

# Modelización matemática y tecnologías digitales en las trayectorias de formación de docentes de educación secundaria

Mónica E. Villarreal

Consejo Nacional de  
Investigaciones Científicas  
y Técnicas



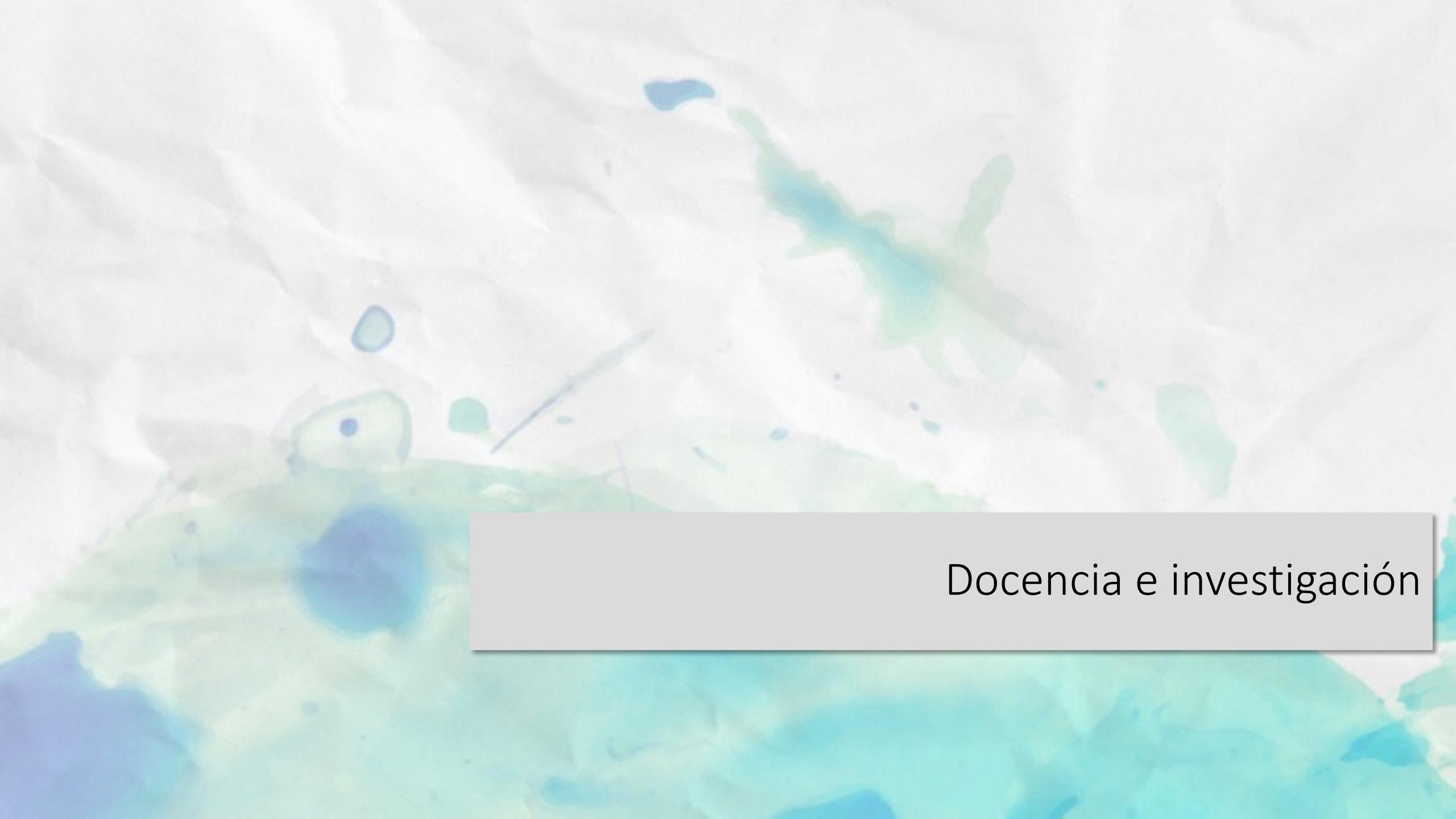
Grupo de Enseñanza de la Ciencia y la  
Tecnología (GECyT)  
Facultad de Matemática, Astronomía,  
Física y Computación  
Universidad Nacional de Córdoba



ARGENTINA

# Recorrido de la conferencia

- ✓ Docencia e investigación
- ✓ Acerca de la modelización matemática
- ✓ Acerca de las tecnologías
- ✓ Modelización y tecnologías en el currículum y en la formación docente
- ✓ Escenarios de modelización matemática en la formación de futuros/as profesores/as
  - ✓ Experiencias de modelización matemática abierta
- ✓ Reflexiones finales



Docencia e investigación

# Docencia

Formación de futuros/as profesores/as de matemática



Didáctica especial y taller de matemática



□ Profesorado en Matemática tiene una duración de 4 años

□ 66% cursos de matemática, 34% cursos didáctico-pedagógicos

Metodología y Práctica de la Enseñanza

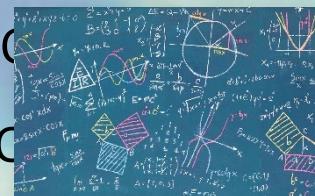
# Investigación

Futuros/as profesores/as de matemática...

... que realizan  
actividades de  
modelización  
matemática

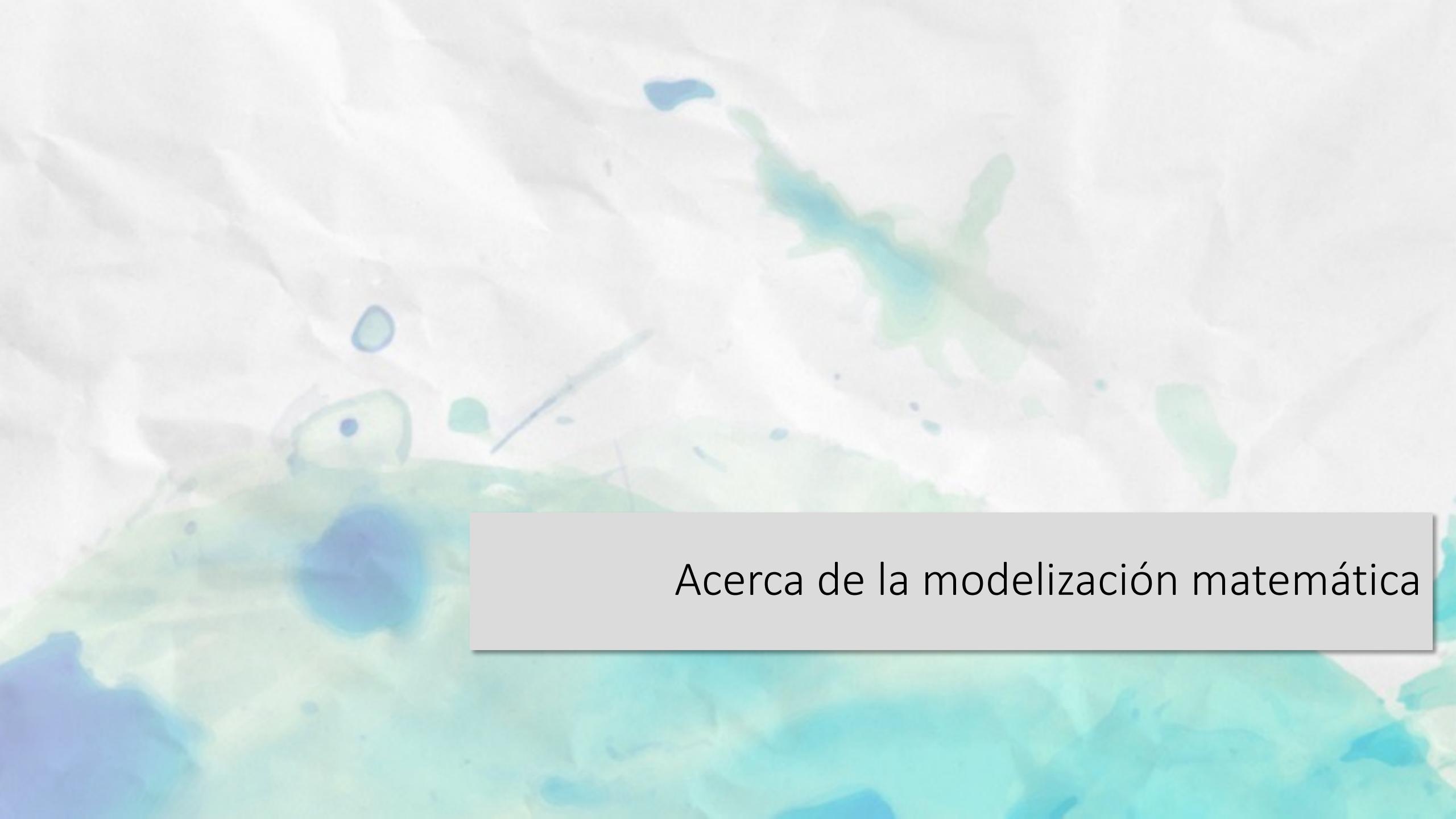


... que implementan  
actividades de  
modelización en la  
escuela



modelación  
comunicación  
aplicación  
tipos de ecologías





Acerca de la modelización matemática

E. BATSCHELET

# matemáticas básicas para biocientíficos

(biólogos médicos,  
veterinarios, bioquímicos, etc.)

