Grupo de Investigación sobre Tecnologías EMergentes para el Aprendizaje

UNIVERSIDAD DE CIENFUEGOS
CARLOS RAFAEL RODRÍGUEZ

MONOGRAFÍA

Módulo de problemas resueltos para desarrollar el pensamiento computacional

Autores:
Yailem Arencibia Rodríguez del Rey
Raidell Avello Martínez
Isabel Nissandra Cawanga Cambinda
Kadir Hector Ortiz
Dailyn Sosa López
Denis Fernández Álvarez

Grupo de Investigación sobre Tecnologías EMergentes para el Aprendizaje
http://gitema.ucf.edu.cu
http://robomind.ucf.edu.cu

Nota: Trabajo presentado como parte de la tesis de grado de Ingeniería Informática de la Ing. Isabel Nissandra Cawanga Cambinda

Capítulo II: Propuesta de Solución

2.1 Introducción

En este capítulo, se abordan teóricamente los componentes del pensamiento computacional (CPC) como metodología a emplear en el desarrollo de la solución propuesta. Se presenta una diversidad de problemas resueltos seleccionados de disciplinas que abordan temas referentes a la lógica algorítmica.

2.2 Componentes del Pensamiento Computacional

A pesar de no existir orden entre los componentes ya que éstos se relacionan, en este capítulo se presentarán en el orden siguiente:

- Abstracción.
- Análisis y representación de datos.
- Descomposición del problema.
- Pensamiento algorítmico.
- Reconocimiento y generalización de patrones.
- Simulación/ Evaluación.

2.2.1 Abstracción

Al hacer una reflexión sobre las aproximaciones dadas por los diferentes autores sobre los componentes del pensamiento computacional, se encuentra como constante el proceso de abstracción.

En el mundo, incluso el objeto más simple o el fenómeno más cotidiano se vuelve un auténtico desafío si se pretende analizarlo y comprenderlo. La abstracción es la habilidad que le permite al ser humano combatir la complejidad al considerar sólo lo esencial del objeto o fenómeno que se esté analizando [23].

El concepto de ***abstracción*** está vinculado al verbo abstraer. El verbo abstraer es definido por la real academia española como: “separar por medio de una operación intelectual las cualidades de un objeto para considerarlas aisladamente o para considerar el mismo objeto en su pura esencia o noción”.

En un artículo de marzo de 2006 para las Comunicaciones del ACM, Wing (2006) plantea lo siguiente: (…) la ***abstracción*** se usa para definir patrones, generalizar a partir de instancias específicas y parametrizar. Se usa para dejar que un objeto represente a muchos. Se utiliza para capturar propiedades esenciales comunes a un conjunto de objetos, al tiempo que oculta distinciones irrelevantes entre ellos [6].

La abstracción nos da el poder de escalar y manejar la complejidad. La aplicación recursiva de la abstracción nos permite construir sistemas cada vez más grandes, con el caso base (al menos para ciencias de la computación) como bits (0 y 1) (…).

Para Barr & Stephenson (2011), la ***abstracción*** es simplificar de lo concreto a lo general a medida que las soluciones están siendo desarrolladas [17].

Según López, la abstracción es una habilidad esencial para la construcción de modelos y la descomposición del problema de problemas y nos permite reducir la complejidad [23].

A decir de Olabe y Basogain, la abstracción significa identificar la esencia del proceso que se desea crear eliminando todos los detalles superfluos [24].

Niveles de abstracción

Jeannette Wing confirma la importancia de la abstracción en el pensamiento computacional, haciendo hincapié en la necesidad de pensar en múltiples niveles de abstracción. Considera el ejemplo de un automóvil:

1. Cada pieza de un automóvil, está compuesta por átomos y cada átomo está compuesto por electrones, protones y neutrones. Llamemos a esta manera de abstraer el automóvil, nivel de abstracción **“atómico”**.
2. Los automóviles están compuestos de piezas como lo son: tuercas, varillas, remaches, alambres, envases de plástico, entre otros. Llamemos a esta manera de abstraer el automóvil, nivel de abstracción de **“piezas”**.
3. En un nivel superior de abstracción, el automóvil se encuentra compuesto por diversos mecanismos como lo son: el motor, el alternador, los inyectores de combustible, los frenos, llamemos a esta manera de abstraer el automóvil, nivel de abstracción de **“mecanismos”** [16].

Características de la abstracción

- La eliminación y ocultamiento de los detalles: separar por medio de una operación intelectual las cualidades de un objeto para considerarlas aisladamente.
- La generalización: considerar el mismo objeto en su pura esencia o noción.

Desarrollo de habilidades de abstracción

El psicólogo Jean Piaget (1896-1980) mediante extensos estudios aplicados desde niños recién nacidos hasta personas adultas, derivó cuatro periodos de desarrollo cognitivo: sensorio-motor, preoperatorio, operaciones concretas y operaciones formales. La etapa de las operaciones formales, que se encuentra alrededor de los doce años a la edad adulta, es donde las personas son capaces de pensar de manera abstracta y donde es pertinente proporcionar contenidos que desarrollen sus capacidades de abstracción. La abstracción es fundamental para la ciencia e ingeniería en general, juega un papel crítico en la creación de teorías, modelos, análisis y producción de dispositivos de ingeniería. El pensamiento computacional identifica a la abstracción como una de las grandes ideas de las ciencias computacionales y que las habilidades de abstracción son cruciales para el futuro en el desarrollo científico y tecnológico. Sin embargo, incluso en las carreras de ingeniería o ciencias, en sus programas de estudio no contienen cursos sobre abstracción, no obstante, todo depende de la habilidad de abstracción para resolver problemas. Por lo tanto, la abstracción es una habilidad esencial, pero que se desarrolla indirectamente a través de otros tópicos, por ejemplo, mediante cursos de matemáticas, de programación o ingeniería del software.

2.2.2 Análisis y representación de datos

El Análisis de Datos (*Data Analysis, o DA*), según Rouse, es la ciencia que examina datos en bruto con el propósito de sacar conclusiones sobre la información [25].

El análisis de datos es una técnica y por medio de ésta se inspeccionan, purifican y transforman datos, con la finalidad de destacar toda la información que sea de gran utilidad, a fin de poder elaborar conclusiones que sirvan de apoyo en la toma de decisiones.

Técnicas del análisis de datos

Análisis de datos cualitativo: Los datos se presentan de manera verbal (en ocasiones en gráficas). Se basa en la interpretación. Sus tipos más comunes son las entrevistas abiertas, grupos de discusión y grupos de observación.

Análisis de datos cuantitativos: Los datos se presentan en forma numérica. Se basa en resultados tangibles.

Análisis y representación de datos: Consiste en extraer del problema todos los datos, analizarlos y representarlos adecuadamente para ser usados por métodos de resolución.

2.2.3 Descomposición del problema

El concepto de ***descomposición del problema*** está vinculado al verbo descomponer, que es definido por la real academia española como: "Separar las diversas partes que forman un compuesto".

La descomposición del problema, denominado a veces particionado o elaboración del problema, es una actividad que se asienta en el núcleo del análisis de requisitos del software. Durante la actividad de exposición del ámbito no se intenta descomponer el problema totalmente. Más bien, la descomposición del problema se aplica en dos áreas principales:

- La funcionalidad que debe entregarse.
- El proceso que se empleará para entregarlo.

Barr & Stephenson (2011) plantea a su vez que la ***descomposición del problema*** es fraccionar los problemas en partes más pequeñas, lo que hace más sencilla su resolución [17].

En el documento "El Pensamiento Computacional. Un reflejo del razonamiento y la comprensión humanos", Luis Puente (2016) hace referencia a Wing (2006) y que para ella, el objetivo de la descomposición del problema, es la de fragmentar la complejidad de un problema en pequeñas series de más fácil manejo [26].

Los autores como Xabier Olabe, Miguel Ángel Basogain y Juan Carlos Basogain (2015), lo definen como, el proceso por el cual se divide el problema en partes, y cada una de ellas en sus correspondientes componentes básicos para transformar un problema grande y complejo en un conjunto pequeño de tareas sencillas e interdependientes [24].

El grupo de investigación educativa de Google o *‘Google for Education’* (2016) definen la ***descomposición del problema*** como “la capacidad para fraccionar una tarea minuciosa y detalladamente en los pasos que la forman, de manera que luego podamos explicar unívocamente el proceso a una tercera persona o a un ordenador, o incluso como notas de procedimiento para uno mismo”. Descomponer un problema frecuentemente conduce a un posterior reconocimiento y generalización de patrones, y así en última instancia a la capacidad para diseñar un algoritmo *(Google for Education, 2015, en línea),* [15]. Ejemplos:

a. Cuando probamos un nuevo plato de cocina e identificamos los distintos ingredientes que dan forma a su sabor, estamos *descomponiendo* el plato en sus ingredientes particulares.

b. Cuando le damos a alguien indicaciones precisas para llegar a nuestro domicilio (p.e. *“sales de la boca del metro, giras a la derecha, caminas recto y coges la segunda calle a la izquierda…”*), estamos *descomponiendo* el proceso de ‘ir de un sitio a otro’

c. En matemáticas, podemos *descomponer* un número, como 256,37, de la siguiente manera: $2*10^2 + 5*10^1 + 6*10^0 + 3*10^{-1} + 7*10^{-2}$

2.2.4 Pensamiento algorítmico

Algoritmo

Para López (2008) (citado en Lugo, 2016), un algoritmo son instrucciones detalladas y precisas de un procedimiento que asegura una solución correcta a un interrogante en particular; estas instrucciones son finitas y con un orden lógico [4].

Pensamiento algorítmico

Cuando se habla de algoritmos también se hace mención a este tipo de pensamiento. En el reporte del Consejo Nacional de Investigación de Estados Unidos (1999), titulado “Being Fluent with Information Technology”, se define como una serie de operaciones que incluyen “la descomposición del problema funcional, la repetición (iteración y / o recursividad), organizaciones de datos básicos (registro, matriz, lista), la generalización y la parametrización, el algoritmo de comparación de programas, diseño de arriba hacia abajo, y el refinamiento” [4].

Una de las aproximaciones a este tipo de pensamiento y que se considera en esta investigación, es la proporcionada por Futschek (2006) (citado por Lugo, 2016). Para el autor, el pensamiento algorítmico también puede ser entendido como un conjunto de habilidades que permiten la comprensión de los algoritmos. Algunas de estas habilidades son la capacidad para analizar problemas dados, especificar problemas con precisión, creatividad para crear nuevos algoritmos y/o hacerlos más eficientes [4].

Futscherk (2006) (citado en Lugo, 2016) también propone que para enseñar el pensamiento algorítmico, se deben proponer numerosos problemas, que han de ser escogidos de manera que no sean ni tan simples o tan complejos que frustren al estudiante. Se debe empezar con los más básicos y cuidando no involucrar lenguaje de programación, ya que este lenguaje puede ser complejo para los principiantes.

2.2.5 Reconocimiento y generalización de patrones

Reconocer, será un atributo básico del ser humano así como de otros organismos vivientes. En nuestra vida pasamos todo el tiempo reconociendo, reconocemos que alguien tiene razón, reconocemos una solución a un problema, construcciones mentales equivocadas [27], etc.

