Ventajas de una metodología de enseñanza mediada por Jupyter Notebook y Geogebra para el trabajo interactivo en la educación matemática

Marco Julio Cañas Campillo
Yuber Hernany Tapias Arboleda
Universidad de Antioquia
Colombia

En este trabajo presentamos la reflexión sobre las ventajas de una metodología de enseñanza, mediada por Jupyter Notebook y GeoGebra, que permite el trabajo interactivo, el desarrollo de la capacidad argumentativa, la edición científica y la comunicación de aprendizajes en la educación matemática de nivel superior. Se caracterizan algunas las habilidades cognitivas asociadas a la argumentación y la comunicación y se presentan dos ejemplos de aplicación de la propuesta en geometría y aritmética. Estas habilidades cognitivas determinan una metodología de enseñanza y aprendizaje desarrollada e implementada por los autores para el desarrollo de competencias argumentativas y comunicativas.

1. INTRODUCCIÓN

Existe una gran dificultad para redactar textos científicos en nuestros estudiantes universitarios sobre todo en los textos en los que deben presentar un argumento estructurado donde deben desarrollar una idea siguiendo una *línea deductiva*. Sobre todo, cuando en los textos científicos hay que conjugar el lenguaje simbólico matemático, el lenguaje verbal y los textos gráficos. Este problema se extiende hasta semestres avanzados de la formación profesional de los estudiantes en la Universidad de Antioquia.

Para contribuir a la solución de este problema, se *identifican*, en esta propuesta, algunas actividades cognitivas que contribuyen al desarrollo de la capacidad para escribir y comunicar un argumento que siga una *línea deductiva* justificada o sustentada. *Describimos* las características y potencialidades de Jupyter Notebook y de GeoGebra para el desarrollo de las habilidades para argumentar y comunicar conocimiento adquirido en la formación profesional.

Luego seguimos con la presentación de un método apropiado, de enseñanza y aprendizaje, para el desarrollo de las capacidades argumentativas y comunicativas cuando se escriben y presentan argumentos de solución de problemas de enunciado verbal en la formación matemática profesional. Para finalizar presentando con dos *ejemplos* de aplicación de esta propuesta y las conclusiones a las que llegamos con la implementación de esta propuesta en el aula de clases.

2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 Identificación de algunas actividades cognitivas

Las actividades cognitivas que contribuyen al desarrollo de las capacidades de escritura y comunicación de textos argumentativos en esta propuesta son:

- *Definir:* identificar y describir los elementos esenciales que distinguen a una entidad matemática de las demás y representar el objeto matemático al menos con tres de sus registros semióticos a saber: registro numérico, registro geométrico y registro algebraico (Duval, 2006). Esta actividad implica el esfuerzo de caracterizar el objeto, es decir, establecer las propiedades mínimas que lo distinguen. Además, realizar esta actividad cognitiva sugiere el camino de representación, solución y argumentación del problema que el estudiante esté resolviendo. Por ejemplo, definir el concepto de distancia de un punto a una recta, sugiere que para encontrar esta distancia se debe trazar la recta perpendicular a la recta dada que pasa por el punto dado P, luego debo determinar el punto de intersección de estas rectas y después calcular la distancia entre el punto dado y el punto de intersección P'. Ejemplo: Una esfera es definida por su centro y su radio o por su centro y un punto de ella.

- *Ejemplificar:* consiste en la capacidad de construir representantes particulares de un concepto o noción matemática. Por ejemplo, realizar el proceso de deducción de un ejemplo de una esfera tangente a plano.

- *Establecer conjeturas*: Se refiere al proceso cognitivo de reconocimiento y codificación, de manera implicativa, de un comportamiento o relación. Por ejemplo: cuando el estudiante observa las rectas tangentes a circunferencias y enuncia, de manera oral y escrita, que el ser tangentes implica la perpendicularidad del segmento radial al punto de tangencia y de la recta tangente.

- *Hablar o comunicar con fluidez*: Consiste en la actividad de solucionar un mismo problema por diferentes caminos. Ejemplo: Cuando determinamos el radio r de una esfera de centro dado P tangente a un plano dado primero, utilizando el concepto de proyección de un vector sobre otro. Y segundo, resolviendo el problema utilizando el concepto de distancia de un punto a un plano. Un indicador de fluidez en la comunicación coloquial es el uso de sinónimos. En educación matemática la fluidez puede ser entendida como la capacidad de presentar en su discurso múltiples caminos de solución.

- *Verificar*: es la actividad cognitiva de establecer consistencia de los resultados con las hipótesis del problema y la teoría relacionada. Ejemplo: trazar la esfera, en la vista 3D de GeoGebra, con el radio deducido y observar si efectivamente es tangente al plano dado.

Hemos definido cada una de estas actividades de acuerdo a su relación con el desarrollo de las capacidades de argumentación y comunicación

2.2 Descripción de potencialidades de Los cuadernos Jupyter Notebook para el desarrollo de la argumentación y la comunicación

En educación superior aún en la actualidad, no es muy popular el uso de entornos de desarrollo integrado tipo Jupyter Notebooks, que permitan edición sincronizada de expresiones matemáticas con alta calidad tipográfica dada por LaTeX y de expresiones o instrucciones propias de un lenguaje de programación como Python (Díaz Y Cabrera, 2018). Un Jupyter Notebook es una secuencia de celdas, compuesta por celdas de texto y las celdas de código. En las celdas de texto se puede usar lenguaje Markdown y LaTeX, lo que supone una ventaja grande sobre otros editores de texto científico que no gozan de la virtud de transitar con facilidad a formatos digitales de páginas web. La siguiente es una lista corta de algunas de las virtudes de los cuadernos Jupyter Notebook que aportan a la edición y comunicación científica de argumentos:

1. *Líneas de texto,* donde:

