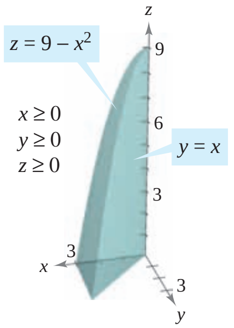
33. $Q = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 3\}$
34. $Q = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2 - x\}$
35. $Q = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 4\}$
36. $Q = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq 6\}$

En los ejercicios 37 y 38, la figura muestra la región de integración de la integral dada. Reescribir la integral como una integral iterada equivalente con los otros cinco órdenes.

37. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-y^2}\int_0^{1-y} dz\,dx\,dy$



38. $\displaystyle\int_0^3\int_0^{x}\int_0^{9-x^2} dz\,dy\,dx$



Masa y centro de masa **En los ejercicios 39 a 42, hallar la masa y las coordenadas indicadas del centro de masa del sólido de densidad dada acotado por las gráficas de las ecuaciones.**

39. Hallar $\bar{x}$ utilizando $\rho(x, y, z) = k$.

Q: $2x + 3y + 6z = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

40. Hallar $\bar{y}$ utilizando $\rho(x, y, z) = ky$.

Q: $3x + 3y + 5z = 15,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

41. Hallar $\bar{z}$ utilizando $\rho(x, y, z) = kx$.

Q: $z = 4 - x,\ z = 0,\ y = 0,\ y = 4,\ x = 0$

42. Hallar $\bar{y}$ utilizando $\rho(x, y, z) = k$.

Q: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1\ (a, b, c > 0),\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

Masa y centro de masa **En los ejercicios 43 y 44, formular las integrales triples para hallar la masa y el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.**

43. $x = 0,\ x = b,\ y = 0,\ y = b,\ z = 0,\ z = b$

$\rho(x, y, z) = kxy$

44. $x = 0,\ x = a,\ y = 0,\ y = b,\ z = 0,\ z = c$

$\rho(x, y, z) = kz$

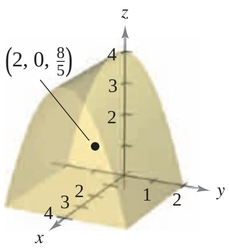
Para pensar **En la figura se muestra el centro de masa de un sólido de densidad constante. En los ejercicios 45 a 48, hacer una conjetura acerca de cómo cambiará el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con la densidad no constante $\rho(x, y, z)$. Explicar.**

45. $\rho(x, y, z) = kx$

46. $\rho(x, y, z) = kz$

47. $\rho(x, y, z) = k(y + 2)$

48. $\rho(x, y, z) = kxz^2(y + 2)^2$



CAS ***Centroide*** **En los ejercicios 49 a 54, hallar el centroide de la región sólida acotada por las gráficas de las ecuaciones o descrita en la figura. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales triples. (Suponer densidad uniforme y hallar el centro de masa.)**

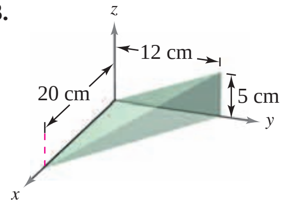
49. $z = \dfrac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2},\ z = h$

50. $y = \sqrt{9 - x^2},\ z = y,\ z = 0$

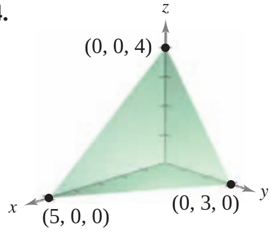
51. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2},\ z = 0$

52. $z = \dfrac{1}{y^2 + 1},\ z = 0,\ x = -2,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 1$

53.



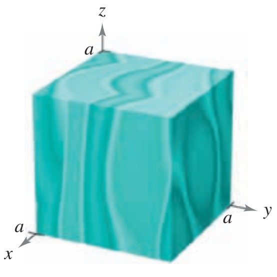
54.



CAS ***Momentos de inercia*** **En los ejercicios 55 a 58, hallar I_x, I_y e I_z para el sólido de densidad dada. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales triples.**

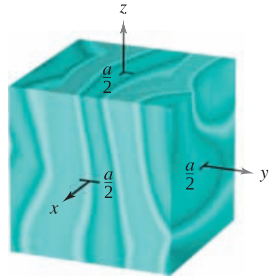
55. *a)* $\rho = k$

b) $\rho = kxyz$



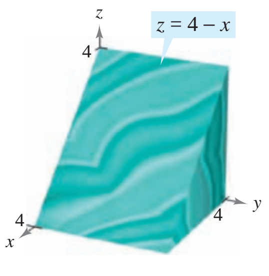
56. *a)* $\rho(x, y, z) = k$

b) $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2)$



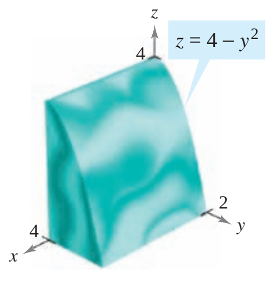
57. *a)* $\rho(x, y, z) = k$

b) $\rho = ky$



58. *a)* $\rho = kz$

b) $\rho = k(4 - z)$

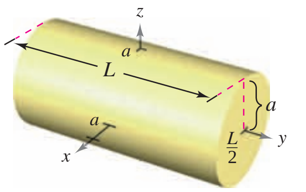


CAS ***Momentos de inercia*** **En los ejercicios 59 y 60, verificar los momentos de inercia del sólido de densidad uniforme. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales triples.**

59. $I_x = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$

$I_y = \frac{1}{2}ma^2$

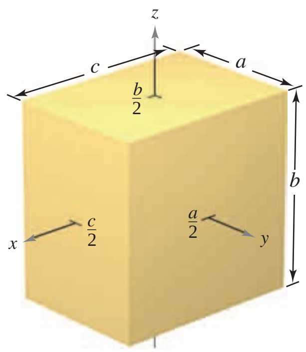
$I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$



60. $I_x = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

$I_y = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$

$I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2)$



Momentos de inercia **En los ejercicios 61 y 62, dar una integral triple que represente el momento de inercia con respecto al eje *z* de la región sólida *Q* de densidad ρ.**

61. $Q = \{(x, y, z): -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1, 0 \le z \le 1 - x\}$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

62. $Q = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}$

$\rho = kx^2$

En los ejercicios 63 y 64, utilizando la descripción de región sólida, dar la integral para *a*) la masa, *b*) el centro de masa y *c*) el momento de inercia con respecto al eje *z*.

63. El sólido acotado por $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$ con la función de densidad $\rho = kz$

64. El sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ con función de densidad $\rho = kxy$

Desarrollo de conceptos

65. Definir una integral triple y describir un método para evaluar una integral triple.

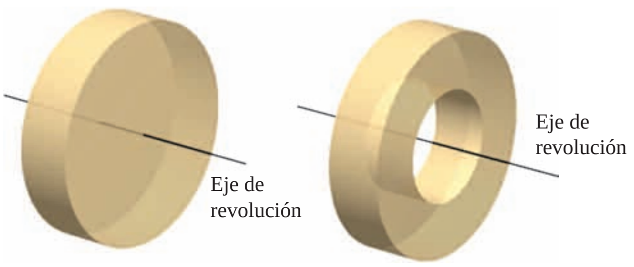
66. Determinar si el momento de inercia con respecto al eje *y* del cilindro del ejercicio 59 aumentará o disminuirá con la densidad no constante $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$ y $a = 4$.

67. Considerar el sólido *A* y el sólido *B* de pesos iguales que se muestran en la figura.

a) Como los sólidos tienen el mismo peso, ¿cuál tiene la densidad mayor?

b) ¿Cuál sólido tiene el momento de inercia mayor? Explicar.

c) Los sólidos se hacen rodar hacia abajo en un plano inclinado. Empiezan al mismo tiempo y a la misma altura. ¿Cuál llegará abajo primero? Explicar.



Sólido *A* Sólido *B*

Para discusión

68. ***Para pensar*** De las integrales *a*) a *c*), ¿cuál es igual a $\int_1^3 \int_0^2 \int_{-1}^1 f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$? Explicar.

a) $\int_1^3 \int_0^2 \int_{-1}^1 f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

b) $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_1^3 f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

c) $\int_0^2 \int_1^3 \int_{-1}^1 f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

Valor promedio **En los ejercicios 69 a 72, hallar el valor promedio de la función sobre el sólido dado. El valor promedio de una función continua $f(x, y, z)$ sobre una región sólida *Q* es**

$$\frac{1}{V}\iiint_Q f(x, y, z)\, dV$$

donde *V* es el volumen de la región sólida *Q*.

69. $f(x, y, z) = z^2 + 4$ sobre el cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados, y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$.

70. $f(x, y, z) = xyz$ sobre el cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 4$, $y = 4$ y $z = 4$.

71. $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre el tetraedro en el primer octante cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$

72. $f(x, y, z) = x + y$ sobre el sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

CAS **73.** Hallar la región sólida *Q* donde la integral triple

$$\iiint_Q (1 - 2x^2 - y^2 - 3z^2)\, dV$$

es un máximo. Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar el valor máximo. ¿Cuál es el valor máximo exacto?

CAS **74.** Hallar la región sólida *Q* donde la integral triple

$$\iiint_Q (1 - x^2 - y^2 - z^2)\, dV$$

es un máximo. Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar el valor máximo. ¿Cuál es el valor máximo exacto?

75. Encontrar *a* en la integral triple.

$$\int_0^1 \int_0^{3-a-y^2} \int_a^{4-x-y^2} dz\, dx\, dy = \frac{14}{15}$$

76. Determinar el valor de *b* de manera que el volumen del elipsoide $x^2 + (y^2/b^2) + (z^2/9) = 1$ es 16π.

Preparación del examen Putnam

77. Evaluar

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \cos^2\left\{\frac{\pi}{2n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\right\} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n.$$

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.

14.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

- **Expresar y evaluar una integral triple en coordenadas cilíndricas.**
- **Expresar y evaluar una integral triple en coordenadas esféricas.**

Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Pierre Simon de Laplace (1749-1827)

Uno de los primeros en utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas fue el matemático francés Pierre Simon de Laplace. Laplace ha sido llamado el "Newton de Francia", y publicó muchos trabajos importantes en mecánica, ecuaciones diferenciales y probabilidad.

Muchas regiones sólidas comunes como esferas, elipsoides, conos y paraboloides pueden dar lugar a integrales triples difíciles de calcular en coordenadas rectangulares. De hecho, fue precisamente esta dificultad la que llevó a la introducción de sistemas de coordenadas no rectangulares. En esta sección se aprenderá a usar coordenadas *cilíndricas* y *esféricas* para evaluar integrales triples.

Recuérdese que en la sección 11.7 se vio que las ecuaciones rectangulares de conversión a coordenadas cilíndricas son

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$z = z.$$

AYUDA DE ESTUDIO Una manera fácil de recordar estas ecuaciones es observar que las ecuaciones para obtener x y y son iguales que en el caso de coordenadas polares y que z no cambia.

En este sistema de coordenadas, la región sólida más simple es un bloque cilíndrico determinado por

$$r_1 \le r \le r_2, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad z_1 \le z \le z_2$$

como se muestra en la figura 14.63. Para expresar una integral triple por medio de coordenadas cilíndricas, supóngase que Q es una región sólida cuya proyección R sobre el plano xy puede describirse en coordenadas polares. Es decir,

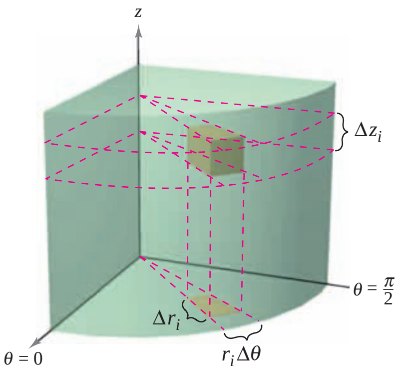
$$Q = \{(x, y, z): (x, y) \text{ está en } R, \quad h_1(x, y) \le z \le h_2(x, y)\}$$

y

$$R = \{(r, \theta): \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\}.$$

Si f es una función continua sobre el sólido Q, se puede expresar la integral triple de f sobre Q como

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right] dA$$



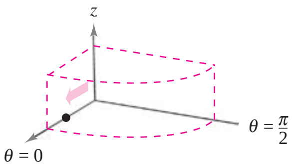
Volumen del bloque cilíndrico:
$\Delta V_i = r_i \Delta r_i \Delta\theta_i \Delta z_i$
Figura 14.63

donde la integral doble sobre R se evalúa en coordenadas polares. Es decir, R es una región plana que es r-simple o θ-simple. Si R es r-simple, la forma iterada de la integral triple en forma cilíndrica es

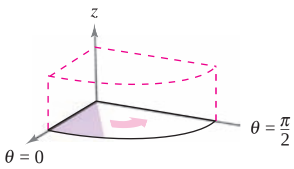
$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)}\int_{h_1(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{h_2(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta.$$

NOTA Éste es sólo uno de los seis posibles órdenes de integración. Los otros cinco son $dz\,d\theta\,dr$, $dr\,dz\,d\theta$, $dr\,d\theta\,dz$, $d\theta\,dz\,dr$ y $d\theta\,dr\,dz$.

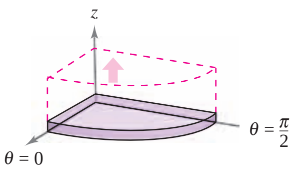
Para visualizar un orden de integración determinado ayuda contemplar la integral iterada en términos de tres movimientos de barrido, cada uno de los cuales agrega una dimensión al sólido. Por ejemplo, en el orden $dr\,d\theta\,dz$, la primera integración ocurre en la dirección r, aquí un punto barre (recorre) un rayo. Después, a medida que θ aumenta, la recta barre (recorre) un sector. Por último a medida que z aumenta, el sector barre (recorre) una cuña sólida como se muestra en la figura 14.64.



Integrar con respecto a r



Integrar con respecto a θ



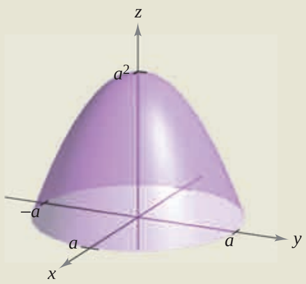
Integrar con respecto a z
Figura 14.64

EXPLORACIÓN

Volumen de un sector paraboloide En las páginas 997, 1006 y 1028, se pidió resumir las formas, conocidas para hallar el volumen del sólido acotado por el paraboloide

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy. Ahora ya se conoce un método más. Utilícese para hallar el volumen del sólido. Comparar los diferentes métodos. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada uno?



EJEMPLO 1 Hallar el volumen empleando coordenadas cilíndricas

Hallar el volumen de la región sólida Q que corta en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ el cilindro $r = 2 \operatorname{sen} \theta$, como se muestra en la figura 14.65.

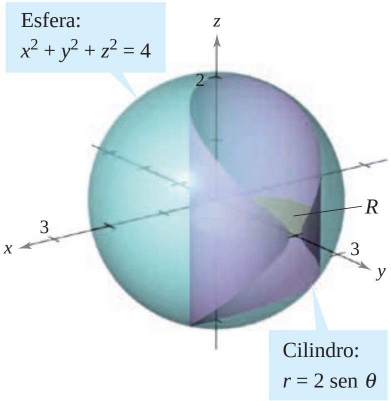


Figura 14.65

Solución Como $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2 = 4$, los límites o cotas de z son

$$-\sqrt{4 - r^2} \le z \le \sqrt{4 - r^2}.$$

Sea R la proyección circular del sólido sobre el plano $r\theta$. Entonces los límites o cotas de R son $0 \le r \le 2 \operatorname{sen} \theta$ y $0 \le \theta \le \pi$. Por tanto, el volumen de Q es

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} 2r\sqrt{4 - r^2}\,dr\,d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} -\frac{2}{3}(4 - r^2)^{3/2} \Big]_0^{2 \operatorname{sen} \theta} d\theta \\
&= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (8 - 8\cos^3 \theta)\,d\theta \\
&= \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} [1 - (\cos \theta)(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)]\,d\theta \\
&= \frac{32}{3}\left[\theta - \operatorname{sen} \theta + \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{3}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{16}{9}(3\pi - 4) \\
&\approx 9.644.
\end{aligned}$$

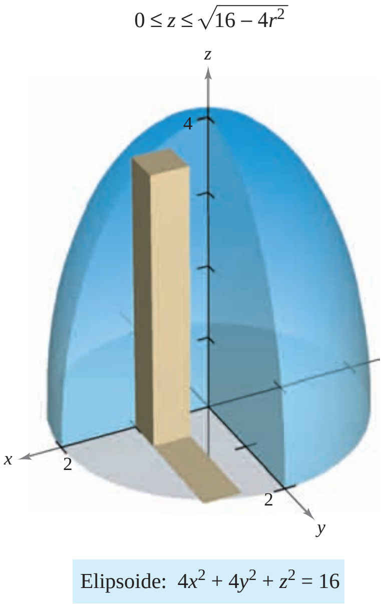


Figura 14.66

EJEMPLO 2 Hallar la masa empleando coordenadas cilíndricas

Hallar la masa de la porción del elipsoide Q dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$, situada sobre el plano xy. La densidad en un punto del sólido es proporcional a la distancia entre el punto y el plano xy.

Solución La función de densidad es $\rho(r, \theta, z) = kz$. Los límites o cotas de z son

$$0 \le z \le \sqrt{16 - 4x^2 - 4y^2} = \sqrt{16 - 4r^2}$$

donde $0 \le r \le 2$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, como se muestra en la figura 14.66. La masa del sólido es

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\sqrt{16-4r^2}} kzr\, dz\, dr\, d\theta \\
&= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 z^2 r\Big]_0^{\sqrt{16-4r^2}} dr\, d\theta \\
&= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (16r - 4r^3)\, dr\, d\theta \\
&= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\Big[8r^2 - r^4\Big]_0^2 d\theta \\
&= 8k\int_0^{2\pi} d\theta = 16\pi k.
\end{aligned}$$

La integración en coordenadas cilíndricas es útil cuando en el integrando aparecen factores con la expresión $x^2 + y^2$ como se ilustra en el ejemplo 3.

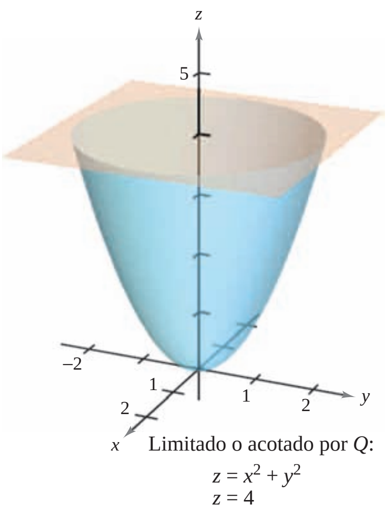


Figura 14.67

EJEMPLO 3 Hallar el momento de inercia

Hallar el momento de inercia con respecto al eje de simetría del sólido Q limitado o acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$, como se muestra en la figura 14.67. La densidad en cada punto es proporcional a la distancia entre el punto y el eje z.

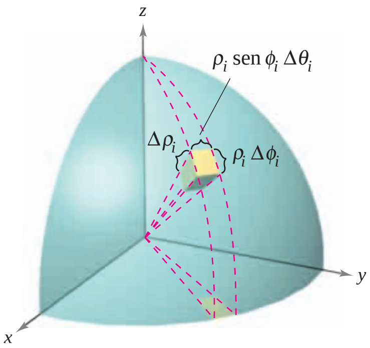
Solución Como el eje z es el eje de simetría, y $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, sigue que

$$I_z = \iiint_Q k(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}\, dV.$$

En coordenadas cilíndricas, $0 \le r \le \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z}$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
I_z &= k\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} r^2(r)r\, dr\, d\theta\, dz \\
&= k\int_0^4\int_0^{2\pi} \frac{r^5}{5}\Big]_0^{\sqrt{z}} d\theta\, dz \\
&= k\int_0^4\int_0^{2\pi} \frac{z^{5/2}}{5}\, d\theta\, dz \\
&= \frac{k}{5}\int_0^4 z^{5/2}(2\pi)\, dz \\
&= \frac{2\pi k}{5}\Big[\frac{2}{7}z^{7/2}\Big]_0^4 = \frac{512k\pi}{35}.
\end{aligned}$$

Integrales triples en coordenadas esféricas



Bloque esférico:
$\Delta V_i \approx \rho_i^2$ sen $\phi_i\,\Delta\rho_i\,\Delta\phi_i\,\Delta\theta_i$
Figura 14.68

Las integrales triples que involucran esferas o conos son a menudo más fáciles de calcular mediante la conversión a coordenadas esféricas. Recordar que en la sección 11.7 se vieron las ecuaciones rectangulares para conversión a coordenadas esféricas

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$$
$$y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$
$$z = \rho \cos\phi.$$

En este sistema de coordenadas, la región más simple es un bloque esférico determinado por

$$\{(\rho, \theta, \phi)\colon \rho_1 \le \rho \le \rho_2,\quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2,\quad \phi_1 \le \phi \le \phi_2\}$$

donde $\rho_1 \ge 0$, $\theta_2 - \theta_1 \le 2\pi$ y $0 \le \phi_1 \le \phi_2 \le \pi$, como se muestra en la figura 14.68. Si (ρ, θ, ϕ) es un punto en el interior de uno de estos bloques, entonces el volumen del bloque puede ser aproximado por $\Delta V \approx \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,\Delta\rho\,\Delta\phi\,\Delta\theta$ (ver ejercicio 18 en los ejercicios de solución de problemas de este capítulo).

Utilizando el proceso habitual que comprende una partición interior, una suma y un límite, se desarrolla la versión siguiente de una integral triple en coordenadas esféricas para una función continua f en la región sólida Q.

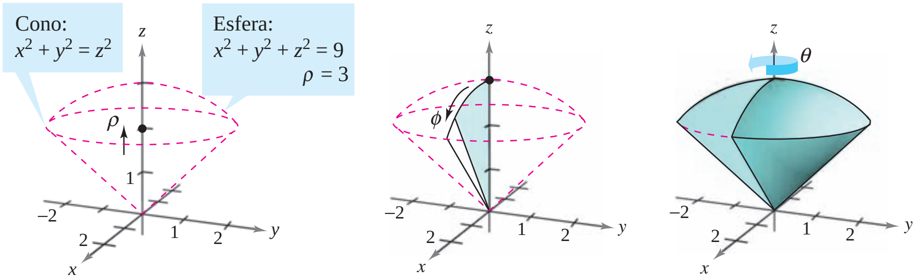
$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$

Esta fórmula puede modificarse para emplear diferentes órdenes de integración y se puede generalizar a regiones con límites o cotas variables.

Como las integrales triples en coordenadas cilíndricas, las integrales triples en coordenadas esféricas se evalúan empleando integrales iteradas. Como sucede con las coordenadas cilíndricas, se puede visualizar un orden determinado de integración contemplando la integral iterada en términos de tres movimientos de barrido, cada uno de los cuales agrega una dimensión al sólido. Por ejemplo, la integral iterada

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

(que se usó en el ejemplo 4) se ilustra en la figura 14.69.



ρ varía desde 0 hasta 3 mientras ϕ y θ se mantienen constantes
Figura 14.69

ϕ varía desde 0 hasta $\pi/4$ mientras θ se mantiene constante

θ varía desde 0 hasta 2π

NOTA Cuando la letra griega ρ se emplea en coordenadas esféricas no está relacionada con la densidad. Es la análoga tridimensional de la r que se utiliza en coordenadas polares. En este texto, en los problemas en los que se empleen coordenadas esféricas y una función de densidad, se usará un símbolo diferente para denotar la densidad. ■

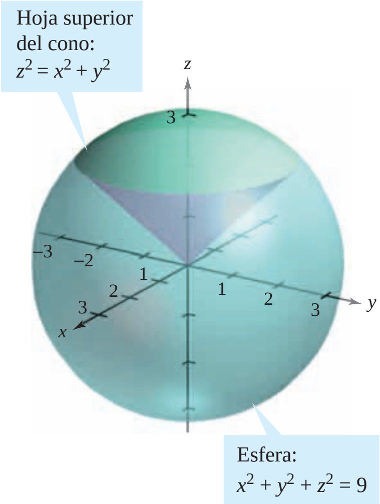


Figura 14.70

EJEMPLO 4 Hallar un volumen en coordenadas esféricas

Hallar el volumen de la región sólida Q limitada o acotada inferiormente por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, como se muestra en la figura 14.70.

Solución En coordenadas esféricas, la ecuación de la esfera es

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \rho = 3.$$

La esfera y el cono se cortan cuando

$$(x^2 + y^2) + z^2 = (z^2) + z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

y, como $z = \rho \cos \phi$, se tiene que

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \cos \phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Por consiguiente, se puede utilizar el orden de integración $d\rho\, d\phi\, d\theta$, donde $0 \le \rho \le 3$, $0 \le \phi \le \pi/4$ y $0 \le \theta \le 2\pi$. El volumen es

$$\begin{aligned}
V = \iiint_Q dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 9 \operatorname{sen}\phi \, d\phi\, d\theta \\
&= 9\int_0^{2\pi} -\cos\phi \Big]_0^{\pi/4} d\theta \\
&= 9\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) d\theta = 9\pi\left(2 - \sqrt{2}\right) \approx 16.563.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Hallar el centro de masa de una región sólida

Hallar el centro de masa de la región sólida Q de densidad uniforme, limitada o acotada inferiormente por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Solución Como la densidad es uniforme, se puede considerar que la densidad en el punto (x, y, z) es k. Por la simetría, el centro de masa se encuentra en el eje z, y sólo se necesita calcular $\bar{z} = M_{xy}/m$, donde $m = kV = 9k\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)$ por el ejemplo 4. Como $z = \rho\cos\phi$, se sigue que

$$\begin{aligned}
M_{xy} = \iiint_Q kz\, dV &= k\int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} (\rho\cos\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta\, d\rho \\
&= k\int_0^3\int_0^{2\pi} \rho^3 \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{2}\Big]_0^{\pi/4} d\theta\, d\rho \\
&= \frac{k}{4}\int_0^3\int_0^{2\pi} \rho^3\, d\theta\, d\rho = \frac{k\pi}{2}\int_0^3 \rho^3\, d\rho = \frac{81k\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{81k\pi/8}{9k\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)} = \frac{9\left(2 + \sqrt{2}\right)}{16} \approx 1.920$$

y el centro de masa es aproximadamente $(0, 0, 1.92)$.

14.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, evaluar la integral iterada.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{5}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{3} r\cos\theta\,dr\,d\theta\,dz$

2. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{6}\int_{0}^{6-r} rz\,dz\,dr\,d\theta$

3. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2\cos^2\theta}\int_{0}^{4-r^2} r\,\text{sen}\,\theta\,dx\,dr\,d\theta$

4. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2} e^{-\rho^3}\rho^2\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

5. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\cos\phi} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

6. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\cos\theta} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\cos\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

CAS **En los ejercicios 7 y 8, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral iterada.**

7. $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{0}^{z}\int_{0}^{\pi/2} re^{r}\,d\theta\,dr\,dz$

8. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\text{sen}\,\theta} (2\cos\phi)\rho^2\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

En los ejercicios 9 a 12, dibujar la región sólida cuyo volumen está dado por la integral iterada, y evaluar la integral iterada.

9. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{3}\int_{0}^{e^{-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$

10. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\sqrt{5}}\int_{0}^{5-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$

11. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{0}^{4} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

12. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{2}^{5} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

En los ejercicios 13 a 16, convertir la integral de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas, y evaluar la integral iterada más sencilla.

13. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} x\,dz\,dy\,dx$

14. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

15. $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{a}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x\,dz\,dy\,dx$

16. $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$

Volumen **En los ejercicios 17 a 22, utilizar coordenadas cilíndricas para hallar el volumen del sólido.**

17. Sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $(x - a/2)^2 + y^2 = (a/2)^2$

18. Sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y exterior a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

19. Sólido limitado arriba por $z = 2x$ y abajo por $z = 2x^2 + 2y^2$

20. Sólido limitado arriba por $z = 2 - x^2 - y^2$ y abajo por $z = x^2 + y^2$

21. Sólido limitado o acotado por las gráficas de la esfera $r^2 + z^2 = a^2$ y del cilindro $r = a\cos\theta$

22. Sólido interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y sobre la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$

Masa **En los ejercicios 23 y 24, utilizar coordenadas cilíndricas para hallar la masa del sólido *Q*.**

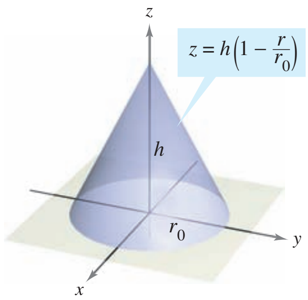
23. $Q = \{(x, y, z): 0 \le z \le 9 - x - 2y,\ x^2 + y^2 \le 4\}$

$\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$

24. $Q = \{(x, y, z): 0 \le z \le 12e^{-(x^2+y^2)},\ x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

$\rho(x, y, z) = k$

En los ejercicios 25 a 30, utilizar coordenadas cilíndricas para hallar la característica indicada del cono que se muestra en la figura.



25. ***Volumen*** Hallar el volumen del cono.

26. ***Centroide*** Hallar el centroide del cono.

CAS **27.** ***Centro de masa*** Hallar el centro de masa del cono suponiendo que su densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia entre el punto y el eje del cono. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral triple.

CAS **28.** ***Centro de masa*** Hallar el centro de masa del cono suponiendo que su densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia entre el punto y la base. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral triple.

29. ***Momento de inercia*** Suponer que el cono tiene densidad uniforme y mostrar que el momento de inercia con respecto al eje z es

$I_z = \frac{3}{10}mr_0^2.$

30. ***Momento de inercia*** Suponer que la densidad del cono es $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ y hallar el momento de inercia con respecto al eje z.

Momento de inercia **En los ejercicios 31 y 32, usar coordenadas cilíndricas para verificar la fórmula dada para el momento de inercia del sólido de densidad uniforme.**

31. Capa cilíndrica: $I_z = \frac{1}{2}m(a^2 + b^2)$

$0 < a \le r \le b,\quad 0 \le z \le h$

CAS **32.** Cilindro circular recto: $I_z = \frac{3}{2}ma^2$

$r = 2a \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \le z \le h$

Utilizar un sistema algebraico por computadora y calcular la integral triple.

Volumen **En los ejercicios 33 a 36, utilizar coordenadas esféricas para calcular el volumen del sólido.**

33. Sólido interior $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, exterior $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, y arriba del plano xy.

34. Sólido limitado arriba por $x^2 + y^2 + z^2 = z$ y abajo por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

CAS **35.** El toro dado por $\rho = 4 \operatorname{sen} \phi$. (Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral triple.)

36. El sólido comprendido entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $b > a$, e interior al cono $z^2 = x^2 + y^2$

Masa **En los ejercicios 37 y 38, utilizar coordenadas esféricas para hallar la masa de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ de densidad especificada.**

37. La densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia entre el punto y el origen.

38. La densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia del punto al eje z.

Centro de masa **En los ejercicios 39 y 40, utilizar coordenadas esféricas para hallar el centro de masa del sólido de densidad uniforme.**

39. Sólido hemisférico de radio r

40. Sólido comprendido entre dos hemisferios concéntricos de radios r y R, donde $r < R$

Momento de inercia **En los ejercicios 41 y 42, utilizar coordenadas esféricas para hallar el momento de inercia con respecto al eje z del sólido de densidad uniforme.**

41. Sólido limitado o acotado por el hemisferio $\rho = \cos \phi$, $\pi/4 \le \phi \le \pi/2$, y el cono $\phi = \pi/4$

42. Sólido comprendido entre dos hemisferios concéntricos de radios r y R, donde $r < R$

Desarrollo de conceptos

43. Dar las ecuaciones de conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y viceversa.

44. Dar las ecuaciones de conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas y viceversa.

45. Dar la forma iterada de la integral triple $\iiint_Q f(x, y, z)\, dV$ en forma cilíndrica.

46. Dar la forma iterada de la integral triple $\iiint_Q f(x, y, z)\, dV$ en forma esférica.

47. Describir la superficie cuya ecuación es una coordenada igual a una constante en cada una de las coordenadas en *a*) el sistema de coordenadas cilíndricas y *b*) el sistema de coordenadas esféricas.

Para discusión

48. Convertir la integral desde coordenadas rectangulares a *a*) coordenadas cilíndricas y *b*) esféricas. Sin calcular, ¿qué integral parece ser más sencilla de evaluar? ¿Por qué?

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$$

49. Hallar el "volumen" de la "esfera en cuatro dimensiones"

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2$$

evaluando

$$16 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} dw\, dz\, dy\, dx.$$

50. Utilizar las coordenadas esféricas para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz = 2\pi.$$

Preparación del examen Putnam

51. Encontrar el volumen de la región de puntos (x, y, z) en forma tal que $(x^2 + y^2 + z^2 + 8)^2 \le 36(x^2 + y^2)$.

PROYECTO DE TRABAJO

Esferas deformadas

En los incisos *a*) y *b*), hallar el volumen de las esferas deformadas. Estos sólidos se usan como modelos de tumores.

a) Esfera deformada

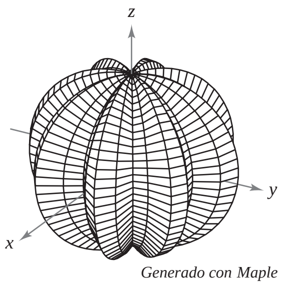
$\rho = 1 + 0.2 \operatorname{sen} 8\theta \operatorname{sen} \phi$

$0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi$

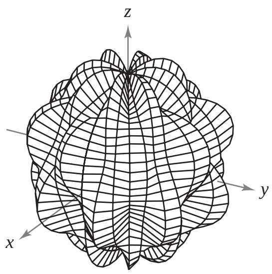
b) Esfera deformada

$\rho = 1 + 0.2 \operatorname{sen} 8\theta \operatorname{sen} 4\phi$

$0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi$



Generado con Maple



Generado con Maple

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre estos tipos de esferas, ver el artículo "Heat Therapy for Tumors" de Leah Edelstein-Keshet en *The UMAP Journal*.

14.8 Cambio de variables: jacobianos

- Comprender el concepto de jacobiano.
- Utilizar un jacobiano para cambiar variables en una integral doble.

Carl Gustav Jacobi (1804-1851)

El jacobiano recibe su nombre en honor al matemático alemán Carl Gustav Jacobi, conocido por su trabajo en muchas áreas de matemática, pero su interés en integración provenía del problema de hallar la circunferencia de una elipse.

Jacobianos

En una integral simple

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se puede tener un cambio de variables haciendo $x = g(u)$, con lo que $dx = g'(u)\,du$, y obtener

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du$$

donde $a = g(c)$ y $b = g(d)$. Nótese que el proceso de cambio de variables introduce, en el integrando, un factor adicional $g'(u)$. Esto también ocurre en el caso de las integrales dobles

$$\int_R\!\!\int f(x, y)\,dA = \int_S\!\!\int f(g(u, v), h(u, v))\underbrace{\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right|}_{\text{Jacobiano}}du\,dv$$

donde el cambio de variables $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ introduce un factor llamado **jacobiano** de x y y con respecto a u y v. Al definir el jacobiano, es conveniente utilizar la notación siguiente que emplea determinantes.

DEFINICIÓN DEL JACOBIANO

Si $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$, entonces el **jacobiano** de x y y con respecto a u y v, denotado por $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

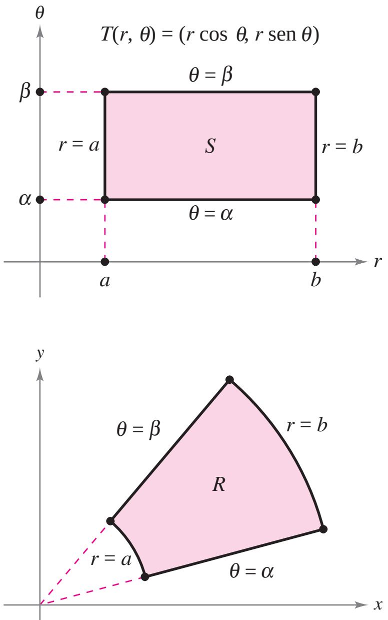
EJEMPLO 1 El jacobiano de la conversión rectangular-polar

Hallar el jacobiano para el cambio de variables definido por

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta.$$

Solución De acuerdo con la definición de un jacobiano, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\theta \\ &= r.\end{aligned}$$



S es la región en el plano $r\theta$ que corresponde a R en el plano xy
Figura 14.71

El ejemplo 1 indica que el cambio de variables de coordenadas rectangulares a polares en una integral doble se puede escribir como

$$\begin{aligned}\int_R\int f(x, y)\, dA &= \int_S\int f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) r\, dr\, d\theta, \quad r > 0\\ &= \int_S\int f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| dr\, d\theta\end{aligned}$$

donde S es la región en el plano $r\theta$ que corresponde a la región R en el plano xy, como se muestra en la figura 14.71. Esta fórmula es semejante a la de la página 1006.

En general, un cambio de variables está dado por una **transformación** biyectiva (o uno a uno) T de una región S en el plano uv en una región R en el plano xy dada por

$$T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$$

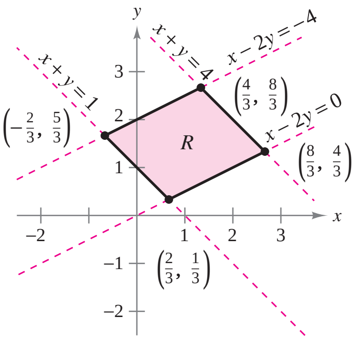
donde g y h tienen primeras derivadas parciales continuas en la región S. Nótese que el punto (u, v) se encuentra en S y el punto (x, y) se encuentra en R. En la mayor parte de las ocasiones, se busca una transformación en la que la región S sea más simple que la región R.

EJEMPLO 2 Hallar un cambio de variables para simplificar una región

Sea R la región limitada o acotada por las rectas

$$x - 2y = 0, \qquad x - 2y = -4, \qquad x + y = 4 \qquad \text{y} \qquad x + y = 1$$

como se muestra en la figura 14.72. Hallar una transformación T de una región S a R tal que S sea una región rectangular (con lados paralelos a los ejes u o v).



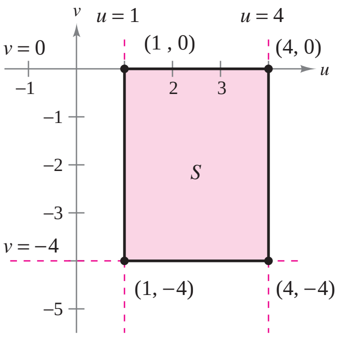
Región R en el plano xy
Figura 14.72

Solución Para empezar, sea $u = x + y$ y $v = x - 2y$. Resolviendo este sistema de ecuaciones para encontrar x y y se obtiene $T(u, v) = (x, y)$, donde

$$x = \frac{1}{3}(2u + v) \qquad \text{y} \qquad y = \frac{1}{3}(u - v).$$

Los cuatro límites de R en el plano xy dan lugar a los límites siguientes de S en el plano uv.

Límites en el plano xy		*Límites en el plano uv*
$x + y = 1$	⇨	$u = 1$
$x + y = 4$	⇨	$u = 4$
$x - 2y = 0$	⇨	$v = 0$
$x - 2y = -4$	⇨	$v = -4$



Región S en el plano uv
Figura 14.73

La región S se muestra en la figura 14.73. Nótese que la transformación T

$$T(u, v) = (x, y) = \left(\frac{1}{3}[2u + v], \frac{1}{3}[u - v]\right)$$

transforma los vértices de la región S en los vértices de la región R. Por ejemplo,

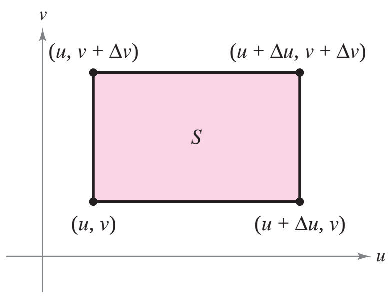
$$\begin{aligned}T(1, 0) &= \left(\tfrac{1}{3}[2(1) + 0], \tfrac{1}{3}[1 - 0]\right) = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\\ T(4, 0) &= \left(\tfrac{1}{3}[2(4) + 0], \tfrac{1}{3}[4 - 0]\right) = \left(\tfrac{8}{3}, \tfrac{4}{3}\right)\\ T(4, -4) &= \left(\tfrac{1}{3}[2(4) - 4], \tfrac{1}{3}[4 - (-4)]\right) = \left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{8}{3}\right)\\ T(1, -4) &= \left(\tfrac{1}{3}[2(1) - 4], \tfrac{1}{3}[1 - (-4)]\right) = \left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{3}\right).\end{aligned}$$

Cambio de variables en integrales dobles

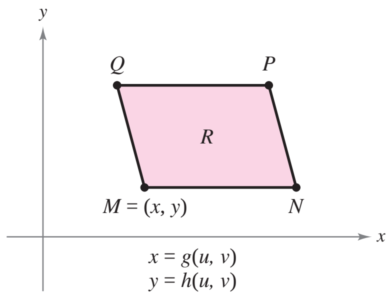
TEOREMA 14.5 CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES DOBLES

Sea R una región vertical u horizontalmente sencilla en el plano xy y sea S una región vertical u horizontalmente sencilla en el plano uv. Sea T desde S hasta R dado por $T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$, donde g y h tienen primeras derivadas parciales continuas. Suponer que T es uno a uno excepto posiblemente en la frontera de S. Si f es continua en R y $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ no es cero en S, entonces

$$\int_R\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_S\int f(g(u, v), h(u, v))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv.$$



Área de $S = \Delta u\,\Delta v$
$\Delta u > 0,\ \Delta v > 0$
Figura 14.74



Los vértices en el plano xy son $M(g(u, v), h(u, v))$, $N(g(u + \Delta u, v), h(u + \Delta u, v))$, $P(g(u + \Delta u, v + \Delta v), h(u + \Delta u, v + \Delta v))$ y $Q(g(u, v + \Delta v), h(u, v + \Delta v))$.
Figura 14.75

DEMOSTRACIÓN Considerar el caso en el que S es una región rectangular en el plano uv con vértices (u, v), $(u + \Delta u, v)$, $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ y $(u, v + \Delta v)$ como se muestra en la figura 14.74. Las imágenes de estos vértices en el plano xy se muestran en la figura 14.75. Si Δu y Δv son pequeños, la continuidad de g y de h implica que R es aproximadamente un paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{MQ}$. Así pues, el área de R es

$$\Delta A \approx \|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\|.$$

Para Δu y Δv pequeños, las derivadas parciales de g y h con respecto a u pueden ser aproximadas por

$$g_u(u, v) \approx \frac{g(u + \Delta u, v) - g(u, v)}{\Delta u} \quad \text{y} \quad h_u(u, v) \approx \frac{h(u + \Delta u, v) - h(u, v)}{\Delta u}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= [g(u + \Delta u, v) - g(u, v)]\mathbf{i} + [h(u + \Delta u, v) - h(u, v)]\mathbf{j}\\ &\approx [g_u(u, v)\,\Delta u]\mathbf{i} + [h_u(u, v)\,\Delta u]\mathbf{j}\\ &= \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\mathbf{j}.\end{aligned}$$

De manera similar, se puede aproximar $\overrightarrow{MQ}$ por $\dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v\mathbf{j}$, lo que implica que

$$\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ} \approx \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u & 0\\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\Delta u\,\Delta v\mathbf{k}.$$

Por tanto, en la notación del jacobiano,

$$\Delta A \approx \|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\| \approx \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Delta u\,\Delta v.$$

Como esta aproximación mejora cuando Δu y Δv se aproximan a 0, el caso límite puede escribirse como

$$dA \approx \|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\| \approx \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv.$$

Por tanto,

$$\int_R\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_S\int f(g(u, v), h(u, v))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv.$$

Los dos ejemplos siguientes muestran cómo un cambio de variables puede simplificar el proceso de integración. La simplificación se puede dar de varias maneras. Se puede hacer un cambio de variables para simplificar la *región R* o el *integrando* $f(x, y)$, o ambos.

EJEMPLO 3 Un cambio de variables para simplificar una región

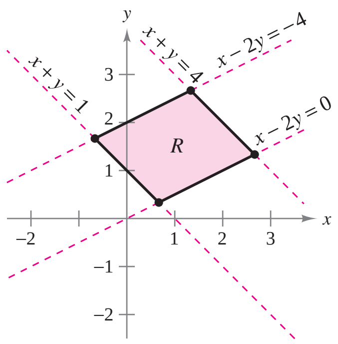


Figura 14.76

Sea R la región limitada o acotada por las rectas

$$x - 2y = 0, \quad x - 2y = -4, \quad x + y = 4 \quad \text{y} \quad x + y = 1$$

como se muestra en la figura 14.76. Evaluar la integral doble

$$\int_R\int 3xy\, dA.$$

Solución De acuerdo con el ejemplo 2, se puede usar el cambio siguiente de variables.

$$x = \frac{1}{3}(2u + v) \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{3}(u - v)$$

Las derivadas parciales de x y y son

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{3}$$

lo cual implica que el jacobiano es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} \\
&= -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} \\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

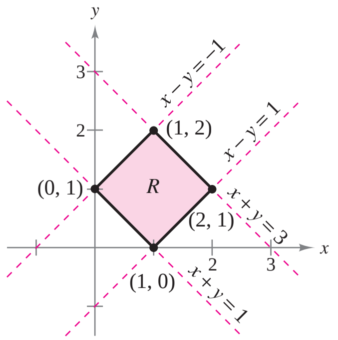
Por tanto, por el teorema 14.5, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_R\int 3xy\, dA &= \int_S\int 3\left[\frac{1}{3}(2u + v)\frac{1}{3}(u - v)\right]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dv\, du \\
&= \int_1^4\int_{-4}^0 \frac{1}{9}(2u^2 - uv - v^2)\, dv\, du \\
&= \frac{1}{9}\int_1^4 \left[2u^2v - \frac{uv^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right]_{-4}^0 du \\
&= \frac{1}{9}\int_1^4 \left(8u^2 + 8u - \frac{64}{3}\right) du \\
&= \frac{1}{9}\left[\frac{8u^3}{3} + 4u^2 - \frac{64}{3}u\right]_1^4 \\
&= \frac{164}{9}.
\end{aligned}$$

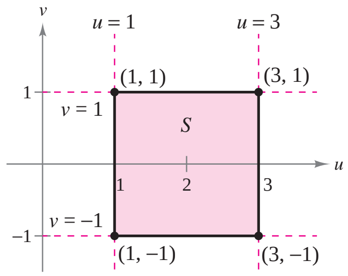
EJEMPLO 4 Un cambio de variables para simplificar un integrando

Sea R la región limitada o acotada por el cuadrado cuyos vértices son (0, 1), (1, 2), (2, 1) y (1, 0). Evaluar la integral

$$\int_R\int (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\, dA.$$



Región R en el plano xy
Figura 14.77



Región S en el plano uv
Figura 14.78

Solución Obsérvese que los lados de R se encuentran sobre las rectas $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$ y $x-y=-1$, como se muestra en la figura 14.77. Haciendo $u=x+y$ y $v=x-y$, se tiene que los límites o cotas de la región S en el plano uv son

$$1 \le u \le 3 \qquad \text{y} \qquad -1 \le v \le 1$$

como se muestra en la figura 14.78. Despejando x y y en términos de u y v se obtiene

$$x = \frac{1}{2}(u+v) \qquad \text{y} \qquad y = \frac{1}{2}(u-v).$$

Las derivadas parciales de x y y son

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2}$$

lo cual implica que el jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Por el teorema 14.5, sigue que

$$\begin{aligned}
\int_R\int (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\, dA &= \int_{-1}^{1}\int_{1}^{3} u^2 \operatorname{sen}^2 v \left(\frac{1}{2}\right) du\, dv \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (\operatorname{sen}^2 v) \frac{u^3}{3}\bigg]_1^3 dv \\
&= \frac{13}{3}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}^2 v\, dv \\
&= \frac{13}{6}\int_{-1}^{1} (1 - \cos 2v)\, dv \\
&= \frac{13}{6}\left[v - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2v\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{13}{6}\left[2 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(-2)\right] \\
&= \frac{13}{6}(2 - \operatorname{sen} 2) \\
&\approx 2.363.
\end{aligned}$$

En cada uno de los ejemplos de cambio de variables de esta sección, la región S ha sido un rectángulo con lados paralelos a los ejes u o v. En ocasiones, se puede usar un cambio de variables para otros tipos de regiones. Por ejemplo, $T(u, v) = \left(x, \frac{1}{2}y\right)$ transforma la región circular $u^2 + v^2 = 1$ en la región elíptica $x^2 + (y^2/4) = 1$.

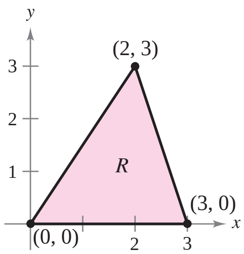
14.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, hallar el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ para el cambio de variables indicado.

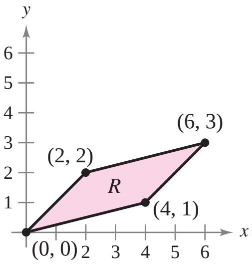
1. $x = -\frac{1}{2}(u - v),\ y = \frac{1}{2}(u + v)$
2. $x = au + bv,\ y = cu + dv$
3. $x = u - v^2,\ y = u + v$
4. $x = uv - 2u,\ y = uv$
5. $x = u \cos\theta - v \operatorname{sen}\theta,\ y = u \operatorname{sen}\theta + v\cos\theta$
6. $x = u + a,\ y = v + a$
7. $x = e^u \operatorname{sen} v,\ y = e^u \cos v$
8. $x = \dfrac{u}{v},\ y = u + v$

En los ejercicios 9 a 12, dibujar la imagen S en el plano uv de la región R en el plano xy utilizando las transformaciones dadas.

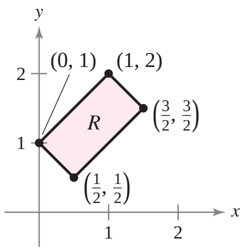
9. $x = 3u + 2v$
   $y = 3v$



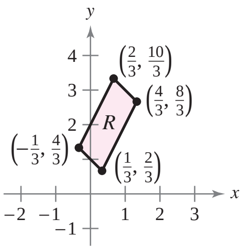
10. $x = \frac{1}{3}(4u - v)$
    $y = \frac{1}{3}(u - v)$



11. $x = \frac{1}{2}(u + v)$
    $y = \frac{1}{2}(u - v)$



12. $x = \frac{1}{3}(v - u)$
    $y = \frac{1}{3}(2v + u)$



CAS **En los ejercicios 13 y 14, verificar el resultado del ejemplo indicado por establecer la integral usando $dy\,dx$ o $dx\,dy$ para dA. Después, usar un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral.**

13. Ejemplo 3
14. Ejemplo 4

En los ejercicios 15 a 20, utilizar el cambio de variables indicado para hallar la integral doble.

15. $\displaystyle\iint_R 4(x^2 + y^2)\,dA$
    $x = \frac{1}{2}(u + v)$
    $y = \frac{1}{2}(u - v)$

16. $\displaystyle\iint_R 60xy\,dA$
    $x = \frac{1}{2}(u + v)$
    $y = -\frac{1}{2}(u - v)$

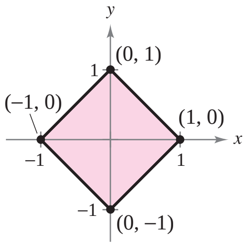


Figura para 15

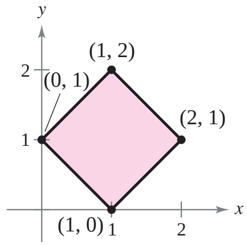
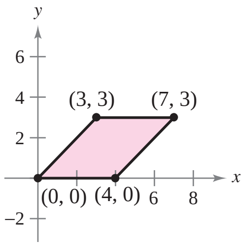
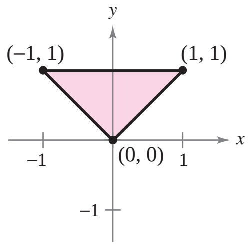


Figura para 16

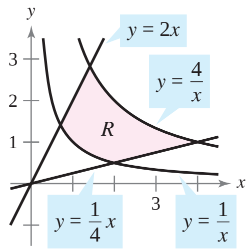
17. $\displaystyle\iint_R y(x - y)\,dA$
    $x = u + v$
    $y = u$



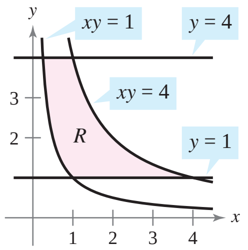
18. $\displaystyle\iint_R 4(x + y)e^{x-y}\,dA$
    $x = \frac{1}{2}(u + v)$
    $y = \frac{1}{2}(u - v)$



19. $\displaystyle\iint_R e^{-xy/2}\,dA$
    $x = \sqrt{\dfrac{v}{u}},\quad y = \sqrt{uv}$



20. $\displaystyle\iint_R y \operatorname{sen} xy\,dA$
    $x = \dfrac{u}{v},\quad y = v$



En los ejercicios 21 a 28, utilizar un cambio de variables para hallar el volumen de la región sólida que se encuentra bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región plana R.

21. $f(x, y) = 48xy$
    R: región limitada por el cuadrado con vértices (1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1)
22. $f(x, y) = (3x + 2y)^2\sqrt{2y - x}$
    R: región limitada por el paralelogramo con vértices (0, 0), (−2, 3), (2, 5), (4, 2)
23. $f(x, y) = (x + y)e^{x-y}$
    R: región acotada por el cuadrado cuyos vértices son (4, 0), (6, 2), (4, 4), (2, 2)

24. $f(x, y) = (x + y)^2 \operatorname{sen}^2(x - y)$

R: región acotada por el cuadrado cuyos vértices son $(\pi, 0)$, $(3\pi/2, \pi/2)$, (π, π), $(\pi/2, \pi/2)$

25. $f(x, y) = \sqrt{(x - y)(x + 4y)}$

R: región acotada por el paralelogramo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(5, 0)$, $(4, -1)$

26. $f(x, y) = (3x + 2y)(2y - x)^{3/2}$

R: región acotada por el paralelogramo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(-2, 3)$, $(2, 5)$, $(4, 2)$

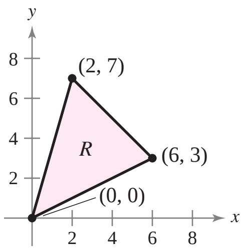
27. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

R: región acotada por el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a)$, donde $a > 0$

28. $f(x, y) = \dfrac{xy}{1 + x^2y^2}$

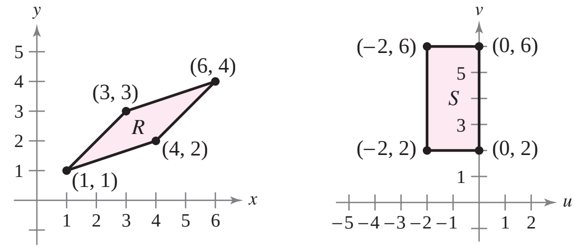
R: región acotada por las gráficas de $xy = 1$, $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$ (*Sugerencia:* Hacer $x = u$, $y = v/u$.)

29. La sustitución $u = 2x - y$ y $v = x + y$ hacen la región R (ver la figura) en una simple región S en el plano uv. Determinar el número total de lados de S que son paralelos a cualquiera de los ejes u o v.



Para discusión

30. Encontrar una transformación $T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$ que al aplicar a la región R resultará en la imagen S (ver la figura). Explicar el razonamiento.



31. Considerar la región R en el plano xy acotada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y las transformaciones $x = au$ y $y = bv$.

a) Dibujar la gráfica de la región R y su imagen S bajo la transformación dada.

b) Hallar $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

c) Hallar el área de la elipse.

32. Utilizar el resultado del ejercicio 31 para hallar el volumen de cada uno de los sólidos abovedados que se encuentra bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región elíptica R. (*Sugerencia:* Después de hacer el cambio de variables dado por los resultados del ejercicio 31, hacer un segundo cambio de variables a coordenadas polares.)

a) $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$

R: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1$

b) $f(x, y) = A \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}\right)$

R: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$

Desarrollo de conceptos

33. Enunciar la definición de jacobiano.

34. Describir cómo usar el jacobiano para hacer un cambio de variables en integrales dobles.

En los ejercicios 35 a 40, hallar el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ para el cambio de variables indicado. Si $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$ y $z = h(u, v, w)$, entonces el jacobiano de x, y y z con respecto a u, v y w es

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

35. $x = u(1 - v)$, $y = uv(1 - w)$, $z = uvw$

36. $x = 4u - v$, $y = 4v - w$, $z = u + w$

37. $x = \frac{1}{2}(u + v)$, $y = \frac{1}{2}(u - v)$, $z = 2uvw$

38. $x = u - v + w$, $y = 2uv$, $z = u + v + w$

39. ***Coordenadas esféricas***

$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$, $z = \rho \cos \phi$

40. ***Coordenadas cilíndricas***

$x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, $z = z$

Preparación del examen Putnam

41. Sea A el área de la región del primer cuadrante acotada por la recta $y = \frac{1}{2}x$, el eje x y la elipse $\frac{1}{9}x^2 + y^2 = 1$. Hallar el número positivo m tal que A es igual al área de la región del primer cuadrante acotada por la recta $y = mx$, el eje y y la elipse $\frac{1}{9}x^2 + y^2 = 1$.

14 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, evaluar la integral.

1. $\displaystyle\int_1^{x^2} x \ln y \, dy$

2. $\displaystyle\int_y^{2y} (x^2 + y^2)\, dx$

En los ejercicios 3 a 6, trazar la región de integración. Después, evaluar la integral iterada. Cambiar el sistema de coordenadas cuando sea conveniente.

3. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1+x} (3x + 2y)\, dy\, dx$

4. $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + 2y)\, dy\, dx$

5. $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} 4x\, dy\, dx$

6. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} dx\, dy$

Área **En los ejercicios 7 a 14, dar los límites para la integral doble**

$$\int_R\int f(x, y)\, dA$$

para ambos órdenes de integración. Calcular el área de R haciendo $f(x, y) = 1$ e integrando.

7. Triángulo: vértices $(0, 0), (3, 0), (0, 1)$

8. Triángulo: vértices $(0, 0), (3, 0), (2, 2)$

9. El área mayor entre las gráficas de $x^2 + y^2 = 25$ y $x = 3$

10. Región acotada por las gráficas de $y = 6x - x^2$ y $y = x^2 - 2x$

11. Región encerrada por la gráfica de $y^2 = x^2 - x^4$

12. Región acotada por las gráficas de $x = y^2 + 1$, $x = 0$, $y = 0$ y $y = 2$

13. Región acotada por las gráficas de $x = y + 3$ y $x = y^2 + 1$

14. Región acotada por las gráficas de $x = -y$ y $x = 2y - y^2$

Para pensar **En los ejercicios 15 y 16, dar un argumento geométrico para la igualdad dada. Verificar la igualdad analíticamente.**

15. $\displaystyle\int_0^1 \int_{2y}^{2\sqrt{2-y^2}} (x + y)\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^{x/2} (x + y)\, dy\, dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}/2} (x + y)\, dy\, dx$

16. $\displaystyle\int_0^2 \int_{3y/2}^{5-y} e^{x+y}\, dx\, dy = \int_0^3 \int_0^{2x/3} e^{x+y}\, dy\, dx + \int_3^5 \int_0^{5-x} e^{x+y}\, dy\, dx$

Volumen **En los ejercicios 17 y 18, utilizar una integral múltiple y un sistema de coordenadas adecuado para hallar el volumen del sólido.**

17. Sólido acotado por las gráficas de $z = x^2 - y + 4$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 4$

18. Sólido acotado por las gráficas de $z = x + y$, $z = 0$, $x = 0$, $x = 3$ y $y = x$

Valor promedio **En los ejercicios 19 y 20, encontrar el promedio de $f(x, y)$ sobre la región R.**

19. $f(x) = 16 - x^2 - y^2$

R: rectángulo con vértices $(2, 2), (-2, 2), (-2, -2), (2, -2)$

20. $f(x) = 2x^2 + y^2$

R: cuadrado con vértices $(0, 0), (3, 0), (3, 3), (0, 3)$

21. ***Temperatura promedio*** La temperatura en grados Celsius sobre la superficie de una placa metálica es

$T(x, y) = 40 - 6x^2 - y^2$

donde x y y están medidos en centímetros. Estimar la temperatura promedio si x varía entre 0 y 3 centímetros y y varía entre 0 y 5 centímetros.

CAS **22.** ***Ganancia promedio*** La ganancia para la empresa P gracias al marketing de dos bebidas dietéticas es

$P = 192x + 576y - x^2 - 5y^2 - 2xy - 5\,000$

donde x y y representan el número de unidades de las dos bebidas dietéticas. Usar un sistema algebraico por computadora para evaluar la doble integral alcanzando la ganancia promedio semanal si x varía entre 40 y 50 unidades y y varía entre 45 y 60 unidades.

Probabilidad **En los ejercicios 23 y 24, hallar k tal que la función sea una función de densidad conjunta y hallar la probabilidad requerida, donde**

$$P(a \le x \le b, c \le y \le d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

23. $f(x, y) = \begin{cases} kxye^{-(x+y)}, & x \ge 0, y \ge 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$

$P(0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1)$

24. $f(x, y) = \begin{cases} kxy, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$

$P(0 \le x \le 0.5, 0 \le y \le 0.25)$

Aproximación **En los ejercicios 25 y 26, determinar qué valor se aproxima mejor al volumen del sólido entre el plano xy y la función sobre la región. (Hacer la elección a la vista de un dibujo del sólido y *no* realizando cálculo alguno.)**

25. $f(x, y) = x + y$

R: triángulo con vértices $(0, 0), (3, 0), (3, 3)$

a) $\frac{9}{2}$ *b)* 5 *c)* 13 *d)* 100 *e)* -100

26. $f(x, y) = 10x^2y^2$

R: círculo limitado o acotado por $x^2 + y^2 = 1$

a) π *b)* -15 *c)* $\frac{2}{3}$ *d)* 3 *e)* 15

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 27 a 30, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

27. $\displaystyle\int_a^b\int_c^d f(x)g(y)\,dy\,dx = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\left[\int_c^d g(y)\,dy\right]$

28. Si f es continua sobre R_1 y R_2, y

$$\int_{R_1}\int dA = \int_{R_2}\int dA$$

entonces

$$\int_{R_1}\int f(x, y)\,dA = \int_{R_2}\int f(x, y)\,dA.$$

29. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-1}^1 \cos(x^2 + y^2)\,dx\,dy = 4\int_0^1\int_0^1 \cos(x^2 + y^2)\,dx\,dy$

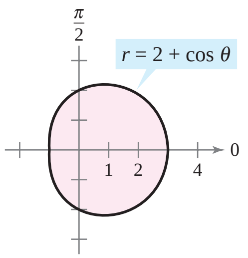
30. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy < \frac{\pi}{4}$

En los ejercicios 31 y 32, evaluar la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

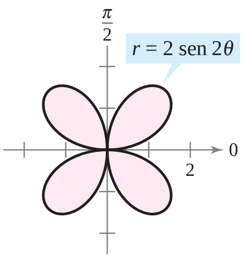
31. $\displaystyle\int_0^h\int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$ **32.** $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-y^2}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$

Área **En los ejercicios 33 y 34, usar la doble integral para encontrar el área en la región sombreada.**

33.



34.



Volumen **En los ejercicios 35 y 36, utilizar una integral múltiple y un sistema de coordenadas adecuado para hallar el volumen del sólido.**

35. Sólido limitado o acotado por las gráficas de $z = 0$ y $z = h$, exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e interior al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

36. Sólido restante después de perforar un orificio de radio b a través del centro de una esfera de radio R $(b < R)$

37. Considerar la región R en el plano xy limitada o acotada por la gráfica de la ecuación

$(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2).$

a) Convertir la ecuación a coordenadas polares. Utilizar una herramienta de graficación para representar la ecuación.

b) Utilizar una integral doble para hallar el área de la región R.

CAS *c*) Utilizar un sistema algebraico por computadora y determinar el volumen del sólido sobre la región R y bajo el hemisferio $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

38. Combinar la suma de las dos integrales iteradas en una sola integral iterada convirtiendo a coordenadas polares. Evaluar la integral iterada resultante.

$$\int_0^{8/\sqrt{13}}\int_0^{3x/2} xy\,dy\,dx + \int_{8/\sqrt{13}}^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}} xy\,dy\,dx$$

CAS ***Masa y centro de masa*** **En los ejercicios 39 y 40, hallar la masa y el centro de masa de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad o densidades dadas. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales múltiples.**

39. $y = 2x$, $y = 2x^3$, primer cuadrante

a) $\rho = kxy$ *b*) $\rho = k(x^2 + y^2)$

40. $y = \dfrac{h}{2}\left(2 - \dfrac{x}{L} - \dfrac{x^2}{L^2}\right)$, $\rho = k$, primer cuadrante

CAS **En los ejercicios 41 y 42, hallar I_x, I_y, I_0, $\bar{\bar{x}}$ y $\bar{\bar{y}}$ para la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones. Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar las integrales dobles.**

41. $y = 0$, $y = b$, $x = 0$, $x = a$, $\rho = kx$

42. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x > 0$, $\rho = ky$

Área de una superficie **En los ejercicios 43 a 46, hallar el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R.**

43. $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$

$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 25\}$

CAS **44.** $f(x, y) = 16 - x - y^2$

$R = \{(x, y):\ 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x\}$

Utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral.

45. $f(x, y) = 9 - y^2$

R: triángulo limitado por las gráficas de las ecuaciones $y = x$, $y = -x$ y $y = 3$.

46. $f(x, y) = 4 - x^2$

R: triángulo limitado por las gráficas de las ecuaciones $y = x$, $y = -x$ y $y = 2$.

47. ***Proyectar construcción*** Un nuevo auditorio es construido con un cimiento en forma de un cuarto de un círculo de 50 pies de radio. Así, se forma una región R limitada por la gráfica de

$x^2 + y^2 = 50^2$

con $x \ge 0$ y $y \ge 0$. Las siguientes ecuaciones son modelos para el piso y el techo.

Piso: $z = \dfrac{x + y}{5}$

Techo: $z = 20 + \dfrac{xy}{100}$

a) Calcular el volumen del cuarto, el cual es necesario para determinar los requisitos de calor y enfriamiento.

b) Encontrar el área de superficie del techo.

CAS **48.** ***Área de una superficie*** El techo del escenario de un teatro al aire libre en un parque se modela por

$$f(x, y) = 25\left[1 + e^{-(x^2+y^2)/1\,000}\cos^2\left(\frac{x^2 + y^2}{1\,000}\right)\right]$$

donde el escenario es un semicírculo limitado o acotado por las gráficas de $y = \sqrt{50^2 - x^2}$ y $y = 0$.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie.

b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar la cantidad de pies cuadrados de techo requeridos para cubrir la superficie.

En los ejercicios 49 a 52, evaluar la integral iterada.

49. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{9} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

50. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{(x^2+y^2)/2} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx$

51. $\displaystyle\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\int_{0}^{c} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$

52. $\displaystyle\int_{0}^{5}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2-y^2}} \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$

CAS **En los ejercicios 53 y 54, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral iterada.**

53. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx$

54. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz\, dz\, dy\, dx$

Volumen **En los ejercicios 55 y 56, utilizar una integral múltiple para calcular el volumen del sólido.**

55. El sólido interior a las gráficas de $r = 2\cos\theta$ y $r^2 + z^2 = 4$

56. El sólido interior a las gráficas de $r^2 + z = 16$, $z = 0$ y $r = 2\operatorname{sen}\theta$

Centro de masa **En los ejercicios 57 a 60, hallar el centro de masa del sólido de densidad uniforme limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones.**

57. El sólido interior al hemisferio $\rho = \cos\phi$, $\pi/4 \le \phi \le \pi/2$, y exterior al cono $\phi = \pi/4$

58. La cuña: $x^2 + y^2 = a^2$, $z = cy\,(c > 0)$, $y \ge 0$, $z \ge 0$

59. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, primer octante

60. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z = 4$ (el sólido mayor)

Momento de inercia **En los ejercicios 61 y 62, hallar el momento de inercia I_z del sólido de densidad dada.**

61. El sólido de densidad uniforme interior al paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$, y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$, $z \ge 0$.

62. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, densidad proporcional a la distancia al centro

63. ***Investigación*** Considerar un segmento esférico de altura h de una esfera de radio a, donde $h \le a$ y de densidad constante $\rho(x, y, z) = k$ (ver la figura).

a) Hallar el volumen del sólido.

b) Hallar el centroide del sólido.

c) Utilizar el resultado del inciso *b*) para localizar el centroide de un hemisferio de radio a.

d) Hallar $\lim\limits_{h\to 0} \bar{z}$.

e) Hallar I_z.

f) Utilizar el resultado del inciso *e*) para hallar I_z para un hemisferio.

64. ***Momento de inercia*** Hallar el momento de inercia con respecto al eje z del elipsoide $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$, donde $a > 0$.

En los ejercicios 65 y 66, dar una interpretación geométrica de la integral iterada.

65. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{6\operatorname{sen}\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

66. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2}\int_{0}^{1+r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$

En los ejercicios 67 y 68, hallar el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ para el cambio de variables indicado.

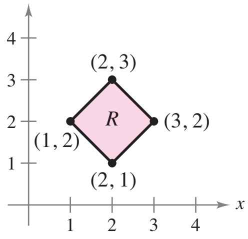
67. $x = u + 3v$, $y = 2u - 3v$

68. $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$

En los ejercicios 69 y 70, utilizar el cambio de variables indicado para evaluar la integral doble.

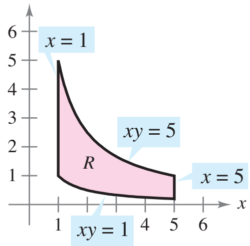
69. $\displaystyle\iint_R \ln(x + y)\, dA$

$x = \dfrac{1}{2}(u + v)$, $y = \dfrac{1}{2}(u - v)$



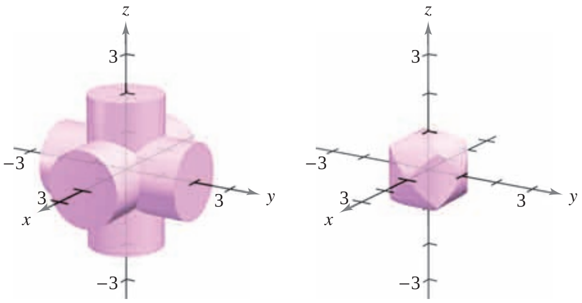
70. $\displaystyle\iint_R \frac{x}{1 + x^2y^2}\, dA$

$x = u$, $y = \dfrac{v}{u}$



SP Solución de problemas

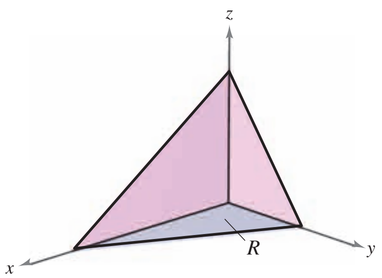
1. Hallar el volumen del sólido de intersección de los tres cilindros $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$ (ver la figura).



2. Sean a, b, c y d números reales positivos. El primer octante del plano $ax + by + cz = d$ se muestra en la figura. Mostrar que el área de la superficie de esta porción del plano es igual a

$$\frac{A(R)}{c}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

donde $A(R)$ es el área de la región triangular R en el plano xy, como se muestra en la figura.



3. Deducir el famoso resultado de Euler que se menciona en la sección 9.3, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, completando cada uno de los pasos.

a) Demostrar que

$$\int \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} = \frac{1}{\sqrt{2 - u^2}} \arctan \frac{v}{\sqrt{2 - u^2}} + C.$$

b) Demostrar que $\displaystyle I_1 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_{-u}^{u} \frac{2}{2 - u^2 + v^2}\, dv\, du = \frac{\pi^2}{18}$

utilizando la sustitución $u = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$.

c) Demostrar que

$$I_2 = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \int_{u-\sqrt{2}}^{-u+\sqrt{2}} \frac{2}{2 - u^2 + v^2}\, dv\, du$$

$$= 4\int_{\pi/6}^{\pi/2} \arctan \frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\, d\theta$$

utilizando la sustitución $u = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$.

d) Demostrar la identidad trigonométrica

$$\frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\frac{(\pi/2) - \theta}{2}\right).$$

e) Demostrar que $\displaystyle I_2 = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \int_{u-\sqrt{2}}^{-u+\sqrt{2}} \frac{2}{2 - u^2 + v^2}\, dv\, du = \frac{\pi^2}{9}.$

f) Utilizar la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita para verificar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy}\, dx\, dy.$

g) Utilizar el cambio de variables $u = \dfrac{x + y}{\sqrt{2}}$ y $v = \dfrac{y - x}{\sqrt{2}}$ para demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy}\, dx\, dy = I_1 + I_2 = \frac{\pi^2}{6}.$

4. Considerar un césped circular de 10 pies de radio, como se muestra en la figura. Supóngase que un rociador distribuye agua de manera radial de acuerdo con la fórmula

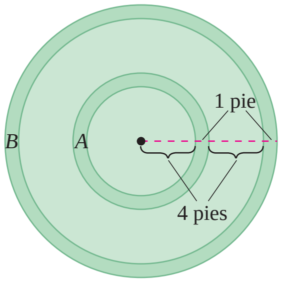
$$f(r) = \frac{r}{16} - \frac{r^2}{160}$$

(medido en pies cúbicos de agua por hora por pie cuadrado de césped), donde r es la distancia en pies al rociador. Hallar la cantidad de agua que se distribuye en 1 hora en las dos regiones anulares siguientes.

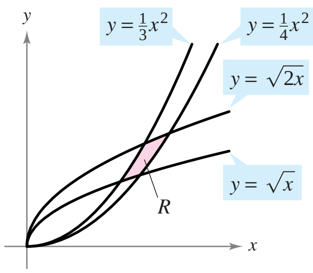
$A = \{(r, \theta)\colon 4 \le r \le 5, 0 \le \theta \le 2\pi\}$

$B = \{(r, \theta)\colon 9 \le r \le 10, 0 \le \theta \le 2\pi\}$

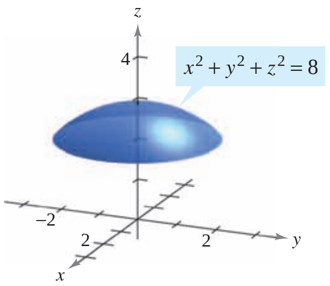
¿Es uniforme la distribución del agua? Determinar la cantidad de agua que recibe todo el césped en 1 hora.



5. La figura muestra la región R limitada o acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2x}$, $y = \dfrac{x^2}{3}$ y $y = \dfrac{x^2}{4}$. Utilizar el cambio de variables $x = u^{1/3}v^{2/3}$ y $y = u^{2/3}v^{1/3}$ para hallar el área de la región R.



6. La figura muestra un sólido acotado inferiormente por el plano $z = 2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.



a) Hallar el volumen del sólido utilizando coordenadas cilíndricas.

b) Hallar el volumen del sólido utilizando coordenadas esféricas.

7. Dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la suma de las integrales iteradas

$$\int_0^6 \int_{z/2}^3 \int_{z/2}^{y} dx\, dy\, dz + \int_0^6 \int_3^{(12-z)/2} \int_{z/2}^{6-y} dx\, dy\, dz.$$

Después, expresar el volumen mediante una integral iterada simple con el orden $dy\, dz\, dx$.

8. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n\, dx\, dy = 0.$

En los ejercicios 9 y 10, evaluar la integral. (*Sugerencia:* Ver el ejercicio 69 de la sección 14.3.)

9. $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx$

10. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{x}}\, dx$

11. Considerar la función

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(x+y)/a}, & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Hallar la relación entre las constantes positivas a y k de manera que f sea una función de densidad conjunta de las variables aleatorias continuas x y y.

12. Encontrar el volumen del sólido generado al girar la región en el primer cuadrante limitado por $y = e^{-x^2}$ alrededor del eje y. Usar este resultado para encontrar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

13. De 1963 a 1986, el volumen del lago Great Salt se triplicó, mientras que el área de su superficie superior se duplicó. Leer el artículo "Relations between Surface Area and Volume in Lakes" de Daniel Cass y Gerald Wildenberg en *The College Mathematics Journal*. Después, proporcionar ejemplos de sólidos que tengan "niveles de agua" a y b tales que $V(b) = 3V(a)$ y $A(b) = 2A(a)$ (ver la figura), donde V es el volumen y A es el área.

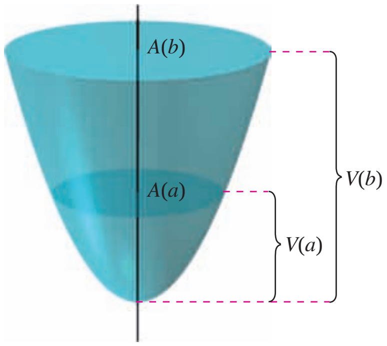
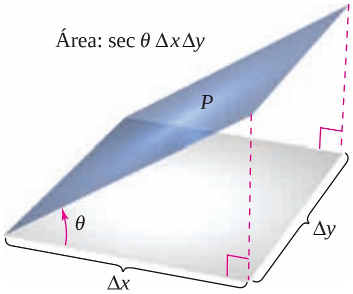


Figura para 13

14. El ángulo entre un plano P y el plano xy es θ, donde $0 \leq \theta < \pi/2$. La proyección de una región rectangular en P sobre el plano xy es un rectángulo en el que las longitudes de sus lados son Δx y Δy, como se muestra en la figura. Demostrar que el área de la región rectangular en P es $\sec \theta\, \Delta x\, \Delta y$.



15. Utilizar el resultado del ejercicio 14 para ordenar los planos, en orden creciente de sus áreas de superficie, en una región fija R del plano xy. Explicar el orden elegido sin hacer ningún cálculo.

a) $z_1 = 2 + x$

b) $z_2 = 5$

c) $z_3 = 10 - 5x + 9y$

d) $z_4 = 3 + x - 2y$

16. Evaluar la integral $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy.$

17. Evaluar las integrales

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dx\, dy \quad \text{y} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dy\, dx.$$

¿Son iguales los resultados? ¿Por qué sí o por qué no?

18. Mostrar que el volumen de un bloque esférico puede ser aproximado por

$$\Delta V \approx \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, \Delta\rho\, \Delta\phi\, \Delta\theta.$$

15 Análisis vectorial

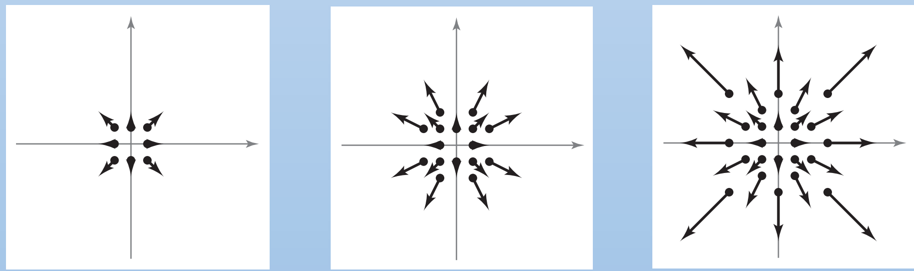
En este capítulo se estudiarán los campos vectoriales, integrales de línea e integrales de superficie. Se aprenderá a usarlos para determinar cantidades en la vida real, como el área de una superficie, masa, flujo, trabajo y energía.

En este capítulo, se aprenderá:

- Cómo dibujar un campo vectorial, determinar si es conservativo, encontrar una función de potencial, el rotacional y la divergencia. (15.1)
- Cómo encontrar una parametrización continua por secciones, escribir y evaluar una integral de línea y utilizar el teorema de Green. (15.2, 15.4)
- Cómo usar el teorema fundamental de las integrales de línea, la independencia de la trayectoria y la conservación de energía. (15.3)
- Cómo dibujar una superficie paramétrica, encontrar un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar una superficie, determinar un vector normal, un plano tangente y el área de una superficie paramétrica. (15.5)
- Cómo evaluar una integral de superficie, determinar la orientación de una superficie, evaluar una integral de flujo y usar el teorema de la divergencia. (15.6, 15.7)
- Cómo utilizar el teorema de Stokes para evaluar una integral de línea o superficie y cómo usar el rotacional para analizar el movimiento de un líquido que gira. (15.8)

NASA

Mientras esperan el despegue en tierra, los astronautas del transbordador espacial tienen acceso a un sistema alámbrico de canasta y tobogán diseñado para transportarlos lo más lejos posible del transbordador en una situación de emergencia. ¿La cantidad de trabajo realizado por el campo de fuerza gravitacional varía para diferentes trayectorias entre dos puntos fijos del tobogán alámbrico? (Ver la sección 15.3, ejercicio 39.)