Patrón o clase, es la descripción de un objeto, se refiere al conjunto de atributos para definir un objeto. Categoría determinada por atributos comunes.

Proceso de reconocimiento, se refiere a la capacidad del individuo para discriminar los datos de entrada y decidir que un objeto pertenece a una y sólo una de las clases o patrones que se estén estudiando.

Reconocimiento de patrones puede definirse como la "categorización" de los datos de entrada en clases o patrones mediante la extracción de propiedades significativas que permiten discriminar entre las clases en estudio.

Según la psicología cognitiva, el reconocimiento de patrones es un procesamiento de información que consiste en codificar el estímulo de alguna manera y compararlo con un patrón ya existente en la memoria. El mayor problema que se enfrentaba la psicología cognitiva es responder a: ¿cómo se codifica el estímulo para compararlo con el patrón ya existente en la memoria? ¿Se codifica como una plantilla o como una serie de características?[27].

Proceso de generalización

Radford (citado por Rivera y Becker, 2011) y este a su vez citado por Juan Carmona (2015), considera la generalización como la regularidad que captan los estudiantes, a partir de relaciones establecidas sobre particularidades en la secuencia, extendiendo esa regularidad a la secuencia. Esta regularidad debe permitirles expresar algún término de la secuencia [28].

Radford (2007), argumenta que la generalización de patrones descansa en la capacidad de identificar una regularidad en algunos casos particulares, y extender esa regularidad a otros términos, permitiendo así una expresión vinculada con todos los términos de la secuencia.

Teoría del reconocimiento de patrones de Marry y Nishihara X

Marry y Nishihara han desarrollado la idea de procesamiento en el reconocimiento de patrones. Esta idea consiste en transformar una representación en otra.

En el reconocimiento de patrones es un grave problema almacenar muchas representaciones de un mismo objeto para realizar el reconocimiento. Por eso es mejor no centrarse en los puntos de vista del perceptor para el reconocimiento, porque estos son muchos. Es mejor centrarnos en la cosa misma, porque ésta es una sola. Por ello, el modelo de proceso que adoptan Marr y Nishihara se centra en el objeto, no en el perceptor [27].

Una de las aproximaciones que se considera en esta investigación, es la proporcionada por el grupo de investigación educativa de Google o *'Google for Education' (2015).* Para ellos, el ***reconocimiento de patrones*** no es más que: la capacidad para percibir similaridades o diferencias comunes que nos ayudan a hacer predicciones y nos conducen hacia 'atajos' o 'accesos directos' (*'shortcuts'*) al núcleo de un problema. El reconocimiento de patrones es frecuentemente la base para el diseño algorítmico y la resolución de problemas [29]. Ejemplos:

a. Los niños identifican *patrones* en las reacciones de sus padres y profesores a su comportamiento, en orden a establecer qué está bien y qué está mal. Y basan su comportamiento futuro en función de dichos patrones.

b. Los corredores de bolsa buscan *patrones* en el valor de las acciones para decidir cuándo comprar y cuándo vender.

c. En matemáticas, podemos seguir un *patrón* para explicar la lógica que subyace a que el producto de dos números negativos es un número positivo:

$$(-3) * (3) = -9$$

$$(-3) * (2) = -6$$

$$(-3) * (1) = -3$$

$$(-3) * (0) = 0$$

$$(-3) * (-2) = 6$$

d. En geometría, al calcular el mayor área posible para un rectángulo de un perímetro dado, podemos observar *patrones* que involucran el alto, ancho y área del mismo como:

- ✓ *En la medida que el alto y el ancho se aproximan el uno al otro en sus valores, el área se incrementa.*
- ✓ *En la medida que aumenta la diferencia entre los valores del alto y del ancho, el área se reduce.*
- ✓ *Este patrón nos conduce a la conclusión de que el rectángulo con el área mayor es un cuadrado.*

2.2.6 Simulación / Evaluación

Jeannette Wing (citado por López, 2014), sostiene que el pensamiento computacional complementa y combina el pensamiento matemático y la ingeniería porque se basa en las matemáticas como sus fundamentos y recurre a la ingeniería ya que nuestros sistemas interaccionan con el mundo real. En suma, nuestros sistemas están limitados por la física del dispositivo subyacente, pero por medio de la computadora podemos construir mundos virtuales o ***simulaciones*** sin las restricciones de la realidad física [30].

La teoría que hay detrás es antigua ya que toda se basa en la definición de modelos matemáticos y estadísticos, y en el estudio de la evolución de estos modelos a lo largo de un período determinado de tiempo. No obstante, la simulación ha avanzado de forma realmente importante a partir de la explosión de las herramientas informáticas, por la facilidad que supone generar los resultados y tratar los datos y los cálculos complejos. De hecho, la simulación está estrechamente ligada al inicio de la informática con las simulaciones de balística para aplicaciones militares a mediados de los cuarenta.

El concepto de ***simulación*** es una de las principales ideas del pensamiento computacional en el proceso de solución de problemas. Entre los objetivos operativos del pensamiento computacional que se relacionan estrechamente con la simulación son los siguientes:

- Representar datos mediante abstracciones, como modelos y simulaciones.
- Formular problemas de manera que permitan usar computadores y otras herramientas para solucionarlos.

Un modelo es una representación abstracta (matemática, declarativa, visual, etc.) de fenómenos, sistemas o procesos. El humano ha podido plantear leyes o modelos que representan la esencia de los fenómenos y que tienen como finalidad simplificar el fenómeno real para poder analizarlo, comprenderlo, predecirlo o controlarlo.

Según WINSTON (1994) citado por Galicia (2011), se puede definir la simulación como la técnica que imita el funcionamiento de un sistema del mundo real cuando evoluciona en el tiempo. La simulación no es una técnica de optimización. Más bien es una técnica para estimar las medidas de desempeño del sistema modelado [31].

López considera la ***simulación*** como el proceso de representar o modelar un sistema con la finalidad de comprender su comportamiento. La simulación involucra realizar experimentos usando modelos para probar hipótesis. Las simulaciones por computadora son artefactos de la invención humana, hechas a partir del pensamiento, donde las instrucciones del programador se convierten en la ley del mundo virtual [30].

Según el diccionario de sinónimos y antónimos, ***evaluar*** significa de entre muchas cosas; tasar, valorar, calcular, determinar, estimar, justipreciar [32].

La ***evaluación*** se puede entender de diversas maneras, dependiendo de las necesidades, propósitos u objetivos de la institución educativa, tales como: el control y la medición, el enjuiciamiento de la validez del objetivo, la rendición de cuentas, por citar algunos propósitos.

Desde esta perspectiva se puede determinar en qué situaciones educativas es pertinente realizar una valoración, una medición o la combinación de ambas concepciones [33].

2.3 Desarrollo del PC mediante problemas resueltos

Módulo de Problemas Resueltos (MPR)

Atendiendo a todas las dificultades anteriores, se presenta a continuación varios problemas resueltos desde la perspectiva del pensamiento computacional. El “módulo de problemas resueltos” propuestos en esta investigación está formado por 22 problemas que incluyen temas de las asignaturas: Matemática I, Matemática II y Matemática Discreta; además presenta algunos problemas de búsqueda sin heurística a partir de problemáticas que aparecen en juegos sencillos.

Los problemas mencionados anteriormente están agrupados en cuatro subgrupos en el siguiente orden:

1. **Problemas sin Heurísticas**
   - *Problema Resuelto # 1:* Torres de Hanói
   - *Problema Resuelto # 2:* Misioneros y Caníbales
   - *Problema Resuelto # 3:* El Arriero
   - *Problema Resuelto # 4:* Jarras de agua (8, 5, 3)
   - *Problema Resuelto # 5:* Jarras de agua (4 y 3 litros)
2. **Problemas de matemática I**
   - *Problema Resuelto # 6:* Límite de una función real de una variable real.
   - *Problema Resuelto # 7:* Continuidad de una función real de una variable real.
   - *Problema Resuelto # 8:* Derivada n-ésima de una función real de una variable real.
   - *Problema Resuelto # 9:* Derivada n-ésima de una función real de una variable real.
   - Problema Resuelto # 10: Problema de optimización de una función real de una variable real.
3. **Problemas de Matemática II**
   - *Problema Resuelto # 11:* Interpretación geométrica de la derivada parcial.
   - *Problema Resuelto* # 12: Interpretación física de la derivada parcial.

- *Problema Resuelto # 13:* Derivada direccional de una función real de varias variables.
- *Problema Resuelto # 14:* Extremos condicionados de una función real de varias variables.
- *Problema Resuelto # 15:* Volumen de un sólido.

4. **Problemas de Matemática Discreta**

- **Cálculo proposicional**

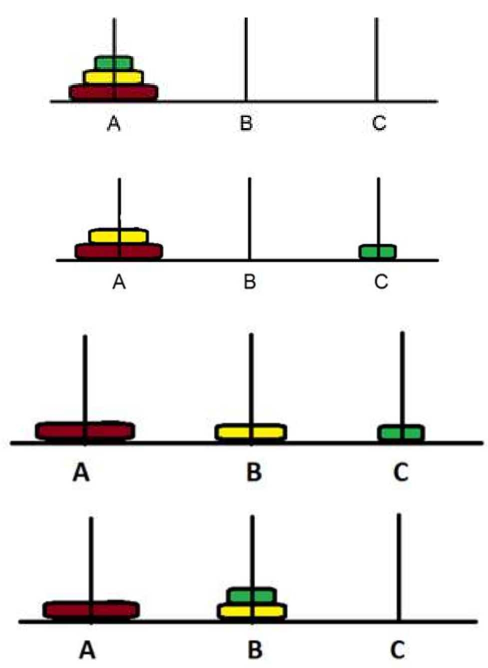
  - ✓ *Problema Resuelto # 16:* Representación de estructuras deductivas.
  - ✓ *Problema Resuelto # 17:* Traducción al lenguaje natural
  - ✓ *Problema Resuelto # 18:* Tabla de verdad.

- ***Algoritmo y Recursividad***

  - ✓ *Problema Resuelto # 19:* Problema de factorial.
  - ✓ *Problema Resuelto # 20:* Sucesión de Fibonacci.
  - ✓ *Problema Resuelto # 21:* Suma recursiva de los N primeros números naturales.
  - ✓ *Problema Resuelto # 22:* Problema del robot.