    - para crear encabezados se inicializa con el carácter numeral #
    - para escribir texto en negrilla se delimita el texto a resaltar con doble asterisco ** **
    - para escribir letra cursiva o itálica se delimita en texto con asterisco: * *
    - para escribir ecuaciones en la línea de texto se delimita a éstas con signos de pesos: $ <Ecuación> $
    - para escribir ecuaciones centradas fuera de la línea de texto se delimita a estas con doble signo de pesos: $$ <Ecuación> $$

2. *Líneas de código:* sirven para definir entidades matemáticas, obtener atributos de ellas, realizar cálculos y elaborar gráficos. El aprender a codificar procedimientos permite centrar la enseñanza en la resolución de problemas de una manera sistematizada, organizada y siguiendo metodologías de trabajo y dejar de lado los tediosos procedimientos algorítmicos que distraen al estudiante de los objetivos generales de formación o educación al quitarle demasiado tiempo.
3. *La aplicación Rise*: la cual es un complemento de Jupyter Notebooks, sirve para convertir texto científico en presentación en diapositivas y ahorrar el tiempo de elaboración de presentaciones en Powerpoint o Prezi; ya que esta toma el texto editado y convierte cada celda en una diapositiva.
4. *Exportar el texto científico como página web* o archivo de extensión html para facilitar el compartir de los textos o de información científica a través de internet al poder consignar a esta en un lugar o página gratuita de la red.
5. *Exportar en PDF* para facilitar la publicación de los textos en ámbitos científicos.

2.3 Potencialidades de los sistemas de representación y sistematización de GeoGebra para el desarrollo de la argumentación y la comunicación

- *Vista algebraica*: Presenta, de manera instantánea, las representaciones algebraicas de todas las entidades geométricas que se tracen en 2 o 3 dimensiones.
- *Vista gráfica 2D*: Es un espacio interactivo de trazado de puntos, rectas, polígonos, etc., de una manera dinámica y articulada con la vista algebraica
- *Vista gráfica 3D*: Es un espacio coordenado que permite la visualización y el razonamiento con entidades geométricas como esferas, cubos, conos, etc.
- *Protocolo de construcción:* Construye una secuencia lógica, grabada y que puede ser reproducida, de los pasos seguidos en la solución de un problema geométrico con las herramientas de GeoGebra.
- *Hoja de cálculo*: Permite realizar análisis numérico de manera análoga a las hojas de cálculo de Excel, pero con la mejora de que esta hoja de cálculo se articula con las vistas gráficas.
- *Entrada algebraica:* Permite trazar entidades geométricas de dos y tres dimensiones ingresando el nombre del comando y argumentos del mismo o ingresando la representación algebraica de la entidad geométrica.

En la Figura1 se muestra los diferentes sistemas de representación geométrica de GeoGebra.

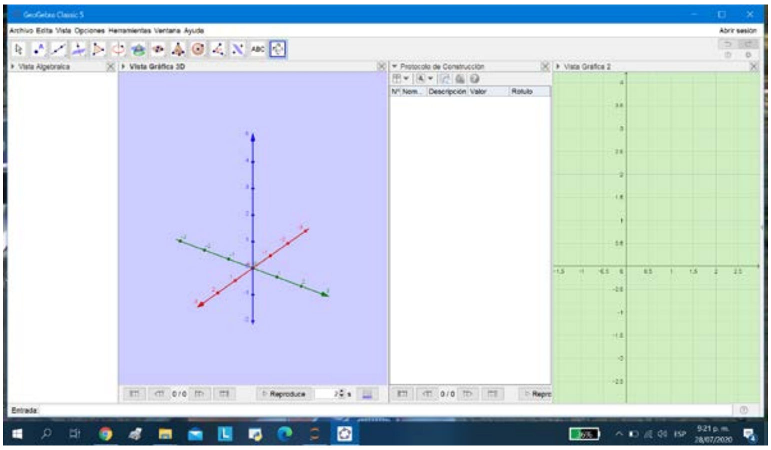


Figura 1. Vista algebraica, vista gráfica 2D, vista gráfica 3D, protocolo de construcción y entrada algebraica de GeoGebra

3. MÉTODO PROPUESTO

La siguiente es la secuencia implementada por los autores para la enseñanza y el aprendizaje de la solución de problemas de enunciado verbal:

- *Planteamiento de problemas:* presentar un problema requiere del uso de enunciados verbales, enunciados simbólicos implicativos, tablas y gráficos y para ello los Jupyter Notebook tienen las siguientes funcionalidades en su orden respectivo: Edición con Markdown y LaTeX, matplotlib y sympy.geometry.
- *Definir los conceptos* desconocidos presentes en el problema: redactar su propia definición o ejemplificar las definiciones consultadas.
- *Interpretación del problema:* describir el problema utilizando diversas representaciones: representaciones algebraicas, geométricas o numéricas dadas por GeoGebra o en cuadernos Jupyter Notebook.
- *Elaboración de plan de solución:* Deducción de un algoritmo justificado de solución.
- *Llevar a cabo el plan* de solución utilizando sólo herramientas o funciones proporcionadas por Python o GeoGebra. (uso de las librerías numpy, sympy, matplotlib y pandas). Estas herramientas liberan a la enseñanza de la costumbre de enfocarse en la enseñanza de procedimientos algorítmicos, para privilegiar el desarrollo de las competencias de argumentación y comunicación tan necesarias por los futuros profesionales de nuestras universidades.
- *Solución analítica con el modelo de afirmación razón:* Llevar a cabo la solución del problema, de manera tradicional realizando los cálculos manuales. (Edición con Markdown). Así, los procedimientos algorítmicos se convierten en procedimientos de fijación de conceptos y comprobación de las estrategias, métodos y deducciones realizadas previamente; y no en el fin mismo de la formación matemática.
- *Deducir y ejecutar el procedimiento de verificación apropiado:* para esta investigación, verificar no significa revisar si los cálculos numéricos son correctos o no, sino que significa sustituir el valor numérico encontrado en la ecuación que modela el problema para ver si se obtiene una identidad, o solucionar por un camino diferente el mismo problema y ver si se encuentran soluciones equivalentes o iguales.