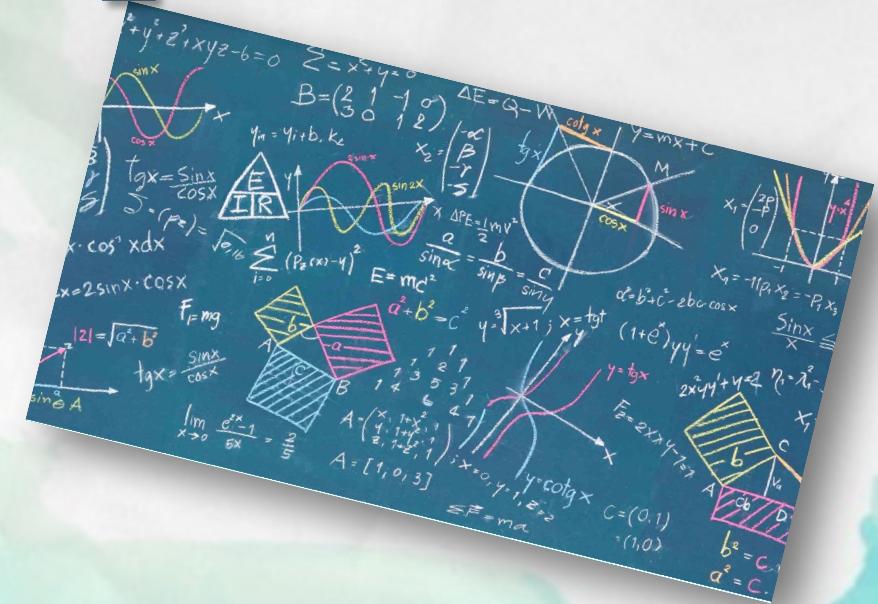


SPRINGER VERLAG  
BERLIN-HEIDELBERG-  
NUEVA YORK

EDITORIAL DOSSAT, S. A.  
MADRID-ESPAÑA



## Aplicación



The image shows a large, tilted sheet of paper filled with mathematical content. It includes:

- Algebraic equations:  $x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 6 = 0$ ,  $\sum = x^2 + y^2 = 0$ ,  $B = (2, 1, -1, 0)$ ,  $\Delta E = Q - W$ .
- Calculus:  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x}$ ,  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} = 1$ .
- Trigonometry:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$ ,  $\csc x$ .
- Geometry: A triangle labeled  $TIR$  with vertices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . A circle with radius  $r$  and center  $M$ . A shaded region with vertices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .
- Physics-related equations:  $F = ma$ ,  $E = mc^2$ ,  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ,  $P = FV$ .
- Other:  $x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 6 = 0$ ,  $\sum = x^2 + y^2 = 0$ ,  $B = (2, 1, -1, 0)$ ,  $\Delta E = Q - W$ .

Soltamos 1000 moscas en una isla en la que no había ninguna. La ley de crecimiento diario ( $t$  en días) seguida por la población, está dada por la siguiente función, donde  $N$  es el número de moscas

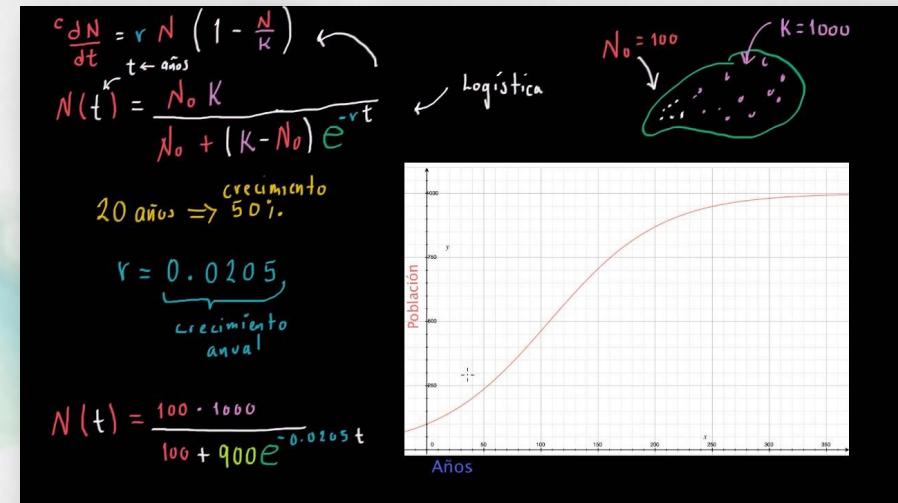
$$N = \frac{600000}{1 + 599 \cdot e^{-0.02t}}$$

llamada función logística de crecimiento

- a) Complete la siguiente tabla

$t$ (tiempo en días)	0	100	200	300	400	500
$N$ (moscas)						

- b) Grafique en los ejes coordenados los puntos obtenidos en la tabla anterior representando el tiempo  $t$  en el eje  $x$  y el número de moscas en el eje  $y$ .
- c) Resuelva la ecuación  $N = 600000$
- d) Teniendo en cuenta los incisos anteriores indique cuáles son los posibles valores que pueden tomar las variables  $t$  (tiempo) y  $N$  (número de moscas).
- e) ¿En cuántos días la población alcanzará el número de 100000?



Aplicación

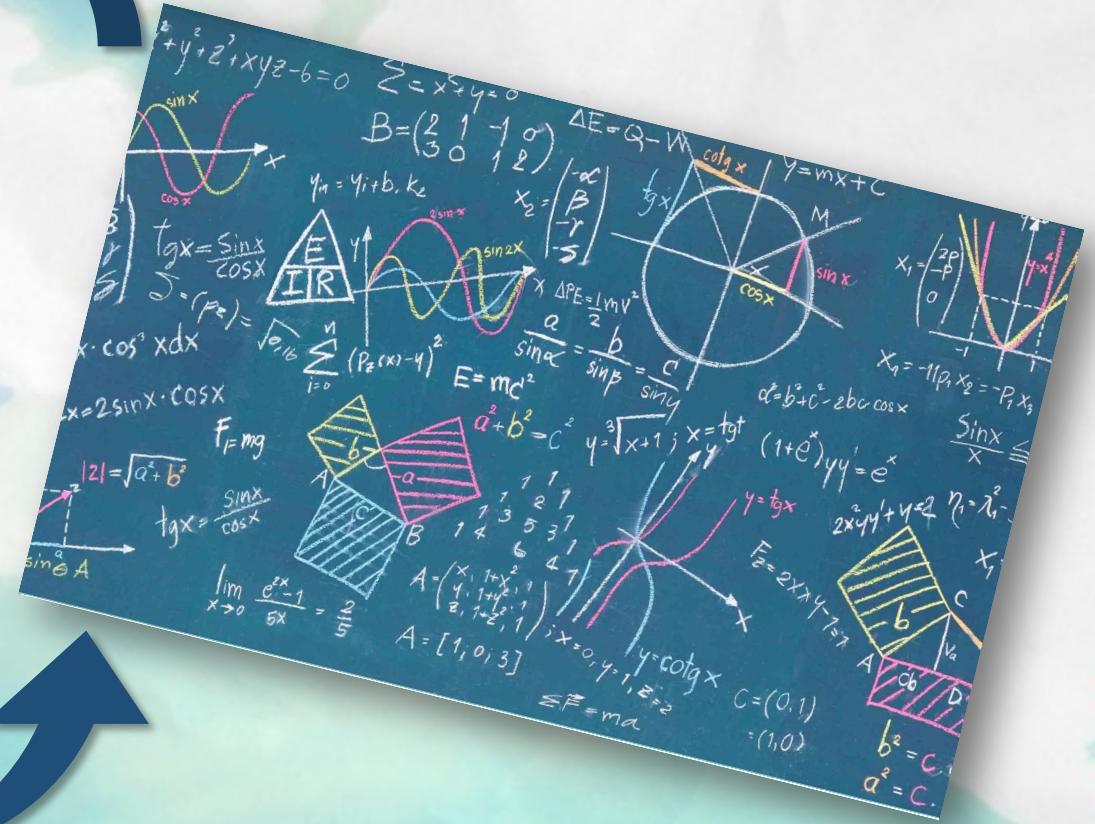


- ✓ Semi-realidad inventada (Skovsmose, 2001)
- ✓ Aplicación ilustrativa (Muller & Burkhardt, 2007)
- ✓ **Modelo** ya construido para poner en juego conocimiento matemático ya disponible

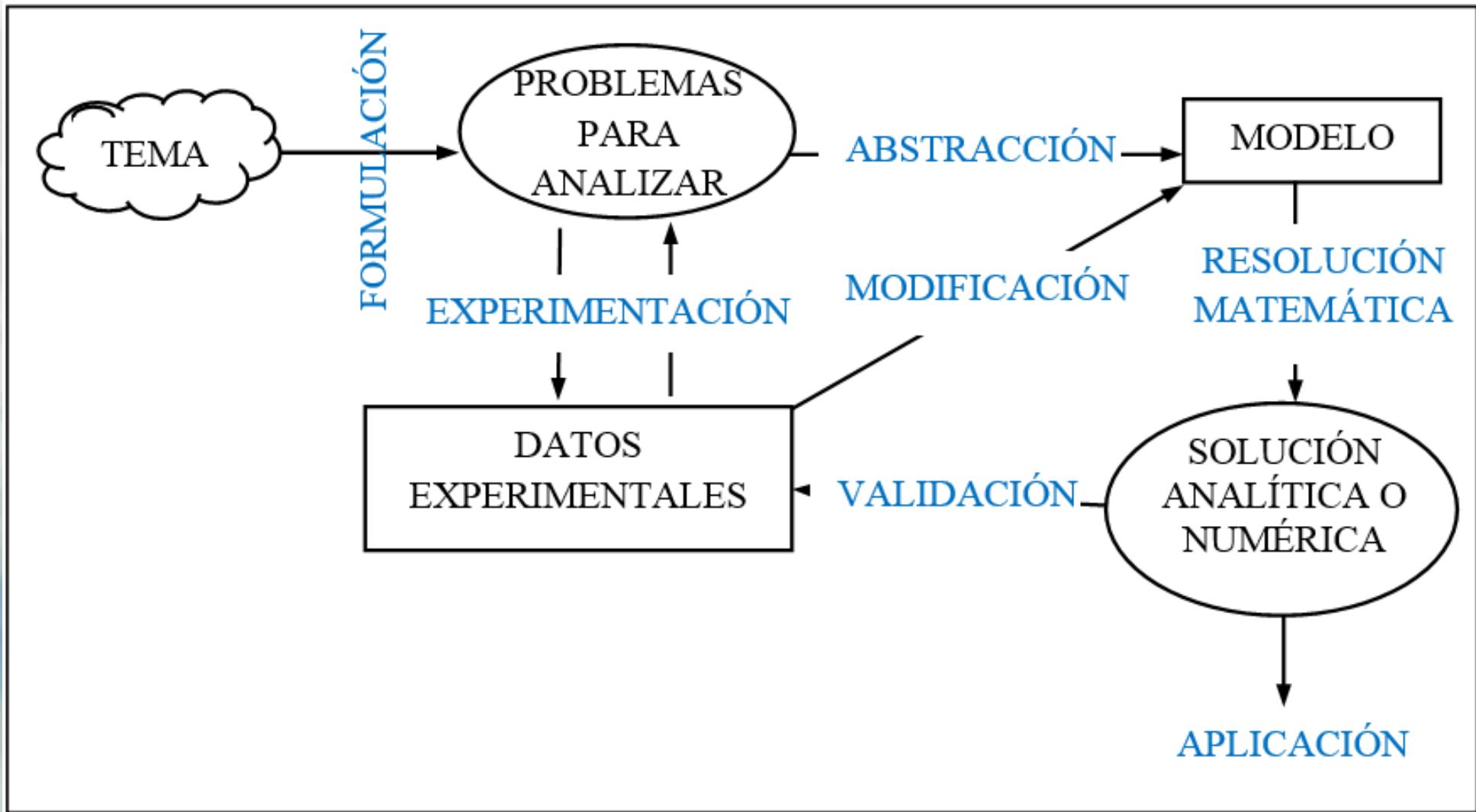


¿Cómo ese modelo fue creado? ¿Qué problema le dio origen? ¿Quién lo creó? ¿Para qué fin? ¿Representa adecuadamente la situación?