2.3.1 Problemas de Búsqueda sin Heurística

PROBLEMA RESUELTO # 1: Torres de Hanói	
Se hallan N discos de distinto tamaño apilados sobre una base A de manera que cada disco se encuentra sobre uno de mayor radio. Existen otras dos bases vacías B y C. El objetivo es llevar todos los discos de la base A hasta la base C, para lo cual puede usarse la base B. Considerar que se puede mover sólo un disco a la vez, y cada disco puede descansar solamente en las bases y no en el suelo. Recordar que los discos deben situarse siempre sobre uno de mayor radio. A continuación se presentará una posible solución seguida de una representación en el Scratch.	
Abstracción	Se tiene N discos apilados en una base A (origen). Se tienen dos bases vacías B (auxiliar) y C (destino) Objetivo: Llevar todos los discos de la base A, a la base C,

	usando la base B como intermedia.	
Análisis y representación de datos	**Entrada:** Tres bases para los discos, A, B y C: Torre A = 3 discos Torre B = vacía Torre C = vacía	**Salida:** Torre A = vacía Torre B = vacía Torre C = 3 discos
Descomposición del problema	Definir restricciones: Cantidad de discos N = 3. Hay que partir de la base origen a la base destino usando la base intermedia. Sólo se puede mover un disco a la vez. Un disco nunca puede situarse sobre un disco de menor radio.	
Pensamiento algorítmico	**(Ver anexo 3)**	
Reconocimiento y generalización de patrones	Patrón # 1: El disco de mayor radio nunca se sitúa sobre el de menor radio. Patrón # 2: La torre B se utiliza como intermediaria.	
Simulación/Evaluación	La corrida del algoritmo llevado a cabo desde el estado inicial hasta el estado final constituye la simulación. 	

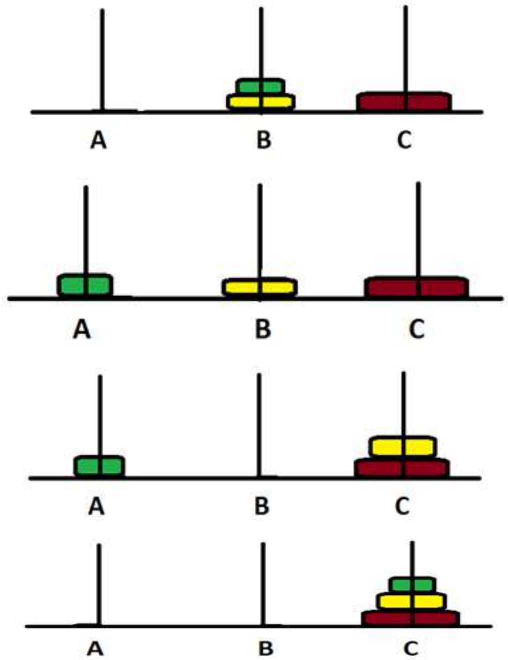
	

Tabla 2.Problema resuelto #1 (Torres de Hanói) [34].

PROBLEMA RESUELTO # 2: Misioneros y caníbales	
Se tienen 3 misioneros y 3 caníbales en la orilla derecha de un río. Existe un bote con capacidad para dos personas como máximo. Se desea que los seis pasen al margen izquierdo del río, pero hay que considerar que no debe haber más caníbales que misioneros en ninguna de las dos orillas del rio porque entonces los caníbales se comen a los misioneros. Además, el bote siempre debe ser conducido por alguien.	
Abstracción	Atravesar los misioneros y caníbales de una orilla del rio a la otra en un bote sin que los caníbales devoren a los misioneros teniendo en cuenta las siguientes restricciones: El bote tiene capacidad para 2 personas, de los cuales 1 se queda en la orilla izquierda del rio a la que se va a atravesar y 1 se queda en el bote para manejarlo. En ninguna orilla debe haber más caníbales que misioneros sino los misioneros serán devorados por los caníbales.
Análisis y representación de datos	Caníbal = C; Misionero = M; Bote = B; Orilla derecha = Od; Orilla izquierda = Oi

	Estado inicial: Cantidad de M Od = 3; Cantidad de C Od = 3 Posición del B = Od; Cantidad de M Oi = 0 Cantidad de C Oi = 0 ***Estado final u objetivo:*** Posición del B = Oi; Cantidad de M Oi = 3; Cantidad de C Oi = 3
Descomposición del problema	Este problema se descompone en la cantidad de viajes que dará el bote para que los misioneros y caníbales lleguen a salvo a la otra orilla del rio.
Pensamiento algorítmico	**(Ver anexo 4)**
Reconocimiento y generalización de patrones	Patrón # 1: cantidad de caníbales <= cantidad de misioneros Patrón # 2: Pasar a los misioneros de una orilla hacia la otra respetando las restricciones y cuando estos estén garantizados entonces pasar a los caníbales.
Simulación/ Evaluación	La corrida del algoritmo realizado desde el estado inicial hasta el estado final constituye la simulación.

Tabla 3. Problema resuelto #2 (Misioneros y caníbales) [35].

PROBLEMA RESUELTO #3: El arriero	
Un arriero se encuentra en el borde de un rio llevando un puma, una cabra y una lechuga. Debe cruzar a la otra orilla por medio de un bote con capacidad para dos (el arriero y alguna de sus pertenencias). La dificultad es que si el puma se queda solo con la cabra la devorará, y lo mismo sucederá si la cabra se queda sola con la lechuga. ¿Cómo cruzar sin perder ninguna pertenencia?	
Abstracción	Atravesar las pertenencias que tiene (puma, lechuga, cabra) de una orilla del rio a la otra en un bote sin que el puma devore la cabra, y sin que la cabra se coma la lechuga. Teniendo en

	cuenta las siguientes restricciones: El bote tiene capacidad para 2 pasajeros, de los cuales se pueden montar el arriero y una de sus pertenencias. En ninguna orilla debe pasar lo siguiente: Si el puma se queda solo con la cabra la devorará. Si la cabra se queda sola con la lechuga, la devorará.
Análisis y representación de datos	Arriero = A; Lechuga = L; Cabra = C; Puma = P; Bote = B ***Estado inicial:*** Cantidad de pertenencias en la Oi = 3 Posición del B = Oi ***Estado final u objetivo deseado:*** Posición del B = Od Cantidad de pertenencias en la Od = 3
Descomposición del problema	Determinar posición del bote, del arriero y de sus pertenencias. Este problema se descompone en la cantidad de viajes que dará el bote para que el arriero y sus pertenencias lleguen a salvo a la otra orilla del rio.
Pensamiento algorítmico	**(Ver anexo 5)**
Reconocimiento y generalización de patrones	El arriero se mantendrá en el bote para trasladar las pertenencias.
Simulación / Evaluación	La corrida del algoritmo realizado desde el estado inicial hasta el estado final constituye la simulación.

Tabla 4. Problema resuelto #3 (El arriero) [36].

PROBLEMA RESUELTO # 4: Jarras de agua (8, 5, 3 litros respectivamente)
Un tonelero quiso repartir entre dos personas, a partes iguales, una jarra con 8 litros de agua, pero al intentar hacer las medidas se vio con el problema de que solamente disponía, aparte de la jarra de 8 litros, de dos jarras con capacidades de 3 y de 5 litros.

<table>
<tr><td colspan="2">Dijo: “No importa. Traspasando adecuadamente el agua, puede hacerse la medición de forma que queden 4 litros en la jarra que ahora contiene 8 y otros cuatro litros en la jarra de capacidad para 5”. ¿Cómo lo va a hacer?</td></tr>
<tr><td>Abstracción</td><td>Se tienen tres jarras, una de 8 litros de capacidad llena de agua, una de 5 litros de capacidad y otra de 3 vacías respectivamente, ninguna de ellas tiene marcas de medición.
Averiguar cómo se puede lograr tener exactamente 4 litros de agua en la jarra de 8 litros de capacidad y otros 4 litros de agua en la jarra de 5 litros de capacidad.
Objetivo: repartir entre dos personas a partes iguales 8 litros de agua.</td></tr>
<tr><td>Análisis y representación de datos</td><td>Estado Inicial:
Jarras de agua $\begin{cases} 8\ litros \\ 5\ litros \\ 3\ litros \end{cases}$
Cantidad de agua disponible = 8 litros
Estado final u objetivo:
Cantidad de agua en la jarra de 8 litros = 4 litros.
Cantidad de agua en la jarra de 5 litros = 4 litros.
Estado de la jarra de 3 litros = vacía.</td></tr>
<tr><td>Descomposición del problema</td><td>Para repartir el agua disponible en la jarra de 8 litros a las dos personas, hay que tener en cuenta que disponemos de dos jarras más (una de 4 y otra de 5 litros), las cuales están vacías.
Cada una de las jarras de 5 y 8 litros, debe contener exactamente 4 litros para que la división sea equitativa.
Para ello se consideran válidas las siguientes operaciones:
Llenar las jarras de agua,
Tirar agua de las jarras,
Pasar el agua de una jarra a otra.</td></tr>
<tr><td>Pensamiento algorítmico</td><td>(Ver anexo 6)</td></tr>
<tr><td>Reconocimiento y generalización de</td><td>Patrón # 1:
Se usa la jarra de 3 litros de intermedio entre las jarras de 5 y 8</td></tr>
</table>

patrones	litros en el proceso de llenado y vaciado en las mismas.
Simulación / Evaluación	La corrida del algoritmo realizado desde el estado inicial hasta el estado final constituye la simulación.

Tabla 5. Problema resuelto #4 (Jarras de agua (8, 5, 3 litros respectivamente)).

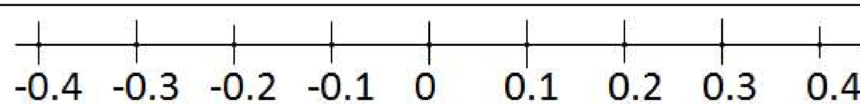
PROBLEMA RESUELTO # 5: Jarras de agua (4 y 3 litros respectivamente) Se tienen dos jarras, una de 4 litros de capacidad y otra de 3, sin escala de medición, además, se tiene una bomba que permite llenar las jarras de agua. Se desea tener 2 litros de agua en la jarra de 4 litros de capacidad. Las siguientes operaciones son válidas: llenar las jarras, tirar agua de las jarras, pasar el agua de una jarra a otra.	
Abstracción	Se tienen dos jarras de agua, una para 4 y otra para 3 litros de capacidad sin escala de medición. El objetivo del problema consiste en encontrar una secuencia de movimientos que consiga dejar exactamente 2 litros de agua en la jarra de 4 litros de capacidad, sin importar cuantos litros quedan en la jarra de 3 litros.
Análisis y representación de datos	**Estado inicial:** Cantidad de jarras de agua = 2: $\begin{cases} 4\ litros \\ 3\ litros \end{cases}$ Disponibilidad para llenar las jarras = una bomba **Estado final u objetivo:** Cantidad de agua en la jarra de 4 litros = 2 litros. Estado de la jarra de 3 litros = vacía o con agua, en caso de que no importen los litros de este jarra.
Descomposición del problema	Averiguar cómo se puede lograr tener exactamente 2 litros de agua en la jarra de 4 litros de capacidad sin que esta tenga alguna escala o marca de medición.
Pensamiento algorítmico	***(Anexo 7)***
Reconocimiento y generalización de	Patrón #1: Se usa la jarra de 3 litros para ir llenando y vaciando la de 4

patrones	litros hasta lograr el objetivo que se desea alcanzar.
Simulación / Evaluación	La corrida del algoritmo realizado desde el estado inicial hasta el estado final constituye la simulación.

Tabla 6. Problema resuelto #5 (Jarras de agua (4 y 3 litros respectivamente)) [36].