Así pues, realizar los procesos de verificación para nosotros requiere el discernimiento o deducción, para cada problema, el tipo de procedimiento o procedimientos de verificación necesarios y/o aplicables. El siguiente vínculo muestra un ejemplo de solución de un problema deducido en GeoGebra: https://www.youtube.com/watch?v =DUeTI1wJM50&t=25s&ab_channel=MARCOJULIOCA%C3%91ASCAMPILLO.

3.1 Ejemplos de aplicación del método

Para el desarrollo de la capacidad de argumentar y comunicar conocimiento geométrico con Jupyter Notebook, Python, Sympy y matplotlib, será más importante que en educación superior centremos nuestros esfuerzos en el desarrollo del pensamiento lógico, deductivo, *argumentativo y comunicativo.* No le pidamos a los estudiantes, en primera instancia, la realización de cálculos, sino la realización de un plan de solución. Sympy. geometry permite resolver los problemas geométricos siguiendo el plan sin detenerse en procesos algorítmicos. Lo que requiere este módulo de Sympy es la escritura de los códigos apropiados para que el software realice los cálculos y entregue las respuestas. Los ejemplos de aplicación que presentaremos en este trabajo son:

1. Determine el radio r de una esfera con centro en $P = (0,-1,1)$ y tangente al plano $2x - 3y + 4z = -4$.
2. Muestre que la siguiente conjetura de Goldbach es falsa: *Todo impar compuesto es suma de un número primo y el doble de un cuadrado perfecto.*

3.1.1 Aplicación a un problema de enunciado verbal

Determinación del radio r de una esfera E de centro dado P y que es tangente a un plano π dado. Donde $P = (0,-1,1)$ es el centro de una esfera E de radio r y $\pi = 2x - 3y + 4z = -4$ un plano tangente a dicha esfera.

Solucionemos este problema siguiendo el método propuesto o Secuencia didáctica de solución de problemas matemáticos de enunciado verbal. Empecemos con la *Identificación y definición de conceptos desconocidos,* para ello recolectamos en la siguiente tabla algunos de los conceptos asociados al problema y que en general son desconocidos para el estudiante o son de difícil definición.

Tabla 1. Conceptos desconocidos

Entidad geométrica	Punto en el plano y en el espacio	Recta en el plano y en el espacio	Plano	Circunferencia y esfera
Representación algebraica	Punto en el plano y punto en el espacio	Ecuaciones vectoriales, cartesianas, simétricas y paramétricas	Ecuaciones vectoriales, cartesianas y paramétricas	Ecuaciones canónicas
Distancia	Distancia entre puntos en el plano y el espacio	Distancia entre punto y recta en el plano y en el espacio	Distancia entre punto y plano	
Proyección		Punto sobre recta y de punto sobre segmento	De punto sobre plano	De un vector sobre otro

Seguimos con la *interpretación del problema o descripción de la solución del problema geométrico en GeoGebra.* Solucionar en GeoGebra desarrolla la capacidad de construir líneas de razonamiento, esto se hace utilizando la función *protocolo de construcción.* Como la visualización de perpendicularidad entre entidades geométricas no es tan fácil en el espacio, es por ello que se empieza solucionando el problema asociado en el plano, es decir, ya no consideramos una esfera tangente sino una circunferencia tangente, y ya no consideramos un plano tangente sino una recta tangente.

Resolver el problema análogo en el plano: Esto permite que el estudiante se convenza de la perpendicularidad entre segmento radial y recta tangente y extrapole este resultado al contexto del espacio, es decir, a la perpendicularidad entre segmento radial y plano tangente, ya que la visualización de ciertos hechos en el espacio es muy difícil. En la Figura 2 se muestra la descripción del problema análogo en el contexto del plano. Mientras que la Figura 3 muestra la secuencia de trazado de la esfera y el plano tangente: Esta secuencia es precisamente el protocolo de construcción que GeoGebra crea a medida que el estudiante traza las entidades geométricas.

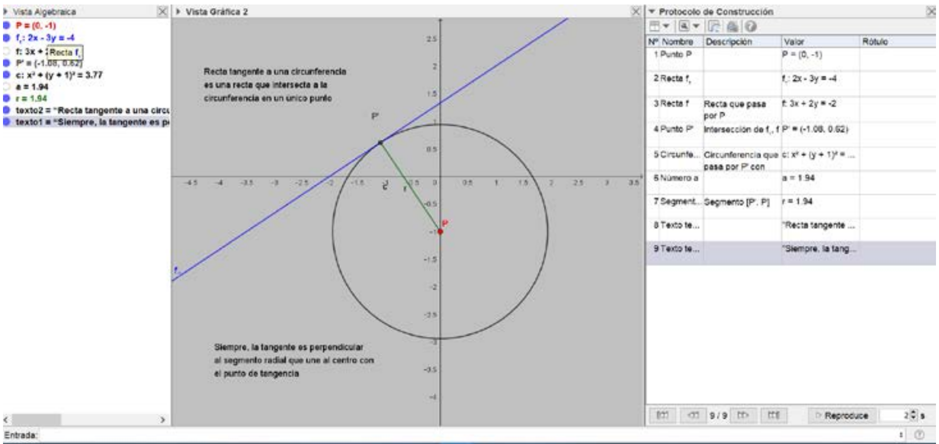


Figura 2. Secuencia geométrica de solución del problema que se puede describir gracias al protocolo de construcción