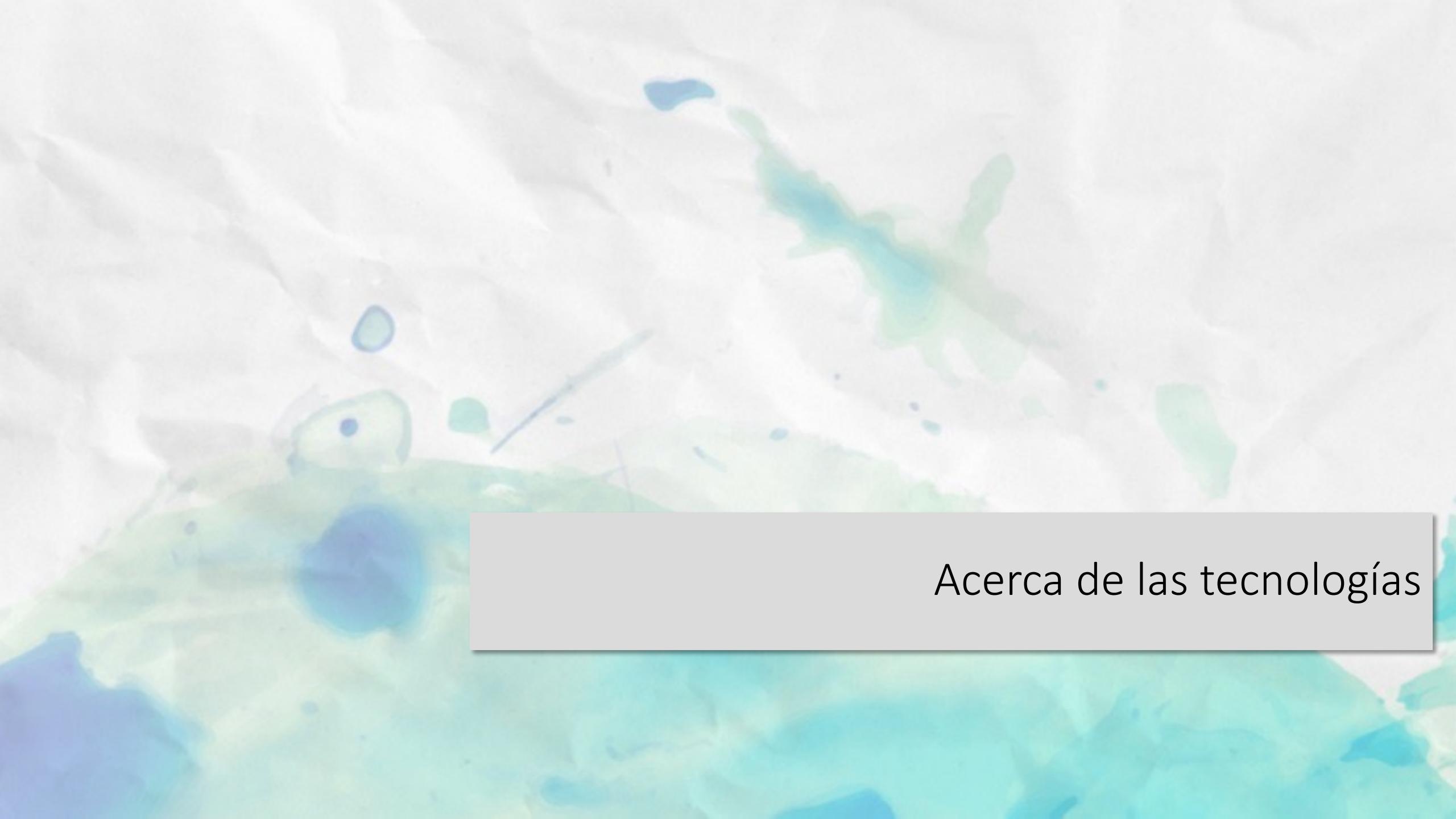
# Aplicación



# Modelización



Rodney Bassanezi



Acerca de las tecnologías

# Principios “irrenunciables”

- El acceso a las tecnologías digitales como un derecho del ciudadano.
- La necesidad de una “alfabetización tecnológica” en las escuelas, integrando las tecnologías en actividades esenciales.
- La producción de conocimiento se ve condicionada por los medios utilizados. Tales medios definen las prácticas, los contenidos y las formas de conocer.



El constructo epistemológico  
*humanos-con-medios*

# Humanos-con-medios

La cognición no es una  
empresa individual sino social

La cognición incluye medios con  
los cuales se produce el  
conocimiento

Los medios son elementos  
constitutivos del conocimiento

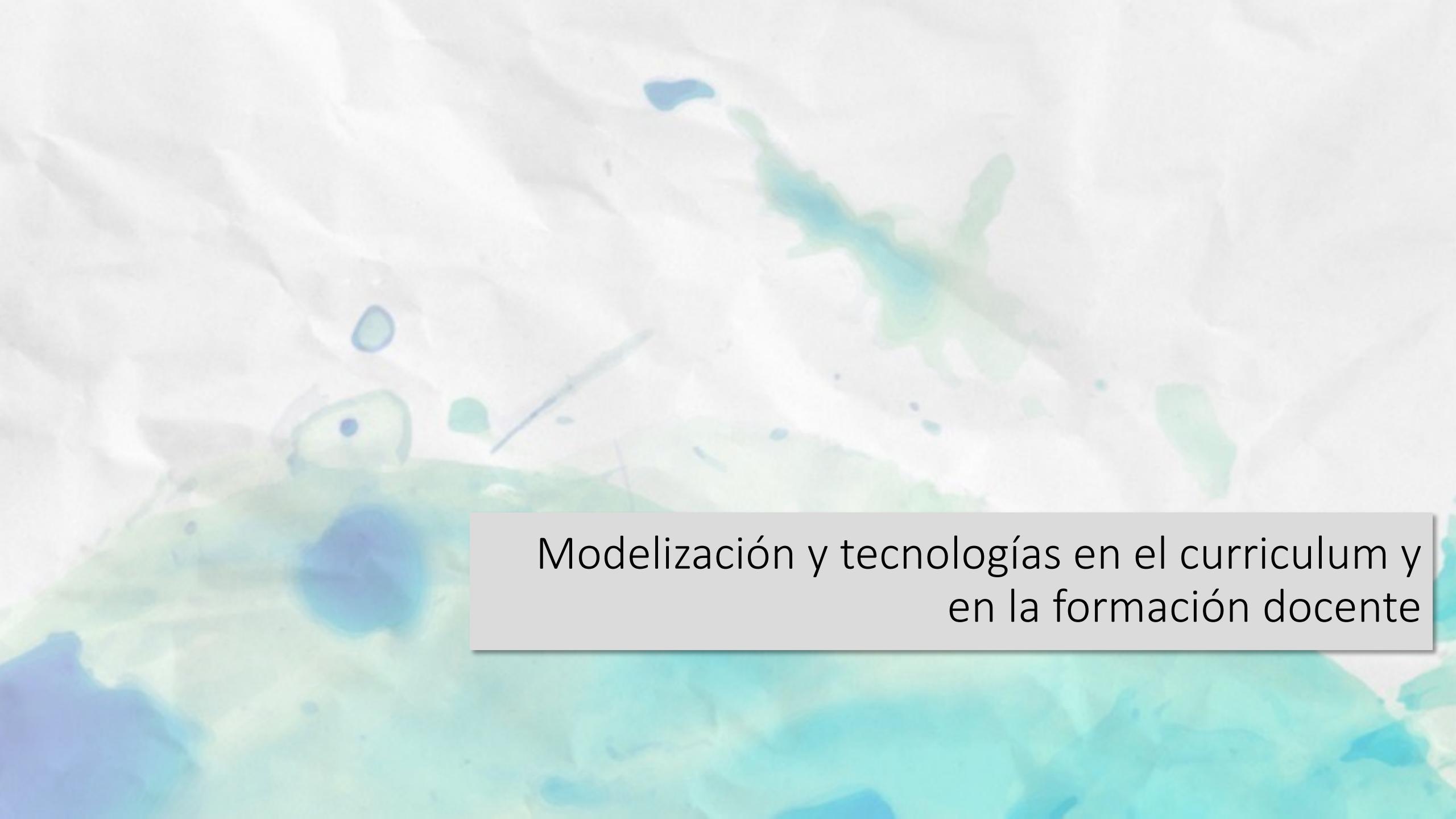
Humans-with-Media  
and the Reorganization  
of Mathematical  
Thinking

Information and Communication  
Technologies, Modeling,  
Experimentation and Visualization

Marcelo C. Borba and Mónica E. Villarroel



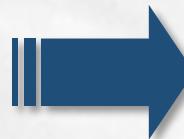
2005



Modelización y tecnologías en el currículum y  
en la formación docente

Curriculum para la  
educación secundaria  
(2011)