2.3.2 Problemas de Matemáticas

2.3.2.1 Matemática I

PROBLEMA RESUELTO # 6: Límite de función real de una variable real. Analizar el comportamiento de la siguiente función: $f(x) = 2x * e^{1/x}$ cuando la variable independiente se aproxima a cero.	
Abstracción	Hallar el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a cero: $\lim_{x \to 0}(2x * e^{\frac{1}{x}})$
Descomposición del problema	Teniendo en cuenta que el $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y el $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, o sea, el comportamiento de $\frac{1}{x}$ es diferente a la derecha y a la izquierda de cero; para resolver el problema en cuestión hay que descomponerlo en los siguientes límites: ¿ $\lim_{x \to 0^-}(2x * e^{\frac{1}{x}})$ ¿ y ¿ $\lim_{x \to 0^+}(2x * e^{\frac{1}{x}})$ ¿
Análisis y representación de datos	Función real de una variable real: $f(x) = 2x * e^{1/x}$ Punto: $x_0 = 0$
Pensamiento algorítmico	***(Ver anexo 8)***
Reconocimiento y generalización de patrones	-
Simulación / Evaluación	

	$\lim_{x \to 0^-} 2x * e^{\frac{1}{x}} = 0$ $\lim_{x \to 0^+} 2x * e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ $\left.\begin{array}{c} f(-0.5) \\ f(-0.4) \\ f(-0.3) \\ f(-0.2) \\ f(-0.1) \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{c} f(0.5) \\ f(0.4) \\ f(0.3) \\ f(0.2) \\ f(0.1) \end{array}\right\}$ Cuando x tiende a 0^- Cuando x tiende a 0^+

Tabla 7.Problema Resuelto # 6: Límite de función real de una variable real.

PROBLEMA RESUELTO # 7: Continuidad de una función real de una variable real. Analizar la continuidad de la función: $f(x) = \frac{3x}{5-\|x-3\|}$	
Abstracción	Para analizar la continuidad de f(x) lo primero es abstraer del problema que esta función es una función real de una variable real definida por tramos o por partes, ya que la expresión modular que aparece en su denominador le da un comportamiento a la izquierda de x=3 y otro a la derecha de x=3.
Descomposición del problema	Para analizar la continuidad de la función dada, se descompone en los siguientes tres análisis: $¿x > 3?$ $¿x < 3?$ $¿x = 3?$
Análisis y representación de datos	$f(x) = \frac{3x}{5 - \|x-3\|} = \begin{cases} \frac{3}{8-x}, & x \geq 3 \\ \frac{3x}{x+2}, & x < 3 \end{cases}$
Pensamiento algorítmico	**Paso 1:**

<table>
<tr><td></td><td>

$$\left[\begin{array}{l} \textit{if } x = 3 \in dom\, f \\ \textit{then} \\ \boldsymbol{paso\ 2}: \left[\begin{array}{l} \textit{if } \lim_{x\to 3^-} f = \lim_{x\to 3^+} f = L \\ \textit{then} \\ \boldsymbol{paso\ 3}: \left[\begin{array}{l} \textit{if } f(3) = \lim_{x\to 3} f = L \\ \textit{then} \\ return\ (f(x) es\ continua\ en\ x = 3). \\ \textit{else} \\ return\ (f(x) es\ descontinua\ finia\ evitable\ en\ x = 3) \end{array}\right] \\ \textit{else if } \lim_{x\to 3^-} f = L_1 \ \ y \ \ \lim_{x\to 3^+} f = L_2 \ \ y \ \ L_1 \neq L_2 \\ \textit{then} \\ return\ (f(x) es\ discontinua\ finita\ no\ evitable). \\ \textit{if } \lim_{x\to 3^-} f = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x\to 3^+} f = \pm\infty \\ return\ (f(x) presenta\ una\ discontinuidad\ infinita\ en\ x = 3). \end{array}\right] \end{array}\right]$$

$else$

$return\ (f(x) presenta\ una\ discontinuidad\ infinita\ en\ x = 3)$

</td></tr>
<tr><td>Reconocimiento y generalización de patrones</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Simulación / Evaluación</td><td>

$\boldsymbol{paso\ 1}:$

$x = 3 \in dom\, f$ $\qquad$ $f(3) = 9$

$\boldsymbol{paso\ 2}:$

$\lim_{x\to 3^-} \frac{3x}{x+2} = \frac{9}{6}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 3^+} \frac{3x}{8-x} = \frac{9}{5}$

$\therefore \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{9}{5}$

$\boldsymbol{paso\ 3}:$

</td></tr>
</table>

	$\therefore f(x) es\ continua\ en\ x = 3$ $Respuesta: f(x) es\ continua\ en\ R, excepto\ en\ x = 2\ y\ x = 8\ donde\ presenta\ una\ discontinuidad\ infinita$

Tabla 8. Problema resuelto #7 (Continuidad de una función real de una variable real).

PROBLEMA RESUELTO # 8: Derivada n-ésima de una función real de una variable real. Determinar la derivada n-ésima (orden n) de la siguiente función: $f(x) = \frac{1}{x}$	
Abstracción	Para determinar la derivada de orden n de la función $f(x)$ hay que determinar, necesariamente, la primera derivada de la función ($f'(x)$) la segunda derivada ($f''(x)$), la tercera derivada ($f'''(x)$) y otras derivadas sucesivas hasta encontrar el patrón para la derivada n-ésima.
Descomposición del problema	Determinar las derivadas sucesivas siguientes: 1) De orden 1 (Primera derivada): $f'(x) = (-\frac{1}{x^2})$ 2) De orden 2 (Segunda derivada): $f''(x) = \left(\frac{-1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}$ 3) De orden 3 (Tercera derivada): $f'''(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = \frac{-6}{x^4}$
Análisis y representación de datos	Función real de una variable real: $f(x) = \frac{1}{x}$
Pensamiento algorítmico	**Paso 1:** $f'(x) = (-\frac{1}{x^2})$ **Paso 2:** $f''(x) = \left(\frac{-1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}$

	Paso 3: $f'''(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = \frac{-6}{x^4}$ **Paso 4:** $f''''(x) = \frac{24}{x^5}$
Reconocimiento y generalización de patrones	***Patrón # 1:*** (n=1) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow x^{n+1}$ (n=2) $f''(x) = \frac{2}{x^3} \rightarrow x^{n+2}$ (n=3) $f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \rightarrow x^{n+3}$ (n=4) $f''''(x) = \frac{24}{x^5} \rightarrow x^{n+4}$ $denominador = x^{n+1}$ ***Patrón # 2:*** $(-1)^n \begin{Bmatrix} si\ n\ es\ impar\ (-) \\ si\ n\ es\ par\ (+) \end{Bmatrix}$ ***Patrón # 3:*** (n=1) → numerador = 1 = 1 (n=2) → numerador = 2 = 2*1 (n=3) → numerador = 3 = 3*2*1 (n=4) → numerador = 4 = 4*3*2*1 *numerador = n!* ***Generalización de patrones:*** $f^n(x) = \frac{(-1)^n * n!}{x^{n+1}}$
Simulación / Evaluación	Se calculan derivadas de cualquier orden superior evaluando en la fórmula generalizada: $f^n(x) = \frac{(-1)^n * n!}{x^{n+1}}$

	N = 7 $f^{(7)} = \frac{(-1)^{7}*7!}{x^{8}}$ N = 8 $f^{8}(x) = \frac{(-1)^{8}*8!}{X^{9}}$ N = 9 $f^{9}(x) = \frac{(-1)^{9}*9!}{x^{10}}$ N = 10 $f^{10}(x) = \frac{(-1)^{10}*10!}{x^{11}}$

Tabla 9. Problema resuelto #8 (Derivada n-ésima de una función real de una variable real).

PROBLEMA RESUELTO # 9: Derivada n-ésima de una función real de una variable real. Determinar la derivada n-ésima (orden n) de la siguiente función: $f(x) = x * e^{-x}$	
Abstracción	Para determinar la derivada de orden n de la función $f(x)$ hay que determinar, necesariamente, la primera derivada de la función ($f'(x)$) la segunda derivada ($f''(x)$), la tercera derivada ($f'''(x)$) y otras derivadas sucesivas hasta encontrar el patrón para la derivada n-ésima.
Descomposición del problema	Determinar las derivadas sucesivas siguientes: 1) De orden 1 (Primera derivada): $f'(x) = e^{-x} - x * e^{-x}$ 2) De orden 2 (Segunda derivada): $f''(x) = -2e^{-x} + x * e^{-x}$ 3) De orden 3 (Tercera derivada): $f'''(x) = 3e^{-x} - x * e^{-x}$
Análisis y representación de datos	Función real de una variable real: $f(x) = x * e^{-x}$
Pensamiento algorítmico	**Paso 1:** $f'(x) = e^{-x} - x * e^{-x}$ **Paso 2:** $f''(x) = -2e^{-x} + x * e^{-x}$

	Paso 3: $f'''(x) = 3e^{-x} - x * e^{-x}$
Reconocimiento y generalización de patrones	***Patrón # 1: Primer término*** (n=1): e^{-x} (n=2): $-2e^{-x}$ (n=3): $3e^{-x}$ $Por\ tanto: (-1)^{n+1} * n * e^{-x}$ ***Patrón # 2: Segundo término*** (n=1): $-x * e^{-x}$ (n=2): $x * e^{-x}$ (n=3): $-x * e^{-x}$ $Por\ tanto: (-1)^{n} * x * e^{-x}$ ***Generalización de patrones:*** $f^{n}(x) = (-1)^{n+1} * n * e^{-x} + (-1)^{n} * x * e^{-x}$
Simulación / Evaluación	Se calculan derivadas de cualquier orden superior evaluando en la fórmula generalizada: $f^{n}(x) = (-1)^{n+1} * n * e^{-x} + (-1)^{n} * x * e^{-x}$ N = 7 $f^{(7)} = (-1)^{8} * 7 * e^{-x} + (-1)^{7} * x * e^{-x}$ N = 8 $f^{8}(x) = (-1)^{9} * 8 * e^{-x} + (-1)^{8} * x * e^{-x}$ N = 9 $f^{9}(x) = (-1)^{10} * 9 * e^{-x} + (-1)^{9} * x * e^{-x}$ N = 10 $f^{10}(x) = (-1)^{11} * 10 * e^{-x} + (-1)^{10} * x * e^{-x}$

Tabla 10. Problema resuelto #9 (Derivada n-ésima de una función real de una variable real).