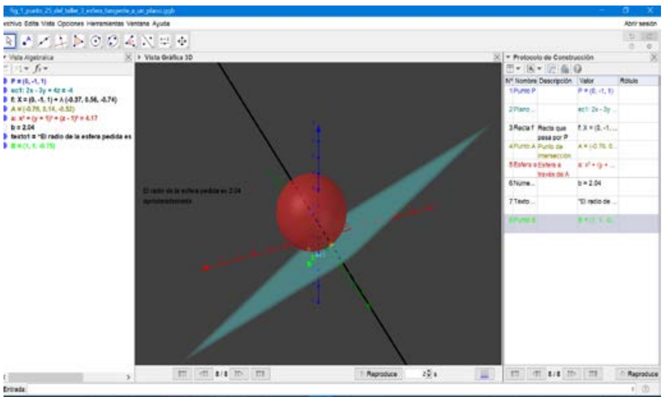


Figura 3. Captura de cuaderno Jupyter propuesto. El protocolo de construcción de la derecha permite describir de manera deductiva la solución del problema

Después del proceso de interpretación gráfica del problema, continuamos con la *elaboración del plan de solución en un Jupyter Notebook,* como se observa en la Figura 4, que muestra las dos primeras líneas codificadas que corresponden al planteamiento del problema. Y en la Figura 5 se muestra la edición final cuando se ha pedido al programa el correr las líneas codificadas.

Figura 4. Captura de cuaderno Jupyter propuesto

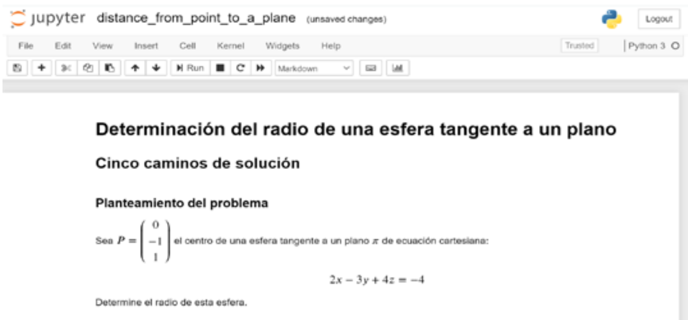


Figura 5. Captura de cuaderno Jupyter propuesto

Las Figuras 6 y 7 presentan un camino de solución editado, codificado y ejecutado en Jupyter Notebook.

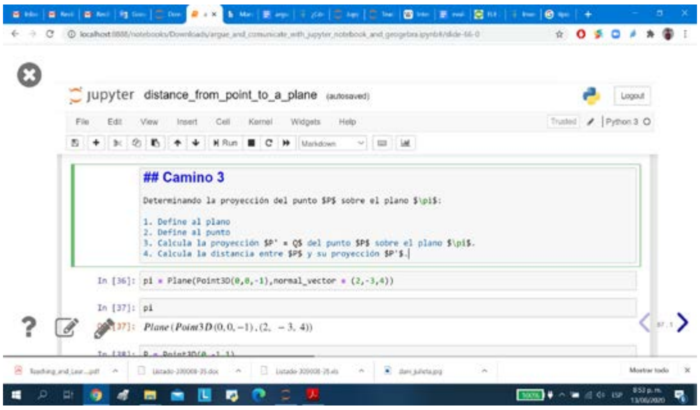


Figura 6. Captura de cuaderno Jupyter propuesto. Enumeración de la secuencia de solución del problema geométrico de determinación del radio de una esfera tangente

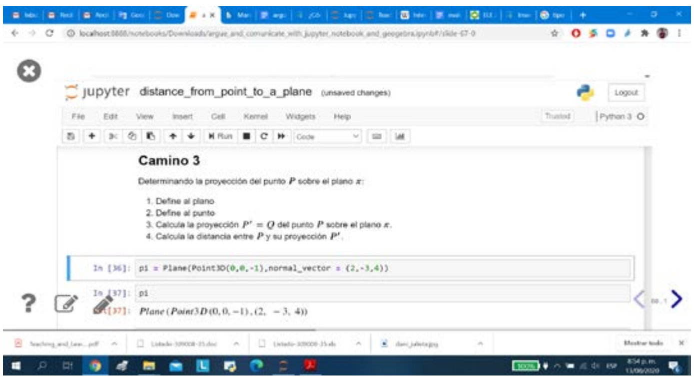


Figura 7. Captura de cuaderno Jupyter propuesto

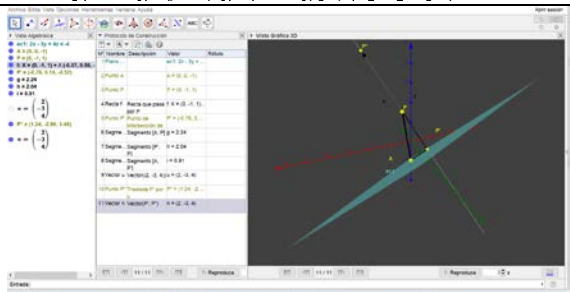
Notemos que el cuaderno Jupyter resalta la estrategia de solución, la función que resuelve, el problema matemático a resolver y la solución sin mostrar cálculos. Lo que proporciona protagonismo a la búsqueda de estrategias de solución, no a los cálculos algorítmicos tediosos y distractores.

La *solución analítica del problema* la realizaremos bajo el modelo argumentativo de afirmación - razón. Este es el usual procedimiento con alto componente algorítmico pero que, con la estrategia de fomento de la argumentación y la comunicación, la presentación es en tabla de dos columnas: una columna para afirmaciones y la otra para justificaciones respectivas. Esta solución está compuesta por tres fases:

1. Determine un punto arbitrario A del plano.
2. Determine la proyección de P sobre π.
3. Calcule la distancia de P a su proyección P'.