Estándares nacionales para  
la formación de  
profesores/as



... recomiendan la introducción de aplicaciones y modelización para la enseñanza de la matemática

... también recomiendan el uso de las tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática

Curriculum para la  
educación secundaria  
(2011)

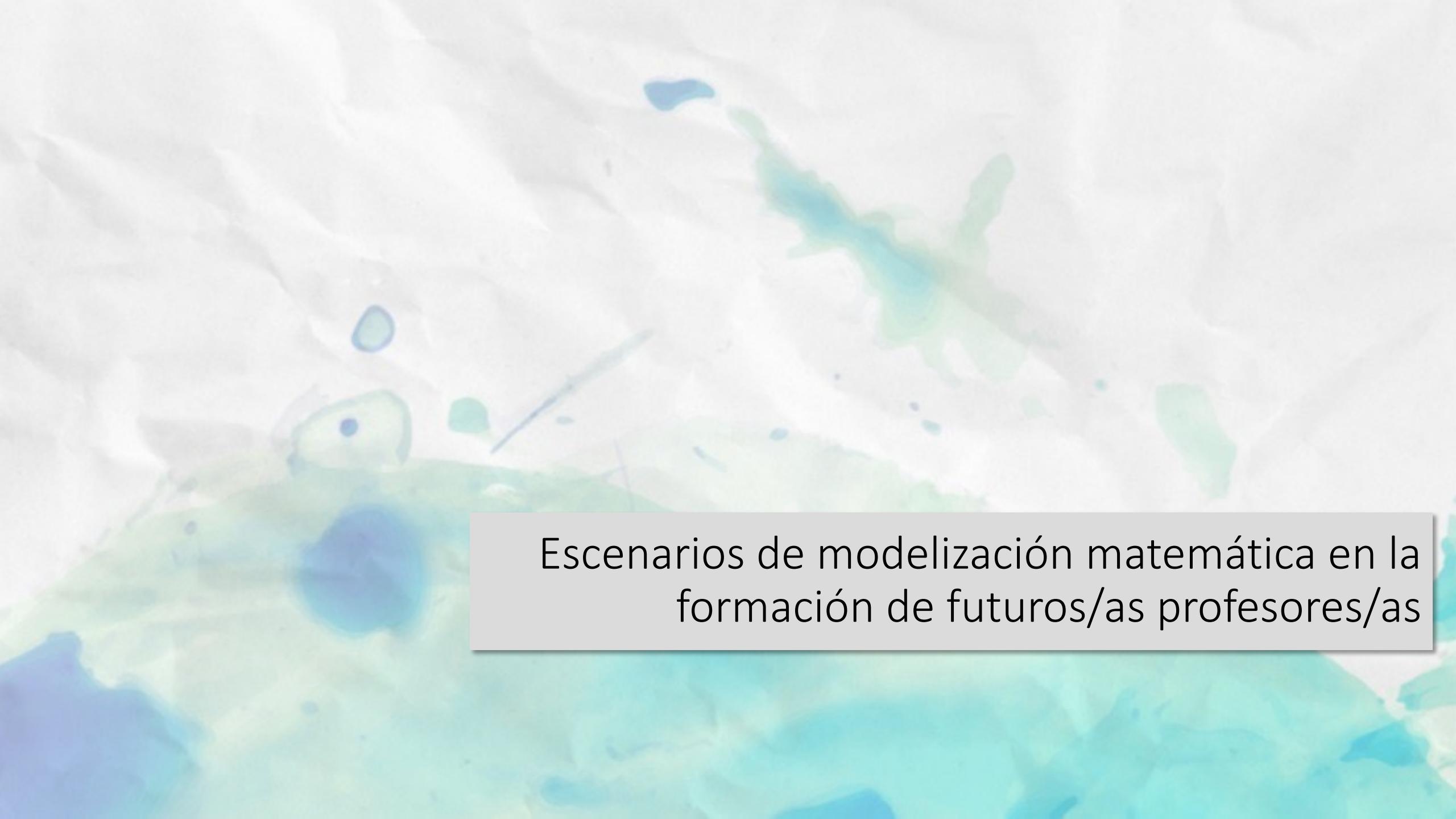
Estándares nacionales para  
la formación de  
profesores/as



Desafíos para la formación  
inicial y continua de docentes

Mientras tanto...

nuestro programa universitario se caracteriza por una fuerte presencia de matemática pura sin aplicaciones a problemas del mundo real, un escaso uso de tecnologías y pocos espacios curriculares donde se estudien situaciones no matemáticas.



Escenarios de modelización matemática en la  
formación de futuros/as profesores/as

Desde 2010

□ Curso de Didáctica Especial y Taller de Matemática.

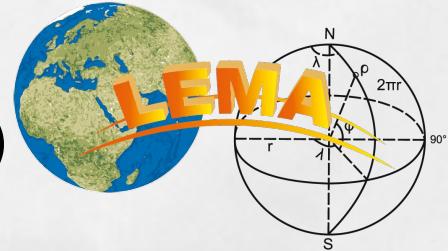
- Tercer año del Profesorado en Matemática
- Anual. 30 semanas
- Dos clases de 4 horas por semana
- Distintas tendencias en educación matemática son estudiadas: resolución de problemas, educación matemática crítica, uso de tecnologías en la educación matemática, **modelización matemática...**



- Modelo
- Modelo matemático
- Resolución de diversas tareas de modelización (o no)...

## Tarea: Festival de música

Learning and Education in and through  
Modeling and Applications (2006 -2009)



**El Festival de Artes Escénicas Contemporáneas de Glastonbury** es el mayor festival al aire libre de música y artes escénicas del mundo. En 2005, el área vallada del festival tenía más de 3,6 km<sup>2</sup> (900 acres), y hubo más de 385 actuaciones en directo. Muchos de los asistentes al festival llevan sus propias tiendas de campaña y duermen dentro de la zona del festival.



Los organizadores necesitan limitar el número de entradas a la venta y el número de tiendas que pueden instalarse para poder garantizar la seguridad. ¿Qué les aconsejarías?

## ○ Criterios para determinar si una tarea es de modelización matemática

Contexto de la tarea

Conocimiento matemático implicado

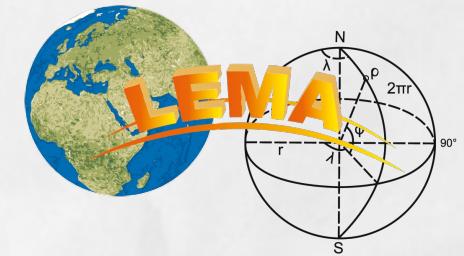
Soluciones esperadas

Actividad de quien resuelve la tarea

- Real y auténtico
- Interesante para lo/as estudiantes
- Relevante para lo/as estudiantes
- No determinado por adelantado
- No único

Implicación de múltiples conocimientos no predeterminados

- Multiplicidad de soluciones
- Que se relacionen con el contexto inicial
- Múltiples procedimientos de resolución
- Explorar, plantear hipótesis, buscar distintas maneras de trabajar, interpretar y validar soluciones...



## Criterios propuestos por Rita Borromeo Ferri (Universidad de Kassel – Alemania)

- Significatividad de la tarea
- Contexto de la realidad basado en la experiencia
- Provocación de preguntas posteriores
- Estimulación de caminos holísticos de aprendizaje
- Nivel apropiado del lenguaje



## Criterios propuestos por Katja Maass (International Centre for STEM education - Alemania)

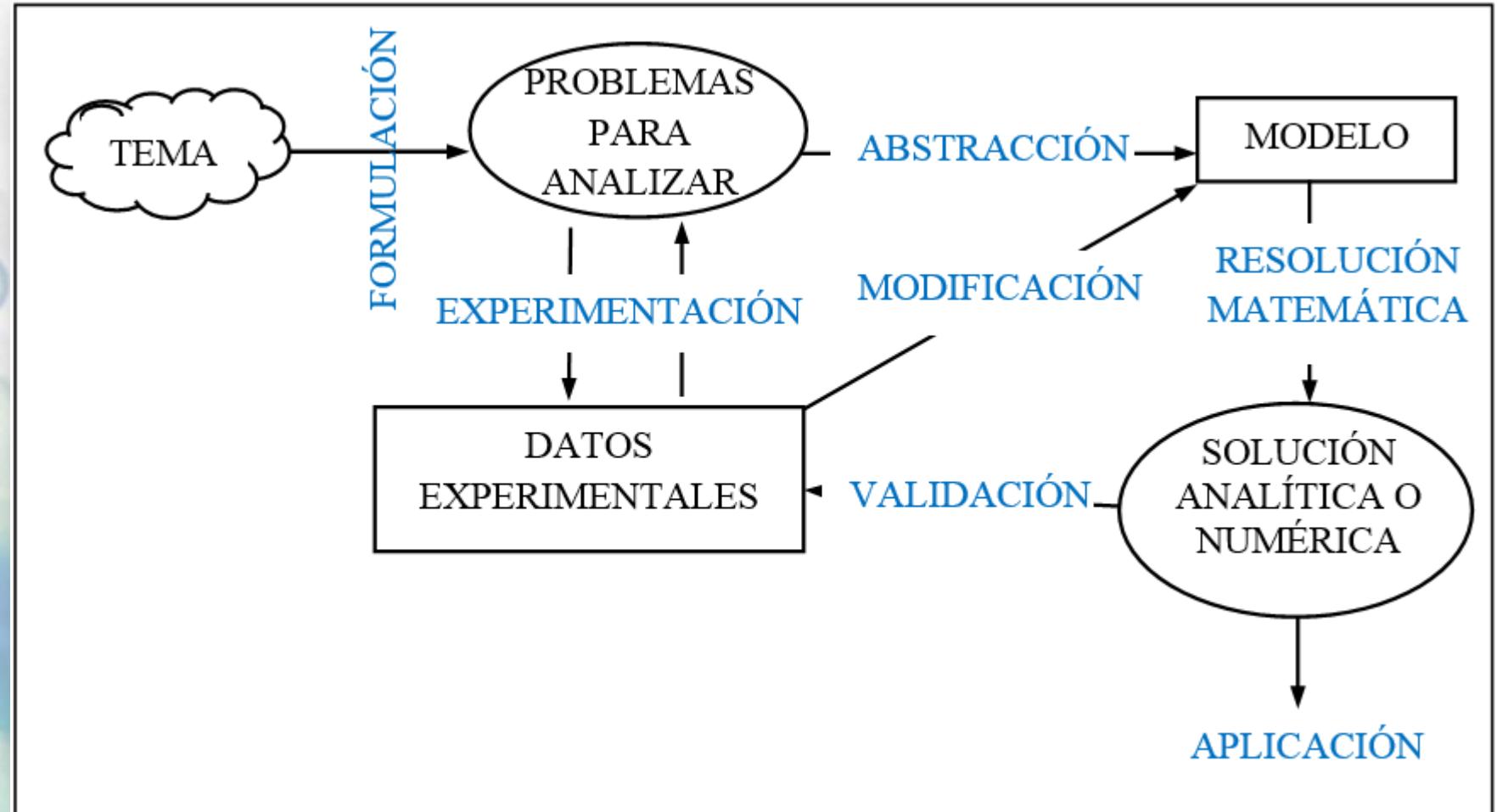
- Abierta
- Compleja
- Concreta
- Auténtica
- Resoluble por medio del proceso de modelización