En el capítulo 15 se combinará el conocimiento de vectores con el del cálculo integral. La sección 15.1 introduce *campos vectoriales*, como los que se muestran arriba. Ejemplos de campos vectoriales incluyen campos de velocidad, campos electromagnéticos y campos gravitacionales.

15.1 Campos vectoriales

- **Comprender el concepto de un campo vectorial.**
- **Determinar si un campo vectorial es conservativo.**
- **Calcular el rotacional de un campo vectorial.**
- **Calcular la divergencia de un campo vectorial.**

Campos vectoriales

En el capítulo 12 se estudiaron funciones vectoriales que asignan un vector a un *número real*. Se comprobó que las funciones vectoriales de números reales son útiles para representar curvas y movimientos a lo largo de una curva. En este capítulo se estudiarán otros dos tipos de funciones vectoriales que asignan un vector a un *punto en el plano* o a un *punto en el espacio*. Tales funciones se llaman **campos vectoriales** (**campos de vectores**), y son útiles para representar varios tipos de **campos de fuerza** y **campos de velocidades**.

DEFINICIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL

Un **campo vectorial sobre una región plana R** es una función $\mathbf{F}$ que asigna un vector $\mathbf{F}(x, y)$ a cada punto en R.

Un **campo vectorial sobre una región sólida Q en el espacio** es una función $\mathbf{F}$ que asigna un vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ a cada punto en Q.

NOTA Aunque un campo vectorial está constituido por infinitos vectores, se puede obtener una idea aproximada de su estructura dibujando varios vectores representativos $\mathbf{F}(x, y)$, cuyos puntos iniciales son (x, y). ■

El *gradiente* es un ejemplo de un campo vectorial. Por ejemplo, si

$$f(x, y) = x^2y + 3xy^3$$

entonces el gradiente de f

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}\\ &= (2xy + 3y^3)\mathbf{i} + (x^2 + 9xy^2)\mathbf{j}\end{aligned}$$

Campo vectorial en el plano.

es un campo vectorial en el plano. Del capítulo 13, la interpretación gráfica de este campo es una familia de vectores cada uno de los cuales apunta en la dirección de máximo crecimiento a lo largo de la superficie dada por $z = f(x, y)$.

De manera similar, si

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

entonces el gradiente de f

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}\\ &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}\end{aligned}$$

Campo vectorial en el espacio.

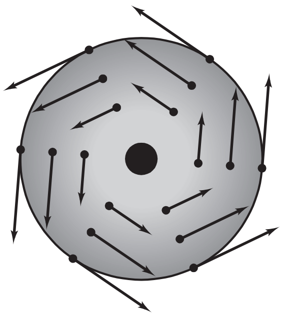
es un campo vectorial en el espacio. Notar que las funciones componentes para este campo vectorial particular son $2x$, $2y$ y $2z$.

Un campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

es **continuo** en un punto si y sólo si cada una de sus funciones componentes M, N y P es continua en ese punto.

Algunos ejemplos *físicos* comunes de campos vectoriales son los **campos de velocidades**, los **gravitatorios** y los **de fuerzas eléctricas**.



Rueda rotante
Figura 15.1

1. Un *campo de velocidades* describe el movimiento de un sistema de partículas en el plano o en el espacio. Por ejemplo, la figura 15.1 muestra el campo vectorial determinado por una rueda que gira en un eje. Los vectores velocidad los determina la localización de sus puntos iniciales: cuanto más lejano está un punto del eje, mayor es su velocidad. Otros campos de velocidad están determinados por el flujo de líquidos a través de un recipiente o por el flujo de corrientes aéreas alrededor de un objeto móvil, como se muestra en la figura 15.2.
2. Los *campos gravitatorios* los define la **ley de la gravitación de Newton**, que establece que la fuerza de atracción ejercida en una partícula de masa m_1 localizada en (x, y, z) por una partícula de masa m_2 localizada en $(0, 0, 0)$ está dada por

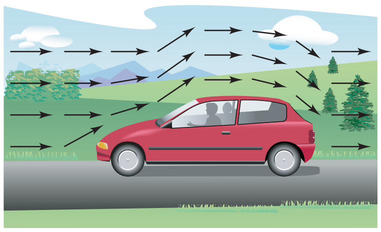
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-Gm_1m_2}{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{u}$$

donde G es la constante gravitatoria y $\mathbf{u}$ es el vector unitario en la dirección del origen a (x, y, z). En la figura 15.3 se puede ver que el campo gravitatorio $\mathbf{F}$ tiene las propiedades de que todo vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ apunta hacia el origen, y que la magnitud de $\mathbf{F}(x, y, z)$ es la misma en todos los puntos equidistantes del origen. Un campo vectorial con estas dos propiedades se llama un **campo de fuerzas central**. Utilizando el vector posición

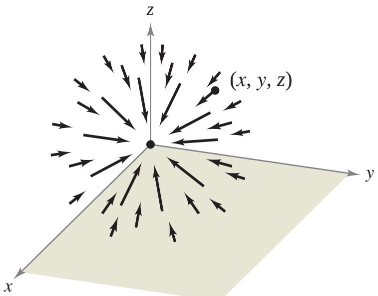
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

para el punto (x, y, z), se puede expresar el campo gravitatorio $\mathbf{F}$ como

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, z) &= \frac{-Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\right)\\ &= \frac{-Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}.\end{aligned}$$



Campo vectorial de flujo del aire
Figura 15.2



m_1 se localiza en (x, y, z).
m_2 se localiza en $(0, 0, 0)$.

Campo de fuerzas gravitatorio
Figura 15.3

3. Los *campos de fuerzas eléctricas* se definen por la **ley de Coulomb**, que establece que la fuerza ejercida en una partícula con carga eléctrica q_1 localizada en (x, y, z) por una partícula con carga eléctrica q_2 localizada en $(0, 0, 0)$ está dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{cq_1q_2}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$, y c es una constante que depende de la elección de unidades para $\|\mathbf{r}\|$, q_1 y q_2.

Nótese que un campo de fuerzas eléctricas tiene la misma forma que un campo gravitatorio. Es decir,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}.$$

Tal campo de fuerzas se llama un **campo cuadrático inverso**.

DEFINICIÓN DE CAMPO CUADRÁTICO INVERSO

Sea $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ un vector posición. El campo vectorial $\mathbf{F}$ es un **campo cuadrático inverso** si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}$$

donde k es un número real y $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$.

Como los campos vectoriales constan de una cantidad infinita de vectores, no es posible hacer un dibujo de todo el campo completo. En lugar de esto, cuando se esboza un campo vectorial, el objetivo es dibujar vectores representativos que ayuden a visualizar el campo.

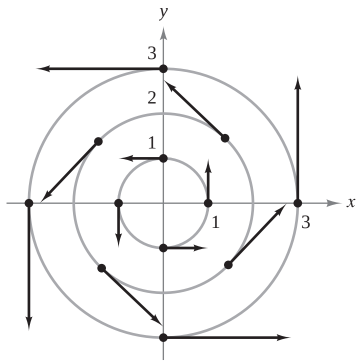
EJEMPLO 1 Dibujo de un campo vectorial

Dibujar algunos vectores del campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Solución Se podrían trazar los vectores en varios puntos del plano, al azar. Sin embargo, es más ilustrativo trazar vectores de magnitud igual. Esto corresponde a encontrar curvas de nivel en los campos escalares. En este caso, vectores de igual magnitud se encuentran en círculos.

$$\|\mathbf{F}\| = c \qquad \text{Vectores de longitud } c.$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = c$$
$$x^2 + y^2 = c^2 \qquad \text{Ecuación del círculo.}$$



Campo vectorial:
$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

Figura 15.4

Para empezar a hacer el dibujo, se elige un valor de c y se dibujan varios vectores en la circunferencia resultante. Por ejemplo, los vectores siguientes se encuentran en la circunferencia unitaria.

Punto	*Vector*
$(1, 0)$	$\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$
$(0, 1)$	$\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$
$(-1, 0)$	$\mathbf{F}(-1, 0) = -\mathbf{j}$
$(0, -1)$	$\mathbf{F}(0, -1) = \mathbf{i}$

En la figura 15.4 se muestran éstos y algunos otros vectores del campo vectorial. Nótese en la figura que este campo vectorial es parecido al dado por la rueda giratoria mostrada en la figura 15.1.

EJEMPLO 2 Dibujo de un campo vectorial

Dibujar algunos vectores en el campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Solución Para este campo vectorial, los vectores de igual longitud están sobre las elipses dadas por

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(2x)^2 + (y)^2} = c$$

lo cual implica que

$$4x^2 + y^2 = c^2.$$

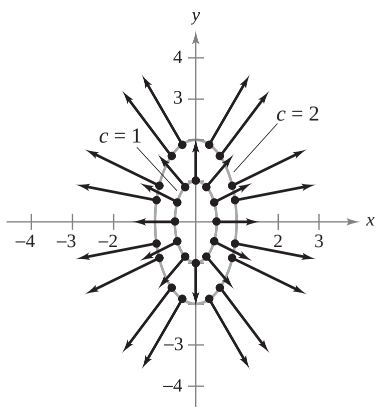
Para $c = 1$, dibujar varios vectores $2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ de magnitud 1 en puntos de la elipse dada por

$$4x^2 + y^2 = 1.$$

Para $c = 2$, dibujar varios vectores $2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ de magnitud 2 en puntos de la elipse dada por

$$4x^2 + y^2 = 4.$$

Estos vectores se muestran en la figura 15.5.



Campo vectorial:
$\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

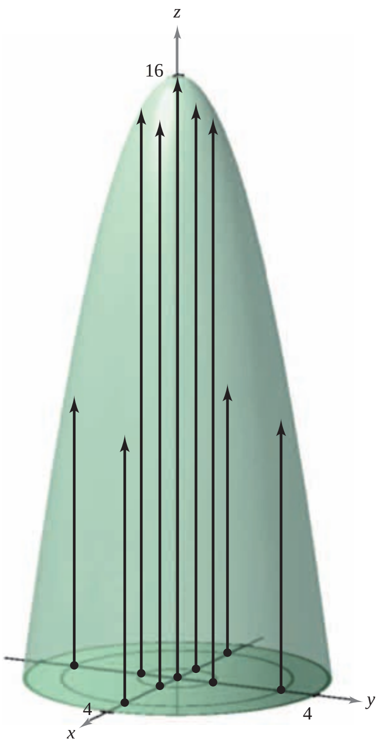
Figura 15.5

EJEMPLO 3 Esbozo de un campo vectorial

Dibujar algunos vectores en el campo de velocidad dado por

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (16 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$$

donde $x^2 + y^2 \leq 16$.



Campo de velocidades:
$\mathbf{v}(x, y, z) = (16 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$

Figura 15.6

Solución Es válido imaginar que **v** describe la velocidad de un fluido a través de un tubo de radio 4. Los vectores próximos al eje z son más largos que aquellos cercanos al borde del tubo. Por ejemplo, en el punto (0, 0, 0), el vector velocidad es $\mathbf{v}(0, 0, 0) = 16\mathbf{k}$, considerando que en el punto (0, 3, 0), el vector velocidad es $\mathbf{v}(0, 3, 0) = 7\mathbf{k}$. La figura 15.6 muestra éstos y varios otros vectores para el campo de velocidades. De la figura, se observa que la velocidad del fluido es mayor en la zona central que en los bordes del tubo.

Campos vectoriales conservativos

En la figura 15.5 todos los vectores parecen ser normales a la curva de nivel de la que emergen. Porque ésta es una propiedad de los gradientes, es natural preguntar si el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es el *gradiente* de alguna función diferenciable f. La respuesta es que algunos campos vectoriales, denominados campos vectoriales **conservativos**, pueden representarse como los gradientes de funciones diferenciables, mientras que algunos otros no pueden.

DEFINICIÓN DE CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS

Un campo vectorial **F** se llama **conservativo** si existe una función diferenciable f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. La función f se llama **función potencial** para **F**.

EJEMPLO 4 Campos vectoriales conservativos

a) El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es conservativo. Para comprobarlo, considerar la función potencial $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Como

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{F}$$

se sigue que **F** es conservativo.

b) Todo campo cuadrático inverso es conservativo. Para comprobarlo, sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u} \quad \text{y} \quad f(x, y, z) = \frac{-k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Como

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k}\\ &= \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2}\left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)\\ &= \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\\ &= \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}\end{aligned}$$

se deduce que **F** es conservativo.

Como puede verse en el ejemplo 4*b*, muchos campos vectoriales importantes, incluyendo campos gravitatorios y de fuerzas eléctricas, son conservativos. Gran parte de la terminología introducida en este capítulo viene de la física. Por ejemplo, el término "conservativo" se deriva de la ley física clásica de la conservación de la energía. Esta ley establece que la suma de la energía cinética y la energía potencial de una partícula que se mueve en un campo de fuerzas conservativo es constante. (La energía cinética de una partícula es la energía debida a su movimiento, y la energía potencial es la energía debida a su posición en el campo de fuerzas.)

El importante teorema siguiente da una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial *en el plano* sea conservativo.

TEOREMA 15.1 CRITERIO PARA CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS EN EL PLANO

Sea M y N dos funciones con primeras derivadas parciales continuas en un disco abierto R. El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

DEMOSTRACIÓN Para mostrar que la condición dada es necesaria para que $\mathbf{F}$ sea conservativo, suponer que existe una función potencial f tal que

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}.$$

Entonces se tiene

$$f_x(x, y) = M \quad \Rightarrow \quad f_{xy}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$f_y(x, y) = N \quad \Rightarrow \quad f_{yx}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

y, por la equivalencia de derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx}, se puede concluir que $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$ para todo (x, y) en R. Lo suficiente de la condición se muestra en la sección 15.4.

NOTA El teorema 15.1 es válido en dominios *simplemente conexos*. Una región plana R es simplemente conexa si cada curva cerrada simple en R encierra sólo puntos que están en R. Ver la figura 15.26 en la sección 15.4. ■

EJEMPLO 5 Prueba de campos vectoriales conservativos en el plano

Decidir si el campo vectorial dado por $\mathbf{F}$ es conservativo.

a) $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ ***b)*** $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

Solución

a) El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ no es conservativo porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2y] = x^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[xy] = y.$$

b) El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es conservativo porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[2x] = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[y] = 0.$$

El teorema 15.1 permite decidir si un campo vectorial es o no conservativo. Pero no dice cómo encontrar una función potencial de **F**. El problema es comparable al de la integración indefinida. A veces se puede encontrar una función potencial por simple inspección. Así, en el ejemplo 4 se observa que

$$f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

tiene la propiedad de que $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

EJEMPLO 6 Calcular una función potencial para $\mathbf{F}(x, y)$

Hallar una función potencial para

$$\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}.$$

Solución Del teorema 15.1 sigue que **F** es conservativo porque

$$\frac{\partial}{\partial y}[2xy] = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x}[x^2 - y] = 2x.$$

Si f es una función cuyo gradiente es igual a $\mathbf{F}(x, y)$, entonces

$$\nabla f(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$$

lo cual implica que

$$f_x(x, y) = 2xy$$

y

$$f_y(x, y) = x^2 - y.$$

Para reconstruir la función f de estas dos derivadas parciales, se integra $f_x(x, y)$ con respecto a x y $f_y(x, y)$ con respecto a y, como sigue.

$$f(x, y) = \int f_x(x, y)\, dx = \int 2xy\, dx = x^2y + g(y)$$

$$f(x, y) = \int f_y(x, y)\, dy = \int (x^2 - y)\, dy = x^2y - \frac{y^2}{2} + h(x)$$

Nótese que $g(y)$ es constante con respecto a x y $h(x)$ es constante con respecto a y. Para hallar una sola expresión que represente $f(x, y)$, sea

$$g(y) = -\frac{y^2}{2} \quad \text{y} \quad h(x) = K.$$

Entonces, se puede escribir

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2y + g(y) + K \\ &= x^2y - \frac{y^2}{2} + K. \end{aligned}$$

Este resultado se puede verificar formando el gradiente de f. Usted podrá que es igual a la función original **F**.

NOTA La solución en el ejemplo 6 es comparable a la dada por una integral indefinida. Es decir, la solución representa a una familia de funciones potenciales, dos de las cuales difieren por una constante. Para hallar una solución única, se tendría que fijar una condición inicial que deba satisfacer la función potencial. ■

Rotacional de un campo vectorial

El teorema 15.1 tiene un análogo para campos vectoriales en el espacio. Antes de establecer ese resultado, se da la definición del **rotacional de un campo vectorial** en el espacio.

DEFINICIÓN DEL ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

El rotacional de $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

NOTA Si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces se dice que $\mathbf{F}$ es un **campo irrotacional**. ■

La notación de producto vectorial usada para el rotacional proviene de ver el gradiente ∇f como el resultado del **operador diferencial** ∇ que actúa sobre la función f. En este contexto, se utiliza la siguiente forma de determinante como ayuda mnemotécnica para recordar la fórmula para el rotacional.

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)\\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Cálculo del rotacional de un campo vectorial

Hallar rot $\mathbf{F}$ para el campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}.$$

¿Es $\mathbf{F}$ irrotacional?

Solución El rotacional de $\mathbf{F}$ está dado por

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)\\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + z^2 & 2yz \end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + z^2 & 2yz \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & 2yz \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 2xy & x^2 + z^2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\\ &= (2z - 2z)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (2x - 2x)\mathbf{k}\\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Como rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}$ es irrotacional.

Más adelante, en este capítulo, se asignará una interpretación física al rotacional de un campo vectorial. Pero por ahora, el uso primario del rotacional se muestra en la siguiente prueba para campos vectoriales conservativos en el espacio. El criterio establece que para un campo vectorial cuyo dominio sea todo el espacio tridimensional (o una esfera abierta), el rotacional es $\mathbf{0}$ en cada punto en el dominio si y sólo si $\mathbf{F}$ es conservativo. La demostración es similar a la dada para el teorema 15.1.

TEOREMA 15.2 CRITERIO PARA CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS EN EL ESPACIO

Suponer que M, N y P tienen primeras derivadas parciales continuas en una esfera abierta Q en el espacio. El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo si y sólo si

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}.$$

Es decir, $\mathbf{F}$ es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

NOTA El teorema 15.2 es válido para dominios *simplemente conectados* en el espacio. Un dominio simplemente conexo en el espacio es un dominio D para el cual cada curva simple cerrada en D (ver la sección 15.4) se puede reducir a un punto en D sin salirse de D. ■

Del teorema 15.2 se puede ver que el campo vectorial del ejemplo 7 es conservativo, ya que rot $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$. Comprobar que el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3y^2z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$$

no es conservativo; se puede demostrar que su rotacional es

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = (x^3y^2 - 2xy)\mathbf{j} + (2xz - 2x^3yz)\mathbf{k} \neq \mathbf{0}.$$

Para los campos vectoriales en el espacio que satisfagan el criterio y sean, por tanto, conservativos se puede encontrar una función potencial siguiendo el mismo modelo utilizado en el plano (como se demostró en el ejemplo 6).

EJEMPLO 8 Calcular una función potencial para $\mathbf{F}(x, y, z)$

NOTA Los ejemplos 6 y 8 son las ilustraciones de un tipo de problemas llamados *reconstrucción de una función a partir de su gradiente*. Si se decide tomar un curso en ecuaciones diferenciales, se estudiarán otros métodos para resolver este tipo de problemas. Un método popular da una interacción entre las "integraciones parciales" sucesivas y derivaciones parciales. ■

Hallar una función potencial para $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$.

Solución Del ejemplo 7 se sabe que el campo vectorial dado por $\mathbf{F}$ es conservativo. Si f es una función tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, entonces

$$f_x(x, y, z) = 2xy, \quad f_y(x, y, z) = x^2 + z^2 \quad \text{y} \quad f_z(x, y, z) = 2yz$$

e integrando separadamente con respecto a x, y y z se obtiene

$$f(x, y, z) = \int M\,dx = \int 2xy\,dx = x^2y + g(y, z)$$

$$f(x, y, z) = \int N\,dy = \int (x^2 + z^2)\,dy = x^2y + yz^2 + h(x, z)$$

$$f(x, y, z) = \int P\,dz = \int 2yz\,dz = yz^2 + k(x, y).$$

Comparando estas tres versiones de $f(x, y, z)$, concluir que

$$g(y, z) = yz^2 + K, \quad h(x, z) = K \quad \text{y} \quad k(x, y) = x^2y + K.$$

Por tanto, $f(x, y, z)$ resulta ser

$$f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + K.$$

Divergencia de un campo vectorial

NOTA La divergencia puede verse como un tipo de derivadas de **F** ya que, para campos de velocidades de partículas, mide el ritmo de flujo de partículas por unidad de volumen en un punto. En hidrodinámica (el estudio del movimiento de fluidos), un campo de velocidades de divergencia nula se llama **incompresible**. En el estudio de electricidad y magnetismo, un campo vectorial de divergencia nula se llama el **solenoidal**.

Se ha visto que el rotacional de un campo vectorial **F** es a su vez un campo vectorial. Otra función importante definida en un campo vectorial es la **divergencia**, que es una función escalar.

DEFINICIÓN DE DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

La **divergencia** de $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}. \qquad \text{Plano.}$$

La **divergencia** de $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}. \qquad \text{Espacio.}$$

Si $\text{div } \mathbf{F} = 0$, entonces se dice que **F** es de **divergencia nula**.

La notación de producto escalar usada para la divergencia proviene de considerar ∇ como un **operador diferencial**, como sigue.

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{k}\right] \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k})$$
$$= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

EJEMPLO 9 Divergencia de un campo vectorial

Hallar la divergencia en $(2, 1, -1)$ para el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3y^2z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}.$$

Solución La divergencia de **F** es

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}[x^3y^2z] + \frac{\partial}{\partial y}[x^2z] + \frac{\partial}{\partial z}[x^2y] = 3x^2y^2z.$$

En el punto $(2, 1, -1)$, la divergencia es

$$\text{div } \mathbf{F}(2, 1, -1) = 3(2^2)(1^2)(-1) = -12.$$

Hay muchas propiedades importantes de la divergencia y el rotacional de un campo vectorial **F** (ver ejercicios 83 a 89). Se establece una de uso muy frecuente en el teorema 15.3. En el ejercicio 90 se pide demostrar este teorema.

TEOREMA 15.3 RELACIÓN ENTRE DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

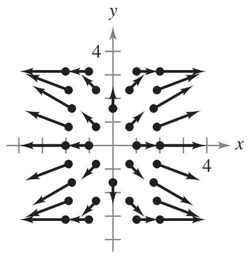
Si $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es un campo vectorial y M, N y P tienen segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\text{div } (\text{rot } \mathbf{F}) = 0.$$

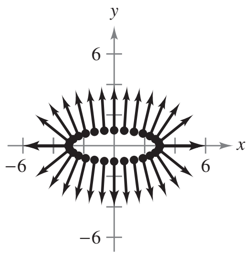
15.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, asociar el campo vectorial con su gráfica. [Las gráficas se marcan *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

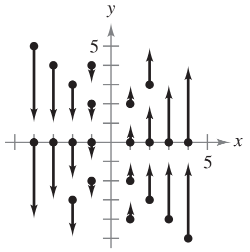
***a*)**



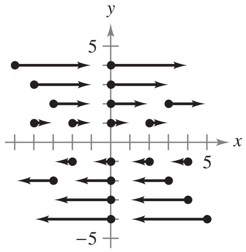
***b*)**



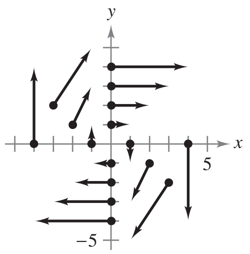
***c*)**



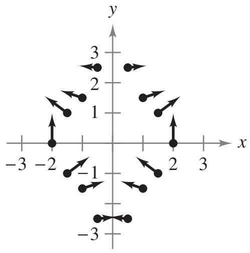
***d*)**



***e*)**



***f*)**



1. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i}$

2. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, \operatorname{sen} y \rangle$

6. $\mathbf{F}(x, y) = \left\langle \frac{1}{2}xy, \frac{1}{4}x^2 \right\rangle$

En los ejercicios 7 a 16, calcular $\|\mathbf{F}\|$ y dibujar varios vectores representativos del campo vectorial.

7. $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = 2\mathbf{i}$

9. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3y\mathbf{j}$

12. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i}$

13. $\mathbf{F}(x, y) = 4x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

14. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + \mathbf{j}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

CAS **En los ejercicios 17 a 20, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente varios vectores representativos del campo vectorial.**

17. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{8}(2xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j})$

18. $\mathbf{F}(x, y) = (2y - 3x)\mathbf{i} + (2y + 3x)\mathbf{j}$

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

En los ejercicios 21 a 30, hallar el campo vectorial conservativo para la función potencial, encontrando su gradiente.

21. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

22. $f(x, y) = x^2 - \frac{1}{4}y^2$

23. $g(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$

24. $g(x, y) = \operatorname{sen} 3x \cos 4y$

25. $f(x, y, z) = 6xyz$

26. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}$

27. $g(x, y, z) = z + ye^{x^2}$

28. $g(x, y, z) = \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} - \dfrac{xz}{y}$

29. $h(x, y, z) = xy \ln(x + y)$

30. $h(x, y, z) = x \operatorname{arcsen} yz$

En los ejercicios 31 a 34, verificar que el campo vectorial es conservativo.

31. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$

32. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{x^2}(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$

33. $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} y\mathbf{i} + x\cos y\mathbf{j}$

34. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{xy}(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$

En los ejercicios 35 a 38, determinar si el campo vectorial es conservativo.

35. $\mathbf{F}(x, y) = 5y^2(y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j})$

36. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{2}{y^2}e^{2x/y}(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$

37. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

38. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + xy}}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$

En los ejercicios 39 a 48, determinar si el campo vectorial es conservativo. Si lo es, calcular una función potencial para él.

39. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

40. $\mathbf{F}(x, y) = 3x^2y^2\mathbf{i} + 2x^3y\mathbf{j}$

41. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

42. $\mathbf{F}(x, y) = xe^{x^2y}(2y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$

43. $\mathbf{F}(x, y) = 15y^3\mathbf{i} - 5xy^2\mathbf{j}$

44. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{y^2}(y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j})$

45. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{2y}{x}\mathbf{i} - \dfrac{x^2}{y^2}\mathbf{j}$

46. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$

47. $\mathbf{F}(x, y) = e^x(\cos y\mathbf{i} - \operatorname{sen} y\mathbf{j})$

48. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^2}$

En los ejercicios 49 a 52, calcular el rotacional del campo vectorial en el punto dado.

	Campo vectorial	*Punto*
49.	$\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$	$(2, 1, 3)$
50.	$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$	$(2, -1, 3)$
51.	$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y\mathbf{i} - e^x \cos y\mathbf{j}$	$(0, 0, 1)$
52.	$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-xyz}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$	$(3, 2, 0)$

CAS **En los ejercicios 53 a 56, usar un sistema algebraico por computadora y representar el rotacional del campo vectorial.**

53. $\mathbf{F}(x, y, z) = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)\mathbf{i} + \ln\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

54. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{yz}{y - z}\mathbf{i} + \dfrac{xz}{x - z}\mathbf{j} + \dfrac{xy}{x - y}\mathbf{k}$

55. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen}(x - y)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(y - z)\mathbf{j} + \operatorname{sen}(z - x)\mathbf{k}$

56. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

En los ejercicios 57 a 62, determinar si el campo vectorial F es conservativo. Si lo es, calcular una función potencial para él.

57. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^2\mathbf{i} + x^2yz^2\mathbf{j} + x^2y^2z\mathbf{k}$

58. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$

59. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} z\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} x\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$

60. $\mathbf{F}(x, y, z) = ye^z\mathbf{i} + ze^x\mathbf{j} + xe^y\mathbf{k}$

61. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{z}{y}\mathbf{i} - \dfrac{xz}{y^2}\mathbf{j} + \dfrac{x}{y}\mathbf{k}$

62. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los ejercicios 63 a 66, calcular la divergencia del campo vectorial F.

63. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + 2y^2\mathbf{j}$

64. $\mathbf{F}(x, y) = xe^x\mathbf{i} + ye^y\mathbf{j}$

65. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

66. $\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \ln(y^2 + z^2)\mathbf{k}$

En los ejercicios 67 a 70, calcular la divergencia del campo vectorial F en el punto dado.

	Campo vectorial	*Punto*
67.	$\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$(2, 1, 1)$
68.	$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$	$(2, -1, 3)$
69.	$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y\mathbf{i} - e^x \cos y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$	$(3, 0, 0)$
70.	$\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(xyz)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$	$(3, 2, 1)$

Desarrollo de conceptos

71. Definir un campo vectorial en el plano y en el espacio. Dar algunos ejemplos físicos de campos vectoriales.

72. ¿Qué es un campo vectorial conservativo y cuál es su criterio en el plano y en el espacio?

73. Definir el rotacional de un campo vectorial.

74. Definir la divergencia de un campo vectorial en el plano y en el espacio.

En los ejercicios 75 y 76, calcular rot $(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$.

75. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$
$\mathbf{G}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

76. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{k}$
$\mathbf{G}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

En los ejercicios 77 y 78, hallar rot (rot F) $= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$.

77. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

78. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

En los ejercicios 79 y 80, hallar div$(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$.

79. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$
$\mathbf{G}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

80. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{k}$
$\mathbf{G}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

En los ejercicios 81 y 82, hallar div (rot F) $= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$.

81. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

82. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

En los ejercicios 83 a 90, demostrar la propiedad para los campos vectoriales F y G y la función escalar *f*. (Suponer que las derivadas parciales requeridas son continuas.)

83. $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} \mathbf{G}$

84. $\operatorname{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$

85. $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G}$

86. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{G})$

87. $\nabla \times [\nabla f + (\nabla \times \mathbf{F})] = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$

88. $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$

89. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$

90. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$ (Teorema 15.3)

En los ejercicios 91 a 93, sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y $f(x, y, z) = \|\mathbf{F}(x, y, z)\|$.

91. Probar que $\nabla(\ln f) = \dfrac{\mathbf{F}}{f^2}$.

92. Probar que $\nabla\left(\dfrac{1}{f}\right) = -\dfrac{\mathbf{F}}{f^3}$.

93. Probar que $\nabla f^n = nf^{n-2}\mathbf{F}$.

Para discusión

94. *a*) Dibujar varios vectores representativos en el campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

b) Dibujar varios vectores representativos en el campo vectorial dado por

$$\mathbf{G}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

c) Explicar cualquier similitud o diferencia en los campos vectoriales $\mathbf{F}(x, y)$ y $\mathbf{G}(x, y)$.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 95 a 98, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.**

95. Si $\mathbf{F}(x, y) = 4x\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j}$, entonces $\|\mathbf{F}(x, y)\| \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

96. Si $\mathbf{F}(x, y) = 4x\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ y (x, y) está en el eje y positivo, entonces el vector apunta en la dirección y negativa.

97. Si f es un campo escalar, entonces el rotacional f tiene sentido.

98. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F}$ es irrotacional pero no conservativo.

15.2 Integrales de línea

- **Comprender y utilizar el concepto de curva suave a trozos.**
- **Expresar y evaluar una integral de línea.**
- **Expresar y evaluar una integral de línea de un campo vectorial.**
- **Expresar y calcular una integral de línea en forma diferencial.**

Curvas suaves a trozos (o por partes)

The Granger Collection

JOSIAH WILLARD GIBBS (1839-1903)

Muchos físicos y matemáticos han contribuido a la teoría y a las aplicaciones descritas en este capítulo, Newton, Gauss, Laplace, Hamilton y Maxwell, entre otros. Sin embargo, el uso del análisis vectorial para describir estos resultados se atribuye principalmente al físico matemático estadounidense Josiah Willard Gibbs.

Una propiedad clásica de los campos gravitatorios (o gravitacionales) es que, sujeto a ciertas restricciones físicas, el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve entre dos puntos en el campo es independiente de la trayectoria que siga el objeto. Una de las restricciones es que la **trayectoria** debe ser una curva suave a trozos (o por partes). Recuérdese que una curva plana C dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \le t \le b$$

es **suave** si

$$\frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt}$$

son continuas en $[a, b]$ y no simultáneamente 0 en (a, b). Similarmente, una curva C en el espacio dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \le t \le b$$

es **suave** si

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dt}$$

son continuas en $[a, b]$ y no simultáneamente 0 en (a, b). Una curva C es **suave a trozos** (o por partes) si el intervalo $[a, b]$ puede dividirse en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales C es suave.

EJEMPLO 1 Hallar una parametrización suave a trozos

Hallar una parametrización suave a trozos de la gráfica C que se muestra en la figura 15.7.

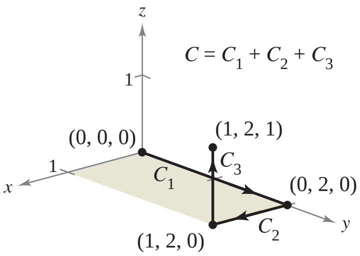


Figura 15.7

Solución Como C consta de tres segmentos de recta C_1, C_2 y C_3, se puede construir una parametrización suave de cada segmento y unirlas haciendo que el último valor de t en C_i coincida con el primer valor de t en C_{i+1}, como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{llll} C_1\colon\ x(t) = 0, & y(t) = 2t, & z(t) = 0, & 0 \le t \le 1 \\ C_2\colon\ x(t) = t - 1, & y(t) = 2, & z(t) = 0, & 1 \le t \le 2 \\ C_3\colon\ x(t) = 1, & y(t) = 2, & z(t) = t - 2, & 2 \le t \le 3 \end{array}$$

Por tanto, C está dada por

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} 2t\mathbf{j}, & 0 \le t \le 1 \\ (t-1)\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, & 1 \le t \le 2\,. \\ \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (t-2)\mathbf{k}, & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

Como C_1, C_2 y C_3 son suaves, se sigue que C es suave a trozos.

Recuérdese que la parametrización de una curva induce una **orientación** de la curva. Así, en el ejemplo 1, la curva está orientada de manera que la dirección positiva va desde (0, 0, 0), siguiendo la curva, hasta (1, 2, 1). Trátese de obtener una parametrización que induzca la orientación opuesta.

Integrales de línea

Hasta ahora, en el texto, se han estudiado varios tipos de integrales. En una integral simple

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{Se integra sobre el intervalo } [a, b].$$

se integró sobre el intervalo $[a, b]$. De manera similar, en las integrales dobles

$$\int\int_R f(x, y)\,dA \qquad \text{Se integra sobre la región } R.$$

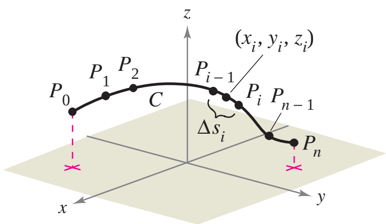
se integró sobre la región R del plano. En esta sección se estudia un nuevo tipo de integral llamada **integral de línea**

$$\int_C f(x, y)\,ds \qquad \text{Se integra sobre una curva } C.$$

en la que se integra sobre una curva C suave a trozos. (Esta terminología es un poco desafortunada; este tipo de integral quedaría mejor descrita como "integral de curva".)

Para introducir el concepto de una integral de línea, considérese la masa de un cable de longitud finita, dado por una curva C en el espacio. La densidad (masa por unidad de longitud) del cable en el punto (x, y, z) está dada por $f(x, y, z)$. Divídase la curva C mediante los puntos

$$P_0, P_1, \ldots, P_n$$



Partición de la curva C
Figura 15.8

produciendo n subarcos, como se muestra en la figura 15.8. La longitud del i-ésimo subarco está dada por Δs_i. A continuación, se elige un punto (x_i, y_i, z_i) en cada subarco. Si la longitud de cada subarco es pequeña, la masa total del cable puede ser aproximada por la suma

$$\text{Masa de cable} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta s_i.$$

Si $\|\Delta\|$ denota la longitud del subarco más largo y se hace que $\|\Delta\|$ se aproxime a 0, parece razonable que el límite de esta suma se aproxime a la masa del cable. Esto lleva a la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE LÍNEA

Si f está definida en una región que contiene una curva suave C de longitud finita, entonces la **integral de línea de f a lo largo de C** está dada por

$$\int_C f(x, y)\,ds = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta s_i \qquad \text{Plano.}$$

o

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta s_i \qquad \text{Espacio.}$$

siempre que este límite exista.

Como sucede con las integrales vistas en el capítulo 14, para evaluar una integral de línea es útil convertirla en una integral definida. Puede demostrarse que si f es *continua*, el límite dado arriba existe y es el mismo para todas las parametrizaciones suaves de C.

Para evaluar una integral de línea sobre una curva plana C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, se utiliza el hecho de que

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

Para una curva en el espacio hay una fórmula similar, como se indica en el teorema 15.4.

TEOREMA 15.4 EVALUACIÓN DE UNA INTEGRAL DE LÍNEA COMO INTEGRAL DEFINIDA

Sea f continua en una región que contiene una curva suave C. Si C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, donde $a \le t \le b$, entonces

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

Si C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, donde $a \le t \le b$, entonces

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.$$

Obsérvese que si $f(x, y, z) = 1$, la integral de línea proporciona la longitud de arco de la curva C, como se definió en la sección 12.5. Es decir,

$$\int_C 1\,ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \text{longitud de arco de la curva } C.$$

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral de línea

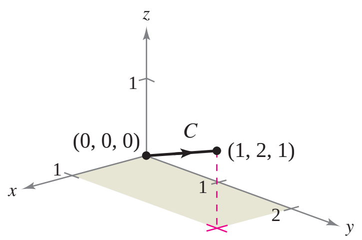


Figura 15.9

Evaluar

$$\int_C (x^2 - y + 3z)\,ds$$

donde C es el segmento de recta mostrado en la figura 15.9.

Solución Para empezar se expresa la ecuación de la recta en forma paramétrica:

$$x = t, \quad y = 2t, \quad \text{y} \quad z = t, \quad 0 \le t \le 1.$$

Entonces, $x'(t) = 1$, $y'(t) = 2$ y $z'(t) = 1$, lo cual implica que

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Por tanto, la integral de línea toma la forma siguiente.

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 - y + 3z)\,ds &= \int_0^1 (t^2 - 2t + 3t)\sqrt{6}\,dt \\ &= \sqrt{6}\int_0^1 (t^2 + t)\,dt \\ &= \sqrt{6}\left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{5\sqrt{6}}{6}\end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 2, el valor de la integral de línea no depende de la parametrización del segmento de recta C (con cualquier parametrización suave se obtendrá el mismo valor). Para convencerse de esto, probar con alguna otra parametrización, como por ejemplo $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 4t$, $z = 1 + 2t$, $-\frac{1}{2} \le t \le 0$, o $x = -t$, $y = -2t$, $z = -t$, $-1 \le t \le 0$.

Supóngase que C es una trayectoria compuesta de las curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Si f es continua en C, se puede mostrar que

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_{C_1} f(x, y)\, ds + \int_{C_2} f(x, y)\, ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y)\, ds.$$

Esta propiedad se utiliza en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Evaluación de una integral de línea sobre una trayectoria

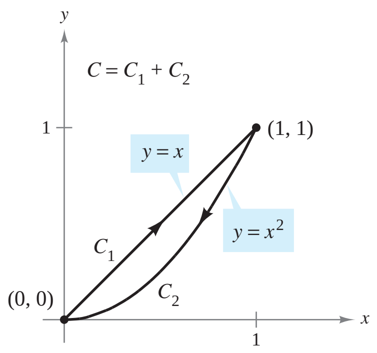


Figura 15.10

Evaluar $\int_C x\, ds$, donde C es la curva suave a trozos mostrada en la figura 15.10.

Solución Para empezar, se integra, en sentido ascendente sobre la recta $y = x$, usando la parametrización siguiente.

$$C_1: \; x = t, \; y = t, \quad 0 \le t \le 1$$

En esta curva, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, lo que implica que $x'(t) = 1$ y $y'(t) = 1$. Por tanto,

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{2}$$

y se tiene

$$\int_{C_1} x\, ds = \int_0^1 t\sqrt{2}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \Big]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A continuación, se integra, en sentido descendente, sobre la parábola $y = x^2$, usando la parametrización

$$C_2: \; x = 1 - t, \quad y = (1 - t)^2, \quad 0 \le t \le 1.$$

En esta curva, $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)^2\mathbf{j}$, lo cual implica que $x'(t) = -1$ y $y'(t) = -2(1 - t)$. Por tanto,

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{1 + 4(1 - t)^2}$$

y se tiene

$$\begin{aligned}\int_{C_2} x\, ds &= \int_0^1 (1 - t)\sqrt{1 + 4(1 - t)^2}\, dt \\ &= -\frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}[1 + 4(1 - t)^2]^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12}(5^{3/2} - 1).\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\int_C x\, ds = \int_{C_1} x\, ds + \int_{C_2} x\, ds = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{12}(5^{3/2} - 1) \approx 1.56.$$

En parametrizaciones dadas por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, es útil recordar la forma de ds como

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

Esto se usa en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Evaluar una integral de línea

Evaluar $\int_C (x + 2)\, ds$, donde C es la curva representada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2.$$

Solución Puesto que $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t^{1/2}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, y

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{1 + 4t + t^2}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\int_C (x + 2)\, ds &= \int_0^2 (t + 2)\sqrt{1 + 4t + t^2}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 2(t + 2)(1 + 4t + t^2)^{1/2}\, dt \\ &= \frac{1}{3}\Big[(1 + 4t + t^2)^{3/2}\Big]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(13\sqrt{13} - 1\right) \\ &\approx 15.29.\end{aligned}$$

El ejemplo siguiente muestra cómo usar una integral de línea para hallar la masa de un resorte (o muelle) cuya densidad varía. En la figura 15.11 obsérvese cómo la densidad de este resorte aumenta a medida que la espiral del resorte asciende por el eje z.

EJEMPLO 5 Hallar la masa de un resorte (o muelle)

Hallar la masa de un resorte que tiene la forma de una hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}), \quad 0 \le t \le 6\pi$$

donde la densidad del resorte es $\rho(x, y, z) = 1 + z$, como se muestra en la figura 15.11.

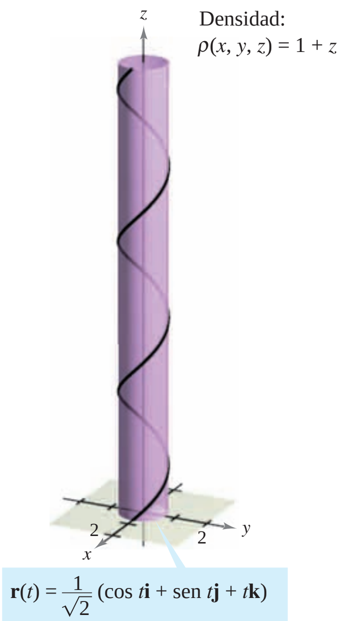


Figura 15.11

Solución Como

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} = 1$$

se sigue que la masa del resorte es

$$\begin{aligned}\text{Masa} = \int_C (1 + z)\, ds &= \int_0^{6\pi}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) dt \\ &= \left[t + \frac{t^2}{2\sqrt{2}}\right]_0^{6\pi} \\ &= 6\pi\left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}}\right) \\ &\approx 144.47.\end{aligned}$$

La masa del resorte es aproximadamente 144.47.

Integrales de línea de campos vectoriales

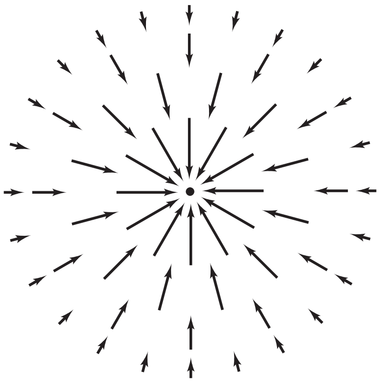
Una de las aplicaciones físicas más importantes de las integrales de línea es la de hallar el **trabajo** realizado sobre un objeto que se mueve en un campo de fuerzas. Por ejemplo, la figura 15.12 muestra un campo de fuerzas cuadrático inverso similar al campo gravitatorio del Sol. Obsérvese que la magnitud de la fuerza a lo largo de una trayectoria circular en torno al centro es constante, mientras que la magnitud de la fuerza a lo largo de una trayectoria parabólica varía de un punto a otro.

Para ver cómo puede utilizarse una integral de línea para hallar el trabajo realizado en un campo de fuerzas $\mathbf{F}$, considérese un objeto que se mueve a lo largo de una trayectoria C en el campo, como se muestra en la figura 15.13. Para determinar el trabajo realizado por la fuerza, sólo se necesita considerar aquella parte de la fuerza que actúa en la dirección en que se mueve el objeto (o en la dirección contraria). Esto significa que en cada punto de C, se puede considerar la proyección $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$ del vector fuerza $\mathbf{F}$ sobre el vector unitario tangente $\mathbf{T}$. En un subarco pequeño de longitud Δs_i, el incremento de trabajo es

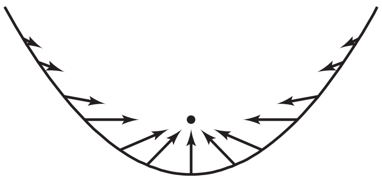
$$\begin{aligned}\Delta W_i &= (\text{fuerza})(\text{distancia})\\ &\approx [\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i)\cdot\mathbf{T}(x_i, y_i, z_i)]\,\Delta s_i\end{aligned}$$

donde (x_i, y_i, z_i) es un punto en el subarco i-ésimo. Por consiguiente, el trabajo total realizado está dado por la integral siguiente.

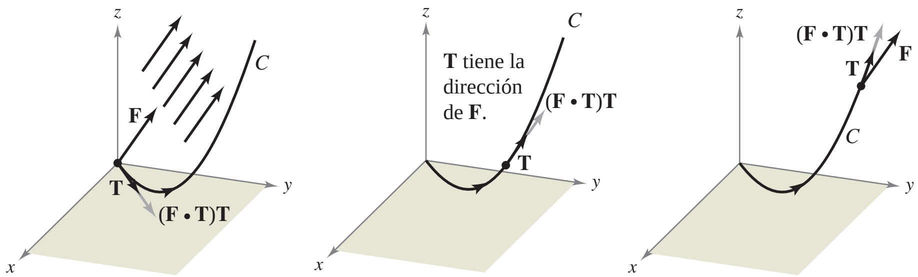
$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z)\cdot\mathbf{T}(x, y, z)\,ds$$



Campo de fuerzas cuadrático inverso $\mathbf{F}$



Vectores a lo largo de una trayectoria parabólica en el campo de fuerzas $\mathbf{F}$
Figura 15.12



En cada punto en C, la fuerza en la dirección del movimiento es $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\mathbf{T}$
Figura 15.13

Esta integral de línea aparece en otros contextos y es la base de la definición siguiente de **integral de línea de un campo vectorial**. En la definición, obsérvese que

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds &= \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt\\ &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt\\ &= \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.\end{aligned}$$

DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE LÍNEA DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$. La **integral de línea** de $\mathbf{F}$ sobre C está dada por

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),\ y(t), z(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt.$$

EJEMPLO 6 Trabajo realizado por una fuerza

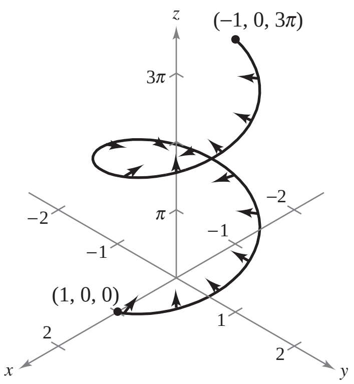


Figura 15.14

Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{2}x\mathbf{i} - \frac{1}{2}y\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k} \qquad \text{Campo de fuerzas } \mathbf{F}.$$

sobre una partícula que se mueve a lo largo de la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \qquad \text{Curva } C \text{ en el espacio.}$$

desde el punto (1, 0, 0) hasta el punto $(-1, 0, 3\pi)$, como se muestra en la figura 15.14.

Solución Como

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}\\ &= \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}\end{aligned}$$

se sigue que $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$ y $z(t) = t$. Por tanto, el campo de fuerzas puede expresarse como

$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) = -\frac{1}{2}\cos t\mathbf{i} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}.$$

Para hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas al moverse la partícula a lo largo de la curva C, se utiliza el hecho de que

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y se escribe lo siguiente.

$$\begin{aligned}W &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\ &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt\\ &= \int_0^{3\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos t\mathbf{i} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}\right)\cdot(-\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt\\ &= \int_0^{3\pi}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t + \frac{1}{4}\right)dt\\ &= \int_0^{3\pi}\frac{1}{4}\,dt\\ &= \frac{1}{4}t\Big]_0^{3\pi}\\ &= \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

NOTA En el ejemplo 6, nótese que las componentes x y y del campo de fuerzas acaban no contribuyendo en nada al trabajo total. Esto se debe a que *en este ejemplo particular* la componente z del campo de fuerzas es la única parte de la fuerza que actúa en la misma dirección (o en dirección opuesta) en la que se mueve la partícula (ver la figura 15.15). ■

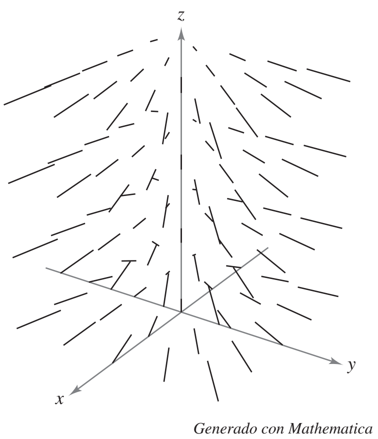


Figura 15.15

TECNOLOGÍA La gráfica, generada por computadora, del campo de fuerzas del ejemplo 6 mostrado en la figura 15.15 indica que todo vector en los puntos del campo de fuerzas apunta hacia el eje z.

En integrales de línea de funciones vectoriales, la orientación de la curva C es importante. Si la orientación de la curva se invierte, el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ cambia a $-\mathbf{T}(t)$, y se obtiene

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

EJEMPLO 7 Orientación y parametrización de una curva

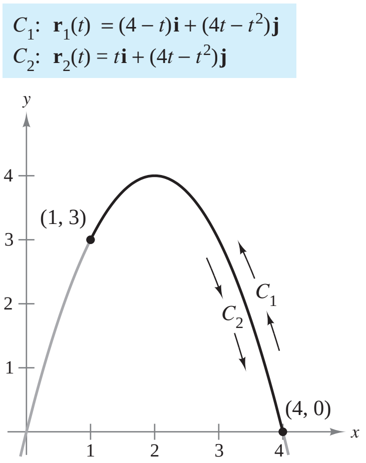


Figura 15.16

Sea $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ y evaluar la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de cada una de las curvas parabólicas mostradas en la figura 15.16.

a) C_1: $\mathbf{r}_1(t) = (4 - t)\mathbf{i} + (4t - t^2)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 3$

b) C_2: $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + (4t - t^2)\mathbf{j}, \quad 1 \le t \le 4$

Solución

a) Como $\mathbf{r}_1'(t) = -\mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}$ y

$$\mathbf{F}(x(t), y(t)) = (4t - t^2)\mathbf{i} + (4 - t)^2\mathbf{j}$$

la integral de línea es

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^3 [(4t - t^2)\mathbf{i} + (4 - t)^2\mathbf{j}] \cdot [-\mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}]\, dt \\
&= \int_0^3 (-4t + t^2 + 64 - 64t + 20t^2 - 2t^3)\, dt \\
&= \int_0^3 (-2t^3 + 21t^2 - 68t + 64)\, dt \\
&= \left[-\frac{t^4}{2} + 7t^3 - 34t^2 + 64t\right]_0^3 \\
&= \frac{69}{2}.
\end{aligned}$$

b) Como $\mathbf{r}_2'(t) = \mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}$ y

$$\mathbf{F}(x(t), y(t)) = (4t - t^2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

la integral de línea es

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^4 [(4t - t^2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}] \cdot [\mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}]\, dt \\
&= \int_1^4 (4t - t^2 + 4t^2 - 2t^3)\, dt \\
&= \int_1^4 (-2t^3 + 3t^2 + 4t)\, dt \\
&= \left[-\frac{t^4}{2} + t^3 + 2t^2\right]_1^4 \\
&= -\frac{69}{2}.
\end{aligned}$$

El resultado del inciso *b*) es el negativo del del inciso *a*) porque C_1 y C_2 representan orientaciones opuestas del mismo segmento parabólico.

NOTA Aunque en el ejemplo 7 el valor de la integral de línea depende de la orientación de C, no depende de la parametrización de C. Para ver esto, sea C_3 la curva representada por

$$\mathbf{r}_3 = (t + 2)\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j}$$

donde $-1 \le t \le 2$. La gráfica de esta curva es el mismo segmento parabólico mostrado en la figura 15.16. ¿Coincide el valor de la integral de línea sobre C_3 con el valor sobre C_1 o C_2? ¿Por qué sí o por qué no?

Integrales de línea en forma diferencial

Otra forma normalmente utilizada de las integrales de línea se deduce de la notación de campo vectorial usada en la sección anterior. Si **F** es un campo vectorial de la forma $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, y C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, entonces $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ se escribe a menudo como $M\,dx + N\,dy$.

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt \\ &= \int_a^b (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j})\,dt \\ &= \int_a^b \left(M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt}\right) dt \\ &= \int_C (M\,dx + N\,dy)\end{aligned}$$

Esta **forma diferencial** puede extenderse a tres variables. Los paréntesis se omiten a menudo, y se escribe:

$$\int_C M\,dx + N\,dy \qquad \text{y} \qquad \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

Obsérvese cómo se usa esta notación diferencial en el ejemplo 8.

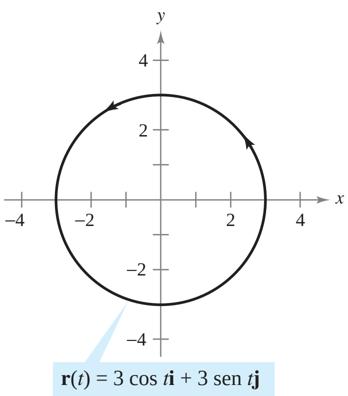


Figura 15.17

EJEMPLO 8 Evaluación de una integral de línea en forma diferencial

Sea C el círculo de radio 3 dado por

$$\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

como se muestra en la figura 15.17. Evaluar la integral de línea

$$\int_C y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy.$$

Solución Como $x = 3\cos t$ y $y = 3\,\text{sen}\,t$, se tiene $dx = -3\,\text{sen}\,t\,dt$ y $dy = 3\cos t\,dt$. Por tanto, la integral de línea es

$$\begin{aligned}&\int_C M\,dx + N\,dy \\ &= \int_C y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy \\ &= \int_0^{2\pi} [(27\,\text{sen}^3 t)(-3\,\text{sen}\,t) + (27\cos^3 t + 81\cos t\,\text{sen}^2 t)(3\cos t)]\,dt \\ &= 81\int_0^{2\pi} (\cos^4 t - \text{sen}^4 t + 3\cos^2 t\,\text{sen}^2 t)\,dt \\ &= 81\int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t - \text{sen}^2 t + \frac{3}{4}\text{sen}^2\,2t\right) dt \\ &= 81\int_0^{2\pi} \left[\cos 2t + \frac{3}{4}\left(\frac{1 - \cos 4t}{2}\right)\right] dt \\ &= 81\left[\frac{\text{sen}\,2t}{2} + \frac{3}{8}t - \frac{3\,\text{sen}\,4t}{32}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{243\pi}{4}.\end{aligned}$$

NOTA La orientación de C afecta el valor de la forma diferencial de una integral de línea. Específicamente, si $-C$ tiene orientación opuesta a C, entonces

$$\int_{-C} M\,dx + N\,dy = -\int_C M\,dx + N\,dy.$$

Por tanto, de las tres formas de la integral de línea presentadas en esta sección, la orientación de C no afecta a la forma $\int_C f(x, y)\,ds$, pero sí afecta a la forma vectorial y la forma diferencial. ■

En curvas representadas por $y = g(x)$, $a \le x \le b$, se puede hacer $x = t$ y obtener la forma paramétrica

$$x = t \quad \text{y} \quad y = g(t), \quad a \le t \le b.$$

Como en esta forma es $dx = dt$, se tiene la opción de evaluar la integral de línea en la variable x o en la variable t. Esto se muestra en el ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Evaluación de una integral de línea en forma diferencial

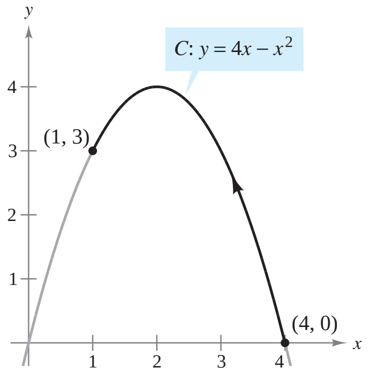


Figura 15.18

Evaluar

$$\int_C y\,dx + x^2\,dy$$

donde C es el arco parabólico dado por $y = 4x - x^2$ desde (4, 0) a (1, 3), como se muestra en la figura 15.18.

Solución En lugar de pasar al parámetro t, se puede simplemente conservar la variable x y escribir

$$y = 4x - x^2 \quad \Rightarrow \quad dy = (4 - 2x)\,dx.$$

Entonces, en la dirección de (4, 0) a (1, 3), la integral de línea es

$$\begin{aligned}\int_C y\,dx + x^2\,dy &= \int_4^1 [(4x - x^2)\,dx + x^2(4 - 2x)\,dx] \\ &= \int_4^1 (4x + 3x^2 - 2x^3)\,dx \\ &= \left[2x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2}\right]_4^1 = \frac{69}{2}.\end{aligned}$$

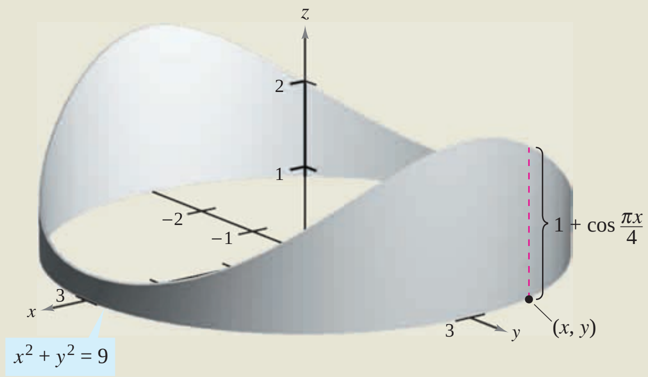
Ver el ejemplo 7.

EXPLORACIÓN

Hallar el área de una superficie lateral La figura muestra un pedazo de hojalata cortado de un cilindro circular. La base del cilindro circular se representa por $x^2 + y^2 = 9$. Para todo punto (x, y) de la base, la altura del objeto está dada por

$$f(x, y) = 1 + \cos\frac{\pi x}{4}.$$

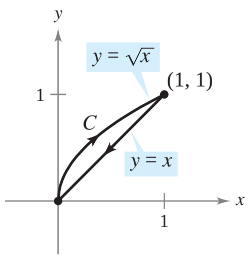
Explicar cómo utilizar una integral de línea para hallar el área de la superficie del pedazo de hojalata.



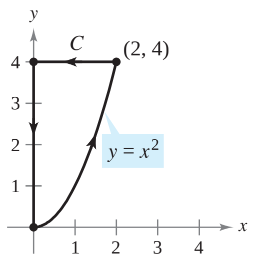
15.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, hallar una parametrización suave a trozos de la trayectoria *C*. (Nótese que existe más de una respuesta correcta.)

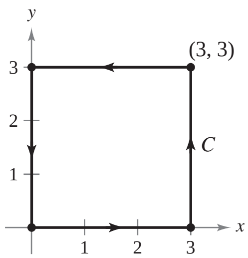
1.



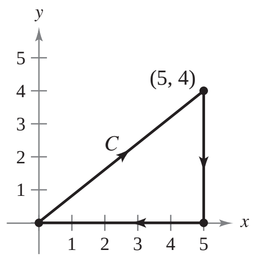
2.



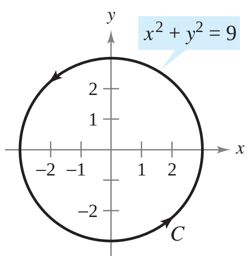
3.



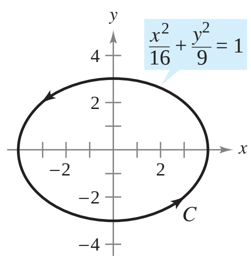
4.



5.



6.



En los ejercicios 7 a 10, evaluar la integral de línea a lo largo de la trayectoria dada.

7. $\displaystyle\int_C xy\, ds$

C: $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$

$0 \leq t \leq 1$

8. $\displaystyle\int_C 3(x - y)\, ds$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j}$

$0 \leq t \leq 2$

9. $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$

C: $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\, t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$0 \leq t \leq \pi/2$

10. $\displaystyle\int_C 2xyz\, ds$

C: $\mathbf{r}(t) = 12t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 84t\mathbf{k}$

$0 \leq t \leq 1$

En los ejercicios 11 a 14, *a*) hallar una parametrización de la trayectoria *C*, y *b*) evaluar

$$\int_C (x^2 + y^2)\, ds$$

a lo largo de *C*.

11. C: segmento de recta de $(0, 0)$ a $(1, 1)$

12. C: segmento de recta de $(0, 0)$ a $(2, 4)$

13. C: círculo $x^2 + y^2 = 1$ recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj, desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$

14. C: círculo $x^2 + y^2 = 4$ recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj, desde $(2, 0)$ a $(0, 2)$

En los ejercicios 15 a 18, *a*) hallar una parametrización de la trayectoria *C*, y *b*) evaluar

$$\int_C (x + 4\sqrt{y})\, ds$$

a lo largo de *C*.

15. C: eje x de $x = 0$ a $x = 1$

16. C: eje y de $y = 1$ a $y = 9$

17. C: triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj

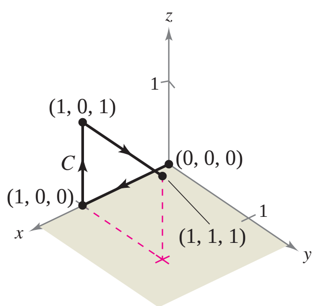
18. C: cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ y $(0, 2)$, recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj

En los ejercicios 19 y 20, *a*) encontrar una parametrización continua por secciones de la trayectoria *C* que se muestra en la figura y *b*) evaluar

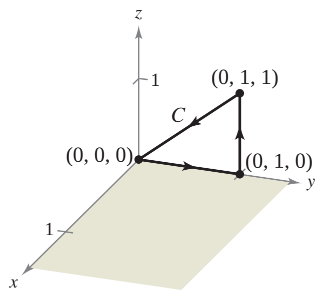
$$\int_C (2x + y^2 - z)\, ds$$

a lo largo de *C*.

19.



20.



Masa **En los ejercicios 21 y 22, hallar la masa total de dos vueltas completas de un resorte de densidad ρ y que tiene forma de hélice circular**

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + t\mathbf{k},\quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

21. $\rho(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$

22. $\rho(x, y, z) = z$

Masa **En los ejercicios 23 a 26, hallar la masa total del cable de densidad ρ.**

23. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \text{sen}\, t\mathbf{j}$, $\rho(x, y) = x + y$, $0 \leq t \leq \pi$

24. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$, $\rho(x, y) = \dfrac{3}{4}y$, $0 \leq t \leq 1$

25. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $\rho(x, y, z) = kz$ $(k > 0)$, $1 \leq t \leq 3$

26. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $\rho(x, y, z) = k + z$ $(k > 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

En los ejercicios 27 a 32, evaluar

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde C está representa por $\mathbf{r}(t)$.

27. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$

28. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

29. $\mathbf{F}(x, y) = 3x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

30. $\mathbf{F}(x, y) = 3x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{4 - t^2}\mathbf{j}, \quad -2 \le t \le 2$

31. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

32. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

C: $\mathbf{r}(t) = 2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

CAS **En los ejercicios 33 y 34, utilizar un sistema algebraico por computadora y calcular la integral**

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde C está representa por $\mathbf{r}(t)$.

33. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}, \quad 1 \le t \le 3$

34. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2$

Trabajo **En los ejercicios 35 a 40, hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas F sobre una partícula que se mueve a lo largo de la trayectoria dada.**

35. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$

C: $x = t$, $y = t^3$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 8)$

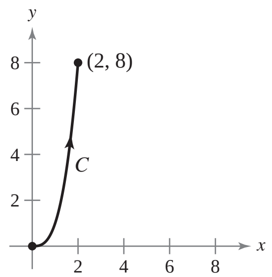


Figura para 35

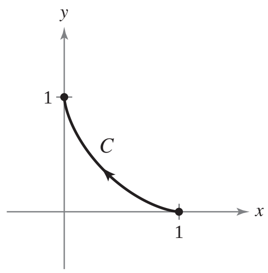


Figura para 36

36. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$

C: $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$

37. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

C: triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj. (*Sugerencia:* Ver ejercicio 17*a*.)

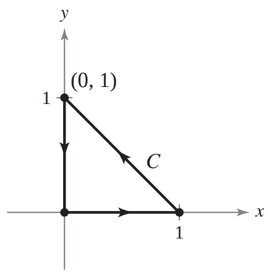


Figura para 37

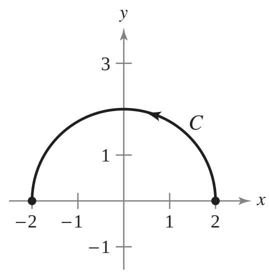


Figura para 38

38. $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

C: contorno del semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ desde $(2, 0)$ hasta $(-2, 0)$ recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj

39. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 5z\mathbf{k}$

C: $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

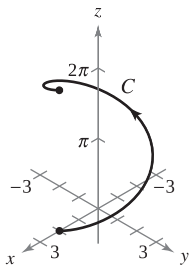


Figura para 39

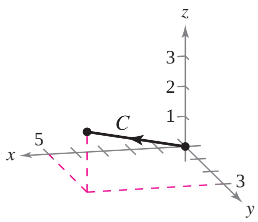


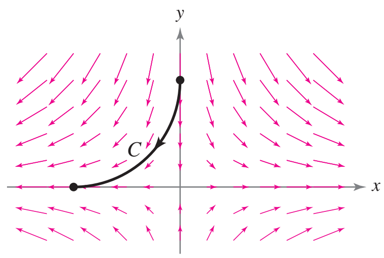
Figura para 40

40. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

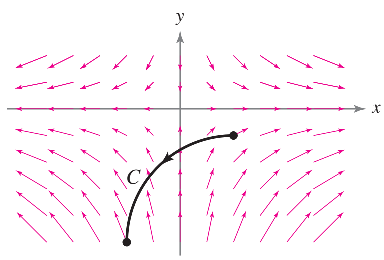
C: recta de $(0, 0, 0)$ a $(5, 3, 2)$

En los ejercicios 41 a 44, determinar si el trabajo efectuado a lo largo de la trayectoria C es positivo, negativo o cero. Explicar.

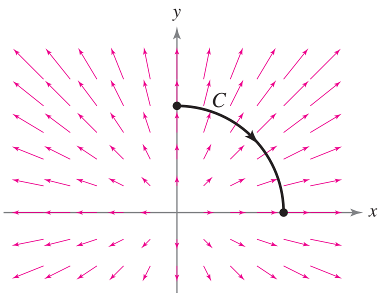
41.



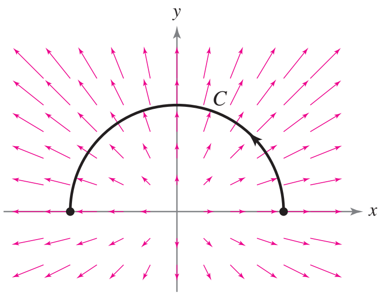
42.



43.



44.



En los ejercicios 45 y 46, para cada curva hallar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Analizar la orientación de la curva y su efecto sobre el valor de la integral.

45. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = 2t\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}, \quad 1 \leq t \leq 3$

b) $\mathbf{r}_2(t) = 2(3 - t)\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$

46. $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy^{3/2}\mathbf{j}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = (t + 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$

b) $\mathbf{r}_2(t) = (1 + 2\cos t)\mathbf{i} + (4\cos^2 t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

En los ejercicios 47 a 50, demostrar la propiedad

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

independientemente de cuáles sean los puntos inicial y final de C, si el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal al campo de fuerzas $\mathbf{F}$.

47. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$

48. $\mathbf{F}(x, y) = -3y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - t^3\mathbf{j}$

49. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 - 2x^2)\mathbf{i} + \left(x - \dfrac{y}{2}\right)\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

50. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = 3\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j}$

En los ejercicios 51 a 54, evaluar la integral de línea a lo largo de la trayectoria C dada por $x = 2t$, $y = 10t$, donde $0 \leq t \leq 1$.

51. $\displaystyle\int_C (x + 3y^2)\, dy$

52. $\displaystyle\int_C (x + 3y^2)\, dx$

53. $\displaystyle\int_C xy\, dx + y\, dy$

54. $\displaystyle\int_C (3y - x)\, dx + y^2\, dy$

En los ejercicios 55 a 62, evaluar la integral

$$\int_C (2x - y)\, dx + (x + 3y)\, dy$$

a lo largo de la trayectoria C.

55. C: eje x desde $x = 0$ hasta $x = 5$

56. C: eje y desde $y = 0$ hasta $y = 2$

57. C: los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(3, 0)$ y de $(3, 0)$ a $(3, 3)$

58. C: los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(0, -3)$ y de $(0, -3)$ a $(2, -3)$

59. C: arco sobre $y = 1 - x^2$ desde $(0, 1)$ hasta $(1, 0)$

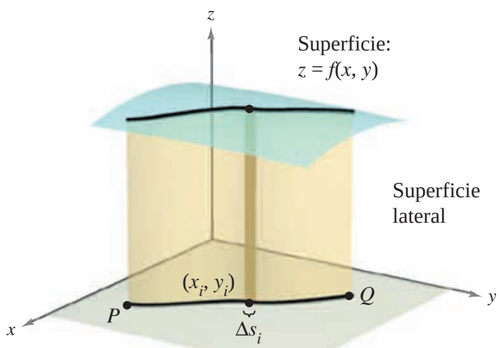
60. C: arco sobre $y = x^{3/2}$ desde $(0, 0)$ hasta $(4, 8)$

61. C: trayectoria parabólica $x = t$, $y = 2t^2$, desde $(0, 0)$ hasta $(2, 8)$

62. C: trayectoria elíptica $x = 4\operatorname{sen} t$, $y = 3\cos t$, desde $(0, 3)$ hasta $(4, 0)$

Área de una superficie lateral **En los ejercicios 63 a 70, hallar el área de la superficie lateral (ver la figura) sobre la curva C en el plano xy y bajo la superficie $z = f(x, y)$, donde**

$$\textbf{Área de la superficie lateral} = \int_C f(x, y)\, ds.$$



C: curva en el plano xy

63. $f(x, y) = h$, C: recta desde $(0, 0)$ hasta $(3, 4)$

64. $f(x, y) = y$, C: recta desde $(0, 0)$ hasta $(4, 4)$

65. $f(x, y) = xy$, C: $x^2 + y^2 = 1$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$

66. $f(x, y) = x + y$, C: $x^2 + y^2 = 1$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$

67. $f(x, y) = h$, C: $y = 1 - x^2$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$

68. $f(x, y) = y + 1$, C: $y = 1 - x^2$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$

69. $f(x, y) = xy$, C: $y = 1 - x^2$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$

70. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4$, C: $x^2 + y^2 = 4$

71. ***Diseño de motores*** Un motor de tractor tiene una pieza de acero con una base circular representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j}$. Su altura está dada por $z = 1 + y^2$. (Todas las medidas en centímetros.)

a) Hallar el área de la superficie lateral de la pieza.

b) La pieza tiene forma de capa de 0.2 centímetros de espesor. Utilizar el resultado del inciso *a*) para aproximar la cantidad de acero empleada para su fabricación.

c) Hacer un dibujo de la pieza.

72. ***Diseño de edificios*** La altura del techo de un edificio está dada por $z = 20 + \frac{1}{4}x$, y una de las paredes sigue una trayectoria representada por $y = x^{3/2}$. Calcular el área de la superficie de la pared si $0 \leq x \leq 40$. (Todas las medidas se dan en pies.)

Momentos de inercia **Considerar un cable de densidad $\rho(x, y)$ dado por la curva en el espacio**

$$C: \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y están dados por

$$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y)\, ds$$

$$I_y = \int_C x^2 \rho(x, y)\, ds.$$

En los ejercicios 73 y 74, hallar los momentos de inercia del cable dado con densidad ρ.

73. El cable se encuentra a lo largo de $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y $a > 0$, su densidad es $\rho(x, y) = 1$.

74. El cable se encuentra a lo largo de $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y $a > 0$, su densidad es $\rho(x, y) = y$.

CAS **75.** ***Investigación*** El borde exterior de un sólido con lados verticales y que descansa en el plano xy, se representa por $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + (1 + \operatorname{sen}^2 2t)\mathbf{k}$, donde todas las medidas se dan en centímetros. La intersección del plano $y = b\ (-3 < b < 3)$ con la parte superior del sólido es una recta horizontal.

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente el sólido.

b) Utilizar un sistema algebraico por computadora y aproximar el área de la superficie lateral del sólido.

c) Hallar (si es posible) el volumen del sólido.

76. ***Trabajo*** Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria $y = x^2$ desde el punto (0, 0) hasta el punto (1, 1). El campo de fuerzas $\mathbf{F}$ se mide en cinco puntos a lo largo de la trayectoria y los resultados se muestran en la tabla. Usar la regla de Simpson o una herramienta de graficación para aproximar el trabajo efectuado por el campo de fuerza.

(x, y)	$(0, 0)$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$	$(1, 1)$
$\mathbf{F}(x, y)$	$\langle 5, 0\rangle$	$\langle 3.5, 1\rangle$	$\langle 2, 2\rangle$	$\langle 1.5, 3\rangle$	$\langle 1, 5\rangle$

77. ***Trabajo*** Determinar el trabajo hecho por una persona que pesa 175 libras y que camina exactamente una revolución hacia arriba en una escalera de forma helicoidal circular de 3 pies de radio si la persona sube 10 pies.

78. ***Investigación*** Determinar el valor c tal que el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = 15[(4 - x^2y)\mathbf{i} - xy\mathbf{j}]$$

sobre un objeto que se mueve a lo largo de la trayectoria parabólica $y = c(1 - x^2)$ entre los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ sea mínimo. Comparar el resultado con el trabajo requerido para mover el objeto a lo largo de la trayectoria recta que une esos dos puntos.

Desarrollo de conceptos

79. Definir la integral de línea de una función f a lo largo de una curva suave C en el plano y en el espacio. ¿Cómo se evalúa la integral de línea como integral definida?

80. Definir una integral de línea de un campo vectorial continuo $\mathbf{F}$ sobre una curva suave C. ¿Cómo se evalúa la integral de línea como integral definida?

81. Ordenar las superficies en forma ascendente del área de la superficie lateral bajo la superficie y sobre la curva $y = \sqrt{x}$ desde (0, 0) hasta (4, 2) en el plano xy. Explicar el orden elegido sin hacer cálculo alguno.

a) $z_1 = 2 + x$ *b*) $z_2 = 5 + x$

c) $z_3 = 2$ *d*) $z_4 = 10 + x + 2y$

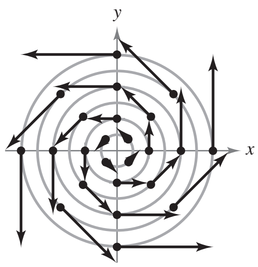
Para discusión

82. En cada uno de los incisos siguientes, determinar si el trabajo realizado para mover un objeto del primero hasta el segundo punto a través del campo de fuerzas mostrado en la figura es positivo, negativo o cero. Explicar la respuesta.

a) Desde $(-3, -3)$ hasta $(3, 3)$

b) Desde $(-3, 0)$ hasta $(0, 3)$

c) Desde $(5, 0)$ hasta $(0, 3)$



¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 83 a 86, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

83. Si C está dada por $x(t) = t$, $y(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$\int_C xy\, ds = \int_0^1 t^2\, dt.$$

84. Si $C_2 = -C_1$, entonces $\int_{C_1} f(x, y)\, ds + \int_{C_2} f(x, y)\, ds = 0$.

85. Las funciones vectoriales $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$, y $\mathbf{r}_2 = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)^2\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$, definen la misma curva.

86. Si $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$, entonces $\mathbf{F}$ y $\mathbf{T}$ son ortogonales.

87. ***Trabajo*** Considerar una partícula que se mueve a través del campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (y - x)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ del punto (0, 0) al punto (0, 1) a lo largo de la curva $x = kt(1 - t)$, $y = t$. Hallar el valor de k, tal que el trabajo realizado por el campo de fuerzas sea 1.

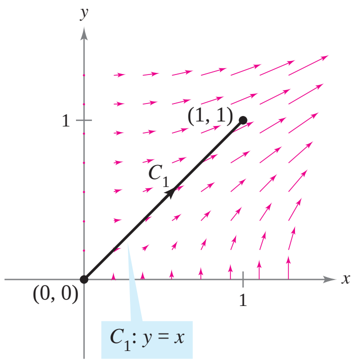
15.3 Campos vectoriales conservativos e independencia de la trayectoria

- **Comprender y utilizar el teorema fundamental de las integrales de línea.**
- **Comprender el concepto de independencia de la trayectoria.**
- **Comprender el concepto de conservación de energía.**

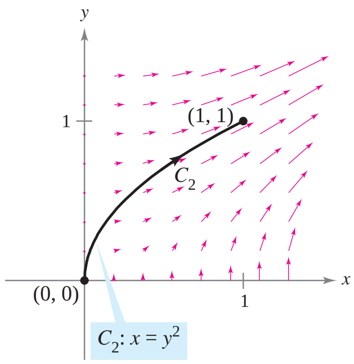
Teorema fundamental de las integrales de línea

El estudio realizado en la sección anterior indica que en un campo gravitatorio el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve entre dos puntos en el campo es independiente de la trayectoria seguida por el objeto. En esta sección se estudia una generalización importante de este resultado, a la que se le conoce como **teorema fundamental de las integrales de línea**.

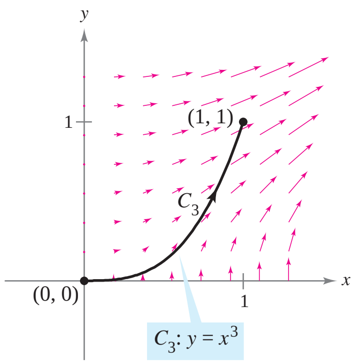
Para empezar, se presenta un ejemplo en el que se evalúa la integral de línea de un *campo vectorial conservativo* por tres trayectorias diferentes.



a)



b)



c)

Figura 15.19

EJEMPLO 1 Integral de línea de un campo vectorial conservativo

Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}xy\mathbf{i} + \frac{1}{4}x^2\mathbf{j}$$

sobre una partícula que se mueve de (0, 0) a (1, 1) a lo largo de cada una de las trayectorias, como se muestra en la figura 15.19.

a) C_1: $y = x$ ***b)*** C_2: $x = y^2$ ***c)*** C_3: $y = x^3$

Solución

a) Sea $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ para $0 \le t \le 1$, por lo que

$$d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})\,dt \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^2\mathbf{j}.$$

Entonces, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \frac{3}{4}t^2\,dt = \frac{1}{4}t^3\Big]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

b) Sea $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}$ para $0 \le t \le 1$, por lo que

$$d\mathbf{r} = \left(\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{j}\right)dt \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}t^{3/2}\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^2\mathbf{j}.$$

Entonces, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \frac{5}{8}t^{3/2}\,dt = \frac{1}{4}t^{5/2}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

c) Sea $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + \frac{1}{8}t^3\mathbf{j}$ para $0 \le t \le 2$, por lo que

$$d\mathbf{r} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{8}t^2\mathbf{j}\right)dt \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{32}t^4\mathbf{i} + \frac{1}{16}t^2\mathbf{j}.$$

Entonces, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \frac{5}{128}t^4\,dt = \frac{1}{128}t^5\Big]_0^2 = \frac{1}{4}.$$

Por tanto, el trabajo realizado por un campo vectorial conservativo es el mismo para todas las trayectorias.