En la Tabla 2 se presenta el modelo de resolución de problemas denominado *afirmación - razón.* En él seguimos las fases de solución anteriores.

Tabla 2. Solución analítica del problema bajo el modelo de afirmación - razón

Fase	Afirmaciones y cálculos	Justificaciones basadas en definiciones y teoremas
1	Determinemos un punto arbitrario A del plano π $z = \frac{1}{4}(3y - 2x - 4)$ elegimos dos números arbitrarios x y y. Por ejemplo $x = 0 = y$. Entonces, la tercera coordenada del punto A es $z = \frac{1}{4}(3(0) - 2(0) - 4) = -1$ POr lo tanto, $A = (0,0,-1)$es un punto arbitrario del plano dado.	Expresamos a π como una función de dos variables $z = f(x,y)$ Entonces $f(0,0) = -1$ Luego $A = (x,y,z) = (x,y,f(x,y)) = (0,0,-1)$
2	Determinación del vector AP Este vector es la diferencia de los vectores P y A. $AP = P - A = (0,-1,1) - (0,0,-1)$ $AP = (0,-1,2)$	Por lo tanto: $\overrightarrow{AP}$ es un vector que no es paralelo al plano, por estar definido por un punto del plano y un punto exterior a él.
3	Determinación de un vector n normal al plano. Como la ecuación cartesiana del plano π es: $2x - 3y + 4z = -4$, entonces $n = (2,-3,4)$	Como un plano puede ser definido o caracterizado por un punto A y un vector n normal a él, entonces: $\underline{AX} \cdot n = 0$ $[(x - x_0),(y - y_0),(z - z_0)] \setminus (n_1, n_2, n_3 \ ) = 0$
4	Tracemos una recta l perpendicular al plano πque contenga al punto. Denotemos con P' al punto intersección entre el plano y la recta. Tracemos un segmento orientado con punto inicial en P' que represente el vector $\vec{n}$	 Visualizar en el espacio es difícil y para determinar intersecciones entre entidades geométricas, a veces genera problemas en GeoGebra y es necesario buscar estas intersecciones por diversos caminos disponibles por el software.
5	La magnitud de la proyección de $\overrightarrow{AP}$ sobre $\vec{n}$ es $\lvert proy_{AP/n}\rvert = \frac{\lvert\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}\rvert}{\sqrt{\lvert\vec{n}\rvert}}$ $\lvert\ proy_{AP/n}\ \rvert = \frac{(0,-1,2)\cdot(2,-3,4)}{\sqrt{(2,-3,4)\cdot(2,-3,4)}}$ $\lvert proy_{AP/n}\rvert = \frac{3+8}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{11}{\sqrt{29}} = \frac{11\sqrt{29}}{29} \approx 2.04$	$proy_{AP/n} = \frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n}$ y $\lvert\vec{n}\rvert = \sqrt{n \cdot n}$

Aquí aplicamos en la enseñanza la búsqueda del aprendizaje o interpretación de la verificación como solución por camino alternativo para chequear la coincidencia, equivalencia o consistencia (Figuras 8 y 9). También para el desarrollo de las capacidades de comunicar conocimiento adquirido se pide a los estudiantes generar un video creado en zoom y asistido por el protocolo de GeoGebra (utilizando el modo de reproducción de este protocolo) y la aplicación Rise de Jupyter Notebook que genera las dispositivas. Con publicación en canal de Youtube. Este es un elemento clave en el desarrollo de la capacidad comunicativa.

Figura 8. Captura de cuaderno Jupyter propuesto

Figura 9. Captura de cuaderno Jupyter propuesto

3.1.2 Argumentar y Comunicar usando Jupyter Notebooks

Tomaremos como referencia las conjeturas de Goldbach para ilustrar la manera en la que se pueden usar los Jupyter Notebooks como herramientas para argumentar y comunicar en el contexto de la edición de textos científicos en educación superior. Reconocemos nuestro trabajo en el marco de revoluciones metodológicas, didácticas y de contenido, puesto que la transformación de la práctica docente mediada por la creación de Jupyter Notebooks, supone un cambio en las formas de comunicar conjeturas, validaciones y refutaciones; lo que posteriormente promueve el estudio de una mayor cantidad de contenidos matemáticos aprovechando la ventaja que otorga el hecho de que los cálculos se hacen con el computador. A continuación, pretendemos dar un contexto histórico al problema que desarrollaremos haciendo uso de un Jupyter Notebook. Dicho problema reviste una relativa complejidad dado que exige grandes cantidades de cómputo.

Christian Goldbach (1690-1764) fue un matemático e historiador que conoció a Leibniz, Daniel Bernoulli y al gran genio matemático Leonard Euler. En la correspondencia que Goldbach sostuvo con Euler en el año de 1742, se encuentra la siguiente conjetura: *Los números pares mayores que 2 se pueden representar como la suma de dos números primos.* Leonard Euler no pudo demostrar ni refutar dicha afirmación. Este antecedente es altamente significativo para la comunidad de matemáticos, dado que Leonard Euler goza de una merecida fama en la que es reconocido como uno de los genios matemáticos que con facilidad desarrollaba cálculos mentales exigentes. Y tal es el nivel de exigencia de la conjetura de Goldbach que hoy, cerca de 300 años después no se logra concluir si dicha afirmación es cierta y no se ha logrado encontrar un contraejemplo haciendo uso de los computadores.

Otra conjetura de Goldbach es la siguiente: *Todo número impar mayor que 5 puede escribirse como la suma de tres números primos.* Esta última, fue resuelta en el 2013 por Harald A. Helfgott, cuyo argumento está separado en dos partes. Helfgott hace uso del computador para verificar la conjetura para cada impar menor que 10^{30}. Por otro lado, hace la demostración para impares mayores que dicho valor. Lo anterior, nos puede parecer en la actualidad algo natural, pero en el pasado la comunidad académica de matemáticos evitaba argumentos en los cuales estuvieran presentes verificaciones de un número alto de casos particulares y la prueba de Helfgott nos sirve como punto de referencia para reconocer que, en nuestros días no hay problemas en popularizar la creación de cadenas de argumentación usando los computadores.