- Proceso de modelización matemática: ciclos de modelización



Rodney Bassanezi

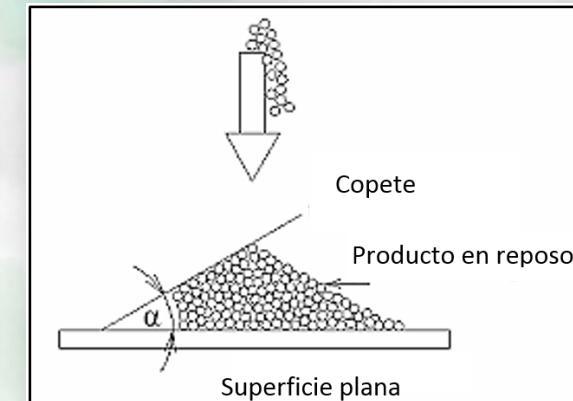


- Resolución de tareas de modelización que implican experimentación.

## Tarea del montículo de material granulado

Cuando un material granulado, como la arena o la sal, es arrojado sobre una superficie horizontal, se deposita creando un montículo, generalmente en forma de cono. Este fenómeno es observable en muchas situaciones reales, como ilustran las siguientes imágenes.

El material granulado permanece apilado y no se desliza debido a una cierta fricción entre las partículas. El ángulo de inclinación del montículo (ángulo formado entre el copete y la horizontal) se denomina ángulo de reposo y es el ángulo máximo que permite que el material granulado se mantenga sin deslizarse o resbalar (ver la figura).

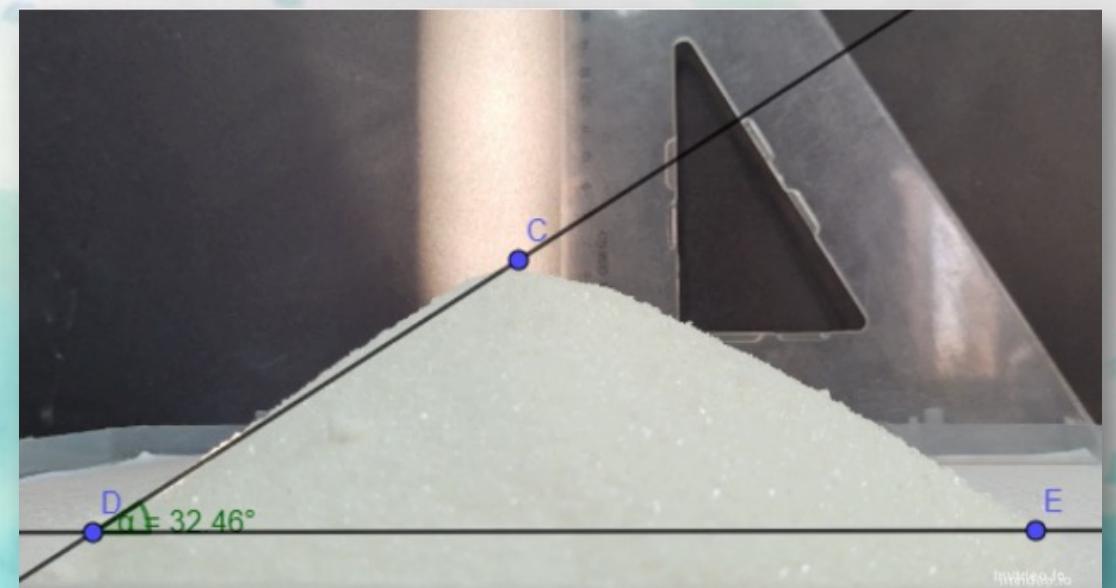
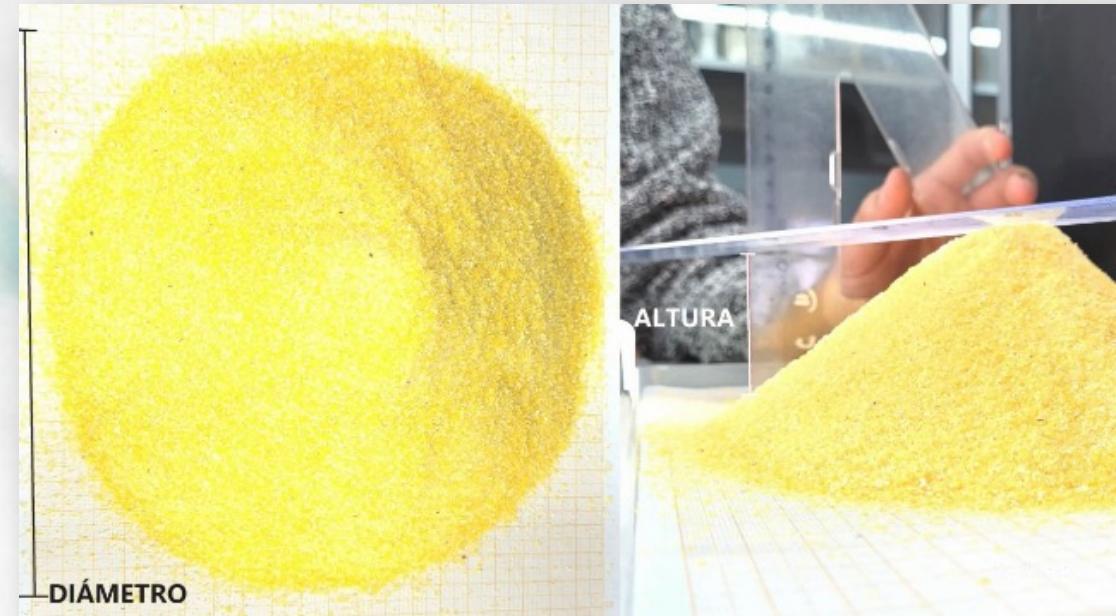
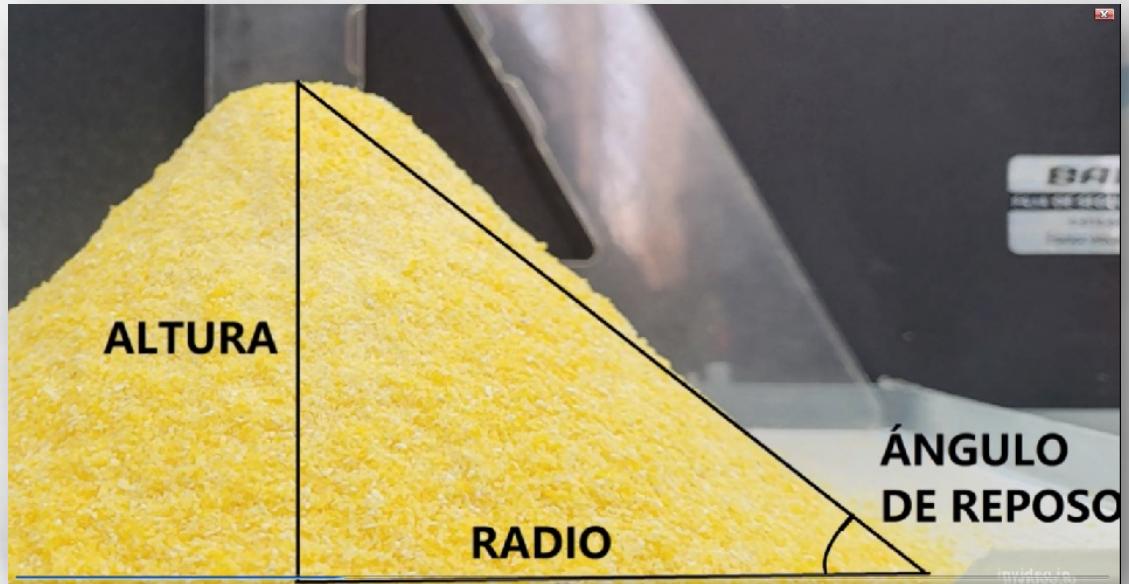


En muchos proyectos de ingeniería civil, en estudios de farmacología y también para evaluar el riesgo de avalanchas en las montañas, el conocimiento del ángulo de reposo es fundamental.