PROBLEMA RESUELTO # 10: Problema de optimización de una función real de una variable real. Una cerca de 8 piezas de altura corre paralela a un edificio alto a una distancia de 4 pies de éste. ¿Cuál es la longitud de la escalera más corta que llegará desde el suelo, pasando

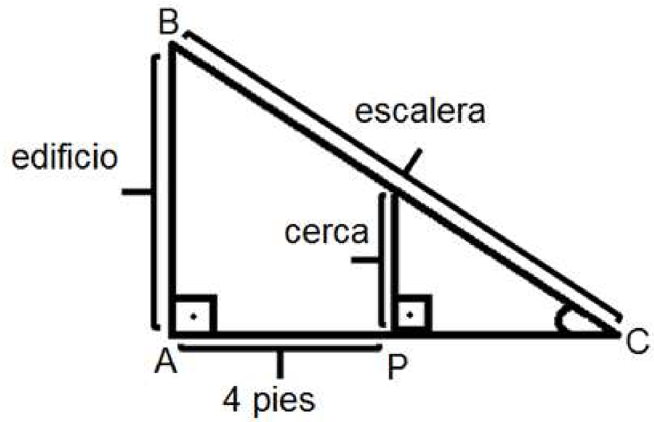
por encima de la cerca hasta la pared del edificio?	
Abstracción	 Se tiene que: $\Delta ABC \sim \Delta PQC$ por el teorema a*a
Descomposición del problema	1) Determinar la función a optimizar. 2) Trabajar con las restricciones del problema hasta encontrar relaciones entre las variables. 3) Plantear la función objetivo como una función real de una variable real. 4) Aplicar la teoría de extremos globales a la función objetivo planteado.
Análisis y representación de datos	$\overline{AP} = 4pies$ $\overline{PQ} = 8\,pies$ $\measuredangle\, BCA = 90°$ $\measuredangle\, QPC = 90°$ ¿BC?
Pensamiento algorítmico	**(ver anexo 9)**
Reconocimiento y generalización de patrones	-
Simulación / Evaluación	-

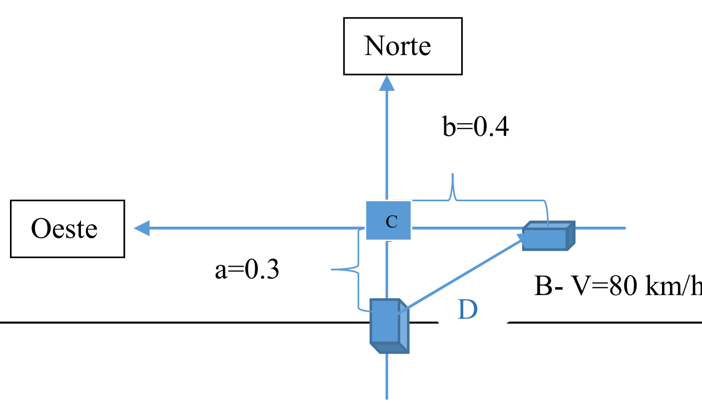
Tabla 11. Problema resuelto # 10 (Optimización de una función real de una variable real).

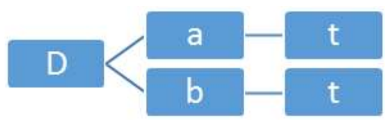
2.3.2.2 Matemática II

<table>
<tr><td colspan="2">PROBLEMA RESUELTO # 11: Interpretación geométrica de la derivada parcial.
Determinar la pendiente de la tangente a la curva de intersección de la superficie $6yz-2xz+5xy=0$ con el plano x=2 en el punto P$(2;3;-\frac{15}{7})$</td></tr>
<tr><td>Abstracción</td><td>La intersección entre una superficie $z=f(x,y)$ y un plano $x=x_0$ es una curva C y la pendiente (m) de la recta tangente (T) a una curva en un punto (p) se determina por la derivada de C evaluada en el punto, por tanto, $m_T\ a\ C\ en\ el\ punto\ p \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(p)$</td></tr>
<tr><td>Descomposición del problema</td><td>1) Determinar $z=f(x,y)$
2) Determinar $\frac{\partial z}{\partial y}$
3) Evaluar $\frac{\partial z}{\partial y}$ en p</td></tr>
<tr><td>Análisis y representación de datos</td><td>$Superficie: 6yz-2xz+5xy=0$
$z=\frac{5xy}{2x-6y}$
$Plano\ x=2$
$Punto\ P(2;3;-\frac{15}{7})$</td></tr>
<tr><td>Pensamiento algorítmico</td><td>Paso 1:
Determinar $z=f(x,y)=\frac{5xy}{2x-6y}$.
Paso 2:
Determinar $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{10x^2}{(2x-6y)^2}$.
Paso 3:</td></tr>
</table>

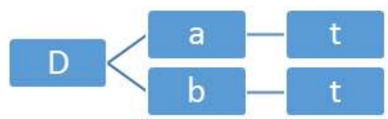
	Evaluar $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el punto P$(2;3;-\frac{15}{7})$. $$\frac{10x^2}{(2x-6y)^2}_{\mid(2;3;-\frac{15}{7})} = \frac{10}{49}$$ ***Paso 4:*** Emitir respuesta literal, la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección entre la superficie y el plano dados en el punto P es $\frac{10}{49}$
Reconocimiento y generalización de patrones	**Patrón #1:** La intersección de una superficie $z = f(x,y)$ con un plano $x = x_0$ o $y = y_0$ es una función real de una variable real. **Patrón #2:** Al determinar una derivada parcial se considera como variable con respecto a la cual se está derivando y las otras que puedan aparecer se consideran como constantes en la derivación.
Simulación / Evaluación	-

Tabla 12. Problema resuelto #11 (Interpretación geométrica de la derivada parcial).

PROBLEMA RESUELTO # 12: Interpretación física de la derivada parcial	
El auto A se desplaza hacia el norte por la carretera 16 y el auto B viaja hacia el oeste por la carretera 83; cada uno se aproxima al cruce de estas carreteras En cierto momento, el auto A está a 0.3 km del cruce y viaja a 90 km/h mientras que el auto B está a 0.4 km del cruce y viaja a 80 km/h ¿Cuál es la razón de cambio de la distancia entre los autos en ese momento?	
Abstracción	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
A- V=90 km/h
Como en el cruce de las carreteras se forma un ángulo de 90^0 se obtiene un triángulo rectángulo entre el auto A el cruce C y el auto B, entonces la distancia D (hipotenusa del triángulo ACB) se plantea utilizando en Teorema de Pitágoras y depende de las posiciones a y b de los autos en cada momento quedando:
$D(a;b) = \sqrt{a^2 + b^2} \ldots$
De esta forma D es una función que depende de las posiciones a y b las cuales a su vez cambian en el tiempo, por tanto el diagrama de dependencia entre estas variables queda como sigue:


Se conoce que la velocidad instantánea de cada auto se puede plantear por las derivadas siguientes $\frac{da}{dt} = 90\ km/h;\ \ \frac{db}{dt} = 80\ km/h$ que son datos, pero como a y b también dependen del tiempo entonces para determinar la razón de cambio de la distancia D entre los autos ($\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial D}{\partial b} \cdot \frac{db}{dt}$) es necesario descomponer el problema.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Descomposición del problema</td>
<td>
1) Determinar $\frac{\partial D}{\partial a}$
2) Evaluar $\frac{\partial D}{\partial a}$ en (a=0.3 y b=0.4)
3) Determinar $\frac{\partial D}{\partial b}$
4) Evaluar $\frac{\partial D}{\partial b}$ en (a=0.3 y b=0.4)
</td>
</tr>
<tr>
<td>Análisis y representación de</td>
<td>La velocidad de los autos cuando se encuentran en la posición</td>
</tr>
</table>

datos	$a = 0.3\ km\ \ y\ b = 0.4\ km$ del cruce se representa respectivamente por las derivadas siguientes: $\frac{da}{dt} = 90\ km/h;\ \ \frac{db}{dt} = 80\ km/h$
Pensamiento algorítmico	***Paso 1:*** Plantear la función de distancia $D(a;b) = \sqrt{a^2 + b^2}$ ***Paso 2:*** Plantear el diagrama de dependencia entre las variables (diagrama de árbol)  ***Paso 3:*** Reconocer que la razón de cambio de la distancia entre los autos ($\frac{\partial D}{\partial t}$) se determina por $\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial D}{\partial b} \cdot \frac{db}{dt}$ (Fórmula de la regla de la cadena para este problema) ***Paso 4:*** Reconocer que son datos las siguientes derivadas $\frac{da}{dt} = 90\ km/h;\ \ \frac{db}{dt} = 80\ km/h$ ***Paso 5:*** Determinar $\frac{\partial D}{\partial a} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ***Paso 6:*** Evaluar $\frac{\partial D}{\partial a}$ en (a=0.3 y b=0.4) $\frac{\partial D}{\partial a} = \frac{0.3}{\sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2}} = 0.91$ ***Paso 7:*** Determinar $\frac{\partial D}{\partial b} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ***Paso 8:***

	Evaluar $\frac{\partial D}{\partial b}$ en (a=0.3 y b=0.4) $$\frac{\partial D}{\partial b} = \frac{0.4}{\sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2}} = 1.21$$ ***Paso 9:*** Calcular $\frac{\partial D}{\partial t}$ sustituyendo todos los resultados anteriores en la fórmula de la regla de la cadena expresada anteriormente. $$\frac{\partial D}{\partial t} = 0.91 \cdot 90 + 1.21 \cdot 80 = 178.7$$ ***Paso 10:*** Emitir respuesta literal, la razón de cambio de la distancia entre los autos es 178.7 km/h.
Reconocimiento y generalización de patrones	***Patrón 1:*** La razón de cambio de "a" en el tiempo "t" se plantea como: $\frac{da}{dt} = 90\ km/h$ ***Patrón 2:*** La razón de cambio de "b" en el tiempo "t" se plantea como: $$\frac{db}{dt} = 80\ km/h$$ ***Patrón 3:*** La razón de cambio de "D" respecto a las posiciones "a" y "b" de los autos se plantean: $\frac{\partial D}{\partial a}$ y $\frac{\partial D}{\partial b}$ ***Patrón 4:*** La razón de cambio de "D" en el tiempo "t" se plantea como: $$\frac{\partial D}{\partial t}$$ **Generalización:** La razón de cambio $\frac{\partial D}{\partial t}$ se determina como

	sigue: $\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial a} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{\partial D}{\partial b} \cdot \frac{db}{dt}$
Simulación / Evaluación	-

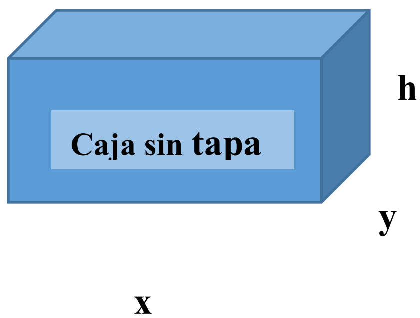
Tabla 13. Problema resuelto #12 (Interpretación física de la derivada parcial).