Una última conjetura de Goldbach que pondremos en consideración es la siguiente: *Todo impar compuesto es suma de un número primo y el doble de un cuadrado perfecto.* Dos ejemplos de este hecho son:

$$9 = 7 + 2(1)^2 \, y \, 25 = 7 + 2(3)^2$$

Esta tercera conjetura será analizada paso a paso con el objetivo de resaltar las bondades que ofrecen los Jupyter Notebooks. *Para la identificación y definición de los conceptos desconocidos asociados al problema de Goldbach* hay un problema fundamental y es responder a todas las preguntas siguientes: ¿Qué son los tipos de número impar, primo, compuesto y cuadrado perfecto? ¿Qué quiere decir que un número se pueda descomponer en suma de otros tipos de números?

Generalmente un estudiante en educación superior no tiene problemas para comprender enunciados que involucran la noción de número impar o primo, pero lo que también es cierto es que encuentran dificultades para crear funciones o algoritmos que identifican este tipo de número u otros tipos de números. Lo anterior se debe a que se precisa del conocimiento de la sintaxis de un lenguaje de programación. Python con su sintaxis de alto nivel, facilita la escritura.

Además, dado que los Jupyter Notebooks son construcciones celda por celda con el valor agregado de la independencia de las mismas, dan la ventaja de hacer pruebas de escritorio después de cada celda, para verificar que las funciones y métodos están bien definidos y que arrojan los resultados esperados (Barba et al., 2019). Todo lo anterior fortalece la habilidad de comunicación y argumentación en educación superior, dado que no se requiere de la experticia de un programador de profesión para estar obligados a crear programas enteros, los cuales evidentemente demandan muchas horas en depuración y limpieza.

Pasamos a escribir el problema en la sintaxis propia de LaTeX, así: *Si se pretende concluir que la conjetura es falsa, se debe encontrar un impar compuesto a, tal que no existan para él un p (primo) y c (cuadrado perfecto), tales que $a = p+2c$.* En la Figura 10 mostramos el resultado obtenido en los Jupyter Notebook, en la que se pueden notar amplias diferencias tipográficas que obligan a reconocer a LaTeX como oportuno para la edición de texto científico en matemáticas.

Si se pretende concluir que la conjetura es falsa, se debe encontrar un número impar compuesto a para el que no exista dos números p (primo) y c (cuadrado perfecto), tales que $a = p + 2c$.

Figura 10. Resultado de usar celda de texto y entorno matemático LaTeX en edición

Sigamos con la *elaboración del plan de solución* y para ello usemos celdas tipo texto y aprovechemos la facilidad que ofrece el lenguaje Markdown para crear listas numeradas y no numeradas de títulos y subtítulos. Se puede hacer edición de un flujo de trabajo, entendido como el plan o metodología que se desea desarrollar para orientar la solución del problema. Se presentan los tres pasos que constituyen el plan:

1. Definir mediante funciones booleanas los tipos de número: impar compuesto, primo y cuadrado perfecto.
2. Crear funciones constructoras de listas de números de tipo impar, primo y cuadrados perfectos, pero que cumplen condiciones algebraicas o de acotamiento.
3. Crear funciones que representan los resultados obtenidos, de manera ordenada en tablas que permitan comunicar resultados verificados.

Para llevar a cabo el *plan de solución* utilizando herramientas o funciones proporcionadas por Python, lo primero que debemos hacer es indicar a Python las librerías que usaremos. En la Figura 11 podrá ver cómo se realiza dicho proceso, en celda de código.

Figura 11. Captura de pantalla. Proceso de importar librerías de Python que se usarán

Los Jupyter Notebooks cuentan con la ayuda visual de texto en colores diferentes, con el objetivo de diferenciar palabras reservadas de Python, variables, funciones, etc. Se puede comentar el código escribiendo en cada línea después del símbolo **#.** Todo lo que se escriba después del símbolo # es ignorado a la hora de la ejecución y sólo se usa para documentar. Pasamos a nuestra primera etapa del plan: *Definir mediante funciones booleanas los tipos de número: impar compuesto, primo y cuadrado perfecto.*

La actividad cognitiva de *definir* es muy importante puesto que en dependencia de las definiciones vendrán los detalles para resolver un problema. Para definir *número impar* es suficiente el hecho de que al dividir por 2 y luego tomar el resto, dicho entero que sobra es el número 1. En Python, el resto de la división se toma con el símbolo % (porcentaje) y la comparación con el resultado esperado 1; se lleva a cabo con el símbolo == (doble igual). Por otro lado, definimos el *ser número compuesto*, como ser producto de primos. Para finalizar, se toma *cuadrado perfecto* como aquel cuya raíz tiene parte decimal cero. En la Figura 12 están las definiciones.

El segundo paso de nuestro plan es: *crear funciones que crear listas de números de tipo impar, primo y cuadrados perfectos, pero que cumplen condiciones algebraicas o de acotamiento.* Aquí se hará evidente la simplicidad en Python para crear listas con notación clara y corta, como se puede notar en la Figura 12.