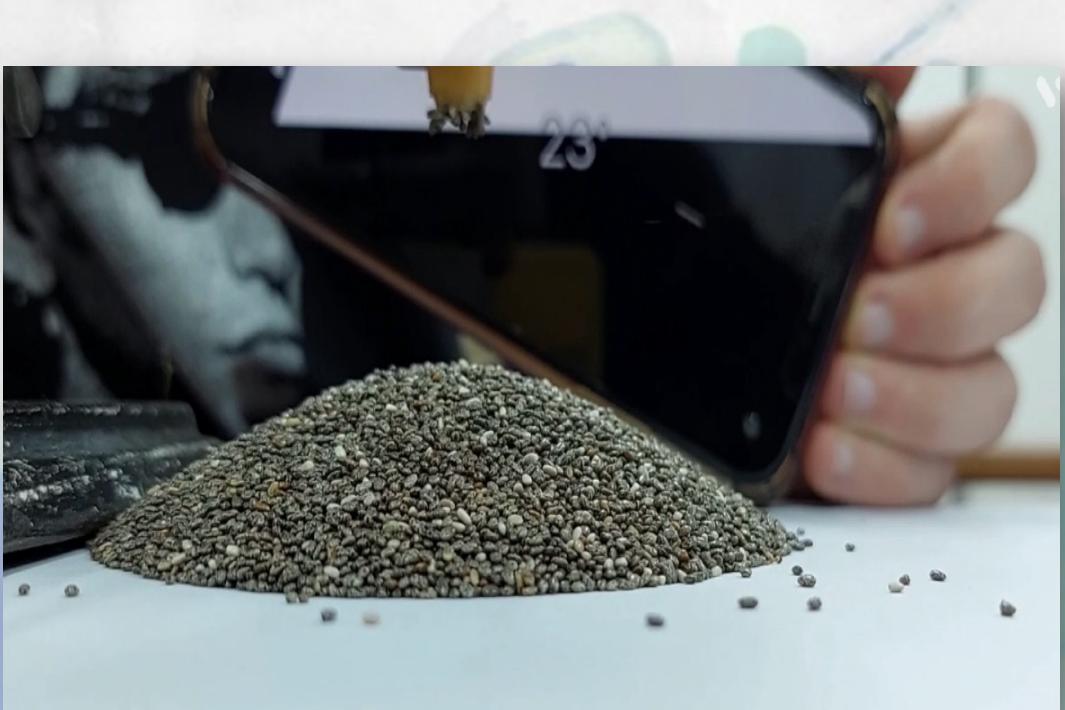
Formulen conjeturas sobre el ángulo de reposo. ¿Será este ángulo diferente dependiendo de los materiales? ¿Dependerá este ángulo de la cantidad de material que se deposite? ¿Puede este ángulo ser influenciado por el tamaño de las partículas?



2022



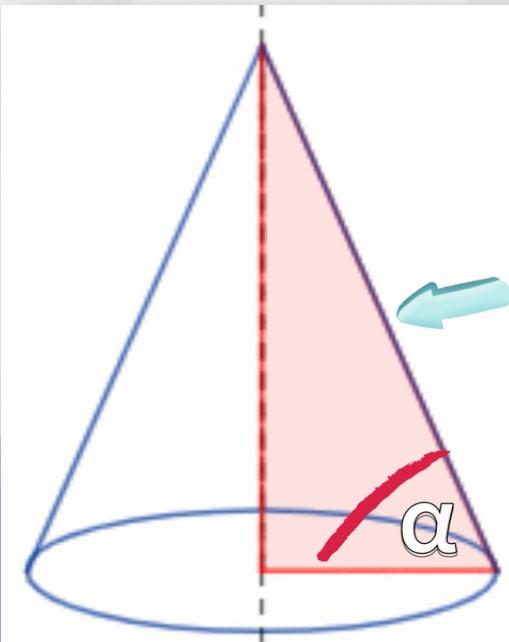
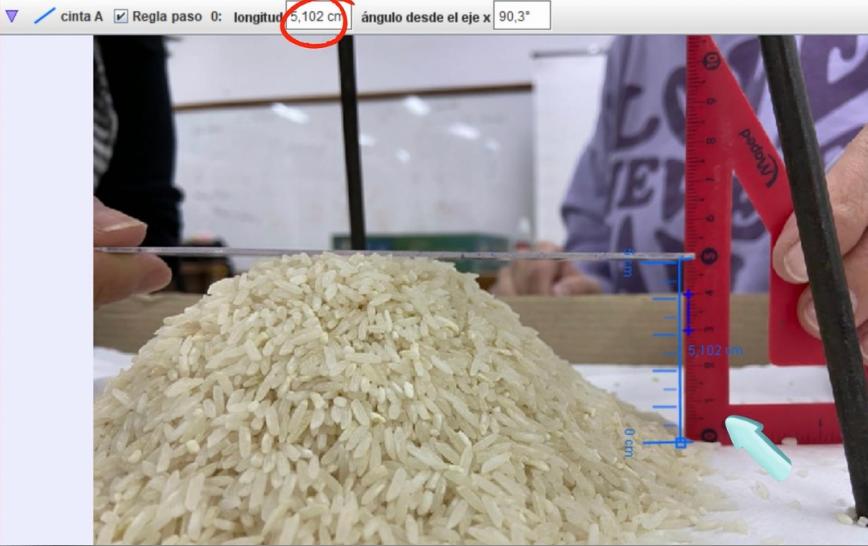
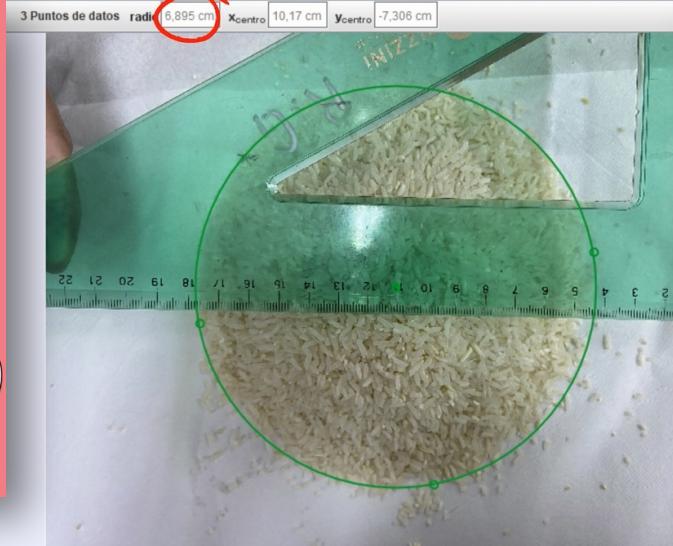
2022



2023

- Utilizamos imágenes
- Con Tracker:

  - Calibraremos
  - Calcularemos altura y radio

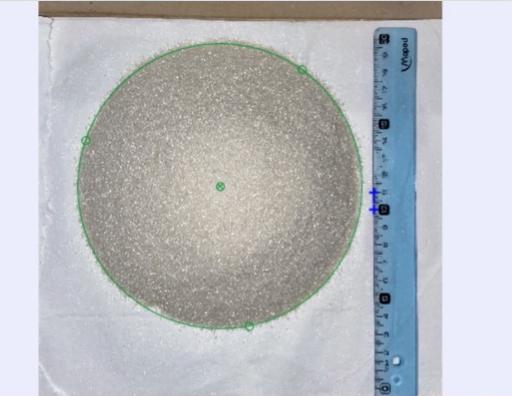


$r$  : radio  
 $h$  : altura

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha) &= h/r \\ \Rightarrow \alpha &= \operatorname{arctg}(h/r) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} r &= 8.22 \text{ cm} \\ h &= 4.26 \text{ cm} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \alpha = 27.40^\circ$$

- Análisis de experiencias de modelización en diferentes contextos educativos.
- Desarrollo de proyectos de modelización abiertos utilizando libremente las tecnologías digitales.



Futuros/as profesores/as trabajando en pequeños grupos, son invitados/as a:

- elegir un tema del mundo real de su interés,
- formular problemas relacionados con el tema,
- seleccionar variables,
- levantar hipótesis,
- diseñar experimentos,
- buscar información,
- resolver problemas,
- escribir un informe y
- preparar y realizar una presentación oral y un video.

# Perspectiva de modelización matemática

- Naturaleza abierta de las tareas planteadas, sin predeterminar conocimientos matemáticos a utilizar.
- Naturaleza interdisciplinar del trabajo.
- Dominio del proceso completo de modelización considerando todas las fases del ciclo.
- Promoción de reflexiones sobre la propia matemática, los modelos creados y el papel social de la matemática y de la modelización matemática.
- Empleo de tecnologías.

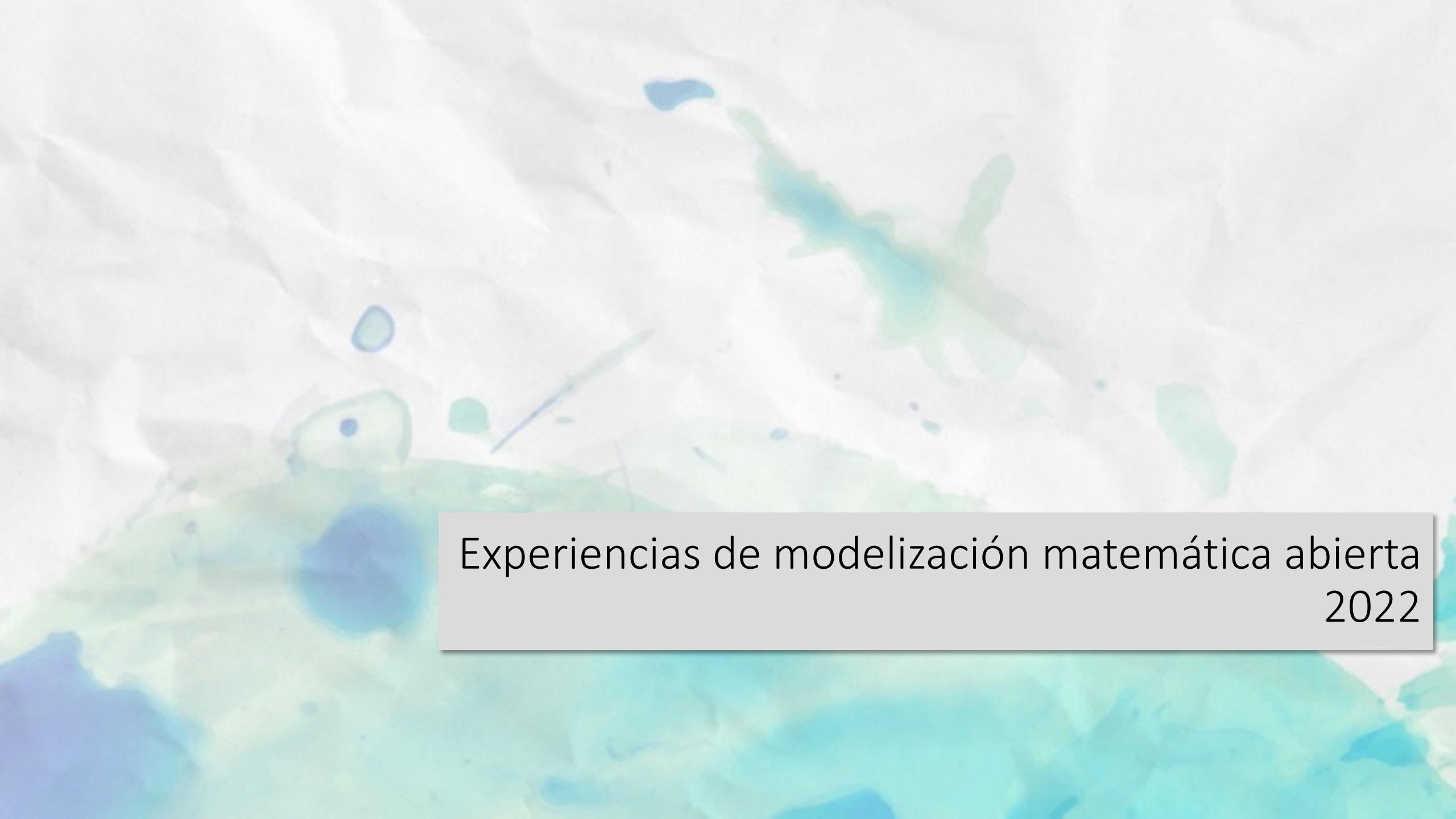
**Modelización-como-contenido** (Julie & Mudaly, 2007)