PROBLEMA RESUELTO # 13: Derivada direccional de una función real de varias variables. Determinar la derivada de la función $f(x,y) = 1 + 2x\sqrt{y}$ en el punto P (3; 4) en la dirección del vector $\vec{v} = (4; -3)$.	
Abstracción	Lo que se pide es la derivada direccional de f según el vector $\vec{v}$ en el punto P. Se conoce que puede ser determinado por la fórmula siguiente: $D_u f(3;4) = \overrightarrow{\nabla f}\ (3;4) \cdot \vec{u}$, donde $D_u f(3;4)$ – Derivada direccional de f en el punto (3;4) $\overrightarrow{\nabla f}\ (3;4)$ - Gradiente de f en el punto (3;4) $\vec{u}$ – Vector unitario
Descomposición del problema	1) Determinar el gradiente $\overrightarrow{\nabla f} = < \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} >$ 2) Evaluar el gradiente $\overrightarrow{\nabla f}$ en el punto (3;4) 3) Determinar el vector unitario $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert}$
Análisis y representación de datos	• Una función de dos variables independientes “x” y “y” $f(x,y) = 1 + 2x\sqrt{y}$ • Un punto P(3;4) • La dirección de un vector $\vec{v} = (4, -3)$
Pensamiento algorítmico	***Paso 1:*** Determinar $\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sqrt{y}$ ***Paso 2:***

	Determinar $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{y}}$ ***Paso 3:*** Plantear el gradiente $\overrightarrow{\nabla f} = \langle 2\sqrt{y}, x/\sqrt{y}\rangle$ ***Paso 4:*** Evaluar el gradiente $\overrightarrow{\nabla f}$ en el punto (3;4) $\overrightarrow{\nabla f}_{(3;4)} =< 2\sqrt{4}, \frac{3}{\sqrt{4}} >= \langle 4, 3/2\rangle$ ***Paso 5:*** Determinar $\lvert\vec{v}\,\rvert = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$ ***Paso 6:*** Calcular $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\lvert\vec{v}\,\rvert} = \frac{(4,-3)}{5} = (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$ ***Paso 7:*** Calcular $D_u f(3;4)$ sustituyendo todos los resultados anteriores en la fórmula $D_u f(3;4) = \overrightarrow{\nabla f}\,(3;4) \cdot \vec{u} = \langle 4, 3/2\rangle \cdot \langle 4/5, -3/5\rangle = \frac{16}{5} + \frac{-9}{10} = \frac{23}{10}$ ***Paso 8:*** Emitir respuesta literal, la derivada de f en el punto P según el vector $\vec{v}$ es $\frac{23}{10}$
Reconocimiento y generalización de patrones	-
Simulación / Evaluación	-

Tabla 14. Problema resuelto #13 (Derivada direccional de una función real de varias variables).

PROBLEMA RESUELTO # 14: Extremos condicionados de una función real de varias

variables. Se desea construir una caja de base rectangular (sin tapa) que tenga un volumen de 12 cm^3; el costo por cm^2 del material que se usará para la base es de 4 pesos, el que se usará para dos de los lados opuestos es de 3 pesos y el que se usará para los otros dos lados opuestos es de 2 pesos. Determinar las dimensiones de la caja para que el costo sea mínimo.	
Abstracción	 $V = x \cdot y \cdot h = 12$ $Ab = x \cdot y \Rightarrow$ Cuesta \$4 $Al = 2 \cdot x \cdot h + 2 \cdot y \cdot h$ Cuesta \$3 Cuesta \$2 Reconocer que es un problema de optimización con restricción. Minimizar una función de costo sujeta a la restricción $V = x \cdot y \cdot h = 12$. Método de resolución: “Método de los Multiplicadores de Lagrange (M.M.L)”
Descomposición del problema	5) Determinar la función objetivo y la restricción. 6) Aplicar el Método de los Multiplicadores de Lagrange.
Análisis y representación de datos	• V=12 cm^3 • Costo del material de la base: 4 • Costo del material de par de lados opuestos: 3 • Costo del material del otro par de lados opuestos: 2
Pensamiento algorítmico	***Paso 1:*** Determinar a partir de un modelo matemático lo que se quiere optimizar (Función Objetivo). $Al(x, y, h) = Ab + 2 \cdot xh + 2 \cdot yh$ Minimizar: $C(x, y, h) = 4 \cdot Ab + 3 \cdot 2 \cdot xh + 2 \cdot 2 \cdot yh$ FUNCIÓN OBJETIVO: $C(x, y, h) = 4 \cdot Ab + 6 \cdot xh + 4 \cdot yh$

Paso 2:

Plantear la ecuación de enlace (la restricción igualada a cero):

$$V(x, y, h) = x \cdot y \cdot h - 12 = 0$$

Paso 3:

Plantear la función auxiliar de Lagrange (se introduce un multiplicador de Lagange por cada restricción del problema):

$$\varphi(x, y, h, \lambda) = C(x, y, h) - \lambda \cdot V(x, y, h)$$

$$\varphi(x, y, h, \lambda) = 4 \cdot Ab + 6 \cdot xh + 4 \cdot yh - \lambda \cdot (x \cdot y \cdot h - 12)$$

Paso 4:

Plantear el sistema de ecuaciones correspondiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 & (I) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 & (II) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial h} = 0 & (III) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0 & (IV) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 4y + 6h - \lambda yh = 0 & (I) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 4x + 4h - \lambda xh = 0 & (II) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial h} = 6x + 4y - \lambda xy = 0 & (III) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 12 - xyh = 0 & (IV) \end{cases}$$

Paso 5:

Resolver el sistema de ecuaciones planteado, sus soluciones son los posibles puntos de extremo condicionado.

Paso 5.1:

Despejar λ en cada ecuación del sistema

Despejando $\lambda \; en \; (I)$: $\lambda = \frac{4y+6h}{yh}$

Despejando $\lambda \; en \; (II)$: $\lambda = \frac{4x+4h}{xh}$

Despejando $\lambda \; en \; (III)$: $\lambda = \frac{4y+6x}{xy}$

Paso 5.2:

Igualar estas expresiones hasta obtener relaciones entre las variables hasta poner todas en función de una, de forma que al sustituir estas relaciones en la última ecuación del sistema se

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
obtiene una ecuación de una sola variable
<table>
<tr>
<td>
$$\frac{4y+6h}{yh}=\frac{4x+4h}{xh}$$
$$xh(4y+6h)=yh(4x+4h)$$
$$\vdots$$
$$6x=4y$$
$$x=\frac{2y}{3}$$
</td>
<td>
$$\frac{4x+4h}{xh}=\frac{4y+6x}{xy}$$
$$xh(4y+6h)=xy(4x+4h)$$
$$\vdots$$
$$4y=6h$$
$$h=\frac{2y}{3}$$
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
Sustituyendo $x=\frac{2y}{3}$ y $h=\frac{2y}{3}$ en (IV):

$$12-\frac{2y}{3}\cdot y\cdot\frac{2y}{3}=0$$
$$12-\frac{2y}{3}\cdot y\cdot\frac{2y}{3}=0$$
$$12-\frac{2y}{3}\cdot y\cdot\frac{2y}{3}=0$$
</td>
</tr>
</table>

Paso 5.3:

Resolver la ecuación obtenida

$12=\frac{4}{9}\cdot y^3$ 27$=y^3$ $\sqrt[3]{27}=y$ $y=3$

Paso 5.4:

Determinar el valor de cada una de las variables del sistema, excepto de λ

Como $x=\frac{2y}{3}=h$ entonces $x=h=2$

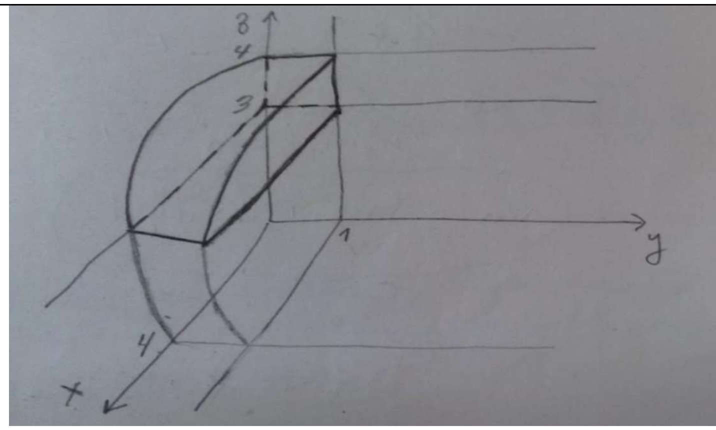
Paso 6:

Emitir respuesta literal al problema.

Las dimensiones que minimizan el costo de la caja son las siguientes: Base de la caja 2 x 3 cm y altura 2 cm.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Reconocimiento y generalización de patrones</td>
<td>-</td>
</tr>
<tr>
<td>Simulación / Evaluación</td>
<td>-</td>
</tr>
</table>

Tabla 15. Problema resuelto #14 (Extremos condicionados de una función real de varias variables).

<table>
<tr><td colspan="2">PROBLEMA RESUELTO # 15: Volumen de un sólido.
Calcular el volumen del sólido siguiente:
$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \sqrt{16 - z^2},\ z \geq 3,\ 0 \leq y \leq 1\right\}$</td></tr>
<tr><td>Abstracción</td><td>Reconocer que para determinar el volumen de un sólido se utiliza un objeto matemático que es la integral triple calculada sobre el sólido en cuestión y tomando 1 como integrando. Por tanto,
$$V = \iiint_W 1\,dv$$</td></tr>
<tr><td>Descomposición del problema</td><td>1) Representar el sólido W
2) Determinar la variable de la primera integración y la proyección S.
3) Plantear y calcular la primera integración.
4) Representar la proyección S
5) Calcular la integral doble resultante.</td></tr>
<tr><td>Análisis y representación de datos</td><td>• x=0: Plano YZ
• $x = \sqrt{16 - z^2}$ $x^2 + z^2 = 16$: Cilindro circular de radio 4 y eje principal sobre el “eje y”
• z=3: Plano paralelo a XY que corta al “eje z” en 3
• y=0: Plano XZ
• y=1: Plano paralelo a XZ que corta al “eje y” en 1</td></tr>
<tr><td>Pensamiento algorítmico</td><td>Paso 1:
Representar el sólido</td></tr>
</table>



Paso 2:

Determinar la variable de la primera integración y la proyección *S*. Tomando a "x" como la variable de la primera integración la cual varía como sigue: $0 \leq x \leq \sqrt{16 - z^2}$ entonces la proyección *S* queda sobre el plano YZ.

Paso 3:

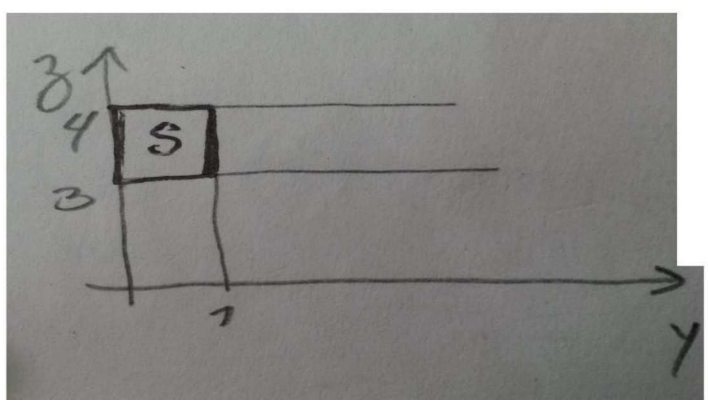
Plantear y calcular la primera integración.

$$V = \iiint_W 1\,dv = \iint_S \left(\int_0^{\sqrt{16-z^2}} 1\,dx \right) dydz$$

$$V = \iiint_W 1\,dv = \iint_S \left(\sqrt{16 - z^2} \right) dydz$$

Paso 4:

Representar la proyección S sobre el plano YZ



Paso 5:

Calcular la integral doble resultante.