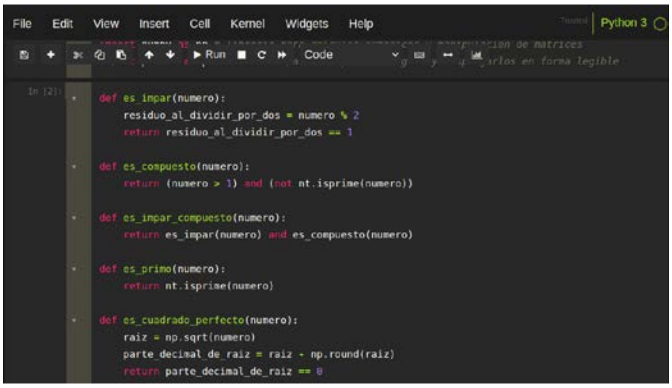


Figura 11. Captura de pantalla. Funciones booleanas para identificar los tipos de números

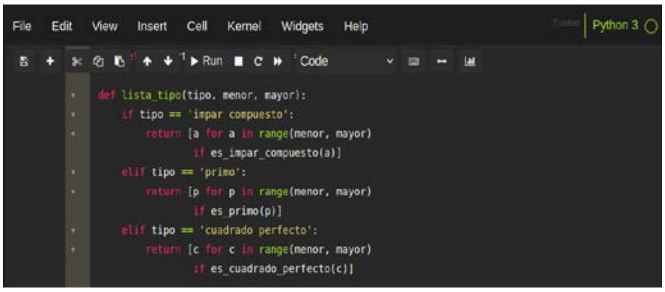


Figura 12. Captura de pantalla. Función lista_tipo. Evidencia de Python como lenguaje de alto nivel

En la Figura 13, se ven listas de números tipo cuadrado perfecto acotados por 5 y 190 y otros ejemplos. Parte importantísima del proceso de comunicación, es el ejercicio de ejemplificar objetos emergentes luego de las definiciones que han tenido lugar en los inicios. Los Jupyter Notebooks, al tener celdas independientes, permiten ejemplificar, una vez se han construido funciones o métodos. Dicha ventaja, le permite a quien comunica, ganar seguridad en la presentación de su argumento.

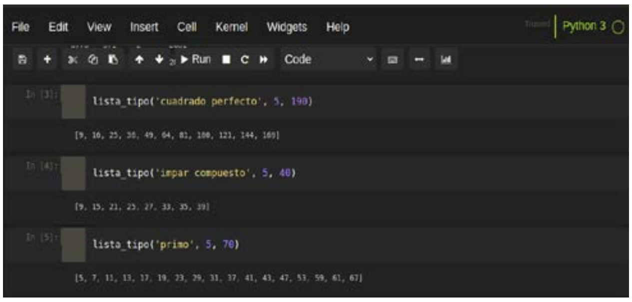


Figura 13. Captura de pantalla. Ejemplos de listas de tipos de números acotados entre dos valores

Nuestro tercer paso en el plan: *crear funciones que representan los resultados obtenidos, de manera ordenada en tablas que permitan comunicar resultados verificados.*

Un número impar compuesto que cumple la conjetura de Goldbach, lo hace por la virtud que tiene de dejarse expresar como la suma de un número primo y el doble de un cuadrado perfecto. En ese sentido, la descomposición puede ser entendida como la garantía de la existencia del número primo y del cuadrado perfecto. Es así como se propone la función *descompone_en_suma* como aquella que retorna una lista con cuatro datos que serán usados en la presentación de la información, pero en la que sobre todo se reconoce la importancia del número primo y el número cuadrado perfecto, como lo indica la Figura 14.

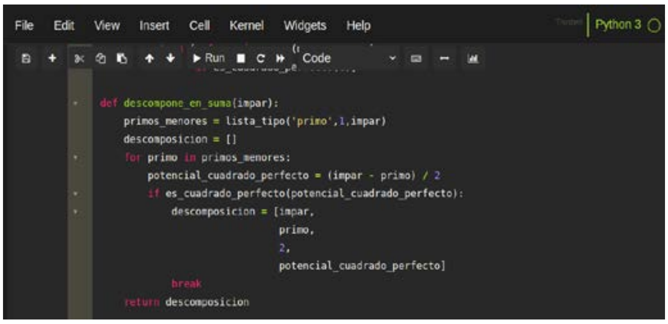


Figura 14. Captura de pantalla. Función descompone_en_suma

A continuación, se presenta la función *verificar_conjetura_entre* en la Figura 15, la cual hace uso de la librería *pandas* de Python y ayuda a elaborar el tercer paso de comunicar y argumentar de manera ordenada casos particulares de la conjetura.

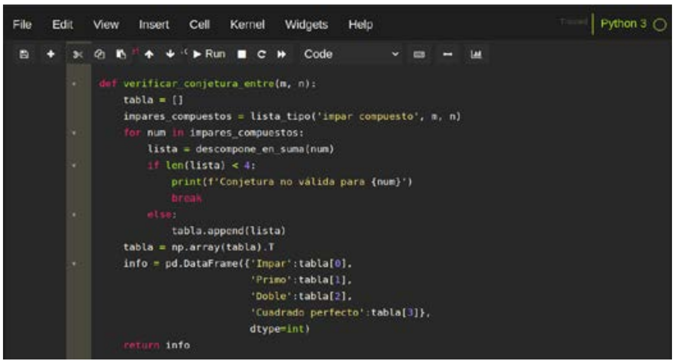


Figura 15. Captura de pantalla. Función verificar conjeturas entre dos valore que acotan

En la Figura 16**,** está la verificación entre 500 y 510. Y, para terminar, en la Figura 17 viene un resultado crucial y es que, al dar continuidad al proceso de verificación, encontramos que para el número *5777* no hay descomposición y se puede concluir que *la conjetura es falsa.* El lector notará en la Figura 17 el mensaje: *Conjetura no válida para 5777.*