**Modelización activa** (Muller & Burkhardt, 2007)

**Perspectiva socio-crítica de modelización matemática** (Bassanezi, D'Ambrosio, Borba, Barbosa, Araújo, etc.)

**Trabajo con proyectos** (Skovsmose, 2001)

**Humanos-con-medios** (Borba & Villarreal, 2005)



# Experiencias de modelización matemática abierta 2022

TEMAS	PROBLEMAS
Contaminación COVID-19: Impacto en la huella cordobesa de desechos sanitarios	<p>¿Qué cantidad de nuevos residuos se generaron a partir del COVID-19?</p> <p>¿Cuántos residuos se generaron durante la pandemia a partir de la realización de testeos (PCR, antígenos) y la campaña de vacunación?</p>
Comedor comunitario “En Familia y con Amor”	<p>¿Qué incidencia tienen los aportes del estado en la alimentación saludable de las personas que asisten a este comedor?</p>
Uso y dependencia del celular	<p>¿Existe una relación entre el tiempo real de uso del teléfono móvil con la dependencia del mismo?</p>
Exámenes finales en la virtualidad en FAMAF	<p>¿Aumentó o disminuyó la cantidad de exámenes rendidos por materia y la cantidad de exámenes aprobados por los alumnos de 1er año en todas las carreras dictadas en la FAMAF?</p>
Consumo de agua en la industria textil. La huella hídrica del jean azul	<p>¿A partir de qué frecuencia de lavado reduciremos el porcentaje de consumo de agua en la fase de uso de un jean?</p>

# Formulación del problema

Tomando como referencia la Evaluación del consumo de agua durante el ciclo de vida de un jean sustentable (Levi's), la Huella Hídrica total es de 3.772 litros:

- El porcentaje de consumo de agua en la fase de uso representa el 23 % del total que se consume a lo largo del ciclo de vida del jean.
- El 23% representa 860 litros por ciclo de vida (3 años)

Dado que aproximadamente una cuarta parte del impacto del ciclo de vida de la prenda ocurre durante la fase de uso del consumidor.

¿A partir de qué frecuencia de lavado reduciremos el porcentaje de consumo de agua en la fase de uso?



**Peso jeans (P) = 800grs**

**Vida útil (V) = 3 años**

<b>Capacidad lavarropa, C (grs)</b>	6500
<b>Consumo por lavado, L (litros)</b>	42

<b>Consumo por lavado 1 jeans, L1(litros) = 800*L/C</b>	5,17
---	------



**La = 365 / d**

**Lv = La \* 3**

**Ca = L1 \* La**

**Cv = Ca \* 3**

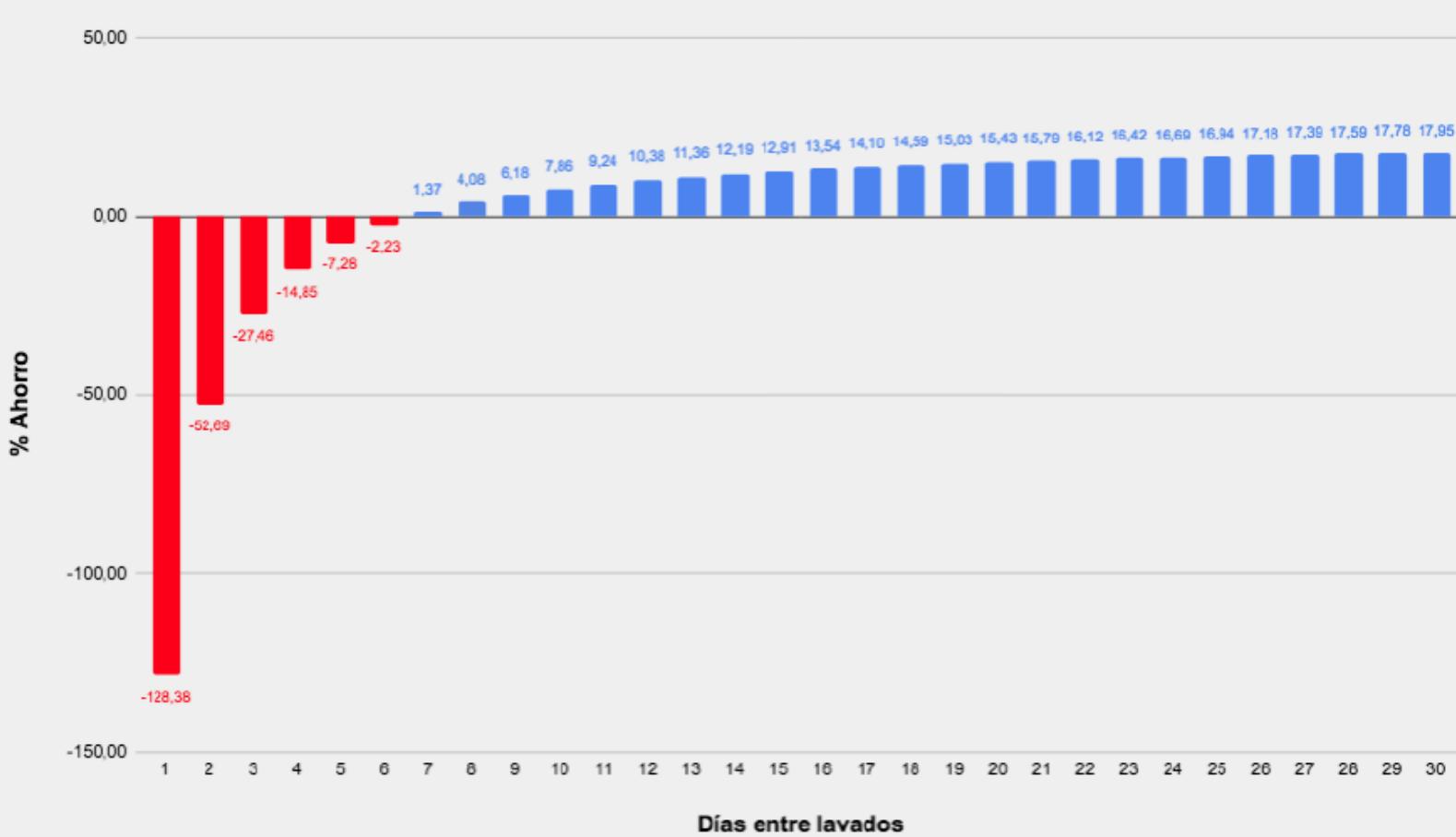
**H = Cv \* 23 / 860**

**A = 23 - H**

**A +++**

Días entre lavados (d)	Nº lavados por año (La)	Nº lavados en vida útil (Lv)	Consumo anual (Ca)	Consumo Vida Útil (Cv)	% en Huella Hídrica (H)	% Ahorro (A)
1	365,00	1.095,00	1.886,77	5.660,31	151,38	-128,38
2	182,50	547,50	943,38	2.830,15	75,69	-52,69
3	121,67	365,00	628,92	1.886,77	50,46	-27,46
4	91,25	273,75	471,69	1.415,08	37,85	-14,85
5	73,00	219,00	377,35	1.132,06	30,28	-7,28
6	60,83	182,50	314,46	943,38	25,23	-2,23
7	52,14	156,43	269,54	808,62	21,63	1,37
8	45,63	136,88	235,85	707,54	18,92	4,08
9	40,56	121,67	209,64	628,92	16,82	6,18
10	36,50	109,50	188,68	566,03	15,14	7,86