	$\iint_S \left(\sqrt{16-z^2}\right) dydz = \int_3^4 \int_0^1 \sqrt{16-z^2}\, dydz$ $\int_3^4 \int_0^1 \sqrt{16-z^2}\, dydz = \int_3^4 \sqrt{16-z^2}\ dz$ $= \left[\frac{1}{2}(z \cdot \sqrt{16-z^2} + 16 \cdot \sin^{-1}(\frac{z}{4}))\right]\Big\|_3^4$ $= \frac{1}{2}\left(4 \cdot \sqrt{16-4^2} + 16 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)\right) - \frac{1}{2}(3 \cdot \sqrt{16-3^2} + 16 \cdot \sin^{-1}(\frac{3}{4}))=$ 1.79 ***Paso 6:*** Emitir respuesta literal al problema. El volumen del sólido W es $1.79\ u^3$
Reconocimiento y generalización de patrones	Elección de la primera variable, que es la que varía entre cuerpos o planos. La variable que varía entre constantes queda en la proyección. La generalización sería la integral de $\sqrt{16-z^2} = \left[\frac{1}{2}\left(z(16-z^2) + 16.\sin^{-1}\left(\frac{z}{4}\right)\right)\right]$
Simulación / Evaluación	Variar el tamaño del sólido w y recalcular su volumen (viene de los últimos 3 pasos del algoritmo)

Tabla 16. Problema resuelto #15 (Volumen de un sólido).

2.3.3 Problemas de Matemática Discreta

2.3.3.1 Lógica Proposicional

PROBLEMA RESUELTO # 16. Representación de estructuras deductivas
Represente la estructura deductiva del siguiente razonamiento:
No me preparé correctamente para la CP. No. 1. No me preparé correctamente para la CP. No. 2. Si no me preparo correctamente para las clases prácticas entonces la profesora nota mis dificultades al resolver los ejercicios. Si tengo dificultades al resolver los ejercicios

la profesora me evalúa de 2 en la clase práctica correspondiente. Si me evalúan de mal en varias clases prácticas, tendré un criterio de mal en el corte 1. Con un criterio de mal en el corte 1 tengo probabilidades de fallar la asignatura. La profesora nota mis dificultades al resolver los ejercicios.	
Abstracción	Para representar una estructura deductiva, hay que formar dos sucesiones correctamente formada: ✓ Una sucesión de premisas $P_1, P_2, \ldots, P_n$. ✓ Una sucesión de conclusiones $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ Extraer del problema original los elementos que pueden constituir premisas y conclusiones basándose en la definición y significado de premisas y conclusiones.
Descomposición del problema	De dos sucesiones formadas, separar las premisas de las conclusiones. *Premisas:* P1: no me preparé para la clase práctica número 1; P2: no me preparé para la clase práctica número 2; P3: si no me preparo para las clases prácticas entonces tengo dificultades al resolver los ejercicios; P4: si tengo dificultades al resolver ejercicios, entonces me evalúo de 2; P5: si me evalúan de 2 en varias clases prácticas, entonces tendré un criterio de mal en el corte 1. P6: si tengo un criterio de mal en el corte 1, tengo probabilidades de fallar la asignatura.

	Conclusiones: Q1: tengo dificultades en resolver ejercicios.
Análisis y representación de datos	**Entrada:** Un razonamiento en lenguaje natural del que se debe representar su estructura deductiva, teniendo en cuenta las reglas del cálculo proposicional. **Salida:** La estructura deductiva representada según las reglas del cálculo proposicional.
Pensamiento algorítmico	**(Ver anexo 8)**
Reconocimiento y generalización de patrones	***Patrón # 1:*** Para representar un razonamiento o estructura deductiva, hay que formas dos grupos de sucesiones: 1) Premisas 2) Conclusiones ***Patrón # 2:*** las proposiciones atómicas se escriben con letras del abecedario y todas en minúsculas, partiendo de la letra p.
Simulación / Evaluación	-

Tabla 17. Problema resuelto #16 (Representación de estructuras deductivas) [37].

PROBLEMA RESUELTO # 17 Traducción al lenguaje natural	
Formule la siguiente expresión simbólica con palabras utilizando: p = hoy es lunes q = está lloviendo r = hace calor $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow (r \vee (q \wedge p))$	
Abstracción	Traducir la formula proposicional $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow (r \vee (q \wedge p))$, al lenguaje natural utilizando las proposiciones:

	p = hoy es lunes q = está lloviendo r = hace calor
Descomposición del problema	Para traducir la formula dada al lenguaje español, hay que tener en cuenta lo siguiente: 1) Descomponer dicha fórmula aplicando la propiedad distributiva. 2) Traducir la formula resultante al lenguaje español utilizando las proposiciones dadas.
Análisis y representación de datos	**Entrada:** *Proposición:* p = hoy es lunes q = está lloviendo r = hace calor *Fórmula proposicional:* $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow (r \vee (q \wedge p))$ **Salida:** La fórmula proposicional traducida al lenguaje español.
Pensamiento algorítmico	***Paso 1:*** Para formular en palabras la expresión dada, hay que descomponer la fórmula proposicional aplicando la propiedad distributiva $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow (r \vee (q \wedge p))$ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \rightarrow (r \vee q) \vee (r \vee p)$

	Paso 2: Si la fórmula proposicional ya está disuelta y por lo tanto más cómoda de trabajar, entonces traducirla en palabras, en función de las siguientes proposiciones dadas: p = hoy es lunes q = está lloviendo r = hace calor $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \rightarrow (r \vee q) \vee (r \vee p)$ = si hoy es lunes y está lloviendo o hoy es lunes y hace calor, entonces hace calor o está lloviendo, o hace calor u hoy es lunes.
Reconocimiento y generalización de patrones	***Patrón # 1:*** Todas las proposiciones están afirmativas. ***Patrón # 2:*** Las proposiciones atómicas se escriben con letras del abecedario y todas en minúsculas, partiendo de la letra p.
Simulación / Evaluación	-

Tabla 18. Problema resuelto #17 (Traducción al lenguaje natural) [38]

PROBLEMA RESUELTO # 18 Tabla de verdad Confeccione la tabla de verdad correspondiente a la siguiente proposición compuesta: $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
Abstracción	Para confeccionar la tabla de verdad de cualquier posición, hay que tener en cuenta: ➢ Si una fórmula tiene **n** variables proposicionales entonces su tabla de verdad tendrá 2^n filas, ➢ Si A es una tautología (cuando el resultado de la tabla de verdad es cero) entonces ~A es una contradicción y viceversa. ➢ Si A es una contingencia (cuando el resultado de la tabla es cero y uno) entonces ~A es otra contingencia. ➢ Como consecuencia de la definición de deducción correcta

<table>
<tr><td></td><td>semánticamente se tiene que:
Una deducción
$P_1, P_2, \ldots, P_n \Rightarrow Q$
Es semánticamente correcta sí y solo sí
$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$ es una tautología (cuando el resultado de la fórmula es 1).</td></tr>
<tr><td>Descomposición del problema</td><td>1) Atendiendo a que hay tres variables proposicionales, entonces la tabla de verdad tendrá $2^3 = 8$ filas.

2) Teniendo en cuenta que la proposición es compuesta, hay que hacer una tabla de verdad para la conjunción y otra para la disyunción.

3) En la conjunción, la proposición $p \wedge q$ es verdadera si y solo si p y q son verdaderas.

4) En la disyunción, p V q se utiliza en el sentido inclusivo; es decir, p V q es verdadera si p o q o ambas son verdaderas y p V q es falsa solo si las p y q son falsas.</td></tr>
<tr><td>Análisis y representación de datos</td><td>Entrada:
Proposición compuesta = $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
Salida:
Tabla de verdad resultante de proposición compuesta dada.</td></tr>
<tr><td>Pensamiento algorítmico</td><td>Paso 1:
Teniendo en cuenta que la proposición es compuesta, y en ella aparecen una conjunción y una disyunción, hacer una tabla de verdad para cada una de ellas.

<table><tr><td>P</td><td>q</td><td>p ˅ q</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>V</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>V</td></tr></table></td></tr>
</table>

0	1	V
0	0	F

Conjunción

Disyunción

p	q	p ^ q
1	1	V
1	0	F
0	1	F
0	0	F

Paso 2:

Una vez construidas las tablas de las proposiciones por separadas, construimos la tabla de verdad de la fórmula proposicional.

P	q	r	P ^ q	P ^ r	(p ^ q) v (p ^ r)
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Reconocimiento de patrones y generalización de patrones

Patrón # 1: El primer valor de la tabla de verdad es verdadero y el último es falso.

Simulación / Evaluación

Construir una nueva tabla de verdad con los mismos valores de entrada pero, cambiando el signo que conecta las dos proposiciones para ver si el comportamiento de la tabla será el

	mismo.

Tabla 19. Problema resuelto #18 (Tabla de verdad) [38].

2.3.3.2 Algoritmo y recursividad

PROBLEMA RESUELTO # 19 Problema del factorial Cálculo del factorial de un número $n > 0$	
Abstracción	La definición recursiva del factorial de un número $n > 0$, considerando que 0! = 1 por definición, se obtiene como consecuencia de aplicar la propiedad asociativa de la multiplicación, es decir: $n! = n * (n-1) * (n-2) * ... * 0!$ Asociando los factores de la siguiente forma: $n! = n * (n-1) * [(n-2) * ... * 0!]$ Se tiene que: $n! = n * (n-1)!$ Así pues la definición recursiva de factorial es: $n! = \begin{Bmatrix} n * (n-1)! & si\ n > 0 \\ 1 & si\ n = 0 \end{Bmatrix}$
Descomposición del problema	El problema del cálculo de factorial de un número natural cualquiera, se subdivide en 2 subproblemas: 1) Resolver el problema general recursivamente. 2) Encontrar el caso base y resolverlo.
Análisis y representación de datos	**Entrada:** el número n, del que calcular su factorial y que debe

	cumplir con la precondición de que $(n > 0)$. **Salida:** el factorial del número, es decir, factorial (n) = $n!$
Pensamiento algorítmico	**Paso 1:** Hacer sucesivas llamadas al procedimiento hasta alcanzar el caso base. $n! = n * (n-1) * (n-2) * ... * 0!$ Un ejemplo para N = 2, sería: $2! = 2 * (2-1) * (2-2)$ **Paso 2:** Resolver el caso base. $0! = 1$ **Paso 3:** Resolver el resto de los subproblemas de abajo hacia arriba. Si le damos un valor entero a N, o sea N = 3, entonces tenemos como subproblemas asociados a este problema:
Reconocimiento de patrones y	**Patrón # 1**

Problema	Subproblema
$3!$	$3 * 2!$
$2!$	$2 * 1!$
$1!$	$1 * 0!$
$0!$	1

<table>
<tr><td>generalización de patrones</td><td>

$n! = n * (n-1)!$

Este procedimiento se repite n veces para todo $n > 0$, hasta llegar al caso base o condición de parada, donde $\mathrm{n} = 0$

Patrón # 2:

$0! = 1 \rightarrow$ Condición de parada.