En el ejemplo 1, obsérvese que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}xy\mathbf{i} + \frac{1}{4}x^2\mathbf{j}$ es conservativo porque $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$, donde $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2y$. En tales casos, el teorema siguiente establece que el valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ está dado por

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(x(1), y(1)) - f(x(0), y(0)) \\ &= \frac{1}{4} - 0 \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

NOTA El teorema fundamental de las integrales de línea es similar al teorema fundamental de cálculo (sección 4.4) que establece que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde $F'(x) = f(x)$. ■

TEOREMA 15.5 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS INTEGRALES DE LÍNEA

Sea C una curva suave a trozos contenida en una región abierta R y dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

Si $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo en R, y M y N son continuas en R, entonces,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

donde f es una función potencial de $\mathbf{F}$. Es decir, $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$.

DEMOSTRACIÓN Esta demostración es sólo para una curva suave. Para curvas suaves a trozos (o por partes), el procedimiento se lleva a cabo por separado para cada trozo suave. Como $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt \\ &= \int_a^b \left[f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt}\right] dt\end{aligned}$$

y, por la regla de la cadena (teorema 13.6), se tiene

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \frac{d}{dt}[f(x(t), y(t))]\,dt \\ &= f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)).\end{aligned}$$

El último paso es una aplicación del teorema fundamental del cálculo.

En el espacio, el teorema fundamental de las integrales de línea adopta la forma siguiente. Sea C una curva suave a trozos contenida en una región abierta Q y dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

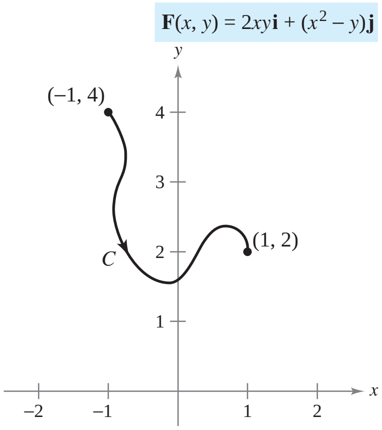
Si $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo y M, N y P son continuas, entonces

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a))\end{aligned}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$.

El teorema fundamental de las integrales de línea establece que si el campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo, entonces la integral de línea entre dos puntos cualesquiera es simplemente la diferencia entre los valores de la función *potencial* f en estos puntos.

EJEMPLO 2 Aplicación del teorema fundamental de las integrales de línea



Aplicación del teorema fundamental de las integrales de línea, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
Figura 15.20

Evaluar $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es una curva suave a trozos desde $(-1, 4)$ hasta $(1, 2)$ y

$$\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$$

como se muestra en la figura 15.20.

Solución Por el ejemplo 6 de la sección 15.1, se sabe que $\mathbf{F}$ es el gradiente de f, donde

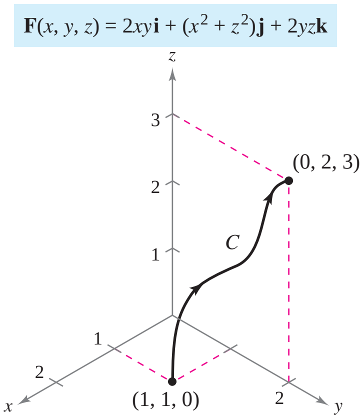
$$f(x, y) = x^2y - \frac{y^2}{2} + K.$$

Por consiguiente, $\mathbf{F}$ es conservativo, y por el teorema fundamental de las integrales de línea, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(1, 2) - f(-1, 4)\\ &= \left[1^2(2) - \frac{2^2}{2}\right] - \left[(-1)^2(4) - \frac{4^2}{2}\right]\\ &= 4.\end{aligned}$$

Nótese que no es necesario incluir una constante K como parte de f, ya que se cancela por sustracción.

EJEMPLO 3 Aplicación del teorema fundamental de las integrales de línea



Aplicación del teorema fundamental de las integrales de línea, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
Figura 15.21

Evaluar $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es una curva suave a trozos desde $(1, 1, 0)$ hasta $(0, 2, 3)$ y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$$

como se muestra en la figura 15.21.

Solución Por el ejemplo 8 en la sección 15.1, se sabe que $\mathbf{F}$ es el gradiente de f, donde $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + K$. Por consiguiente, $\mathbf{F}$ es conservativo, y por el teorema fundamental de las integrales de línea, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(0, 2, 3) - f(1, 1, 0)\\ &= [(0)^2(2) + (2)(3)^2] - [(1)^2(1) + (1)(0)^2]\\ &= 17.\end{aligned}$$

En los ejemplos 2 y 3, es importante notar que el valor de la integral de línea es el mismo para cualquier curva suave C que tenga los puntos inicial y final dados. Así, en el ejemplo 3, trátese de evaluar la integral de línea de la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}.$$

Se obtendrá

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (30t^2 + 16t - 1)\, dt\\ &= 17.\end{aligned}$$

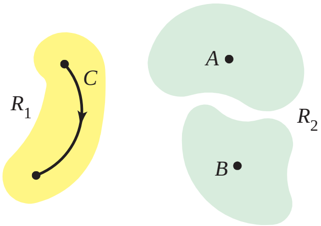


Figura 15.22

Independencia de la trayectoria

Por el teorema fundamental de las integrales de línea es evidente que si **F** es continuo y conservativo en una región abierta R, el valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es el mismo para toda curva suave a trozos C que vaya de un punto fijo de R a otro punto fijo de R. Esto se describe diciendo que la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es **independiente de la trayectoria** en la región R.

Una región en el plano (o en el espacio) es **conexa** si cada dos puntos en la región pueden ser unidos por una curva suave a trozos que se encuentre completamente dentro de la región, como se muestra en la figura 15.22. En regiones abiertas y *conexas*, la independencia de la trayectoria de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es equivalente a la condición de que **F** sea conservativo.

TEOREMA 15.6 INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA Y CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS

Si **F** es continuo en una región abierta y conexa, entonces la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

es independiente de la trayectoria si y sólo si **F** es conservativo.

DEMOSTRACIÓN Si **F** es conservativo, entonces, por el teorema fundamental de las integrales de línea, la integral de línea es independiente de la trayectoria. Ahora se demuestra el recíproco para una región plana conexa R. Sea $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, y sea (x_0, y_0) un punto fijo en R. Si (x, y) es cualquier punto en R, elíjase una curva suave a trozos C que vaya de (x_0, y_0) a (x, y), y defínase f como

$$f(x, y) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M\,dx + N\,dy.$$

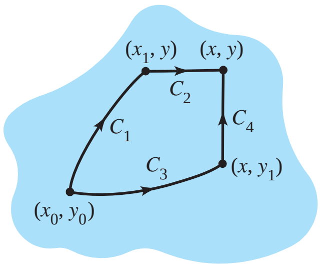


Figura 15.23

La existencia de C en R está garantizada por el hecho de que R es conexa. Se puede mostrar que f es una función potencial de **F** considerando dos trayectorias diferentes entre (x_0, y_0) y (x, y). Para la *primera* trayectoria, elíjase (x_1, y) en R tal que $x \neq x_1$. Esto es posible ya que R es abierta. Después elíjanse C_1 y C_2, como se muestra en la figura 15.23. Utilizando la independencia de la trayectoria, se sigue que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_C M\,dx + N\,dy \\ &= \int_{C_1} M\,dx + N\,dy + \int_{C_2} M\,dx + N\,dy. \end{aligned}$$

Como la primera integral no depende de x, y como $dy = 0$ en la segunda integral, se tiene

$$f(x, y) = g(y) + \int_{C_2} M\,dx$$

y entonces, la derivada parcial de f con respecto a x es $f_x(x, y) = M$. Para la *segunda* trayectoria, se elige un punto (x, y_1). Utilizando un razonamiento similar al empleado para la primera trayectoria, se concluye que $f_y(x, y) = N$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \\ &= \mathbf{F}(x, y) \end{aligned}$$

y se sigue que **F** es conservativo.

EJEMPLO 4 Trabajo en un campo de fuerzas conservativo

Para el campo de fuerzas dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \cos y\mathbf{i} - e^x \operatorname{sen} y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

mostrar que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, y calcular el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ sobre un objeto que se mueve a lo largo de una curva C desde $(0, \pi/2, 1)$ hasta $(1, \pi, 3)$.

Solución Al expresar el campo de fuerzas en la forma $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, se tiene $M = e^x \cos y$, $N = -e^x \operatorname{sen} y$ y $P = 2$, y se sigue que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial z}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -e^x \operatorname{sen} y = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Por tanto, $\mathbf{F}$ es conservativo. Si f es una función potencial de $\mathbf{F}$, entonces

$$f_x(x, y, z) = e^x \cos y$$

$$f_y(x, y, z) = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$f_z(x, y, z) = 2.$$

Integrando con respecto a x, y y z por separado, se obtiene

$$f(x, y, z) = \int f_x(x, y, z)\, dx = \int e^x \cos y\, dx = e^x \cos y + g(y, z)$$

$$f(x, y, z) = \int f_y(x, y, z)\, dy = \int -e^x \operatorname{sen} y\, dy = e^x \cos y + h(x, z)$$

$$f(x, y, z) = \int f_z(x, y, z)\, dz = \int 2\, dz = 2z + k(x, y).$$

Comparando estas tres versiones de $f(x, y, z)$, se concluye que

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + 2z + K.$$

Así, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de *cualquier* curva C desde $(0, \pi/2, 1)$ hasta $(1, \pi, 3)$ es

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \Big[e^x \cos y + 2z\Big]_{(0,\, \pi/2,\, 1)}^{(1,\, \pi,\, 3)} \\ &= (-e + 6) - (0 + 2) \\ &= 4 - e. \end{aligned}$$

¿Cuánto trabajo se realizaría si el objeto del ejemplo 4 se moviera del punto $(0, \pi/2, 1)$ al punto $(1, \pi, 3)$ y después volviera al punto de partida $(0, \pi/2, 1)$? El teorema fundamental de las integrales de línea establece que el trabajo realizado sería cero. Recuérdese que, por definición, el trabajo puede ser negativo. Así, en el momento en el que el objeto vuelve a su punto de partida, la cantidad de trabajo que se registra positivamente se cancela por la cantidad de trabajo que se registra negativamente.

Una curva C dada por $\mathbf{r}(t)$ para $a \le t \le b$ es **cerrada** si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. Por el teorema fundamental de las integrales de línea, se puede concluir que si $\mathbf{F}$ es continuo y conservativo en una región abierta R, entonces la integral de línea sobre toda curva cerrada C es 0.

NOTA El teorema 15.7 proporciona varias opciones para calcular una integral de línea de un campo vectorial conservativo. Se puede usar una función potencial, o puede ser más conveniente elegir una trayectoria particularmente simple, como un segmento de recta.

TEOREMA 15.7 CONDICIONES EQUIVALENTES

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ con primeras derivadas parciales continuas en una región abierta conexa R, y sea C una curva suave a trozos en R. Las condiciones siguientes son equivalentes.

1. $\mathbf{F}$ es conservativo. Es decir, $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función f.
2. $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria.
3. $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva *cerrada* C en R.

EJEMPLO 5 Evaluación de una integral de línea

Evaluar $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^3 + 1)\mathbf{i} + (3xy^2 + 1)\mathbf{j}$$

y C_1 es la trayectoria semicircular de (0, 0) a (2, 0), que se muestra en la figura 15.24.

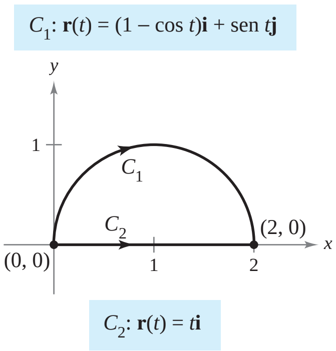


Figura 15.24

Solución Se tienen las tres opciones siguientes.

a) Se puede utilizar el método presentado en la sección anterior para evaluar la integral de línea a lo largo de la *curva dada*. Para esto, se puede usar la parametrización $\mathbf{r}(t) = (1 - \cos t)\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$, donde $0 \le t \le \pi$. Con esta parametrización, se sigue que $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\, dt = (\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j})\, dt$, y

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^4 t + \cos t + 3\operatorname{sen}^2 t \cos t - 3\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t)\, dt.$$

Esta integral desanimará a cualquiera que haya elegido esta opción.

b) Se puede intentar hallar una *función potencial* y evaluar la integral de línea mediante el teorema fundamental de las integrales de línea. Empleando la técnica demostrada en el ejemplo 4, se encuentra que la función potencial es $f(x, y) = xy^3 + x + y + K$, y, por el teorema fundamental,

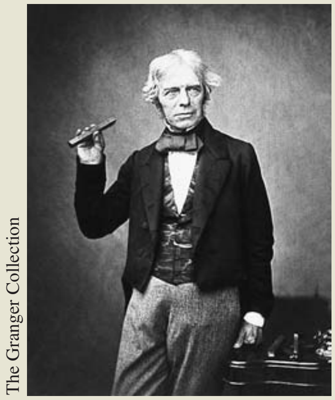
$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(2, 0) - f(0, 0) = 2.$$

c) Sabiendo que $\mathbf{F}$ es conservativo, se tiene una tercera opción. Como el valor de la integral de línea es independiente de la trayectoria, se puede reemplazar la trayectoria semicircular con una *trayectoria más simple*. Supóngase que se elige la trayectoria rectilínea C_2 desde (0, 0) hasta (2, 0). Entonces, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$, donde $0 \le t \le 2$. Así, $d\mathbf{r} = \mathbf{i}\, dt$ y $\mathbf{F}(x, y) = (y^3 + 1)\mathbf{i} + (3xy^2 + 1)\mathbf{j} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, de manera que

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 1\, dt = t\Big]_0^2 = 2.$$

Obviamente, de las tres opciones, la tercera es la más sencilla.

Conservación de la energía



MICHAEL FARADAY (1791-1867)

Varios filósofos de la ciencia han considerado que la ley de Faraday de la conservación de la energía es la mayor generalización concebida por el pensamiento humano. Muchos físicos han contribuido a nuestro conocimiento de esta ley; dos de los primeros y más importantes fueron James Prescott Joule (1818-1889) y Hermann Ludwig Helmholtz (1821-1894).

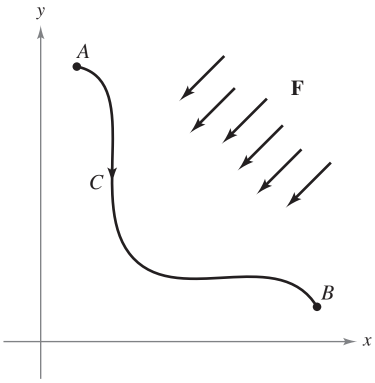
En 1840, el físico inglés Michael Faraday escribió: "En ninguna parte hay una creación o producción pura de energía sin un consumo correspondiente de algo que la proporcione." Esta declaración representa la primera formulación de una de las leyes más importantes de la física: la **ley de conservación de la energía**. En la terminología moderna, la ley dice lo siguiente: *En un campo de fuerzas conservativo, la suma de energías potencial y cinética de un objeto se mantiene constante de punto a punto.*

Se puede usar el teorema fundamental de las integrales de línea para deducir esta ley. De la física se sabe que la **energía cinética** de una partícula de masa m y velocidad v es $k = \frac{1}{2}mv^2$. La **energía potencial** p de una partícula en el punto (x, y, z) en un campo vectorial conservativo $\mathbf{F}$ se define como $p(x, y, z) = -f(x, y, z)$, donde f es la función potencial de $\mathbf{F}$. Consecuentemente, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva suave C desde A hasta B es

$$\begin{aligned} W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(x, y, z)\Big]_A^B \\ &= -p(x, y, z)\Big]_A^B \\ &= p(A) - p(B) \end{aligned}$$

como se muestra en la figura 15.25. En otras palabras, el trabajo W es igual a la diferencia entre las energías potenciales en A y B. Ahora, supóngase que $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de C desde $A = \mathbf{r}(a)$ hasta $B = \mathbf{r}(b)$. En cualquier instante t, la velocidad, aceleración y rapidez de la partícula son $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ y $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$, respectivamente. Así, por la segunda ley del movimiento de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}(t) = m(\mathbf{v}'(t))$, y el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ es

$$\begin{aligned} W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(t)\, dt = \int_a^b [m\mathbf{v}'(t)] \cdot \mathbf{v}(t)\, dt \\ &= \int_a^b m[\mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t)]\, dt \\ &= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}[\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]\, dt \\ &= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}[\|\mathbf{v}(t)\|^2]\, dt \\ &= \frac{m}{2}\Big[\|\mathbf{v}(t)\|^2\Big]_a^b \\ &= \frac{m}{2}\Big[[v(t)]^2\Big]_a^b \\ &= \frac{1}{2}m[v(b)]^2 - \frac{1}{2}m[v(a)]^2 \\ &= k(B) - k(A). \end{aligned}$$



El trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de C es

$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = p(A) - p(B)$

Figura 15.25

Igualando estos dos resultados obtenidos para W se tiene

$$p(A) - p(B) = k(B) - k(A)$$
$$p(A) + k(A) = p(B) + k(B)$$

lo cual implica que la suma de energías potencial y cinética permanece constante de punto a punto.

15.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, mostrar que el valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es el mismo para cada representación paramétrica de *C*.

1. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$
   a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
   b) $\mathbf{r}_2(\theta) = \operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2\theta\mathbf{j}, \quad 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
   a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 4$
   b) $\mathbf{r}_2(w) = w^2\mathbf{i} + w\mathbf{j}, \quad 0 \le w \le 2$
3. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
   a) $\mathbf{r}_1(\theta) = \sec\theta\mathbf{i} + \tan\theta\mathbf{j}, \quad 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$
   b) $\mathbf{r}_2(t) = \sqrt{t+1}\,\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 3$
4. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
   a) $\mathbf{r}_1(t) = (2 + t)\mathbf{i} + (3 - t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 3$
   b) $\mathbf{r}_2(w) = (2 + \ln w)\mathbf{i} + (3 - \ln w)\mathbf{j}, \quad 1 \le w \le e^3$

En los ejercicios 5 a 10, determinar si el campo vectorial es o no conservativo.

5. $\mathbf{F}(x, y) = e^x(\operatorname{sen} y\mathbf{i} + \cos y\mathbf{j})$
6. $\mathbf{F}(x, y) = 15x^2y^2\mathbf{i} + 10x^3y\mathbf{j}$
7. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{y^2}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\ln z\mathbf{i} - x\ln z\mathbf{j} + \dfrac{xy}{z}\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z\mathbf{i} + 2xyz\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} yz\mathbf{i} + xz\cos yz\mathbf{j} + xy\operatorname{sen} yz\mathbf{k}$

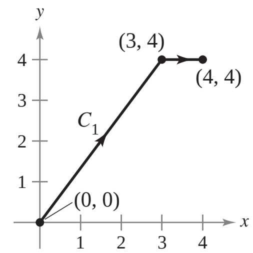
En los ejercicios 11 a 24, hallar el valor de la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

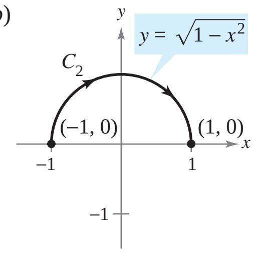
(*Sugerencia:* Si F es conservativo, la integración puede ser más sencilla a través de una trayectoria alternativa.)

11. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
   a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
   b) $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
12. $\mathbf{F}(x, y) = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}$
   a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} - (t - 3)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 3$
   b) La trayectoria cerrada que consiste en segmentos de recta desde (0, 3) hasta (0, 0), después desde (0, 0) hasta (3, 0) y desde (3, 0) hasta (0, 3)
13. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
   a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
   b) $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
   c) $\mathbf{r}_3(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
14. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + 2x^2y\mathbf{j}$
   a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}, \quad 1 \le t \le 3$
   b) $\mathbf{r}_2(t) = (t + 1)\mathbf{i} - \frac{1}{3}(t - 3)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2$
15. $\displaystyle\int_C y^2\,dx + 2xy\,dy$

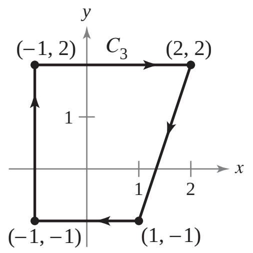
a)



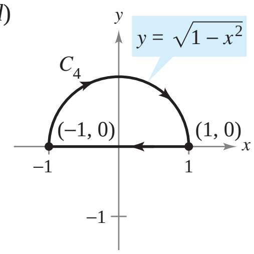
b)



c)

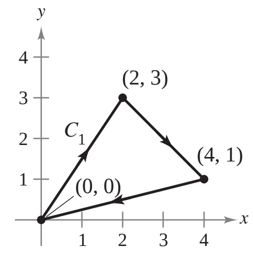


d)

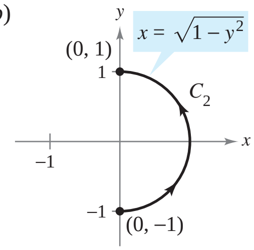


16. $\displaystyle\int_C (2x - 3y + 1)\,dx - (3x + y - 5)\,dy$

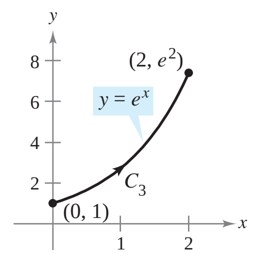
a)



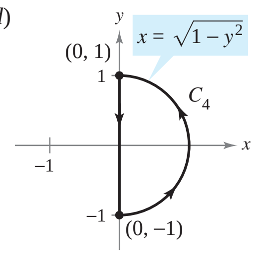
b)



c)



d)



17. $\displaystyle\int_C 2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$
   a) C: elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ desde (5, 0) hasta (0, 4)
   b) C: parábola $y = 4 - x^2$ desde (2, 0) hasta (0, 4)

18. $\int_C (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$

a) $\mathbf{r}_1(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2$

b) $\mathbf{r}_2(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 4$

b) $\mathbf{r}_2(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

b) $\mathbf{r}_2(t) = (1 - 2t)\mathbf{i} + \pi^2 t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y + x)\mathbf{i} + (x^2 - z)\mathbf{j} + (2y - 4z)\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

b) $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2t - 1)^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

b) $\mathbf{r}_2(t) = (1 - 2t)\mathbf{i} + \pi t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$

a) $\mathbf{r}_1(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

b) $\mathbf{r}_2(t) = (4 - 8t)\mathbf{i} + 3\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

24. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathrm{sen}\,z\,\mathbf{i} + x\,\mathrm{sen}\,z\,\mathbf{j} + xy\cos x\,\mathbf{k}$

a) $\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2$

b) $\mathbf{r}_2(t) = 4t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$

En los ejercicios 25 a 34, evaluar la integral de línea utilizando el teorema fundamental de las integrales de línea. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.

25. $\int_C (3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r}$

C: curva suave desde (0, 0) hasta (3, 8)

26. $\int_C [2(x + y)\mathbf{i} + 2(x + y)\mathbf{j}] \cdot d\mathbf{r}$

C: curva suave desde (–1, 1) hasta (3, 2)

27. $\int_C \cos x\,\mathrm{sen}\,y\,dx + \mathrm{sen}\,x\cos y\,dy$

C: curva suave desde $(0, -\pi)$ hasta $\left(\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

28. $\int_C \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$

C: curva suave desde (1, 1) hasta $(2\sqrt{3}, 2)$

29. $\int_C e^x\,\mathrm{sen}\,y\,dx + e^x\cos y\,dy$

C: cicloide $x = \theta - \mathrm{sen}\,\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ desde (0, 0) hasta $(2\pi, 0)$

30. $\int_C \dfrac{2x}{(x^2 + y^2)^2}\,dx + \dfrac{2y}{(x^2 + y^2)^2}\,dy$

C: círculo $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$ en sentido de las manecillas del reloj desde (7, 5) hasta (1, 5)

31. $\int_C (z + 2y)\,dx + (2x - z)\,dy + (x - y)\,dz$

a) C: segmento de recta desde (0, 0, 0) hasta (1, 1, 1)

b) C: segmento de recta de (0, 0, 0) a (0, 0, 1) a (1, 1, 1)

c) C: segmento de recta de (0, 0, 0) a (1, 0, 0) a (1, 1, 0) y a (1, 1, 1)

32. Repetir el ejercicio 31 utilizando la integral

$$\int_C zy\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$$

33. $\int_C -\mathrm{sen}\,x\,dx + z\,dy + y\,dz$

C: curva suave desde (0, 0, 0) hasta $\left(\dfrac{\pi}{2}, 3, 4\right)$

34. $\int_C 6x\,dx - 4z\,dy - (4y - 20z)\,dz$

C: curva suave desde (0, 0, 0) hasta (3, 4, 0)

Trabajo **En los ejercicios 35 y 36, hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas F al mover un objeto desde *P* hasta *Q*.**

35. $\mathbf{F}(x, y) = 9x^2y^2\mathbf{i} + (6x^3y - 1)\mathbf{j}$; $P(0, 0)$, $Q(5, 9)$

36. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{2x}{y}\mathbf{i} - \dfrac{x^2}{y^2}\mathbf{j}$; $P(-1, 1)$, $Q(3, 2)$

37. ***Trabajo*** Una piedra de 1 libra atada al extremo de una cuerda de dos pies se hace girar horizontalmente con un extremo fijo. Realiza una revolución por segundo. Hallar el trabajo realizado por la fuerza **F** que mantiene a la piedra en una trayectoria circular. [*Sugerencia:* Usar fuerza = (masa)(aceleración centrípeta).]

38. ***Trabajo*** Si $\mathbf{F}(x, y, z) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es un campo vectorial de fuerza constante, mostrar que el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la trayectoria desde P hasta Q es $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$.

39. ***Trabajo*** Para tener un medio de escape para los trabajadores en una arriesgada tarea a 50 metros sobre el nivel del suelo, se instala un tobogán de cable. Corre desde su posición hasta un punto a 50 metros de la base de la instalación donde se localizan los trabajadores. Mostrar que el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitatorio para que un hombre de 175 libras recorra la longitud del cable es el mismo en cada una de las trayectorias.

a) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (50 - t)\mathbf{j}$

b) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{50}(50 - t)^2\mathbf{j}$

40. ***Trabajo*** ¿Se puede encontrar una trayectoria para el cable del tobogán del ejercicio 39 tal que el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitatorio sea distinto de las cantidades de trabajo realizadas para las dos trayectorias dadas? Explicar por qué sí o por qué no.

Desarrollo de conceptos

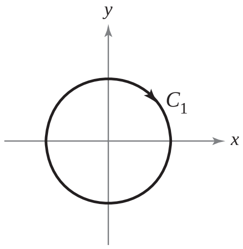
41. Enunciar el teorema fundamental de las integrales de línea.

42. ¿Qué significa que una integral de línea sea independiente de la trayectoria? Enunciar el método para determinar si una integral de línea es independiente de la trayectoria.

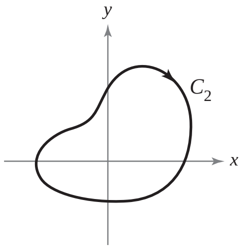
43. ***Para pensar*** Sea $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$. Encontrar el valor de la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

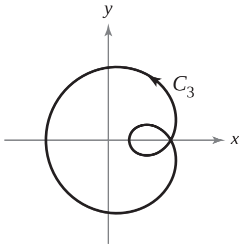
a)



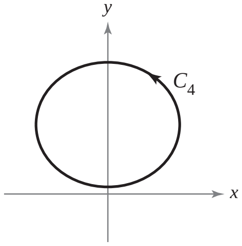
b)



c)

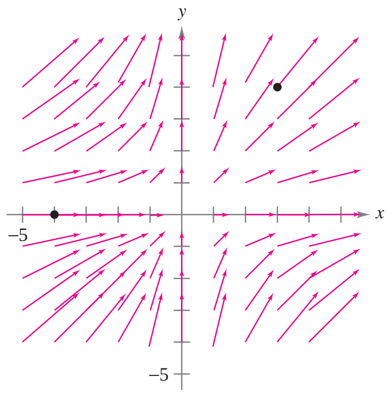


d)



Para discusión

44. Considerar el campo de fuerzas mostrado en la figura.



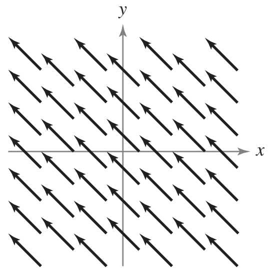
a) Argumentar verbalmente que el campo de fuerzas no es conservativo porque se pueden encontrar dos trayectorias que requieren cantidades diferentes de trabajo para mover un objeto desde $(-4, 0)$ hasta $(3, 4)$. Identificar dos trayectorias y decir cuál requiere mayor cantidad de trabajo.

b) Argumentar verbalmente que el campo de fuerzas no es conservativo porque se puede encontrar una curva cerrada C tal que

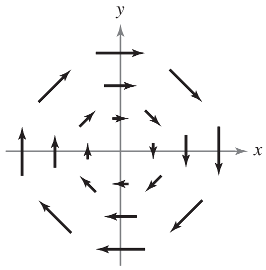
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0.$$

En los ejercicios 45 y 46, considerar el campo de fuerzas mostrado en la figura. ¿Es el campo de fuerzas conservativo? Explicar por qué sí o por qué no.

45.



46.



¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 47 a 50, determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.**

47. Si C_1, C_2 y C_3 tienen los mismos puntos inicial y final y $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2$, entonces $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_3$.

48. Si $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ y C está dada por $\mathbf{r}(t) = (4 \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi$, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

49. Si $\mathbf{F}$ es conservativo en una región R limitada o acotada por una trayectoria cerrada simple y C está contenida en R, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria.

50. Si $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ y $\partial M/\partial x = \partial N/\partial y$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

51. Una función f es *armónica* si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Demostrar que si f es armónica, entonces

$$\int_C \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy\right) = 0$$

donde C es una curva suave cerrada en el plano.

52. ***Energía potencial y cinética*** La energía cinética de un objeto que se mueve a través de un campo de fuerzas conservativo disminuye a una velocidad o ritmo de 15 unidades por minuto. ¿A qué ritmo cambia su energía potencial?

53. Sea $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$.

a) Mostrar que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

donde

$$M = \frac{y}{x^2 + y^2} \text{ y } N = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

b) Si $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ para $0 \leq t \leq \pi$, hallar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

c) Si $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ para $0 \leq t \leq \pi$, hallar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

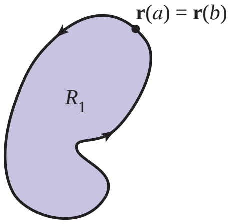
d) Si $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$, hallar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. ¿Por qué esto no contradice el teorema 15.7?

e) Mostrar que $\nabla\left(\arctan \dfrac{x}{y}\right) = \mathbf{F}$.

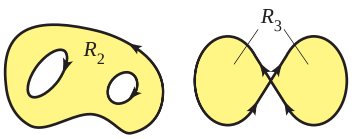
15.4 Teorema de Green

- Utilizar el teorema de Green para evaluar una integral de línea.
- Utilizar formas alternativas del teorema de Green.

Teorema de Green



Simplemente conexa



No simplemente conexas

Figura 15.26

En esta sección se estudiará el **teorema de Green**, que recibe este nombre en honor del matemático inglés George Green (1793-1841). Este teorema establece que el valor de una integral doble sobre una región *simplemente conexa* R está determinado por el valor de una integral de línea a lo largo de la frontera de R.

Una curva C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, donde $a \leq t \leq b$, es **simple** si no se corta a sí misma, es decir, $\mathbf{r}(c) \neq \mathbf{r}(d)$ para todo c y d en el intervalo abierto (a, b). Una región plana R es **simplemente conexa** si cada curva cerrada simple en R encierra sólo puntos que están en R (ver la figura 15.26).

TEOREMA 15.8 TEOREMA DE GREEN

Sea R una región simplemente conexa cuya frontera es una curva C suave a trozos, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj (es decir, C se recorre *una vez* de manera que la región R siempre quede a la *izquierda*). Si M y N tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R, entonces

$$\int_C M\,dx + N\,dy = \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.$$

DEMOSTRACIÓN Se da una demostración sólo para una región que es vertical y horizontalmente simple, como se muestra en la figura 15.27.

$$\begin{aligned}\int_C M\,dx &= \int_{C_1} M\,dx + \int_{C_2} M\,dx\\ &= \int_a^b M(x, f_1(x))\,dx + \int_b^a M(x, f_2(x))\,dx\\ &= \int_a^b [M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))]\,dx\end{aligned}$$

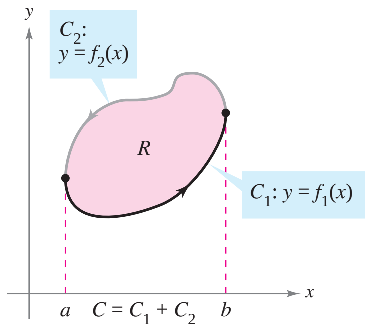
Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_R\!\!\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dA &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx\\ &= \int_a^b M(x, y)\Big]_{f_1(x)}^{f_2(x)}\,dx\\ &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))]\,dx.\end{aligned}$$

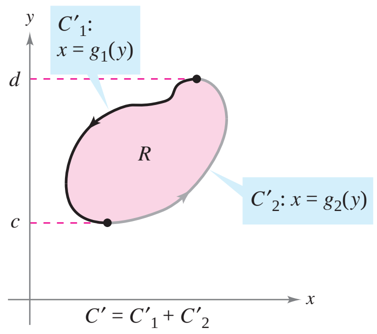
Por consiguiente,

$$\int_C M\,dx = -\int_R\!\!\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dA.$$

De manera similar, se pueden usar $g_1(y)$ y $g_2(y)$ para demostrar que $\int_C N\,dy = \int_R\!\int \partial N/\partial x\,dA$. Sumando las integrales $\int_C M\,dx$ y $\int_C N\,dy$, se llega a la conclusión establecida en el teorema.



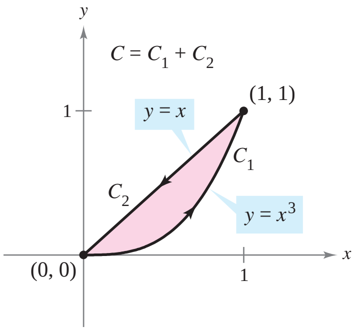
R es verticalmente simple



R es horizontalmente simple

Figura 15.27

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de Green



C es simple y cerrada, y la región *R* siempre se encuentra a la izquierda de *C*
Figura 15.28

Utilizar el teorema de Green para evaluar la integral de línea

$$\int_C y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy$$

donde C es la trayectoria desde (0, 0) hasta (1, 1) a lo largo de la gráfica de $y = x^3$ y desde (1, 1) hasta (0, 0) a lo largo de la gráfica de $y = x$, como se muestra en la figura 15.28.

Solución Como $M = y^3$ y $N = x^3 + 3xy^2$, se sigue que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2.$$

Aplicando el teorema de Green, se tiene entonces

$$\begin{aligned}\int_C y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy &= \int_R\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA\\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x} \left[(3x^2 + 3y^2) - 3y^2\right] dy\,dx\\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x} 3x^2\,dy\,dx\\ &= \int_0^1 3x^2y\Big]_{x^3}^{x}\,dx\\ &= \int_0^1 (3x^3 - 3x^5)\,dx\\ &= \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^6}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

George Green (1793-1841)

Green, autodidacta, hijo de un molinero, publicó por primera vez el teorema que lleva su nombre en 1828 en un ensayo sobre electricidad y magnetismo. En ese tiempo no había casi ninguna teoría matemática para explicar fenómenos eléctricos. "Considerando cuán deseable sería que una energía de naturaleza universal, como la electricidad, fuera susceptible, hasta donde fuera posible, de someterse al cálculo. . . me vi impulsado a intentar descubrir cualquier posible relación general entre esta función y las cantidades de electricidad en los cuerpos que la producen."

El teorema de Green no se puede aplicar a toda integral de línea. Entre las restricciones establecidas en el teorema 15.8, la curva C debe ser simple y cerrada. Sin embargo, cuando el teorema de Green es aplicable, puede ahorrar tiempo. Para ver esto, tratar de aplicar las técnicas descritas en la sección 15.2 para evaluar la integral de línea del ejemplo 1. Para esto, se necesitará escribir la integral de línea como

$$\int_C y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy =$$
$$\int_{C_1} y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy + \int_{C_2} y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy$$

donde C_1 es la trayectoria cúbica dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 1$, y C_2 es el segmento de recta dado por

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

EJEMPLO 2 Aplicación del teorema de Green para calcular trabajo

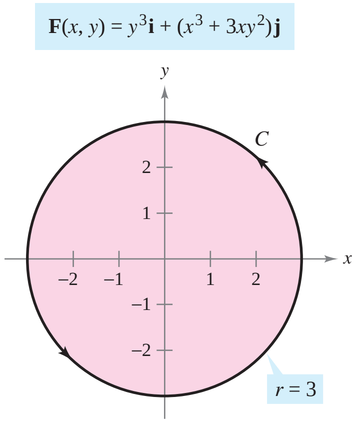


Figura 15.29

Estando sometida a la fuerza

$$\mathbf{F}(x, y) = y^3\mathbf{i} + (x^3 + 3xy^2)\mathbf{j}$$

una partícula recorre una vez el círculo de radio 3 mostrado en la figura 15.29. Aplicar el teorema de Green para hallar el trabajo realizado por **F**.

Solución Por el ejemplo 1, se sabe, de acuerdo con el teorema de Green, que

$$\int_C y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy = \iint_R 3x^2\,dA.$$

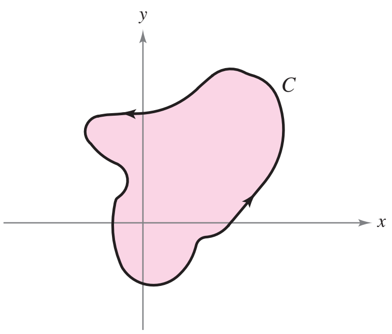
En coordenadas polares, usando $x = r\cos\theta$ y $dA = r\,dr\,d\theta$, el trabajo realizado es

$$\begin{aligned}
W = \iint_R 3x^2\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 3(r\cos\theta)^2\,r\,dr\,d\theta\\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta\\
&= 3\int_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\cos^2\theta\Big]_0^3\,d\theta\\
&= 3\int_0^{2\pi}\frac{81}{4}\cos^2\theta\,d\theta\\
&= \frac{243}{8}\int_0^{2\pi}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta\\
&= \frac{243}{8}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}\\
&= \frac{243\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Al evaluar integrales de línea sobre curvas cerradas, recuérdese que en campos vectoriales conservativos (campos en los que $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$), el valor de la integral de línea es 0. Éste es fácil de ver a partir de lo establecido en el teorema de Green:

$$\int_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dA = 0.$$

EJEMPLO 3 Teorema de Green y campos vectoriales conservativos



C es cerrada
Figura 15.30

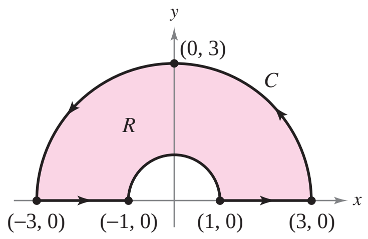
Evaluar la integral de línea

$$\int_C y^3\,dx + 3xy^2\,dy$$

donde C es la trayectoria mostrada en la figura 15.30.

Solución A partir de esta integral de línea, $M = y^3$ y $N = 3xy^2$. Así que, $\partial N/\partial x = 3y^2$ y $\partial M/\partial y = 3y^2$. Esto implica que el campo vectorial $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo, y como C es cerrada, se concluye que

$$\int_C y^3\,dx + 3xy^2\,dy = 0.$$



C es suave a trozos
Figura 15.31

EJEMPLO 4 Aplicación del teorema de Green para una curva suave a trozos (o por partes)

Evaluar

$$\int_C (\arctan x + y^2)\, dx + (e^y - x^2)\, dy$$

donde C es la trayectoria que encierra la región anular mostrada en la figura 15.31.

Solución En coordenadas polares, R está dada por $1 \le r \le 3$ para $0 \le \theta \le \pi$. Y,

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -2x - 2y = -2(r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta).$$

Así, por el teorema de Green,

$$\begin{aligned}
\int_C (\arctan x + y^2)\, dx + (e^y - x^2)\, dy &= \int_R\!\!\int -2(x + y)\, dA \\
&= \int_0^{\pi}\!\!\int_1^3 -2r(\cos\theta + \text{sen}\,\theta) r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} -2(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\frac{r^3}{3}\bigg]_1^3 d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(-\frac{52}{3}\right)(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\, d\theta \\
&= -\frac{52}{3}\Big[\text{sen}\,\theta - \cos\theta\Big]_0^{\pi} \\
&= -\frac{104}{3}.
\end{aligned}$$

En los ejemplos 1, 2 y 4, el teorema de Green se utilizó para evaluar integrales de línea como integrales dobles. También se puede utilizar el teorema para evaluar integrales dobles como integrales de línea. Una aplicación útil se da cuando $\partial N/\partial x - \partial M/\partial y = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_C M\, dx + N\, dy &= \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \\
&= \int_R\!\!\int 1\, dA \qquad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \\
&= \text{área de la región } R
\end{aligned}$$

Entre las muchas opciones para M y N que satisfacen la condición establecida, la opción de $M = -y/2$ y $N = x/2$ da la siguiente integral de línea para el área de la región R.

TEOREMA 15.9 INTEGRAL DE LÍNEA PARA EL ÁREA

Si R es una región plana limitada o acotada por una curva simple C, cerrada y suave a trozos, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces el área de R está dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx.$$

EJEMPLO 5 Hallar el área mediante una integral de línea

Usar una integral de línea para hallar el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

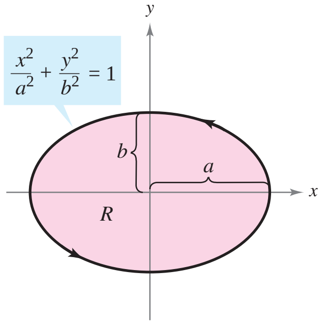


Figura 15.32

Solución Utilizando la figura 15.32, a la trayectoria elíptica se le puede inducir una orientación en sentido contrario a las manecillas del reloj haciendo

$$x = a\cos t \quad \text{y} \quad y = b\,\text{sen}\,t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Por tanto, el área es

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos t)(b\cos t)\,dt - (b\,\text{sen}\,t)(-a\,\text{sen}\,t)\,dt] \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \text{sen}^2\,t)\,dt \\ &= \frac{ab}{2}\Big[t\Big]_0^{2\pi} \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

El teorema de Green puede extenderse para cubrir algunas regiones que no son simplemente conexas. Esto se demuestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6 El teorema de Green extendido a una región con un orificio

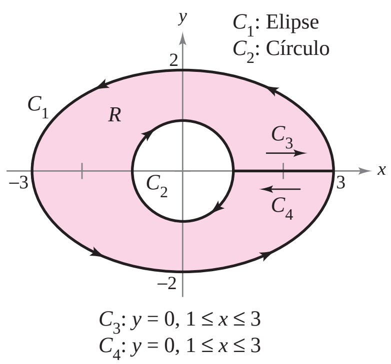


Figura 15.33

Sea R la región interior a la elipse $(x^2/9) + (y^2/4) = 1$ y exterior al círculo $x^2 + y^2 = 1$. Evaluar la integral de línea

$$\int_C 2xy\,dx + (x^2 + 2x)\,dy$$

donde $C = C_1 + C_2$ es la frontera de R, como se muestra en la figura 15.33.

Solución Para empezar, se pueden introducir los segmentos de recta C_3 y C_4, como se muestra en la figura 15.33. Nótese que como las curvas C_3 y C_4 tienen orientaciones opuestas, las integrales de línea sobre ellas se cancelan entre sí. Además, se puede aplicar el teorema de Green a la región R utilizando la frontera $C_1 + C_4 + C_2 + C_3$ para obtener

$$\begin{aligned} \int_C 2xy\,dx + (x^2 + 2x)\,dy &= \int\!\!\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \\ &= \int\!\!\int_R (2x + 2 - 2x)\,dA \\ &= 2\int\!\!\int_R dA \\ &= 2(\text{área de } R) \\ &= 2(\pi ab - \pi r^2) \\ &= 2[\pi(3)(2) - \pi(1^2)] \\ &= 10\pi. \end{aligned}$$

En la sección 15.1 se estableció una condición necesaria y suficiente para campos vectoriales conservativos. Ahí sólo se presentó una dirección de la demostración. Ahora se puede dar la otra dirección, usando el teorema de Green. Sea $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ definido en un disco abierto R. Se quiere demostrar que si M y N tienen primeras derivadas parciales continuas y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

entonces $\mathbf{F}$ es conservativo. Supóngase que C es una trayectoria cerrada que forma la frontera de una región conexa contenida en R. Entonces, usando el hecho de que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, se puede aplicar el teorema de Green para concluir que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C M\,dx + N\,dy \\ &= \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \\ &= 0.\end{aligned}$$

Esto es, a su vez, equivalente a mostrar que $\mathbf{F}$ es conservativo (ver teorema 15.7).

Formas alternativas del teorema de Green

Esta sección concluye con la deducción de dos formulaciones vectoriales del teorema de Green para regiones en el plano. La extensión de estas formas vectoriales a tres dimensiones es la base del estudio en el resto de las secciones de este capítulo. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en el plano, se puede escribir

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

por lo que el rotacional de $\mathbf{F}$, como se describió en la sección 15.1, está dada por

$$\begin{aligned}\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\partial N}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

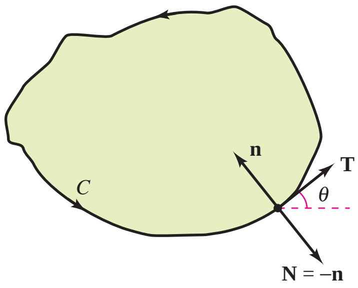
$$\begin{aligned}(\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} &= \left[-\frac{\partial N}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right] \cdot \mathbf{k} \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.\end{aligned}$$

Con condiciones apropiadas sobre $\mathbf{F}$, C y R, se puede escribir el teorema de Green en forma vectorial

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \\ &= \int_R\!\!\int (\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA.\end{aligned}$$

Primera forma alternativa.

La extensión de esta forma vectorial del teorema de Green a superficies en el espacio da lugar al **teorema de Stokes**, que se estudia en la sección 15.8.



$\mathbf{T} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$
$\mathbf{n} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j}$
$\quad = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$
$\mathbf{N} = \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j}$
Figura 15.34

Para la segunda forma vectorial del teorema de Green, supónganse las mismas condiciones sobre $\mathbf{F}$, C y R. Utilizando el parámetro longitud de arco s para C, se tiene $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$. Por tanto, un vector unitario tangente $\mathbf{T}$ a la curva C está dado por $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{T} = x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}$. En la figura 15.34 se puede ver que el vector unitario normal *exterior* $\mathbf{N}$ puede entonces escribirse como

$$\mathbf{N} = y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, a $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ se le puede aplicar el teorema de Green para obtener

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds &= \int_a^b (M\mathbf{i} + N\mathbf{j})\cdot(y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j})\,ds \\
&= \int_a^b \left(M\frac{dy}{ds} - N\frac{dx}{ds}\right) ds \\
&= \int_C M\,dy - N\,dx \\
&= \int_C -N\,dx + M\,dy \\
&= \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA \qquad \text{Teorema de Green.} \\
&= \int_R\!\!\int \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA.
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds = \int_R\!\!\int \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA. \qquad \text{Segunda forma alternativa.}$$

La generalización de esta forma a tres dimensiones se llama **teorema de la divergencia**, discutido en la sección 15.7. En las secciones 15.7 y 15.8 se analizarán las interpretaciones físicas de divergencia y del rotacional.

15.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, comprobar el teorema de Green evaluando ambas integrales

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy = \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

sobre la trayectoria dada.

1. C: frontera de la región que yace entre las gráficas de $y = x$ y $y = x^2$
2. C: frontera de la región que yace entre las gráficas de $y = x$ y $y = \sqrt{x}$
3. C: cuadrado con vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)
4. C: rectángulo con vértices (0, 0), (3, 0), (3, 4), (0, 4)

CAS **En los ejercicios 5 y 6, verificar el teorema de Green utilizando un sistema algebraico por computadora y evaluar ambas integrales**

$$\int_C xe^y\,dx + e^x\,dy = \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

sobre la trayectoria dada.

5. C: circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 4$
6. C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ y $y = x^3$ en el primer cuadrante

En los ejercicios 7 a 10, utilizar el teorema de Green para evaluar la integral

$$\int_C (y - x)\,dx + (2x - y)\,dy$$

sobre la trayectoria dada.

7. C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ y $y = x^2 - 2x$
8. C: $x = 2\cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$
9. C: frontera de la región interior al rectángulo acotado por $x = -5$, $x = 5$, $y = -3$ y $y = 3$, y exterior al cuadrado acotado por $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$ y $y = 1$.
10. C: frontera de la región interior al semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$ y exterior al semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$

En los ejercicios 11 a 20, utilizar el teorema de Green para evaluar la integral de línea.

11. $\displaystyle\int_C 2xy\,dx + (x + y)\,dy$

C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = 0$ y $y = 1 - x^2$

12. $\displaystyle\int_C y^2\,dx + xy\,dy$

C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = 0$, $y = \sqrt{x}$ y $x = 9$

13. $\displaystyle\int_C (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy$

C: $x^2 + y^2 = 16$

14. $\displaystyle\int_C (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy$

C: $r = 1 + \cos\theta$

15. $\displaystyle\int_C e^x \cos 2y\,dx - 2e^x \operatorname{sen} 2y\,dy$

C: $x^2 + y^2 = a^2$

16. $\displaystyle\int_C 2\arctan\frac{y}{x}\,dx + \ln(x^2 + y^2)\,dy$

C: $x = 4 + 2\cos\theta$, $y = 4 + \operatorname{sen}\theta$

17. $\displaystyle\int_C \cos y\,dx + (xy - x\operatorname{sen} y)\,dy$

C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ y $y = \sqrt{x}$

18. $\displaystyle\int_C (e^{-x^2/2} - y)\,dx + (e^{-y^2/2} + x)\,dy$

C: frontera de la región comprendida entre las gráficas del círculo $x = 6\cos\theta$, $y = 6\operatorname{sen}\theta$ y la elipse $x = 3\cos\theta$, $y = 2\operatorname{sen}\theta$

19. $\displaystyle\int_C (x - 3y)\,dx + (x + y)\,dy$

C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$

20. $\displaystyle\int_C 3x^2e^y\,dx + e^y\,dy$

C: frontera de la región comprendida entre los cuadrados cuyos vértices son $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ y $(1, -1)$, y $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$ y $(2, -2)$

Trabajo **En los ejercicios 21 a 24, utilizar el teorema de Green para calcular el trabajo realizado por la fuerza F sobre una partícula que se mueve, en sentido contrario a las manecillas del reloj, por la trayectoria cerrada *C*.**

21. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$

C: $x^2 + y^2 = 1$

22. $\mathbf{F}(x, y) = (e^x - 3y)\mathbf{i} + (e^y + 6x)\mathbf{j}$

C: $r = 2\cos\theta$

23. $\mathbf{F}(x, y) = (x^{3/2} - 3y)\mathbf{i} + \left(6x + 5\sqrt{y}\right)\mathbf{j}$

C: contorno del triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(5, 0)$ y $(0, 5)$

24. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + y)\mathbf{i} + 4xy^2\,\mathbf{j}$

C: frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 9$

Área **En los ejercicios 25 a 28, utilizar una integral de línea para hallar el área de la región *R*.**

25. R: región acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = a^2$

26. R: triángulo acotado por las gráficas de $x = 0$, $3x - 2y = 0$ y $x + 2y = 8$

27. R: región acotada por las gráficas de $y = 5x - 3$ y $y = x^2 + 1$

28. R: región interior al lazo de la hoja o folio de Descartes acotada por la gráfica de

$$x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$$

Desarrollo de conceptos

29. Enunciar el teorema de Green.

30. Dar la integral de línea para el área de una región R acotada por una curva simple suave a trozos C.

En los ejercicios 31 y 32, utilizar el teorema de Green para verificar las fórmulas de las integrales de línea.

31. El centroide de una región de área A acotada por una trayectoria simple cerrada C es

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\int_C x^2\,dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\int_C y^2\,dx.$$

32. El área de una región plana acotada por la trayectoria simple cerrada C dada en coordenadas polares es $A = \frac{1}{2}\int_C r^2\,d\theta$.

CAS ***Centroide*** **En los ejercicios 33 a 36, utilizar un sistema algebraico por computadora y los resultados del ejercicio 31 para hallar el centroide de la región.**

33. R: región acotada por las gráficas de $y = 0$ y $y = 4 - x^2$

34. R: región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = 0$

35. R: región acotada por las gráficas de $y = x^3$ y $y = x$, $0 \le x \le 1$

36. R: triángulo cuyos vértices son $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y (b, c), donde $-a \le b \le a$

CAS ***Área*** **En los ejercicios 37 a 40, utilizar un sistema algebraico por computadora y los resultados del ejercicio 32 para hallar el área de la región acotada por la gráfica de la ecuación polar.**

37. $r = a(1 - \cos\theta)$

38. $r = a\cos 3\theta$

39. $r = 1 + 2\cos\theta$ (lazo interior)

40. $r = \dfrac{3}{2 - \cos\theta}$

41. *a*) Evaluar $\displaystyle\int_{C_1} y^3\,dx + (27x - x^3)\,dy$, donde C_1 es el círculo unitario dado por $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

b) Encontrar el valor máximo de $\displaystyle\int_C y^3\,dx + (27x - x^3)\,dy$, donde C es cualquier curva cerrada en el plano xy, orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Para discusión

42. Para cada trayectoria dada, verificar el teorema de Green al demostrar que

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy = \int_R\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.$$

Para cada trayectoria, ¿cuál de las integrales es más fácil evaluar? Explicar.

a) *C:* triángulo con vértices (0, 0), (4, 0), (4, 4)

b) *C:* círculo dado por $x^2 + y^2 = 1$

43. ***Para pensar*** Sea

$$I = \int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$$

donde C es una circunferencia orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Mostrar que $I = 0$ si C no contiene el origen. ¿Cuál es el valor de I si C contiene al origen?

44. *a*) Sea C el segmento de recta que une (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Mostrar que

$$\int_C -y\,dx + x\,dy = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

b) Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ los vértices de un polígono. Demostrar que el área encerrada es

$$\tfrac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)].$$

Área **En los ejercicios 45 y 46, utilizar el resultado del ejercicio 44*b* para hallar el área encerrada por el polígono cuyos vértices se dan.**

45. Pentágono: (0, 0), (2, 0), (3, 2), (1, 4), (−1, 1)

46. Hexágono: (0, 0), (2, 0), (3, 2), (2, 4), (0, 3), (−1, 1)

En los ejercicios 47 y 48, demostrar la identidad, donde *R* es una región simplemente conexa con frontera *C*. Suponer que las derivadas parciales requeridas de las funciones escalares *f* y *g* son continuas. Las expresiones $D_{\mathbf{N}} f$ y $D_{\mathbf{N}} g$ son las derivadas en dirección del vector normal exterior N de *C*, y se definen por $D_{\mathbf{N}} f = \nabla f \cdot \mathbf{N}$ y $D_{\mathbf{N}} g = \nabla g \cdot \mathbf{N}$.

47. Primera identidad de Green:

$$\int_R\int (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\,dA = \int_C f D_{\mathbf{N}} g\,ds$$

[*Sugerencia:* Utilizar la segunda forma alternativa del teorema de Green y la propiedad div $(f\mathbf{G}) = f\,\text{div}\,\mathbf{G} + \nabla f \cdot \mathbf{G}$.]

48. Segunda identidad de Green:

$$\int_R\int (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dA = \int_C (f D_{\mathbf{N}} g - g D_{\mathbf{N}} f)\,ds$$

(*Sugerencia:* Utilizar la primera identidad de Green, dada en el ejercicio 47, dos veces.)

49. Utilizar el teorema de Green para demostrar que

$$\int_C f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

si f y g son funciones derivables y C es una trayectoria cerrada simple suave a trozos.

50. Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, donde M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa R. Demostrar que si C es cerrada, simple y suave, y $N_x = M_y$, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

PROYECTO DE TRABAJO

Funciones hiperbólicas y trigonométricas

a) Dibujar la curva plana representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \cosh t\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\,\mathbf{j}$ en el intervalo $0 \le t \le 5$. Mostrar que la ecuación rectangular que corresponde a $\mathbf{r}(t)$ es la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Verificar el dibujo utilizando una herramienta de graficación para representar la hipérbola.

b) Sea $P = (\cosh \phi, \operatorname{senh} \phi)$ el punto de la hipérbola correspondiente a $\mathbf{r}(\phi)$ para $\phi > 0$. Utilizar la fórmula para el área

$$A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$

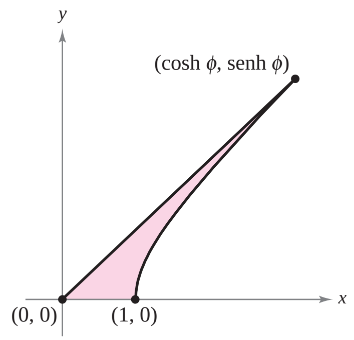
para verificar que el área de la región mostrada en la figura es $\frac{1}{2}\phi$.

c) Mostrar que el área de la región indicada está también dada por la integral

$$A = \int_0^{\operatorname{senh}\phi} \left[\sqrt{1 + y^2} - (\coth \phi)y\right] dy.$$

Confirmar la respuesta del inciso *b*) aproximando esta integral numéricamente para $\phi = 1, 2, 4$ y 10.

d) Considerar la circunferencia unitaria dada por $x^2 + y^2 = 1$. Sea θ el ángulo formado por el eje x y el radio a (x, y). El área del sector correspondiente es $\frac{1}{2}\theta$. Es decir, las funciones trigonométricas $f(\theta) = \cos \theta$ y $g(\theta) = \operatorname{sen} \theta$ podrían haber sido definidas como las coordenadas del punto $(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ en el círculo unitario que determina un sector de área $\frac{1}{2}\theta$. Escribir un párrafo breve explicando cómo definir las funciones hiperbólicas de una manera similar, utilizando la "hipérbola unitaria" $x^2 - y^2 = 1$.



15.5 Superficies paramétricas

- **Comprender la definición y esbozar la gráfica de una superficie paramétrica.**
- **Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar una superficie.**
- **Hallar un vector normal y un plano tangente a una superficie paramétrica.**
- **Hallar el área de una superficie paramétrica.**

Superficies paramétricas

Ya se sabe representar una curva en el plano o en el espacio mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas o, equivalentemente, por una función vectorial.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$ Curva en el plano.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$ Curva en el espacio.

En esta sección se aprenderá a representar una superficie en el espacio mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas o mediante una función vectorial. Obsérvese que en el caso de las curvas, la función vectorial **r** es función de un *solo* parámetro t. En el caso de las superficies, la función vectorial es función de *dos* parámetros u y v.

DEFINICIÓN DE SUPERFICIE PARAMÉTRICA

Sean x, y y z funciones de u y v, continuas en un dominio D del plano uv. Al conjunto de puntos (x, y, z) dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$ Superficie paramétrica.

se le llama una **superficie paramétrica**. Las ecuaciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad \text{y} \quad z = z(u, v)$$ Ecuaciones paramétricas.

son las **ecuaciones paramétricas** para la superficie.

Si S es una superficie paramétrica dada por la función vectorial **r**, entonces S es trazada por el vector posición $\mathbf{r}(u, v)$ a medida que el punto (u, v) se mueve por el dominio D, como se indica en la figura 15.35.

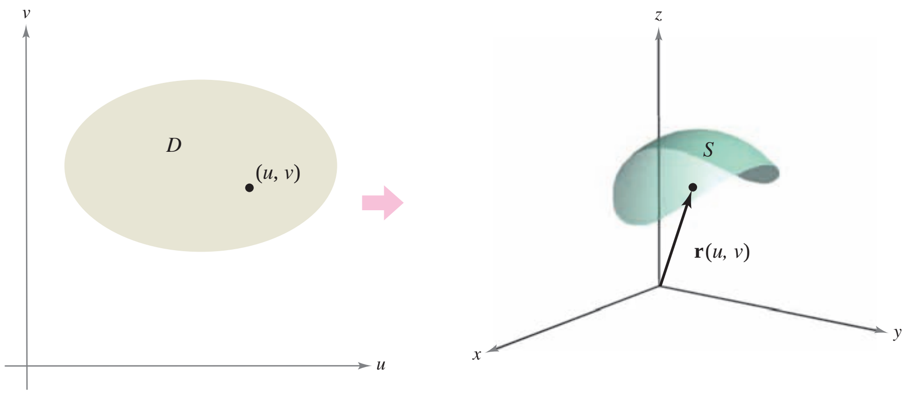


Figura 15.35

TECNOLOGÍA Algunos sistemas algebraicos por computadora dibujan superficies paramétricas. Si se tiene acceso a este tipo de software, utilícese para representar gráficamente algunas de las superficies de los ejemplos y ejercicios de esta sección.

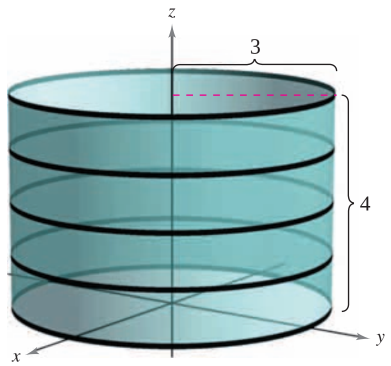


Figura 15.36

EJEMPLO 1 Trazado de una superficie paramétrica

Identificar y dibujar la superficie paramétrica S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = 3\cos u\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 4$.

Solución Como $x = 3\cos u$ y $y = 3\operatorname{sen} u$, se sabe que en cada punto (x, y, z) de la superficie, x y y están relacionados mediante la ecuación $x^2 + y^2 = 3^2$. En otras palabras, cada sección transversal de S, paralela al plano xy, es una circunferencia de radio 3, centrado en el eje z. Como $z = v$, donde $0 \leq v \leq 4$, se ve que la superficie es un cilindro circular recto de altura 4. El radio del cilindro es 3, y el eje z forma el eje del cilindro, como se muestra en la figura 15.36.

Como ocurre con las representaciones paramétricas de curvas, las representaciones paramétricas de superficies no son únicas. Es decir, hay muchos conjuntos de ecuaciones paramétricas que podrían usarse para representar la superficie mostrada en la figura 15.36.

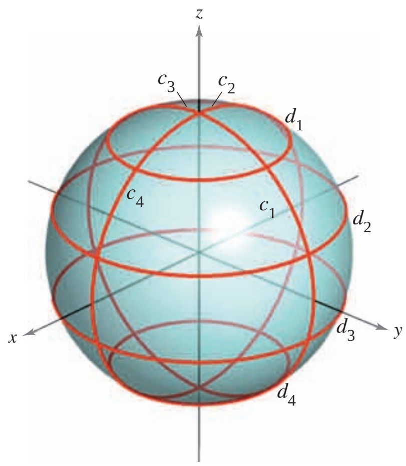


Figura 15.37

EJEMPLO 2 Trazado de una superficie paramétrica

Identificar y dibujar una superficie paramétrica S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \cos u\mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

Solución Para identificar la superficie, se puede tratar de emplear identidades trigonométricas para eliminar los parámetros. Después de experimentar un poco, se descubre que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (\operatorname{sen} u \cos v)^2 + (\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)^2 + (\cos u)^2 \\ &= \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v + \cos^2 u \\ &= \operatorname{sen}^2 u(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + \cos^2 u \\ &= \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así pues, cada punto en S se encuentra en la esfera unitaria o esfera unidad, centrada en el origen, como se muestra en la figura 15.37. Para $u = d_i$, $\mathbf{r}(u, v)$ traza circunferencias de latitud

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 d_i, \quad 0 \leq d_i \leq \pi$$

paralelos al plano xy, y para $v = c_i$, $\mathbf{r}(u, v)$ traza semicírculos de longitud (o meridianos).

NOTA Para convencerse de que la función vectorial del ejemplo 2 traza toda la esfera unitaria o esfera unidad, recuérdese que las ecuaciones paramétricas

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad z = \rho\cos\phi$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, describen la conversión de coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares, como se vio en la sección 11.7.

Ecuaciones paramétricas para superficies

En los ejemplos 1 y 2 se pidió identificar la superficie descrita por un conjunto dado de ecuaciones paramétricas. El problema inverso, el de asignar un conjunto de ecuaciones paramétricas a una superficie dada, es generalmente más difícil. Sin embargo, un tipo de superficie para la que este problema es sencillo, es una superficie dada por $z = f(x, y)$. Tal superficie se puede parametrizar como

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}.$$

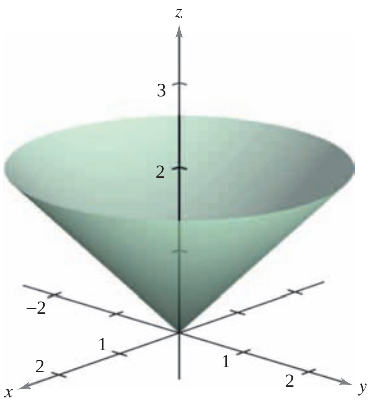


Figura 15.38

EJEMPLO 3 Representar una superficie paramétricamente

Dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para el cono dado por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

como el que se muestra en la figura 15.38.

Solución Como esta superficie está dada en la forma $z = f(x, y)$, se pueden tomar x y y como parámetros. Entonces el cono se representa por la función vectorial

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$$

donde (x, y) varía sobre todo el plano xy.

Otro tipo de superficie fácil de representar paramétricamente es una superficie de revolución. Por ejemplo, para representar la superficie generada por revolución de la gráfica de $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, en torno al eje x, se utiliza

$$x = u, \quad y = f(u)\cos v \quad \text{y} \quad z = f(u)\operatorname{sen} v$$

donde $a \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

EJEMPLO 4 Representación de una superficie de revolución paramétricamente

Dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la superficie de revolución obtenida al hacer girar

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq 10$$

en torno al eje x.

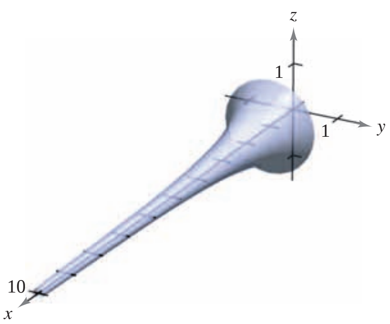


Figura 15.39

Solución Utilizar los parámetros u y v como se describió arriba para obtener

$$x = u, \quad y = f(u)\cos v = \frac{1}{u}\cos v \quad \text{y} \quad z = f(u)\operatorname{sen} v = \frac{1}{u}\operatorname{sen} v$$

donde $1 \leq u \leq 10$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. La superficie resultante es una porción de la *trompeta de Gabriel*, como se muestra en la figura 15.39.

La superficie de revolución del ejemplo 4 se forma haciendo girar la gráfica de $y = f(x)$ en torno al eje x. Para otros tipos de superficies de revolución, puede usarse una parametrización similar. Por ejemplo, para parametrizar la superficie formada por revolución de la gráfica de $x = f(z)$ en torno al eje z, se puede usar

$$z = u, \quad x = f(u)\cos v \quad \text{y} \quad y = f(u)\operatorname{sen} v.$$

Vectores normales y planos tangentes

Sea S una superficie paramétrica dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

sobre una región abierta D tal que x, y y z tienen derivadas parciales continuas en D. Las **derivadas parciales de r** con respecto a u y v están definidas como

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\mathbf{k}.$$

Cada una de estas derivadas parciales es una función vectorial que puede interpretarse geométricamente en términos de vectores tangentes. Por ejemplo, si $v = v_0$ se mantiene constante, entonces $\mathbf{r}(u, v_0)$ es una función vectorial de un solo parámetro y define una curva C_1 que se encuentra en la superficie S. El vector tangente a C_1 en el punto $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ está dado por

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

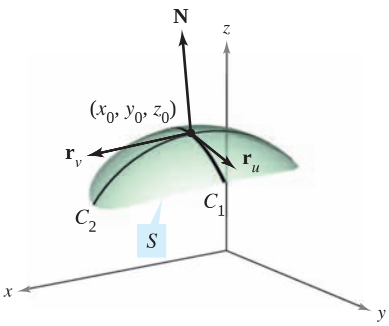


Figura 15.40

como se muestra en la figura 15.40. De manera similar, si $u = u_0$ se mantiene constante, entonces $\mathbf{r}(u_0, v)$ es una función vectorial de un solo parámetro y define una curva C_2 que se encuentra en la superficie S. El vector tangente a C_2 en el punto $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ está dado por

$$\mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}.$$

Si el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ no es $\mathbf{0}$ para todo (u, v) en D, se dice que la superficie S es **suave** y tendrá un plano tangente. De manera informal, una superficie suave es una superficie que no tiene puntos angulosos o cúspides. Por ejemplo, esferas, elipsoides y paraboloides son suaves, mientras que el cono del ejemplo 3 no es suave.

VECTOR NORMAL A UNA SUPERFICIE PARAMÉTRICA SUAVE

Sea S una superficie paramétrica suave

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

definida sobre una región abierta D en el plano uv. Sea (u_0, v_0) un punto en D. Un vector normal en el punto

$$(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$$

está dado por

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

NOTA La figura 15.40 muestra el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. El vector $\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u$ también es normal a S y apunta en la dirección opuesta.

EJEMPLO 5 Hallar un plano tangente a una superficie paramétrica

Hallar una ecuación para el plano tangente al paraboloide dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$$

en el punto (1, 2, 5).

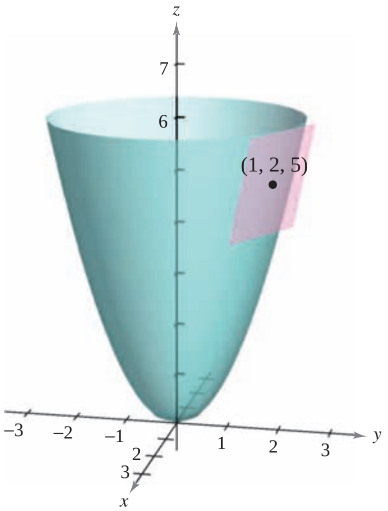


Figura 15.41

Solución El punto en el plano uv que es llevado al punto $(x, y, z) = (1, 2, 5)$ es $(u, v) = (1, 2)$. Las derivadas parciales de $\mathbf{r}$ son

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + 2u\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} + 2v\mathbf{k}.$$

El vector normal está dado por

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -2u\mathbf{i} - 2v\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

lo cual implica que el vector normal en (1, 2, 5) es $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Por tanto, una ecuación del plano tangente en (1, 2, 5) es

$$-2(x - 1) - 4(y - 2) + (z - 5) = 0$$
$$-2x - 4y + z = -5.$$

El plano tangente se muestra en la figura 15.41.

Área de una superficie paramétrica

Para definir el área de una superficie paramétrica, se puede usar un desarrollo similar al dado en la sección 14.5. Para empezar se construye una partición interna de D que consiste en n rectángulos, donde el área del rectángulo i-ésimo D_i es $\Delta A_i = \Delta u_i\, \Delta v_i$, como se muestra en la figura 15.42. En cada D_i sea (u_i, v_i) el punto más cercano al origen. En el punto $(x_i, y_i, z_i) = (x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))$ de la superficie S, se construye un plano tangente T_i. El área de la porción de S que corresponde a D_i, ΔT_i, puede ser aproximada por un paralelogramo en el plano tangente. Es decir, $\Delta T_i \approx \Delta S_i$. Por tanto, la superficie de S está dada por $\Sigma\, \Delta S_i \approx \Sigma\, \Delta T_i$. El área del paralelogramo en el plano tangente es

$$\|\Delta u_i \mathbf{r}_u \times \Delta v_i \mathbf{r}_v\| = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, \Delta u_i\, \Delta v_i$$

lo cual conduce a la definición siguiente.

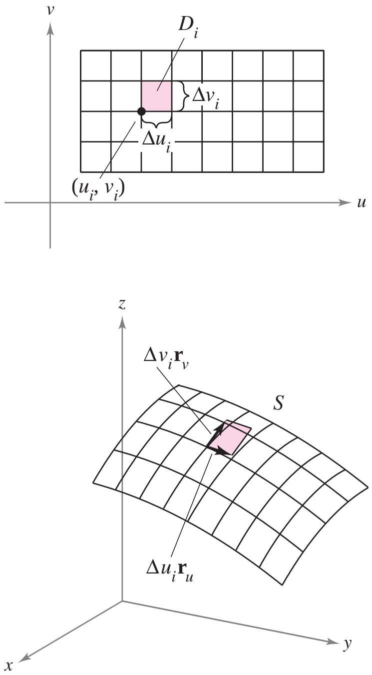


Figura 15.42

ÁREA DE UNA SUPERFICIE PARAMÉTRICA

Sea S una superficie paramétrica suave

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

definida sobre una región abierta D en el plano uv. Si cada punto de la superficie S corresponde exactamente a un punto del dominio D, entonces el **área de la superficie** S está dada por

$$\text{Área de la superficie} = \int\!\!\int_S dS = \int\!\!\int_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dA$$

donde $\mathbf{r}_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$.

Para una superficie S dada por $z = f(x, y)$, esta fórmula para el área de la superficie corresponde a la dada en la sección 14.5. Para ver esto, se puede parametrizar la superficie utilizando la función vectorial

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$$

definida sobre la región R en el plano xy. Utilizando

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f_x(x, y)\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + f_y(x, y)\mathbf{k}$$

se tiene

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x(x, y) \\ 0 & 1 & f_y(x, y) \end{vmatrix} = -f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y $\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}$. Esto implica que el área de la superficie de S es

$$\begin{aligned} \text{Área de la superficie} &= \iint_R \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| \, dA \\ &= \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} \, dA. \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Hallar el área de una superficie

NOTA La superficie del ejemplo 6 no satisface totalmente la hipótesis de que cada punto de la superficie corresponde exactamente a un punto de D. En esta superficie, $\mathbf{r}(u, 0) = \mathbf{r}(u, 2\pi)$ para todo valor fijo de u. Sin embargo, como el traslape consiste sólo en un semicírculo (que no tiene área), se puede aplicar la fórmula para el área de una superficie paramétrica.

Hallar el área de la superficie de la esfera unitaria (o esfera unidad) dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \cos u\mathbf{k}$$

donde el dominio D está dado por $0 \le u \le \pi$ y $0 \le v \le 2\pi$.

Solución Para empezar se calcula $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= \cos u \cos v\mathbf{i} + \cos u \operatorname{sen} v\mathbf{j} - \operatorname{sen} u\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_v &= -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{i} + \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{j} \end{aligned}$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos u \cos v & \cos u \operatorname{sen} v & -\operatorname{sen} u \\ -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & \operatorname{sen} u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{sen}^2 u \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \operatorname{sen} u \cos u\mathbf{k} \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \sqrt{(\operatorname{sen}^2 u \cos v)^2 + (\operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v)^2 + (\operatorname{sen} u \cos u)^2} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^4 u + \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 u} \\ &= \operatorname{sen} u. \qquad \operatorname{sen} u > 0 \text{ para } 0 \le u \le \pi. \end{aligned}$$

Por último, el área de la superficie de la esfera es

$$\begin{aligned} A = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} u \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \, dv \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

EXPLORACIÓN

Para el toro del ejemplo 7, describir la función $\mathbf{r}(u, v)$ para u fijo. Después describir la función $\mathbf{r}(u, v)$ para v fijo.

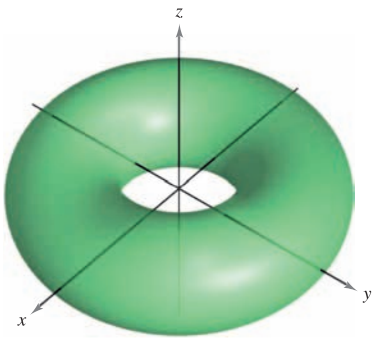


Figura 15.43

EJEMPLO 7 Hallar el área de una superficie

Hallar el área de la superficie del toro dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = (2 + \cos u)\cos v\mathbf{i} + (2 + \cos u)\operatorname{sen} v\mathbf{j} + \operatorname{sen} u\mathbf{k}$$

donde el dominio D está dado por $0 \le u \le 2\pi$ y $0 \le v \le 2\pi$. (Ver la figura 15.43.)

Solución Para empezar se calculan $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$.

$$\mathbf{r}_u = -\operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \cos u\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_v = -(2 + \cos u)\operatorname{sen} v\mathbf{i} + (2 + \cos u)\cos v\mathbf{j}$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} u \cos v & -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & \cos u \\ -(2 + \cos u)\operatorname{sen} v & (2 + \cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(2 + \cos u)(\cos v \cos u\mathbf{i} + \operatorname{sen} v \cos u\mathbf{j} + \operatorname{sen} u\mathbf{k})\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= (2 + \cos u)\sqrt{(\cos v \cos u)^2 + (\operatorname{sen} v \cos u)^2 + \operatorname{sen}^2 u} \\ &= (2 + \cos u)\sqrt{\cos^2 u(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + \operatorname{sen}^2 u} \\ &= (2 + \cos u)\sqrt{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u} \\ &= 2 + \cos u.\end{aligned}$$

Por último, el área de la superficie del toro es

$$\begin{aligned}A = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (2 + \cos u)\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi} 4\pi\, dv \\ &= 8\pi^2.\end{aligned}$$

Si la superficie S es una superficie de revolución, se puede mostrar que la fórmula para el área de la superficie, dada en la sección 7.4, es equivalente a la fórmula dada en esta sección. Por ejemplo, supóngase que f sea una función no negativa tal que f' sea continua sobre el intervalo $[a, b]$. Sea S la superficie de revolución formada por revolución de la gráfica de f, donde $a \le x \le b$, en torno al eje x. De acuerdo con la sección 7.4, se sabe que el área de la superficie está dada por

$$\text{Área de la superficie} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Para representar S paramétricamente, sea $x = u$, $y = f(u)\cos v$ y $z = f(u)\operatorname{sen} v$, donde $a \le u \le b$ y $0 \le v \le 2\pi$. Entonces,

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + f(u)\cos v\mathbf{j} + f(u)\operatorname{sen} v\mathbf{k}.$$

Tratar de mostrar que la fórmula

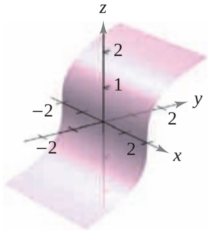
$$\text{Área de la superficie} = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dA$$

es equivalente a la fórmula dada arriba (ver ejercicio 58).

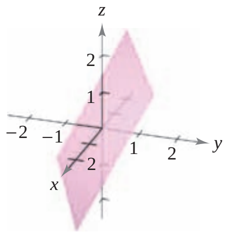
15.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, relacionar la función vectorial con su gráfica. [Las gráficas están marcadas *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) y *f*).]

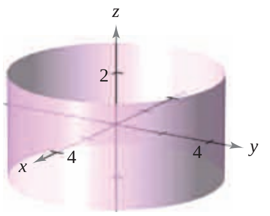
a)



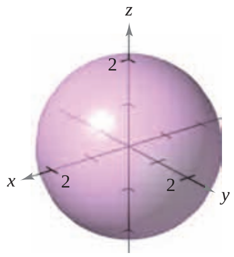
b)



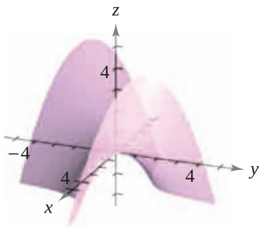
c)



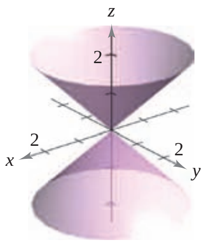
d)



e)



f)



1. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$
2. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
3. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + \frac{1}{2}(u + v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
4. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + \frac{1}{4}v^3\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
5. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos v \cos u\mathbf{i} + 2 \cos v \operatorname{sen} u\mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} v\mathbf{k}$
6. $\mathbf{r}(u, v) = 4 \cos u\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$

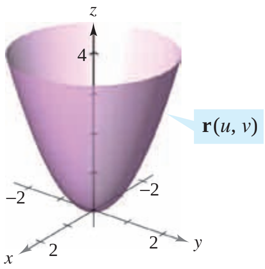
En los ejercicios 7 a 10, hallar la ecuación rectangular de la superficie por eliminación de los parámetros de la función vectorial. Identificar la superficie y dibujar su gráfica.

7. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \dfrac{v}{2}\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \frac{1}{2}u^2\mathbf{k}$
9. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} u\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(u, v) = 3 \cos v \cos u\mathbf{i} + 3 \cos v \operatorname{sen} u\mathbf{j} + 5 \operatorname{sen} v\mathbf{k}$

CAS **En los ejercicios 11 a 16, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie dada por la función vectorial.**

11. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^4\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 2\pi$
12. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos v \cos u\mathbf{i} + 4 \cos v \operatorname{sen} u\mathbf{j} + \operatorname{sen} v\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 2\pi$
13. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \operatorname{senh} u \cos v\mathbf{i} + \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \cosh u\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi$
14. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 3\pi$
15. $\mathbf{r}(u, v) = (u - \operatorname{sen} u)\cos v\mathbf{i} + (1 - \cos u)\operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
    $0 \le u \le \pi, \quad 0 \le v \le 2\pi$
16. $\mathbf{r}(u, v) = \cos^3 u \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
    $0 \le u \le \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \le v \le 2\pi$

Para pensar **En los ejercicios 17 a 20, determinar cómo la gráfica de la superficie $\mathbf{s}(u, v)$ difiere de la gráfica de $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$ (ver la figura) donde $0 \le u \le 2$ y $0 \le v \le 2\pi$. (No es necesario representar s gráficamente.)**



17. $\mathbf{s}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} - u^2\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi$
18. $\mathbf{s}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + u \operatorname{sen} v\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi$
19. $\mathbf{s}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 3, \quad 0 \le v \le 2\pi$
20. $\mathbf{s}(u, v) = 4u \cos v\mathbf{i} + 4u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi$

En los ejercicios 21 a 30, hallar una función vectorial cuya gráfica sea la superficie indicada.

21. El plano $z = y$
22. El plano $x + y + z = 6$
23. El cono $y = \sqrt{4x^2 + 9z^2}$
24. El cono $x = \sqrt{16y^2 + z^2}$
25. El cilindro $x^2 + y^2 = 25$
26. El cilindro $4x^2 + y^2 = 16$
27. El cilindro $z = x^2$
28. El elipsoide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{1} = 1$
29. La parte del plano $z = 4$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$
30. La parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$

Superficie de revolución **En los ejercicios 31 a 34, dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la superficie de revolución obtenida por revolución de la gráfica de la función en torno al eje dado.**

	Función	*Eje de revolución*
31.	$y = \frac{x}{2}, \quad 0 \le x \le 6$	eje x
32.	$y = \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4$	eje x
33.	$x = \operatorname{sen} z, \quad 0 \le z \le \pi$	eje z
34.	$z = y^2 + 1, \quad 0 \le y \le 2$	eje y

Plano tangente **En los ejercicios 35 a 38, hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie dada por la función vectorial, en el punto indicado.**

35. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \quad (1, -1, 1)$

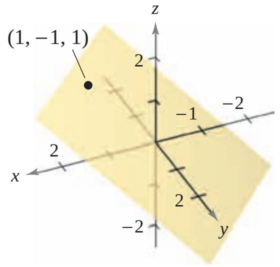


Figura para 35

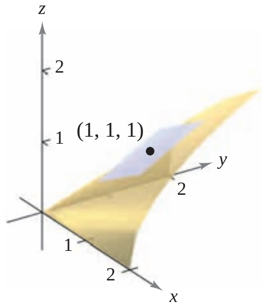
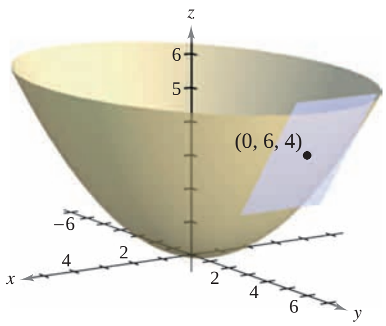


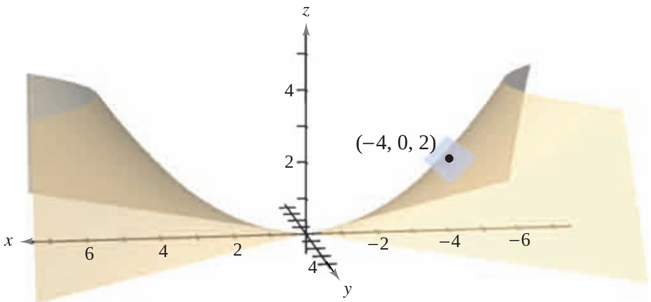
Figura para 36

36. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{uv}\,\mathbf{k}, \quad (1, 1, 1)$

37. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 3u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}, \quad (0, 6, 4)$



38. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cosh v\mathbf{i} + 2u \operatorname{senh} v\mathbf{j} + \frac{1}{2}u^2\mathbf{k}, \quad (-4, 0, 2)$



Área **En los ejercicios 39 a 46, hallar el área de la superficie sobre la región dada. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.**

39. La parte del plano $\mathbf{r}(u, v) = 4u\mathbf{i} - v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le 2$ y $0 \le v \le 1$

40. La parte del paraboloide $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le 2$ y $0 \le v \le 2\pi$

41. La parte del cilindro $\mathbf{r}(u, v) = a \cos u\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le 2\pi$ y $0 \le v \le b$

42. La esfera $\mathbf{r}(u, v) = a \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + a \cos u\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le \pi$ y $0 \le v \le 2\pi$

43. La parte del cono $\mathbf{r}(u, v) = au \cos v\mathbf{i} + au \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le b$ y $0 \le v \le 2\pi$

44. El toro $\mathbf{r}(u, v) = (a + b \cos v)\cos u\mathbf{i} + (a + b \cos v)\operatorname{sen} u\mathbf{j} + b \operatorname{sen} v\mathbf{k}$, donde $a > b$, $0 \le u \le 2\pi$, y $0 \le v \le 2\pi$

45. La superficie de revolución $\mathbf{r}(u, v) = \sqrt{u} \cos v\mathbf{i} + \sqrt{u} \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le 4$ y $0 \le v \le 2\pi$

46. La superficie de revolución $\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + u\mathbf{j} + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le \pi$ y $0 \le v \le 2\pi$

Desarrollo de conceptos

47. Definir una superficie paramétrica.

48. Dar la integral doble con las que se obtiene el área de la superficie de una superficie paramétrica sobre una región abierta D.

49. Mostrar que se puede representar el cono del ejemplo 3 de manera paramétrica mediante $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, donde $0 \le u$ y $0 \le v \le 2\pi$.

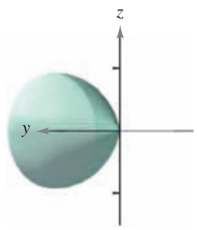
Para discusión

50. Las cuatro figuras son gráficas de la superficie
$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{j} + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{k}$,

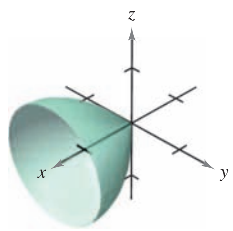
$0 \le u \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le v \le 2\pi.$

Relacionar cada una de las cuatro gráficas con el punto en el espacio desde el cual se contempla la superficie. Los cuatro puntos son (10, 0, 0), (−10,10, 0), (0, 10, 0) y (10, 10, 10).

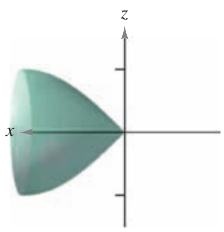
a)



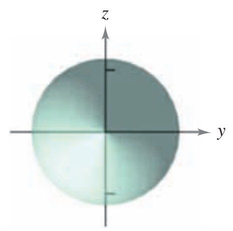
b)



c)



d)



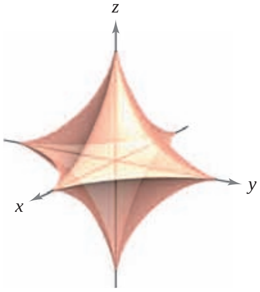
51. ***Esfera asteroidal*** Una ecuación de una **esfera asteroidal** en x, y y z es

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}.$$

Abajo se presenta una gráfica de una esfera asteroidal. Mostrar que esta superficie puede representarse paramétricamente por medio de

$$\mathbf{r}(u, v) = a\,\text{sen}^3 u \cos^3 v\mathbf{i} + a\,\text{sen}^3 u\,\text{sen}^3 v\mathbf{j} + a\cos^3 u\mathbf{k}$$

donde $0 \le u \le \pi$ y $0 \le v \le 2\pi$.



CAS **52.** Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente tres perspectivas de la gráfica de la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\mathbf{i} + u\,\text{sen}\,v\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \quad 0 \le u \le \pi, \quad 0 \le v \le \pi$$

desde los puntos (10, 0, 0), (0, 0, 10) y (10, 10, 10).

CAS **53.** ***Investigación*** Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente el toro

$$\mathbf{r}(u, v) = (a + b\cos v)\cos u\mathbf{i} + (a + b\cos v)\,\text{sen}\,u\mathbf{j} + b\,\text{sen}\,v\mathbf{k}$$

para cada conjunto de valores de a y b, donde $0 \le u \le 2\pi$ y $0 \le v \le 2\pi$. Utilizar los resultados para describir los efectos de a y b en la forma del toro.

a) $a = 4, \quad b = 1$ *b*) $a = 4, \quad b = 2$

c) $a = 8, \quad b = 1$ *d*) $a = 8, \quad b = 3$

54. ***Investigación*** Considerar la función del ejercicio 14.

a) Dibujar una gráfica de la función donde u se mantenga constante en $u = 1$. Identificar la gráfica.

b) Dibujar una gráfica de la función donde v se mantenga constante en $v = 2\pi/3$. Identificar la gráfica.

c) Suponer que una superficie está representada por la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. ¿Qué generalización se puede hacer acerca de la gráfica de la función si uno de los parámetros se mantiene constante?

55. ***Área de la superficie*** La superficie de la cúpula de un museo está dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = 20\,\text{sen}\,u\cos v\mathbf{i} + 20\,\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v\mathbf{j} + 20\cos u\mathbf{k}$$

donde $0 \le u \le \pi/3$, $0 \le v \le 2\pi$ y $\mathbf{r}$ está en metros. Hallar el área de la superficie de la cúpula.

56. Hallar una función vectorial para el hiperboloide

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

y determinar el plano tangente en (1, 0, 0).

57. Representar gráficamente y hallar el área de una vuelta completa de la rampa en espiral

$$\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\mathbf{i} + u\,\text{sen}\,v\mathbf{j} + 2v\mathbf{k}$$

donde $0 \le u \le 3$ y $0 \le v \le 2\pi$.

58. Sea f una función no negativa tal que f' es continua en el intervalo $[a, b]$. Sea S la superficie de revolución formada por revolución de la gráfica de f, donde $a \le x \le b$, en torno al eje x. Sea $x = u$, $y = f(u)\cos v$ y $z = f(u)\,\text{sen}\,v$, donde $a \le u \le b$ y $0 \le v \le 2\pi$. Entonces, S se representa paramétricamente mediante $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + f(u)\cos v\mathbf{j} + f(u)\,\text{sen}\,v\mathbf{k}$. Mostrar que las fórmulas siguientes son equivalentes.

$$\text{Área de la superficie} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

$$\text{Área de la superficie} = \int_D\!\!\int \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,dA$$

CAS **59.** ***Proyecto abierto*** Las ecuaciones paramétricas

$$x = 3 + \text{sen}\,u[7 - \cos(3u - 2v) - 2\cos(3u + v)]$$

$$y = 3 + \cos u[7 - \cos(3u - 2v) - 2\cos(3u + v)]$$

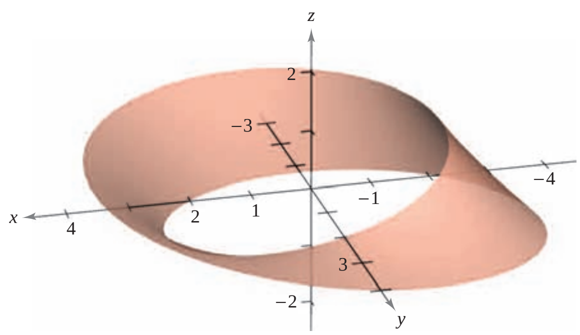
$$z = \text{sen}(3u - 2v) + 2\,\text{sen}(3u + v)$$

donde $-\pi \le u \le \pi$ y $-\pi \le v \le \pi$, representan la superficie mostrada en la figura. Tratar de crear una superficie paramétrica propia utilizando un sistema algebraico por computadora.

CAS **60.** ***Banda de Möbius*** La superficie mostrada en la figura se llama **banda de Möbius** y puede representarse mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = \left(a + u\cos\frac{v}{2}\right)\cos v,\ y = \left(a + u\cos\frac{v}{2}\right)\text{sen}\,v,\ z = u\,\text{sen}\frac{v}{2}$$

donde $-1 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$ y $a = 3$. Trate de representar gráficamente otra banda de Möbius para diferentes valores de a utilizando un sistema algebraico por computadora.



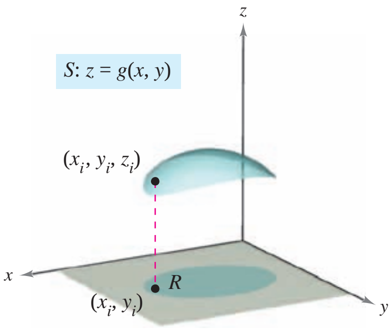
15.6 Integrales de superficie

- **Evaluar una integral de superficie como una integral doble.**
- **Evaluar integrales de superficie sobre superficies paramétricas.**
- **Determinar la orientación de una superficie.**
- **Comprender el concepto de integral de flujo.**

Integrales de superficie

El resto de este capítulo se ocupa principalmente de **integrales de superficie**. Primero se considerarán superficies dadas por $z = g(x, y)$. Más adelante, en esta sección, se considerarán superficies más generales dadas en forma paramétrica.

Sea S una superficie dada por $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy, como se muestra en la figura 15.44. Supóngase que g, g_x y g_y son continuas en todos los puntos de R y que f está definida en S. Empleando el procedimiento usado para hallar el área de una superficie en la sección 14.5, se evalúa f en (x_i, y_i, z_i) y se forma la suma



La función escalar f asigna un número a cada punto de S
Figura 15.44

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta S_i$$

donde $\Delta S_i \approx \sqrt{1 + [g_x(x_i, y_i)]^2 + [g_y(x_i, y_i)]^2}\, \Delta A_i$. Siempre que el límite de la suma anterior cuando $\|\Delta\|$ tiende a 0 exista, la **integral de superficie de f sobre S** se define como

$$\int_S\int f(x, y, z)\, dS = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta S_i.$$

Esta integral se puede evaluar mediante una integral doble.

TEOREMA 15.10 EVALUACIÓN DE UNA INTEGRAL DE SUPERFICIE

Sea S una superficie cuya ecuación es $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy. Si g, g_x y g_y son continuas en R y f es continua en S, entonces la integral de superficie de f sobre S es

$$\int_S\int f(x, y, z)\, dS = \int_R\int f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\, dA.$$

Para superficies descritas por funciones de x y z (o de y y z), al teorema 15.10 se le pueden hacer los ajustes siguientes. Si S es la gráfica de $y = g(x, z)$ y R es su proyección sobre el plano xz, entonces,

$$\int_S\int f(x, y, z)\, dS = \int_R\int f(x, g(x, z), z)\sqrt{1 + [g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2}\, dA.$$

Si S es la gráfica de $x = g(y, z)$ y R es su proyección sobre el plano yz, entonces

$$\int_S\int f(x, y, z)\, dS = \int_R\int f(g(y, z), y, z)\sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2}\, dA.$$

Si $f(x, y, z) = 1$, la integral de superficie sobre S da el área de la superficie de S. Por ejemplo, supóngase que la superficie S es el plano dado por $z = x$, donde $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le 1$. El área de la superficie de S es $\sqrt{2}$ unidades cuadradas. Trátese de verificar que $\int_S\int f(x, y, z)\, dS = \sqrt{2}$.

EJEMPLO 1 Evaluación de una integral de superficie

Evaluar la integral de superficie

$$\int_S\int (y^2 + 2yz)\, dS$$

donde S es la porción del plano $2x + y + 2z = 6$ que se encuentra en el primer octante.

Solución Para empezar se escribe S como

$$z = \frac{1}{2}(6 - 2x - y)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(6 - 2x - y).$$

Usando las derivadas parciales $g_x(x, y) = -1$ y $g_y(x, y) = -\frac{1}{2}$, se puede escribir

$$\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Utilizando la figura 15.45 y el teorema 15.10, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_S\int (y^2 + 2yz)\, dS &= \int_R\int f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\, dA\\ &= \int_R\int \left[y^2 + 2y\left(\frac{1}{2}\right)(6 - 2x - y)\right]\left(\frac{3}{2}\right) dA\\ &= 3\int_0^3\int_0^{2(3-x)} y(3 - x)\, dy\, dx\\ &= 6\int_0^3 (3 - x)^3\, dx\\ &= -\frac{3}{2}(3 - x)^4\Big]_0^3\\ &= \frac{243}{2}.\end{aligned}$$

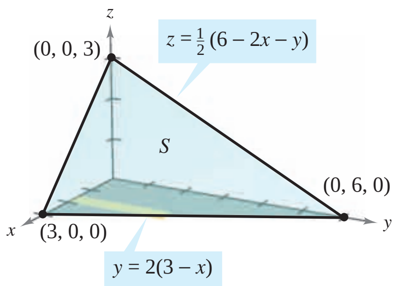


Figura 15.45

Una solución alternativa para el ejemplo 1 sería proyectar S sobre el plano yz, como se muestra en la figura 15.46. Entonces, $x = \frac{1}{2}(6 - y - 2z)$, y

$$\sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} = \frac{3}{2}.$$

Por tanto, la integral de superficie es

$$\begin{aligned}\int_S\int (y^2 + 2yz)\, dS &= \int_R\int f(g(y, z), y, z)\sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2}\, dA\\ &= \int_0^6\int_0^{(6-y)/2} (y^2 + 2yz)\left(\frac{3}{2}\right) dz\, dy\\ &= \frac{3}{8}\int_0^6 (36y - y^3)\, dy\\ &= \frac{243}{2}.\end{aligned}$$

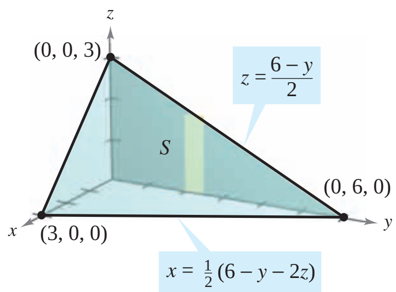


Figura 15.46

Trátese de resolver el ejemplo 1 proyectando S sobre el plano xz.

En el ejemplo 1 se podría haber proyectado la superficie S en cualquiera de los tres planos de coordenadas. En el ejemplo 2, S es una porción de un cilindro centrado en el eje x, y puede ser proyectado en el plano xz o en el plano xy.

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral de superficie

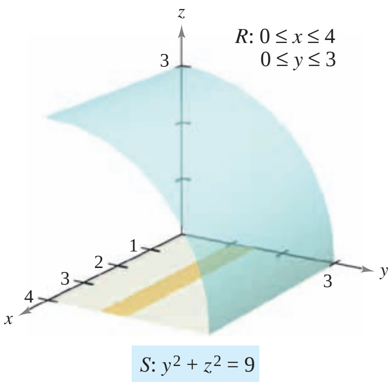


Figura 15.47

Evaluar la integral de superficie

$$\iint_S (x + z)\, dS$$

donde S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que se encuentra en el primer octante, entre $x = 0$ y $x = 4$, como se muestra en la figura 15.47.

Solución Se proyecta S sobre el plano xy, de manera que $z = g(x, y) = \sqrt{9 - y^2}$, y se obtiene

$$\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{9 - y^2}}\right)^2}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}}.$$

El teorema 15.10 no se puede aplicar directamente porque g_y no es continua en $y = 3$. Sin embargo, se puede aplicar el teorema para $0 \leq b < 3$ y después tomar el límite cuando b se aproxima a 3, como sigue.

$$\begin{aligned}
\iint_S (x + z)\, dS &= \lim_{b \to 3^-} \int_0^b \int_0^4 \left(x + \sqrt{9 - y^2}\right) \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}}\, dx\, dy \\
&= \lim_{b \to 3^-} 3 \int_0^b \int_0^4 \left(\frac{x}{\sqrt{9 - y^2}} + 1\right) dx\, dy \\
&= \lim_{b \to 3^-} 3 \int_0^b \left[\frac{x^2}{2\sqrt{9 - y^2}} + x\right]_0^4 dy \\
&= \lim_{b \to 3^-} 3 \int_0^b \left(\frac{8}{\sqrt{9 - y^2}} + 4\right) dy \\
&= \lim_{b \to 3^-} 3 \left[4y + 8 \operatorname{arcsen} \frac{y}{3}\right]_0^b \\
&= \lim_{b \to 3^-} 3 \left(4b + 8 \operatorname{arcsen} \frac{b}{3}\right) \\
&= 36 + 24\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 36 + 12\pi
\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Algunos sistemas algebraicos por computadora evalúan integrales impropias. Si se tiene acceso a uno de estos programas, utilícese para evaluar la integral impropia

$$\int_0^3 \int_0^4 \left(x + \sqrt{9 - y^2}\right) \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}}\, dx\, dy.$$

¿Se obtiene el mismo resultado que en el ejemplo 2?

Se ha visto que si la función f definida sobre la superficie S es simplemente $f(x, y, z) = 1$, la integral de superficie da el *área de la superficie S*.

$$\text{Área de la superficie} = \int_S\int 1\, dS$$

Por otro lado, si S es una lámina de densidad variable y $\rho(x, y, z)$ es la densidad en el punto (x, y, z), entonces la *masa* de la lámina está dada por

$$\text{Masa de la lámina} = \int_S\int \rho(x, y, z)\, dS.$$

EJEMPLO 3 Hallar la masa de una lámina bidimensional

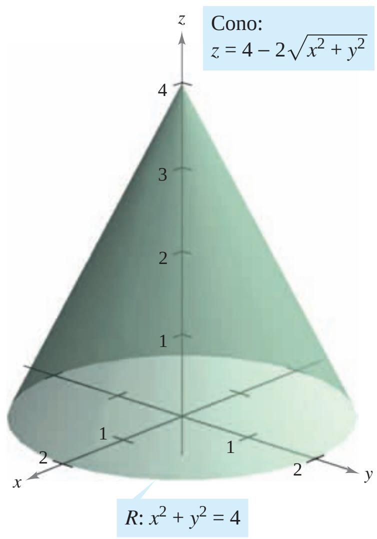


Figura 15.48

Una lámina bidimensional S en forma de cono está dada por

$$z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \le z \le 4$$

como se muestra en la figura 15.48. En todo punto de S, la densidad es proporcional a la distancia entre el punto y el eje z. Hallar la masa m de la lámina.

Solución Al proyectar S sobre el plano xy se obtiene

$$S: z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2} = g(x, y), \quad 0 \le z \le 4$$
$$R: x^2 + y^2 \le 4$$

con densidad $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$. Usando una integral de superficie, se halla que es

$$\begin{aligned}
m &= \int_S\int \rho(x, y, z)\, dS \\
&= \int_R\int k\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\, dA \\
&= k\int_R\int \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2 + y^2} + \frac{4y^2}{x^2 + y^2}}\, dA \\
&= k\int_R\int \sqrt{5}\sqrt{x^2 + y^2}\, dA \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(\sqrt{5}r\right)r\, dr\, d\theta && \text{Coordenadas polares.} \\
&= \frac{\sqrt{5}k}{3}\int_0^{2\pi} r^3\Big]_0^2\, d\theta \\
&= \frac{8\sqrt{5}k}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{8\sqrt{5}k}{3}\Big[\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}.
\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Utilizar un sistema algebraico por computadora y confirmar el resultado del ejemplo 3. El sistema algebraico por computadora *Maple* calculó la integral así:

$$k\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{5}\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = k\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(\sqrt{5}r\right)r\, dr\, d\theta = \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}$$

Superficies paramétricas e integrales de superficie

Se puede mostrar que para una superficie S dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$ Superficie paramétrica.

definida sobre una región D en el plano uv, la integral de superficie de $f(x, y, z)$ sobre S está dada por

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\, \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|\, dA.$$

Obsérvese la analogía con una integral de línea sobre una curva C en el espacio.

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$ Integral de línea.

NOTA Véase que ds y dS pueden escribirse como $ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$ y $dS = \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|\, dA$. ■

EJEMPLO 4 Evaluación de una integral de superficie

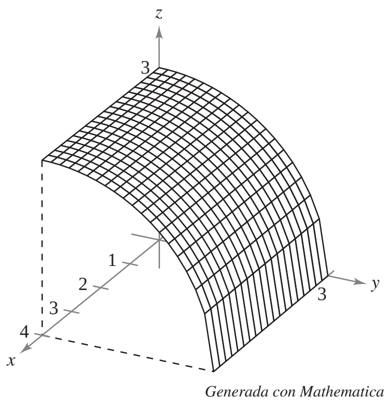


Figura 15.49

En el ejemplo 2 se mostró una evaluación de la integral de superficie

$$\iint_S (x + z)\, dS$$

donde S es la porción, en el primer octante, del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre $x = 0$ y $x = 4$ (ver la figura 15.49). Evaluar esta misma integral, ahora en forma paramétrica.

Solución En forma paramétrica, la superficie está dada por

$$\mathbf{r}(x, \theta) = x\mathbf{i} + 3\cos\theta\mathbf{j} + 3\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{k}$$

donde $0 \le x \le 4$ y $0 \le \theta \le \pi/2$. Para evaluar la integral de superficie en forma paramétrica, se empieza por calcular lo siguiente.

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -3\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j} + 3\cos\theta\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3\,\mathrm{sen}\,\theta & 3\cos\theta \end{vmatrix} = -3\cos\theta\mathbf{j} - 3\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta\| = \sqrt{9\cos^2\theta + 9\,\mathrm{sen}^2\,\theta} = 3$$

Por tanto, la integral de superficie puede ser evaluada como sigue.

$$\begin{aligned}\iint_D (x + 3\,\mathrm{sen}\,\theta)3\, dA &= \int_0^4 \int_0^{\pi/2} (3x + 9\,\mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta\, dx \\ &= \int_0^4 \Big[3x\theta - 9\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} dx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{3\pi}{2}x + 9\right) dx \\ &= \left[\frac{3\pi}{4}x^2 + 9x\right]_0^4 \\ &= 12\pi + 36\end{aligned}$$

Orientación de una superficie

Para inducir una orientación en una superficie S en el espacio se utilizan vectores unitarios normales. Se dice que una superficie es **orientable** si en todo punto de S que no sea un punto frontera puede definirse un vector unitario normal $\mathbf{N}$ de manera tal que los vectores normales varíen continuamente sobre la superficie S. Si esto es posible, S es una **superficie orientada**.

Una superficie orientable S tiene dos caras. Así, cuando se orienta una superficie, se elige uno de los dos vectores unitarios normales posibles. Si S es una superficie cerrada, como por ejemplo una esfera, se acostumbra escoger como vector unitario normal $\mathbf{N}$, el que apunta hacia fuera de la esfera.

Las superficies más comunes, como esferas, paraboloides, elipses y planos, son orientables. (Ver en el ejercicio 43 un ejemplo de una superficie que *no* es orientable.) En una superficie orientable, el vector gradiente proporciona una manera adecuada de hallar un vector unitario normal. Es decir, en una superficie orientable S dada por

$$z = g(x, y) \qquad \text{Superficie orientable.}$$

se hace

$$G(x, y, z) = z - g(x, y).$$

Entonces, S puede orientarse, ya sea por el vector unitario normal

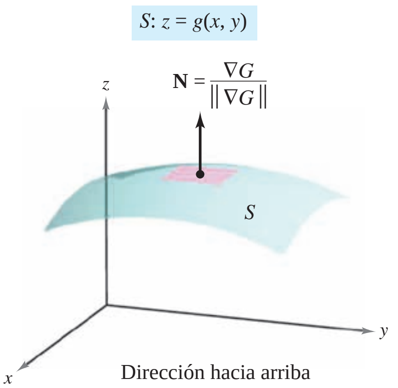
$$\mathbf{N} = \frac{\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|}$$

$$= \frac{-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}} \qquad \text{Unitario normal hacia arriba.}$$

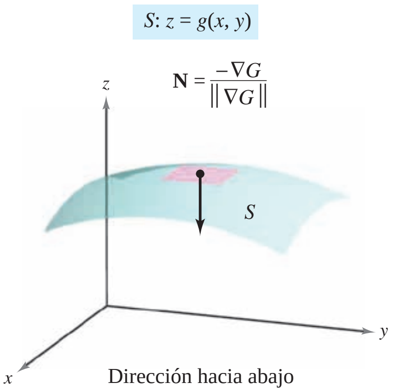
o por el vector unitario normal

$$\mathbf{N} = \frac{-\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|}$$

$$= \frac{g_x(x, y)\mathbf{i} + g_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}} \qquad \text{Unitario normal hacia abajo.}$$



S está orientada hacia arriba



S está orientada hacia abajo
Figura 15.50

como se muestra en la figura 15.50. Si la superficie suave orientable S está dada en forma paramétrica por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \qquad \text{Superficie paramétrica.}$$

los vectores unitarios normales están dados por

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$$

y

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u}{\|\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u\|}.$$

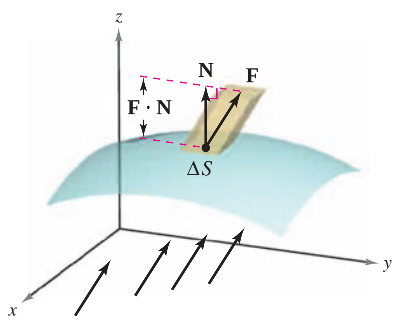
NOTA Supóngase que la superficie orientable está dada por $y = g(x, z)$ o $x = g(y, z)$. Entonces se puede usar el vector gradiente

$$\nabla G(x, y, z) = -g_x(x, z)\mathbf{i} + \mathbf{j} - g_z(x, z)\mathbf{k} \qquad G(x, y, z) = y - g(x, z).$$

o

$$\nabla G(x, y, z) = \mathbf{i} - g_y(y, z)\mathbf{j} - g_z(y, z)\mathbf{k} \qquad G(x, y, z) = x - g(y, z).$$

para orientar la superficie. ■



El campo de velocidad **F** indica la dirección de flujo del fluido
Figura 15.51

Integrales de flujo

Una de las aplicaciones principales que emplean la forma vectorial de una integral de superficie se refiere al flujo de un fluido a través de una superficie S. Supóngase que una superficie orientada S se sumerge en un fluido que tiene un campo de velocidad continua $\mathbf{F}$. Sea ΔS el área de una pequeña porción de la superficie S sobre la cual $\mathbf{F}$ es casi constante. Entonces la cantidad de fluido que atraviesa esta región por unidad de tiempo se aproxima mediante el volumen de la columna de altura $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$, que se muestra en la figura 15.51. Es decir,

$$\Delta V = (\text{altura})(\text{área de la base}) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\Delta S.$$

Por consiguiente, el volumen del fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo (llamada el **flujo de F a través de *S***) está dado por la integral de superficie de la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE FLUJO

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, donde M, N y P tienen primeras derivadas parciales continuas sobre la superficie S orientada mediante un vector unitario normal $\mathbf{N}$. La **integral de flujo de F a través de *S*** está dada por

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

Geométricamente, una integral de flujo es la integral de superficie sobre S de la *componente normal* de $\mathbf{F}$. Si $\rho(x, y, z)$ es la densidad del fluido en (x, y, z), la integral de flujo

$$\int_S\int \rho\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

representa la *masa* del fluido que fluye a través de S por unidad de tiempo.

Para evaluar una integral de flujo de una superficie dada por $z = g(x, y)$, se hace

$$G(x, y, z) = z - g(x, y).$$

Entonces, $\mathbf{N}\, dS$ puede escribirse como sigue.

$$\begin{aligned}\mathbf{N}\, dS &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|}\, dS \\ &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}}\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}\, dA \\ &= \nabla G(x, y, z)\, dA\end{aligned}$$

TEOREMA 15.11 EVALUACIÓN DE UNA INTEGRAL DE FLUJO

Sea S una superficie orientada dada por $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy.

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_R\int \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\, dA \quad \text{Orientada hacia arriba.}$$

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_R\int \mathbf{F} \cdot [g_x(x, y)\mathbf{i} + g_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}]\, dA \quad \text{Orientada hacia abajo.}$$

En la primera integral, la superficie está orientada hacia arriba, y en la segunda integral, la superficie está orientada hacia abajo.

EJEMPLO 5 Usar una integral de flujo para hallar la tasa o ritmo del flujo de masa

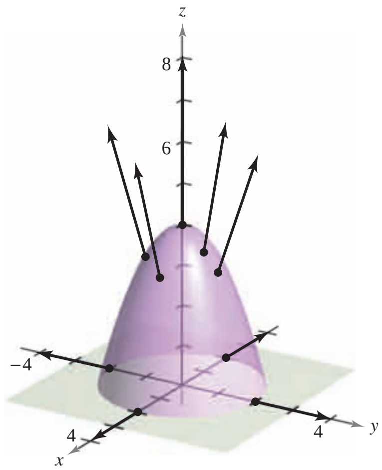


Figura 15.52

Sea S la porción del paraboloide

$$z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

que se encuentra sobre el plano xy, orientado por medio de un vector unitario normal dirigido hacia arriba, como se muestra en la figura 15.52. Un fluido de densidad constante ρ fluye a través de la superficie S de acuerdo con el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Hallar la tasa o ritmo de flujo de masa a través de S.

Solución Se empieza por calcular las derivadas parciales de g.

$$g_x(x, y) = -2x$$

y

$$g_y(x, y) = -2y$$

La tasa o el ritmo de flujo de masa a través de la superficie S es

$$\begin{aligned}
\int_S\int \rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \rho\int_R\int \mathbf{F}\cdot\left[-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}\right]dA \\
&= \rho\int_R\int \left[x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\mathbf{k}\right]\cdot(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dA \\
&= \rho\int_R\int \left[2x^2 + 2y^2 + (4 - x^2 - y^2)\right]dA \\
&= \rho\int_R\int (4 + x^2 + y^2)\,dA \\
&= \rho\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 + r^2)r\,dr\,d\theta && \text{Coordenadas polares.} \\
&= \rho\int_0^{2\pi} 12\,d\theta \\
&= 24\pi\rho.
\end{aligned}$$

Para una superficie orientada S dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \qquad \text{Superficie paramétrica.}$$

definida sobre una región D del plano uv, se puede definir la integral de flujo de $\mathbf{F}$ a través de S como

$$\begin{aligned}
\int_S\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \int_D\int \mathbf{F}\cdot\left(\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}\right)\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\,dA \\
&= \int_D\int \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,dA.
\end{aligned}$$

Nótese la semejanza de esta integral con la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds.$$

En la página 1121 se presenta un resumen de las fórmulas para integrales de línea y de superficie.

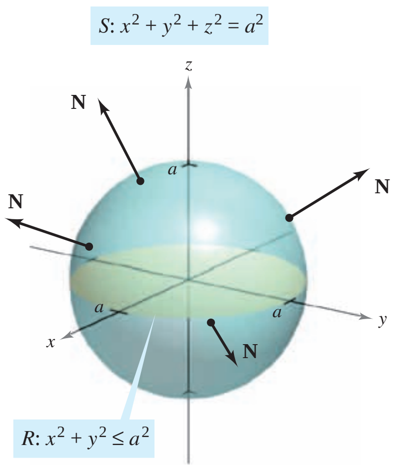


Figura 15.53

EJEMPLO 6 Hallar el flujo de un campo cuadrático inverso

Hallar el flujo sobre la esfera S dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad \text{Esfera } S.$$

donde $\mathbf{F}$ es un campo cuadrático inverso dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{kq}{\|\mathbf{r}\|^2}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{kq\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \qquad \text{Campo cuadrático inverso } \mathbf{F}.$$

y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Supóngase que S está orientada hacia afuera, como se muestra en la figura 15.53.

Solución La esfera está dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u, v) &= x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}\\ &= a \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + a \cos u\mathbf{k}\end{aligned}$$

donde $0 \le u \le \pi$ y $0 \le v \le 2\pi$. Las derivadas parciales de $\mathbf{r}$ son

$$\mathbf{r}_u(u, v) = a \cos u \cos v\,\mathbf{i} + a \cos u \operatorname{sen} v\mathbf{j} - a \operatorname{sen} u\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}_v(u, v) = -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{j}$$

lo cual implica que el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a \cos u \cos v & a \cos u \operatorname{sen} v & -a \operatorname{sen} u\\ -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & a \operatorname{sen} u \cos v & 0\end{vmatrix}\\ &= a^2(\operatorname{sen}^2 u \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \operatorname{sen} u \cos u\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Ahora, usando

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, z) &= \frac{kq\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\\ &= kq\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\|x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\|^3}\\ &= \frac{kq}{a^3}(a \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + a \cos u\mathbf{k})\end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) &= \frac{kq}{a^3}[(a \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + a \cos u\mathbf{k}) \cdot\\ &\qquad a^2(\operatorname{sen}^2 u \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \operatorname{sen} u \cos u\mathbf{k})]\\ &= kq(\operatorname{sen}^3 u \cos^2 v + \operatorname{sen}^3 u \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen} u \cos^2 u)\\ &= kq \operatorname{sen} u.\end{aligned}$$

Por último, el flujo sobre la esfera S está dado por

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS &= \int\!\!\int_D (kq \operatorname{sen} u)\, dA\\ &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} kq \operatorname{sen} u\, du\, dv\\ &= 4\pi kq.\end{aligned}$$

El resultado del ejemplo 6 muestra que el flujo a través de una esfera S en un campo cuadrático inverso es independiente del radio de S. En particular, si $\mathbf{E}$ es un campo eléctrico, el resultado obtenido en el ejemplo 6, junto con la ley de Coulomb, proporciona una de las leyes básicas de electrostática, conocida como la **ley de Gauss**:

$$\int_S\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{N}\, dS = 4\pi kq$$

Ley de Gauss.

donde q es un carga puntual localizada en el centro de la esfera y k es la constante de Coulomb. La ley de Gauss es válida para superficies cerradas más generales que contengan el origen, y relaciona el flujo que sale de la superficie con la carga total q dentro de la superficie.

Esta sección concluye con un resumen de fórmulas de integrales de línea y de integrales de superficie.

Resumen de integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$
$$= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, ds$$

Forma escalar.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$
$$= \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Forma vectorial.

Integrales de superficie $[z = g(x, y)]$

$$dS = \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\, dA$$

$$\int_S\int f(x, y, z)\, dS = \int_R\int f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\, dA$$

Forma escalar.

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_R\int \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\, dA$$

Forma vectorial (normal hacia arriba).

Integrales de superficie (forma paramétrica)

$$dS = \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|\, dA$$

$$\int_S\int f(x, y, z)\, dS = \int_D\int f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\, dS$$

Forma escalar.

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_D\int \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA$$

Forma vectorial.

15.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, evaluar $\displaystyle\iint_S (x - 2y + z)\, dS$.

1. S: $z = 4 - x, \quad 0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 3$
2. S: $z = 15 - 2x + 3y, \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 4$
3. S: $z = 2, \quad x^2 + y^2 \le 1$
4. S: $z = \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x$

En los ejercicios 5 y 6, evaluar $\displaystyle\iint_S xy\, dS$.

5. S: $z = 3 - x - y$, primer octante
6. S: $z = h, \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$

CAS **En los ejercicios 7 y 8, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar**

$$\iint_S xy\, dS.$$

7. S: $z = 9 - x^2, \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le x$
8. S: $z = \frac{1}{2}xy, \quad 0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 4$

CAS **En los ejercicios 9 y 10, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar**

$$\iint_S (x^2 - 2xy)\, dS.$$

9. S: $z = 10 - x^2 - y^2, \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 2$
10. S: $z = \cos x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \le y \le \dfrac{1}{2}x$

Masa **En los ejercicios 11 y 12, hallar la masa de la lámina bidimensional S de densidad ρ.**

11. S: $2x + 3y + 6z = 12$, primer octante, $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$
12. S: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad \rho(x, y, z) = kz$

En los ejercicios 13 a 16, evaluar $\displaystyle\iint_S f(x, y)\, dS$.

13. $f(x, y) = y + 5$
    S: $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2v\mathbf{k}, \quad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 2$
14. $f(x, y) = xy$
    S: $\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} u\,\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
    $0 \le u \le \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \le v \le 1$
15. $f(x, y) = x + y$
    S: $\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} u\,\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
    $0 \le u \le \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \le v \le 1$
16. $f(x, y) = x + y$
    S: $\mathbf{r}(u, v) = 4u\cos v\,\mathbf{i} + 4u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + 3u\mathbf{k}$
    $0 \le u \le 4, \quad 0 \le v \le \pi$

En los ejercicios 17 a 22, evaluar $\displaystyle\iint_S f(x, y, z)\, dS$.

17. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
    S: $z = x + y, \quad x^2 + y^2 \le 1$
18. $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{z}$
    S: $z = x^2 + y^2, \quad 4 \le x^2 + y^2 \le 16$
19. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
    S: $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \le 4$
20. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
    S: $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x - 1)^2 + y^2 \le 1$
21. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
    S: $x^2 + y^2 = 9, \quad 0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 3, \quad 0 \le z \le 9$
22. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
    S: $x^2 + y^2 = 9, \quad 0 \le x \le 3, \quad 0 \le z \le x$

En los ejercicios 23 a 28, hallar el flujo de F a través de S,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

donde N es el vector unitario normal a S dirigido hacia arriba.

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3z\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
    S: $z = 1 - x - y$, primer octante
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
    S: $z = 6 - 3x - 2y$, primer octante
25. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
    S: $z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \ge 0$
26. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
    S: $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, primer octante
27. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
    S: $z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \le 4$
28. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$
    S: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

En los ejercicios 29 y 30, hallar el flujo de F sobre la superficie cerrada. (Sea N el vector unitario normal a la superficie dirigido hacia afuera.)

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
    S: $z = 16 - x^2 - y^2, \quad z = 0$
30. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$
    S: cubo unitario limitado o acotado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$
31. ***Carga eléctrica*** Sea $\mathbf{E} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ un campo electrostático. Usar la ley de Gauss para hallar la carga total que hay en el interior de la superficie cerrada formada por el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y su base circular en el plano xy.

32. ***Carga eléctrica*** Sea $\mathbf{E} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ un campo electrostático. Usar la ley de Gauss para hallar la carga total que hay en el interior de la superficie cerrada formada por el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y su base circular en el plano xy.

Momento de inercia **En los ejercicios 33 y 34, utilizar las fórmulas siguientes para los momentos de inercia con respecto a los ejes coordenados de una lámina bidimensional de densidad ρ.**

$$I_x = \int\!\!\int_S (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dS$$

$$I_y = \int\!\!\int_S (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dS$$

$$I_z = \int\!\!\int_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dS$$

33. Verificar que el momento de inercia de una capa cónica de densidad uniforme, con respecto a su eje, es $\frac{1}{2}ma^2$, donde m es la masa y a es el radio y altura.

34. Verificar que el momento de inercia de una capa esférica de densidad uniforme, con respecto a su diámetro, es $\frac{2}{3}ma^2$, donde m es la masa y a es el radio.

Momento de inercia **En los ejercicios 35 y 36, calcular I_z para la lámina especificada con densidad uniforme igual a 1. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.**

35. $x^2 + y^2 = a^2, \quad 0 \le z \le h$

36. $z = x^2 + y^2, \quad 0 \le z \le h$

CAS ***Ritmo o tasa de flujo*** **En los ejercicios 37 y 38, utilizar un sistema algebraico por computadora y hallar el ritmo o tasa de flujo de masa de un fluido de densidad ρ a través de la superficie S orientada hacia arriba, si el campo de velocidad está dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = 0.5z\mathbf{k}$.**

37. $S\colon\ z = 16 - x^2 - y^2, \quad z \ge 0$

38. $S\colon\ z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

Desarrollo de conceptos

39. Definir la integral de superficie de la función escalar f sobre una superficie $z = g(x, y)$. Explicar cómo se calculan las integrales de superficie.

40. Describir una superficie orientable.

41. Definir una integral de flujo y explicar cómo se evalúa.

42. ¿Es orientable la superficie de la figura adjunta? Explicar.

Doble giro

CAS **43.** ***Investigación***

a) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = (4 - v\operatorname{sen} u)\cos(2u)\mathbf{i} + (4 - v\operatorname{sen} u)\operatorname{sen}(2u)\mathbf{j} + v\cos u\mathbf{k}, \quad 0 \le u \le \pi, \quad -1 \le v \le 1.$$

A esta superficie se le llama banda de Möbius.

b) Explicar por qué esta superficie no es orientable.

c) Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la curva en el espacio dada por $\mathbf{r}(u, 0)$. Identificar la curva.

d) Construir una banda de Möbius cortando una tira de papel, dándole un solo giro, y pegando los extremos.

e) Cortar la banda de Möbius a lo largo de la curva en el espacio del inciso *c*), y describir el resultado.

Para discusión

44. Considerar el campo vectorial

$\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$

y la superficie orientable S dada por la forma paramétrica

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v^2)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + u^2\mathbf{k},$$
$$0 \le u \le 2, -1 \le v \le 1.$$

a) Encontrar e interpretar $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$.

b) Encontrar $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$ como una función de u y v.

c) Encontrar u y v en el punto $P(3, 1, 4)$.

d) Explicar cómo encontrar la componente normal de $\mathbf{F}$ a la superficie en P. Encontrar después su valor.

e) Evaluar la integral de flujo $\int\!\!\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$.

PROYECTO DE TRABAJO

Hiperboloide de una hoja

Considerar la superficie paramétrica dada por la función

$\mathbf{r}(u, v) = a\cosh u\cos v\mathbf{i} + a\cosh u\operatorname{sen} v\mathbf{j} + b\operatorname{senh} u\mathbf{k}.$

a) Usar una herramienta de graficación para representar $\mathbf{r}$ para varios valores de las constantes a y b. Describir el efecto de las constantes sobre la forma de la superficie.

b) Mostrar que la superficie es un hiperboloide de una hoja dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

c) Para valores fijos $u = u_0$, describir las curvas dadas por

$$\mathbf{r}(u_0, v) = a\cosh u_0\cos v\mathbf{i} + a\cosh u_0\operatorname{sen} v\mathbf{j} + b\operatorname{senh} u_0\mathbf{k}.$$

d) Para valores fijos $v = v_0$, describir las curvas dadas por

$$\mathbf{r}(u, v_0) = a\cosh u\cos v_0\mathbf{i} + a\cosh u\operatorname{sen} v_0\mathbf{j} + b\operatorname{senh} u\mathbf{k}.$$

e) Hallar un vector normal a la superficie en $(u, v) = (0, 0)$.

15.7 Teorema de la divergencia

- **Comprender y utilizar el teorema de la divergencia.**
- **Utilizar el teorema de la divergencia para calcular flujo.**

Mary Evans Picture Collection

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

Al **teorema de la divergencia** también se le llama **teorema de Gauss**, en honor al famoso matemático alemán Carl Friedrich Gauss. Gauss es reconocido, junto con Newton y Arquímedes, como uno de los tres más grandes matemáticos de la historia. Una de sus muchas contribuciones a las matemáticas la hizo a los 22 años, cuando, como parte de su tesis doctoral, demostró el *teorema fundamental del álgebra*.

Teorema de la divergencia

Recordar que en la sección 15.4 se vio que una forma alternativa del teorema de Green es

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds &= \int\!\!\int_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA \\ &= \int\!\!\int_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA.\end{aligned}$$

De manera análoga, el **teorema de la divergencia** da la relación entre una integral triple sobre una región sólida Q y una integral de superficie sobre la superficie de Q. En el enunciado del teorema, la superficie S es **cerrada** en el sentido de que forma toda la frontera completa del sólido Q. Ejemplos de superficies cerradas surgen de las regiones limitadas o acotadas por esferas, elipsoides, cubos, tetraedros, o combinaciones de estas superficies. Se supone que Q es una región sólida sobre la cual se evalúa una integral triple, y que la superficie cerrada S está orientada mediante vectores normales unitarios dirigidos hacia el *exterior*, como se muestra en la figura 15.54. Con estas restricciones sobre S y Q, el teorema de la divergencia es como sigue.

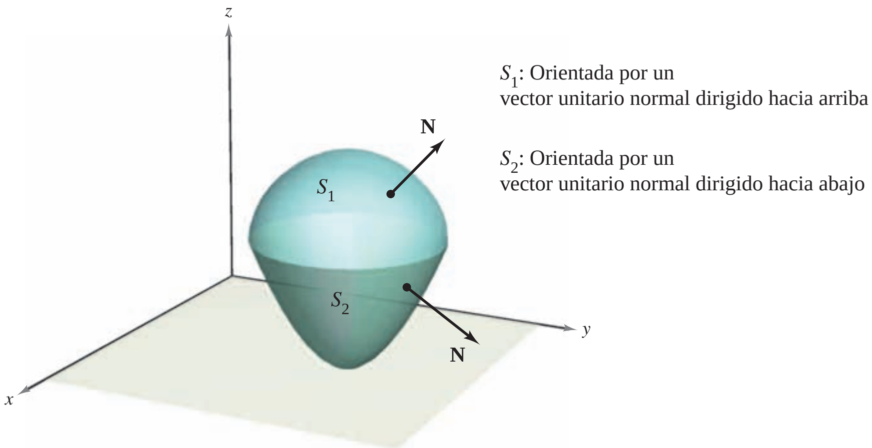


Figura 15.54

> **TEOREMA 15.12 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA**
>
> Sea Q una región sólida limitada o acotada por una superficie cerrada S orientada por un vector unitario normal dirigido hacia el exterior de Q. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en Q, entonces
>
> $$\int\!\!\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int\!\!\int\!\!\int_Q \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV.$$

NOTA Como se indica arriba, al teorema de la divergencia a veces se le llama teorema de Gauss. También se le llama teorema de Ostrogradsky, en honor al matemático ruso Michel Ostrogradsky (1801-1861). ■

NOTA Esta prueba se restringe a una región sólida *simple*. Es mejor dejar la prueba general para un curso de cálculo avanzado.

DEMOSTRACIÓN Si se hace $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, el teorema toma la forma

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_S\int (M\mathbf{i} \cdot \mathbf{N} + N\mathbf{j} \cdot \mathbf{N} + P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N})\, dS$$
$$= \iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dV.$$

Esto se puede demostrar verificando que las tres ecuaciones siguientes son válidas.

$$\int_S\int M\mathbf{i} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x}\, dV$$

$$\int_S\int N\mathbf{j} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y}\, dV$$

$$\int_S\int P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z}\, dV$$

Como las verificaciones de las tres ecuaciones son similares, sólo se verá la tercera. La demostración se restringe a una región **sólida simple**, con superficie superior

$z = g_2(x, y)$ Superficie superior.

y superficie inferior

$z = g_1(x, y)$ Superficie inferior.

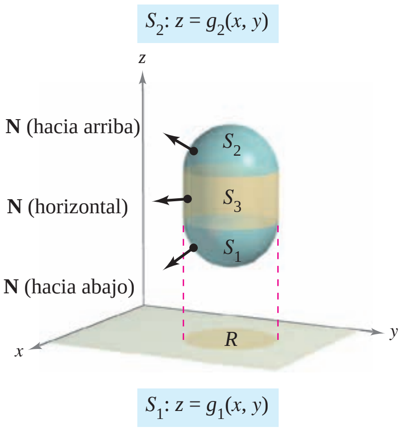


Figura 15.55

cuyas proyecciones sobre el plano xy coinciden y forman la región R. Si Q tiene una superficie lateral como S_3 en la figura 15.55, entonces un vector normal es horizontal, lo cual implica que $P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} = 0$. Por consiguiente, se tiene

$$\int_S\int P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_{S_1}\int P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N}\, dS + \int_{S_2}\int P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N}\, dS + 0.$$

Sobre la superficie superior S_2, el vector normal dirigido hacia el exterior apunta hacia arriba, mientras que en la superficie inferior S_1, el vector normal dirigido hacia el exterior apunta hacia abajo. Por tanto, por el teorema 15.11, se tiene lo siguiente.

$$\int_{S_1}\int P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_R\int P(x, y, g_1(x, y))\mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right) dA$$
$$= -\int_R\int P(x, y, g_1(x, y))\, dA$$
$$\int_{S_2}\int P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_R\int P(x, y, g_2(x, y))\mathbf{k} \cdot \left(-\frac{\partial g_2}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g_2}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dA$$
$$= \int_R\int P(x, y, g_2(x, y))\, dA$$

Sumando estos resultados, se obtiene

$$\int_S\int P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_R\int [P(x, y, g_2(x, y)) - P(x, y, g_1(x, y))]\, dA$$
$$= \int_R\int \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\right] dA$$
$$= \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z}\, dV.$$

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de la divergencia

Sea Q la región sólida limitada o acotada por los planos coordenados y el plano $2x + 2y + z = 6$, y sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Hallar

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

donde S es la superficie de Q.

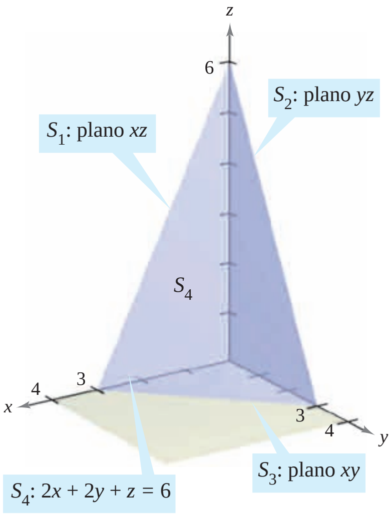


Figura 15.56

Solución En la figura 15.56 se ve que Q está limitada o acotada por cuatro superficies. Por tanto, se necesitarán cuatro *integrales de superficie* para evaluarla

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

Sin embargo, por el teorema de la divergencia, sólo se necesita una integral triple. Como

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{F} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\\ &= 1 + 2y + 1\\ &= 2 + 2y\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS &= \iiint_Q \text{div } \mathbf{F}\, dV\\ &= \int_0^3\int_0^{3-y}\int_0^{6-2x-2y} (2 + 2y)\, dz\, dx\, dy\\ &= \int_0^3\int_0^{3-y} (2z + 2yz)\Big]_0^{6-2x-2y} dx\, dy\\ &= \int_0^3\int_0^{3-y} (12 - 4x + 8y - 4xy - 4y^2)\, dx\, dy\\ &= \int_0^3 \Big[12x - 2x^2 + 8xy - 2x^2y - 4xy^2\Big]_0^{3-y} dy\\ &= \int_0^3 (18 + 6y - 10y^2 + 2y^3)\, dy\\ &= \Big[18y + 3y^2 - \frac{10y^3}{3} + \frac{y^4}{2}\Big]_0^3\\ &= \frac{63}{2}.\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA Si se tiene acceso a un sistema algebraico por computadora que pueda evaluar integrales iteradas triples, utilícese para verificar el resultado del ejemplo 1. Al usar este sistema algebraico por computadora obsérvese que el primer paso es convertir la integral triple en una integral iterada; este paso debe hacerse a mano. Para adquirir práctica para realizar este paso importante, hallar los límites de integración de las integrales iteradas siguientes. Después usar una computadora para verificar que el valor es el mismo que el obtenido en el ejemplo 1.

$$\int_?^?\int_?^?\int_?^? (2 + 2y)\, dy\, dz\, dx, \qquad \int_?^?\int_?^?\int_?^? (2 + 2y)\, dx\, dy\, dz$$

EJEMPLO 2 Verificación del teorema de la divergencia

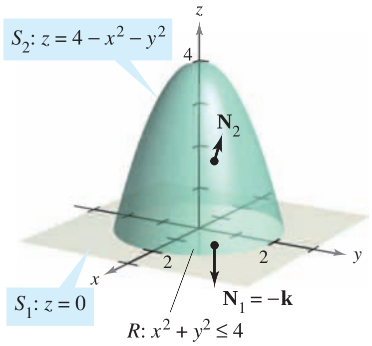


Figura 15.57

Sea Q la región sólida entre el paraboloide

$$z = 4 - x^2 - y^2$$

y el plano xy. Verificar el teorema de la divergencia para

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}.$$

Solución En la figura 15.57 se ve que el vector normal a la superficie S_1 que apunta hacia afuera es $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{k}$, mientras que el vector normal a la superficie S_2 que apunta hacia afuera es

$$\mathbf{N}_2 = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Por tanto, por el teorema 15.11, se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_S\!\!\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS\\
&\quad= \int_{S_1}\!\!\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1\,dS + \int_{S_2}\!\!\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_2\,dS\\
&\quad= \int_{S_1}\!\!\int \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{k})\,dS + \int_{S_2}\!\!\int \mathbf{F}\cdot\frac{(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}\,dS\\
&\quad= \int_R\!\!\int -y^2\,dA + \int_R\!\!\int (4xz + 2xy + y^2)\,dA\\
&\quad= -\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y^2\,dx\,dy + \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xz + 2xy + y^2)\,dx\,dy\\
&\quad= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xz + 2xy)\,dx\,dy\\
&\quad= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} [4x(4 - x^2 - y^2) + 2xy]\,dx\,dy\\
&\quad= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (16x - 4x^3 - 4xy^2 + 2xy)\,dx\,dy\\
&\quad= \int_{-2}^{2}\Big[8x^2 - x^4 - 2x^2y^2 + x^2y\Big]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\,dy\\
&\quad= \int_{-2}^{2} 0\,dy\\
&\quad= 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}[2z] + \frac{\partial}{\partial y}[x] + \frac{\partial}{\partial z}[y^2] = 0 + 0 + 0 = 0$$

se puede aplicar el teorema de la divergencia para obtener el resultado equivalente

$$\begin{aligned}
\int_S\!\!\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_Q \text{div}\,\mathbf{F}\,dV\\
&= \iiint_Q 0\,dV = 0.
\end{aligned}$$

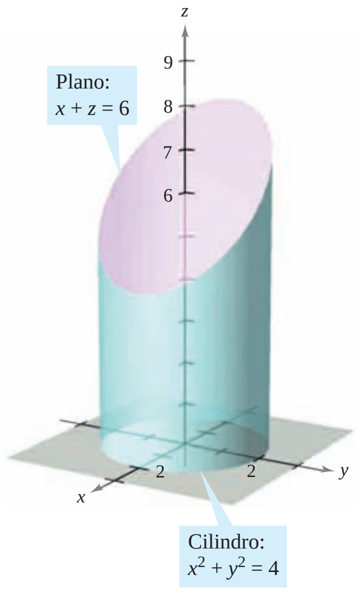


Figura 15.58

EJEMPLO 3 Aplicación del teorema de la divergencia

Sea Q el sólido limitado o acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el plano $x + z = 6$ y el plano xy, como se muestra en la figura 15.58. Hallar

$$\int_S\!\!\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

donde S es la superficie de Q y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (xy + \cos z)\mathbf{j} + e^y\mathbf{k}.$$

Solución La evaluación directa de esta integral de superficie sería difícil. Sin embargo, por el teorema de la divergencia, se puede evaluar la integral como sigue.

$$\begin{aligned}
\int_S\!\!\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS &= \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \\
&= \iiint_Q (2x + x + 0)\, dV \\
&= \iiint_Q 3x\, dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{6-r\cos\theta} (3r\cos\theta) r\, dz\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (18r^2\cos\theta - 3r^3\cos^2\theta)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (48\cos\theta - 12\cos^2\theta) d\theta \\
&= \left[48\operatorname{sen}\theta - 6\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= -12\pi
\end{aligned}$$

Nótese que para evaluar la integral triple se emplearon coordenadas cilíndricas con $x = r\cos\theta$ y $dV = r\, dz\, dr\, d\theta$.

Aunque el teorema de la divergencia se formuló para una región sólida simple Q limitada o acotada por una superficie cerrada, el teorema también es válido para regiones que son uniones finitas de regiones sólidas simples. Por ejemplo, sea Q el sólido limitado o acotado por las superficies cerradas S_1 y S_2, como se muestra en la figura 15.59. Para aplicar el teorema de la divergencia a este sólido, sea $S = S_1 \cup S_2$. El vector normal $\mathbf{N}$ a S está dado por $-\mathbf{N}_1$ en S_1 y por $\mathbf{N}_2$ en S_2. Por tanto, se puede escribir

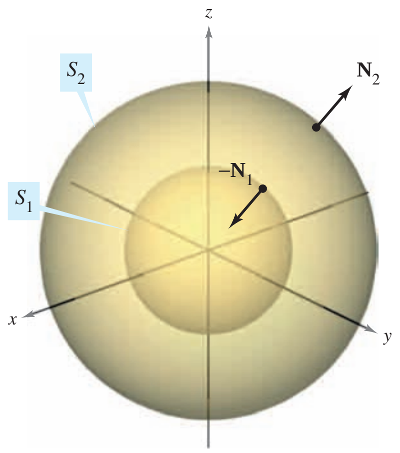


Figura 15.59

$$\begin{aligned}
\iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV &= \int_S\!\!\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS \\
&= \int_{S_1}\!\!\int \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{N}_1)\, dS + \int_{S_2}\!\!\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, dS \\
&= -\int_{S_1}\!\!\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS + \int_{S_2}\!\!\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, dS.
\end{aligned}$$

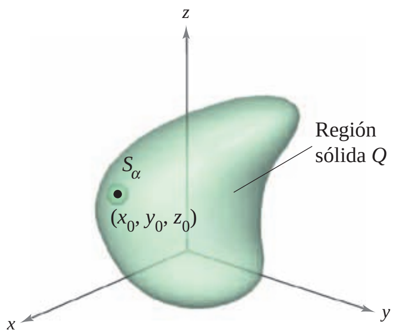


Figura 15.60

Flujo y el teorema de la divergencia

Con el fin de comprender mejor el teorema de la divergencia, considérense los dos miembros de la ecuación

$$\int_S\!\!\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV.$$

De acuerdo con la sección 15.6 se sabe que la integral de flujo de la izquierda determina el flujo total de fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo. Esto puede aproximarse sumando el flujo que fluye a través de fragmentos pequeños de la superficie. La integral triple de la derecha mide este mismo flujo de fluido a través de S, pero desde una perspectiva muy diferente; a saber, calculando el flujo de fluido dentro (o fuera) de *cubos* pequeños de volumen ΔV_i. El flujo en el cubo i-ésimo es aproximadamente

$$\text{El flujo en el } i\text{-ésimo cubo} \approx \operatorname{div} \mathbf{F}(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$$

para algún punto (x_i, y_i, z_i) en el i-ésimo cubo. Nótese que en un cubo en el interior de Q, la ganancia (o pérdida) de fluido a través de cualquiera de sus seis caras es compensada por una pérdida (o ganancia) correspondiente a través de una de las caras de un cubo adyacente. Después de sumar sobre todos los cubos en Q, el único flujo de fluido que no se cancela uniendo cubos es el de las caras exteriores en los cubos del borde. Así, la suma

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{div} \mathbf{F}(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$$

aproxima el flujo total dentro (o fuera) de Q, y por consiguiente a través de la superficie S.

Para ver qué se quiere dar a entender con divergencia de $\mathbf{F}$ en un punto, considérese ΔV_α como el volumen de una esfera pequeña S de radio y centro (x_0, y_0, z_0), contenida en la región Q, como se muestra en la figura 15.60. Aplicando el teorema de la divergencia a S_α resulta

$$\begin{aligned}\text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha &= \iiint_{Q_\alpha} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \\ &\approx \operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)\, \Delta V_\alpha\end{aligned}$$

donde Q_α es el interior de S_α. Por consiguiente, se tiene

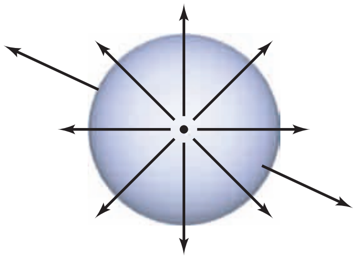
$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha}{\Delta V_\alpha}$$

y, tomando el límite cuando $\alpha \to 0$, se obtiene la divergencia de $\mathbf{F}$ en el punto (x_0, y_0, z_0).

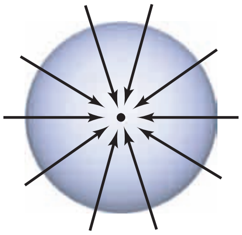
$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha}{\Delta V_\alpha} \\ &= \text{flujo por unidad de volumen en } (x_0, y_0, z_0)\end{aligned}$$

En un campo vectorial el punto (x_0, y_0, z_0) es clasificado como una fuente, un sumidero o incompresible, como sigue.

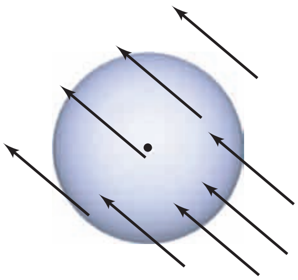
1. **Fuente,** si $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$ Ver figura 15.61*a*.
2. **Sumidero,** si $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$ Ver figura 15.61*b*.
3. **Incompresible,** si $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ Ver figura 15.61*c*.



***a*)** Fuente: $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$



***b*)** Sumidero: $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$



***c*)** Incompresible: $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$

Figura 15.61

NOTA En hidrodinámica, una *fuente* es un punto por el que se considera que se introduce fluido adicional a la región ocupada por el fluido. Un *sumidero* es un punto en el que se considera que escapa fluido. ■

EJEMPLO 4 Calcular el flujo mediante el teorema de la divergencia

Sea Q la región limitada o acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Hallar el flujo dirigido hacia afuera del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x^3\mathbf{i} + 2y^3\mathbf{j} + 2z^3\mathbf{k}$ a través de la esfera.

Solución Por el teorema de la divergencia, se tiene

$$\begin{aligned}
\text{Flujo a través de } S &= \int_S\!\!\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_Q \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV\\
&= \iiint_Q 6(x^2+y^2+z^2)\,dV\\
&= 6\int_0^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \rho^4 \operatorname{sen}\phi\,d\theta\,d\phi\,d\rho \qquad \text{Coordenadas esféricas.}\\
&= 6\int_0^2\int_0^{\pi} 2\pi\rho^4 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\rho\\
&= 12\pi\int_0^2 2\rho^4\,d\rho\\
&= 24\pi\left(\frac{32}{5}\right)\\
&= \frac{768\pi}{5}.
\end{aligned}$$

15.7 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, verificar el teorema de la divergencia evaluando

$$\int_S\!\!\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

como una integral de superficie y como una integral triple.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

   S: cubo limitado o acotado por los planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$, $z = a$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

   S: cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $\quad 0 \le z \le h$

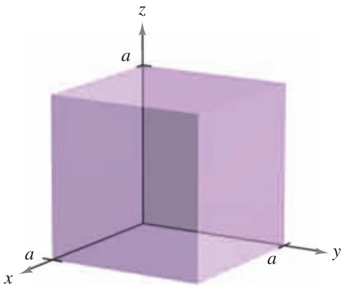


Figura para 1

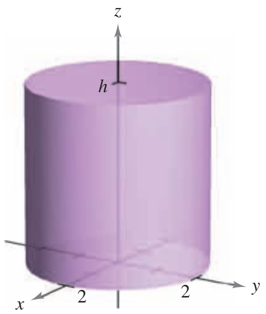


Figura para 2

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - y)\mathbf{i} - (2y - z)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

   S: superficie limitada o acotada por los planos $2x + 4y + 2z = 12$ y los planos coordenados

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

   S: superficie limitada o acotada por el plano $y = 4$ y $z = 4 - x$ y los planos coordenados

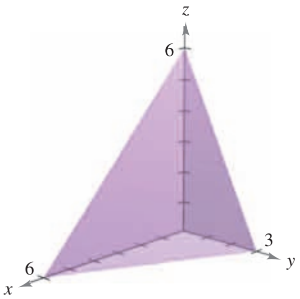


Figura para 3

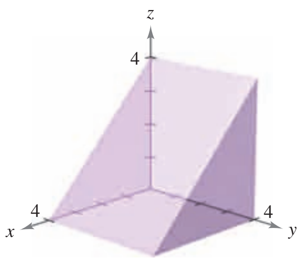


Figura para 4

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + 2z^2\mathbf{k}$

   S: superficie acotada por $z = 1 - x^2 - y^2$ y $z = 0$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j} + e\mathbf{k}$

   S: superficie acotada por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 4$

En los ejercicios 7 a 18, utilizar el teorema de la divergencia para evaluar

$$\int_S\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

y hallar el flujo de F dirigido hacia el exterior a través de la superficie del sólido limitado o acotado por las gráficas de las ecuaciones. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
S: $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^2\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3xyz\mathbf{k}$
S: $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$
S: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z = 0$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$
S: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z = 0$

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
S: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{j}$
S: $x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 5$

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$
S: $x^2 + y^2 = 25, z = 0, z = 7$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2 + \cos z)\mathbf{i} + (x^2y + \operatorname{sen} z)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$
S: $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + x^2e^y\mathbf{k}$
S: $z = 4 - y, z = 0, x = 0, x = 6, y = 0$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^z\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$
S: $z = 4 - y, z = 0, x = 0, x = 6, y = 0$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$
S: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$
S: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = 0$

En los ejercicios 19 y 20, evaluar

$$\int_S\int \text{rot } \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

donde S es la superficie cerrada del sólido limitado o acotado por las gráficas de $x = 4$ y $z = 9 - y^2$ y los planos coordenados.

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xy + z^2)\mathbf{i} + (2x^2 + 6yz)\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\cos z\,\mathbf{i} + yz\operatorname{sen} x\,\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

Desarrollo de conceptos

21. Enunciar el teorema de la divergencia.

22. ¿Cómo se determina si un punto (x_0, y_0, z_0) de un campo vectorial es una fuente, un sumidero o incompresible?

23. *a*) Utilizar el teorema de la divergencia para verificar que el volumen del sólido limitado o acotado por una superficie S es

$$\int_S\int x\,dy\,dz = \int_S\int y\,dz\,dx = \int_S\int z\,dx\,dy.$$

b) Verificar el resultado del inciso *a*) para el cubo limitado o acotado por $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0$ y $z = a$.

Para discusión

24. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y sea S el cubo acotado por los planos $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$ y $z = 1$. Verificar el teorema de la divergencia evaluando

$$\int_S\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

como una integral de superficie y como una integral triple.

25. Verificar que

$$\int_S\int \text{rot } \mathbf{F}\cdot\mathrm{N}\,dS = 0$$

para toda superficie cerrada S.

26. Para el campo vectorial constante dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, verificar que

$$\int_S\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = 0$$

donde V es el volumen del sólido limitado o acotado por la superficie cerrada S.

27. Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, verificar que

$$\int_S\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = 3V$$

donde V es el volumen del sólido limitado o acotado por la superficie cerrada S.

28. Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, verificar que

$$\frac{1}{\|\mathbf{F}\|}\int_S\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{3}{\|\mathbf{F}\|}\int\int_Q\int dV.$$

En los ejercicios 29 y 30, demostrar la identidad, suponiendo que Q, S y N satisfacen las condiciones del teorema de la divergencia y que las derivadas parciales necesarias de las funciones escalares f y g son continuas. Las expresiones $D_{\mathbf{N}}f$ y $D_{\mathbf{N}}g$ son las derivadas en la dirección del vector N y se definen por

$$D_{\mathbf{N}}f = \nabla f\cdot\mathbf{N},\quad D_{\mathbf{N}}g = \nabla g\cdot\mathbf{N}.$$

29. $$\int\int_Q\int (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)\,dV = \int_S\int f D_{\mathbf{N}}g\,dS$$

[*Sugerencia:* Utilizar div $(f\mathbf{G}) = f$ div $\mathbf{G} + \nabla f\cdot\mathbf{G}$.]

30. $$\int\int_Q\int (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV = \int_S\int (f D_{\mathbf{N}}g - g D_{\mathbf{N}}f)\,dS$$

(*Sugerencia:* Utilizar el ejercicio 29 dos veces.)

15.8 Teorema de Stokes

- **Comprender y utilizar el teorema de Stokes.**
- **Utilizar el rotacional para analizar el movimiento de un líquido en rotación.**

Teorema de Stokes

Bettmann/Corbis

George Gabriel Stokes (1819-1903)

Stokes se convirtió en profesor Lucasiano de matemáticas en Cambridge en 1849. Cinco años después, publicó el teorema que lleva su nombre como examen para optar a un premio de investigación.

Un segundo teorema, análogo al teorema de Green, pero con más dimensiones, es el **teorema de Stokes**, llamado así en honor al físico matemático inglés George Gabriel Stokes. Stokes formó parte de un grupo de físicos matemáticos ingleses conocido como la Escuela de Cambridge, entre los que se encontraban William Thomson (Lord Kelvin) y James Clerk Maxwell. Además de hacer contribuciones a la física, Stokes trabajó con series infinitas y con ecuaciones diferenciales, así como con los resultados de integración que se presentan en esta sección.

El teorema de Stokes establece la relación entre una integral de superficie sobre una superficie orientada S y una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C en el espacio que forma la frontera o el borde de S, como se muestra en la figura 15.62. La dirección positiva a lo largo de C es la dirección en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al vector normal $\mathbf{N}$. Es decir, si se imagina que se toma el vector normal $\mathbf{N}$ con la mano derecha, con el dedo pulgar apuntando en la dirección de $\mathbf{N}$, los demás dedos apuntarán en la dirección positiva de C, como se muestra en la figura 15.63.

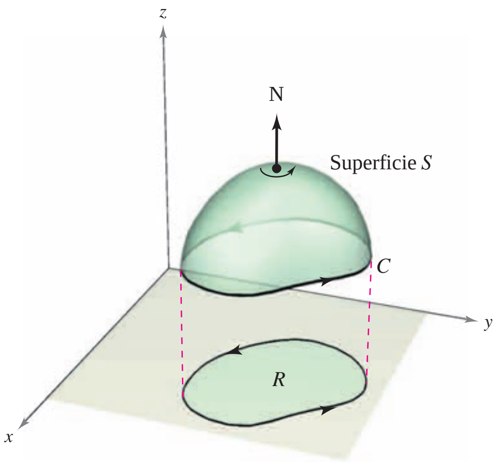
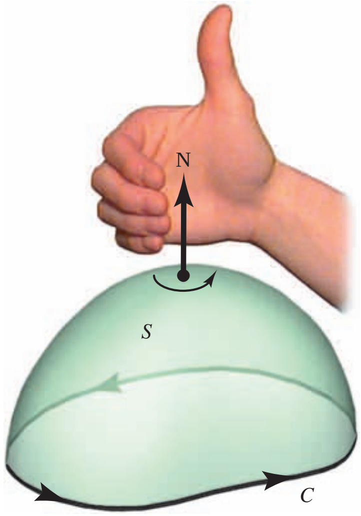


Figura 15.62



La dirección a lo largo de C es en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto a $\mathbf{N}$

Figura 15.63

TEOREMA 15.13 TEOREMA DE STOKES

Sea S una superficie orientada con vector unitario normal $\mathbf{N}$, acotada por una curva cerrada simple, suave a trozos C, con orientación positiva. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a S y a C, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

NOTA La integral de línea puede escribirse en forma diferencial $\int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$ o en forma vectorial $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$. ■

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de Stokes

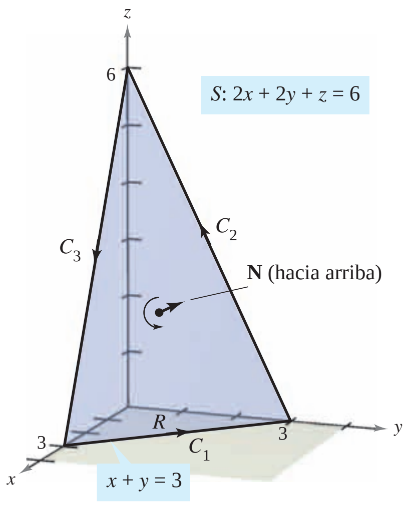


Figura 15.64

Sea C el triángulo orientado situado en el plano $2x + 2y + z = 6$, como se muestra en la figura 15.64. Evaluar

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

Solución Usando el teorema de Stokes, se empieza por hallar el rotacional de $\mathbf{F}$.

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$$

Considerando $z = 6 - 2x - 2y = g(x, y)$, se puede usar el teorema 15.11 para un vector normal dirigido hacia arriba para obtener

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_S\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS \\
&= \int_R\int (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\, dA \\
&= \int_R\int (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dA \\
&= \int_0^3\int_0^{3-y} (2y - 4)\, dx\, dy \\
&= \int_0^3 (-2y^2 + 10y - 12)\, dy \\
&= \left[-\frac{2y^3}{3} + 5y^2 - 12y\right]_0^3 \\
&= -9.
\end{aligned}$$

Trátese de evaluar la integral de línea del ejemplo 1 directamente, *sin* usar el teorema de Stokes. Una manera de hacerlo es considerar a C como la unión de C_1, C_2 y C_3, como sigue.

$$\begin{aligned}
C_1&: \mathbf{r}_1(t) = (3 - t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 3 \\
C_2&: \mathbf{r}_2(t) = (6 - t)\mathbf{j} + (2t - 6)\mathbf{k}, \quad 3 \le t \le 6 \\
C_3&: \mathbf{r}_3(t) = (t - 6)\mathbf{i} + (18 - 2t)\mathbf{k}, \quad 6 \le t \le 9
\end{aligned}$$

El valor de la integral de la línea es

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_1'(t)\, dt + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_2'(t)\, dt + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_3'(t)\, dt \\
&= \int_0^3 t^2\, dt + \int_3^6 (-2t + 6)\, dt + \int_6^9 (-2t + 12)\, dt \\
&= 9 - 9 - 9 \\
&= -9.
\end{aligned}$$

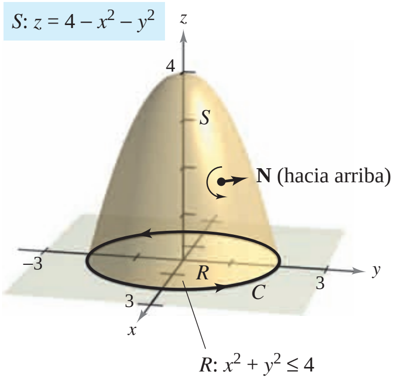


Figura 15.65

EJEMPLO 2 Verificación del teorema de Stokes

Sea S la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que permanece sobre el plano xy, orientado hacia arriba (ver la figura 15.65). Sea C su curva frontera en el plano xy orientada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Verificar el teorema de Stokes para

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$$

evaluando la integral de superficie y la integral de línea equivalente.