### *Porcentaje de ahorro en función de la frecuencia de lavado (A+++)*

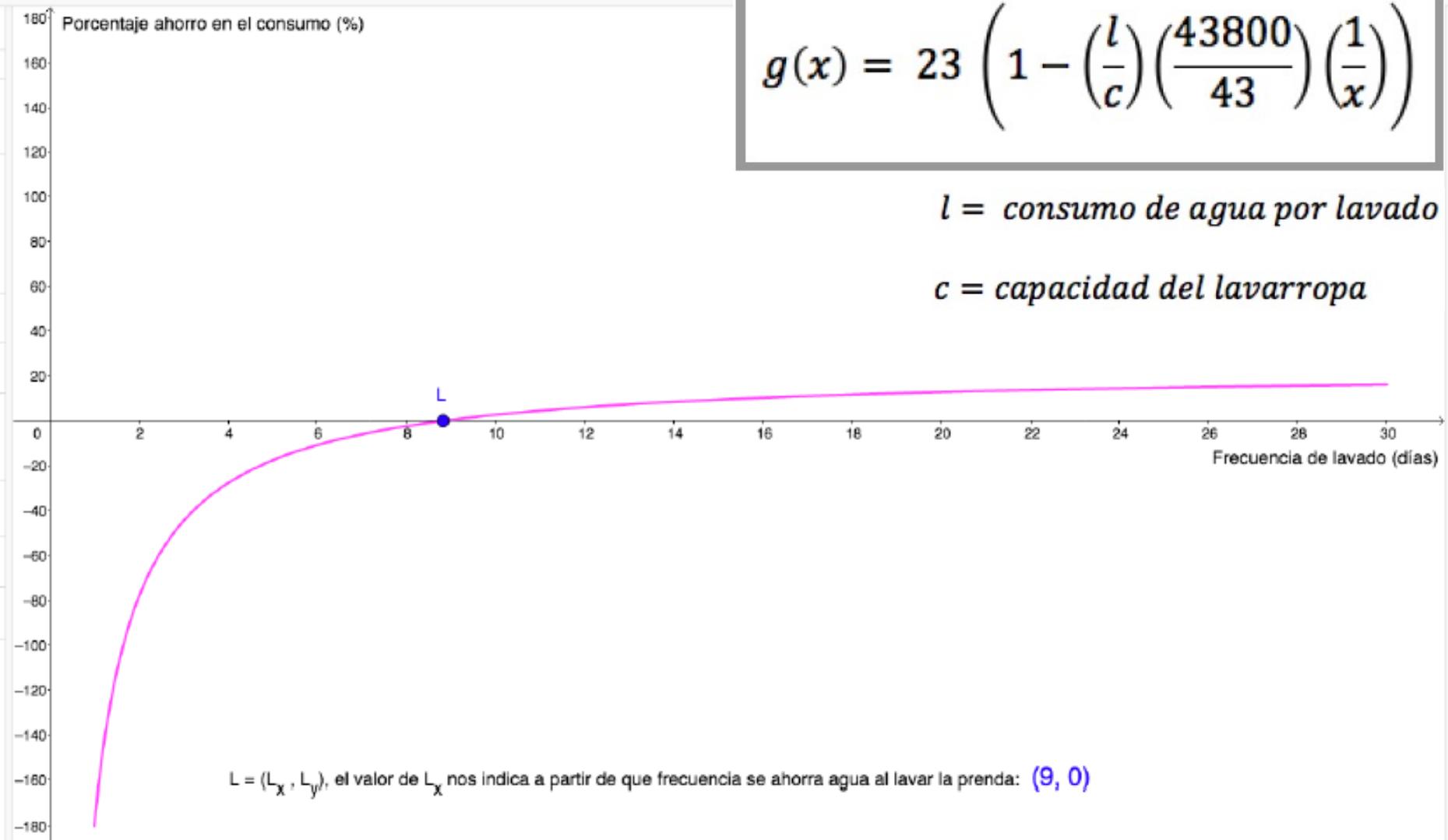


Eficiencia del lavarropas	Valor de frecuencia buscada (días)
B	26
A +	9
A+++	7

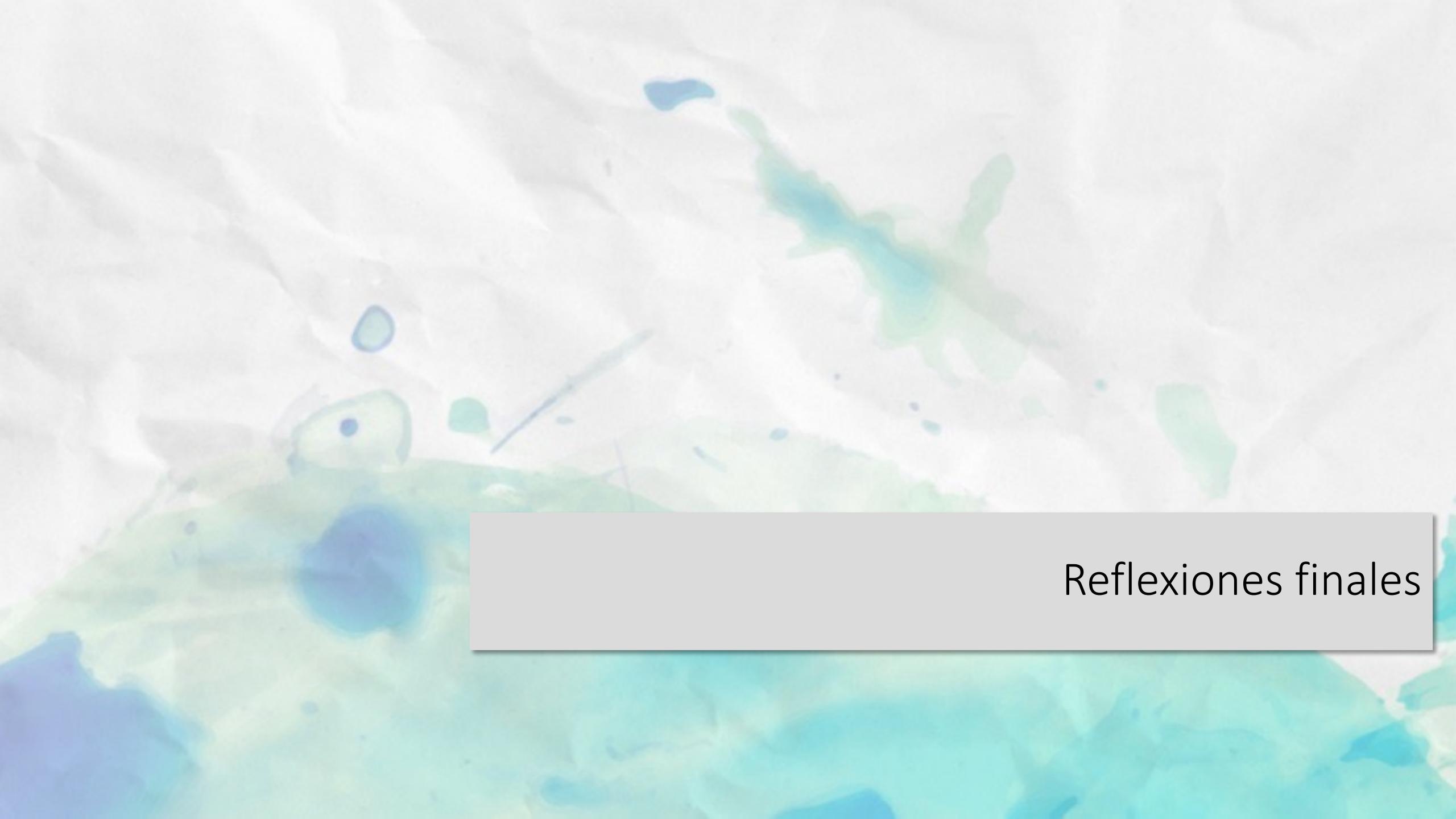
$$g(x) = 23 \left( 1 - \left( \frac{l}{c} \right) \left( \frac{43800}{43} \right) \left( \frac{1}{x} \right) \right)$$

*l = consumo de agua por lavado*

*c = capacidad del lavarropa*



l = 52	EN
40	130
c = 6000	
5000	7000
$g(x) = \text{If}\left(1 \leq x \leq 30, 23 \left(1 - \frac{l}{c} \cdot \frac{43800}{43} \cdot \frac{1}{x}\right)\right)$	
$\rightarrow 23 \left(1 - \frac{52}{6000} \cdot \frac{43800}{43} \cdot \frac{1}{x}\right), \quad (1 \leq x \leq 30)$	
Frecuencia de lavado (días)	
Porcentaje ahorro en el consumo (%)	
L = Intersect(B1, xAxis, (9, 0))	
$\rightarrow (9, 0)$	
L = (L <sub>x</sub> , L <sub>y</sub> ), el valor de L <sub>x</sub> nos indica a partir de que frecuencia se ahorra agua al lavar la prenda:	
text4="" +L""	
+ Input...	



Reflexiones finales

- Necesidad de proporcionar a futuros/as profesores/as oportunidades de experimentar el proceso de modelización durante su formación inicial.
- Las tecnologías pueden ampliar y mejorar las experiencias de los futuros/as profesores/as con los procesos de modelización.
- Los proyectos de modelización llevados a cabo por futuros/as profesores/as y sus reflexiones proporcionan evidencias de:
  - variedad de temas tratados y su relación con la situación de pandemia y problemáticas socio-ambientales.
  - diversos usos de las tecnologías,
  - logros de aprendizaje,
  - dificultades y limitaciones,
  - la potencialidad del uso de videos para comunicar ideas matemáticas, reflexiones, conclusiones o concientizar sobre ciertas problemáticas.

□ A pesar de las dificultades y basándonos en la evidencia positiva que obtuvimos a lo largo de estos años, argumentamos que la implementación de diversas tareas de modelización y el uso de tecnologías resulta relevante y fundamental durante la formación docente inicial, por muchas razones (además de las demandas curriculares):

- Pueden **potenciar** el aprendizaje de los/as estudiantes.
- Pueden contribuir a una educación **inclusiva**.
- Pueden contribuir a que la matemática se considere una herramienta útil para **describir** y **analizar** problemas reales, **tomar decisiones** fundamentadas y **criticar** con argumentos sólidos.
- Pueden hacer que los futuros/as profesores/as sean **sensibles** a las diferentes maneras de dar sentido a la matemática.

# ¡MUCHAS GRACIAS!



monica.esther.villarreal@unc.edu.ar



ResearchGate



# Referencias

- BASSANEZI, R. (2012). *Temas e modelos*. Campinas, Brasil: UFABC.
- BARBOSA, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A critical and discursive perspective. *ZDM. Mathematics Education*, 38(3), 293–301.
- BLOMHØJ, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby & K. Walby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*, (pp. 145-159). Suecia: National Center for Mathematics Education. Existe traducción de este artículo en Revista de Educación Matemática, 23(2), 20-35. Córdoba.
- BORBA, M. & VILLARREAL, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modelling, experimentation and visualization*. 1. ed. New York, USA: Springer.
- JULIE, C., & MUDALY, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In W. BLUM, P. GALBRAITH, H. HENN, & M. NISS (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education—The 14th ICMI Study* (pp. 503–510). New York: Springer.
- MULLER, E.; BURKHARDT, H. Applications and modelling for mathematics. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P; HENN, H.; NISS, M. (Ed.). *Modelling and applications in mathematics education - The 14th ICMI Study*. New York, USA: Springer, 2007. p. 267-274.
- SKOVSMOSE, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3-26.