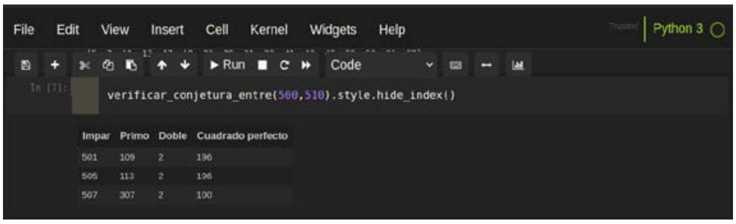


Figura 16. Captura de pantalla. Proceso de verificación entre 500 y 510

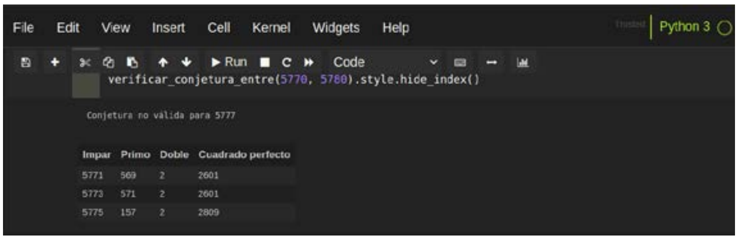


Figura 17. Captura de pantalla. Verificación entre 5770 y 5780 que entrega Conjetura no válida para 5777

Cabe resaltar que con el uso de los Jupyter Notebooks gozamos de una ventaja histórica sobre los matemáticos y en general sobre los académicos que en el pasado no tenían acceso a computadores, lo cual puede no significar una gran conclusión para quienes han perdido la capacidad de asombro en las aulas de clase. Pero, lo que definitivamente sorprende a propios y ajenos es que, en nuestros días, un estudiante de educación superior con un celular, pueda refutar conjeturas hechas por matemáticos legendarios, usando sintaxis simple y comunicando información en forma ordenada en una clase ordinaria de matemáticas.

4. ANÁLISIS

En el grupo experimental de aplicación de esta propuesta se obtuvo una amplia aceptación y buen manejo de la edición básica de texto.

La evaluación se puede centrar en establecer los logros en las capacidades del estudiante para diseñar planes de solución de problemas matemáticos y de llevarlos a cabo de manera sustentada con: GeoGebra, con código Python y con el modelo analítico de *afirmación - razón.*

Esta estrategia de enseñanza y evaluación de aprendizajes se implementó durante esta pandemia en los cursos de Matemáticas Básicas, del programa de Biología de la Universidad de Antioquia y en el curso de Geometría Vectorial y Analítica del programa de Ingeniería Agropecuaria. Ambos de la seccional Bajo Cauca de esta universidad. Y se obtuvieron muy buenos resultados de apropiación de conocimientos y de herramientas para el diagnóstico de dificultades de apropiación de conceptos.

Los Jupyter Notebooks permite que la presentación o exposición de los estudiantes en el acto comunicativo del conocimiento adquirido mediante diapositivas RISE, sea controlada desde un único archivo; ya que el archivo de extensión .ipynb para el cuaderno Jupyter es el mismo para la presentación en diapositivas a diferencia de las presentaciones tradicionales en las que el documento está en Word y la presentación en PowerPoint. Lo que le ahorra tiempo valioso a los estudiantes en su aprendizaje.

Todas las herramientas usadas pueden ser implementadas en línea y que prácticas con dicha estructura se pueden implementar en una clase en la que los estudiantes no necesitan hacer instalaciones de software ni disponer de ordenadores de mucho poder computacional. Lo anterior permite concluir que, en cierto sentido, las prácticas, en el uso de Jupyter Notebooks en ejercicios de argumentación y comunicación, son prácticas en cierto sentido universales al no estar supeditadas a ningún tipo de sistema operativo, licencia o hardware inaccesible, lo que instala nuestra revolución metodológica como una de las mejores alternativas para educación superior de alta calidad en Latinoamérica.

5. CONCLUSIONES

Es necesaria una alfabetización digital de los profesores y estudiantes, que permita llevar la potencialidad de las herramientas digitales al aula, permitiendo así una enseñanza de la matemática más centrada en el desarrollo de habilidades del pensamiento que en el desarrollo de solo capacidades procedimentales y algorítmicas que fácilmente se olvidan (Vidal, 2019).

La conjugación del uso de los Jupyter Notebook y de la creación de videos con la plataforma Zoom y la creación de un canal de YouTube ha permitido mostrar cómo puede implementarse el aprendizaje invertido como alternativa a las clases magistrales. Entendiendo el aprendizaje invertido, como aquel en el que el estudiante tiene la opción de recibir clase a través de videos realizados por el profesor, constituyéndose así, un espacio más para el aprendizaje de los estudiantes (Vidal, 2019).

La existencia de la aplicación para móviles android Pydroid 3 hace que los cuadernos Notebook puedan utilizarse en estos dispositivos. Y es bien sabido que en esta pandemia de la Covid 19, muchos estudiantes no tienen computador. Así, Los cuadernos Jupyter también se convierten en una alternativa educacional poderosa en esta pandemia.

Con la secuencia de *resolución reflexiva* de problemas, mediada por GeoGebra y los cuadernos Jupyter, propuesta por nosotros se obtiene una alternativa a la enseñanza magistral centrada en una presentación de contenidos en la clase y el dejar como tarea la solución de ejercicios rutinarios que se resuelven con procesos mecánicos poco reflexivos (Vidal, 2019).

REFERENCIAS

Barba, L. et al. (2019). Teaching and Learning with Jupyter. Recuperado: https://jupyter4edu.github.io/jupyter-edu-book/.

Díaz, E. y Cabrera, E. (2018). Guide to Jupyter Notebooks for educational purposes. Recuperado: https://eprints.ucm.es/48305/1/ManualJupyterIngles.pdf

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9(1), 143-168.

Vidal, I. (2019). Recursos digitales para la enseñanza de la física: Dispositivos móviles, redes sociales y cuadernos Jupyter. Caracteres. Estudios culturales y críticos de la esfera digital, 8(2), 18-41.