Solución Como *integral de superficie*, se tiene $z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, $g_x = -2x$, $g_y = -2y$, y

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & y^2 \end{vmatrix} = 2y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

De acuerdo con el teorema 15.11, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_S\!\!\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS &= \int_R\!\!\int (2y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dA \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4xy + 4y + 1)\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} \Big[2xy^2 + 2y^2 + y \Big]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \int_{-2}^{2} 2\sqrt{4 - x^2}\, dx \\
&= \text{Área del círculo de radio } 2 = 4\pi.
\end{aligned}$$

Como *integral de línea*, se puede parametrizar C como

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\,\mathbf{i} + 2 \text{ sen } t\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Para $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C M\, dx + N\, dy + P\, dz \\
&= \int_C 2z\, dx + x\, dy + y^2\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} [0 + 2 \cos t(2 \cos t) + 0]\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4 \cos^2 t\, dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\, dt \\
&= 2\Big[t + \frac{1}{2} \text{sen}\, 2t \Big]_0^{2\pi} \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

Interpretación física del rotacional

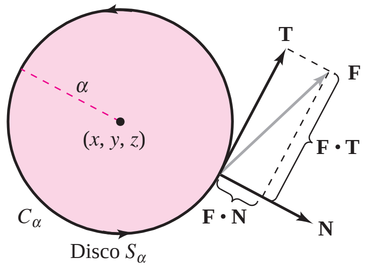


Figura 15.66

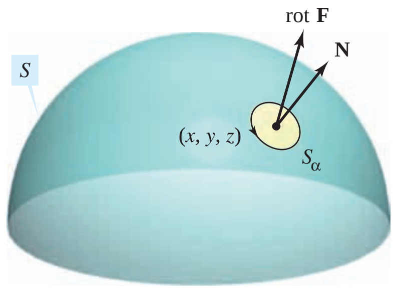


Figura 15.67

El teorema de Stokes proporciona una interesante interpretación física del rotacional. En un campo vectorial $\mathbf{F}$, sea S_α un *pequeño* disco circular de radio α, centrado en (x, y, z) y con frontera C_α, como se muestra en la figura 15.66. En cada punto en la circunferencia C_α, $\mathbf{F}$ tiene un componente normal $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ y un componente tangencial $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$. Cuanto más alineados están $\mathbf{F}$ y $\mathbf{T}$ mayor es el valor de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$. Así, un fluido tiende a moverse a lo largo del círculo en lugar de a través de él. Por consiguiente, se dice que la integral de línea alrededor de C_α mide la **circulación alrededor de C_α**. Es decir,

$$\int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \text{circulación de } \mathbf{F} \text{ alrededor de } C_\alpha$$

Ahora considérese un pequeño disco S_α centrado en algún punto (x, y, z) de la superficie S, como se muestra en la figura 15.67. En un disco tan pequeño, rot $\mathbf{F}$ es casi constante, porque varía poco con respecto a su valor en (x, y, z). Es más rot $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ es casi constante en S_α, porque todos los vectores unitarios normales en S_α son prácticamente iguales. Por consiguiente, del teorema de Stokes se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= \int_{S_\alpha}\!\!\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS \\ &\approx (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \int_{S_\alpha}\!\!\int dS \\ &\approx (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}(\pi\alpha^2).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} &\approx \frac{\displaystyle\int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds}{\pi\alpha^2} \\ &= \frac{\text{circulación de } \mathbf{F} \text{ alrededor de } C_\alpha}{\text{área de disco } S_\alpha} \\ &= \text{tasa o ritmo de circulación.}\end{aligned}$$

Suponiendo que las condiciones son tales que la aproximación mejora con discos cada vez más pequeños $(\alpha \to 0)$, se sigue que

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\pi\alpha^2} \int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

a lo que se le conoce como **rotación de F respecto de N**. Esto es,

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{N} = \text{rotación de } \mathbf{F} \text{ respecto de } \mathbf{N} \text{ en } (x, y, z).$$

En este caso, la rotación de $\mathbf{F}$ es máxima cuando rot $\mathbf{F}$ y $\mathbf{N}$ tienen la misma dirección. Normalmente, esta tendencia a rotar variará de punto a punto de la superficie S, y el teorema de Stokes

$$\underbrace{\int_S\!\!\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS}_{\text{Integral de superficie}} = \underbrace{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{Integral de línea}}$$

afirma que la medida colectiva de esta tendencia *rotacional* considerada sobre toda la superficie S (la integral de superficie) es igual a la tendencia de un fluido a *circular* alrededor de la frontera C (integral de línea).

EJEMPLO 3 Una aplicación del rotacional

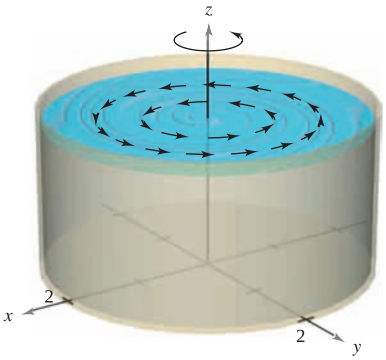


Figura 15.68

Un líquido es agitado en un recipiente cilíndrico de radio 2, de manera que su movimiento se describe por el campo de velocidad

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{i} + x\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{j}$$

como se muestra en la figura 15.68. Hallar

$$\int_S\!\!\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS$$

donde S es la superficie superior del recipiente cilíndrico.

Solución El rotacional de $\mathbf{F}$ está dado por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y\sqrt{x^2+y^2} & x\sqrt{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = 3\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k}.$$

Haciendo $\mathbf{N} = \mathbf{k}$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_S\!\!\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS &= \int_R\!\!\int 3\sqrt{x^2+y^2}\, dA \\ &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^2 (3r)r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} r^3\Big]_0^2\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 8\, d\theta \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

NOTA Si rot $\mathbf{F} = 0$ en toda la región Q, la rotación de $\mathbf{F}$ con respecto a cada vector unitario normal $\mathbf{N}$ es 0. Es decir, $\mathbf{F}$ es irrotacional. Por lo visto con anterioridad, se sabe que ésta es una característica de los campos vectoriales conservativos.

Resumen de fórmulas de integración

Teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Teorema fundamental de las integrales de línea:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

Teorema de Green:

$$\int_C M\, dx + N\, dy = \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_R\!\!\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds = \int_R\!\!\int \text{div } \mathbf{F}\, dA$$

Teorema de divergencia:

$$\int_S\!\!\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_Q \text{div } \mathbf{F}\, dV$$

Teorema de Stokes:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S\!\!\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS$$

15.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, hallar el rotacional del campo vectorial F.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y - z)\mathbf{i} + e^z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} - 4x^2\mathbf{j} + \arctan x\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x \operatorname{sen} y\mathbf{i} - y \cos x\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x^2+y^2}\mathbf{i} + e^{y^2+z^2}\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{arcsen} y\mathbf{i} + \sqrt{1 - x^2}\,\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$

En los ejercicios 7 a 10, verificar el teorema de Stokes evaluando $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ como integral de línea e integral doble.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y + z)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$
   S: $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y + z)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$
   S: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
   S: $6x + 6y + z = 12$, primer octante
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
    S: $z = y^2$, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$

En los ejercicios 11 a 20, utilizar el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados. En cada uno de los casos, C está orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj como se vio anteriormente.

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$
    C: triángulo cuyos vértices son (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = \arctan \dfrac{x}{y}\mathbf{i} + \ln\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$
    C: triángulo cuyos vértices son (0, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 2)
13. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
    S: $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 4xy\mathbf{k}$
    S: $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
    S: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}$
    S: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
17. $\mathbf{F}(x, y, z) = -\ln\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{i} + \arctan \dfrac{x}{y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$
    S: $z = 9 - 2x - 3y$ sobre de un pétalo de $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ en el primer octante
18. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + (2 - 3y)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$, $x^2 + y^2 \leq 16$
    S: la porción en el primer octante de $x^2 + z^2 = 16$ sobre $x^2 + y^2 = 16$
19. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
    S: $z = x^2$, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$
    $\mathbf{N}$ es el vector unitario normal a la superficie, dirigido hacia abajo.
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $x^2 + y^2 \leq a^2$
    S: la porción en el primer octante de $z = x^2$ sobre $x^2 + y^2 = a^2$

Movimiento de un líquido **En los ejercicios 21 y 22, el movimiento de un líquido en un recipiente cilíndrico de radio 1 se describe mediante el campo de velocidad $\mathbf{F}(x, y, z)$. Hallar $\int_S\int (\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS$, donde S es la superficie superior del recipiente cilíndrico.**

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
22. $\mathbf{F}(x, y, z) = -z\mathbf{i} + y\mathbf{k}$

Desarrollo de conceptos

23. Enunciar el teorema de Stokes.
24. Dar una interpretación física del rotacional.

25. Sean f y g funciones escalares con derivadas parciales continuas, y supóngase que C y S satisfacen las condiciones del teorema de Stokes. Verificar cada una de las identidades siguientes.
    a) $\int_C (f\nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \int_S\int (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{N}\, dS$
    b) $\int_C (f\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$
    c) $\int_C (f\nabla g + g\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$
26. Demostrar los resultados del ejercicio 25 para las funciones $f(x, y, z) = xyz$ y $g(x, y, z) = z$. Sea S el hemisferio $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
27. Sea $\mathbf{C}$ un vector constante. Sea S una superficie orientada con vector unitario normal $\mathbf{N}$, limitada o acotada por una curva suave C. Demostrar que
$$\int_S\int \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}\, dS = \frac{1}{2}\int_C (\mathbf{C} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Para discusión

28. Verificar el teorema de Stokes para cada campo vectorial dado y superficie orientada hacia arriba. ¿Es más fácil establecer la integral de línea o la integral doble?, ¿de evaluar? Explicar.
    a) $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{y+z}\mathbf{i}$
    C: cuadrado con vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0)
    b) $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
    S: la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que yace abajo del plano $z = 4$.

Preparación del examen Putman

29. Sea $\mathbf{G}(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2 + 4y^2}, \dfrac{x}{x^2 + 4y^2}, 0\right)$.

    Demostrar o refutar que hay una función vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z))$ con las propiedades siguientes.
    i) M, N, P tienen derivadas parciales continuas en todo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$;
    ii) Rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ para todo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$;
    iii) $\mathbf{F}(x, y, 0) = \mathbf{G}(x, y)$.

15 Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 y 2, calcular $\|\mathbf{F}\|$ y dibujar varios vectores representativos en el campo vectorial. Utilizar un sistema algebraico por computadora y verificar los resultados.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **2.** $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$

En los ejercicios 3 y 4, hallar el campo vectorial gradiente de la función escalar.

3. $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + z^2$ **4.** $f(x, y, z) = x^2 e^{yz}$

En los ejercicios 5 a 12, determinar si el campo vectorial es conservativo. Si es conservativo, hallar una función potencial para el campo vectorial.

5. $\mathbf{F}(x, y) = -\dfrac{y}{x^2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{x}\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{y}\mathbf{i} - \dfrac{y}{x^2}\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2 - x^2)\mathbf{i} + (x^2 y + y^2)\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (-2y^3 \operatorname{sen} 2x)\mathbf{i} + 3y^2(1 + \cos 2x)\mathbf{j}$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy^2\mathbf{i} + 2x^2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xy + z^2)\mathbf{i} + (2x^2 + 6yz)\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}}{y^2 z^2}$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} z(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k})$

En los ejercicios 13 a 20, hallar *a*) la divergencia del campo vectorial F y *b*) el rotacional del campo vectorial F.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + x^2 z\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos y + y\cos x)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} x - x\operatorname{sen} y)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x - y)\mathbf{i} + (y - 2z)\mathbf{j} + (z - 3x)\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{arcsen} x\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} - (x + \operatorname{sen}^2 y)\mathbf{j}$

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} + \ln(x^2 + y^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{z}{x}\mathbf{i} + \dfrac{z}{y}\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

En los ejercicios 21 a 26, calcular la integral de línea a lo largo de la(s) trayectoria(s) dada(s).

21. $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2)\, ds$

a) C: segmento de recta desde (0, 0) hasta (3, 4)

b) C: $x^2 + y^2 = 1$, una revolución en sentido contrario a las manecillas del reloj, empezando en (1, 0)

22. $\displaystyle\int_C xy\, ds$

a) C: segmento de recta desde (0, 0) hasta (5, 4)

b) C: en sentido contrario a las manecillas del reloj, a lo largo del triángulo de vértices (0, 0), (4, 0), (0, 2)

23. $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2)\, ds$

C: $\mathbf{r}(t) = (1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

24. $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2)\, ds$

C: $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t\cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

25. $\displaystyle\int_C (2x - y)\, dx + (x + 2y)\, dy$

a) C: segmento de recta desde (0, 0) hasta (3, –3)

b) C: en sentido contrario a las manecillas del reloj a lo largo del círculo $x = 3\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$

26. $\displaystyle\int_C (2x - y)\, dx + (x + 3y)\, dy$

C: $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t\operatorname{sen} t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

CAS **En los ejercicios 27 y 28, utilizar un sistema algebraico por computadora y calcular la integral de línea sobre la trayectoria dada.**

27. $\displaystyle\int_C (2x + y)\, ds$

$\mathbf{r}(t) = a\cos^3 t\,\mathbf{i} + a\operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j}$,

$0 \le t \le \pi/2$

28. $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$

$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^{3/2}\mathbf{k}$,

$0 \le t \le 4$

Área de una superficie lateral **En los ejercicios 29 y 30, hallar el área de la superficie lateral sobre la curva *C* en el plano *xy* y bajo la superficie $z = f(x, y)$.**

29. $f(x, y) = 3 + \operatorname{sen}(x + y)$

C: $y = 2x$ desde (0, 0) hasta (2, 4)

30. $f(x, y) = 12 - x - y$

C: $y = x^2$ desde (0, 0) hasta (2, 4)

En los ejercicios 31 a 36, evaluar $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

31. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$

32. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

33. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

C: $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

34. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$

C: curva en la intersección de $x^2 + z^2 = 4$ y $y^2 + z^2 = 4$ desde (2, 2, 0) hasta (0, 0, 2)

35. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

C: curva en la intersección de $z = x^2 + y^2$ y $y = x$ desde (0, 0, 0) hasta (2, 2, 8)

36. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - z)\mathbf{i} + (y^2 + z)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

C: la curva en la intersección de $z = x^2$ y $x^2 + y^2 = 4$ desde $(0, -2, 0)$ hasta (0, 2, 0)

CAS **En los ejercicios 37 y 38, utilizar un sistema algebraico por computadora y evaluar la integral de línea.**

37. $\int_C xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$

C: $y = x^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$ y $y = 2x$ desde $(2, 4)$ hasta $(0, 0)$

38. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$\mathbf{F}(x, y) = (2x - y)\mathbf{i} + (2y - x)\mathbf{j}$

C: $\mathbf{r}(t) = (2\cos t + 2t\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (2\operatorname{sen} t - 2t\cos t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi$

39. ***Trabajo*** Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - \sqrt{y}\mathbf{j}$ a lo largo de la trayectoria $y = x^{3/2}$ desde $(0, 0)$ hasta $(4, 8)$.

40. ***Trabajo*** Un avión de 20 toneladas sube 2 000 pies haciendo un giro de 90° en un arco circular de 10 millas de radio. Hallar el trabajo realizado por los motores.

En los ejercicios 41 y 42, usar el teorema fundamental de las integrales de línea para evaluar la integral.

41. $\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz$

C: curva suave desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 3, 2)$

42. $\int_C y\,dx + x\,dy + \frac{1}{z}\,dz$

C: curva suave desde $(0, 0, 1)$ hasta $(4, 4, 4)$

43. Evaluar la integral de línea $\int_C y^2\,dx + 2xy\,dy$.

a) C: $\mathbf{r}(t) = (1 + 3t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$

b) C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}$, $1 \le t \le 4$

c) Usar el teorema fundamental de las integrales de línea, donde C es una curva suave desde $(1, 1)$ hasta $(4, 2)$.

44. ***Área y centroide*** Considerar la región limitada o acotada por el eje x y un arco de la cicloide con ecuaciones paramétricas $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$ y $y = a(1 - \cos\theta)$. Usar integrales de línea para hallar *a*) el área de la región y *b*) el centroide de la región.

En los ejercicios 45 a 50, utilizar el teorema de Green para evaluar la integral de línea.

45. $\int_C y\,dx + 2x\,dy$

C: contorno del cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$

46. $\int_C xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$

C: contorno del cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$

47. $\int_C xy^2\,dx + x^2y\,dy$

C: $x = 4\cos t$, $y = 4\operatorname{sen} t$

48. $\int_C (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy$

C: $x^2 + y^2 = a^2$

49. $\int_C xy\,dx + x^2\,dy$

C: contorno de la región entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = 1$

50. $\int_C y^2\,dx + x^{4/3}\,dy$

C: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

CAS **En los ejercicios 51 y 52, utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie dada por la función vectorial.**

51. $\mathbf{r}(u, v) = \sec u \cos v\,\mathbf{i} + (1 + 2\tan u)\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + 2u\,\mathbf{k}$

$0 \le u \le \frac{\pi}{3}$, $0 \le v \le 2\pi$

52. $\mathbf{r}(u, v) = e^{-u/4}\cos v\,\mathbf{i} + e^{-u/4}\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + \frac{u}{6}\mathbf{k}$

$0 \le u \le 4$, $0 \le v \le 2\pi$

CAS **53.** ***Investigación*** Considerar la superficie representada por la función vectorial

$\mathbf{r}(u, v) = 3\cos v\cos u\,\mathbf{i} + 3\cos v\operatorname{sen} u\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} v\,\mathbf{k}$.

Utilizar un sistema algebraico por computadora y efectuar lo siguiente.

a) Representar gráficamente la superficie para $0 \le u \le 2\pi$ y $-\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$.

b) Representar gráficamente la superficie para $0 \le u \le 2\pi$ y $\frac{\pi}{4} \le v \le \frac{\pi}{2}$.

c) Representar gráficamente la superficie para $0 \le u \le \frac{\pi}{4}$ y $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$.

d) Representar gráficamente e identificar la curva en el espacio para $0 \le u \le 2\pi$ y $v = \frac{\pi}{4}$.

e) Aproximar el área de la superficie representada gráficamente en el inciso *b*).

f) Aproximar el área de la superficie representada gráficamente en el inciso *c*).

54. Evaluar la integral de superficie $\int\!\!\int_S z\,dS$ sobre la superficie S:

$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + \operatorname{sen} v\,\mathbf{k}$

donde $0 \le u \le 2$ y $0 \le v \le \pi$.

CAS **55.** Utilizar un sistema algebraico por computadora y representar gráficamente la superficie S y aproximar la integral de superficie

$\int\!\!\int_S (x + y)\,dS$

donde S es la superficie

S: $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + (u - 1)(2 - u)\mathbf{k}$

sobre $0 \le u \le 2$ y $0 \le v \le 2\pi$.

56. *Masa* Una lámina bidimensional cónica S está dada por

$$z = a\left(a - \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad 0 \leq z \leq a^2.$$

En cada punto en S, la densidad es proporcional a la distancia entre el punto y el eje z.

a) Dibujar la superficie cónica.

b) Calcular la masa m de la lámina.

En los ejercicios 57 y 58, verificar el teorema de divergencia evaluando

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

como integral de superficie y como integral triple.

57. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Q: región sólida limitada o acotada por los planos coordenados y por el plano $2x + 3y + 4z = 12$

58. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Q: región sólida limitada o acotada por los planos coordenados y el plano $2x + 3y + 4z = 12$

En los ejercicios 59 y 60, verificar el teorema de Stokes evaluando

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

como integral de línea y como integral doble.

59. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos y + y\cos x)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} x - x\operatorname{sen} y)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

S: porción de $z = y^2$ sobre el cuadrado en el plano xy con vértices $(0, 0), (a, 0), (a, a), (0, a)$

$\mathbf{N}$ es el vector unitario normal a la superficie dirigido hacia arriba.

60. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$

S: porción en el primer octante del plano $3x + y + 2z = 12$

61. Demostrar que no es posible que un campo vectorial con componentes dos veces diferenciables tenga un rotacional de $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

PROYECTO DE TRABAJO

El planímetro

Se han estudiado muchas técnicas de cálculo para hallar el área de una región plana. Los ingenieros usan un dispositivo mecánico llamado *planímetro* para medir áreas planas, el cual se basa en la fórmula para el área del teorema 15.9 (página 1096). Como puede verse en la figura, el planímetro se fija a un punto O (pero puede moverse libremente) y tiene un gozne en A. El extremo del brazo trazador AB se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj por el contorno de la región R. En B hay una rueda pequeña perpendicular a $\overline{AB}$ que está marcada con una escala para medir cuánto rueda mientras B recorre el contorno de la región R. En este proyecto se pide demostrar que el área de R está dada por la longitud L del brazo trazador $\overline{AB}$ multiplicada por la distancia D recorrida por la rueda.

Supóngase que el punto B recorre el contorno de R para $a \leq t \leq b$. El punto A se moverá hacia atrás y hacia adelante a lo largo de un arco circular centrado en el origen O. Sea $\theta(t)$ el ángulo que se indica en la figura y sean $(x(t), y(t))$ las coordenadas de A.

a) Mostrar que el vector $\overrightarrow{OB}$ está dado por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = [x(t) + L\cos\theta(t)]\mathbf{i} + [y(t) + L\operatorname{sen}\theta(t)]\mathbf{j}.$$

b) Mostrar que las dos integrales siguientes son iguales a cero.

$$I_1 = \int_a^b \frac{1}{2}L^2\frac{d\theta}{dt}\,dt$$

$$I_2 = \int_a^b \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

c) Utilizar la integral $\displaystyle\int_a^b [x(t)\operatorname{sen}\theta(t) - y(t)\cos\theta(t)]'\,dt$ para demostrar que las dos integrales siguientes son iguales.

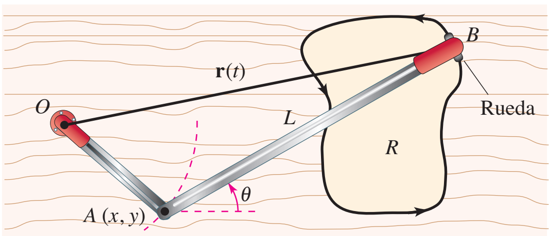
$$I_3 = \int_a^b \frac{1}{2}L\left(y\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt} + x\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)dt$$

$$I_4 = \int_a^b \frac{1}{2}L\left(-\operatorname{sen}\theta\frac{dx}{dt} + \cos\theta\frac{dy}{dt}\right)dt$$

d) Sea $\mathbf{N} = -\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$. Explicar por qué la distancia D recorrida por la rueda está dada por

$$D = \int_C \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}\,ds.$$

e) Mostrar que el área de la región R está dada por $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = DL$.



PARA MAYOR INFORMACIÓN Para más información sobre el uso del cálculo para hallar áreas irregulares, ver "The Amateur Scientist" de C. L. Strong en la edición de agosto de 1958 publicación de *Scientific American*.

SP Solución de problemas

1. El calor fluye de áreas de mayor temperatura a áreas de menor temperatura en dirección de la mayor variación. Como resultado, en la medición del flujo de calor juega un papel relevante el gradiente de temperatura. El flujo depende del área de la superficie. Lo importante es la dirección normal a la superficie, porque el calor que fluye en dirección tangencial a la superficie no ocasiona pérdida de calor. Así, supóngase que el flujo de calor a través de una porción ΔS del área de la superficie está dado por $\Delta H \approx -k\nabla T \cdot \mathbf{N}\, dS$, donde T es la temperatura, $\mathbf{N}$ es el vector unitario normal a la superficie en la dirección del flujo de calor, y k es la difusividad térmica del material. El flujo de calor a través de la superficie S está dado por

$$H = \iint_S -k\nabla T \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

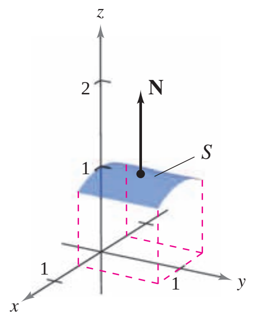
Considerar una sola fuente de calor localizada en el origen con temperatura

$$T(x, y, z) = \frac{25}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

a) Calcular el flujo de calor a través de la superficie

$$S = \left\{(x, y, z): z = \sqrt{1 - x^2}, -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le 1\right\}$$

como se muestra en la figura.



b) Repetir el cálculo del inciso *a*) usando la parametrización

$$x = \cos u, \quad y = v, \quad z = \operatorname{sen} u, \quad \frac{\pi}{3} \le u \le \frac{2\pi}{3}, \quad 0 \le v \le 1.$$

2. Considerar una sola fuente de calor localizada en el origen con temperatura

$$T(x, y, z) = \frac{25}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

a) Calcular el flujo de calor a través de la superficie

$$S = \left\{(x, y, z):\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

como se muestra en la figura.

b) Repetir el cálculo del inciso *a*) usando la parametrización $x = \operatorname{sen} u \cos v$, $y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = \cos u$, $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le v \le 2\pi$.

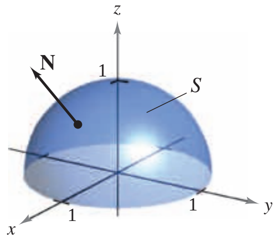


Figura para 2

3. Considerar un cable de densidad $\rho(x, y, z)$ dado por la curva en el espacio

C: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \le t \le b.$

Los **momentos de inercia** con respecto a los ejes x, y y z están dados por

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, ds.$$

Hallar los momentos de inercia de un cable de densidad uniforme $\rho = 1$ en forma de hélice

$\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$ (ver la figura).

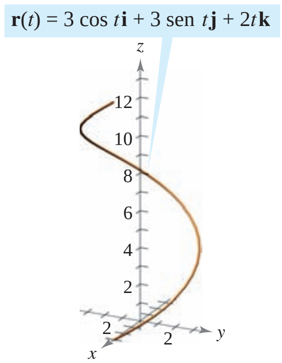


Figura para 3

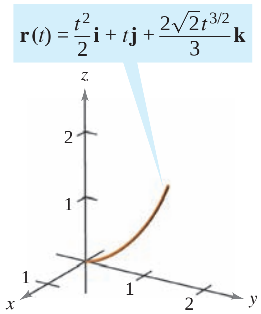


Figura para 4

4. Hallar los momentos de inercia del cable de densidad $\rho = \dfrac{1}{1 + t}$ dado por la curva

C: $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t^2}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \dfrac{2\sqrt{2}\,t^{3/2}}{3}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$ (ver la figura).

5. El **laplaciano** es el operador diferencial

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

y la **ecuación de Laplace** es

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

Cualquier función que satisface esta ecuación se llama **armónica**. Demostrar que la función $w = 1/f$ es armónica.

CAS **6.** Considerar la integral de línea

$$\int_C y^n\,dx + x^n\,dy$$

donde C es la frontera de la región que yace entre las gráficas de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > 0)$ y $y = 0$.

a) Usar un sistema algebraico por computadora para verificar el teorema de Green para n, un entero impar de 1 a 7.

b) Usar un sistema algebraico por computadora para verificar el teorema de Green para n, un entero par de 2 a 8.

c) Para un entero impar n, conjeturar acerca del valor de la integral.

7. Utilizar una integral de línea para calcular el área limitada o acotada por un arco de la cicloide

$$x(\theta) = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \quad y(\theta) = a(1 - \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

como se muestra en la figura.

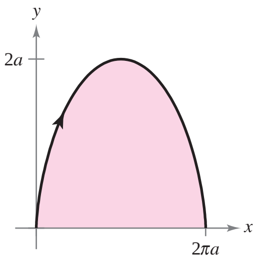


Figura para 7

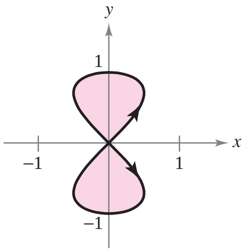


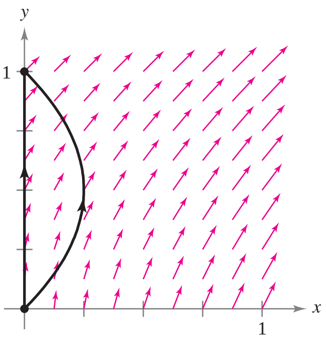
Figura para 8

8. Utilizar una integral de línea para hallar el área limitada o acotada por los dos lazos de la curva ocho

$$x(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

que se muestra en la figura.

9. El campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x^2 + 1)\mathbf{j}$ actúa sobre un objeto que se mueve del punto $(0, 0)$ al punto $(0, 1)$, como se muestra en la figura.

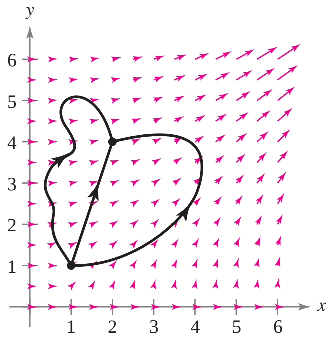


a) Hallar el trabajo realizado si el objeto sigue la trayectoria $x = 0$, $0 \le y \le 1$.

b) Hallar el trabajo realizado si el objeto sigue la trayectoria $x = y - y^2$, $0 \le y \le 1$.

c) Supóngase que el objeto sigue la trayectoria $x = c(y - y^2)$, $0 \le y \le 1$, $c > 0$. Hallar el valor de la constante c que minimiza el trabajo.

10. El campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y^2)\mathbf{i} + (2x^3y)\mathbf{j}$ se muestra en la figura. Tres partículas se mueven del punto $(1, 1)$ al punto $(2, 4)$ a lo largo de trayectorias diferentes. Explicar por qué el trabajo realizado es el mismo con las tres partículas, y hallar el valor del trabajo.



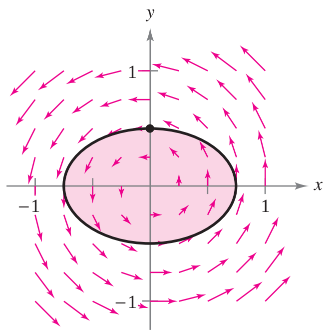
11. Sea S una superficie suave orientada, con vector normal $\mathbf{N}$, acotada por una curva suave simple cerrada C. Sea $\mathbf{v}$ un vector constante. Demostrar que

$$\int_S\!\!\int (2\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})\,dS = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

12. Comparar el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ con la magnitud del trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = -\frac{1}{2}y\mathbf{i} + \frac{1}{2}x\mathbf{j}$$

sobre una partícula que da una vuelta alrededor de la elipse (ver la figura).



13. Una sección transversal del campo magnético de la Tierra puede representarse como un campo vectorial en el cual el centro de la Tierra se localiza en el origen y el eje y positivo apunta en dirección del polo norte magnético. La ecuación para este campo es

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$
$$= \frac{m}{(x^2 + y^2)^{5/2}}[3xy\mathbf{i} + (2y^2 - x^2)\mathbf{j}]$$

donde m es el momento magnético de la Tierra. Demostrar que este campo vectorial es conservativo.

Apéndices

A Demostración de teoremas seleccionados

TEOREMA 10.16 CLASIFICACIÓN DE CÓNICAS MEDIANTE LA EXCENTRICIDAD (PÁGINA 750)

Sean F un punto fijo (*foco*) y D una recta fija (*directriz*) en el plano. Sean también P otro punto del plano y e (*excentricidad*) la proporción que existe entre la distancia que hay de P a F y la distancia de P a D. El conjunto de todos los puntos P con una excentricidad dada es una cónica.

1. La cónica es una elipse si $0 < e < 1$.
2. La cónica es una parábola si $e = 1$.
3. La cónica es una hipérbola si $e > 1$.

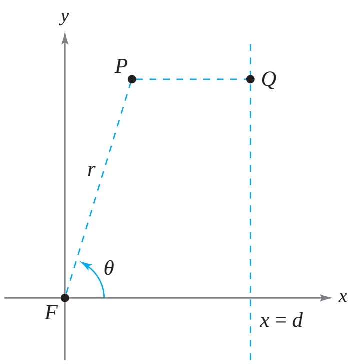


Figura A.1

DEMOSTRACIÓN Si $e = 1$ entonces, por definición, la cónica debe ser una parábola. Si $e \neq 1$, entonces considerar el foco F que se encuentra en el origen y la directriz $x = d$ a la derecha del origen, como se muestra en la figura A.1. En el punto $P = (r, \theta) = (x, y)$, se tiene $|PF| = r$ y $|PQ| = d - r\cos\theta$. Dado que $e = |PF|/|PQ|$, se deduce que

$$|PF| = |PQ|e \quad \Rightarrow \quad r = e(d - r\cos\theta).$$

Convirtiendo a coordenadas rectangulares y elevando al cuadrado ambos lados, se obtiene

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2).$$

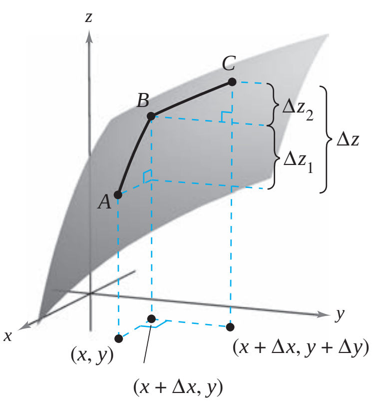
Completando el procedimiento

$$\left(x + \frac{e^2 d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Si $e < 1$, esta ecuación representa a una elipse. Si $e > 1$, entonces $1 - e^2 < 0$, y la ecuación representa a una hipérbola.

TEOREMA 13.4 CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA DIFERENCIABILIDAD (PÁGINA 919)

Si f es una función de x y y, y además f_x y f_y son continuas en una región abierta R, entonces f es derivable en R.



$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

Figura A.2

DEMOSTRACIÓN Sea la superficie definida por $z = f(x, y)$ donde f, f_x y f_y son continuas en (x, y). Además, sean A, B y C puntos en la superficie, como se muestra en la figura A.2. En la figura observamos que el cambio de f del punto A al punto C se encuentra por medio de

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)\\ &= [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] + [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)]\\ &= \Delta z_1 + \Delta z_2.\end{aligned}$$

Desde A hasta B, y es fija y x cambia. Entonces, mediante el teorema del valor promedio, existe un valor x_1 entre x y $x + \Delta x$ tal que

$$\Delta z_1 = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = f_x(x_1, y)\,\Delta x.$$

Del mismo modo, desde B hasta C, x es fija, y cambia, y existe un valor y_1 entre y y $y + \Delta y$ tal que

$$\Delta z_2 = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) = f_y(x + \Delta x, y_1)\,\Delta y.$$

Combinando estos dos resultados, escribir

$$\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 = f_x(x_1, y)\Delta x + f_y(x + \Delta x, y_1)\,\Delta y.$$

Definiendo ε_1 y ε_2 como $\varepsilon_1 = f_x(x_1, y) - f_x(x, y)$ y $\varepsilon_2 = f_y(x + \Delta x, y_1) - f_y(x, y)$, se deduce que

$$\begin{aligned}\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 &= [\varepsilon_1 + f_x(x, y)]\,\Delta x + [\varepsilon_2 + f_y(x, y)]\,\Delta y\\ &= [\,f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y] + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y.\end{aligned}$$

Por medio de la continuidad de f_x y f_y y del hecho de que $x \le x_1 \le x + \Delta x$ y $y \le y_1 \le y + \Delta y$, se deduce que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando lo hacen $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. De tal modo, por definición, f es derivable.

TEOREMA 13.6 REGLA DE LA CADENA: UNA VARIABLE INDEPENDIENTE (PÁGINA 925)

Sea $w = f(x, y)$ donde f es una función diferenciable de x y y. Si $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde g y h son funciones diferenciables de t, entonces w es una función diferenciable de t, y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

DEMOSTRACIÓN Puesto que g y h son funciones diferenciables de t, se sabe que Δx y Δy tienden a cero a medida que lo hace Δt. Además, como f es una función derivable de x y y, se sabe que $\Delta w = (\partial w/\partial x)\,\Delta x + (\partial w/\partial y)\,\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$, donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ a medida que $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Por tanto, para $\Delta t \neq 0$

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

de lo que se deduce que

$$\frac{dw}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0\left(\frac{dx}{dt}\right) + 0\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

B Tablas de integración

Fórmulas u^n

1. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

Integrales con la forma $a + bu$

3. $\displaystyle\int \frac{u}{a+bu}\,du = \frac{1}{b^2}\big(bu - a\ln|a+bu|\big) + C$

4. $\displaystyle\int \frac{u}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bu} + \ln|a+bu|\right) + C$

5. $\displaystyle\int \frac{u}{(a+bu)^n}\,du = \frac{1}{b^2}\left[\frac{-1}{(n-2)(a+bu)^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)(a+bu)^{n-1}}\right] + C,\quad n \neq 1, 2$

6. $\displaystyle\int \frac{u^2}{a+bu}\,du = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{bu}{2}(2a-bu) + a^2\ln|a+bu|\right] + C$

7. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^3}\left(bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$

8. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^3}\,du = \frac{1}{b^3}\left[\frac{2a}{a+bu} - \frac{a^2}{2(a+bu)^2} + \ln|a+bu|\right] + C$

9. $\displaystyle\int \frac{u^2}{(a+bu)^n}\,du = \frac{1}{b^3}\left[\frac{-1}{(n-3)(a+bu)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(a+bu)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(a+bu)^{n-1}}\right] + C,\quad n \neq 1, 2, 3$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{u(a+bu)}\,du = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{u(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a+bu} + \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right) + C$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2(a+bu)}\,du = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{u} + \frac{b}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right) + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2(a+bu)^2}\,du = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{a+2bu}{u(a+bu)} + \frac{2b}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right] + C$

Integrales con la forma $a + bu + cu^2,\ b^2 \neq 4ac$

14. $$\int \frac{1}{a + bu + cu^2}\,du = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \dfrac{2cu + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C, & b^2 < 4ac \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln\left|\dfrac{2cu + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cu + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right| + C, & b^2 > 4ac \end{cases}$$

15. $$\int \frac{u}{a + bu + cu^2}\,du = \frac{1}{2c}\left(\ln|a + bu + cu^2| - b \int \frac{1}{a + bu + cu^2}\,du\right)$$

Integrales con la forma $\sqrt{a + bu}$

16. $$\int u^n \sqrt{a + bu}\,du = \frac{2}{b(2n + 3)}\left[u^n(a + bu)^{3/2} - na \int u^{n-1}\sqrt{a + bu}\,du\right]$$

17. $$\int \frac{1}{u\sqrt{a + bu}}\,du = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\dfrac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}}\right| + C, & a > 0 \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\dfrac{a + bu}{-a}} + C, & a < 0 \end{cases}$$

18. $$\int \frac{1}{u^n\sqrt{a + bu}}\,du = \frac{-1}{a(n - 1)}\left[\frac{\sqrt{a + bu}}{u^{n-1}} + \frac{(2n - 3)b}{2} \int \frac{1}{u^{n-1}\sqrt{a + bu}}\,du\right],\ n \neq 1$$

19. $$\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a + bu} + a\int \frac{1}{u\sqrt{a + bu}}\,du$$

20. $$\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u^n}\,du = \frac{-1}{a(n - 1)}\left[\frac{(a + bu)^{3/2}}{u^{n-1}} + \frac{(2n - 5)b}{2} \int \frac{\sqrt{a + bu}}{u^{n-1}}\,du\right],\ n \neq 1$$

21. $$\int \frac{u}{\sqrt{a + bu}}\,du = \frac{-2(2a - bu)}{3b^2}\sqrt{a + bu} + C$$

22. $$\int \frac{u^n}{\sqrt{a + bu}}\,du = \frac{2}{(2n + 1)b}\left(u^n\sqrt{a + bu} - na \int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a + bu}}\,du\right)$$

Integrales con la forma $a^2 \pm u^2,\ a > 0$

23. $$\int \frac{1}{a^2 + u^2}\,du = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$$

24. $$\int \frac{1}{u^2 - a^2}\,du = -\int \frac{1}{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C$$

25. $$\int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^n}\,du = \frac{1}{2a^2(n - 1)}\left[\frac{u}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + (2n - 3)\int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}}\,du\right],\ n \neq 1$$

Integrales con la forma $\sqrt{u^2 \pm a^2},\ a > 0$

26. $$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C$$

27. $$\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{8}\left[u(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - a^4 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right] + C$$

28. $$\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 + a^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + C$$

29. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2}\,du = \frac{-\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 + a^2}}\,du = \frac{-1}{a} \ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\,du = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = \mp \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}}\,du = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$

Integrales con la forma $\sqrt{a^2 - u^2},\ a > 0$

37. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{u}{a}\right) + C$

38. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{8}\left[u(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + a^4 \operatorname{arcsen} \frac{u}{a}\right] + C$

39. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

40. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\,du = \frac{-\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C$

41. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \frac{-1}{a} \ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \frac{1}{2}\left(-u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{u}{a}\right) + C$

44. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \frac{-\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2 - u^2)^{3/2}}\,du = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

Integrales con la forma $\operatorname{sen} u$ o $\cos u$

46. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$

47. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$

48. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2}(u - \operatorname{sen} u \cos u) + C$

49. $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}(u + \operatorname{sen} u \cos u) + C$

50. $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$

51. $\int \cos^n u\, du = \frac{\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$

52. $\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

53. $\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

54. $\int u^n \operatorname{sen} u\, du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1} \cos u\, du$

55. $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1} \operatorname{sen} u\, du$

56. $\int \frac{1}{1 \pm \operatorname{sen} u}\, du = \tan u \mp \sec u + C$

57. $\int \frac{1}{1 \pm \cos u}\, du = -\cot u \pm \csc u + C$

58. $\int \frac{1}{\operatorname{sen} u \cos u}\, du = \ln|\tan u| + C$

Integrales con la forma $\tan u$, $\cot u$, $\sec u$, $\csc u$

59. $\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + C$

60. $\int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

61. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

62. $\int \csc u\, du = \ln|\csc u - \cot u| + C$ o $\int \csc u\, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$

63. $\int \tan^2 u\, du = -u + \tan u + C$

64. $\int \cot^2 u\, du = -u - \cot u + C$

65. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

66. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

67. $\int \tan^n u\, du = \frac{\tan^{n-1} u}{n-1} - \int \tan^{n-2} u\, du,\ n \neq 1$

68. $\int \cot^n u\, du = -\frac{\cot^{n-1} u}{n-1} - \int (\cot^{n-2} u)\, du,\ n \neq 1$

69. $\int \sec^n u\, du = \frac{\sec^{n-2} u \tan u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du,\ n \neq 1$

70. $\int \csc^n u\, du = -\frac{\csc^{n-2} u \cot u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du,\ n \neq 1$

71. $\int \frac{1}{1 \pm \tan u}\, du = \frac{1}{2}\left(u \pm \ln|\cos u \pm \operatorname{sen} u|\right) + C$

72. $\int \frac{1}{1 \pm \cot u}\, du = \frac{1}{2}\left(u \mp \ln|\operatorname{sen} u \pm \cos u|\right) + C$

73. $\int \frac{1}{1 \pm \sec u}\, du = u + \cot u \mp \csc u + C$

74. $\int \frac{1}{1 \pm \csc u}\, du = u - \tan u \pm \sec u + C$

Integrales con funciones trigonométricas inversas

75. $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} u\, du = u \operatorname{arcsen} u + \sqrt{1-u^2} + C$

76. $\displaystyle\int \arccos u\, du = u \arccos u - \sqrt{1-u^2} + C$

77. $\displaystyle\int \arctan u\, du = u \arctan u - \ln\sqrt{1+u^2} + C$

78. $\displaystyle\int \operatorname{arccot} u\, du = u \operatorname{arccot} u + \ln\sqrt{1+u^2} + C$

79. $\displaystyle\int \operatorname{arcsec} u\, du = u \operatorname{arcsec} u - \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C$

80. $\displaystyle\int \operatorname{arccsc} u\, du = u \operatorname{arccsc} u + \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C$

Integrales con la forma e^u

81. $\displaystyle\int e^u\, du = e^u + C$

82. $\displaystyle\int ue^u\, du = (u-1)e^u + C$

83. $\displaystyle\int u^n e^u\, du = u^n e^u - n\int u^{n-1}e^u\, du$

84. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^u}\, du = u - \ln(1+e^u) + C$

85. $\displaystyle\int e^{au} \operatorname{sen} bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

86. $\displaystyle\int e^{au} \cos bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \cos bu + b\operatorname{sen} bu) + C$

Integrales con la forma ln u

87. $\displaystyle\int \ln u\, du = u(-1+\ln u) + C$

88. $\displaystyle\int u\ln u\, du = \frac{u^2}{4}(-1+2\ln u) + C$

89. $\displaystyle\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[-1+(n+1)\ln u] + C,\ n \neq -1$

90. $\displaystyle\int (\ln u)^2\, du = u\left[2 - 2\ln u + (\ln u)^2\right] + C$

91. $\displaystyle\int (\ln u)^n\, du = u(\ln u)^n - n\int (\ln u)^{n-1}\, du$

Integrales con funciones hiperbólicas

92. $\displaystyle\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

93. $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

94. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

95. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

96. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

97. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

Integrales con funciones hiperbólicas inversas (en forma logarítmica)

98. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$

99. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

100. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C$

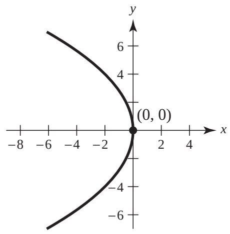
Soluciones de los ejercicios impares

Capítulo 10

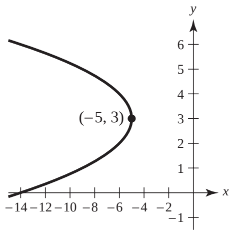
Sección 10.1 (página 706)

1. h **2.** a **3.** e **4.** b **5.** f **6.** g **7.** c **8.** d

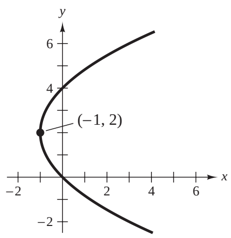
9. Vértice: $(0, 0)$
Foco: $(-2, 0)$
Directriz: $x = 2$



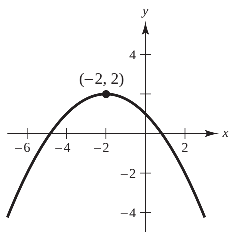
11. Vértice: $(-5, 3)$
Foco: $\left(-\frac{21}{4}, 3\right)$
Directriz: $x = -\frac{19}{4}$



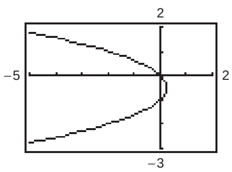
13. Vértice: $(-1, 2)$
Foco: $(0, 2)$
Directriz: $x = -2$



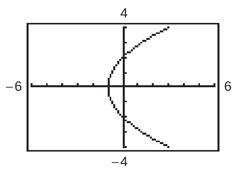
15. Vértice: $(-2, 2)$
Foco: $(-2, 1)$
Directriz: $y = 3$



17. Vértice: $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$
Foco: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
Directriz: $x = \frac{1}{2}$



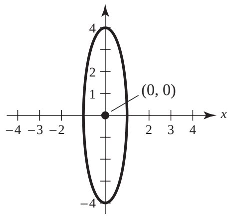
19. Vértice: $(-1, 0)$
Foco: $(0, 0)$
Directriz: $x = -2$



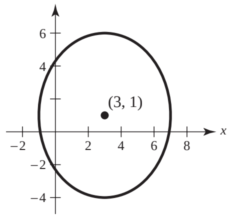
21. $y^2 - 8y + 8x - 24 = 0$ **23.** $x^2 - 32y + 160 = 0$

25. $x^2 + y - 4 = 0$ **27.** $5x^2 - 14x - 3y + 9 = 0$

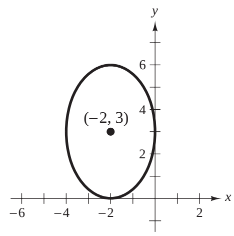
29. Centro: $(0, 0)$
Focos: $\left(0, \pm\sqrt{15}\right)$
Vértices: $(0, \pm 4)$
$e = \sqrt{15}/4$



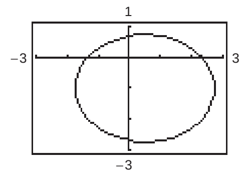
31. Centro: $(3, 1)$
Focos: $(3, 4), (3, -2)$
Vértices: $(3, 6), (3, -4)$
$e = \frac{3}{5}$



33. Centro: $(-2, 3)$
Focos: $\left(-2, 3 \pm \sqrt{5}\right)$
Vértices: $(-2, 6), (-2, 0)$
$e = \sqrt{5}/3$

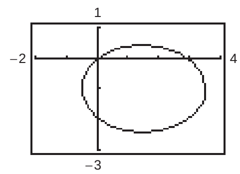


35. Centro: $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
Focos: $\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}, -1\right)$
Vértices: $\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{5}, -1\right)$
Para obtener la gráfica, despejar y y obtener



$y_1 = -1 + \sqrt{(57 + 12x - 12x^2)/20}$ y
$y_2 = -1 - \sqrt{(57 + 12x - 12x^2)/20}$.
Representar gráficamente estas ecuaciones en la misma pantalla.

37. Centro: $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$
Focos: $\left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{2}, -1\right)$
Vértices: $\left(-\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{7}{2}, -1\right)$
Para obtener la gráfica, despejar y y obtener

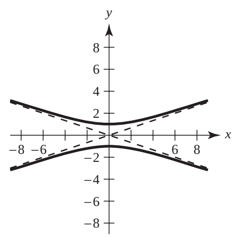


$y_1 = -1 + \sqrt{(7 + 12x - 4x^2)/8}$ y
$y_2 = -1 - \sqrt{(7 + 12x - 4x^2)/8}$.
Representar gráficamente estas ecuaciones en la misma pantalla.

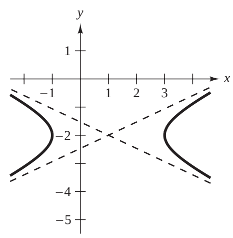
39. $x^2/36 + y^2/11 = 1$ **41.** $(x - 3)^2/9 + (y - 5)^2/16 = 1$

43. $x^2/16 + 7y^2/16 = 1$

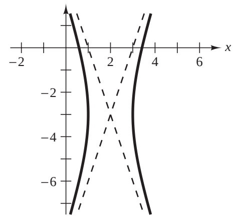
45. Centro: $(0, 0)$
Focos: $\left(0, \pm\sqrt{10}\right)$
Vértices: $(0, \pm 1)$



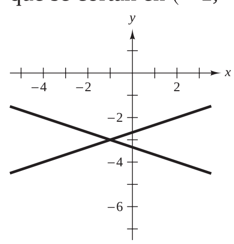
47. Centro: $(1, -2)$
Focos: $\left(1 \pm \sqrt{5}, -2\right)$
Vértices: $(-1, -2), (3, -2)$



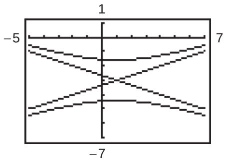
49. Centro: $(2, -3)$
Focos: $\left(2 \pm \sqrt{10}, -3\right)$
Vértices: $(1, -3), (3, -3)$



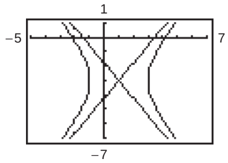
51. Hipérbola degenerada
La gráfica consta de dos rectas
$y = -3 \pm \frac{1}{3}(x + 1)$
que se cortan en $(-1, -3)$.



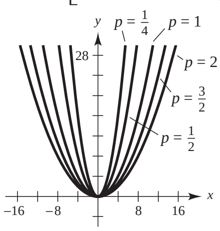
53. Centro: $(1, -3)$
Focos: $\left(1, -3 \pm 2\sqrt{5}\right)$
Vértices: $\left(1, -3 \pm \sqrt{2}\right)$
Asíntotas:
$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} - 3;$
$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - 3$



55. Centro: $(1, -3)$
Focos: $\left(1 \pm \sqrt{10}, -3\right)$
Vértices: $(-1, -3), (3, -3)$
Asíntotas:
$y = \sqrt{6}\,x/2 - \sqrt{6}/2 - 3;$
$y = -\sqrt{6}\,x/2 + \sqrt{6}/2 - 3$

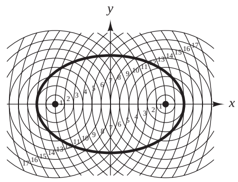


57. $x^2/1 - y^2/25 = 1$ **59.** $y^2/9 - (x - 2)^2/(9/4) = 1$
61. $y^2/4 - x^2/12 = 1$ **63.** $(x - 3)^2/9 - (y - 2)^2/4 = 1$
65. *a*) $\left(6, \sqrt{3}\right)$: $2x - 3\sqrt{3}y - 3 = 0$
$\left(6, -\sqrt{3}\right)$: $2x + 3\sqrt{3}y - 3 = 0$
b) $\left(6, \sqrt{3}\right)$: $9x + 2\sqrt{3}y - 60 = 0$
$\left(6, -\sqrt{3}\right)$: $9x - 2\sqrt{3}y - 60 = 0$
67. Elipse **69.** Parábola **71.** Círculo
73. Círculo **75.** Hipérbola
77. *a*) Una parábola es el conjunto de todos los puntos (x, y) que equidistan de una recta fija y de un punto fijo que no se encuentra en la recta.
b) Para la directriz $y = k - p$: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
Para la directriz $x = h - p$: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
c) Si P es un punto de la parábola, entonces la recta tangente a la parábola en P forma ángulos iguales con la recta que pasa por P y el foco, y con la recta que pasa por P y es paralela al eje de la parábola.
79. *a*) Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos (x, y) para los cuales el valor absoluto de la diferencia entre las distancias a dos puntos fijos distintos es una constante.
b) El eje transversal es horizontal: $\dfrac{(x - h)^2}{a^2} - \dfrac{(y - k)^2}{b^2} = 1$
El eje transversal es vertical: $\dfrac{(y - k)^2}{a^2} - \dfrac{(x - h)^2}{b^2} = 1$
c) El eje transversal es horizontal:
$y = k + (b/a)(x - h)$ y $y = k - (b/a)(x - h)$
El eje transversal es vertical:
$y = k + (a/b)(x - h)$ y $y = k - (a/b)(x - h)$
81. $\frac{9}{4}$ m **83.** $y = 2ax_0x - ax_0^2$
85. *a*) Demostración *b*) Demostración
87. $x_0 = 2\sqrt{3}/3$; Distancia de la colina: $2\sqrt{3}/3 - 1$
89. $[16(4 + 3\sqrt{3} - 2\pi)]/3 \approx 15.536$ pies^2
91. *a*) $y = (1/180)x^2$
b) $10\left[2\sqrt{13} + 9\ln\left(\dfrac{2 + \sqrt{13}}{3}\right)\right] \approx 128.4$ m
93.

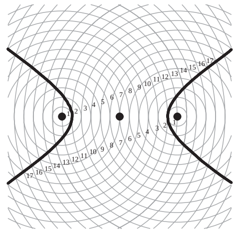


Cuando p se incrementa, la gráfica de $x^2 = 4py$ se hace más abierta.

95. *a*) $L = 2a$
b) Los alfileres se localizan en los focos y la longitud de la cuerda es la suma constante de las distancias desde los focos.
97.



99. Demostración
101. $e \approx 0.1776$
103. $e \approx 0.9671$ **105.** $\left(0, \frac{25}{3}\right)$
107. Extremos del eje menor: $(-6, -2), (0, -2)$
Extremos del eje mayor: $(-3, -6), (-3, 2)$
109. *a*) Área $= 2\pi$
b) Volumen $= 8\pi/3$
Área de la superficie $= [2\pi(9 + 4\sqrt{3}\pi)]/9 \approx 21.48$
c) Volumen $= 16\pi/3$
Área de la superficie $= \dfrac{4\pi\left[6 + \sqrt{3}\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right]}{3} \approx 34.69$
111. 37.96 **113.** 40 **115.** $(x - 6)^2/9 - (y - 2)^2/7 = 1$
117.



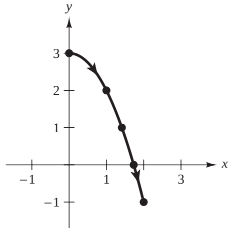
119. Demostración
121. $x = \left(-90 + 96\sqrt{2}\right)/7 \approx 6.538$
$y = \left(160 - 96\sqrt{2}\right)/7 \approx 3.462$
123. Hay cuatro puntos de intersección.
En $\left(\dfrac{\sqrt{2}\,ac}{\sqrt{2a^2 - b^2}}, \dfrac{b^2}{\sqrt{2}\sqrt{2a^2 - b^2}}\right)$, las pendientes de las rectas tangentes son $y'_e = -c/a$ y $y'_h = a/c$.
Como las pendientes son negativos recíprocos, las rectas tangentes son perpendiculares. De manera similar, las curvas son perpendiculares en los otros tres puntos de intersección.
125. Falso. Ver la definición de parábola. **127.** Verdadero
129. Verdadero **131.** Problema Putnam B4, 1976

Sección 10.2 (página 718)

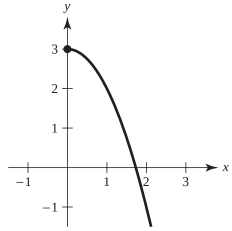
1. *a*)

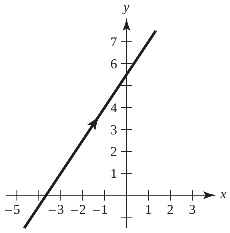
t	0	1	2	3	4
x	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
y	3	2	1	0	-1

b) y *c*)

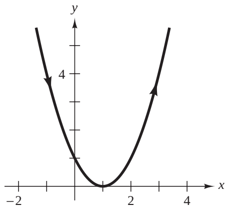


d) $y = 3 - x^2, x \geq 0$

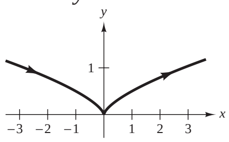


3. 

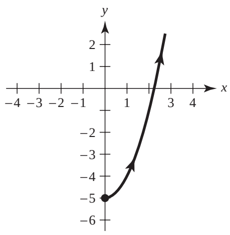
$3x - 2y + 11 = 0$

5. 

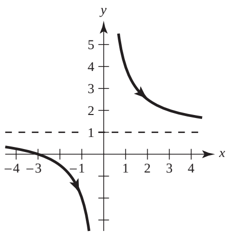
$y = (x - 1)^2$

7. 

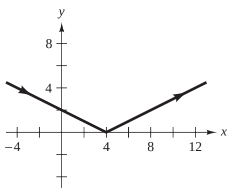
$y = \frac{1}{2}x^{2/3}$

9. 

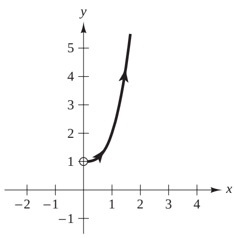
$y = x^2 - 5, \quad x \geq 0$

11. 

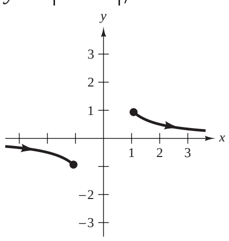
$y = (x + 3)/x$

13. 

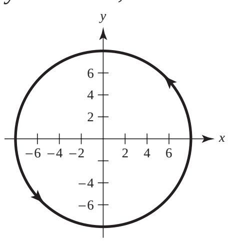
$y = |x - 4|/2$

15. 

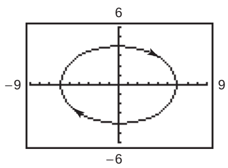
$y = x^3 + 1, \quad x > 0$

17. 

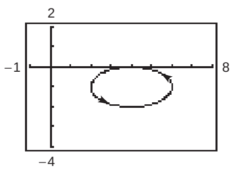
$y = 1/x, \quad |x| \geq 1$

19. 

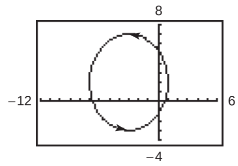
$x^2 + y^2 = 64$

21. 

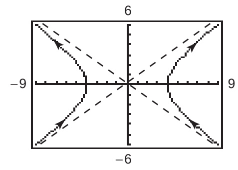
$\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

23. 

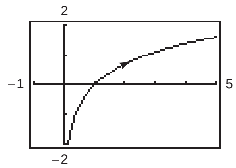
$\dfrac{(x - 4)^2}{4} + \dfrac{(y + 1)^2}{1} = 1$

25. 

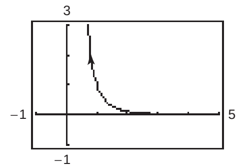
$\dfrac{(x + 3)^2}{16} + \dfrac{(y - 2)^2}{25} = 1$

27. 

$\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

29. 

$y = \ln x$

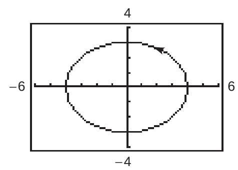
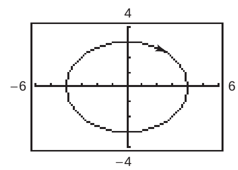
31. 

$y = 1/x^3, \quad x > 0$

33. Cada curva representa una porción de la recta $y = 2x + 1$.

	Dominio	*Orientación*	*Suave*
a)	$-\infty < x < \infty$	Hacia arriba	Sí
b)	$-1 \leq x \leq 1$	Oscila	No, $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{dy}{d\theta} = 0$ cuando $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
c)	$0 < x < \infty$	Hacia abajo	Sí
d)	$0 < x < \infty$	Hacia arriba	Sí

35. *a*) y *b*) representan la parábola $y = 2(1 - x^2)$ para $-1 \leq x \leq 1$. La curva es suave. La orientación es de derecha a izquierda en el inciso *a*) y en el inciso *b*)

37. *a*)  

b) La orientación se invierte. *c*) La orientación se invierte.

d) Las respuestas varían. Por ejemplo,

$x = 2 \sec t \qquad x = 2 \sec(-t)$

$y = 5 \operatorname{sen} t \qquad y = 5 \operatorname{sen}(-t)$

tienen las mismas gráficas, pero sus orientaciones se invierten.

39. $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

41. $\dfrac{(x - h)^2}{a^2} + \dfrac{(y - k)^2}{b^2} = 1$

43. $x = 4t$
$y = -7t$
(La solución no es única)

45. $x = 3 + 2 \cos \theta$
$y = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$
(La solución no es única)

47. $x = 10 \cos \theta$
$y = 6 \operatorname{sen} \theta$
(La solución no es única)

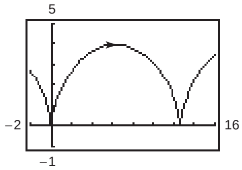
49. $x = 4 \sec \theta$
$y = 3 \tan \theta$
(La solución no es única)

51. $x = t$
$y = 6t - 5;$
$x = t + 1$
$y = 6t + 1$
(La solución no es única)

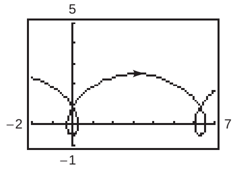
53. $x = t$
$y = t^3;$
$x = \tan t$
$y = \tan^3 t$
(La solución no es única)

55. $x = t + 3, y = 2t + 1$

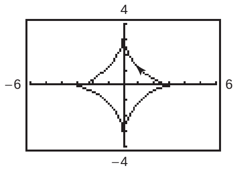
57. $x = t, y = t^2$

59. 

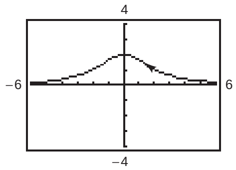
No es suave cuando $\theta = 2n\pi$

61. 

Suave en todas partes

63. 

No es suave cuando $\theta = \frac{1}{2}n\pi$

65. 

Suave en todas partes

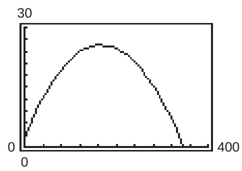
67. Cada punto (x, y) en el plano es determinado por la curva plana $x = f(t), y = g(t)$. Para cada t, graficar (x, y). Cuando t se incrementa, la curva se traza en una dirección específica llamada orientación de la curva.

69. $x = a\theta - b \operatorname{sen} \theta;\ y = a - b \cos \theta$

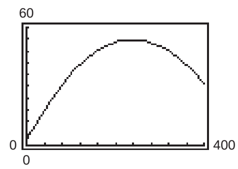
71. Falso. La gráfica de las ecuaciones paramétricas es la porción de la recta $y = x$ cuando $x \geq 0$.

73. Verdadero

75. *a*) $x = \left(\frac{440}{3} \cos \theta\right)t;\ y = 3 + \left(\frac{440}{3} \operatorname{sen} \theta\right)t - 16t^2$

b) 

No es *home run*

c) 

Home run

d) 19.4°

Sección 10.3 (página 727)

1. $-3/t$ **3.** -1

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{4}, \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$; No es ni cóncava hacia arriba ni cóncava hacia abajo

7. $dy/dx = 2t + 3,\ d^2y/dx^2 = 2$
En $t = -1$, $dy/dx = 1$, $d^2y/dx^2 = 2$; Cóncava hacia arriba

9. $dy/dx = -\cot \theta,\ d^2y/dx^2 = -(\csc \theta)^3/4$
En $\theta = \pi/4$, $dy/dx = -1$, $d^2y/dx^2 = -\sqrt{2}/2$;
Cóncava hacia abajo

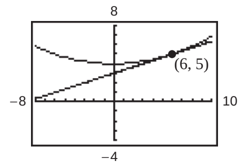
11. $dy/dx = 2 \csc \theta,\ d^2y/dx^2 = -2 \cot^3 \theta$
En $\theta = \pi/6$, $dy/dx = 4$, $d^2y/dx^2 = -6\sqrt{3}$;
Cóncava hacia abajo

13. $dy/dx = -\tan \theta,\ d^2y/dx^2 = \sec^4 \theta \csc \theta/3$
En $\theta = \pi/4$, $dy/dx = -1$, $d^2y/dx^2 = 4\sqrt{2}/3$;
Cóncava hacia arriba

15. $\left(-2/\sqrt{3}, 3/2\right)$: $3\sqrt{3}x - 8y + 18 = 0$
$(0, 2)$: $y - 2 = 0$
$\left(2\sqrt{3}, 1/2\right)$: $\sqrt{3}x + 8y - 10 = 0$

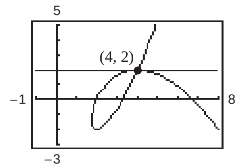
17. $(0, 0)$: $2y - x = 0$
$(-3, -1)$: $y + 1 = 0$
$(-3, 3)$: $2x - y + 9 = 0$

19. *a*) y *d*)



b) En $t = 1$, $dx/dt = 6$, $dy/dt = 2$ y $dy/dx = 1/3$.
c) $y = \frac{1}{3}x + 3$

21. *a*) y *d*)



b) En $t = -1$, $dx/dt = -3$, $dy/dt = 0$ y $dy/dx = 0$.
c) $y = 2$

23. $y = \pm\frac{3}{4}x$ **25.** $y = 3x - 5$ y $y = 1$

27. Horizontal: $(1, 0), (-1, \pi), (1, -2\pi)$
Vertical: $(\pi/2, 1), (-3\pi/2, -1), (5\pi/2, 1)$

29. Horizontal: $(4, 0)$
Vertical: Ninguna

31. Horizontal: $(5, -2), (3, 2)$
Vertical: Ninguna

33. Horizontal: $(0, 3), (0, -3)$
Vertical: $(3, 0), (-3, 0)$

35. Horizontal: $(5, -1), (5, -3)$
Vertical: $(8, -2), (2, -2)$

37. Horizontal: Ninguna
Vertical: $(1, 0), (-1, 0)$

39. Cóncava hacia abajo: $-\infty < t < 0$
Cóncava hacia arriba: $0 < t < \infty$

41. Cóncava hacia arriba: $t > 0$

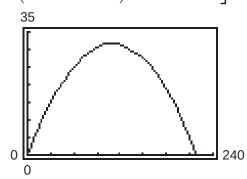
43. Cóncava hacia abajo: $0 < t < \pi/2$
Cóncava hacia arriba: $\pi/2 < t < \pi$

45. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{4t^2 - 3t + 9}\, dt$ **47.** $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{e^{2t} + 4}\, dt$

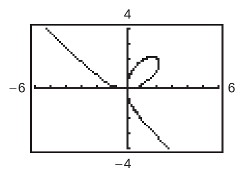
49. $4\sqrt{13} \approx 14.422$ **51.** $70\sqrt{5} \approx 156.525$

53. $\sqrt{2}(1 - e^{-\pi/2}) \approx 1.12$

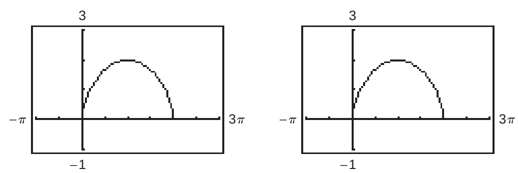
55. $\frac{1}{12}\left[\ln\left(\sqrt{37} + 6\right) + 6\sqrt{37}\right] \approx 3.249$ **57.** $6a$ **59.** $8a$

61. *a*) 

b) 219.2 pies
c) 230.8 pies

63. *a*) 

b) $(0, 0), \left(4\sqrt[3]{2}/3, 4\sqrt[3]{4}/3\right)$
c) ≈ 6.557

65. *a*) 

b) La velocidad media de la partícula en la segunda trayectoria es el doble de la velocidad media de la partícula en la primera trayectoria.

c) 4π

67. $S = 2\pi\int_0^4 \sqrt{10}(t + 2)\, dt = 32\pi\sqrt{10} \approx 317.907$

69. $S = 2\pi\int_0^{\pi/2} \left(\text{sen}\,\theta\cos\,\theta\sqrt{4\cos^2\theta + 1}\right) d\theta = \dfrac{\left(5\sqrt{5} - 1\right)\pi}{6}$

≈ 5.330

71. *a*) $27\pi\sqrt{13}$ *b*) $18\pi\sqrt{13}$ **73.** 50π **75.** $12\pi a^2/5$

77. Ver el teorema 10.7, forma paramétrica de la derivada en la página 721.

79. 6

81. *a*) $S = 2\pi\int_a^b g(t)\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

b) $S = 2\pi\int_a^b f(t)\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

83. Demostración **85.** $3\pi/2$ **87.** *d* **88.** *b* **89.** *f* **90.** *c*

91. *a* **92.** *e* **93.** $\left(\frac{3}{4}, \frac{8}{5}\right)$ **95.** 288π

97. *a*) $dy/dx = \text{sen}\,\theta/(1 - \cos\,\theta)$; $d^2y/dx^2 = -1/[a(\cos\,\theta - 1)^2]$

b) $y = \left(2 + \sqrt{3}\right)\left[x - a\left(\pi/6 - \frac{1}{2}\right)\right] + a\left(1 - \sqrt{3}/2\right)$

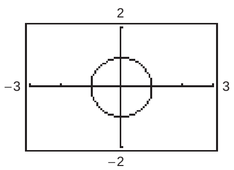
c) $(a(2n + 1)\pi, 2a)$

d) Cóncava hacia abajo en $(0, 2\pi)$, $(2\pi, 4\pi)$, etc.

e) $s = 8a$

99. Demostración

101. *a*)



b) Círculo de radio 1 y centro en (0, 0) excepto el punto (–1, 0)

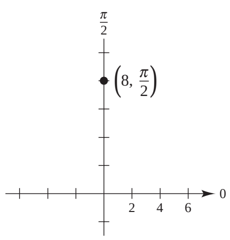
c) Cuando *t* crece de –20 a 0, la velocidad aumenta y cuando *t* crece de 0 a 20, la velocidad disminuye.

103. Falso: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right]}{f'(t)} = \dfrac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^3}$.

105. ≈ 982 pies

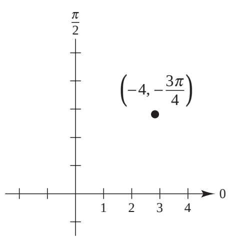
Sección 10.4 (página 738)

1.



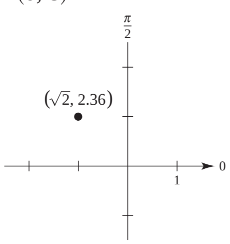
(0, 8)

3.



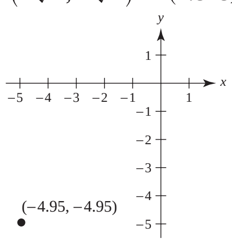
$\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right) \approx (2.828, 2.828)$

5.

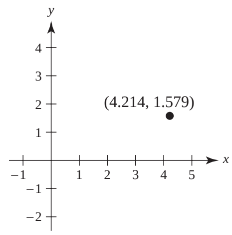


$(-1.004, 0.996)$

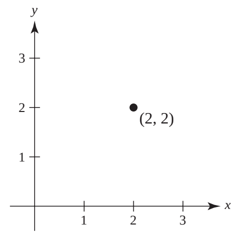
7.



9.

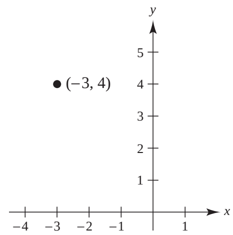


11.



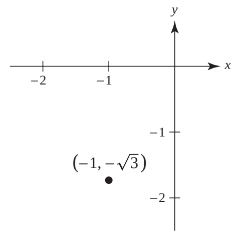
$\left(2\sqrt{2}, \pi/4\right), \left(-2\sqrt{2}, 5\pi/4\right)$

13.



$(5, 2.214), (-5, 5.356)$

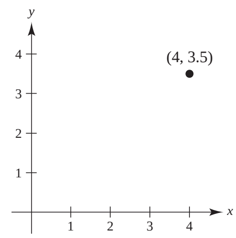
15.



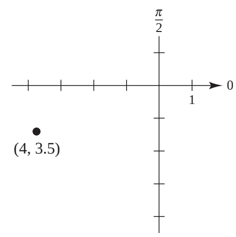
$(2, 4\pi/3), (-2, \pi/3)$

17. $(3.606, -0.588)$ **19.** $(3.052, 0.960)$

21. *a*)

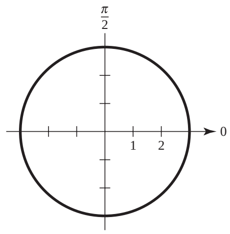


b)

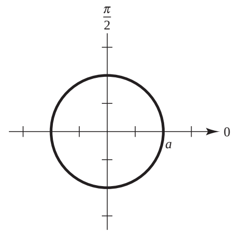


23. *c* **24.** *b* **25.** *a* **26.** *d*

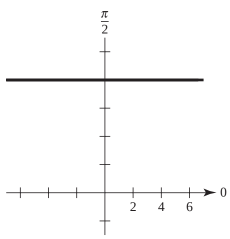
27. $r = 3$



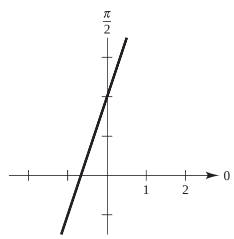
29. $r = a$



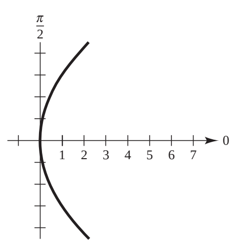
31. $r = 8\csc\,\theta$



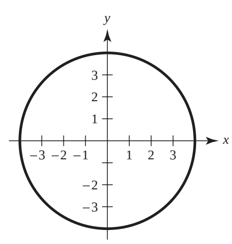
33. $r = \dfrac{-2}{3\cos\,\theta - \text{sen}\,\theta}$



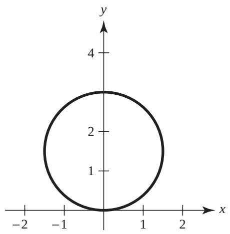
35. $r = 9\csc^2\,\theta\cos\,\theta$



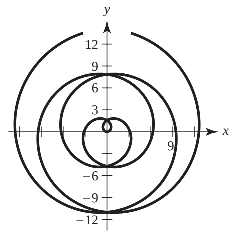
37. $x^2 + y^2 = 16$



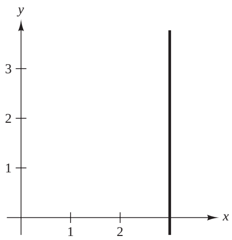
39. $x^2 + y^2 - 3y = 0$



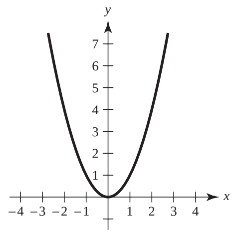
41. $\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan(y/x)$



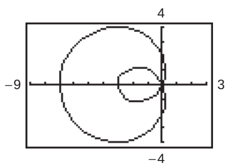
43. $x - 3 = 0$



45. $x^2 - y = 0$

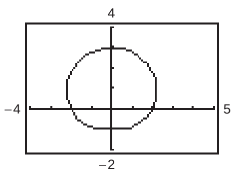


47.



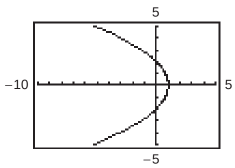
$0 \le \theta < 2\pi$

49.



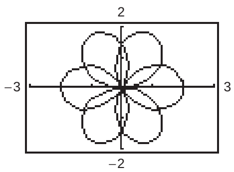
$0 \le \theta < 2\pi$

51.



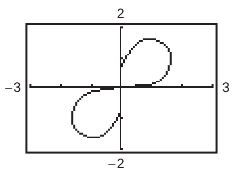
$-\pi < \theta < \pi$

53.



$0 \le \theta < 4\pi$

55.



$0 \le \theta < \pi/2$

57. $(x - h)^2 + (y - k)^2 = h^2 + k^2$

Radio: $\sqrt{h^2 + k^2}$

Centro: (h, k)

59. $\sqrt{17}$ **61.** ≈ 5.6

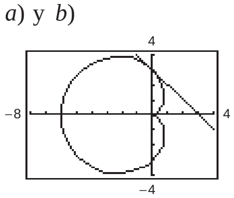
63. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\cos\theta(3\,\text{sen}\,\theta + 1)}{6\cos^2\theta - 2\,\text{sen}\,\theta - 3}$

$(5, \pi/2)$: $dy/dx = 0$

$(2, \pi)$: $dy/dx = -2/3$

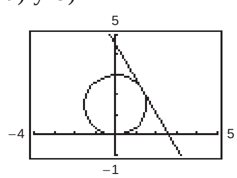
$(-1, 3\pi/2)$: $dy/dx = 0$

65. *a*) y *b*)



c) $dy/dx = -1$

67. *a*) y *b*)



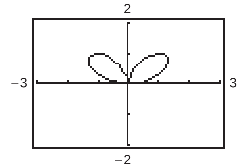
c) $dy/dx = -\sqrt{3}$

69. Horizontal: $(2, 3\pi/2)$, $\left(\frac{1}{2}, \pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 5\pi/6\right)$

Vertical: $\left(\frac{3}{2}, 7\pi/6\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 11\pi/6\right)$

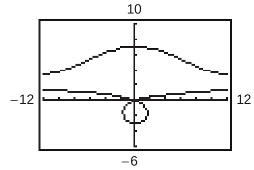
71. $(5, \pi/2)$, $(1, 3\pi/2)$

73.



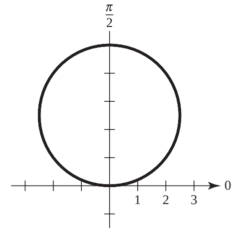
$(0, 0)$, $(1.4142, 0.7854)$, $(1.4142, 2.3562)$

75.



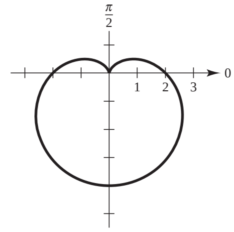
$(7, 1.5708)$, $(3, 4.7124)$

77.



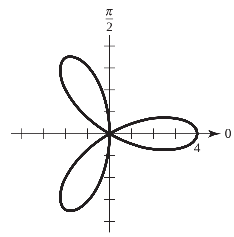
$\theta = 0$

79.



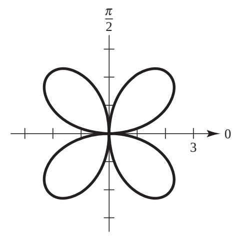
$\theta = \pi/2$

81.



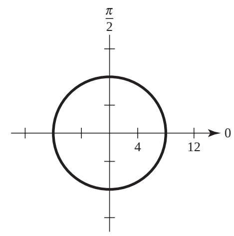
$\theta = \pi/6, \pi/2, 5\pi/6$

83.

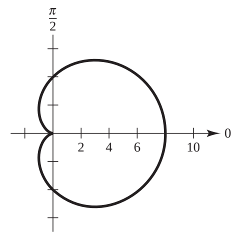


$\theta = 0, \pi/2$

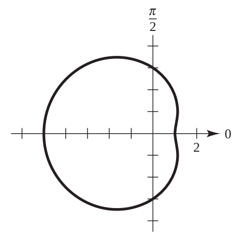
85.



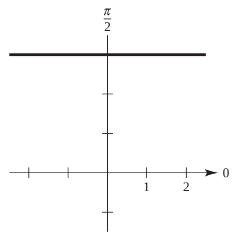
87.



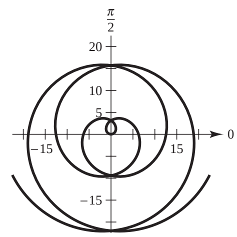
89.



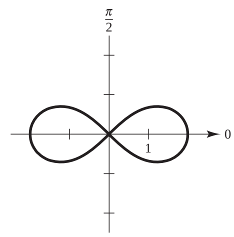
91.



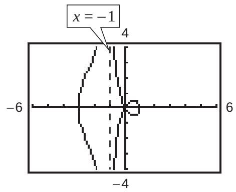
93.



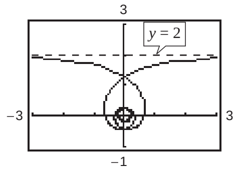
95.



97.



99.



101. El sistema de coordenadas rectangulares es una colección de puntos de la forma (x, y), donde x es la distancia dirigida del eje y al punto y y es la distancia dirigida del eje x al punto. Cada punto tiene una representación única.

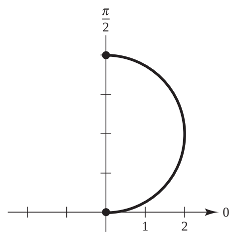
El sistema de coordenadas polares es una colección de puntos de la forma (r, θ), donde r es la distancia dirigida del origen O al punto P y θ es el ángulo dirigido, medido en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj), del eje polar al segmento $\overline{OP}$. En coordenadas polares la representación de cada punto no es única.

103. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en (r, θ) es

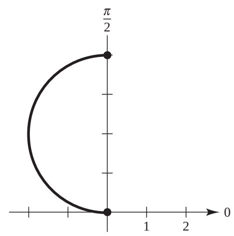
$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\operatorname{sen}\theta}{-f(\theta)\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)\cos\theta}.$$

Si $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$, entonces $\theta = \alpha$ es tangente en el polo.

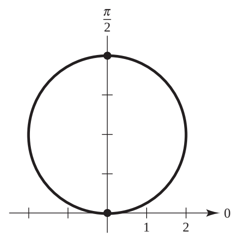
105. *a*)



b)



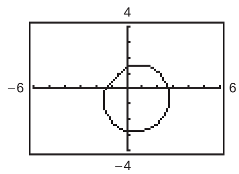
c)



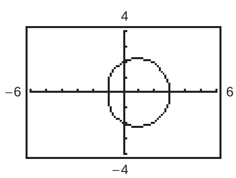
107. Demostración

109. *a*) $r = 2 - \operatorname{sen}(\theta - \pi/4)$

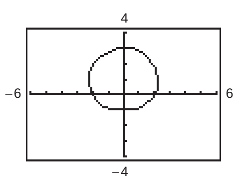
$= 2 - \dfrac{\sqrt{2}(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)}{2}$



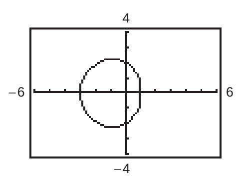
b) $r = 2 + \cos\theta$



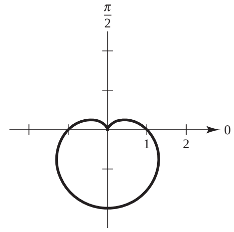
c) $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$



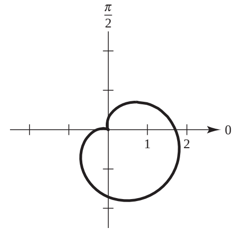
d) $r = 2 - \cos\theta$



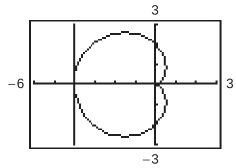
111. *a*)



b)

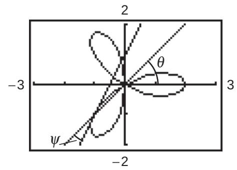


113.



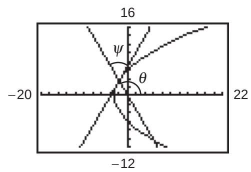
$\psi = \pi/2$

115.



$\psi = \arctan\frac{1}{3} \approx 18.4°$

117.



$\psi = \pi/3, 60°$

119. Verdadero

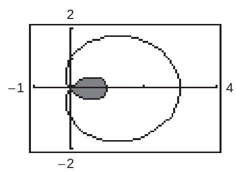
121. Verdadero

Sección 10.5 (página 747)

1. $8\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$ **3.** $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (3 - 2\operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta$ **5.** 9π

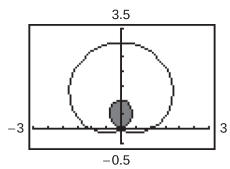
7. $\pi/3$ **9.** $\pi/8$ **11.** $3\pi/2$ **13.** 27π **15.** 4

17.



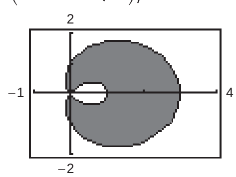
$(2\pi - 3\sqrt{3})/2$

19.



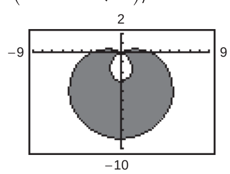
$(2\pi - 3\sqrt{3})/2$

21.



$\pi + 3\sqrt{3}$

23.



$9\pi + 27\sqrt{3}$

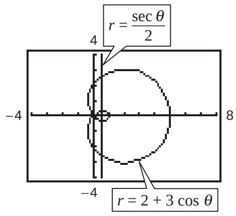
25. $(1, \pi/2), (1, 3\pi/2), (0, 0)$

27. $\left(\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right), \left(\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right), (0, 0)$

29. $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\pi}{6}\right), \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right), (0, 0)$ **31.** $(2, 4), (-2, -4)$

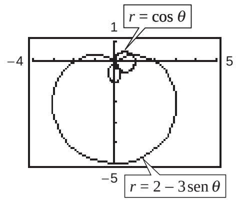
33. $(1, \pi/12), (1, 5\pi/12), (1, 7\pi/12), (1, 11\pi/12),$
$(1, 13\pi/12), (1, 17\pi/12), (1, 19\pi/12), (1, 23\pi/12)$

35.



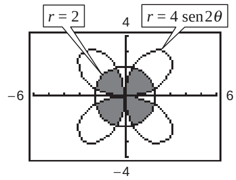
$(-0.581, \pm 2.607)$,
$(2.581, \pm 1.376)$

37.



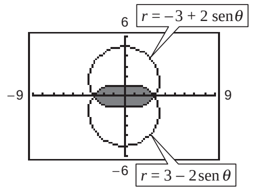
$(0, 0)$, $(0.935, 0.363)$,
$(0.535, -1.006)$
Las gráficas alcanzan polo en diferentes tiempos (valores de θ).

39.



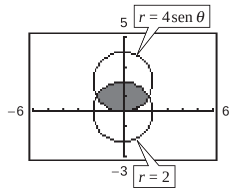
$\frac{4}{3}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$

41.



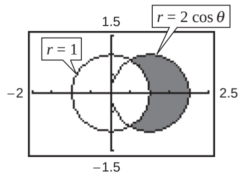
$11\pi - 24$

43.



$\frac{2}{3}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$

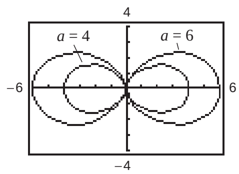
45.



$\pi/3 + \sqrt{3}/2$

47. $5\pi a^2/4$ **49.** $(a^2/2)(\pi - 2)$

51. *a*) $(x^2 + y^2)^{3/2} = ax^2$
b)

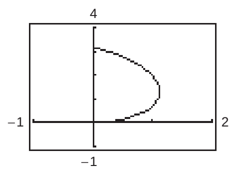


c) $15\pi/2$

53. El área encerrada por la función es $\pi a^2/4$ si n es impar y es $\pi a^2/2$ si n es par.

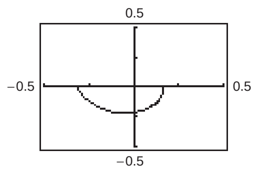
55. 16π **57.** 4π **59.** 8

61.



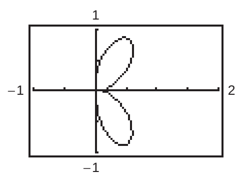
≈ 4.16

63.



≈ 0.71

65.



≈ 4.39

67. 36π

69. $\dfrac{2\pi\sqrt{1 + a^2}}{1 + 4a^2}\left(e^{\pi a} - 2a\right)$ **71.** 21.87

73. Habrá puntos de intersección simultáneos. Pueden ser puntos de intersección que no ocurren con las mismas coordenadas en las dos gráficas.

75. *a*) $S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\operatorname{sen}\theta\sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta$

b) $S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\cos\theta\sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta$

77. $40\pi^2$

79. *a*) 16π
b)

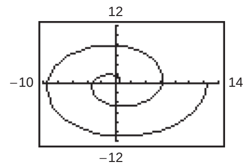
$\boldsymbol{\theta}$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$\boldsymbol{A}$	6.32	12.14	17.06	20.80	23.27	24.60	25.08

c) y *d*) Para $\frac{1}{4}$ de área $(4\pi \approx 12.57)$: 0.42
Para $\frac{1}{2}$ de área $(8\pi \approx 25.13)$: $1.57(\pi/2)$
Para $\frac{3}{4}$ de área $(12\pi \approx 37.70)$: 2.73

e) No. Los resultados no dependen del radio. Las respuestas varían.

81. Círculo

83. *a*)



La gráfica se vuelve más grande y más extendida. La gráfica se refleja en el eje y.

b) $(an\pi, n\pi)$ donde $n = 1, 2, 3, \ldots$
c) ≈ 21.26 *d*) $4/3\pi^3$

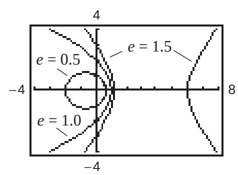
85. $r = \sqrt{2}\cos\theta$

87. Falso. Las gráficas de $f(\theta) = 1$ y $g(\theta) = -1$ coinciden.

89. Demostración

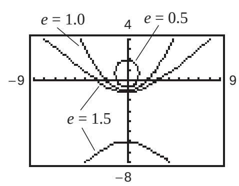
Sección 10.6 (página 755)

1.



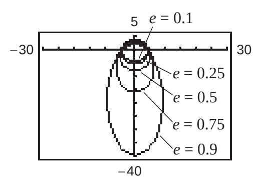
a) Parábola *b*) Elipse
c) Hipérbola

3.



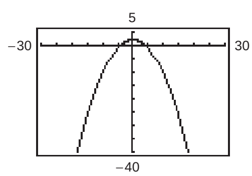
a) Parábola *b*) Elipse
c) Hipérbola

5. *a*)



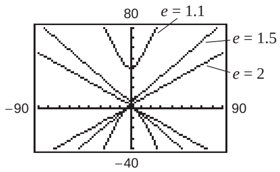
Elipse
Cuando $e \to 1^-$, la elipse se vuelve más elíptica, y cuando $e \to 0^+$, se vuelve más circular.

b)



Parábola

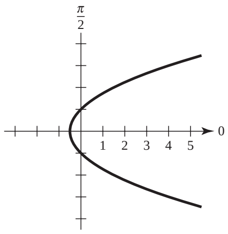
c)



Hipérbola
Cuando $e \to 1^+$, la hipérbola se abre más lentamente, y cuando $e \to \infty$, abre más rápido.

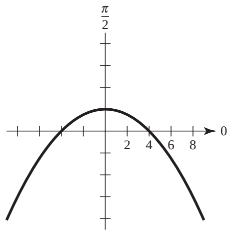
7. *c* **8.** *f* **9.** *a* **10.** *e* **11.** *b* **12.** *d*

13. $e = 1$
Distancia $= 1$



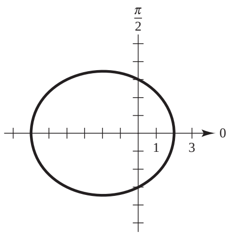
Parábola

15. $e = 1$
Distancia $= 4$



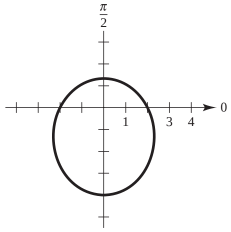
Parábola

17. $e = \frac{1}{2}$
Distancia $= 6$



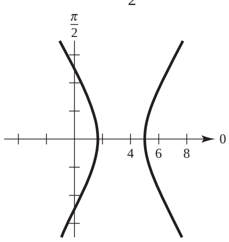
Elipse

19. $e = \frac{1}{2}$
Distancia $= 4$



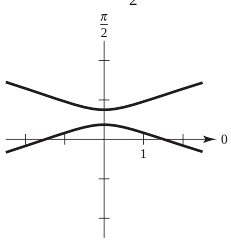
Elipse

21. $e = 2$
Distancia $= \frac{5}{2}$



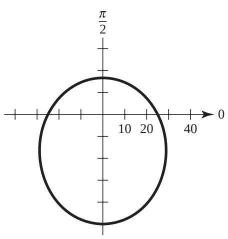
Hipérbola

23. $e = 3$
Distancia $= \frac{1}{2}$



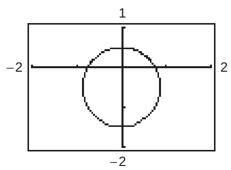
Hipérbola

25. $e = \frac{1}{2}$
Distancia $= 50$



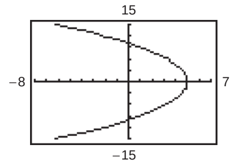
Elipse

27.



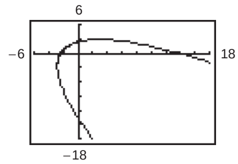
Elipse
$e = \frac{1}{2}$

29.



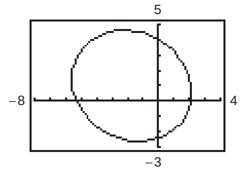
Parábola
$e = 1$

31.



Girada $\pi/4$ radianes en sentido contrario a las manecillas del reloj.

33.



Girada $\pi/6$ radianes en el sentido de las manecillas del reloj.

35. $r = \dfrac{8}{8 + 5\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)}$

37. $r = 3/(1 - \cos\theta)$ **39.** $r = 1/(2 + \operatorname{sen}\theta)$

41. $r = 2/(1 + 2\cos\theta)$ **43.** $r = 2/(1 - \operatorname{sen}\theta)$

45. $r = 16/(5 + 3\cos\theta)$ **47.** $r = 9/(4 - 5\operatorname{sen}\theta)$

49. $r = 4/(2 + \cos\theta)$

51. Si $0 < e < 1$, la cónica es una elipse.
Si $e = 1$, la cónica es una parábola.
Si $e > 1$, la cónica es una hipérbola

53. Si los focos son fijos y $e \to 0$, entonces $d \to \infty$. Para ver esto, comparar las elipses.

$r = \dfrac{1/2}{1 + (1/2)\cos\theta}$, $e = \dfrac{1}{2}$, $d = 1$ y

$r = \dfrac{5/16}{1 + (1/4)\cos\theta}$, $e = \dfrac{1}{4}$, $d = \dfrac{5}{4}$.

55. Demostración

57. $r^2 = \dfrac{9}{1 - (16/25)\cos^2\theta}$ **59.** $r^2 = \dfrac{-16}{1 - (25/9)\cos^2\theta}$

61. ≈ 10.88 **63.** 3.37 **65.** $\dfrac{7\,979.21}{1 - 0.9372\cos\theta}$; 11 015 mi

67. $r = \dfrac{149\,558\,278.0560}{1 - 0.0167\cos\theta}$
Perihelio: 147 101 680 km
Afelio: 152 098 320 km

69. $r = \dfrac{4\,497\,667\,328}{1 - 0.0086\cos\theta}$
Perihelio: 4 459 317 200 km
Afelio: 4 536 682 800 km

71. Las respuestas varían. Ejemplo de respuestas:
a) 3.591×10^{18} km^2; 9.322 años
b) $\alpha \approx 0.361 + \pi$; Mayor ángulo con el rayo más pequeño para generar un área igual.
c) Inciso *a*): 1.583×10^9 km; 1.698×10^8 km/año
Inciso *b*): 1.610×10^9 km; 1.727×10^8 km/año

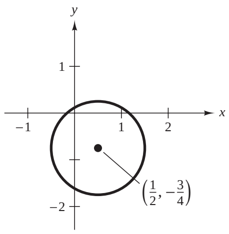
73. Demostración

75. Sea $r_1 = ed/(1 + \operatorname{sen}\theta)$ y $r_2 = ed/(1 - \operatorname{sen}\theta)$.
Los puntos de intersección de r_1 y r_2 son $(ed, 0)$ y (ed, π). Las pendientes de las rectas tangentes a r_1 son –1 en $(ed, 0)$ y 1 en (ed, π). Las pendientes de las rectas tangentes a r_2 son 1 en $(ed, 0)$ y –1 en (ed, π). Por lo anterior, tanto en $(ed, 0)$ como en (ed, π) se cumple $m_1 m_2 = -1$, de manera que las curvas se intersecan en ángulos rectos.

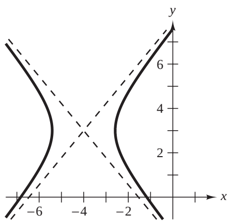
Ejercicios de repaso para el capítulo 10 (página 758)

1. *e* **2.** *c* **3.** *b* **4.** *d* **5.** *a* **6.** *f*

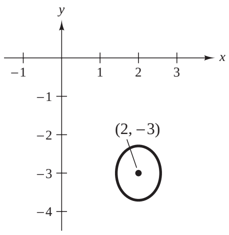
7. Círculo
Centro: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$
Radio: 1



9. Hipérbola
Centro: $(-4, 3)$
Vértices: $\left(-4 \pm \sqrt{2}, 3\right)$



11. Elipse
Centro: $(2, -3)$
Vértices: $\left(2, -3 \pm \sqrt{2}/2\right)$

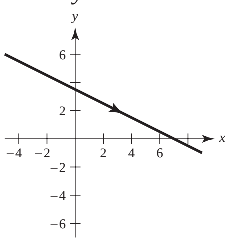


13. $y^2 - 4y - 12x + 4 = 0$ **15.** $(x - 1)^2/36 + y^2/20 = 1$

17. $x^2/49 - y^2/32 = 1$ **19.** ≈ 15.87

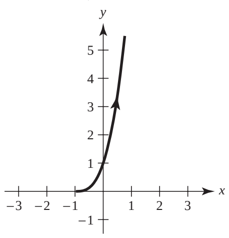
21. $4x + 4y - 7 = 0$ **23.** *a*) $(0, 50)$ *b*) $\approx 38\,294.49$

25.



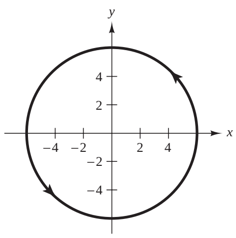
$x + 2y - 7 = 0$

27.



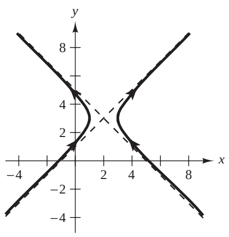
$y = (x + 1)^3, x > -1$

29.



$x^2 + y^2 = 36$

31.

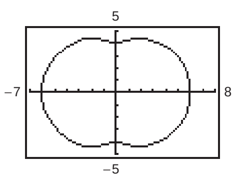


$(x - 2)^2 - (y - 3)^2 = 1$

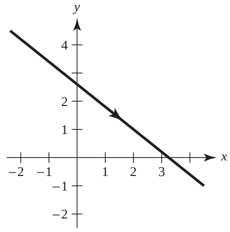
33. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta:
$x = 5t - 2$
$y = 6 - 4t$

35. $x = 4 \cos \theta - 3$
$y = 4 + 3 \operatorname{sen} \theta$

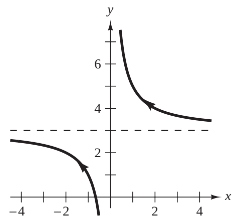
37.



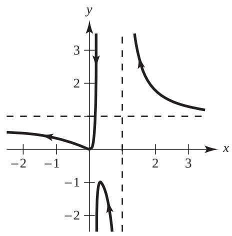
39. *a*) $dy/dx = -\frac{4}{5}$;
Tangentes horizontales: ninguna
b) $y = (-4x + 13)/5$
c)



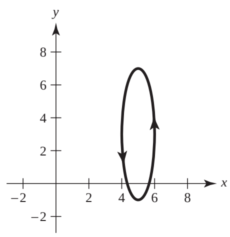
41. *a*) $dy/dx = -2t^2$;
Tangentes horizontales: ninguna
b) $y = 3 + 2/x$
c)



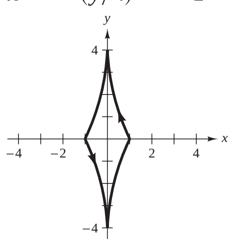
43. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(t - 1)(2t + 1)^2}{t^2(t - 2)^2}$;
Tangente horizontal: $\left(\dfrac{1}{3}, -1\right)$
b) $y = \dfrac{4x^2}{(5x - 1)(x - 1)}$
c)



45. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = -4 \cot \theta$;
Tangentes horizontales: $(5, 7), (5, -1)$
b) $(x - 5)^2 + \dfrac{(y - 3)^2}{16} = 1$
c)



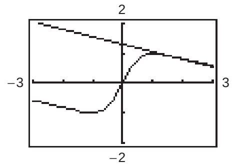
47. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = -4 \tan \theta$;
Tangentes horizontales: ninguna
b) $x^{2/3} + (y/4)^{2/3} = 1$
c)



49. Horizontal: $(5, 0)$
Vertical: Ninguna

51. Horizontal: $(2, 2), (2, 0)$
Vertical: $(4, 1), (0, 1)$

53. *a*) y *c*)

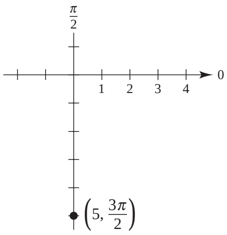


b) $dx/d\theta = -4,\ dy/d\theta = 1,\ dy/dx = -\frac{1}{4}$

55. $\frac{1}{2}\pi^2 r$

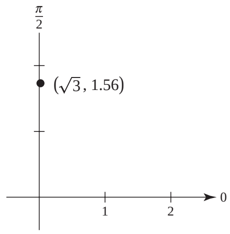
57. *a*) $s = 12\pi\sqrt{10} \approx 119.215$ **59.** $A = 3\pi$
b) $s = 4\pi\sqrt{10} \approx 39.738$

61.



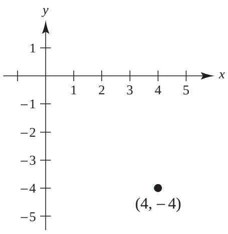
Rectangular: $(0, -5)$

63.



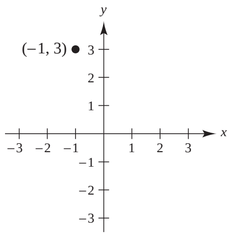
Rectangular: $(0.0187, 1.7320)$

65.



$\left(4\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right), \left(-4\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

67.



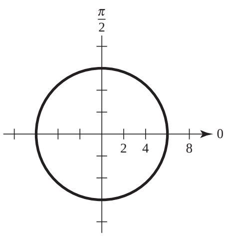
$(\sqrt{10}, 1.89), (-\sqrt{10}, 5.03)$

69. $x^2 + y^2 - 3x = 0$ **71.** $(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$

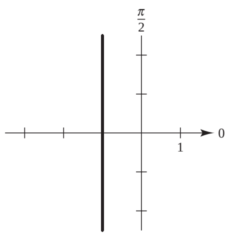
73. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ **75.** $y^2 = x^2[(4 - x)/(4 + x)]$

77. $r = a\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$ **79.** $r^2 = a^2\theta^2$

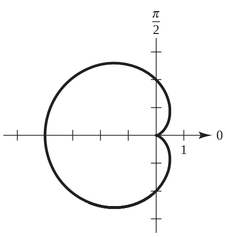
81. Círculo



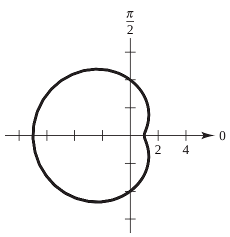
83. Recta



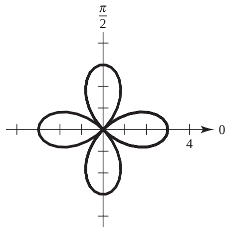
85. Cardioide



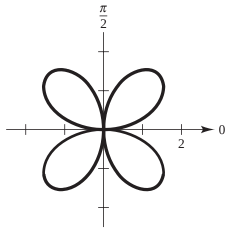
87. Caracol



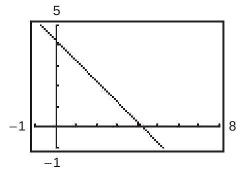
89. Curva rosa



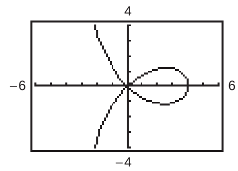
91. Curva rosa



93.



95.

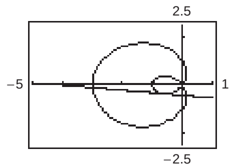


97. *a*) $\theta = \pm\pi/3$

b) Vertical: $(-1, 0), (3, \pi), \left(\frac{1}{2}, \pm 1.318\right)$

Horizontal: $(-0.686, \pm 0.568), (2.186, \pm 2.206)$

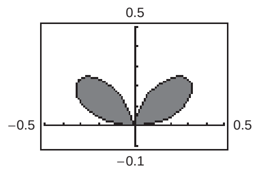
c)



99. Demostración **101.** $\dfrac{9\pi}{20}$ **103.** $\dfrac{9\pi}{2}$ **105.** 4

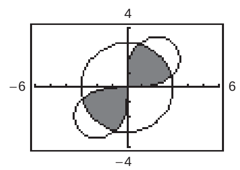
107. $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\pi}{4}\right), (0, 0)$

109.



$$A = 2\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^2\theta\cos^4\theta\, d\theta \approx 0.10$$

111.

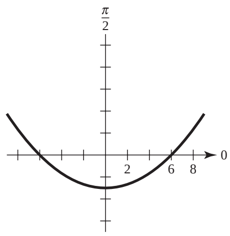


$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/12} 18\,\mathrm{sen}\,2\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12} 9\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{5\pi/12}^{\pi/2} 18\,\mathrm{sen}\,2\theta\, d\theta\right]$$
$$\approx 1.2058 + 9.4248 + 1.2058 = 11.8364$$

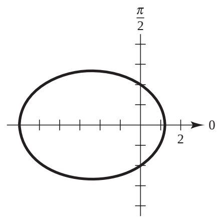
113. $4a$

115. $S = 2\pi\int_0^{\pi/2} (1 + 4\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{17 + 8\cos\theta}\, d\theta$
$= 34\pi\sqrt{17}/5 \approx 88.08$

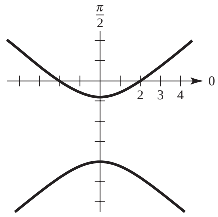
117. Parábola



119. Elipse



121. Hipérbola

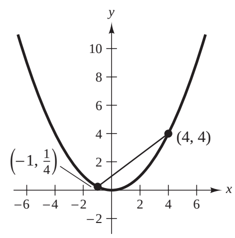


123. $r = 10 \operatorname{sen} \theta$

125. $r = 4/(1 - \cos \theta)$ **127.** $r = 5/(3 - 2 \cos \theta)$

SP Solución de problemas (página 761)

1. *a*)



b) y *c*) Demostraciones

3. Demostración

5. *a*) $r = 2a \tan \theta \operatorname{sen} \theta$

b) $x = 2at^2/(1 + t^2)$

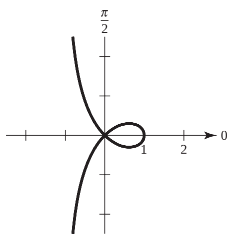
$y = 2at^3/(1 + t^2)$

c) $y^2 = x^3/(2a - x)$

7. *a*) $y^2 = x^2[(1 - x)/(1 + x)]$

b) $r = \cos 2\theta \cdot \sec \theta$

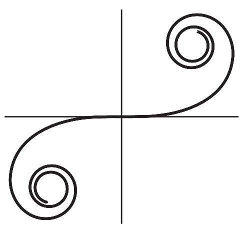
c)



d) $y = x, y = -x$

e) $\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}, \pm \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\sqrt{-2 + \sqrt{5}}\right)$

9. *a*)



Generada con Mathematica

b) Demostración

c) $a, 2\pi$

11. $A = \frac{1}{2}ab$ **13.** $r^2 = 2 \cos 2\theta$

15. *a*) Primer plano: $x_1 = \cos 70°(150 - 375t)$

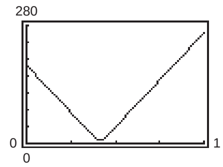
$y_1 = \operatorname{sen} 70°(150 - 375t)$

Segundo plano: $x_2 = \cos 45°(450t - 190)$

$y_2 = \operatorname{sen} 45°(190 - 450t)$

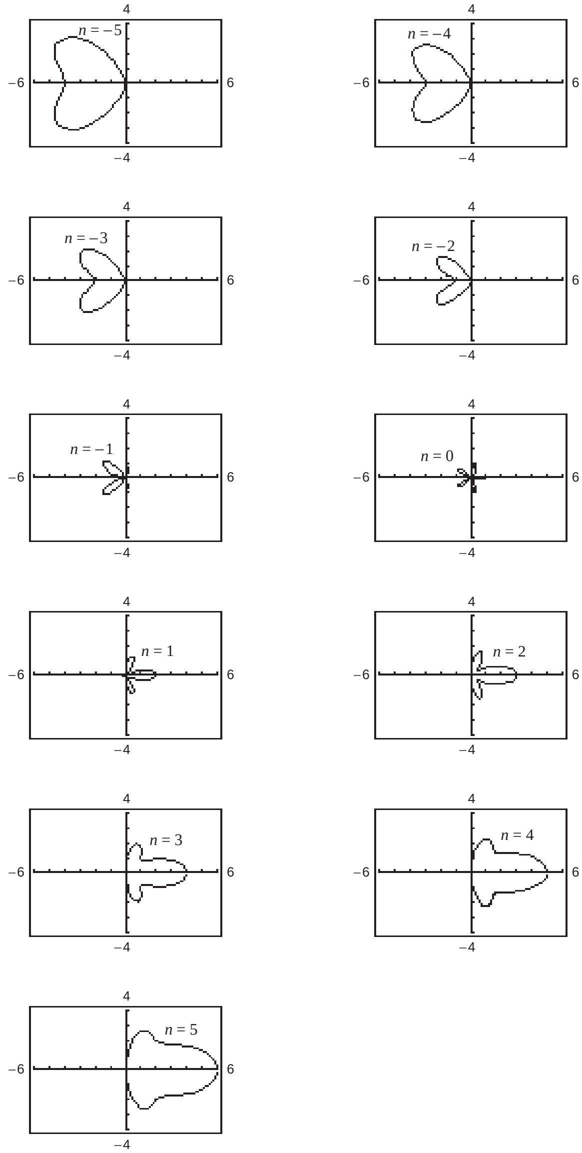
b) $\{[\cos 45°(450t - 190) - \cos 70°(150 - 375t)]^2 + [\operatorname{sen} 45°(190 - 450t) - \operatorname{sen} 70°(150 - 375t)]^2\}^{1/2}$

c)



0.4145 h; sí

17.

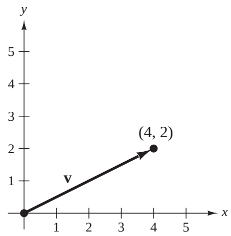


$n = 1, 2, 3, 4, 5$ produce "campanas"; $n = -1, -2, -3, -4, -5$ produce "corazones"

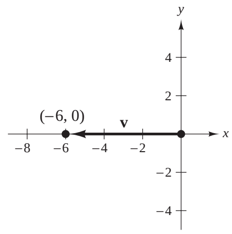
Capítulo 11

Sección 11.1 (página 771)

1. *a*) $\langle 4, 2\rangle$
b)

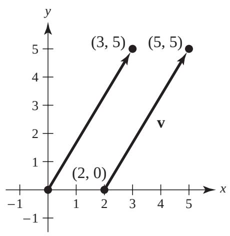


3. *a*) $\langle -6, 0\rangle$
b)



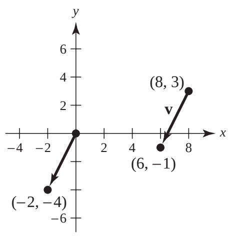
5. $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \langle 2, 4\rangle$ **7.** $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \langle 6, -5\rangle$

9. *a*) y *d*)



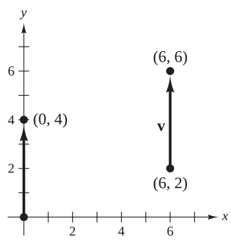
b) $\langle 3, 5\rangle$
c) $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

11. *a*) y *d*)



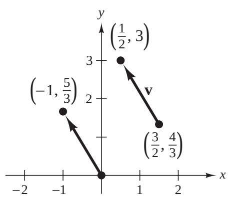
b) $\langle -2, -4\rangle$
c) $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

13. *a*) y *d*)



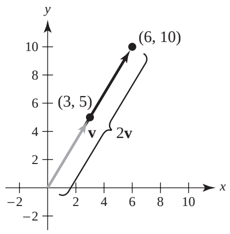
b) $\langle 0, 4\rangle$ *c*) $\mathbf{v} = 4\mathbf{j}$

11. *a*) y *d*)

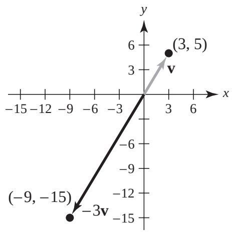


b) $\left\langle -1, \frac{5}{3}\right\rangle$
c) $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j}$

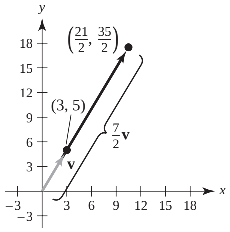
17. *a*) $\langle 6, 10\rangle$



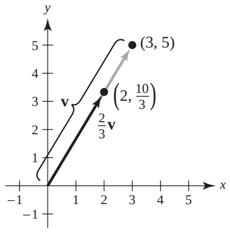
b) $\langle -9, -15\rangle$



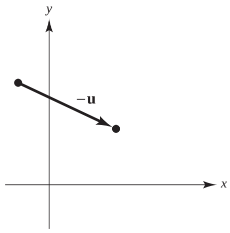
c) $\left\langle \frac{21}{2}, \frac{35}{2}\right\rangle$



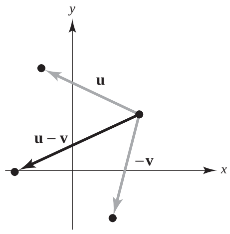
d) $\left\langle 2, \frac{10}{3}\right\rangle$



19.

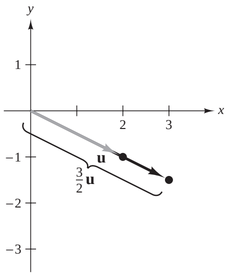


21.

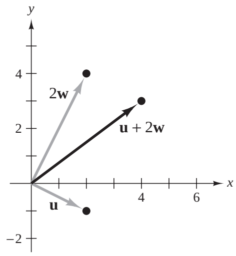


23. *a*) $\left\langle \frac{8}{3}, 6\right\rangle$ *b*) $\langle -2, -14\rangle$ *c*) $\langle 18, -7\rangle$

25. $\left\langle 3, -\frac{3}{2}\right\rangle$



27. $\langle 4, 3\rangle$



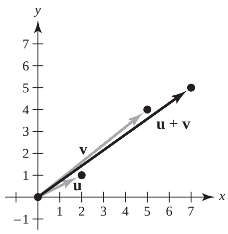
29. $(3, 5)$ **31.** 7 **33.** 5 **35.** $\sqrt{61}$

37. $\left\langle \sqrt{17}/17, 4\sqrt{17}/17\right\rangle$ **39.** $\left\langle 3\sqrt{34}/34, 5\sqrt{34}/34\right\rangle$

41. *a*) $\sqrt{2}$ *b*) $\sqrt{5}$ *c*) 1 *d*) 1 *e*) 1 *f*) 1

43. *a*) $\sqrt{5}/2$ *b*) $\sqrt{13}$ *c*) $\sqrt{85}/2$ *d*) 1 *e*) 1 *f*) 1

45.



$\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \sqrt{5} + \sqrt{41}$ y $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{74}$
$\sqrt{74} \le \sqrt{5} + \sqrt{41}$

47. $\langle 0, 6\rangle$ **49.** $\left\langle -\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right\rangle$ **51.** $\langle 3, 0\rangle$ **53.** $\left\langle -\sqrt{3}, 1\right\rangle$

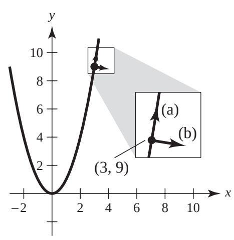
55. $\left\langle \dfrac{2 + 3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right\rangle$ **57.** $\langle 2\cos 4 + \cos 2, 2\,\text{sen}\, 4 + \text{sen}\, 2\rangle$

59. Las respuestas varían. Ejemplo: un escalar es un número real simple como 2. Un vector es un segmento de recta que tiene dirección y magnitud. El vector $\left\langle \sqrt{3}, 1\right\rangle$, dado mediante sus componentes, tiene dirección $\pi/6$ y magnitud de 2.

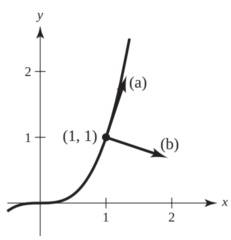
61. *a*) Vector; tiene magnitud y dirección
b) Escalar; sólo tiene magnitud

63. $a = 1, b = 1$ **65.** $a = 1, b = 2$ **67.** $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$

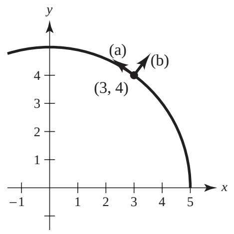
69. *a*) $\pm\left(1/\sqrt{37}\right)\langle 1, 6\rangle$
b) $\pm\left(1/\sqrt{37}\right)\langle 6, -1\rangle$



71. *a*) $\pm\left(1/\sqrt{10}\right)\langle 1, 3\rangle$
b) $\pm\left(1/\sqrt{10}\right)\langle 3, -1\rangle$



73. *a*) $\pm\frac{1}{5}\langle -4, 3\rangle$
b) $\pm\frac{1}{5}\langle 3, 4\rangle$



75. $\left\langle -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right\rangle$

77. *a*) a *c*) Las respuestas varían.
d) Magnitud ≈ 63.5, dirección $\approx -8.26°$

79. 1.33, 132.5° **81.** 10.7°, 584.6 lb **83.** 71.3°, 228.5 lb

85. *a*) $\theta = 0°$ *b*) $\theta = 180°$
c) No, la resultante sólo puede ser menor o igual que la suma.

87. $(-4, -1), (6, 5), (10, 3)$

89. Tensión en el cable $AC \approx 2\,638.2$ lb
Tensión en el cable $BC \approx 1\,958.1$ lb

91. Horizontal: 1 193.43 pies/s
Vertical: 125.43 pies/s

93. 38.3° noroeste
882.9 km/h

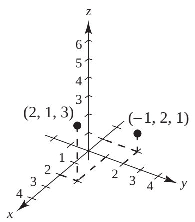
95. Verdadero **97.** Verdadero **99.** Falso. $\|a\mathbf{i} + b\mathbf{j}\| = \sqrt{2}|a|$

101–103. Demostraciones **105.** $x^2 + y^2 = 25$

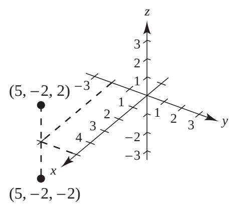
Sección 11.2 (página 780)

1. $A(2, 3, 4), B(-1, -2, 2)$

3.



5.



7. $(-3, 4, 5)$ **9.** $(12, 0, 0)$ **11.** 0

13. Seis unidades arriba del plano *xy*

15. Tres unidades delante del plano *yz*

17. A la izquierda del plano *xz*

19. A menos de tres unidades del plano *xz*

21. Tres unidades debajo del plano *xy*, y debajo de ambos cuadrantes I y III

23. Arriba del plano *xy* y por arriba de los cuadrantes II y IV, o debajo del plano *xy* y debajo de los cuadrantes I y III

25. $\sqrt{69}$ **27.** $\sqrt{61}$ **29.** $7, 7\sqrt{5}, 14$; Triángulo rectángulo

31. $\sqrt{41}, \sqrt{41}, \sqrt{14}$; Triángulo isósceles

33. $(0, 0, 9), (2, 6, 12), (6, 4, -3)$

35. $\left(\frac{3}{2}, -3, 5\right)$ **37.** $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 = 4$

39. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 0)^2 = 10$

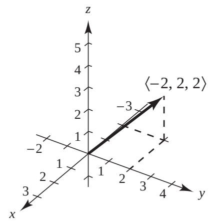
41. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 4)^2 = 25$
Centro: $(1, -3, -4)$
Radio: 5

43. $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 1$
Centro: $\left(\frac{1}{3}, -1, 0\right)$
Radio: 1

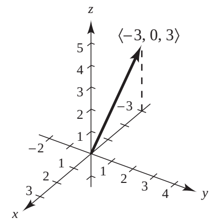
45. Una esfera sólida con centro en (0, 0, 0) y 6 de radio

47. Interior de una esfera con 4 de radio y centrada en (2, –3, 4)

49. *a*) $\langle -2, 2, 2\rangle$
b) $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
c)



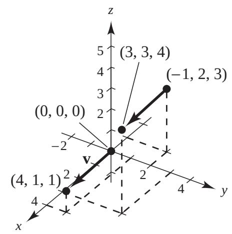
51. *a*) $\langle -3, 0, 3\rangle$
b) $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$
c)



53. $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 6\rangle$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{38}$
$\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{38}}\langle 1, -1, 6\rangle$

55. $\mathbf{v} = \langle -1, 0, -1\rangle$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$
$\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle -1, 0, -1\rangle$

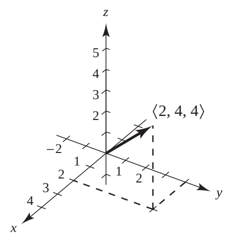
57. *a*) y *d*)



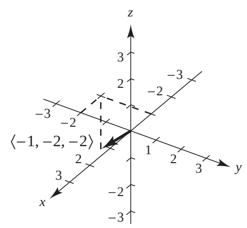
b) $\langle 4, 1, 1\rangle$ *c*) $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

59. $(3, 1, 8)$

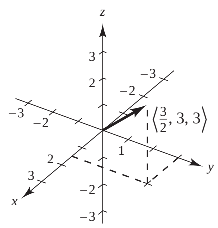
61. *a*)



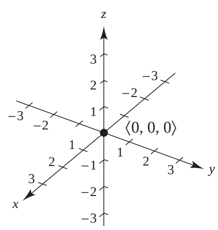
b)



c)



d)



63. $\langle -1, 0, 4\rangle$ **65.** $\langle 6, 12, 6\rangle$ **67.** $\left\langle \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}\right\rangle$

69. *a* y *b* **71.** *a* **73.** Colineal **75.** No colineal

77. $\overrightarrow{AB} = \langle 1, 2, 3\rangle$
$\overrightarrow{CD} = \langle 1, 2, 3\rangle$
$\overrightarrow{BD} = \langle -2, 1, 1\rangle$
$\overrightarrow{AC} = \langle -2, 1, 1\rangle$
Porque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, los puntos dados forman los vértices de un paralelogramo.

79. 0 **81.** $\sqrt{34}$ **83.** $\sqrt{14}$

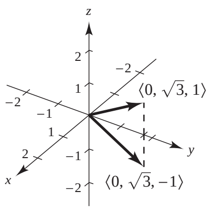
85. *a*) $\frac{1}{3}\langle 2, -1, 2\rangle$ *b*) $-\frac{1}{3}\langle 2, -1, 2\rangle$

87. *a*) $(1/\sqrt{38})\langle 3, 2, -5\rangle$ *b*) $-(1/\sqrt{38})\langle 3, 2, -5\rangle$

89. *a*) a *d*) Las respuestas varían.
e) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 4, 7.5, -2\rangle$
$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \approx 8.732$
$\|\mathbf{u}\| \approx 5.099$
$\|\mathbf{v}\| \approx 9.014$

91. $\pm\frac{7}{3}$ **93.** $\langle 0, 10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2}\rangle$ **95.** $\langle 1, -1, \frac{1}{2}\rangle$

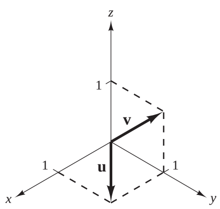
97.



$\langle 0, \sqrt{3}, \pm 1\rangle$

99. $(2, -1, 2)$

101. *a*)



b) $a = 0, a + b = 0, b = 0$
c) $a = 1, a + b = 2, b = 1$
d) No es posible

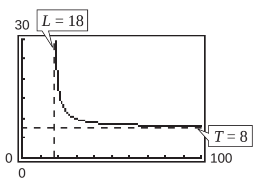
103. x_0 es la distancia dirigida al plano *yz*
y_0 es la distancia dirigida al plano *xz*
z_0 es la distancia dirigida al plano *xy*

105. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ **107.** 0

109. *a*) $T = 8L/\sqrt{L^2 - 18^2}, L > 18$
b)

L	20	25	30	35	40	45	50
T	18.4	11.5	10	9.3	9.0	8.7	8.6

c)



d) Demostración
e) 30 pulg

111. $(\sqrt{3}/3)\langle 1, 1, 1\rangle$

113. La tensión en el cable *AB*: 202.919 N
La tensión en el cable *AC*: 157.909 N
La tensión en el cable *AD*: 226.521 N

115. $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + (y - 3)^2 + \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{44}{9}$

Sección 11.3 (página 789)

1. *a*) 17 *b*) 25 *c*) 25 *d*) $\langle -17, 85\rangle$ *e*) 34

3. *a*) -26 *b*) 52 *c*) 52 *d*) $\langle 78, -52\rangle$ *e*) -52

5. *a*) 2 *b*) 29 *c*) 29 *d*) $\langle 0, 12, 10\rangle$ *e*) 4

7. *a*) 1 *b*) 6 *c*) 6 *d*) $\mathbf{i} - \mathbf{k}$ *e*) 2

9. 20 **11.** $\pi/2$ **13.** $\arccos[-1/(5\sqrt{2})] \approx 98.1°$

15. $\arccos(\sqrt{2}/3) \approx 61.9°$ **17.** $\arccos(-8\sqrt{13}/65) \approx 116.3°$

19. Ni uno ni otro **21.** Ortogonal **23.** Ni uno ni otro

25. Ortogonal **27.** Triángulo rectángulo; las respuestas varían.

29. Triángulo agudo; las respuestas varían

31. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$
$\cos\beta = \frac{2}{3}$
$\cos\gamma = \frac{2}{3}$

33. $\cos\alpha = 0$
$\cos\beta = 3/\sqrt{13}$
$\cos\gamma = -2/\sqrt{13}$

35. $\alpha \approx 43.3°, \beta \approx 61.0°, \gamma \approx 119.0°$

37. $\alpha \approx 100.5°, \beta \approx 24.1°, \gamma \approx 68.6°$

39. Magnitud: 124.310 lb
$\alpha \approx 29.48°, \beta \approx 61.39°, \gamma \approx 96.53°$

41. $\alpha = 90°, \beta = 45°, \gamma = 45°$ **43.** *a*) $\langle 2, 8\rangle$ *b*) $\langle 4, -1\rangle$

45. *a*) $\left\langle \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ *b*) $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$ **47.** *a*) $\langle -2, 2, 2\rangle$ *b*) $\langle 2, 1, 1\rangle$

49. *a*) $\left\langle 0, \frac{33}{25}, \frac{44}{25}\right\rangle$ *b*) $\left\langle 2, -\frac{8}{25}, \frac{6}{25}\right\rangle$

51. Ver la “Definición de producto punto”, página 783.

53. *a*) y *b*) están definidas. *c*) y *d*) no están definidas porque no es posible encontrar el producto punto de un escalar y un vector o la suma de un escalar y un vector.

55. Ver figura 11.29 en la página 787.

57. Sí

$$\left\|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}\right\| = \left\|\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}\right\|$$
$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|\frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|^2} = |\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}|\frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|^2}$$
$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}$$
$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$$

59. \$12 351.25; ingreso total **61.** *a*) a *c*) Las respuestas varían

63. Las respuestas varían **65.** $\mathbf{u}$

67. Las respuestas varían. Ejemplo: $\langle 12, 2\rangle$ y $\langle -12, -2\rangle$

69. Las respuestas varían. Ejemplo: $\langle 2, 0, 3\rangle$ y $\langle -2, 0, -3\rangle$

71. *a*) 8 335.1 lb *b*) 47 270.8 lb

73. 425 pies-lb **75.** 2 900.2 km-N

77. Falso. Por ejemplo: $\langle 1, 1\rangle \cdot \langle 2, 3\rangle = 5$ y $\langle 1, 1\rangle \cdot \langle 1, 4\rangle = 5$, pero $\langle 2, 3\rangle \neq \langle 1, 4\rangle$.

79. $\arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54.7°$

81. *a*) $(0, 0), (1, 1)$
b) Para $y = x^2$ en $(1, 1)$: $\langle \pm\sqrt{5}/5, \pm 2\sqrt{5}/5\rangle$
Para $y = x^{1/3}$ en $(1, 1)$: $\langle \pm 3\sqrt{10}/10, \pm\sqrt{10}/10\rangle$
Para $y = x^2$ en $(0, 0)$: $\langle \pm 1, 0\rangle$
Para $y = x^{1/3}$ en $(0, 0)$: $\langle 0, \pm 1\rangle$
c) En $(1, 1)$: $\theta = 45°$
En $(0, 0)$: $\theta = 90°$

83. *a*) $(-1, 0), (1, 0)$

b) Para $y = 1 - x^2$ en $(1, 0)$: $\left\langle \pm\sqrt{5}/5, \mp 2\sqrt{5}/5 \right\rangle$

Para $y = x^2 - 1$ en $(1, 0)$: $\left\langle \pm\sqrt{5}/5, \pm 2\sqrt{5}/5 \right\rangle$

Para $y = 1 - x^2$ en $(-1, 0)$: $\left\langle \pm\sqrt{5}/5, \pm 2\sqrt{5}/5 \right\rangle$

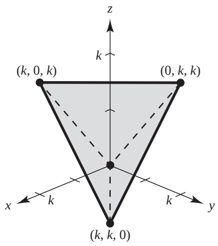
Para $y = x^2 - 1$ en $(-1, 0)$: $\left\langle \pm\sqrt{5}/5, \mp 2\sqrt{5}/5 \right\rangle$

c) En $(1, 0)$: $\theta = 53.13°$

En $(-1, 0)$: $\theta = 53.13°$

85. Demostración

87. *a*)

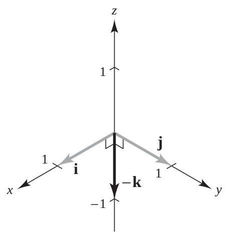


b) $k\sqrt{2}$ *c*) $60°$ *d*) $109.5°$

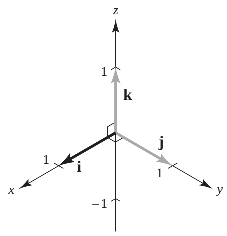
89 a 91. Demostraciones

Sección 11.4 (página 798)

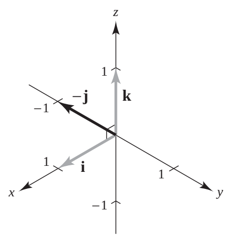
1. $-\mathbf{k}$



3. $\mathbf{i}$



5. $-\mathbf{j}$



7. *a*) $20\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$

b) $-20\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$

c) $\mathbf{0}$

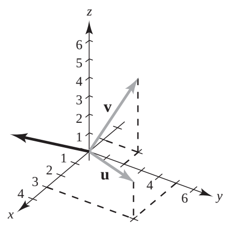
9. *a*) $17\mathbf{i} - 33\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

b) $-17\mathbf{i} + 33\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$

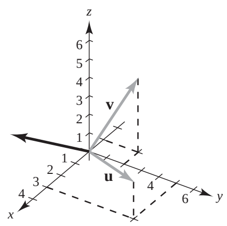
c) $\mathbf{0}$

11. $\langle 0, 0, 54\rangle$ **13.** $\langle -1, -1, -1\rangle$ **15.** $\langle -2, 3, -1\rangle$

17.



19.



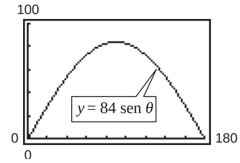
21. $\langle -73.5, 5.5, 44.75\rangle, \left\langle -\dfrac{2.94}{\sqrt{11.8961}}, \dfrac{0.22}{\sqrt{11.8961}}, \dfrac{1.79}{\sqrt{11.8961}} \right\rangle$

23. $\langle -3.6, -1.4, 1.6\rangle, \left\langle -\dfrac{1.8}{\sqrt{4.37}}, -\dfrac{0.7}{\sqrt{4.37}}, \dfrac{0.8}{\sqrt{4.37}} \right\rangle$

25. Las respuestas varían **27.** 1 **29.** $6\sqrt{5}$ **31.** $9\sqrt{5}$

33. $\dfrac{11}{2}$ **35.** $\dfrac{\sqrt{16\,742}}{2}$ **37.** $10 \cos 40° \approx 7.66$ pies-lb

39. *a*) $84 \text{ sen } \theta$



b) $42\sqrt{2} \approx 59.40$

c) $\theta = 90°$; que es lo que debería esperarse. Cuando $\theta = 90°$, la llave inglesa está horizontal

41. 1 **43.** 6 **45.** 2 **47.** 75

49. Al menos uno de los vectores es el vector cero.

51. Ver la "Definición del producto cruz de dos vectores en el espacio", página 792.

53. La magnitud del producto cruz aumentará en un factor de 4.

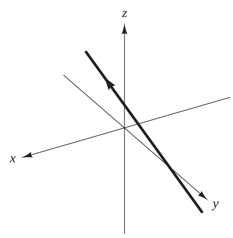
55. Falso. El producto cruz de dos vectores no está definido en un sistema de coordenadas bidimensional.

57. Falso. Sea $\mathbf{u} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 0, 0\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -1, 0, 0\rangle$. Entonces $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$, excepto $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$.

59 a 67. Demostraciones

Sección 11.5 (página 807)

1. *a*)



b) $P = (1, 2, 2)$, $Q = (10, -1, 17)$, $\overrightarrow{PQ} = \langle 9, -3, 15\rangle$

(Hay muchas respuestas correctas.) Los componentes del vector y los coeficientes de t son proporcionales porque la recta es paralela a $\overrightarrow{PQ}$.

c) $\left(-\frac{1}{5}, \frac{12}{5}, 0\right), (7, 0, 12), \left(0, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$

3. *a*) Sí *b*) No

	Ecuaciones paramétricas (*a*)	*Ecuaciones simétricas* (*b*)	*Números directores*
5.	$x = 3t$, $y = t$, $z = 5t$	$\dfrac{x}{3} = y = \dfrac{z}{5}$	$3, 1, 5$
7.	$x = -2 + 2t$, $y = 4t$, $z = 3 - 2t$	$\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-3}{-2}$	$2, 4, -2$
9.	$x = 1 + 3t$, $y = -2t$, $z = 1 + t$	$\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$	$3, -2, 1$

	Ecuaciones paramétricas (*a*)	*Ecuaciones simétricas* (*b*)	*Números directores*
11.	$x = 5 + 17t$ $y = -3 - 11t$ $z = -2 - 9t$	$\dfrac{x-5}{17} = \dfrac{y+3}{-11} = \dfrac{z+2}{-9}$	$17, -11, -9$
13.	$x = 7 - 10t$ $y = -2 + 2t$ $z = 6$	No es posible.	$-10, 2, 0$

15. $x = 2$, $y = 3$, $z = 4 + t$ **17.** $x = 2 + 3t$, $y = 3 + 2t$, $z = 4 - t$ **19.** $x = 5 + 2t$, $y = -3 - t$, $z = -4 + 3t$

21. $x = 2 - t$, $y = 1 + t$, $z = 2 + t$

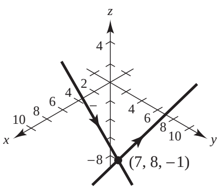
23. $P(3, -1, -2)$; $\mathbf{v} = \langle -1, 2, 0\rangle$

25. $P(7, -6, -2)$; $\mathbf{v} = \langle 4, 2, 1\rangle$

27. $L_1 = L_2$ y es paralela a L_3. **29.** L_1 y L_3 son idénticas.

31. $(2, 3, 1)$; $\cos\theta = 7\sqrt{17}/51$ **33.** No se cortan.

35.



$(7, 8, -1)$

37. *a*) $P = (0, 0, -1)$, $Q = (0, -2, 0)$, $R = (3, 4, -1)$
$\overrightarrow{PQ} = \langle 0, -2, 1\rangle$, $\overrightarrow{PR} = \langle 3, 4, 0\rangle$
(Hay muchas respuestas correctas.)
b) $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -4, 3, 6\rangle$
Las componentes del producto cruz son proporcionales a los coeficientes de las variables en la ecuación. El producto cruz es paralelo al vector normal.

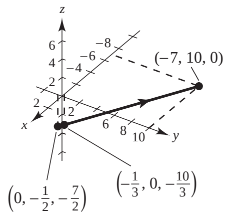
39. *a*) Sí *b*) Sí **41.** $y - 3 = 0$

43. $2x + 3y - z = 10$ **45.** $2x - y - 2z + 6 = 0$

47. $3x - 19y - 2z = 0$ **49.** $4x - 3y + 4z = 10$ **51.** $z = 3$

53. $x + y + z = 5$ **55.** $7x + y - 11z = 5$ **57.** $y - z = -1$

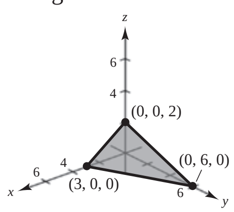
59.



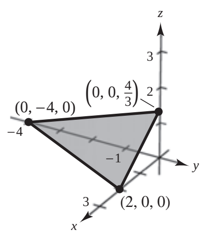
61. $x - z = 0$ **63.** $9x - 3y + 2z - 21 = 0$

65. Ortogonal **67.** Ni uno ni otro; $83.5°$ **69.** Paralelo

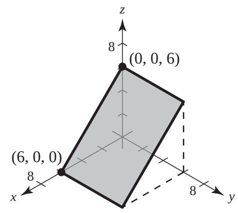
71.



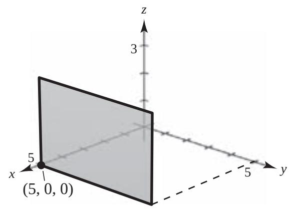
73.



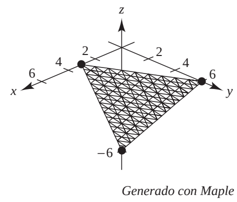
75.



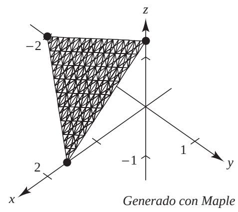
77.



79.



81.



83. P_1 y P_2 son paralelos. **85.** $P_1 = P_4$ y es paralelo a P_2.

87. Los planos tienen intersecciones en $(c, 0, 0)$, $(0, c, 0)$ y $(0, 0, c)$ para cada valor de c.

89. Si $c = 0$, $z = 0$ es el plano xy; si $c \neq 0$, el plano es paralelo al eje x y pasa a través de los puntos $(0, 0, 0)$ y $(0, 1, -c)$

91. *a*) $\theta \approx 65.91°$
b) $x = 2$
$y = 1 + t$
$z = 1 + 2t$

93. $(2, -3, 2)$; La recta no se encuentra en el plano.

95. No se cortan **97.** $6\sqrt{14}/7$ **99.** $11\sqrt{6}/6$

101. $2\sqrt{26}/13$ **103.** $27\sqrt{94}/188$ **105.** $\sqrt{2533}/17$

107. $7\sqrt{3}/3$ **109.** $\sqrt{66}/3$

111. Ecuaciones paramétricas: $x = x_1 + at$, $y = y_1 + bt$ y $z = z_1 + ct$
Ecuaciones simétricas: $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$
Se necesita un vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ paralelo a la recta y un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ en la recta.

113. Resolver simultáneamente las dos ecuaciones lineales que representan los planos y sustituir los valores en una de las ecuaciones originales. Después elegir un valor para t y dar las ecuaciones paramétricas correspondientes a la recta de intersección.

115. *a*) Paralelos si el vector $\langle a_1, b_1, c_1\rangle$ es un múltiplo escalar de $\langle a_2, b_2, c_2\rangle$; $\theta = 0$.
b) Perpendicular si $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$; $\theta = \pi/2$.

117. $cbx + acy + abz = abc$

119. Esfera: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 16$

121. *a*)

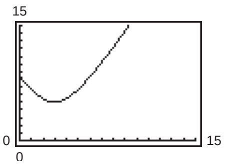
Año	1999	2000	2001	2002
***z* (aprox.)**	6.25	6.05	5.94	5.76

Año	2003	2004	2005
***z* (aprox.)**	5.66	5.56	5.56

Las aproximaciones están más próximas a los valores actuales.
b) Las respuestas varían.

123. *a*) $\sqrt{70}$ pulg.

b)



c) La distancia nunca es cero.

d) 5 pulg.

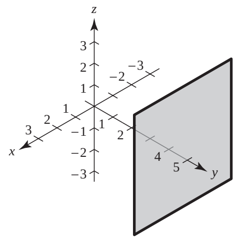
125. $\left(\frac{77}{13}, \frac{48}{13}, -\frac{23}{13}\right)$ **127.** $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right)$ **129.** Verdadero **131.** Verdadero

133. Falso. El plano $7x + y - 11z = 5$ y el plano $5x + 2y - 4z = 1$ son perpendiculares al plano $2x - 3y + z = 3$ pero no son paralelos.

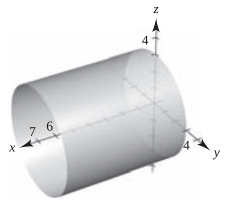
Sección 11.6 (página 820)

1. *c* **2.** *e* **3.** *f* **4.** *b* **5.** *d* **6.** *a*

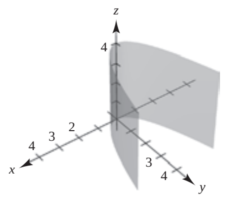
7. Plano



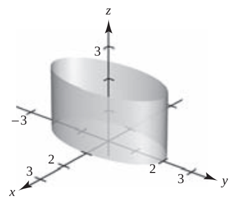
9. Cilindro circular recto



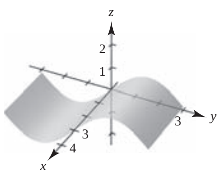
11. Cilindro parabólico



13. Cilindro elíptico

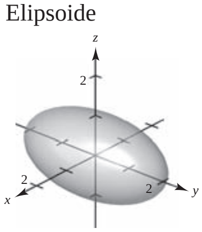


15. Cilindro

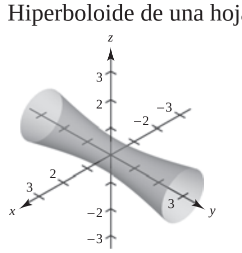


17. *a*) (20, 0, 0)
b) (10, 10, 20)
c) (0, 0, 20)
d) (0, 20, 0)

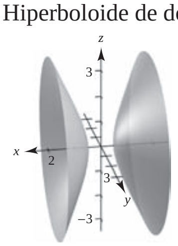
19. Elipsoide



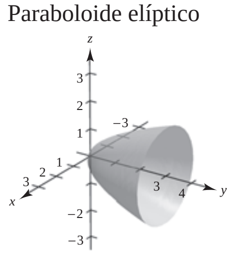
21. Hiperboloide de una hoja



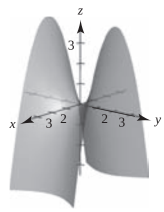
23. Hiperboloide de dos hojas



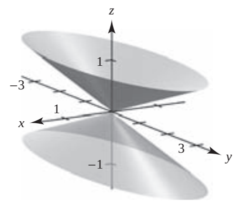
25. Paraboloide elíptico



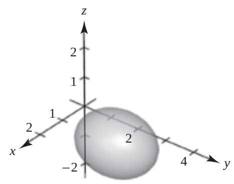
27. Paraboloide hiperbólico



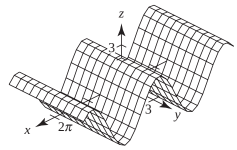
29. Cono elíptico



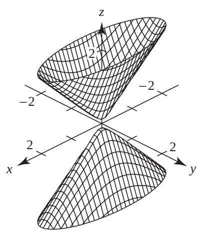
31. Elipsoide



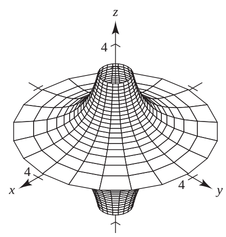
33.



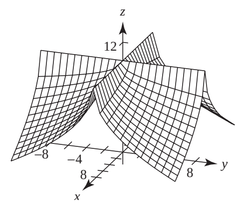
35.



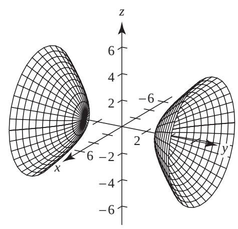
37.



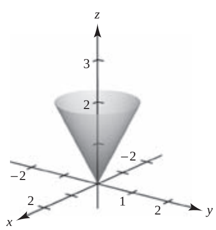
39.



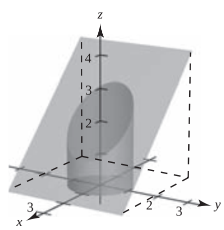
41.



43.



45.



47. $x^2 + z^2 = 4y$ **49.** $4x^2 + 4y^2 = z^2$ **51.** $y^2 + z^2 = 4/x^2$

53. $y = \sqrt{2z}$ $\left(\text{o } x = \sqrt{2z}\right)$

55. Sea *C* una curva plana y sea *L* una recta no contenida en un plano paralelo. Al conjunto de todas las rectas paralelas a *L* y que cortan a *C* se le llama un cilindro. *C* es llamada la curva directriz del cilindro, y las rectas paralelas se llaman rectas generatrices.

57. Ver páginas 814 y 815. **59.** $128\pi/3$

61. *a*) Eje mayor: $4\sqrt{2}$
Eje menor: 4
Focos: $(0, \pm 2, 2)$

b) Eje mayor: $8\sqrt{2}$
Eje menor: 8
Focos: $(0, \pm 4, 8)$

63. $x^2 + z^2 = 8y$; Paraboloide elíptico

65. $x^2/3\,963^2 + y^2/3\,963^2 + z^2/3\,950^2 = 1$

67. $x = at, y = -bt, z = 0$;
$x = at, y = bt + ab^2, z = 2abt + a^2b^2$

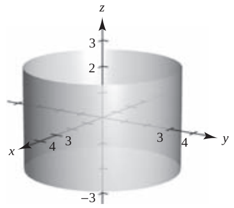
69. Verdadero

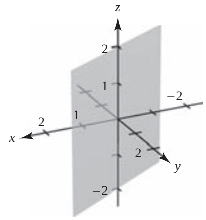
71. Falso. Una traza de una elipsoide puede ser un único punto.

73. La botella de Klein no tiene un interior ni un exterior. Se forma insertando el extremo delgado abierto a través del costado de la botella y uniéndolo a la base de la botella.

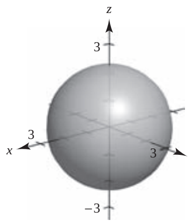
Sección 11.7 (página 827)

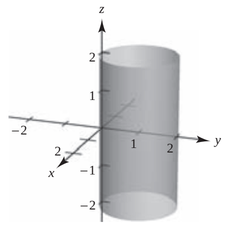
1. $(-7, 0, 5)$ **3.** $\left(3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2, 1\right)$ **5.** $\left(-2\sqrt{3}, -2, 3\right)$
7. $(5, \pi/2, 1)$ **9.** $\left(2\sqrt{2}, -\pi/4, -4\right)$ **11.** $(2, \pi/3, 4)$
13. $z = 4$ **15.** $r^2 + z^2 = 17$ **17.** $r = \sec\theta \tan\theta$
19. $r^2 \operatorname{sen}^2\theta = 10 - z^2$
21. $x^2 + y^2 = 9$ **23.** $x - \sqrt{3}y = 0$



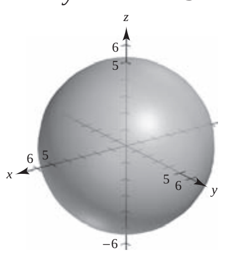


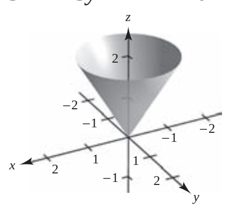
25. $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ **27.** $x^2 + y^2 - 2y = 0$



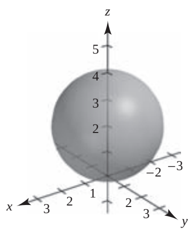


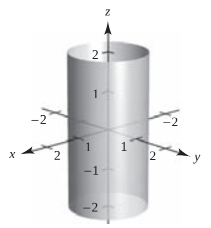
29. $(4, 0, \pi/2)$ **31.** $\left(4\sqrt{2}, 2\pi/3, \pi/4\right)$ **33.** $(4, \pi/6, \pi/6)$
35. $\left(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ **37.** $(0, 0, 12)$ **39.** $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -5\sqrt{2}/2\right)$
41. $\rho = 2\csc\phi\csc\theta$ **43.** $\rho = 7$
45. $\rho = 4\csc\phi$ **47.** $\tan^2\phi = 2$
49. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ **51.** $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$





53. $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ **55.** $x^2 + y^2 = 1$





57. $(4, \pi/4, \pi/2)$ **59.** $\left(4\sqrt{2}, \pi/2, \pi/4\right)$
61. $\left(2\sqrt{13}, -\pi/6, \arccos[3/\sqrt{13}]\right)$ **63.** $(13, \pi, \arccos[5/13])$
65. $(10, \pi/6, 0)$ **67.** $(36, \pi, 0)$
69. $\left(3\sqrt{3}, -\pi/6, 3\right)$ **71.** $\left(4, 7\pi/6, 4\sqrt{3}\right)$

	Rectangulares	*Cilíndricas*	*Esféricas*
73.	$(4, 6, 3)$	$(7.211, 0.983, 3)$	$(7.810, 0.983, 1.177)$
75.	$(4.698, 1.710, 8)$	$(5, \pi/9, 8)$	$(9.434, 0.349, 0.559)$
77.	$(-7.071, 12.247, 14.142)$	$(14.142, 2.094, 14.142)$	$(20, 2\pi/3, \pi/4)$
79.	$(3, -2, 2)$	$(3.606, -0.588, 2)$	$(4.123, -0.588, 1.064)$
81.	$\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{3}{2}\right)$	$(2.833, 0.490, -1.5)$	$(3.206, 0.490, 2.058)$
83.	$(-3.536, 3.536, -5)$	$(5, 3\pi/4, -5)$	$(7.071, 2.356, 2.356)$
85.	$(2.804, -2.095, 6)$	$(-3.5, 2.5, 6)$	$(6.946, 5.642, 0.528)$
87.	$(-1.837, 1.837, 1.5)$	$(2.598, 2.356, 1.5)$	$(3, 3\pi/4, \pi/3)$

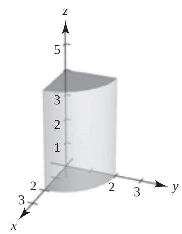
89. *d* **90.** *e* **91.** *c* **92.** *a* **93.** *f* **94.** *b*

95. Rectangulares a cilíndricas:
$r^2 = x^2 + y^2, \tan\theta = y/x, z = z$
Cilíndricas a rectangulares:
$x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta, z = z$

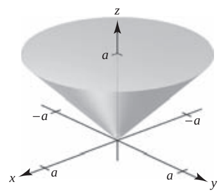
97. Rectangulares a esféricas:
$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tan\theta = y/x, \phi = \arccos\left(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$
Esféricas a rectangulares:
$x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, z = \rho\cos\phi$

99. *a*) $r^2 + z^2 = 25$ *b*) $\rho = 5$
101. *a*) $r^2 + (z - 1)^2 = 1$ *b*) $\rho = 2\cos\phi$
103. *a*) $r = 4\operatorname{sen}\theta$ *b*) $\rho = 4\operatorname{sen}\theta/\operatorname{sen}\phi = 4\operatorname{sen}\theta\csc\phi$
105. *a*) $r^2 = 9/(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$
a) $\rho^2 = 9\csc^2\phi/(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$

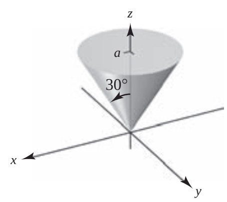
107.



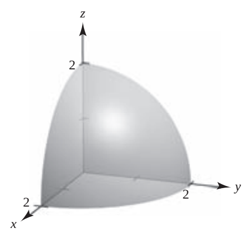
109.



111.



113.



115. Rectangulares: $0 \le x \le 10$
$0 \le y \le 10$
$0 \le z \le 10$
117. Esféricas: $4 \le \rho \le 6$
119. Cilíndricas: $r^2 + z^2 \le 9, r \le 3\cos\theta, 0 \le \theta \le \pi$
121. Falso. $r = z$ representa un cono.
123. Falso. Ver página 823. **125.** Elipse

Ejercicios de repaso para el capítulo 11 (página 829)

1. *a*) $\mathbf{u} = \langle 3, -1\rangle$ *b*) $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ *c*) $2\sqrt{5}$ *d*) $10\mathbf{i}$
$\mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$
3. $\mathbf{v} = \left\langle 4, 4\sqrt{3}\right\rangle$ **5.** $(-5, 4, 0)$

7. Arriba del plano xy y a la derecha del plano xz o debajo del plano xy y a la izquierda del plano xz.

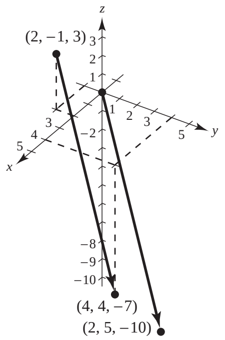
9. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-6)^2=\frac{225}{4}$

11. $(x-2)^2+(y-3)^2+z^2=9$

Centro: $(2, 3, 0)$

Radio: 3

13. *a*) y *d*) *b*) $\mathbf{u}=\langle 2, 5, -10\rangle$ *c*) $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-10\mathbf{k}$



15. Colineales **17.** $(1/\sqrt{38})\langle 2, 3, 5\rangle$

19. *a*) $\mathbf{u}=\langle -1, 4, 0\rangle, \mathbf{v}=\langle -3, 0, 6\rangle$ *b*) 3 *c*) 45

21. Ortogonales **23.** $\theta=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)=15^\circ$ **25.** π

27. Las respuestas varían. Ejemplo: $\langle -6, 5, 0\rangle, \langle 6, -5, 0\rangle$

29. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=14=\|\mathbf{u}\|^2$ **31.** $\left\langle -\frac{15}{14}, \frac{5}{7}, -\frac{5}{14}\right\rangle$

33. $(1/\sqrt{5})(-2\mathbf{i}-\mathbf{j})$ o $(1/\sqrt{5})(2\mathbf{i}+\mathbf{j})$

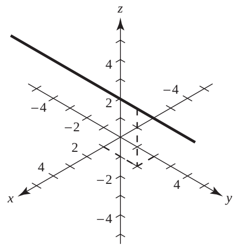
35. 4 **37.** $\sqrt{285}$ **39.** $100 \sec 20^\circ \approx 106.4$ lb

41. *a*) $x=3+6t, y=11t, z=2+4t$

b) $(x-3)/6=y/11=(z-2)/4$

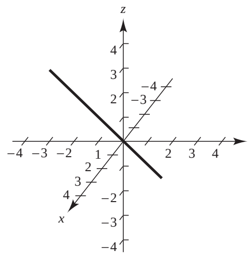
43. *a*) $x=1, y=2+t, z=3$ *b*) Ninguno

c)

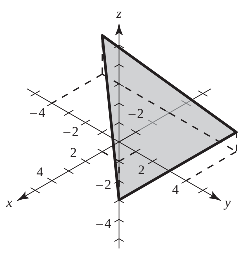


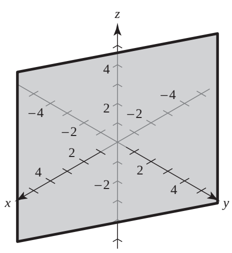
45. *a*) $x=t, y=-1+t, z=1$ *b*) $x=y+1, z=1$

c)



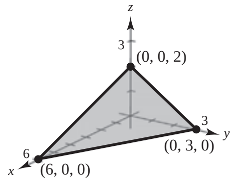
47. $27x+4y+32z+33=0$ **49.** $x+2y=1$



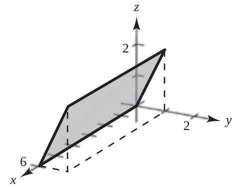


51. $\frac{8}{7}$ **53.** $\sqrt{35}/7$

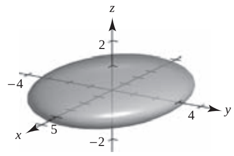
55. Plano



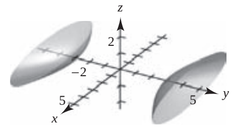
57. Plano



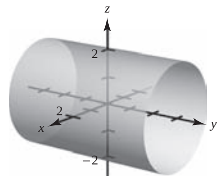
59. Elipsoide



61. Hiperboloide de dos hojas



63. Cilindro



65. Sea $y=2\sqrt{x}$ y girar alrededor del eje x.

67. $x^2+z^2=2y$

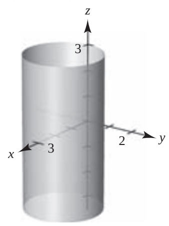
69. *a*) $(4, 3\pi/4, 2)$ *b*) $\left(2\sqrt{5}, 3\pi/4, \arccos\left[\sqrt{5}/5\right]\right)$

71. $\left(50\sqrt{5}, -\pi/6, \arccos\left[1/\sqrt{5}\right]\right)$

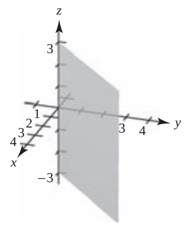
73. $\left(25\sqrt{2}/2, -\pi/4, -25\sqrt{2}/2\right)$

75. *a*) $r^2\cos 2\theta=2z$ *b*) $\rho=2\sec 2\theta\cos\phi\csc^2\phi$

77. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$



79. $x=y$



SP Solución de problemas (página 831)

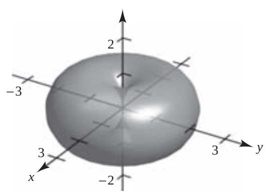
1–3. Demostraciones **5.** *a*) $3\sqrt{2}/2\approx 2.12$ *b*) $\sqrt{5}\approx 2.24$

7. *a*) $\pi/2$ *b*) $\frac{1}{2}(\pi abk)k$

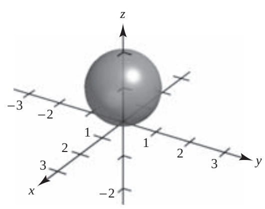
c) $V=\frac{1}{2}(\pi ab)k^2$

$V=\frac{1}{2}$(área de la base) altura

9. *a*)



b)



11. Demostración

13. *a*) Tensión: $2\sqrt{3}/3 \approx 1.1547$ lb
Magnitud de **u**: $\sqrt{3}/3 \approx 0.5774$ lb

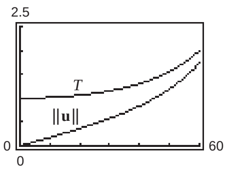
b) $T = \sec\theta$; $\|\mathbf{u}\| = \tan\theta$; Dominio: $0° \le \theta \le 90°$

c)

θ	0°	10°	20°	30°
T	1	1.0154	1.0642	1.1547
$\|\mathbf{u}\|$	0	0.1763	0.3640	0.5774

θ	40°	50°	60°
T	1.3054	1.5557	2
$\|\mathbf{u}\|$	0.8391	1.1918	1.7321

d)



e) Ambas son funciones crecientes.

f) $\lim\limits_{\theta\to\pi/2^-} T = \infty$ y $\lim\limits_{\theta\to\pi/2^-} \|\mathbf{u}\| = \infty$
Sí. Cuando θ aumenta, también aumentan T y $\|\mathbf{u}\|$.

15. $\langle 0, 0, \cos\alpha \operatorname{sen}\beta - \cos\beta \operatorname{sen}\alpha\rangle$; demostración

17. $D = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$
$= \dfrac{|\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|} = \dfrac{|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|} = \dfrac{|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|}$

19. Demostración

Capítulo 12

Sección 12.1 (página 839)

1. $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ **3.** $(0, \infty)$

5. $[0, \infty)$ **7.** $(-\infty, \infty)$

9. *a*) $\frac{1}{2}\mathbf{i}$ *b*) $\mathbf{j}$ *c*) $\frac{1}{2}(s+1)^2\mathbf{i} - s\mathbf{j}$ *d*) $\frac{1}{2}\Delta t(\Delta t + 4)\mathbf{i} - \Delta t\mathbf{j}$

11. *a*) $\ln 2\mathbf{i} + \dfrac{1}{2}\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ *b*) No es posible

c) $\ln(t-4)\mathbf{i} + \dfrac{1}{t-4}\mathbf{j} + 3(t-4)\mathbf{k}$

d) $\ln(1+\Delta t)\mathbf{i} - \dfrac{\Delta t}{1+\Delta t}\mathbf{j} + 3\Delta t\mathbf{k}$

13. $\sqrt{t(1+25t)}$

15. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$
$x = 3t,\ y = t,\ z = 2t$

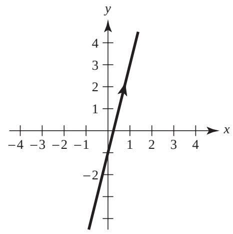
17. $\mathbf{r}(t) = (-2+t)\mathbf{i} + (5-t)\mathbf{j} + (-3+12t)\mathbf{k}$
$x = -2+t,\ y = 5-t,\ z = -3+12t$

19. $t^2(5t-1)$; No, el producto punto es un escalar.