</td></tr>
<tr><td>Simulación / Evaluación</td><td>

Rastrear $n = 4$

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Subproblemas</th><th>Resolución</th></tr>
<tr><td>$4!$</td><td>$4 * 3!$</td><td>$4 * 3 = 24$</td></tr>
<tr><td>$3!$</td><td>$3 * 2!$</td><td>$3 * 2 = 6$</td></tr>
<tr><td>$2!$</td><td>$2 * 1!$</td><td>$2 * 1 = 2$</td></tr>
<tr><td>$1!$</td><td>$1 * 0!$</td><td>$1 * 1 = 1$</td></tr>
<tr><td>$0!$</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

</td></tr>
</table>

Tabla 20. Problema resuelto #19 (Problema del factorial) *[39]*.

<table>
<tr><td colspan="2">

PROBLEMA RESUELTO # 20 Sucesión de Fibonacci

Escriba una definición recursiva para la sucesión de Fibonacci.

</td></tr>
<tr><td>Abstracción</td><td>

La sucesión de Fibonacci es una sucesión infinita de números naturales que están determinados por los dos primeros números 0 y 1.

$$f_{(n)} = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ 1 & si\ n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & si\ n \geq 2 \end{cases}$$

</td></tr>
<tr><td>Descomposición del problema</td><td>Resolver la sucesión de los números de Fibonacci por la</td></tr>
</table>

	ecuación general: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ partiendo de los dos primeros valores predeterminados o condición de parada: $f_0 = 1$ $f_1 = 1$
Análisis y representación de datos	**Entrada** n (números naturales). **Salida:** la sucesión de los números de Fibonacci $f_{(n)}$.
Pensamiento algorítmico	**Paso 1:** Encontrar la ecuación para hallar el término enésimo de la sucesión de Fibonacci. $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ***Paso 2:*** Resolver el caso base $f_0 = 1$ $f_1 = 1$
Reconocimiento de patrones y generalización de patrones	**Patrón # 1:** $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
Simulación / Evaluación	Hallar la sucesión de Fibonacci para N = 5 Si hacemos el uso de la ecuación $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, teniendo en cuenta los dos primeros valores predeterminados, tenemos: $f_5 = f_4 + f_3 + f_2 + f_1 + f_0$ Si bien sabemos, la sucesión de Fibonacci, es un algoritmo recursivo y como tal, se resuelve de atrás hacia adelante.

	Tenemos entonces: $f_0 = 1$ $f_1 = 0 + 1 = 1$ $f_2 = 1 + 1 = 2$ $f_3 = 2 + 1 = 3$ $f_4 = 3 + 2 = 5$ $f_5 = 3 + 5 = 8$

Tabla 21. Problema resuelto #20 (Sucesión de Fibonacci) [40].

PROBLEMA RESUELTO # 21 Suma recursiva de los N primeros números naturales Escriba un algoritmo recursivo para el cálculo de la suma de los N primeros números naturales.	
Abstracción	Plantear una función que se llame a sí misma y un caso base o condición de parada.
Descomposición del problema	*Condición de parada:* $s(n) = 0 \rightarrow si\ n = 0$ *Función recursiva:* $s(n) = n + s(n1) \rightarrow si\ n > 0$
Análisis y representación de datos	**Entrada:** n que pertenece a los números naturales. **Salida:** El sumatorio de los n números naturales $suma(n) = s(n)$
Pensamiento algorítmico	**Paso 1:** Definir caso base o condición de parada.

<table>
<tr><td></td><td>

$s(n) = 0 \rightarrow si\ n = 0$

Paso 2: Definir función recursiva para la salida.

$s(n) = n + s(n-1) \rightarrow si\ n > 0$

</td></tr>
<tr><td>Reconocimiento de patrones y generalización de patrones</td><td>

Patrón # 1:

$\mathrm{s(n) = n + s(n-1)}$

Este procedimiento se repite n veces hasta llegar al caso base o condición de parada, donde $\mathrm{n} = 0$

</td></tr>
<tr><td>Simulación / Evaluación</td><td>

Rastrear el algoritmo de la sumatoria para $N = 3$:

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Suma</th><th>Subproblema</th><th>Resolución</th></tr>
<tr><td>$\mathrm{s(3)}$</td><td>$3 + 2 + 1 = 6$</td><td>$3 + s(2)$</td><td>$3 + 3 = 6$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{s(2)}$</td><td>$2 + 1 + 0 = 3$</td><td>$2 + s(1)$</td><td>$2 + 1 = 3$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{s(1)}$</td><td>$1 + 0 = 1$</td><td>$1 + s(0)$</td><td>$1 + 0 = 1$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{s(0)}$</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr>
</table>

</td></tr>
</table>

Tabla 22. Problema resuelto #21 (Suma recursiva de los N primeros números naturales) [41].

<table>
<tr><td colspan="2">

PROBLEMA RESUELTO # 22 Problema del robot (recursividad)

Un robot puede dar pasos de 1 ó 2 metros. Escribir un algoritmo recursivo para calcular el número de formas en que puede recoger n metros.

</td></tr>
<tr><td>Abstracción</td><td>

Sea $camina(n)$ el número de formas en que el robot puede caminar n metros, hemos observado que:

$camina\ 1 = 1$

</td></tr>
</table>

	$camina\ 2 = 2$ Por lo tanto, el algoritmo calcula la función definida como: $camina(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2 & n = 2 \\ camina(n-1) + camina(n-2) & n > 2 \end{cases}$
Descomposición del problema	Para hallar el número n-ésimo de formas en que puede caminar un robot, hay que plantear: 1) El (los) caso (s) base (s) que nos da el problema: $camina\ 1$ $camina\ 2$ 2) La fórmula general: $camina(n) \rightarrow n > 2$
Análisis y representación de datos	**Entrada:** N: (Número de pasos que puede dar un robot). **Salida:** Número de formas en que el robot puede caminar n metros. $camina(n)$:
Pensamiento algorítmico	***Paso 1:*** Resolver el caso base $camina\ 1 = 1$ $camina\ 2 = 2$ ***Paso 2:*** Para calcular la cantidad de formas en que un robot puede caminar n metros, teniendo en cuenta que ya se han declarado los casos bases, tendremos: $camina(n) = camina(n-1) + camina(n-2) \rightarrow n > 2$

<table>
<tr><td>Reconocimiento de patrones y generalización de patrones</td><td>Patrón # 1: $camina(n) = camina(n-1) + camina(n-2)$

Este procedimiento se repite para todo $n > 2$.</td></tr>
<tr><td>Simulación / Evaluación</td><td>
<table>
<tr><td>Distancia</td><td>Serie de pasos</td><td>Número de formas de recogerlos</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$1{,}1 \ o \ 2$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$1{,}1{,}1 \ o \ 1{,}2 \ o \ 2{,}1$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$1{,}1{,}1{,}1 \ o \ 1{,}1{,}2 \ o \ 1{,}2{,}1 \ o \ 2{,}1{,}1 \ o \ 2{,}2$</td><td>5</td></tr>
</table>
Formas en que el robot puede recorrer 4 metros:

$camina(4) = camina(3) + camina(2) = 3 + 2 = 5$</td></tr>
</table>

Tabla 23.Problema resuelto #22 (Problema del Robot) [42]

2.4 Conclusiones

- Los 6 componentes del pensamiento computacional (abstracción, análisis y representación de datos, descomposición del problema, pensamiento algorítmico, reconocimiento y generalización de patrones, simulación/evaluación) fueron desarrollados en cada uno de los problemas que conforman el “Módulo de problemas resueltos (MPR)”.
- El MPR quedó conformado de la siguiente forma:
  - ✓ Problemas de búsqueda sin heurística (5)
  - ✓ Problemas de Matemática I (5)
  - ✓ Problemas de Matematica II (5)
  - ✓ Problemas de Matemática Discreta (7)

GITEM@

Grupo de Investigación sobre Tecnologías EMergentes para el Aprendizaje

UNIVERSIDAD DE CIENFUEGOS CARLOS RAFAEL RODRÍGUEZ

Bibliografía

Avello-Martínez, R., Lavonen, J. y Zapata-Ros, M. (2020). Coding and educational robotics and their relationship with computational and creative thinking. A compressive review. *RED. Revista Educación a Distancia, 20*(62). http://dx.doi.org/10.6018/red.413021

García-Peñalvo, F. J., & Mendes, A. J. (2018). Exploring the computational thinking effects in pre-university education. Computers in Human Behavior, 80 (2018) 407-411. Doi: https://doi.org/10.1016/j.chb.2017.12.005

García-Valcárcel, A., y Caballero-González, Y.A. (2019). Robotics to develop computational thinking in early Childhood Education. Comunicar, n. 59, v. XXVII, 63-72. DOI: https://doi.org/10.3916/C59-2019-06

Jurado, M., Avello, R. y Bravo, G. (2020). Caracterización de la comunicación interpersonal en el proceso enseñanza-aprendizaje. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 22*, e09, 1-11. https://doi.org/10.24320/redie.2020.22.e09.2284

Rodríguez del Rey, YA., Cawanga, IN., Deco, C., Bender, C., Avello- Martínez, R., Villalba- Condori, KO. (2020). Developing computational thinking with a module of solved problems. *Computer Applications in Engineering Education*, 2020, 1–11. https://doi.org/10.1002/cae.22214

Rodríguez-Martínez, J.A., González-Calero, J.A., & Sáez-López, J.M. (2019): Computational thinking and mathematics using Scratch: an experiment with sixth-grade students, Interactive Learning Environments, DOI: 10.1080/10494820.2019.1612448

Román-González M., Moreno-León J., & Robles G. (2019) Combining Assessment Tools for a Comprehensive Evaluation of Computational Thinking Interventions. In: Kong SC., Abelson H. (eds) Computational Thinking Education. Springer, Singapore

Vidal, M.J., Avello, R., Rodríguez, M.A., Menéndez, J.A. (2019). Simuladores como medios de enseñanza. *Educación Médica Superior, 33(4)*:e2085. http://www.ems.sld.cu/index.php/ems/

Villalba-Condori, K., Avello-Martínez, R., Berrios-Espezua, M., Castro-Cuba, S. (2020). Estudiantes y medios tecnológicos: uso y actitud para la formación del lexicón. *Información Tecnológica, 31*(2). http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642020000200141

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. Communications of the ACM, 49(3), 33–35.

Zapata-Ros, M. (2015). Pensamiento computacional: Una nueva alfabetización digital. RED. Revista de Educación a Distancia, 46. Retrieved from http://www.um.es/ead/red/46/zapata.pdf

Grupo de Investigación sobre Tecnologías EMergentes para el Aprendizaje
http://gitema.ucf.edu.cu
http://robomind.ucf.edu.cu