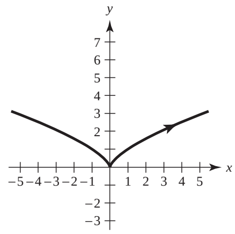
21. *b* **22.** *c* **23.** *d* **24.** *a*

25. *a*) $(-20, 0, 0)$ *b*) $(10, 20, 10)$
c) $(0, 0, 20)$ *d*) $(20, 0, 0)$

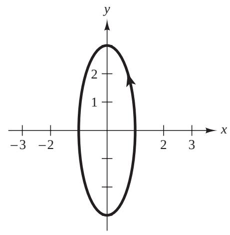
27.



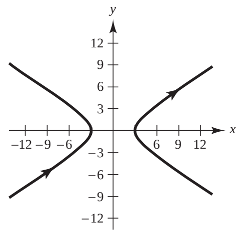
29.



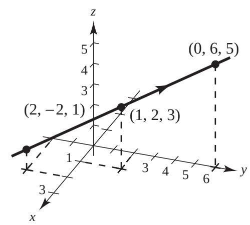
31.



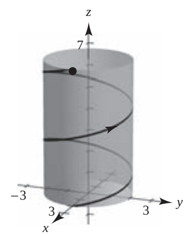
33.



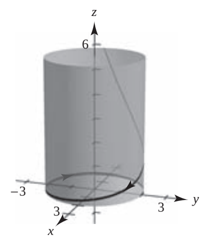
35.



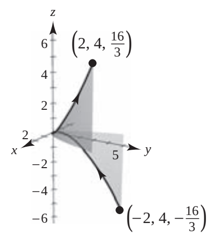
37.



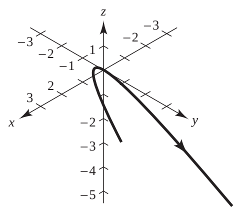
39.



41.

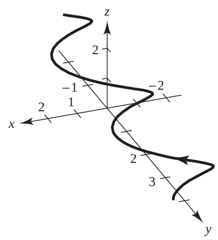


43.



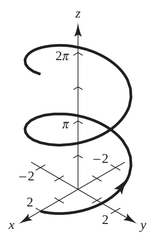
Parábola

45.



Hélice

47.



a) La hélice se traslada hacia atrás sobre el eje *x*.

b) La altura de la hélice aumenta a mayor velocidad.

c) La orientación de la gráfica se invierte.

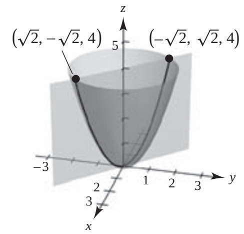
d) El eje de la hélice es el eje *x*.

e) El radio de la hélice aumenta de 2 a 6.

49 a 55. Las respuestas varían.

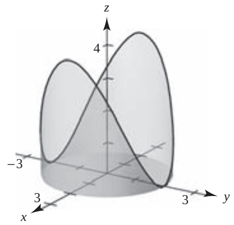
57. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta:
$\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j},\quad 0 \le t \le 2$
$\mathbf{r}_2(t) = (2-t)\mathbf{i} + 4\mathbf{j},\quad 0 \le t \le 2$
$\mathbf{r}_3(t) = (4-t)\mathbf{j},\quad 0 \le t \le 4$

59.



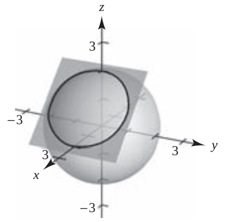
$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

61.



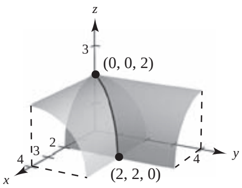
$\mathbf{r}(t) = 2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + 4 \operatorname{sen}^2 t\mathbf{k}$

63.



$\mathbf{r}(t) = (1 + \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + \sqrt{2} \cos t\mathbf{j} + (1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$ y
$\mathbf{r}(t) = (1 + \operatorname{sen} t)\mathbf{i} - \sqrt{2} \cos t\mathbf{j} + (1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$

65.

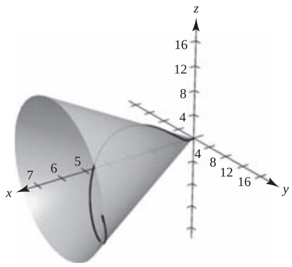


$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sqrt{4 - t^2}\mathbf{k}$

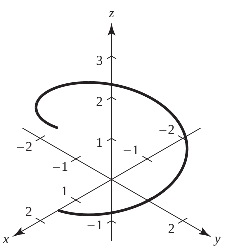
67. Sea $x = t, y = 2t \cos t$ y $z = 2t \operatorname{sen} t$. Entonces

$$y^2 + z^2 = (2t \cos t)^2 + (2t \operatorname{sen} t)^2 = 4t^2 \cos^2 t + 4t^2 \operatorname{sen}^2 t$$
$$= 4t^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = 4t^2.$$

Porque $x = t, y^2 + z^2 = 4x^2$.



69. $\pi\mathbf{i} - \mathbf{j}$ **71.** $\mathbf{0}$ **73.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
75. $(-\infty, 0), (0, \infty)$ **77.** $[-1, 1]$
79. $(-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi)$, n es un entero.
81. *a*) $\mathbf{s}(t) = t^2\mathbf{i} + (t - 3)\mathbf{j} + (t + 3)\mathbf{k}$
b) $\mathbf{s}(t) = (t^2 - 2)\mathbf{i} + (t - 3)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
c) $\mathbf{s}(t) = t^2\mathbf{i} + (t + 2)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
83. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta:

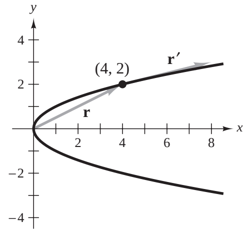


$\mathbf{r}(t) = 1.5 \cos t\mathbf{i} + 1.5 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \dfrac{1}{\pi}t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

85 a 87. Demostraciones **89.** Sí; sí **91.** No necesariamente
93. Verdadero **95.** Verdadero

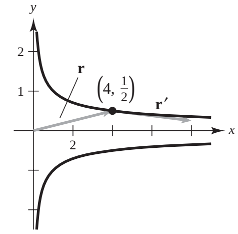
Sección 12.2 (página 848)

1. $\mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
$\mathbf{r}'(2) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$



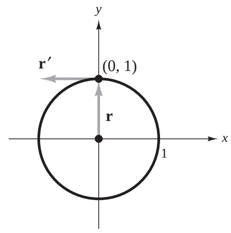
$\mathbf{r}'(t_0)$ es tangente a la curva en t_0.

3. $\mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$
$\mathbf{r}'(2) = 4\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j}$



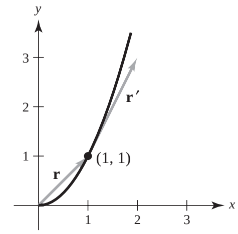
$\mathbf{r}'(t_0)$ es tangente a la curva en t_0.

5. $\mathbf{r}(\pi/2) = \mathbf{j}$
$\mathbf{r}'(\pi/2) = -\mathbf{i}$



$\mathbf{r}'(t_0)$ es tangente a la curva en t_0.

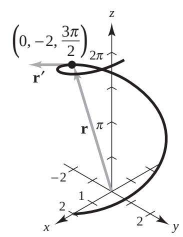
7. $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$



$\mathbf{r}'(t_0)$ es tangente a la curva en t_0.

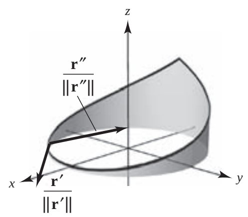
9. $\mathbf{r}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -2\mathbf{j} + \left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\mathbf{k}$

$\mathbf{r}'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$



11. $3t^2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **13.** $-2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 5 \cos t\mathbf{j}$
15. $6\mathbf{i} - 14t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ **17.** $-3a \operatorname{sen} t \cos^2 t\mathbf{i} + 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t\mathbf{j}$
19. $-e^{-t}\mathbf{i} + (5te^t + 5e^t)\mathbf{k}$
21. $\langle \operatorname{sen} t + t \cos t, \cos t - t \operatorname{sen} t, 1\rangle$
23. *a*) $3t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ *b*) $6t\mathbf{i} + \mathbf{j}$ *c*) $18t^3 + t$
25. *a*) $-4 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j}$ *b*) $-4 \cos t\mathbf{i} - 4 \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ *c*) 0
27. *a*) $t\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$ *b*) $\mathbf{i} + t\mathbf{k}$ *c*) $t^3/2 + t$
29. *a*) $\langle t \cos t, t \operatorname{sen} t, 1\rangle$
b) $\langle \cos t - t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + t \cos t, 0\rangle$ *c*) t
31. $\dfrac{\mathbf{r}'(-1/4)}{\|\mathbf{r}'(-1/4)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi^2 + 1}}\left(\sqrt{2}\pi\mathbf{i} + \sqrt{2}\pi\mathbf{j} - \mathbf{k}\right)$

$\dfrac{\mathbf{r}''(-1/4)}{\|\mathbf{r}''(-1/4)\|} = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi^4 + 4}}\left(-\sqrt{2}\pi^2\mathbf{i} + \sqrt{2}\pi^2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\right)$



33. $(-\infty, 0), (0, \infty)$ **35.** $(n\pi/2, (n+1)\pi/2)$

37. $(-\infty, \infty)$ **39.** $(-\infty, 0), (0, \infty)$

41. $(-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi)$, n es un entero.

43. *a*) $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ *b*) $2\mathbf{k}$ *c*) $8t + 9t^2 + 5t^4$

d) $-\mathbf{i} + (9 - 2t)\mathbf{j} + (6t - 3t^2)\mathbf{k}$

e) $8t^3\mathbf{i} + (12t^2 - 4t^3)\mathbf{j} + (3t^2 - 24t)\mathbf{k}$

f) $(10 + 2t^2)/\sqrt{10 + t^2}$

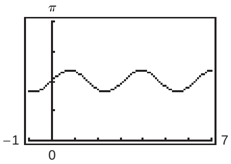
45. *a*) $7t^6$ *b*) $12t^5\mathbf{i} - 5t^4\mathbf{j}$

47. $\theta(t) = \arccos\left(\dfrac{-7 \operatorname{sen} t \cos t}{\sqrt{9 \operatorname{sen}^2 t + 16 \cos^2 t}\ \sqrt{9 \cos^2 t + 16 \operatorname{sen}^2 t}}\right)$

Máximo: $\theta\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \theta\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) \approx 1.855$

Mínimo: $\theta\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \theta\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) \approx 1.287$

Ortogonal: $\dfrac{n\pi}{2}$, n es un entero.



49. $\mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$ **51.** $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

53. $t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{C}$ **55.** $\ln t\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \frac{2}{5}t^{5/2}\mathbf{k} + \mathbf{C}$

57. $(t^2 - t)\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k} + \mathbf{C}$

59. $\tan t\mathbf{i} + \arctan t\mathbf{j} + \mathbf{C}$ **61.** $4\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \mathbf{k}$

63. $a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (\pi/2)\mathbf{k}$

65. $2\mathbf{i} + (e^2 - 1)\mathbf{j} - (e^2 + 1)\mathbf{k}$

67. $2e^{2t}\mathbf{i} + 3(e^t - 1)\mathbf{j}$ **69.** $600\sqrt{3}t\mathbf{i} + (-16t^2 + 600t)\mathbf{j}$

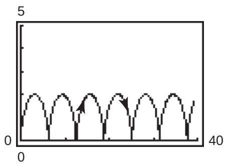
71. $((2 - e^{-t^2})/2)\mathbf{i} + (e^{-t} - 2)\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}$

73. Ver la “Definición de la derivada de una función vectorial” y la figura 12.8 en la página 842.

75. Las tres componentes de $\mathbf{u}$ son funciones crecientes de t en $t = t_0$.

77 a 83. Demostraciones

85. *a*)



La curva es una cicloide.

b) El máximo de $\|\mathbf{r}'\|$ es 2; el mínimo de $\|\mathbf{r}'\|$ es 0. El máximo y el mínimo de $\|\mathbf{r}''\|$ es 1.

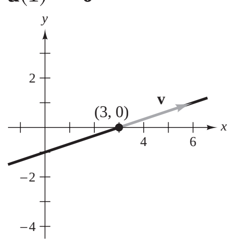
87. Demostración **89.** Verdadero

91. Falso: Sea $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, entonces $d/dt[\|\mathbf{r}(t)\|] = 0$, pero $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$.

Sección 12.3 (página 856)

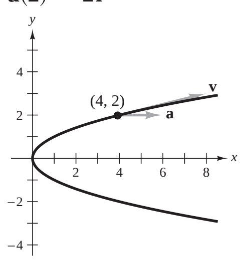
1. $\mathbf{v}(1) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

$\mathbf{a}(1) = \mathbf{0}$



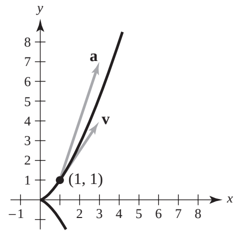
3. $\mathbf{v}(2) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$

$\mathbf{a}(2) = 2\mathbf{i}$



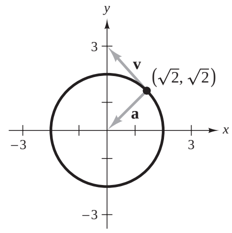
5. $\mathbf{v}(1) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

$\mathbf{a}(1) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$



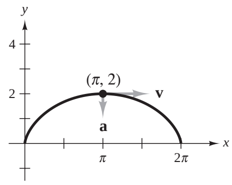
7. $\mathbf{v}(\pi/4) = -\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j}$

$\mathbf{a}(\pi/4) = -\sqrt{2}\,\mathbf{i} - \sqrt{2}\,\mathbf{j}$



9. $\mathbf{v}(\pi) = 2\mathbf{i}$

$\mathbf{a}(\pi) = -\mathbf{j}$



11. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{35}$

$\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$

13. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{1 + 5t^2}$

$\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

15. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \left(t/\sqrt{9 - t^2}\right)\mathbf{k}$

$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(18 - t^2)/(9 - t^2)}$

$\mathbf{a}(t) = (-9/(9 - t^2)^{3/2})\mathbf{k}$

17. $\mathbf{v}(t) = 4\mathbf{i} - 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 3 \cos t\mathbf{k}$

$\|\mathbf{v}(t)\| = 5$

$\mathbf{a}(t) = -3\cos t\mathbf{j} - 3 \operatorname{sen} t\mathbf{k}$

19. $\mathbf{v}(t) = (e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

$\|\mathbf{v}(t)\| = e^t\sqrt{3}$

$\mathbf{a}(t) = -2e^t \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2e^t \cos t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

21. *a*) $x = 1 + t$ *b*) $(1.100, -1.200, 0.325)$

$y = -1 - 2t$

$z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}t$

23. $\mathbf{v}(t) = t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

$\mathbf{r}(t) = (t^2/2)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

$\mathbf{r}(2) = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

25. $\mathbf{v}(t) = \left(t^2/2 + \frac{9}{2}\right)\mathbf{j} + \left(t^2/2 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{k}$

$\mathbf{r}(t) = \left(t^3/6 + \frac{9}{2}t - \frac{14}{3}\right)\mathbf{j} + \left(t^3/6 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}\right)\mathbf{k}$

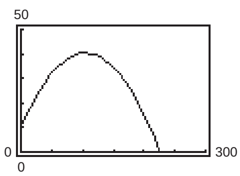
$\mathbf{r}(2) = \frac{17}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$

27. $\mathbf{v}(t) = -\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

$\mathbf{r}(2) = (\cos 2)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 2)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

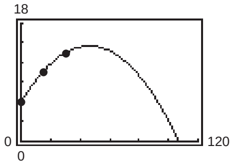
29. $\mathbf{r}(t) = 44\sqrt{3}t\mathbf{i} + (10 + 44t - 16t^2)\mathbf{j}$



31. $v_0 = 40\sqrt{6}$ pies/s; 78 pies **33.** Demostración

35. *a*) $y = -0.004x^2 + 0.37x + 6$

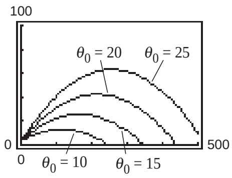
$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (-0.004t^2 + 0.37t + 6)\mathbf{j}$

b)


c) 14.56 pies

d) Velocidad inicial: 67.4 pies/s; $\theta \approx 20.14°$

37. *a*) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{440}{3} \cos \theta_0\right)t\mathbf{i} + \left[3 + \left(\frac{440}{3} \operatorname{sen} \theta_0\right)t - 16t^2\right]\mathbf{j}$

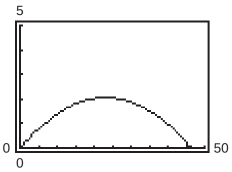
b)


El ángulo mínimo parece ser $\theta_0 = 20°$.

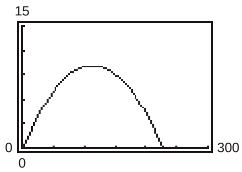
c) $\theta_0 \approx 19.38°$

39. *a*) $v_0 = 28.78$ pies/s; $\theta = 58.28°$ *b*) $v_0 \approx 32$ pies/s

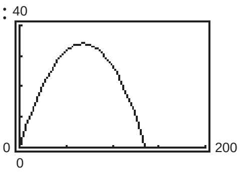
41. $1.91°$

43. *a*)


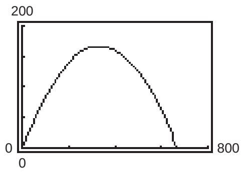
Altura máxima: 2.1 pies
Rango: 46.6 pies

b)


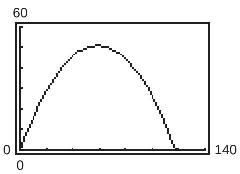
Altura máxima: 10.0 pies
Rango: 227.8 pies

c)


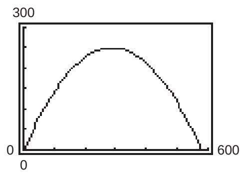
Altura máxima: 34.0 pies
Rango: 136.1 pies

d)


Altura máxima: 166.5 pies
Rango: 666.1 pies

e)


Altura máxima: 51.0 pies
Rango: 117.9 pies

f)


Altura máxima: 249.8 pies
Rango: 576.9 pies

45. Altura máxima: 129.1 m
Rango: 886.3 m

47. $\mathbf{v}(t) = b\omega[(1 - \cos \omega t)\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}]$
$\mathbf{a}(t) = b\omega^2(\operatorname{sen} \omega t\mathbf{i} + \cos \omega t\mathbf{j})$
a) $\|\mathbf{v}(t)\| = 0$ cuando $\omega t = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$
b) $\|\mathbf{v}(t)\|$ es máximo cuando $\omega t = \pi, 3\pi, \ldots$

49. $\mathbf{v}(t) = -b\omega \operatorname{sen} \omega t\mathbf{i} + b\omega \cos \omega t\mathbf{j}$
$\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$

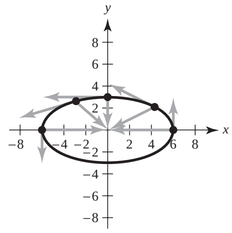
51. $\mathbf{a}(t) = -b\omega^2(\cos \omega t\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}) = -\omega^2\mathbf{r}(t)$; $\mathbf{a}(t)$ es un múltiplo negativo de un vector unitario desde (0, 0) hasta $(\cos \omega t, \operatorname{sen} \omega t)$, así $\mathbf{a}(t)$ está dirigida hacia el origen.

53. $8\sqrt{10}$ pies/s **55 a 57.** Demostraciones

59. *a*) $\mathbf{v}(t) = -6 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 3 \cos t\mathbf{j}$
$\|\mathbf{v}(t)\| = 3\sqrt{3 \operatorname{sen}^2 t + 1}$
$\mathbf{a}(t) = -6 \cos t\mathbf{i} - 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j}$

b)

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
Velocidad	3	$3\sqrt{10}/2$	6	$3\sqrt{13}/2$	3

c)


d) La velocidad aumenta cuando el ángulo entre **v** y **a** se encuentra en el intervalo $[0, \pi/2)$, y disminuye cuando el ángulo se encuentra en el intervalo $(\pi/2, \pi]$.

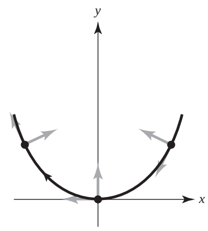
61. La velocidad de un objeto tiene magnitud y dirección de movimiento, mientras que la rapidez sólo tiene magnitud.

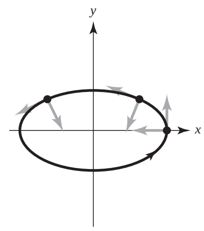
63. *a*) Velocidad: $\mathbf{r}_2'(t) = 2\mathbf{r}_1'(2t)$
Aceleración: $\mathbf{r}_2''(t) = 4\mathbf{r}_1''(2t)$
b) En general, si $\mathbf{r}_3(t) = \mathbf{r}_1(\omega t)$, entonces:
Velocidad: $\mathbf{r}_3'(t) = \omega\mathbf{r}_1'(\omega t)$
Aceleración: $\mathbf{r}_3''(t) = \omega^2\mathbf{r}_1''(\omega t)$

65. Falso; la aceleración es la derivada de la velocidad.

67. Verdadero.

Sección 12.4 (página 865)

1.


3.


5. $\mathbf{T}(1) = \left(\sqrt{2}/2\right)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ **7.** $\mathbf{T}(\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$

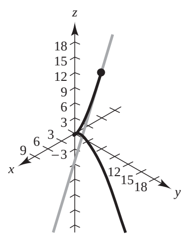
9. $\mathbf{T}(e) = (3e\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{9e^2 + 1} \approx 0.9926\mathbf{i} - 0.1217\mathbf{j}$

11. $\mathbf{T}(0) = \left(\sqrt{2}/2\right)(\mathbf{i} + \mathbf{k})$
$x = t$
$y = 0$
$z = t$

13. $\mathbf{T}(0) = \left(\sqrt{10}/10\right)(3\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$x = 3$
$y = 3t$
$z = t$

15. $\mathbf{T}(\pi/4) = \frac{1}{2}\left\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right\rangle$
$x = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,t$
$y = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,t$
$z = 4$

17. $\mathbf{T}(3) = \frac{1}{19}\langle 1, 6, 18\rangle$
$x = 3 + t$
$y = 9 + 6t$
$z = 18 + 18t$



19. Recta tangente: $x = 1 + t$, $y = t$, $z = 1 + \frac{1}{2}t$
$\mathbf{r}(1.1) \approx \langle 1.1, 0.1, 1.05\rangle$

21. $1.2°$ **23.** $\mathbf{N}(2) = \left(\sqrt{5}/5\right)(-2\mathbf{i} + \mathbf{j})$

25. $\mathbf{N}(2) = \left(-\sqrt{5}/5\right)(2\mathbf{i} - \mathbf{j})$

27. $\mathbf{N}(1) = \left(-\sqrt{14}/14\right)(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$

29. $\mathbf{N}(3\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(\mathbf{i} - \mathbf{j})$

31. $\mathbf{v}(t) = 4\mathbf{i}$
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$
$\mathbf{T}(t) = \mathbf{i}$
$\mathbf{N}(t)$ no está definido. La trayectoria es una recta y la velocidad es constante.

33. $\mathbf{v}(t) = 8t\mathbf{i}$
$\mathbf{a}(t) = 8\mathbf{i}$
$\mathbf{T}(t) = \mathbf{i}$
$\mathbf{N}(t)$ no está definido. La trayectoria es una recta y la velocidad es variable.

35. $\mathbf{T}(1) = \left(\sqrt{2}/2\right)(\mathbf{i} - \mathbf{j})$
$\mathbf{N}(1) = \left(\sqrt{2}/2\right)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$a_{\mathbf{T}} = -\sqrt{2}$
$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{2}$

37. $\mathbf{T}(1) = \left(-\sqrt{5}/5\right)(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$
$\mathbf{N}(1) = \left(-\sqrt{5}/5\right)(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$a_{\mathbf{T}} = 14\sqrt{5}/5$
$a_{\mathbf{N}} = 8\sqrt{5}/5$

39. $\mathbf{T}(0) = \left(\sqrt{5}/5\right)(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$
$\mathbf{N}(0) = \left(\sqrt{5}/5\right)(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$a_{\mathbf{T}} = -7\sqrt{5}/5$
$a_{\mathbf{N}} = 6\sqrt{5}/5$

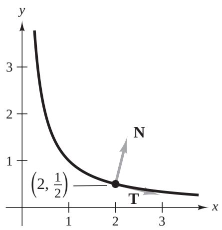
41. $\mathbf{T}(\pi/2) = \left(\sqrt{2}/2\right)(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$\mathbf{N}(\pi/2) = \left(-\sqrt{2}/2\right)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$a_{\mathbf{T}} = \sqrt{2}e^{\pi/2}$
$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{2}e^{\pi/2}$

43. $\mathbf{T}(t_0) = (\cos \omega t_0)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} \omega t_0)\mathbf{j}$
$\mathbf{N}(t_0) = (-\operatorname{sen} \omega t_0)\mathbf{i} + (\cos \omega t_0)\mathbf{j}$
$a_{\mathbf{T}} = \omega^2$
$a_{\mathbf{N}} = \omega^3 t_0$

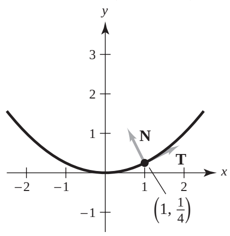
45. $\mathbf{T}(t) = -\operatorname{sen}(\omega t)\mathbf{i} + \cos(\omega t)\mathbf{j}$
$\mathbf{N}(t) = -\cos(\omega t)\mathbf{i} - \operatorname{sen}(\omega t)\mathbf{j}$
$a_{\mathbf{T}} = 0$
$a_{\mathbf{N}} = a\omega^2$

47. $\|\mathbf{v}(t)\| = a\omega$; La velocidad es constante porque $a_{\mathbf{T}} = 0$.

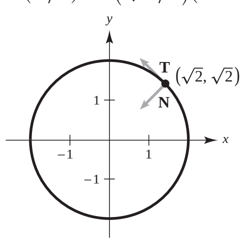
49. $\mathbf{r}(2) = 2\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$
$\mathbf{T}(2) = \left(\sqrt{17}/17\right)(4\mathbf{i} - \mathbf{j})$
$\mathbf{N}(2) = \left(\sqrt{17}/17\right)(\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$



51. $\mathbf{r}(1/4) = \mathbf{i} + (1/4)\mathbf{j}$
$\mathbf{T}(1/4) = \left(\sqrt{5}/5\right)(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$\mathbf{N}(1/4) = \left(2\sqrt{5}/5\right)[-(1/2)\mathbf{i} + \mathbf{j}]$



53. $\mathbf{r}(\pi/4) = \sqrt{2}\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j}$
$\mathbf{T}(\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$\mathbf{N}(\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(-\mathbf{i} - \mathbf{j})$



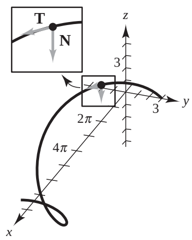
55. $\mathbf{T}(1) = \left(\sqrt{14}/14\right)(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$
$\mathbf{N}(1)$ no está definido.
$a_{\mathbf{T}}$ no está definida.
$a_{\mathbf{N}}$ no está definida.

57. $\mathbf{T}(\pi/3) = \left(\sqrt{5}/5\right)\left[-\left(\sqrt{3}/2\right)\mathbf{i} + (1/2)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\right]$
$\mathbf{N}(\pi/3) = -(1/2)\mathbf{i} - \left(\sqrt{3}/2\right)\mathbf{j}$
$a_{\mathbf{T}} = 0$
$a_{\mathbf{N}} = 1$

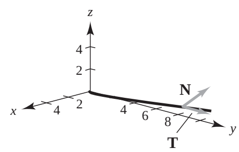
59. $\mathbf{T}(1) = \left(\sqrt{6}/6\right)(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$\mathbf{N}(1) = \left(\sqrt{30}/30\right)(-5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$a_{\mathbf{T}} = 5\sqrt{6}/6$
$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{30}/6$

61. $\mathbf{T}(0) = \left(\sqrt{3}/3\right)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
$\mathbf{N}(0) = \left(\sqrt{2}/2\right)(\mathbf{i} - \mathbf{j})$
$a_{\mathbf{T}} = \sqrt{3}$
$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{2}$

63. $\mathbf{T}(\pi/2) = \frac{1}{5}(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$
$\mathbf{N}(\pi/2) = -\mathbf{k}$
$a_{\mathbf{T}} = 0$
$a_{\mathbf{N}} = 3$



65. $\mathbf{T}(2) = \left(\sqrt{149}/149\right)(\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$
$\mathbf{N}(2) = \left(\sqrt{5\,513}/5\,513\right)(-74\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$a_{\mathbf{T}} = 74\sqrt{149}/149$
$a_{\mathbf{N}} = \sqrt{5\,513}/149$



67. Sea C una curva suave representada por $\mathbf{r}$ en un intervalo abierto I. El vector unitario tangente $\mathbf{T}(t)$ en t se define como

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|},\ \mathbf{r}'(t) \neq 0.$$

El vector unitario normal principal $\mathbf{N}(t)$ en t se define como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|},\ \mathbf{T}'(t) \neq 0.$$

Las componentes tangencial y normal de la aceleración se definen como sigue $\mathbf{a}(t) = a_{\mathbf{T}}\mathbf{T}(t) + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}(t)$.

69. *a*) El movimiento de la partícula es en línea recta.
b) La velocidad de la partícula es constante.

71. *a*) $t = \frac{1}{2}$: $a_{\mathbf{T}} = \sqrt{2}\pi^2/2$, $a_{\mathbf{N}} = \sqrt{2}\pi^2/2$
$t = 1$: $a_{\mathbf{T}} = 0$, $a_{\mathbf{N}} = \pi^2$
$t = \frac{3}{2}$: $a_{\mathbf{T}} = -\sqrt{2}\pi^2/2$, $a_{\mathbf{N}} = \sqrt{2}\pi^2/2$
b) $t = \frac{1}{2}$: creciente porque $a_{\mathbf{T}} > 0$.
$t = 1$: máximo porque $a_{\mathbf{T}} = 0$.
$t = \frac{3}{2}$: decreciente porque $a_{\mathbf{T}} < 0$.

73. $\mathbf{T}(\pi/2) = \left(\sqrt{17}/17\right)(-4\mathbf{i} + \mathbf{k})$
$\mathbf{N}(\pi/2) = -\mathbf{j}$
$\mathbf{B}(\pi/2) = \left(\sqrt{17}/17\right)(\mathbf{i} + 4\mathbf{k})$

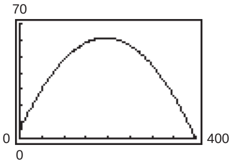
75. $\mathbf{T}(\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(\mathbf{j} - \mathbf{k})$
$\mathbf{N}(\pi/4) = -\left(\sqrt{2}/2\right)(\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$\mathbf{B}(\pi/4) = -\mathbf{i}$

77. $\mathbf{T}(\pi/3) = (\sqrt{5}/5)(\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$\mathbf{N}(\pi/3) = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j})$
$\mathbf{B}(\pi/3) = (\sqrt{5}/10)(\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j} - 4\mathbf{k})$

79. $a_{\mathbf{T}} = \dfrac{-32(v_0 \operatorname{sen}\theta - 32t)}{\sqrt{v_0^2\cos^2\theta + (v_0\operatorname{sen}\theta - 32t)^2}}$
$a_{\mathbf{N}} = \dfrac{32v_0\cos\theta}{\sqrt{v_0^2\cos^2\theta + (v_0\operatorname{sen}\theta - 32t)^2}}$
En la altura máxima $a_{\mathbf{T}} = 0$ y $a_{\mathbf{N}} = 32$.

81. *a*) $\mathbf{r}(t) = 60\sqrt{3}t\mathbf{i} + (5 + 60t - 16t^2)\mathbf{j}$

b)



Altura máxima $\approx$ 61.245 pies
Rango $\approx$ 398.186 pies

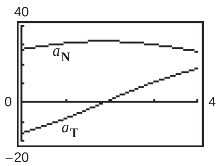
c) $\mathbf{v}(t) = 60\sqrt{3}\mathbf{i} + (60 - 32t)\mathbf{j}$
$\|\mathbf{v}(t)\| = 8\sqrt{16t^2 - 60t + 225}$
$\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j}$

d)

t	0.5	1.0	1.5
Velocidad	112.85	107.63	104.61

t	2.0	2.5	3.0
Velocidad	104	105.83	109.98

e)



La velocidad es decreciente cuando $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ tienen signos opuestos.

83. *a*) $4\sqrt{625\pi^2 + 1} \approx 314$ mi/h
b) $a_{\mathbf{T}} = 0, \quad a_{\mathbf{N}} = 1\,000\,\pi^2$
$a_{\mathbf{T}} = 0$ porque la velocidad es constante

85. *a*) La componente centrípeta se cuadruplica.
b) La componente centrípeta se reduce a la mitad.

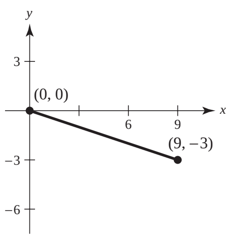
87. 4.82 mi/s **89.** 4.67 mi/s

91. Falso; la aceleración centrípeta puede ocurrir con velocidad constante.

93. *a*) Demostración *b*) Demostración **95 a 97.** Demostraciones

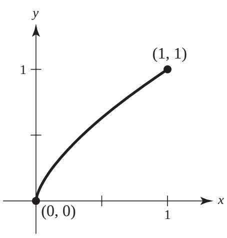
Sección 12.5 (página 877)

1.



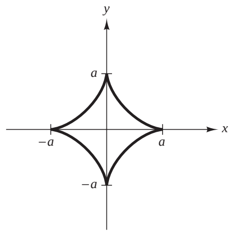
$3\sqrt{10}$

3.



$(13\sqrt{13} - 8)/27$

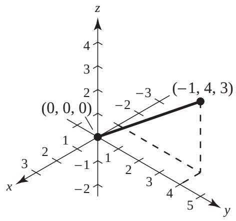
5.



$6a$

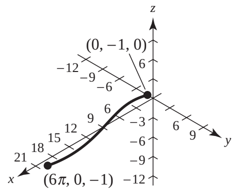
7. *a*) $\mathbf{r}(t) = (50t\sqrt{2})\mathbf{i} + (3 + 50t\sqrt{2} - 16t^2)\mathbf{j}$
b) $\frac{649}{8} \approx 81$ pies *c*) 315.5 pies *d*) 362.9 pies

9.



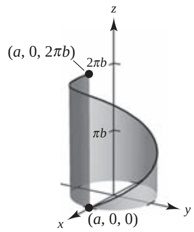
$\sqrt{26}$

11.



$3\sqrt{17}\pi/2$

13.



$2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$

15. 8.37

17. *a*) $2\sqrt{21} \approx 9.165$ *b*) 9.529
c) Aumenta el número de segmentos de recta *d*) 9.571

19. *a*) $s = \sqrt{5}t$ *b*) $\mathbf{r}(s) = 2\cos\dfrac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + 2\operatorname{sen}\dfrac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \dfrac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$
c) $s = \sqrt{5}$: (1.081, 1.683, 1.000)
$s = 4$: (−0.433, 1.953, 1.789)
d) Demostración

21. 0 **23.** $\frac{2}{5}$ **25.** 0 **27.** $\sqrt{2}/2$ **29.** 1

31. $\frac{1}{4}$ **33.** $1/a$ **35.** $\sqrt{2}/(4a\sqrt{1 - \cos\omega t})$

37. $\sqrt{5}/(1 + 5t^2)^{3/2}$ **39.** $\frac{3}{25}$ **41.** $\frac{12}{125}$ **43.** $7\sqrt{26}/676$

45. $K = 0$, $1/K$ no está definido.

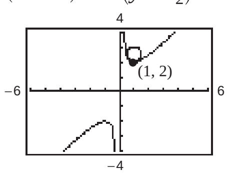
47. $K = 4/17^{3/2}$, $1/K = 17^{3/2}/4$ **49.** $K = 4$, $1/K = 1/4$

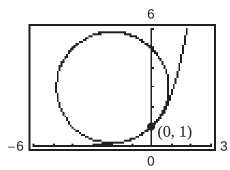
51. $K = 1/a$, $1/K = a$

53. $K = 12/145^{3/2}$, $1/K = 145^{3/2}/12$

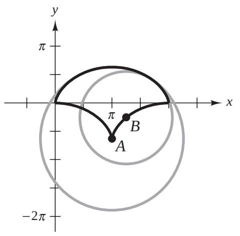
55. *a*) $(x - \pi/2)^2 + y^2 = 1$
b) Porque la curvatura no es tan grande, el radio de curvatura es mayor.

57. $(x - 1)^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$ **59.** $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$





61.



63. *a*) $(1, 3)$ *b*) 0

65. *a*) $K \to \infty$ cuando $x \to 0$ (No es máximo) *b*) 0

67. *a*) $\left(1/\sqrt{2}, -\ln 2/2\right)$ *b*) 0

69. *a*) $(\pm \operatorname{arcsenh}(1), 1)$ *b*) 0

71. $(0, 1)$ **73.** $(\pi/2 + K\pi, 0)$

75. *a*) $s = \displaystyle\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$

b) Plano: $K = \left\|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right\| = \|\mathbf{T}'(s)\|$

Espacio: $K = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

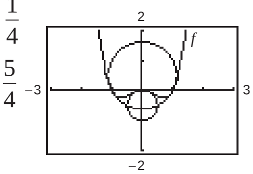
77. $K = |y''|$; Sí, por ejemplo, $y = x^4$ tiene curvatura 0 en su mínimo relativo (0,0). La curvatura es positiva en cualquier otro punto de la curva.

79. Demostración

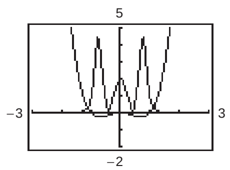
81. *a*) $K = \dfrac{2|6x^2 - 1|}{(16x^6 - 16x^4 + 4x^2 + 1)^{3/2}}$

b) $x = 0$: $x^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$x = 1$: $x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$



c)



La curvatura tiende a ser mayor cerca de los extremos de la función y disminuye cuando $x \to \pm\infty$. Sin embargo, f y K no tienen los mismos números críticos.

Números críticos de f: $x = 0, \pm\sqrt{2}/2 \approx \pm 0.7071$

Números críticos de K: $x = 0, \pm 0.7647, \pm 0.4082$

83. *a*) 12.25 unidades *b*) $\frac{1}{2}$ **85 a 87.** Demostraciones

89. *a*) 0 *b*) 0 **91.** $\frac{1}{4}$ **93.** Demostración

95. $K = [1/(4a)]|\csc(\theta/2)|$ **97.** 3 327.5 lb

Mínimo: $K = 1/(4a)$

No hay un máximo.

99. Demostración

101. Falso. Ver la exploración en la página 869. **103.** Verdadero

105 a 111. Demostraciones

Ejercicios de repaso para el capítulo 12 (página 881)

1. *a*) Todos son reales, excepto $(\pi/2) + n\pi$, n es un entero

b) Continuo excepto en $t = (\pi/2) + n\pi$, n es un entero

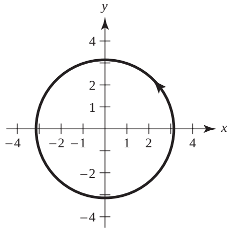
3. *a*) $(0, \infty)$ *b*) Continuo para todo $t > 0$

5. *a*) $\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{k}$ *b*) $-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

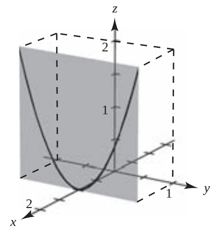
c) $(2c - 1)\mathbf{i} + (c - 1)^2\mathbf{j} - \sqrt{c + 1}\,\mathbf{k}$

d) $2\Delta t\mathbf{i} + \Delta t(\Delta t + 2)\mathbf{j} - \left(\sqrt{\Delta t + 3} - \sqrt{3}\right)\mathbf{k}$

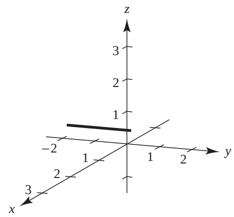
7.



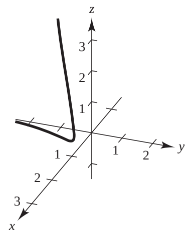
9.



11.



13.



15. $\mathbf{r}_1(t) = 3t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$

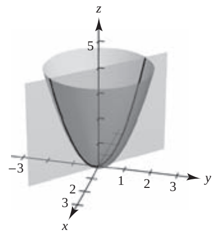
$\mathbf{r}_2(t) = 3\mathbf{i} + (4 - t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 4$

$\mathbf{r}_3(t) = (3 - t)\mathbf{i}$, $0 \le t \le 3$

17. $\mathbf{r}(t) = \langle -2 + 7t, -3 + 4t, 8 - 10t \rangle$

(La respuesta no es única.)

19.



$x = t, y = -t, z = 2t^2$

21. $4\mathbf{i} + \mathbf{k}$

23. *a*) $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ *b*) $\mathbf{0}$ *c*) $4t + 3t^2$

d) $-5\mathbf{i} + (2t - 2)\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

e) $(10t - 1)/\sqrt{10t^2 - 2t + 1}$

f) $\left(\frac{8}{3}t^3 - 2t^2\right)\mathbf{i} - 8t^3\mathbf{j} + (9t^2 - 2t + 1)\mathbf{k}$

25. $x(t)$ y $y(t)$ son funciones crecientes en $t = t_0$ y $z(t)$ es una función decreciente en $t = t_0$.

27. $\operatorname{sen} t\mathbf{i} + (t \operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{j} + \mathbf{C}$

29. $\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1 + t^2} + \ln\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right|\right) + \mathbf{C}$

31. $\frac{32}{3}\mathbf{j}$ **33.** $2(e - 1)\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

35. $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + (e^t + 2)\mathbf{j} - (e^{-t} + 4)\mathbf{k}$

37. $\mathbf{v}(t) = 4\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{17 + 9t^4}$

$\mathbf{a}(t) = 6t\mathbf{j}$

39. $\mathbf{v}(t) = \langle -3\cos^2 t \operatorname{sen} t, 3\operatorname{sen}^2 t \cos t, 3 \rangle$

$\|\mathbf{v}(t)\| = 3\sqrt{\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t + 1}$

$\mathbf{a}(t) = \langle 3\cos t(2\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t), 3\operatorname{sen} t(2\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t), 0 \rangle$

41. $x(t) = t, y(t) = 16 + 8t, z(t) = 2 + \frac{1}{2}t$

$\mathbf{r}(4.1) \approx \langle 0.1, 16.8, 2.05 \rangle$

43. ≈ 191.0 pies **45.** ≈ 38.1 m/s

47. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{10}$
$\mathbf{a} = \mathbf{0}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = 0$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{N}$ no existe.

49. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \left[1/\left(2\sqrt{t}\right)\right]\mathbf{j}$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4t+1}/\left(2\sqrt{t}\right)$
$\mathbf{a} = \left[-1/\left(4t\sqrt{t}\right)\right]\mathbf{j}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = -1/\left(4t\sqrt{t}\sqrt{4t+1}\right)$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = 1/\left(2t\sqrt{4t+1}\right)$

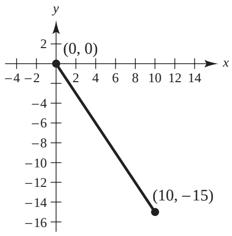
51. $\mathbf{v} = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}$
$\mathbf{a} = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \dfrac{2}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}$

53. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 5t^2}$
$\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \dfrac{5t}{\sqrt{1 + 5t^2}}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{1 + 5t^2}}$

55. $x = -\sqrt{3}t + 1$
$y = t + \sqrt{3}$
$z = t + (\pi/3)$

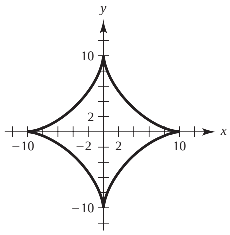
57. 4.58 mi/s

59.



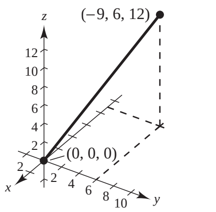
$5\sqrt{13}$

61.



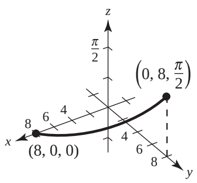
60

63.



$3\sqrt{29}$

65.



$\sqrt{65}\pi/2$

67. 0 **69.** $\left(2\sqrt{5}\right)/(4 + 5t^2)^{3/2}$ **71.** $\sqrt{2}/3$

73. $K = \sqrt{17}/289$; $r = 17\sqrt{17}$ **75.** $K = \sqrt{2}/4$; $r = 2\sqrt{2}$

77. La curvatura cambia bruscamente de cero a una constante no cero en los puntos B y C.

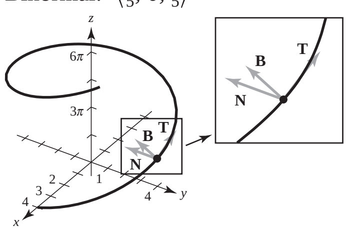
SP Solución de problemas (página 883)

1. *a*) a *b*) πa *c*) $K = \pi a$

3. Velocidad inicial: 447.21 pies/s; $\theta \approx 63.43°$

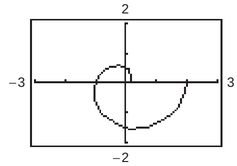
5 a 7. Demostraciones

9. Tangente unitario: $\left\langle -\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right\rangle$
Normal unitario: $\langle 0, -1, 0\rangle$
Binormal: $\left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right\rangle$



11. *a*) Demostración *b*) Demostración

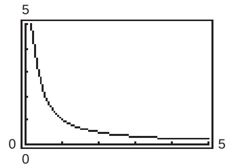
13. *a*)



b) 6.766

c) $K = [\pi(\pi^2t^2 + 2)]/(\pi^2t^2 + 1)^{3/2}$
$K(0) = 2\pi$
$K(1) = [\pi(\pi^2 + 2)]/(\pi^2 + 1)^{3/2} \approx 1.04$
$K(2) \approx 0.51$

d)



e) $\lim\limits_{t\to\infty} K = 0$

f) Cuando $t \to \infty$, la gráfica forma una espiral hacia afuera y la curva decrece.

Capítulo 13

Sección 13.1 (página 894)

1. No es una función porque para algunos valores de x y y (por ejemplo $x = y = 0$) hay dos valores de z.

3. z es una función de x y y. **5.** z no es una función de x y y.

7. *a*) 6 *b*) -4 *c*) 150 *d*) $5y$ *e*) $2x$ *f*) $5t$

9. *a*) 5 *b*) $3e^2$ *c*) $2/e$ *d*) $5e^y$ *e*) xe^2 *f*) te^t

11. *a*) $\frac{2}{3}$ *b*) 0 *c*) $-\frac{3}{2}$ *d*) $-\frac{10}{3}$

13. *a*) $\sqrt{2}$ *b*) 3 sen 1 *c*) $-3\sqrt{3}/2$ *d*) 4

15. *a*) -4 *b*) -6 *c*) $-\frac{25}{4}$ *d*) $\frac{9}{4}$

17. *a*) 2, $\Delta x \neq 0$ *b*) $2y + \Delta y$, $\Delta y \neq 0$

19. Dominio: $\{(x, y)$: x, y son cualquier número real$\}$
Rango: $z \geq 0$

21. Dominio: $\{(x, y)\colon\ y \geq 0\}$
Rango: Todos los números reales

23. Dominio: $\{(x, y)\colon\ x \neq 0, y \neq 0\}$
Rango: Todos los números reales

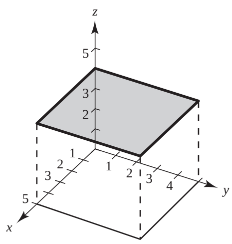
25. Dominio: $\{(x, y)\colon\ x^2 + y^2 \leq 4\}$
Rango: $0 \leq z \leq 2$

27. Dominio: $\{(x, y)\colon\ -1 \leq x + y \leq 1\}$
Rango: $0 \leq z \leq \pi$

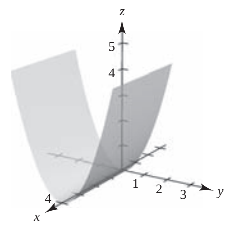
29. Dominio: $\{(x, y)\colon\ y < -x + 4\}$
Rango: Todos los números reales

31. *a*) (20, 0, 0) *b*) $(-15, 10, 20)$
c) (20, 15, 25) *d*) (20, 20, 0)

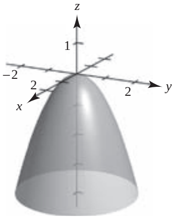
33.



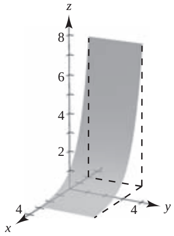
35.



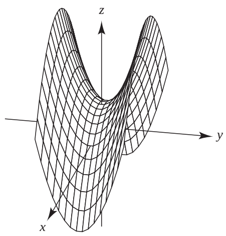
37.



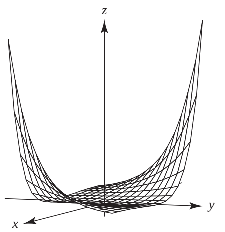
39.



41.

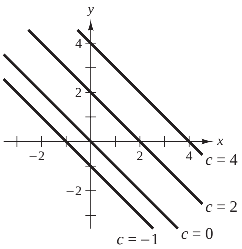


43.

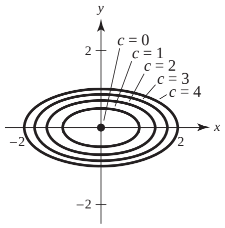


45. *c* **46.** *d* **47.** *b* **48.** *a*

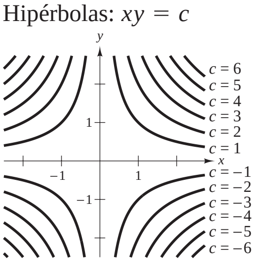
49. Rectas: $x + y = c$



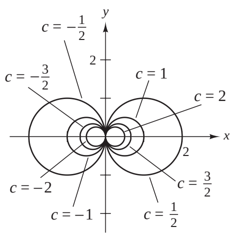
51. Elipses: $x^2 + 4y^2 = c$
(excepto $x^2 + 4y^2 = 0$ que es el punto $(0, 0)$)



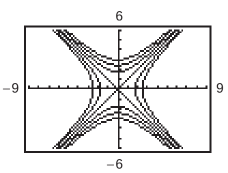
53. Hipérbolas: $xy = c$



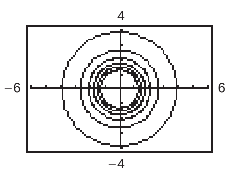
55. Círculos que pasan por $(0, 0)$ y con centro en $(1/(2c), 0)$



57.



59.



61. La gráfica de una función de dos variables es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) para los cuales $z = f(x, y)$ y donde (x, y) está en el dominio de *f*. La gráfica puede ser interpretada como una superficie en el espacio. Las curvas de nivel son los campos escalares $f(x, y) = c$, donde *c* es una constante.

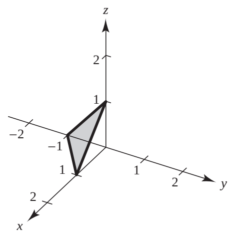
63. $f(x, y) = x/y$; las curvas de nivel son las rectas $y = (1/c)x$.

65. La superficie puede tener la forma de una silla de montar. Por ejemplo, sea $f(x, y) = xy$. La gráfica no es única: cualquier traslación vertical producirá las mismas curvas de nivel.

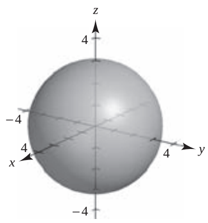
67.

	Tasa de inflación		
Tasa de impuesto	**0**	**0.03**	**0.05**
0	\$1 790.85	\$1 332.56	\$1 099.43
0.28	\$1 526.43	\$1 135.80	\$937.09
0.35	\$1 466.07	\$1 090.90	\$900.04

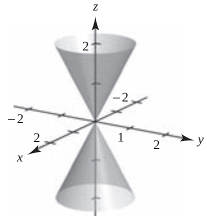
69.



71.

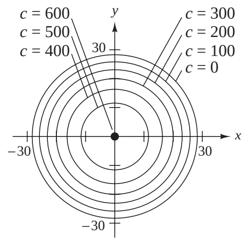


73.



75. *a*) 243 pies-tablón
b) 507 pies-tablón

77.



79. Demostración

81. $C = 1.20xy + 1.50(xz + yz)$

83. *a*) $k = \frac{520}{3}$
b) $P = 520T/(3V)$
Las curvas de nivel son rectas.

85. *a*) C *b*) A *c*) B

87. *a*) No; las curvas de nivel son irregulares y están espaciadas esporádicamente.
b) Utilizar más colores.

89. Falso: sea $f(x, y) = 4$. **91.** Verdadero

Sección 13.2 (página 904)

1 a 3. Demostraciones **5.** 1 **7.** 12 **9.** 9, continua
11. e^2, continua **13.** 0, continua para $y \neq 0$
15. $\frac{1}{2}$, continua, excepto en $(0, 0)$ **17.** 0, continua
19. 0, continua para $xy \neq 1$, $|xy| \leq 1$
21. $2\sqrt{2}$, continua para $x + y + z \geq 0$ **23.** 0
25. No existe el límite. **27.** 4 **29.** No existe el límite.
31. No existe el límite. **33.** 0
35. No existe el límite. **37.** Continua, 1

39.

(x, y)	$(1, 0)$	$(0.5, 0)$	$(0.1, 0)$	$(0.01, 0)$	$(0.001, 0)$
$f(x, y)$	0	0	0	0	0

$y = 0$: 0

(x, y)	$(1, 1)$	$(0.5, 0.5)$	$(0.1, 0.1)$
$f(x, y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(x, y)	$(0.01, 0.01)$	$(0.001, 0.001)$
$f(x, y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$y = x$: $\frac{1}{2}$

No existe el límite.

Continua excepto en $(0, 0)$

41.

(x, y)	$(1, 1)$	$(0.25, 0.5)$	$(0.01, 0.1)$
$f(x, y)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

(x, y)	$(0.0001, 0.01)$	$(0.000001, 0.001)$
$f(x, y)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$x = y^2$: $-\frac{1}{2}$

(x, y)	$(-1, 1)$	$(-0.25, 0.5)$	$(-0.01, 0.1)$
$f(x, y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(x, y)	$(-0.0001, 0.01)$	$(-0.000001, 0.001)$
$f(x, y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$x = -y^2$: $\frac{1}{2}$

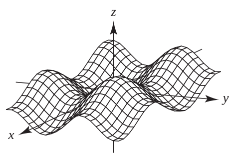
No existe el límite.

Continua excepto en $(0, 0)$

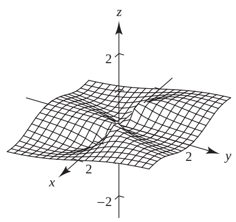
43. f es continua. y es continua excepto en $(0, 0)$. y tiene una discontinuidad removible en $(0, 0)$.

45. f es continua. g es continua excepto en $(0, 0)$. g tiene una discontinuidad removible en $(0, 0)$.

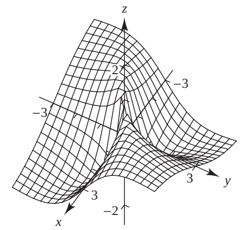
47. 0



49. No existe el límite.



51. No existe el límite.



53. 0 **55.** 0 **57.** 1 **59.** 1 **61.** 0

63. Continua excepto en $(0, 0, 0)$ **65.** Continua

67. Continua **69.** Continua

71. Continua para $y \neq 2x/3$ **73.** *a*) $2x$ *b*) -4

75. *a*) $1/y$ *b*) $-x/y^2$ **77.** *a*) $3 + y$ *b*) $x - 2$

79. Verdadero **81.** Falso: sea $f(x, y) = \begin{cases} \ln(x^2 + y^2), & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$.

83. *a*) $(1 + a^2)/a, \quad a \neq 0$ *b*) No existe el límite.

c) No, el límite no existe. Trayectorias diferentes dan límites distintos.

85. 0 **87.** $\pi/2$ **89.** Demostración

91. Ver la "Definición del límite de una función de dos variables", en la página 899; mostrar que el valor de $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$ no es el mismo para dos diferentes trayectorias hacia (x_0, y_0).

93. *a*) Verdadero. Para hallar el primer límite, sustituir $(2, 3)$ por (x, y). Para hallar el segundo límite, sustituir 3 por y para encontrar una función de x. Entonces sustituir 2 por x.

b) Falso. La convergencia de una trayectoria no implica la convergencia de todas las trayectorias.

c) Falso. Sea $f(x, y) = 4\left(\dfrac{(x-2)^2 - (y-3)^2}{(x-2)^2 + (y-3)^2}\right)^2$.

d) Verdadero. Cuando se multiplica por cero a cualquier número real, siempre se obtiene cero.

Sección 13.3 (página 914)

1. $f_x(4, 1) < 0$ **3.** $f_y(4, 1) > 0$

5. No. Porque al calcular la derivada parcial con respecto a y, se considera a x constante. De manera que el denominador se considera como una constante y no contiene variables.

7. Sí. Porque al calcular la derivada parcial con respecto a x, se considera a y constante. De manera que tanto el numerador como el denominador contienen variables.

9. $f_x(x, y) = 2$
$f_y(x, y) = -5$

11. $f_x(x, y) = 2xy^3$
$f_y(x, y) = 3x^2y^2$

13. $\partial z/\partial x = \sqrt{y}$
$\partial z/\partial y = x/(2\sqrt{y})$

15. $\partial z/\partial x = 2x - 4y$
$\partial z/\partial y = -4x + 6y$

17. $\partial z/\partial x = ye^{xy}$
$\partial z/\partial y = xe^{xy}$

19. $\partial z/\partial x = 2xe^{2y}$
$\partial z/\partial y = 2x^2e^{2y}$

21. $\partial z/\partial x = 1/x$
$\partial z/\partial y = -1/y$

23. $\partial z/\partial x = 2x/(x^2 + y^2)$
$\partial z/\partial y = 2y/(x^2 + y^2)$

25. $\partial z/\partial x = (x^3 - 3y^3)/(x^2y)$
$\partial z/\partial y = (-x^3 + 12y^3)/(2xy^2)$

27. $h_x(x, y) = -2xe^{-(x^2+y^2)}$
$h_y(x, y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$

29. $f_x(x, y) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$
$f_y(x, y) = y/\sqrt{x^2 + y^2}$

31. $\partial z/\partial x = -y \operatorname{sen} xy$
$\partial z/\partial y = -x \operatorname{sen} xy$

33. $\partial z/\partial x = 2\sec^2(2x - y)$
$\partial z/\partial y = -\sec^2(2x - y)$

35. $\partial z/\partial x = ye^y \cos xy$
$\partial z/\partial y = e^y(x \cos xy + \operatorname{sen} xy)$

37. $\partial z/\partial x = 2 \cosh(2x + 3y)$
$\partial z/\partial y = 3 \cosh(2x + 3y)$

39. $f_x(x, y) = 1 - x^2$
$f_y(x, y) = y^2 - 1$

41. $f_x(x, y) = 3$
$f_y(x, y) = 2$

43. $f_x(x, y) = 1/\left(2\sqrt{x + y}\right)$
$f_y(x, y) = 1/\left(2\sqrt{x + y}\right)$

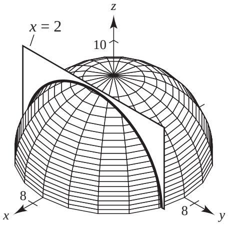
45. $\partial z/\partial x = -1$
$\partial z/\partial y = 0$

47. $\partial z/\partial x = -1$
$\partial z/\partial y = \frac{1}{2}$

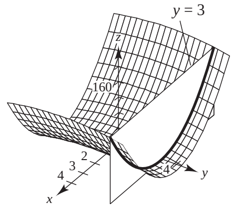
49. $\partial z/\partial x = \frac{1}{4}$
$\partial z/\partial y = \frac{1}{4}$

51. $\partial z/\partial x = -\frac{1}{4}$
$\partial z/\partial y = \frac{1}{4}$

53. $g_x(1, 1) = -2$
$g_y(1, 1) = -2$

55.


$-\frac{1}{2}$

57.


18

59. $H_x(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$
$H_y(x, y, z) = 2 \cos(x + 2y + 3z)$
$H_z(x, y, z) = 3 \cos(x + 2y + 3z)$

61. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
$\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
$\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

63. $F_x(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$
$F_y(x, y, z) = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$
$F_z(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$

65. $f_x = 3; f_y = 1; f_z = 2$

67. $f_x = 1; f_y = 1; f_z = 1$

69. $f_x = 0; f_y = 0; f_z = 1$

71. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$

73. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$

75. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

77. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \tan y$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^x \sec^2 y \tan y$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x \sec^2 y$

79. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \cos xy$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 \cos xy$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -xy \cos xy - \operatorname{sen} xy$

81. $x = 2, y = -2$ **83.** $x = -6, y = 4$

85. $x = 1, y = 1$ **87.** $x = 0, y = 0$

89. $\partial z/\partial x = \sec y$
$\partial z/\partial y = x \sec y \tan y$
$\partial^2 z/\partial x^2 = 0$
$\partial^2 z/\partial y^2 = x \sec y(\sec^2 y + \tan^2 y)$
$\partial^2 z/\partial y \partial x = \partial^2 z/\partial x \partial y = \sec y \tan y$
No existen valores de x y y tales que $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$.

91. $\partial z/\partial x = (y^2 - x^2)/[x(x^2 + y^2)]$
$\partial z/\partial y = -2y/(x^2 + y^2)$
$\partial^2 z/\partial x^2 = (x^4 - 4x^2y^2 - y^4)/[x^2(x^2 + y^2)^2]$
$\partial^2 z/\partial y^2 = 2(y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2$
$\partial^2 z/\partial y \partial x = \partial^2 z/\partial x \partial y = 4xy/(x^2 + y^2)^2$
No existen valores de x y y tales que $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$.

93. $f_{xyy}(x, y, z) = f_{yxy}(x, y, z) = f_{yyx}(x, y, z) = 0$

95. $f_{xyy}(x, y, z) = f_{yxy}(x, y, z) = f_{yyx}(x, y, z) = z^2e^{-x} \operatorname{sen} yz$

97. $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = 0 + 0 = 0$

99. $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y = 0$

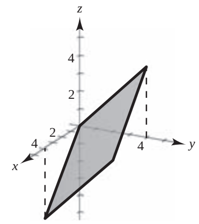
101. $\partial^2 z/\partial t^2 = -c^2 \operatorname{sen}(x - ct) = c^2(\partial^2 z/\partial x^2)$

103. $\partial^2 z/\partial t^2 = -c^2/(x + ct)^2 = c^2(\partial^2 z/\partial x^2)$

105. $\partial z/\partial t = -e^{-t} \cos x/c = c^2(\partial^2 z/\partial x^2)$

107. Sí, $f(x, y) = \cos(3x - 2y)$. **109.** 0

111. Si $z = f(x, y)$, entonces para encontrar f_x se considera a y como constante y se deriva con respecto a x. De la misma forma, para encontrar f_y se considera a x como constante y se deriva con respecto a y.

113.


115. Las derivadas parciales combinadas son iguales. Ver teorema 13.3.

117. *a*) 72 *b*) 72

119. $IQ_M = \dfrac{100}{C}, IQ_M(12, 10) = 10$

El IQ crece con una razón de 10 puntos por año de edad mental cuando la edad mental es de 12 y la edad cronológica es de 10.

$IQ_C = -\dfrac{100M}{C^2}, IQ_C(12, 10) = -12$

El IQ disminuye con una razón de 12 puntos por año de edad mental cuando la edad mental es de 12 y la edad cronológica es de 10.

121. Un incremento en el costo de la comida y alojamiento o en el de la matrícula causará una disminución del número de solicitantes.

123. $\partial T/\partial x = -2.4°/\text{m}, \partial T/\partial y = -9°/\text{m}$

125. $T = PV/(nR) \implies \partial T/\partial P = V/(nR)$
$P = nRT/V \implies \partial P/\partial V = -nRT/V^2$
$V = nRT/P \implies \partial V/\partial T = nR/P$
$\partial T/\partial P \cdot \partial P/\partial V \cdot \partial V/\partial T = -nRT/(VP) = -nRT/(nRT) = -1$

127. *a*) $\partial z/\partial x = -0.92; \partial z/\partial y = 1.03$
b) Cuando el consumo de la leche de sabor (x) crece, el consumo de las leches light y descremada (z) disminuye. Cuando el consumo de la leche baja en grasas (y) disminuye, el consumo de la leche descremada también disminuye.

129. Falso; sea $z = x + y + 1$. **131.** Verdadero

133. *a)* $f_x(x, y) = \dfrac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$

$f_y(x, y) = \dfrac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$

b) $f_x(0, 0) = 0,\ f_y(0, 0) = 0$

c) $f_{xy}(0, 0) = -1,\ f_{yx}(0, 0) = 1$

d) f_{xy} o f_{yx} o ambas no son continuas en $(0, 0)$.

135. *a)* $f_x(0, 0) = 1, f_y(0, 0) = 1$

b) $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ no existen cuando $y = -x$.

Sección 13.4 (página 923)

1. $dz = 4xy^3\,dx + 6x^2y^2\,dy$

3. $dz = 2(x\,dx + y\,dy)/(x^2 + y^2)^2$

5. $dz = (\cos y + y \operatorname{sen} x)\,dx - (x \operatorname{sen} y + \cos x)\,dy$

7. $dz = (e^x \operatorname{sen} y)\,dx + (e^x \cos y)\,dy$

9. $dw = 2z^3 y \cos x\,dx + 2z^3 \operatorname{sen} x\,dy + 6z^2\,y \operatorname{sen} x\,dz$

11. *a)* $f(2, 1) = 1, f(2.1, 1.05) = 1.05, \Delta z = 0.05$

b) $dz = 0.05$

13. *a)* $f(2, 1) = 11, f(2.1, 1.05) = 10.4875, \Delta z = -0.5125$

b) $dz = -0.5$

15. *a)* $f(2, 1) = e^2 \approx 7.3891, f(2.1, 1.05) = 1.05e^{2.1} \approx 8.5745,$ $\Delta z \approx 1.1854$

b) $dz \approx 1.1084$

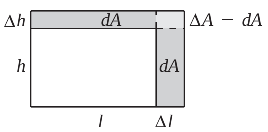
17. 0.44 **19.** -0.012

21. Si $z = f(x, y)$ y Δx y Δy son incrementos de x y y, y x y y son variables independientes, entonces el diferencial total de la variable dependiente z es

$dz = (\partial z/\partial x)\,dx + (\partial z/\partial y)\,dy = f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y.$

23. La aproximación de Δz por dz se llama una aproximación lineal, donde dz representa el cambio en la altura del plano tangente a la superficie en el punto $P(x_0, y_0)$.

25. $dA = h\,dl + l\,dh$



$\Delta A - dA = dl\,dh$

27.

Δr	Δh	dV	ΔV	$\Delta V - dV$
0.1	0.1	8.3776	8.5462	0.1686
0.1	-0.1	5.0265	5.0255	-0.0010
0.001	0.002	0.1005	0.1006	0.0001
-0.0001	0.0002	-0.0034	-0.0034	0.0000

29. *a)* $dz = -0.92\,dx + 1.03\,dy$

b) $dz = \pm 0.4875;\ dz/z \approx 8.1\%$

31. 10% **33.** $dC = \pm 2.4418;\ dC/C = 19\%$

35. *a)* $V = 18 \operatorname{sen}\theta\ \text{ft}^3;\ \theta = \pi/2$

b) $1.047\ \text{ft}^3$

37. 10% **39.** $L \approx 8.096 \times 10^{-4} \pm 6.6 \times 10^{-6}$ microhenrys

41. Las respuestas varían. Ejemplo:

$\varepsilon_1 = \Delta x$

$\varepsilon_2 = 0$

43. Las respuestas varían. Ejemplo:

$\varepsilon_1 = y\,\Delta x$

$\varepsilon_2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$

45 a 47. Demostraciones

Sección 13.5 (página) 931

1. $26t$ **3.** $e^t(\operatorname{sen} t + \cos t)$ **5.** *a)* y *b)* $-e^{-t}$

7. *a)* y *b)* $2e^{2t}$ **9.** *a)* y *b)* $3(2t^2 - 1)$

11. $-11\sqrt{29}/29 \approx -2.04$ **13.** $\dfrac{4}{(e^t + e^{-t})^2};\ 1$

15. $\partial w/\partial s = 4s, 4$; $\partial w/\partial t = 4t, 0$

17. $\partial w/\partial s = 5\cos(5s - t), 0$; $\partial w/\partial t = -\cos(5s - t), 0$

19. $\partial w/\partial r = 2r/\theta^2$; $\partial w/\partial\theta = -2r^2/\theta^3$

21. $\partial w/\partial r = 0$; $\partial w/\partial\theta = 1$

23. $\dfrac{\partial w}{\partial s} = t^2(3s^2 - t^2)$; $\dfrac{\partial w}{\partial t} = 2st(s^2 - 2t^2)$

25. $\dfrac{\partial w}{\partial s} = te^{s^2-t^2}(2s^2 + 1)$; $\dfrac{\partial w}{\partial t} = se^{s^2-t^2}(1 - 2t^2)$

27. $\dfrac{y - 2x + 1}{2y - x + 1}$ **29.** $-\dfrac{x^2 + y^2 + x}{x^2 + y^2 + y}$

31. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-x}{z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-y}{z}$

33. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{y + z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{z}{y + z}$

35. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-\sec^2(x + y)}{\sec^2(y + z)}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -1 - \dfrac{\sec^2(x + y)}{\sec^2(y + z)}$

37. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{(ze^{xz} + y)}{xe^{xz}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -e^{-xz}$

39. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = -\dfrac{y + w}{x - z}$; $\dfrac{\partial w}{\partial y} = -\dfrac{x + z}{x - z}$; $\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{w - y}{x - z}$

41. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{y \operatorname{sen} xy}{z}$; $\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{x \operatorname{sen} xy - z\cos yz}{z}$; $\dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{y\cos yz + w}{z}$

43. *a)* $f(tx, ty) = \dfrac{(tx)(ty)}{\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}} = t\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = tf(x, y);\ n = 1$

b) $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1f(x, y)$

45. *a)* $f(tx, ty) = e^{tx/ty} = e^{x/y} = f(x, y);\ n = 0$

b) $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = \dfrac{xe^{x/y}}{y} - \dfrac{xe^{x/y}}{y} = 0$

47. 47 **49.** $dw/dt = (\partial w/\partial x \cdot dx/dt) + (\partial w/\partial y \cdot dy/dt)$

51. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{f_y(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}$

53. $4\,608\,\pi$ pulg^3/min; 624π pulg^2/min

55. $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{1}{mR}\left[V\dfrac{dp}{dt} + p\dfrac{dV}{dt}\right]$ **57.** $28m\ \text{cm}^2/\text{s}$

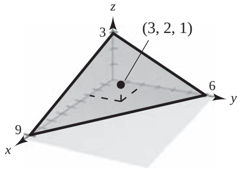
59. Demostración **61.** *a)* Demostración *b)* Demostración

63 a 65. Demostraciones

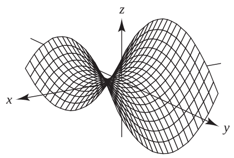
Sección 13.6 (página 942)

1. 1 **3.** -1 **5.** $-e$ **7.** $-\frac{7}{25}$ **9.** $2\sqrt{3}/3$ **11.** $\frac{8}{3}$
13. $\sqrt{2}(x+y)$ **15.** $\left[(2+\sqrt{3})/2\right]\cos(2x+y)$ **17.** 6
19. $-8/\sqrt{5}$ **21.** $3\mathbf{i}+10\mathbf{j}$ **23.** $4\mathbf{i}-\mathbf{j}$ **25.** $6\mathbf{i}-10\mathbf{j}-8\mathbf{k}$
27. $3\sqrt{2}$ **29.** $2\sqrt{5}/5$ **31.** $2[(x+y)\mathbf{i}+x\mathbf{j}]$; $2\sqrt{2}$
33. $\tan y\mathbf{i}+x\sec^2 y\mathbf{j}$, $\sqrt{17}$ **35.** $e^{-x}(-y\mathbf{i}+\mathbf{j})$; $\sqrt{26}$
37. $\dfrac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 1 **39.** $yz(yz\mathbf{i}+2xz\mathbf{j}+2xy\mathbf{k})$; $\sqrt{33}$

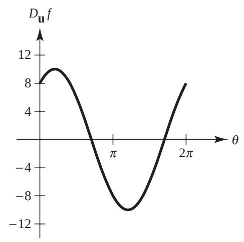
41.



43. *a*) $-5\sqrt{2}/12$ *b*) $\frac{3}{5}$ *c*) $-\frac{1}{5}$ *d*) $-11\sqrt{10}/60$
45. $\sqrt{13}/6$
47. *a*) Las respuestas varían. Ejemplo: $-4\mathbf{i}+\mathbf{j}$
b) $-\frac{2}{5}\mathbf{i}+\frac{1}{10}\mathbf{j}$ *c*) $\frac{2}{5}\mathbf{i}-\frac{1}{10}\mathbf{j}$
En dirección opuesta al gradiente
49. *a*)

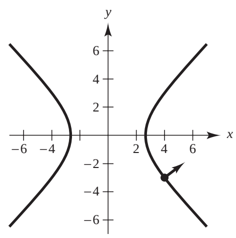


b) $D_{\mathbf{u}}f(4,-3)=8\cos\theta+6\operatorname{sen}\theta$



Generada con Mathematica

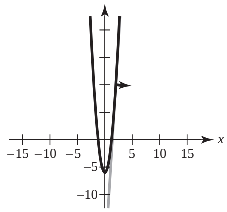
c) $\theta\approx 2.21$, $\theta\approx 5.36$
Direcciones en las cuales no hay cambio en f
d) $\theta\approx 0.64$, $\theta\approx 3.79$
Direcciones de mayor tasa de cambio en f
e) 10; magnitud de la mayor razón de cambio
f)



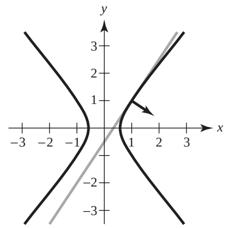
Generada con Mathematica

Ortogonal a la curva de nivel

51. $-2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ **53.** $3\mathbf{i}-\mathbf{j}$
55. *a*) $16\mathbf{i}-\mathbf{j}$ *b*) $(\sqrt{257}/257)(16\mathbf{i}-\mathbf{j})$ *c*) $y=16x-22$
d)



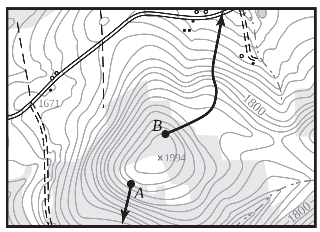
57. *a*) $6\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ *b*) $(\sqrt{13}/13)(3\mathbf{i}-2\mathbf{j})$ *c*) $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$
d)



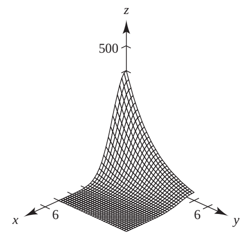
59. La derivada direccional de $z=f(x,y)$ en la dirección de $\mathbf{u}=\cos\theta\mathbf{i}+\operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\cos\theta,\,y+t\operatorname{sen}\theta)-f(x,y)}{t}$$

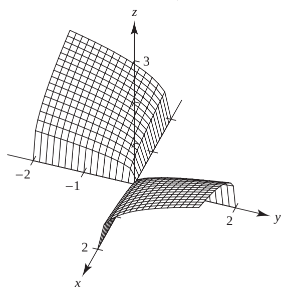
si el límite existe.
61. Ver la definición en la página 936. Ver las propiedades en la página 937.
63. El vector gradiente es normal a las curvas de nivel.
65. $\frac{1}{625}(7\mathbf{i}-24\mathbf{j})$
67.



69. $y^2=10x$
71. *a*)



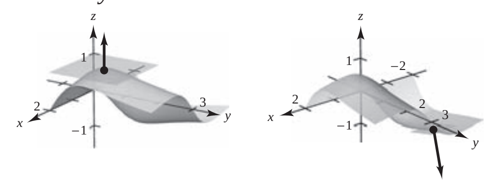
b) El calor no cambia en las direcciones perpendiculares al gradiente: $\pm(\mathbf{i}-6\mathbf{j})$.
c) El aumento es mayor en la dirección del gradiente: $-3\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}$.
73. Verdadero **75.** Verdadero
77. $f(x,y,z)=e^x\cos y+\frac{1}{2}z^2+C$
79. *a*) Demostración *b*) Demostración
c)



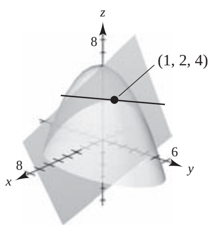
Sección 13.7 (página 951)

1. La superficie de nivel se puede escribir como $3x-5y+3z=15$, que es la ecuación de un plano en el espacio.
3. La superficie de nivel se puede escribir como $4x^2+9y^2-4z^2=0$, que es la ecuación de un cono elíptico en el espacio que se encuentra en el eje z.

5. $\frac{1}{13}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$ **7.** $(\sqrt{6}/6)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$
9. $(\sqrt{145}/145)(12\mathbf{i} - \mathbf{k})$ **11.** $\frac{1}{13}(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$
13. $(\sqrt{3}/3)(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$ **15.** $(\sqrt{113}/113)(-\mathbf{i} - 6\sqrt{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$
17. $4x + 2y - z = 2$ **19.** $3x + 4y - 5z = 0$
21. $2x - 2y - z = 2$ **23.** $2x + 3y + 3z = 6$
25. $3x + 4y - 25z = 25(1 - \ln 5)$ **27.** $x - 4y + 2z = 18$
29. $6x - 3y - 2z = 11$ **31.** $x + y + z = 9$
$x - 3 = y - 3 = z - 3$
33. $2x + 4y + z = 14$
$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-4}{1}$
35. $6x - 4y - z = 5$
$\dfrac{x-3}{6} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}$
37. $10x + 5y + 2z = 30$
$\dfrac{x-1}{10} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-5}{2}$
39. $x - y + 2z = \pi/2$
$\dfrac{(x-1)}{1} = \dfrac{(y-1)}{-1} = \dfrac{z-(\pi/4)}{2}$
41. *a*) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ *b*) $\dfrac{1}{2}$, no son ortogonales
43. *a*) $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-3}$ *b*) $\dfrac{16}{25}$, no son ortogonales
45. *a*) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-2}{-4}$ *b*) 0, son ortogonales
47. 86.0° **49.** 77.4° **51.** $(0, 3, 12)$ **53.** $(2, 2, -4)$
55. $(0, 0, 0)$ **57.** Demostración
59. *a*) Demostración *b*) Demostración
61. $(-2, 1, -1)$ o $(2, -1, 1)$
63. $F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$
65. Las respuestas varían.
67. *a*) Recta: $x = 1, y = 1, z = 1 - t$
Plano: $z = 1$
b) Recta: $x = -1, y = 2 + \frac{6}{25}t, z = -\frac{4}{5} - t$
Plano: $6y - 25z - 32 = 0$
c)



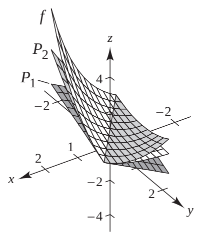
69. *a*) $x = 1 + t$
$y = 2 - 2t$
$z = 4$
$\theta \approx 48.2°$
b)



71. $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$
$F_x(x, y, z) = 2x/a^2$
$F_y(x, y, z) = 2y/b^2$
$F_z(x, y, z) = 2z/c^2$
Plano: $\dfrac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \dfrac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \dfrac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$
$\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} + \dfrac{z_0 z}{c^2} = 1$
73. $F(x, y, z) = a^2x^2 + b^2y^2 - z^2$
$F_x(x, y, z) = 2a^2x$
$F_y(x, y, z) = 2b^2y$
$F_z(x, y, z) = -2z$
Plano: $2a^2x_0(x - x_0) + 2b^2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0$
$a^2x_0x + b^2y_0y - z_0z = 0$
Por lo tanto, el plano pasa por el origen.
75. *a*) $P_1(x, y) = 1 + x - y$
b) $P_2(x, y) = 1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2$
c) Si $x = 0$, $P_2(0, y) = 1 - y + \frac{1}{2}y^2$.
Éste es el polinomio de Taylor de segundo grado para e^{-y}.
Si $y = 0$, $P_2(x, 0) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.
Éste es el polinomio de Taylor de segundo grado para e^x.
d)

x	y	$f(x, y)$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0	1	1	1
0	0.1	0.9048	0.9000	0.9050
0.2	0.1	1.1052	1.1000	1.1050
0.2	0.5	0.7408	0.7000	0.7450
1	0.5	1.6487	1.5000	1.6250

e)

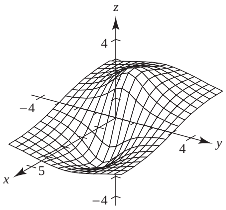


77. Demostración

Sección 13.8 (página 960)

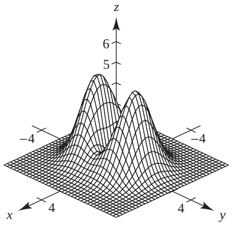
1. Mínimo relativo: $(1, 3, 0)$ **3.** Mínimo relativo: $(0, 0, 1)$
5. Mínimo relativo: $(-1, 3, -4)$
7. Mínimo relativo: $(1, 1, 11)$
9. Máximo relativo: $(5, -1, 2)$
11. Mínimo relativo: $(3, -4, -5)$
13. Mínimo relativo: $(0, 0, 0)$
15. Máximo relativo: $(0, 0, 4)$

17.



Máximo relativo: $(-1, 0, 2)$
Mínimo relativo: $(1, 0, -2)$

19.



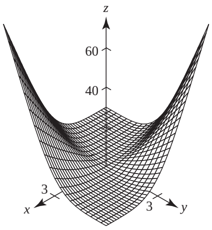
Mínimo relativo: $(0, 0, 0)$
Máximos relativos: $(0, \pm 1, 4)$
Puntos silla: $(\pm 1, 0, 1)$

21. Máximo relativo: $(40, 40, 3\,200)$

23. Puntos silla: $(0, 0, 0)$ **25.** Puntos silla: $(1, -1, -1)$

27. No hay números críticos.

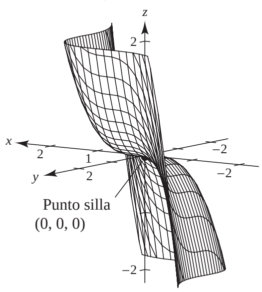
29. z nunca es negativo. Mínimo: $z = 0$ cuando $x = y \neq 0$.



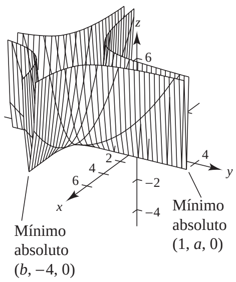
31. Información insuficiente. **33.** Punto silla.

35. $-4 < f_{xy}(3, 7) < 4$

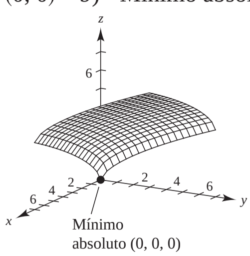
37. *a*) $(0, 0)$ *b*) Punto silla. $(0, 0, 0)$ *c*) $(0, 0)$
d)



39. *a*) $(1, a), (b, -4)$ *b*) Mínimos absolutos: $(1, a, 0), (b, -4, 0)$
c) $(1, a), (b, -4)$ *d*)



41. *a*) $(0, 0)$ *b*) Mínimo absoluto: $(0, 0, 0)$ *c*) $(0, 0)$
d)



43. Mínimo relativo: $(0, 3, -1)$

45. Máximo absoluto: $(4, 0, 21)$
Mínimo absoluto: $(4, 2, -11)$

47. Máximo absoluto: $(0, 1, 10)$
Mínimo absoluto: $(1, 2, 5)$

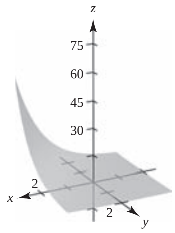
49. Máximos absolutos: $(\pm 2, 4, 28)$
Mínimo absoluto: $(0, 1, -2)$

51. Máximos absolutos: $(-2, -1, 9), (2, 1, 9)$
Mínimos absolutos: $(x, -x, 0), \ |x| \leq 1$

53. Máximo absoluto: $(1, 1, 1)$
Mínimo absoluto: $(0, 0, 0)$

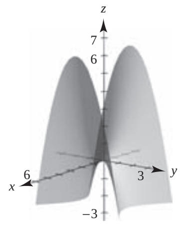
55. El punto A es un punto silla.

57. Las respuestas varían.
Ejemplo de respuesta:



No hay extremos

59. Las respuestas varían.
Ejemplo de respuesta:



Punto silla

61. Falso. Sea $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$ en el punto $(0, 0, 1)$.

63. Falso. Sea $f(x, y) = x^2y^2$ (ver ejemplo 4 de la página 958).

Sección 13.9 (página 966)

1. $\sqrt{3}$ **3.** $\sqrt{7}$ **5.** $x = y = z = 3$ **7.** 10, 10, 10

9. 9 pies × 9 pies × 8.25 pies; \$26.73

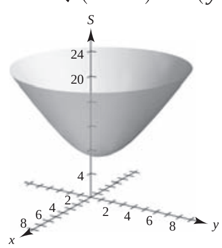
11. Sea $a + b + c = k$.
$V = 4\pi abc/3 = \frac{4}{3}\pi ab(k - a - b) = \frac{4}{3}\pi(kab - a^2b - ab^2)$
$$\left.\begin{aligned} V_a &= \tfrac{4}{3}\pi(kb - 2ab - b^2) = 0 \\ V_b &= \tfrac{4}{3}\pi(ka - a^2 - 2ab) = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} kb - 2ab - b^2 &= 0 \\ kb - a^2 - 2ab &= 0 \end{aligned}$$
Así, $a = b$ y $b = k/3$. Por tanto, $a = b = c = k/3$.

13. Sean x, y y z la longitud, ancho y altura, respectivamente, y sea V_0 el volumen dado. Entonces $V_0 = xyz$ y $z = V_0/xy$. El área de la superficie es
$S = 2xy + 2yz + 2xz = 2(xy + V_0/x + V_0/y)$.
$$\left.\begin{aligned} S_x &= 2(y - V_0/x^2) = 0 \\ S_y &= 2(x - V_0/y^2) = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x^2y - V_0 &= 0 \\ xy^2 - V_0 &= 0 \end{aligned}$$
Así, $x = \sqrt[3]{V_0}$, $y = \sqrt[3]{V_0}$, y $z = \sqrt[3]{V_0}$.

15. $x_1 = 3$; $x_2 = 6$ **17.** Demostración

19. $x = \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ km
$y = (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})/6 \approx 1.284$ km

21. *a*) $S = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 2)^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}$



La superficie tiene un mínimo.

b) $S_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{x + 2}{\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 2)^2}} + \dfrac{x - 4}{\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}}$

$S_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{y - 2}{\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 2)^2}} + \dfrac{y - 2}{\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}}$

c) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{10}}\right)\mathbf{j}$

$\theta \approx 186.0°$

d) $t = 1.344$; $(x_2, y_2) \approx (0.05, 0.90)$

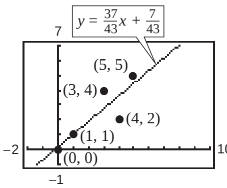
e) $(x_4, y_4) \approx (0.06, 0.45)$; $S = 7.266$

f) $-\nabla S(x, y)$ da la dirección de la máxima tasa de decrecimiento de S. Usar $\nabla S(x, y)$ para encontrar un máximo.

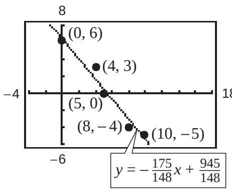
23. Expresar la ecuación a maximizar o minimizar como una función de dos variables. Tomar las derivadas parciales e igualarlas a cero o indefinido para obtener los puntos críticos. Utilizar el criterio de las segundas derivadas parciales para extremos relativos utilizando los puntos críticos. Verificar los puntos frontera.

25. *a)* $y = \frac{3}{4}x + \frac{4}{3}$ *b)* $\frac{1}{6}$ **27.** *a)* $y = -2x + 4$ *b)* 2

29. $y = \frac{37}{43}x + \frac{7}{43}$

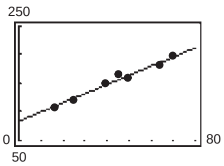


31. $y = -\frac{175}{148}x + \frac{945}{148}$



33. *a)* $y = 1.6x + 84$

b)



c) 1.6

35. $y = 14x + 19$

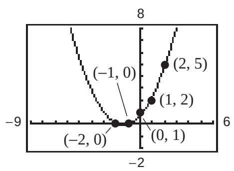
41.4 bushels por acre

37. $a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$

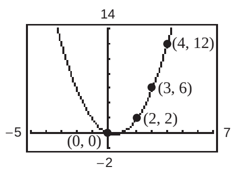
$a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i$

39. $y = \frac{3}{7}x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{26}{35}$

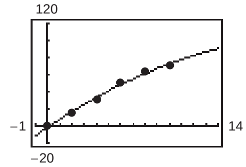


41. $y = x^2 - x$



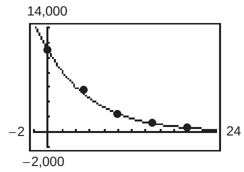
43. *a)* $y = -0.22x^2 + 9.66x - 1.79$

b)



45. *a)* $\ln P = -0.1499h + 9.3018$ *b)* $P = 10{,}957.7e^{-0.1499h}$

c)

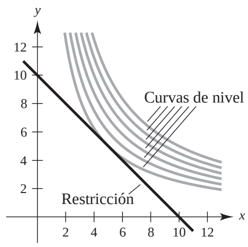


d) Demostración

47. Demostración

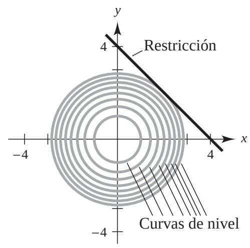
Sección 13.10 (página 976)

1.



$f(5, 5) = 25$

3.



$f(2, 2) = 8$

5. $f(1, 2) = 5$ **7.** $f(25, 50) = 2\,600$

9. $f(1, 1) = 2$ **11.** $f(3, 3, 3) = 27$ **13.** $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

15. Máximos: $f\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right) = \frac{5}{2}$

$f\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right) = \frac{5}{2}$

Mínimos: $f\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right) = -\frac{1}{2}$

$f\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right) = -\frac{1}{2}$

17. $f(8, 16, 8) = 1\,024$ **19.** $\sqrt{2}/2$ **21.** $3\sqrt{2}$ **23.** $\sqrt{11}/2$

25. 0.188 **27.** $\sqrt{3}$ **29.** $(-4, 0, 4)$

31. Los problemas de optimización que tienen restricciones sobre los valores que pueden ser usados para producir las soluciones óptimas se conocen como problemas de optimización restringidos.

33. $\sqrt{3}$ **35.** $x = y = z = 3$

37. 9 pies × 9 pies × 8.25 pies; \$26.73 **39.** $a = b = c = k/3$

41. Demostración **43.** $2\sqrt{3}a/3 \times 2\sqrt{3}b/3 \times 2\sqrt{3}c/3$

45. $\sqrt[3]{360} \times \sqrt[3]{360} \times \frac{4}{3}\sqrt[3]{360}$ pies

47. $r = \sqrt[3]{\dfrac{v_0}{2\pi}}$ y $h = 2\sqrt[3]{\dfrac{v_0}{2\pi}}$ **49.** Demostración

51. $P(15\,625/18, 3\,125) \approx 226\,869$

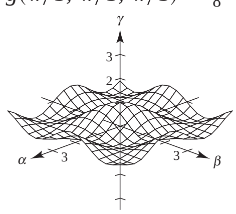
53. $x \approx 191.3$

$y \approx 688.7$

Costo ≈ \$55 095.60

55. *a)* $g(\pi/3, \pi/3, \pi/3) = \frac{1}{8}$

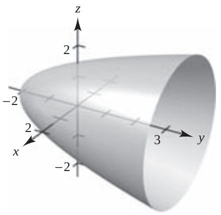
b)



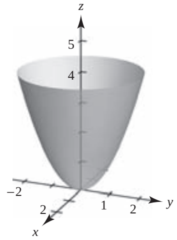
Los valores máximos ocurren cuando $\alpha = \beta$.

Ejercicios de repaso para el capítulo 13 (página 978)

1.



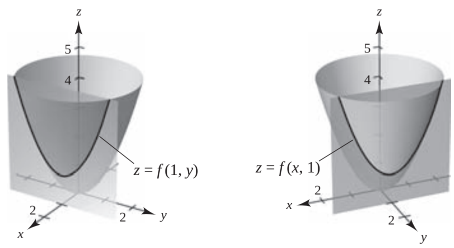
3. *a*)



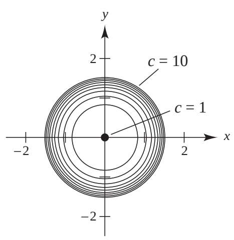
b) g es una traslación vertical de f dos unidades hacia arriba.

c) g es una traslación horizontal de f dos unidades hacia la derecha.

d)

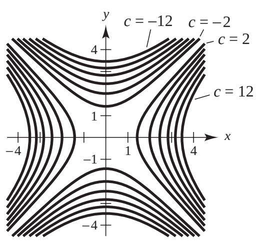


5.



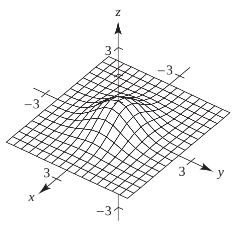
Generado con Mathematica

7.



Generado con Mathematica

9.



11. Límite: $\frac{1}{2}$
Continua excepto en $(0, 0)$

13. Límite: 0
Continua

15. $f_x(x, y) = e^x \cos y$
$f_y(x, y) = -e^x \operatorname{sen} y$

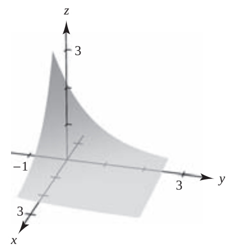
17. $\partial z/\partial x = -e^{-x}$
$\partial z/\partial y = -e^{-y}$

19. $g_x(x, y) = [y(y^2 - x^2)]/(x^2 + y^2)^2$
$g_y(x, y) = [x(x^2 - y^2)]/(x^2 + y^2)^2$

21. $f_x(x, y, z) = -yz/(x^2 + y^2)$
$f_y(x, y, z) = xz/(x^2 + y^2)$
$f_z(x, y, z) = \arctan y/x$

23. $u_x(x, t) = cne^{-n^2t} \cos nx$
$u_t(x, t) = -cn^2e^{-n^2t} \operatorname{sen} nx$

25. Las respuestas varían. Ejemplo:



27. $f_{xx}(x, y) = 6$
$f_{yy}(x, y) = 12y$
$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -1$

29. $h_{xx}(x, y) = -y \cos x$
$h_{yy}(x, y) = -x \operatorname{sen} y$
$h_{xy}(x, y) = h_{yx}(x, y) = \cos y - \operatorname{sen} x$

31. $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = 2 + (-2) = 0$

33. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{6x^2y - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3} + \dfrac{-6x^2y + 2y^3}{(x^2 + y^2)^3} = 0$

35. $(xy \cos xy + \operatorname{sen} xy)\, dx + (x^2 \cos xy)\, dy$

37. 0.6538 cm, 5.03% **39.** $\pm\pi$ pulg^3

41. $dw/dt = (8t - 1)/(4t^2 - t + 4)$

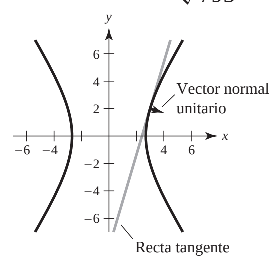
43. $\partial w/\partial r = (4r^2t - 4rt^2 - t^3)/(2r - t)^2$
$\partial w/\partial t = (4r^2t - rt^2 + 4r^3)/(2r - t)^2$

45. $\partial z/\partial x = (-2x - y)/(y + 2z)$
$\partial z/\partial y = (-x - 2y - z)/(y + 2z)$

47. -50 **49.** $\frac{2}{3}$ **51.** $\langle 4, 4\rangle, 4\sqrt{2}$ **53.** $\left\langle -\frac{1}{2}, 0\right\rangle, \frac{1}{2}$

55. *a*) $54\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$ *b*) $\dfrac{27}{\sqrt{793}}\mathbf{i} - \dfrac{8}{\sqrt{793}}\mathbf{j}$ *c*) $y = \dfrac{27}{8}x - \dfrac{65}{8}$

d)

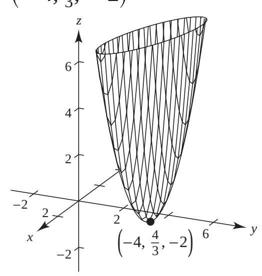


57. Plano tangente: $4x + 4y - z = 8$
Recta normal: $x = 2 + 4t, y = 1 + 4t, z = 4 - t$

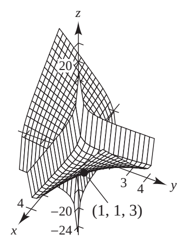
59. Plano tangente: $z = 4$
Recta normal: $x = 2, y = -3, z = 4 + t$

61. $(x - 2)/1 = (y - 2)/1 = (z - 5)/(-4)$ **63.** $\theta \approx 36.7°$

65. Mínimo relativo: $\left(-4, \frac{4}{3}, -2\right)$



67. Mínimo relativo: $(1, 1, 3)$

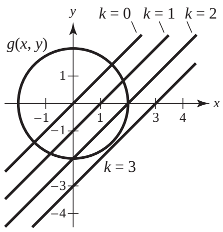


69. Las curvas de nivel son hipérbolas. El punto crítico (0,0) puede ser un punto silla o un extremo.

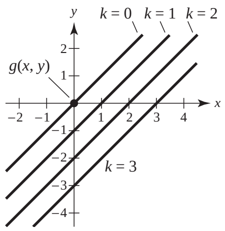
71. $x_1 = 94, x_2 = 157$ **73.** $f(49.4, 253) = 13\,201.8$
75. *a*) $y = 0.004x^2 + 0.07x + 19.4$ *b*) 50.6 kg
77. Máximo: $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$
79. $x = \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ km; $y = \sqrt{3}/3 \approx 0.577$ km;
$z = \left(60 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)/6 \approx 8.716$ km

SP Solución de problemas (página 981)

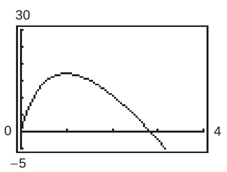
1. *a*) 12 unidades cuadradas *b*) Demostración *c*) Demostración
3. *a*) $y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0$
b) $x_0y_0z_0 = 1 \Longrightarrow z_0 = 1/x_0y_0$
Entonces el plano tangente es
$$y_0\left(\frac{1}{x_0y_0}\right)(x - x_0) + x_0\left(\frac{1}{x_0y_0}\right)(y - y_0) + x_0y_0\left(z - \frac{1}{x_0y_0}\right) = 0.$$
Intersecciones: $(3x_0, 0, 0), (0, 3y_0, 0), \left(0, 0, \dfrac{3}{x_0y_0}\right)$
$V = \frac{1}{3}bh = \frac{9}{2}$

5. *a*)


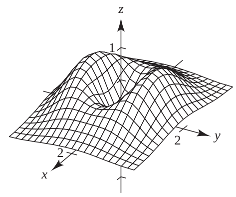
Valor máximo: $2\sqrt{2}$

b)


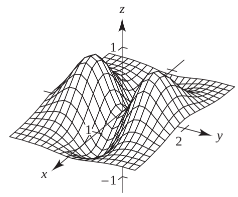
Valores máximo y mínimo: 0
El método de los multiplicadores de Lagrange no se aplica porque $\nabla g(x_0, y_0) = \mathbf{0}$.

7. $2\sqrt[3]{150} \times 2\sqrt[3]{150} \times 5\sqrt[3]{150}/3$
9. *a*)
$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} &= xCy^{1-a}ax^{a-1} + yCx^a(1-a)y^{1-a-1} \\ &= ax^aCy^{1-a} + (1-a)x^aC(y^{1-a}) \\ &= Cx^ay^{1-a}[a + (1-a)] \\ &= Cx^ay^{1-a} \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= C(tx)^a(ty)^{1-a} \\ &= Ctx^ay^{1-a} \\ &= tCx^ay^{1-a} \\ &= tf(x, y) \end{aligned}$$
11. *a*) $x = 32\sqrt{2}t$
$y = 32\sqrt{2}t - 16t^2$
b) $\alpha = \arctan\left(\dfrac{y}{x + 50}\right) = \arctan\left(\dfrac{32\sqrt{2}t - 16t^2}{32\sqrt{2}t + 50}\right)$
c) $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{-16\left(8\sqrt{2}t^2 + 25t - 25\sqrt{2}\right)}{64t^4 - 256\sqrt{2}t^3 + 1024t^2 + 800\sqrt{2}t + 625}$
d)


No; la razón de cambio de α es mayor cuando el proyectil está más cerca de la cámara.
e) α es máximo cuando $t = 0.98$ segundos.
No; el proyectil alcanza su máxima altura cuando $t = \sqrt{2} \approx 1.41$ segundos.

13. *a*)


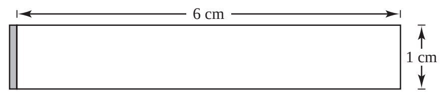
Mínimo: $(0, 0, 0)$
Máximos: $(0, \pm 1, 2e^{-1})$
Puntos silla: $(\pm 1, 0, e^{-1})$

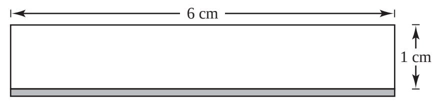
b)


Mínimos: $(\pm 1, 0, -e^{-1})$
Máximos: $(0, \pm 1, 2e^{-1})$
Puntos silla: $(0, 0, 0)$

c) $\alpha > 0$
Mínimo: $(0, 0, 0)$
Máximos: $(0, \pm 1, \beta e^{-1})$
Puntos silla: $(\pm 1, 0, \alpha e^{-1})$

$\alpha < 0$
Mínimos: $(\pm 1, 0, \alpha e^{-1})$
Máximos: $(0, \pm 1, \beta e^{-1})$
Puntos silla: $(0, 0, 0)$

15. *a*)


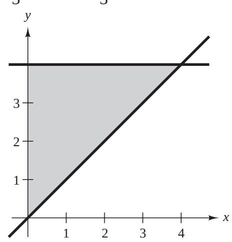
b)


c) Altura
d) $dl = 0.01, dh = 0$: $dA = 0.01$
$dl = 0, dh = 0.01$: $dA = 0.06$
17 a 19. Demostraciones

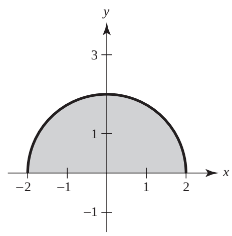
Capítulo 14

Sección 14.1 (página 990)

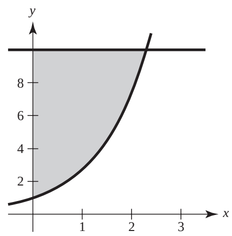
1. $2x^2$ **3.** $y\ln(2y)$ **5.** $(4x^2 - x^4)/2$
7. $(y/2)\left[(\ln y)^2 - y^2\right]$ **9.** $x^2\left(1 - e^{-x^2} - x^2e^{-x^2}\right)$ **11.** 3
13. $\frac{8}{3}$ **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** 2 **19.** $\frac{1}{3}$ **21.** 1 629 **23.** $\frac{2}{3}$ **25.** 4
27. $\pi/2$ **29.** $\pi^2/32 + \frac{1}{8}$ **31.** $\frac{1}{2}$ **33.** Diverge **35.** 24
37. $\frac{16}{3}$ **39.** $\frac{8}{3}$ **41.** 5 **43.** πab **45.** $\frac{9}{2}$

47.


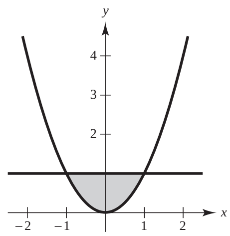
$$\int_0^4\int_x^4 f(x, y)\,dy\,dx$$

49.


$$\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy$$

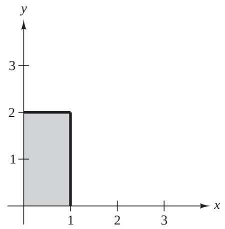
51.


$$\int_0^{\ln 10}\int_{e^x}^{10} f(x, y)\,dy\,dx$$

53.


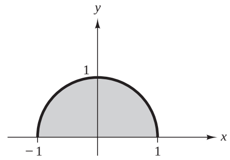
$$\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx\,dy$$

55.



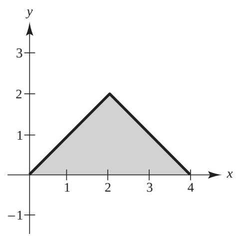
$$\int_0^1\int_0^2 dy\,dx = \int_0^2\int_0^1 dx\,dy = 2$$

57.



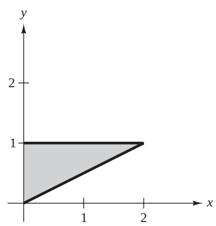
$$\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\,dy = \int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = \frac{\pi}{2}$$

59.



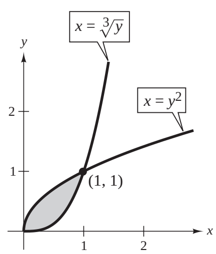
$$\int_0^2\int_0^x dy\,dx + \int_2^4\int_0^{4-x} dy\,dx = \int_0^2\int_y^{4-y} dx\,dy = 4$$

61.



$$\int_0^2\int_{x/2}^1 dy\,dx = \int_0^1\int_0^{2y} dx\,dy = 1$$

63.

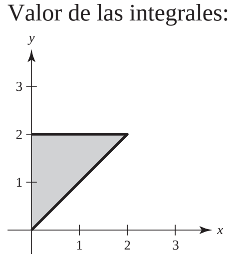


$$\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx\,dy = \int_0^1\int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy\,dx = \frac{5}{12}$$

65. La primera integral surge utilizando rectángulos representativos verticales. Las dos segundas surgen utilizando rectángulos representativos horizontales.

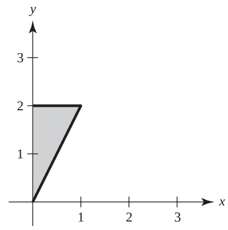
Valor de las integrales: $15\,625\pi/24$

67.



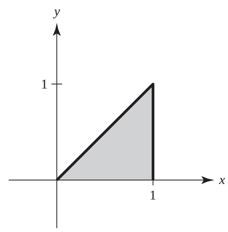
$$\int_0^2\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\,dy\,dx = \frac{26}{9}$$

69.



$$\int_0^1\int_{2x}^2 4e^{y^2}\,dy\,dx = e^4 - 1 \approx 53.598$$

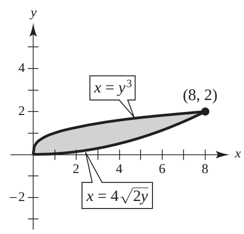
71.



$$\int_0^1\int_y^1 \operatorname{sen} x^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}(1-\cos 1) \approx 0.230$$

73. $\frac{1\,664}{105}$ **75.** $(\ln 5)^2$

77. *a*)



b) $\displaystyle\int_0^8\int_{x^2/32}^{\sqrt[3]{x}} (x^2y - xy^2)\,dy\,dx$ *c*) $67\,520/693$

79. 20.5648 **81.** $15\pi/2$

83. Una integral iterada es una integral de una función de varias variables. Se integra con respecto a una variable mientras las otras variables se mantienen constantes.

85. Si los cuatro límites de integración son constantes, la región de integración es rectangular.

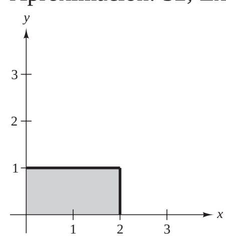
87. Verdadero

Sección 14.2 (página 1000)

1. 24 (la aproximación es exacta)

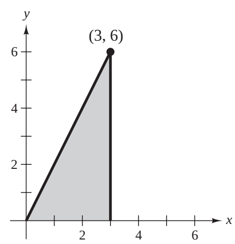
3. Aproximación: 52; Exacto: $\frac{160}{3}$ **5.** 400; 272

7.



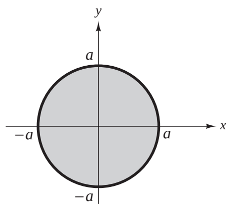
8

9.



36

11.



0

13. $\displaystyle\int_0^3\int_0^5 xy\,dy\,dx = \frac{225}{4}$

$\displaystyle\int_0^5\int_0^3 xy\,dx\,dy = \frac{225}{4}$

15. $\displaystyle\int_1^2\int_x^{2x} \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$

$\displaystyle\int_1^2\int_1^y \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy + \int_2^4\int_{y/2}^2 \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$

17. $\displaystyle\int_0^1\int_{4-x}^{4-x^2} -2y\,dy\,dx = -\frac{6}{5}$

$\displaystyle\int_3^4\int_{4-y}^{\sqrt{4-y}} -2y\,dx\,dy = -\frac{6}{5}$

19. $\displaystyle\int_0^3\int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} x\,dx\,dy = 25$

$\displaystyle\int_0^4\int_0^{3x/4} x\,dy\,dx + \int_4^5\int_0^{\sqrt{25-x^2}} x\,dy\,dx = 25$

21. 4 **23.** 4 **25.** 12 **27.** $\frac{3}{8}$ **29.** 1 **31.** $32\sqrt{2}\,\pi/3$

33. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x xy\,dy\,dx = \frac{1}{8}$ **35.** $\displaystyle\int_0^2\int_0^4 x^2\,dy\,dx = \frac{32}{3}$

37. $\displaystyle 2\int_0^1\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx = \frac{2}{3}$

39. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)\,dy\,dx = \frac{16}{3}$

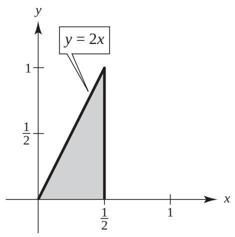
41. $\displaystyle 2\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} (2x-x^2-y^2)\,dy\,dx$

43. $\displaystyle 4\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$

45. $\displaystyle\int_0^2\int_{-\sqrt{2-2(y-1)^2}}^{\sqrt{2-2(y-1)^2}} (4y-x^2-2y^2)\,dx\,dy$

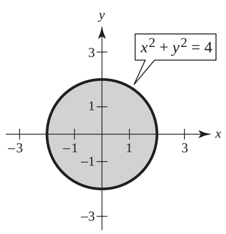
47. $81\pi/2$ **49.** 1.2315 **51.** Demostración

53.



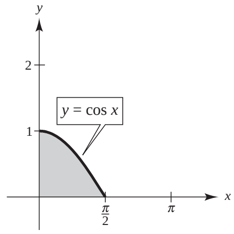
$\displaystyle\int_0^1\int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}\,dx\,dy = 1 - e^{-1/4} \approx 0.221$

55.



$\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2}\,dy\,dx = \frac{64}{3}$

57.



$\displaystyle\int_0^1\int_0^{\arccos y} \operatorname{sen} x\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx\,dy = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

59. 2 **61.** $\frac{8}{3}$ **63.** $(e-1)^2$ **65.** 25 645.24

67. Ver la definición de integral doble en la página 994. La integral doble de una función $f(x, y) \geq 0$ sobre la región de integración da el volumen de esa región.

69. *a*) La caída de nieve total en el país R

b) El promedio de caída de nieve en el país R

71. No; 6π es el valor más grande posible. **73.** Demostración; $\frac{1}{5}$

75. Demostración; $\frac{7}{27}$ **77.** 2 500 m^3 **79.** *a*) 1.784 *b*) 1.788

81. *a*) 11.057 *b*) 11.041 **83.** d

85. Falso. $\displaystyle V = 8\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy.$

87. $\frac{1}{2}(1-e)$ **89.** R: $x^2+y^2 \leq 9$ **91.** ≈ 0.82736

93. Problema Putnam A2, 1989

Sección 14.3 (página 1009)

1. Rectangular **3.** Polar

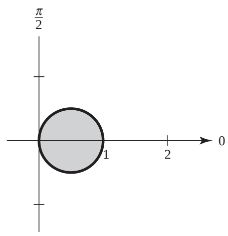
5. La región R es un medio círculo de radio 8. Se puede describir en coordenadas polares como

$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 8, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$

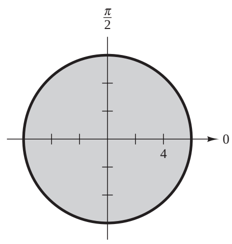
7. La región R es una cardioide con $a = b = 3$. Se puede describir en coordenadas polares como

$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 3 + 3\operatorname{sen}\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$

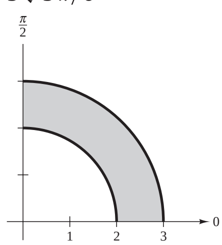
9. $\pi/4$



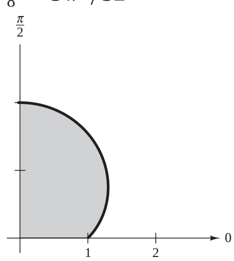
11. 0



13. $5\sqrt{5}\pi/6$



15. $\frac{9}{8} + 3\pi^2/32$



17. $a^3/3$ **19.** 4π **21.** $243\pi/10$ **23.** $\frac{2}{3}$ **25.** $(\pi/2)\operatorname{sen} 1$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\sqrt{2}} r^2\,dr\,d\theta = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$

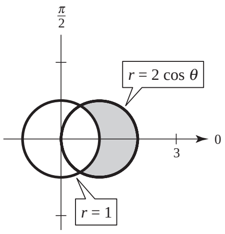
29. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^2(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta = \frac{16}{3}$

31. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_1^2 r\theta\,dr\,d\theta = \frac{3\pi^2}{64}$ **33.** $\frac{1}{8}$ **35.** $\frac{250\pi}{3}$

37. $\frac{64}{9}(3\pi - 4)$ **39.** $2\sqrt{4 - 2\sqrt[3]{2}}$ **41.** 1.2858

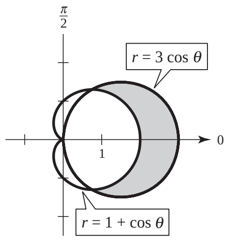
43. 9π **45.** $3\pi/2$ **47.** π

49.



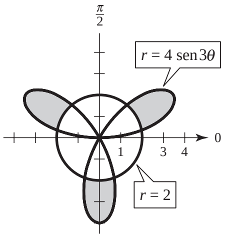
$\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

51.



π

53.



$\dfrac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

55. Sea R una región acotada por las gráficas de $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$ y las rectas $\theta = a$ y $\theta = b$. Al utilizar coordenadas polares para evaluar una integral doble sobre R, R puede ser particionada en pequeños sectores polares.

57. Las regiones r-simples tienen límites fijos para θ y límites variables para r.
Las regiones θ-simples tienen límites variables para θ y límites fijos para r.

59. *a)* $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta$

c) Escoger la integral en el apartado *b*) porque los límites de integración son menos complicados.

61. Insertar un factor de r; sector de un círculo **63.** 56.051 **65.** c

67. Falso. Sea $f(r, \theta) = r - 1$ y sea R un sector donde $0 \le r \le 6$ y $0 \le \theta \le \pi$.

69. *a)* 2π (b) $\sqrt{2\pi}$ **71.** 486 788

73. *a)* $\displaystyle\int_2^4\int_{y/\sqrt{3}}^{y} f\,dx\,dy$

b) $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^{2}\int_2^{\sqrt{3}x} f\,dy\,dx + \int_2^{4/\sqrt{3}}\int_x^{\sqrt{3}x} f\,dy\,dx + \int_{4/\sqrt{3}}^{4}\int_x^4 f\,dy\,dx$

c) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_{2\csc\theta}^{4\csc\theta} f\,r\,dr\,d\theta$

75. $A = \dfrac{\Delta\theta r_2^{\,2}}{2} - \dfrac{\Delta\theta r_1^{\,2}}{2} = \Delta\theta\left(\dfrac{r_1 + r_2}{2}\right)(r_2 - r_1) = r\,\Delta r\,\Delta\theta$

Sección 14.4 (página 1018)

1. $m = 4$ **3.** $m = \frac{1}{8}$

5. *a)* $m = ka^2$, $(a/2, a/2)$ *b)* $m = ka^3/2$, $(a/2, 2a/3)$
c) $m = ka^3/2$, $(2a/3, a/2)$

7. *a)* $m = ka^2/2$, $(a/3, 2a/3)$ *b)* $m = ka^3/3$, $(3a/8, 3a/4)$
c) $m = ka^3/6$, $(a/2, 3a/4)$

9. *a)* $\left(\dfrac{a}{2} + 5, \dfrac{a}{2}\right)$ *b)* $\left(\dfrac{a}{2} + 5, \dfrac{2a}{3}\right)$

c) $\left(\dfrac{2(a^2 + 15a + 75)}{3(a + 10)}, \dfrac{a}{2}\right)$

11. $m = k/4$, $(2/3, 8/15)$ **13.** $m = 30k$, $(14/5, 4/5)$

15. *a)* $m = k(e - 1)$, $\left(\dfrac{1}{e - 1}, \dfrac{e + 1}{4}\right)$

b) $m = \dfrac{k}{4}(e^2 - 1)$, $\left(\dfrac{e^2 + 1}{2(e^2 - 1)}, \dfrac{4(e^3 - 1)}{9(e^2 - 1)}\right)$

17. $m = 256k/15$, $(0, 16/7)$ **19.** $m = \dfrac{2kL}{\pi}$, $\left(\dfrac{L}{2}, \dfrac{\pi}{8}\right)$

21. $m = \dfrac{k\pi a^2}{8}$, $\left(\dfrac{4\sqrt{2}a}{3\pi}, \dfrac{4a(2 - \sqrt{2})}{3\pi}\right)$

23. $m = \dfrac{k}{8}(1 - 5e^{-4})$, $\left(\dfrac{e^4 - 13}{e^4 - 5}, \dfrac{8}{27}\left[\dfrac{e^6 - 7}{e^6 - 5e^2}\right]\right)$

25. $m = k\pi/3$, $\left(81\sqrt{3}/(40\pi), 0\right)$

27. $\bar{\bar{x}} = \sqrt{3}b/3$ **29.** $\bar{\bar{x}} = a/2$ **31.** $\bar{\bar{x}} = a/2$
$\bar{\bar{y}} = \sqrt{3}h/3$ $\bar{\bar{y}} = a/2$ $\bar{\bar{y}} = a/2$

33. $I_x = kab^4/4$
$I_y = kb^2a^3/6$
$I_0 = (3kab^4 + 2ka^3b^2)/12$
$\bar{\bar{x}} = \sqrt{3}a/3$
$\bar{\bar{y}} = \sqrt{2}b/2$

35. $I_x = 32k/3$
$I_y = 16k/3$
$I_0 = 16k$
$\bar{\bar{x}} = 2\sqrt{3}/3$
$\bar{\bar{y}} = 2\sqrt{6}/3$

37. $I_x = 16k$
$I_y = 512k/5$
$I_0 = 592k/5$
$\bar{\bar{x}} = 4\sqrt{15}/5$
$\bar{\bar{y}} = \sqrt{6}/2$

39. $I_x = 3k/56$
$I_y = k/18$
$I_0 = 55k/504$
$\bar{\bar{x}} = \sqrt{30}/9$
$\bar{\bar{y}} = \sqrt{70}/14$

41. $\displaystyle 2k\int_{-b}^{b}\int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} (x - a)^2\,dy\,dx = \frac{k\pi b^2}{4}(b^2 + 4a^2)$

43. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} kx(x - 6)^2\,dy\,dx = \frac{42\,752k}{315}$

45. $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} k(a - y)(y - a)^2\,dy\,dx = ka^5\left(\frac{7\pi}{16} - \frac{17}{15}\right)$

47. Ver definiciones en la página 1014. **49.** Las respuestas varían.

51. $L/3$ **53.** $L/2$ **55.** Demostración

Sección 14.5 (página 1025)

1. 24 **3.** 12π **5.** $\frac{1}{2}\left[4\sqrt{17} + \ln\left(4 + \sqrt{17}\right)\right]$

7. $\frac{4}{27}\left(31\sqrt{31} - 8\right)$ **9.** $\sqrt{2} - 1$ **11.** $\sqrt{2}\pi$

13. $2\pi a\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)$ **15.** $48\sqrt{14}$ **17.** 20π

19. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x \sqrt{5 + 4x^2}\,dy\,dx = \frac{27 - 5\sqrt{5}}{12} \approx 1.3183$

21. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dy\,dx$

$\displaystyle = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right) \approx 117.3187$

23. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dy\,dx \approx 1.8616$ **25.** e

27. 2.0035 **29.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 9(x^2 - y)^2 + 9(y^2 - x)^2}\, dy\, dx$

31. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{1 + e^{-2x}}\, dy\, dx$

33. $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{0}^{10} \sqrt{1 + e^{2xy}(x^2 + y^2)}\, dy\, dx$

35. Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas sobre una región cerrada R en el plano xy, entonces el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R es
$$\int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA.$$

37. No. La gráfica no cambia de tamaño ni de forma, sólo de posición. Por lo anterior, el área de la superficie no crece.

39. 16 **41.** (a) $812\pi\sqrt{609}$ cm^3 (b) $100\pi\sqrt{609}$ cm^2

Sección 14.6 (página 1035)

1. 18 **3.** $\frac{1}{10}$ **5.** $\frac{15}{2}(1 - 1/e)$ **7.** $-\frac{40}{3}$ **9.** $\frac{324}{5}$

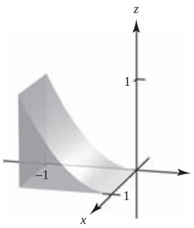
11. 2.44167 **13.** $V = \displaystyle\int_{0}^{5}\int_{0}^{5-x}\int_{0}^{5-x-y} dz\, dy\, dx$

15. $V = \displaystyle\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\int_{-\sqrt{6-y^2}}^{\sqrt{6-y^2}}\int_{0}^{6-x^2-y^2} dz\, dx\, dy$

17. $V = \displaystyle\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{(x^2+y^2)/2}^{\sqrt{80-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$

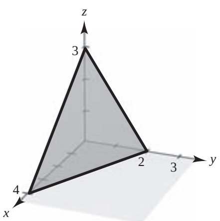
19. $\frac{256}{15}$ **21.** $4\pi a^3/3$ **23.** $\frac{256}{15}$ **25.** 10

27.



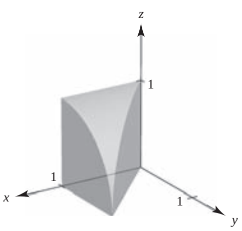
$\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{-1}^{-\sqrt{z}} dy\, dz\, dx$

29.



$\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{(12-4z)/3}\int_{0}^{(12-4z-3x)/6} dy\, dx\, dz$

31.



$\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dy\, dx$

33. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{3} xyz\, dz\, dy\, dx,\ \int_{0}^{1}\int_{y}^{1}\int_{0}^{3} xyz\, dz\, dx\, dy,$
$\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{3}\int_{0}^{x} xyz\, dy\, dz\, dx,\ \int_{0}^{3}\int_{0}^{1}\int_{0}^{x} xyz\, dy\, dx\, dz,$
$\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} xyz\, dx\, dy\, dz,\ \int_{0}^{1}\int_{0}^{3}\int_{y}^{1} xyz\, dx\, dz\, dy$

35. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{4} xyz\, dz\, dy\, dx,\ \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{0}^{4} xyz\, dz\, dx\, dy,$
$\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} xyz\, dy\, dz\, dx,\ \int_{0}^{4}\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} xyz\, dy\, dx\, dz,$
$\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} xyz\, dx\, dy\, dz,\ \int_{-3}^{3}\int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} xyz\, dx\, dz\, dy$

37. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{0}^{1-y^2} dx\, dy\, dz,\ \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y}\int_{0}^{1-y^2} dx\, dz\, dy,$
$\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{2z-z^2}\int_{0}^{1-z} 1\, dy\, dx\, dz + \int_{0}^{1}\int_{2z-z^2}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x}} 1\, dy\, dx\, dz,$
$\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{1-\sqrt{1-x}}^{1}\int_{0}^{1-z} 1\, dy\, dz\, dx + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\sqrt{1-x}}\int_{0}^{\sqrt{1-x}} 1\, dy\, dz\, dx,$
$\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x}}\int_{0}^{1-y} dz\, dy\, dx$

39. $m = 8k$ **41.** $m = 128k/3$
$\bar{x} = \frac{3}{2}$ $\bar{z} = 1$

43. $\displaystyle m = k\int_{0}^{b}\int_{0}^{b}\int_{0}^{b} xy\, dz\, dy\, dx$

$\displaystyle M_{yz} = k\int_{0}^{b}\int_{0}^{b}\int_{0}^{b} x^2y\, dz\, dy\, dx$

$\displaystyle M_{xz} = k\int_{0}^{b}\int_{0}^{b}\int_{0}^{b} xy^2\, dz\, dy\, dx$

$\displaystyle M_{xy} = k\int_{0}^{b}\int_{0}^{b}\int_{0}^{b} xyz\, dz\, dy\, dx$

45. $\bar{x}$ será más grande que 2, mientras que $\bar{y}$ y $\bar{z}$ no cambian.

47. $\bar{x}$ y $\bar{z}$ no cambian, mientras que $\bar{y}$ será más grande que 0.

49. $(0, 0, 3h/4)$ **51.** $\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$ **53.** $\left(5, 6, \frac{5}{4}\right)$

55. *a)* $I_x = 2ka^5/3$, $I_y = 2ka^5/3$, $I_z = 2ka^5/3$ *b)* $I_x = ka^8/8$, $I_y = ka^8/8$, $I_z = ka^8/8$

57. *a)* $I_x = 256k$, $I_y = 512k/3$, $I_z = 256k$ *b)* $I_x = 2\,048\,k/3$, $I_y = 1\,024\,k/3$, $I_z = 2\,048\,k/3$

59. Demostración **61.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x} (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$

63. *a)* $\displaystyle m = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{4-x^2-y^2} kz\, dz\, dy\, dx$

b) $\bar{x} = \bar{y} = 0$, por simetría

$\displaystyle\bar{z} = \frac{1}{m}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{4-x^2-y^2} kz^2\, dz\, dy\, dx$

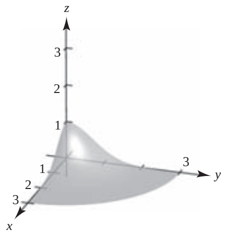
c) $\displaystyle I_z = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{4-x^2-y^2} kz(x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx$

65. Ver "Definición de Integral Triple" en la página 1027 y el teorema 14.4, "Evaluación por integrales iteradas" en la página 1028.

67. *a*) El sólido B.
b) El sólido B tiene el momento de inercia mayor porque es más denso.
c) El sólido A llegará primero abajo. Como el sólido B tiene un momento de inercia mayor, tiene una resistencia mayor al movimiento de rotación.
69. $\frac{13}{3}$ **71.** $\frac{3}{2}$
73. Q: $3z^2 + y^2 + 2x^2 \le 1$; $4\sqrt{6}\pi/45 \approx 0.684$
75. $a = 2, \frac{16}{3}$ **77.** Problema Putnam B1, 1965

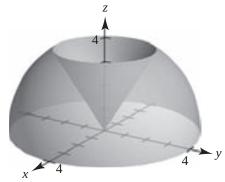
Sección 14.7 (página 1043)

1. 27 **3.** $\frac{52}{45}$ **5.** $\pi/8$ **7.** $\pi(e^4 + 3)$
9.



$(1 - e^{-9})\pi/4$

11.



$64\sqrt{3}\pi/3$

13. Cilíndrica: $\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r^2\cos\theta\, dz\, dr\, d\theta = 0$

Esférica: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan(1/2)}\int_0^{4\sec\phi} \rho^3 \operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

$+ \int_0^{2\pi}\int_{\arctan(1/2)}^{\pi/2}\int_0^{\cot\phi\csc\phi} \rho^3\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 0$

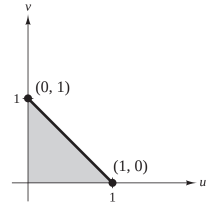
15. Cilíndrica: $\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_a^{a+\sqrt{a^2-r^2}} r^2\cos\theta\, dz\, dr\, d\theta = 0$

Esférica: $\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_{a\sec\phi}^{2a\cos\phi} \rho^3\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\phi = 0$

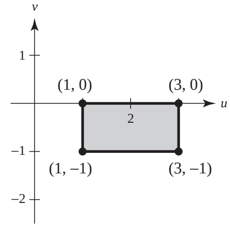
17. $(2a^3/9)(3\pi - 4)$ **19.** $\pi/16$ **21.** $(2a^3/9)(3\pi - 4)$
23. $48k\pi$ **25.** $\pi r_0^2 h/3$ **27.** $(0, 0, h/5)$
29. $I_z = 4k\int_0^{\pi/2}\int_0^{r_0}\int_0^{h(r_0-r)/r_0} r^3\, dz\, dr\, d\theta = 3mr_0^2/10$
31. Demostración **33.** $9\pi\sqrt{2}$ **35.** $16\pi^2$
37. $k\pi a^4$ **39.** $(0, 0, 3r/8)$ **41.** $k\pi/192$
43. Rectangulares a cilíndricas: $r^2 = x^2 + y^2$
$\tan\theta = y/x$
$z = z$
Cilíndricas a rectangulares: $x = r\cos\theta$
$y = r\operatorname{sen}\theta$
$z = z$
45. $\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)}\int_{h_1(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)}^{h_2(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta$
47. *a*) r constante: cilindro circular recto en torno al eje z.
θ constante: plano paralelo al eje z.
z constante: plano paralelo al plano xy.
b) ρ constante: esfera.
θ constante: plano paralelo al eje z.
ϕ constante: cono.
49. $\frac{1}{2}\pi^2 a^4$ **51.** Problema Putnam A1, 2006

Sección 14.8 (página 1050)

1. $-\frac{1}{2}$ **3.** $1 + 2v$ **5.** 1 **7.** $-e^{2u}$
9.



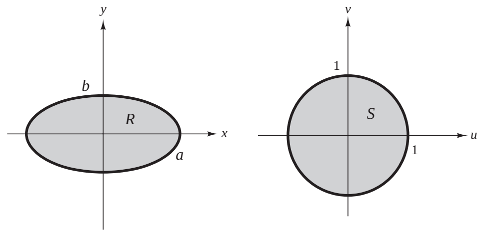
11.



13. $\int\int_R 3xy\, dA = \int_{-2/3}^{2/3}\int_{1-x}^{(1/2)x+2} 3xy\, dy\, dx$

$+ \int_{2/3}^{4/3}\int_{(1/2)x}^{(1/2)x+2} 3xy\, dy\, dx + \int_{4/3}^{8/3}\int_{(1/2)x}^{4-x} 3xy\, dy\, dx = \frac{164}{9}$

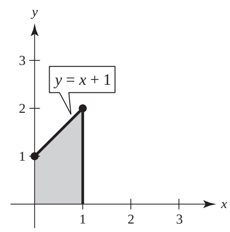
15. $\frac{8}{3}$ **17.** 36 **19.** $(e^{-1/2} - e^{-2})\ln 8 \approx 0.9798$ **21.** 96
23. $12(e^4 - 1)$ **25.** $\frac{100}{9}$ **27.** $\frac{2}{5}a^{5/2}$ **29.** Uno
31. *a*)



b) ab *c*) πab
33. Ver la "Definición de jacobiano" en la página 1045. **35.** u^2v
37. $-uv$ **39.** $-\rho^2\operatorname{sen}\phi$ **41.** Problema Putnam A2, 1994

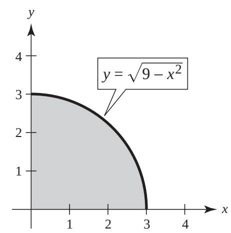
Ejercicios de repaso para el capítulo 14 (página 1052)

1. $x - x^3 + x^3\ln x^2$
3.



$\frac{29}{6}$

5.



36

7. $\int_0^3\int_0^{(3-x)/3} dy\, dx = \int_0^1\int_0^{3-3y} dx\, dy = \frac{3}{2}$

9. $\int_{-5}^{3}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dy\, dx$

$= \int_{-5}^{-4}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} dx\, dy + \int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{3} dx\, dy$

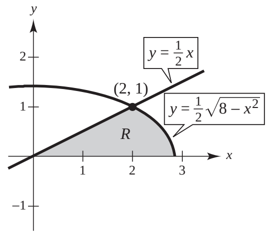
$+ \int_4^5\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} dx\, dy$

$= 25\pi/2 + 12 + 25\operatorname{arcsen}\frac{3}{5} \approx 67.36$

11. $4\int_0^1\int_0^{x\sqrt{1-x^2}} dy\, dx = 4\int_0^{1/2}\int_{\sqrt{(1-\sqrt{1-4y^2})/2}}^{\sqrt{(1+\sqrt{1-4y^2})/2}} dx\, dy = \frac{4}{3}$

13. $\displaystyle\int_2^5\int_{x-3}^{\sqrt{x-1}} dy\,dx + 2\int_1^2\int_0^{\sqrt{x-1}} dy\,dx = \int_{-1}^2\int_{y^2+1}^{y+3} dx\,dy = \frac{9}{2}$

15. Ambas integraciones son sobre la región común R, como se muestra en la figura. Ambas integrales dan $\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

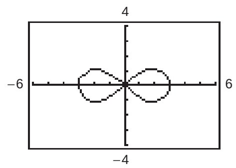


17. $\frac{3\,296}{15}$ **19.** $\frac{40}{3}$ **21.** 13.67°C **23.** $k = 1, 0.070$ **25.** c

27. Verdadero **29.** Verdadero **31.** $(h^3/6)\left[\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \sqrt{2}\right]$

33. $9\pi/2$ **35.** $\pi h^3/3$

37. *a)* $r = 3\sqrt{\cos 2\theta}$



b) 9 *c)* $3\left(3\pi - 16\sqrt{2} + 20\right) \approx 20.392$

39. *a)* $m = k/4, \left(\frac{32}{45}, \frac{64}{55}\right)$ *b)* $m = 17k/30, \left(\frac{936}{1\,309}, \frac{784}{663}\right)$

41. $I_x = ka^2b^3/6$
$I_y = ka^4b/4$
$I_0 = (2ka^2b^3 + 3ka^4b)/12$
$\bar{\bar{x}} = a/\sqrt{2}$
$\bar{\bar{y}} = b/\sqrt{3}$

43. $\dfrac{\left(101\sqrt{101} - 1\right)\pi}{6}$ **45.** $\dfrac{1}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$

47. *a)* 30 415.74 pies^3 *b)* 2 081.53 pies^2 **49.** $324\pi/5$

51. $(abc/3)(a^2 + b^2 + c^2)$ **53.** $8\pi/15$ **55.** $\frac{32}{3}\left(\pi/2 - \frac{2}{3}\right)$

57. $\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$ **59.** $(3a/8, 3a/8, 3a/8)$ **61.** $833k\pi/3$

63. *a)* $\dfrac{1}{3}\pi h^2(3a - h)$ *b)* $\left(0, 0, \dfrac{3(2a-h)^2}{4(3a-h)}\right)$ *c)* $\left(0, 0, \dfrac{3}{8}a\right)$

d) a *e)* $(\pi/30)h^3(20a^2 - 15ah + 3h^2)$ *f)* $4\pi a^5/15$

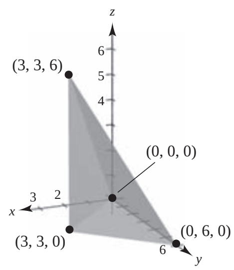
65. El volumen de un toro generado por un círculo de radio 3, con centro en (0, 3, 0) al girar sobre el eje z.

67. -9 **69.** $5\ln 5 - 3\ln 3 - 2 \approx 2.751$

SP Solución de problemas (página 1055)

1. $8\left(2 - \sqrt{2}\right)$ **3.** *a)* a *g)* Demostraciones **5.** $\frac{1}{3}$

7.



$\displaystyle\int_0^3\int_0^{2x}\int_x^{6-x} dy\,dz\,dx = 18$

9. $\sqrt{\pi}/4$

11. Si $a, k > 0$, entonces $1 = ka^2$ o $a = 1/\sqrt{k}$.

13. Las respuestas varían.

15. Entre más grande sea el ángulo entre el plano dado y el plano xy, más grande es el área de la superficie. Así, $z_2 < z_1 < z_4 < z_3$.

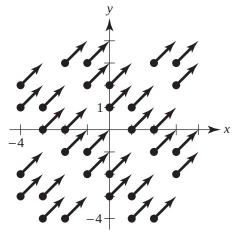
17. Los resultados no son los mismos. El teorema de Fubini no es válido porque f no es continua en la región $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

Capítulo 15

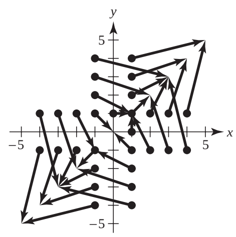
Sección 15.1 (página 1067)

1. *d* **2.** *c* **3.** *e* **4.** *b* **5.** *a* **6.** *f*

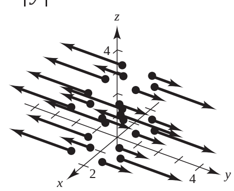
7. $\sqrt{2}$



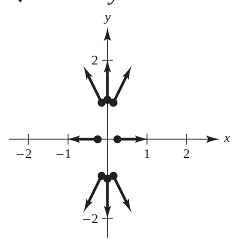
9. $\sqrt{x^2 + y^2}$



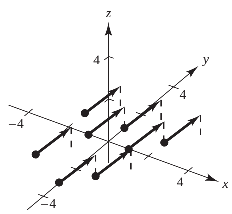
11. $3|y|$



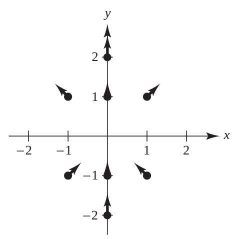
13. $\sqrt{16x^2 + y^2}$



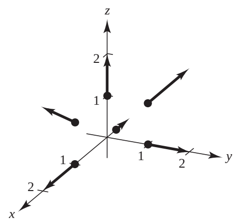
15. $\sqrt{3}$



17.



19.



21. $2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$

23. $(10x + 3y)\mathbf{i} + (3x + 2y)\mathbf{j}$ **25.** $6yz\mathbf{i} + 6xz\mathbf{j} + 6xy\mathbf{k}$

27. $2xye^{x^2}\mathbf{i} + e^{x^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

29. $[xy/(x + y) + y\ln(x + y)]\mathbf{i} + [xy/(x + y) + x\ln(x + y)]\mathbf{j}$

31 a 33. Demostraciones **35.** Conservativo porque $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$.

37. No conservativo porque $\partial N/\partial x \ne \partial M/\partial y$.

39. Conservativo: $f(x, y) = xy + K$

41. Conservativo: $f(x, y) = x^2y + K$

43. No conservativo **45.** No conservativo
47. Conservativo: $f(x, y) = e^x \cos y + K$ **49.** $4\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
51. $-2\mathbf{k}$ **53.** $2x/(x^2 + y^2)\mathbf{k}$
55. $\cos(y - z)\mathbf{i} + \cos(z - x)\mathbf{j} + \cos(x - y)\mathbf{k}$
57. Conservativo: $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2y^2z^2) + K$
59. No conserv ativo **61.** Conservativo: $f(x, y, z) = xz/y + K$
63. $2x + 4y$ **65.** $\cos x - \operatorname{sen} y + 2z$ **67.** 4 **69.** 0
71. Ver la "Definición de campo vectorial" en la página 1058. Algunos ejemplos físicos de campos vectoriales son los campos de velocidades, campos gravitacionales y campos de fuerza eléctrica.
73. Ver la "Definición del rotacional de un campo vectorial" en la página 1064.
75. $9x\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$ **77.** $z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ **79.** $3z + 2x$ **81.** 0
83 a 89. Demostraciones
91. $f(x, y, z) = \|\mathbf{F}(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\ln f = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$\nabla \ln f = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{j} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{k}$$
$$= \frac{\mathbf{F}}{f^2}$$

93. $f^n = \|\mathbf{F}(x, y, z)\|^n = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^n$

$$\nabla f^n = n\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^{n-1}\left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$
$$= nf^{n-2}\mathbf{F}$$

95. Verdadero
97. Falso. El rotacional de f sólo tiene significado para campos vectoriales, que consideran la dirección.

Sección 15.2 (página 1079)

1. $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, & 0 \le t \le 1 \\ (2 - t)\mathbf{i} + \sqrt{2 - t}\mathbf{j}, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$

3. $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i}, & 0 \le t \le 3 \\ 3\mathbf{i} + (t - 3)\mathbf{j}, & 3 \le t \le 6 \\ (9 - t)\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, & 6 \le t \le 9 \\ (12 - t)\mathbf{j}, & 9 \le t \le 12 \end{cases}$

5. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{j},\ \ 0 \le t \le 2\pi$ **7.** 20 **9.** $5\pi/2$
11. *a)* C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j},\ 0 \le t \le 1$ *b)* $2\sqrt{2}/3$
13. *a)* C: $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j},\ 0 \le t \le \pi/2$ *b)* $\pi/2$
15. *a)* C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i},\ 0 \le t \le 1$ *b)* $1/2$
17. *a)* C: $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i}, & 0 \le t \le 1 \\ (2 - t)\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}, & 1 \le t \le 2 \\ (3 - t)\mathbf{j}, & 2 \le t \le 3 \end{cases}$

b) $\frac{19}{6}\left(1 + \sqrt{2}\right)$

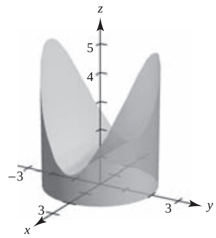
19. *a)* C: $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i}, & 0 \le t \le 1 \\ \mathbf{i} + t\mathbf{k}, & 0 \le t \le 1 \\ \mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}, & 0 \le t \le 1 \end{cases}$ *b)* $\frac{23}{6}$

21. $8\sqrt{5}\pi(1 + 4\pi^2/3) \approx 795.7$ **23.** 2
25. $(k/12)\left(41\sqrt{41} - 27\right)$ **27.** 1 **29.** $\frac{1}{2}$ **31.** $\frac{9}{4}$
33. ≈ 249.49 **35.** 66 **37.** 0 **39.** $-10\pi^2$
41. Positivo **43.** Cero
45. *a)* $\frac{236}{3}$; la orientación es de izquierda a derecha, así que el valor es positivo.
b) $-\frac{236}{3}$; la orientación es de derecha a izquierda, así que el valor es negativo.

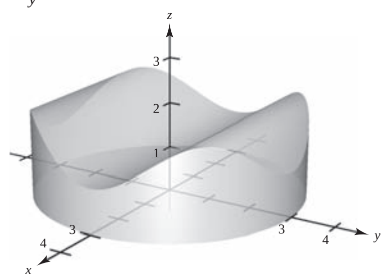
47. $\mathbf{F}(t) = -2t\mathbf{i} - t\mathbf{j}$
$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
$\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = -2t + 2t = 0$
$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

49. $\mathbf{F}(t) = (t^3 - 2t^2)\mathbf{i} + (t - t^2/2)\mathbf{j}$
$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$
$\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = t^3 - 2t^2 + 2t^2 - t^3 = 0$
$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

51. 1 010 **53.** $\frac{190}{3}$ **55.** 25 **57.** $\frac{63}{2}$ **59.** $-\frac{11}{6}$ **61.** $\frac{316}{3}$
63. $5h$ **65.** $\frac{1}{2}$ **67.** $(h/4)\left[2\sqrt{5} + \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right]$
69. $\frac{1}{120}\left(25\sqrt{5} - 11\right)$
71. *a)* $12\pi \approx 37.70\ \text{cm}^2$ *b)* $12\pi/5 \approx 7.54\ \text{cm}^3$
c)



73. $I_x = I_y = a^3\pi$
75. *a)*



b) $9\pi\ \text{cm}^2 \approx 28.274\ \text{cm}^2$
c) Volumen $= 2\int_0^3 2\sqrt{9 - y^2}\left[1 + 4\frac{y^2}{9}\left(1 - \frac{y^2}{9}\right)\right] dy$
$= 27\pi/2 \approx 42.412\ \text{cm}^3$

77. 1 750 pies-lb
79. Ver la "Definición de integral de línea" y el teorema 15.4, "Evaluación de una integral de línea como integral definida".
81. z_3, z_1, z_2, z_4; Entre más grande sea la altura de la superficie sobre la curva $y = \sqrt{x}$, más grande es el área de la superficie lateral.
83. Falso: $\int_C xy\, ds = \sqrt{2}\int_0^1 t^2\, dt.$
85. Falso: las orientaciones son diferentes. **87.** -12

Sección 15.3 (página 1090)

1. *a)* $\int_0^1 (t^2 + 2t^4)\, dt = \frac{11}{15}$
b) $\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + 2\operatorname{sen}^4\theta\cos\theta)\, d\theta = \frac{11}{15}$

3. *a)* $\int_0^{\pi/3} (\sec\theta\tan^2\theta - \sec^3\theta)\, d\theta \approx -1.317$
b) $\int_0^3 \left[\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t + 1}} - \frac{\sqrt{t + 1}}{2\sqrt{t}}\right] dt \approx -1.317$

5. Conservativo **7.** No conservativo **9.** Conservativo

11. *a*) 1 *b*) 1 **13.** *a*) 0 *b*) $-\frac{1}{3}$ *c*) $-\frac{1}{2}$

15. *a*) 64 *b*) 0 *c*) 0 *d*) 0 **17.** *a*) $\frac{64}{3}$ *b*) $\frac{64}{3}$

19. *a*) 32 *b*) 32 **21.** *a*) $\frac{2}{3}$ *b*) $\frac{17}{6}$ **23.** *a*) 0 *b*) 0

25. 72 **27.** -1 **29.** 0 **31.** *a*) 2 *b*) 2 *c*) 2

33. 11 **35.** 30 366 **37.** 0

39. *a*) $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} - \mathbf{j})\,dt \Longrightarrow \int_0^{50} 175\,dt = 8\,750$ pies-lb

b) $d\mathbf{r} = \left(\mathbf{i} - \frac{1}{25}(50 - t)\mathbf{j}\right) dt \Longrightarrow 7\int_0^{50} (50 - t)\,dt$

$= 8\,750$ pies-lb

41. Ver teorema 15.5, “Teorema fundamental de las integrales de línea” en la página 1084.

43. *a*) 2π *b*) 2π *c*) -2π *d*) 0

45. Sí, porque el trabajo necesario para ir de un punto a otro es independiente de la trayectoria seguida.

47. Falso. Sería verdadero si **F** fuera conservativo.

49. Verdadero **51.** Demostración

53. *a*) Demostración *b*) $-\pi$ *c*) π

d) -2π; no contradice el teorema 15.7 porque **F** no es continuo en (0, 0) en la región *R* encerrada por *C*.

e) $\nabla\left(\arctan\frac{x}{y}\right) = \frac{1/y}{1 + (x/y)^2}\,\mathbf{i} + \frac{-x/y^2}{1 + (x/y)^2}\,\mathbf{j}$

Sección 15.4 (página 1099)

1. $\frac{1}{30}$ **3.** 0 **5.** ≈ 19.99 **7.** $\frac{9}{2}$ **9.** 56 **11.** $\frac{4}{3}$ **13.** 0

15. 0 **17.** $\frac{1}{12}$ **19.** 32π **21.** π **23.** $\frac{225}{2}$ **25.** πa^2 **27.** $\frac{9}{2}$

29. Ver teorema 15.8 en la página 1093. **31.** Demostración

33. $\left(0, \frac{8}{5}\right)$

35. $\left(\frac{8}{15}, \frac{8}{21}\right)$ **37.** $3\pi a^2/2$ **39.** $\pi - 3\sqrt{3}/2$

41. *a*) $51\pi/2$ *b*) $243\pi/2$

43. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C M\,dx + N\,dy = \int_R\int\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = 0;$

$I = -2\pi$ cuando *C* es un círculo que contiene al origen.

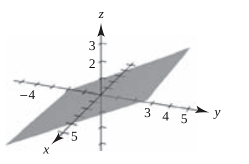
45. $\frac{19}{2}$ **47 a 49.** Demostraciones

Sección 15.5 (página 1109)

1. *e* **2.** *f* **3.** *b* **4.** *a* **5.** *d* **6.** *c*

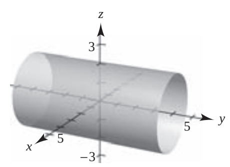
7. $y - 2z = 0$

Plano

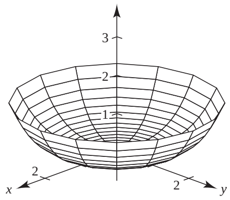


9. $x^2 + z^2 = 4$

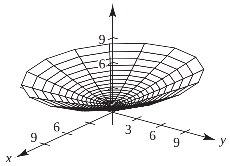
Cilindro



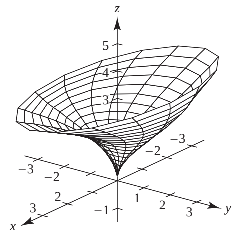
11.



13.



15.



17. El paraboloide se refleja (invertido) en el plano *xy*.

19. La altura del paraboloide aumenta de 4 a 9.

21. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$

23. $\mathbf{r}(u, v) = \frac{1}{2}u\cos v\mathbf{i} + u\mathbf{j} + \frac{1}{3}u\,\mathrm{sen}\,v\mathbf{k},\ u \geq 0,\ 0 \leq v \leq 2\pi$ o $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + \sqrt{4x^2 + 9y^2}\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

25. $\mathbf{r}(u, v) = 5\cos u\mathbf{i} + 5\,\mathrm{sen}\,u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$

27. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$

29. $\mathbf{r}(u, v) = v\cos u\mathbf{i} + v\,\mathrm{sen}\,u\mathbf{j} + 4\mathbf{k},\quad 0 \leq v \leq 3$

31. $x = u, y = \frac{u}{2}\cos v, z = \frac{u}{2}\,\mathrm{sen}\,v,\quad 0 \leq u \leq 6, 0 \leq v \leq 2\pi$

33. $x = \mathrm{sen}\,u\cos v, y = \mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v, z = u$

$0 \leq u \leq \pi,\ 0 \leq v \leq 2\pi$

35. $x - y - 2z = 0$ **37.** $4y - 3z = 12$ **39.** $8\sqrt{2}$

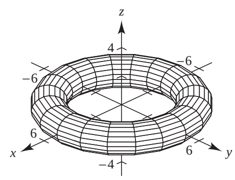
41. $2\pi ab$ **43.** $\pi ab^2\sqrt{a^2 + 1}$

45. $(\pi/6)\left(17\sqrt{17} - 1\right) \approx 36.177$

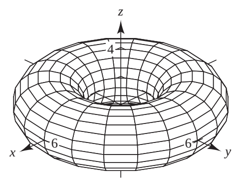
47. Ver la “Definición de superficie paramétrica” en la página 1102.

49 a 51. Demostraciones

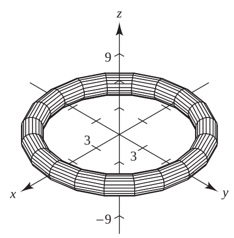
53. *a*)



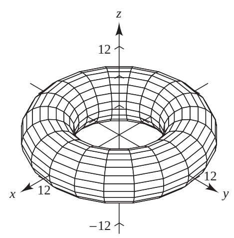
b)



c)



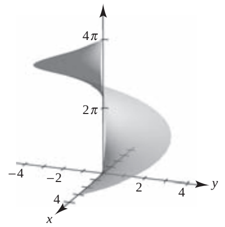
d)



El radio del círculo generador que es girado en torno al eje *z* es *b*, y su centro está a *a* unidades del eje de revolución.

55. 400π m^2

57.

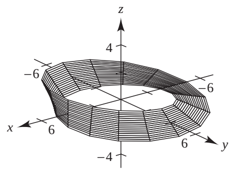


$2\pi\left[\frac{3}{2}\sqrt{13} + 2\ln\left(3 + \sqrt{13}\right) - 2\ln 2\right]$

59. Las respuestas varían. Ejemplo de respuesta: Sea
$x = (2 - u)(5 + \cos v) \cos 3\pi u$
$y = (2 - u)(5 + \cos v) \operatorname{sen} 3\pi u$
$z = 5u + (2 - u) \operatorname{sen} v$
donde $-\pi \le u \le \pi$ y $-\pi \le v \le \pi$.

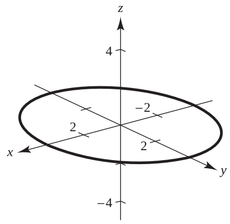
Sección 15.6 (página 1122)

1. $12\sqrt{2}$ **3.** 2π **5.** $27\sqrt{3}/8$ **7.** $\left(391\sqrt{17} + 1\right)/240$
9. ≈ -11.47 **11.** $\frac{364}{3}$ **13.** $12\sqrt{5}$ **15.** 8 **17.** $\sqrt{3}\pi$
19. $32\pi/3$ **21.** 486π **23.** $-\frac{4}{3}$ **25.** $3\pi/2$ **27.** 20π
29. 384π **31.** 0 **33.** Demostración **35.** $2\pi a^3 h$ **37.** $64\pi\rho$
39. Ver el teorema 15.10, "Cálculo de integral de superficie" en la página 1112.
41. Ver la "Definición de la integral de flujo" en la página 1118; ver el teorema 15.11, "Cálculo de integral de flujo" en la página 1118.
43. *a*)



b) Si un vector normal a un punto P sobre una superficie se mueve alrededor de la banda de Möbius, éste apuntará en la dirección opuesta.

c)



Círculo

d) Construcción
e) Una banda con doble vuelta y doble longitud que la banda de Möbius.

Sección 15.7 (página 1130)

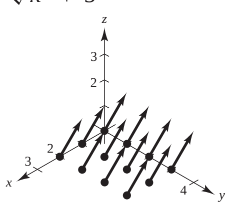
1. a^4 **3.** 18 **5.** π **7.** $3a^4$ **9.** 0 **11.** 108π
13. 0 **15.** 2 304 **17.** $1\,024\pi/3$ **19.** 0
21. Ver teorema 15.12, "El teorema de la divergencia" en la página 1124. **23 a 29.** Demostraciones

Sección 15.8 (página 1137)

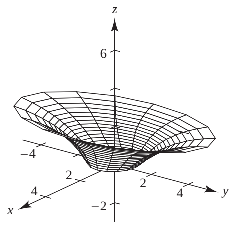
1. $(xz - e^z)\mathbf{i} - (yz + 1)\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ **3.** $\left[2 - 1/(1 + x^2)\right]\mathbf{j} - 8x\mathbf{k}$
5. $z(x - 2e^{y^2+z^2})\mathbf{i} - yz\mathbf{j} - 2ye^{x^2+y^2}\mathbf{k}$ **7.** 18π **9.** 0
11. -12 **13.** 2π **15.** 0 **17.** $\frac{8}{3}$ **19.** $a^5/4$ **21.** 0
23. Ver el teorema 15.13, "El teorema de Stokes" en la página 1132.
25 a 27. Demostraciones **29.** Problema Putnam A5, 1987

Ejercicios de repaso para el capítulo 15 (página 1138)

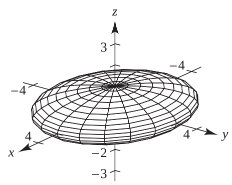
1. $\sqrt{x^2 + 5}$



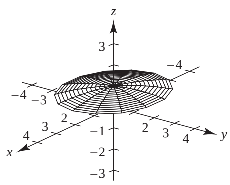
3. $(4x + y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$
5. Conservativo: $f(x, y) = y/x + K$
7. Conservativo: $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + K$
9. No conservativo **11.** Conservativo: $f(x, y, z) = x/(yz) + K$
13. *a*) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x + 2xy + x^2$ *b*) $\operatorname{rot} \mathbf{F} = -2xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
15. *a*) $\operatorname{div} \mathbf{F} = -y \operatorname{sen} x - x \cos y + xy$
b) $\operatorname{rot} \mathbf{F} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j}$
17. *a*) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1/\sqrt{1 - x^2} + 2xy + 2yz$
b) $\operatorname{rot} \mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{k}$
19. *a*) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \dfrac{2x + 2y}{x^2 + y^2} + 1$
b) $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \dfrac{2x - 2y}{x^2 + y^2}\mathbf{k}$
21. *a*) $\frac{125}{3}$ *b*) 2π **23.** 6π **25.** *a*) 18 *b*) 18π
27. $9a^2/5$ **29.** $\left(\sqrt{5}/3\right)(19 - \cos 6) \approx 13.446$ **31.** 1
33. $2\pi^2$ **35.** 36 **37.** $\frac{4}{3}$ **39.** $\frac{8}{3}\left(3 - 4\sqrt{2}\right) \approx -7.085$
41. 6 **43.** *a*) 15 *b*) 15 *c*) 15
45. 1 **47.** 0 **49.** 0
51.



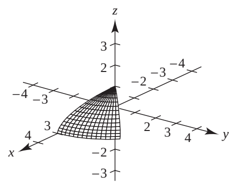
53. *a*)



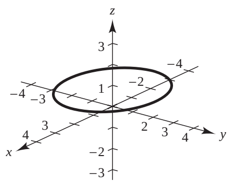
b)



c)

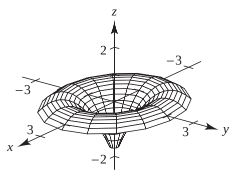


d)



Círculo

e) ≈ 14.436 *f*) ≈ 4.269
55.



0
57. 66 **59.** $2a^6/5$ **61.** Demostración

SP Solución de problemas (página 1141)

1. *a*) $\left(25\sqrt{2}/6\right)k\pi$ *b*) $\left(25\sqrt{2}/6\right)k\pi$
3. $I_x = \left(\sqrt{13}\pi/3\right)(27 + 32\pi^2)$; $I_y = \left(\sqrt{13}\pi/3\right)(27 + 32\pi^2)$;
$I_z = 18\sqrt{13}\pi$
5. Demostración **7.** $3a^2\pi$ **9.** *a*) 1 *b*) $\frac{13}{15}$ *c*) $\frac{5}{2}$
11. Demostración
13. $M = 3mxy(x^2 + y^2)^{-5/2}$
$\partial M/\partial y = 3mx(x^2 - 4y^2)/(x^2 + y^2)^{7/2}$
$N = m(2y^2 - x^2)(x^2 + y^2)^{-5/2}$
$\partial N/\partial x = 3mx(x^2 - 4y^2)/(x^2 + y^2)^{7/2}$
Por lo tanto, $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$ y $\mathbf{F}$ es conservativo.

Índice analítico

¡*Cálculo* de Larson cumple 35 años de ser el clásico!

A 35 años de su primera edición, *Cálculo* de Larson ha evolucionado gracias a sus lectores.

Lo más destacable en esta novena edición es:

- Conjuntos de ejercicios de una amplia variedad de problemas como: desarrollo de habilidades, aplicaciones, exploración, ejercicios escritos, ejercicios de pensamiento crítico y problemas teóricos.
- Abundantes aplicaciones de la vida real que representan con precisión los distintos usos del cálculo.
- Investigaciones y actividades abiertas.
- Exposición de conceptos comprensible y con gran rigor matemático.
- Uso de tecnología aplicada a la solución de problemas.
- Referencias a la historia del cálculo y a los matemáticos que contribuyeron a su desarrollo.

McGraw Hill Educación

The McGraw·Hill Companies

978-607-15-0361-9

EAN 9786071503619 00000