微分几何-曲线论

2024 年 7 月 23 日

目录

1 概述

2 回顾
- 内积和外积
- 曲线的表达

3 曲线论
- 参数曲线
- 局部性质
- 全局性质

4 总结

概述

曲线论的关注点

1. 表达: 参数化
2. 描述: 局部坐标系与变化趋势
3. 量化: 弧长, 曲率与挠率——不变量 (与参数化无关)

1 概述

2 回顾
- 内积和外积
- 曲线的表达

3 曲线论
- 参数曲线
- 局部性质
- 全局性质

4 总结

内积和外积

内积

定义 (内积, Inner Product)

设 X 为数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 如果函数 $<\cdot,\cdot>: \mathrm{X}\times\mathrm{X}\to\mathbb{K}$ 满足:

- $<x,x>\geqslant 0, \forall x\in\mathrm{X}$, 且等号成立当且仅当 $x=0$;
- $<x,y>=\overline{<y,x>}, \forall x,y\in\mathrm{X}$;
- $<ax+by,z>=a<x,z>+b<y,z>, \forall a,b\in\mathbb{K}, \forall x,y,z\in\mathrm{X}$,

则称 $<\cdot,\cdot>$ 为 X 上的一个内积, 称 X 为内积空间.

内积和外积

$\mathbb{R}^n$ 上的内积

$\mathbb{R}^n$ 上的内积

- $\mathbb{R}^n$ 中的一个内积为: $< x, y >= x^T y, x, y \in \mathbb{R}^n$
- $< x, x >= x^T x = \|x\|_2^2$
- $< x, y >= \|x\|_2 \|y\|_2 \cos\theta$, θ 为 x, y 的夹角

内积的导数

设 x, y 为 t 的函数, 则

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} < x, y > &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(y_i \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} + x_i \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}\right) \\ &= < \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}, y > + < x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} > \end{aligned} \tag{1}$$

内积和外积
外积和混合积

$\mathbb{R}^3$ 上的外积

- $\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
- $\|x \times y\|_2 = \|x\|_2 \|y\|_2 \sin\theta$, θ 为 x, y 的夹角
- $\{x, y, x \times y\}$ 成右手系 (如果 x, y 不共线)

外积的导数

设 x, y 为 t 的函数, 与内积的导数类似, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x \times y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \times y + x \times \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

$\mathbb{R}^3$ 上的混合积

- $(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
- $(x, y, z) = < x \times y, z >$
- $|(x, y, z)|$ 的几何意义为以 x, y, z 为边的平行六面体的体积

1 概述

2 回顾
- 内积和外积
- 曲线的表达

3 曲线论
- 参数曲线
- 局部性质
- 全局性质

4 总结

曲线的表达

表达方法

曲线的表达方法

1. 隐式表达
   a. 隐式代数表达 ($\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{F}$ 是一个多项式函数)
   b. …
2. 参数表达 (其形式为 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t})$)
   a. 贝塞尔样条表达
   b. B 样条/非均匀有理 B 样条 (Nurbs) 表达
   c. …

单位圆的隐式代数表达和参数表达

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

曲线的表达

表达方法对比

求值和位置关系

1. 求值问题
   a. 隐式代数表达下，几何上的点是代数方程的解，一般而言较难获取;
   b. 参数表达下，给定参数域上一点，可以自然地获得几何上对应的点.
2. 位置关系判断
   a. 隐式代数表达下，位置判断是比较容易的;
   b. 参数表达下，位置判断可能需要借助距离/投影的方法.

单位圆的隐式代数表达和参数表达

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

1. 概述
2. 回顾
   - 内积和外积
   - 曲线的表达
3. 曲线论
   - 参数曲线
   - 局部性质
   - 全局性质
4. 总结

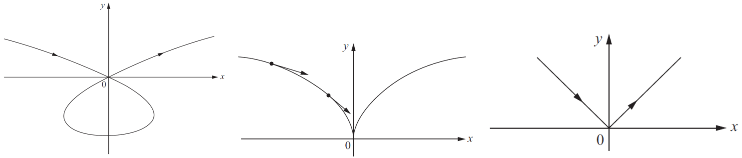
曲线的定义

定义 (参数曲线, Parameterization Curve)

设 $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ 是一个区间. $\mathbb{R}^n$ 中的参数曲线是一个连续函数 $\mathbf{C} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$. $n = 2$ 时, $\mathbf{C}$ 称为平面曲线; $n = 3$ 时, $\mathbf{C}$ 称为空间曲线.

定义 (正则曲线, Regular Curve)

设 $\mathbf{C} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ 为一条参数曲线. 设 $t_0 \in \mathcal{I}$, 如果 $\mathbf{C}'(t_0) \neq 0$, 则称 t_0 为参数曲线的正则点. 如果 $\mathbf{C}'(t) \neq 0, \forall t \in \mathcal{I}$ 成立, 则称参数曲线 $\mathbf{C}$ 为正则参数曲线.



(a) $\mathbf{C}(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ (b) $\mathbf{C}(t) = (t^3, t^2)$ (c) $\mathbf{C}(t) = (t, |t|)$

切线与弧长

切线

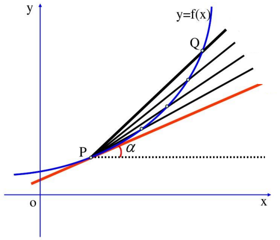
参数曲线 $\mathbf{C}$ 在 $\mathbf{C}'(t_0) \neq 0$, $t_0 \in \mathcal{I}$ 处的切线为:

$$\ell(t) := \mathbf{C}(t_0) + t\mathbf{C}'(t_0). \qquad (3)$$

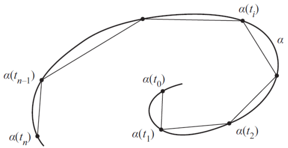
弧长

正则参数曲线 $\mathbf{C}(t)$ 从点 $t_0 \in \mathcal{I}$ 到点 $t \in \mathcal{I}$ 处的弧长为:

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{C}'(t)\|_2 \mathrm{d}t. \qquad (4)$$



(a) 割线与切线



(b) 弧长

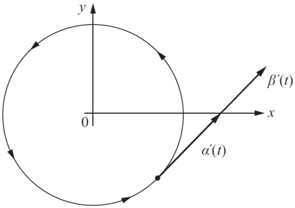
重参数化

定义 (重参数化, Reparameterization)

设 $\mathbf{C}:\mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$ 为一条参数曲线, $g:\mathcal{J}\to\mathcal{I}$ 为连续的满射, 称 $\xi=\mathbf{C}\circ g$ 为参数曲线 $\mathbf{C}$ 的一个重参数化.

命题 (弧长重参数化, Reparametrization by Arc Length)

设 $\mathbf{C}:\mathcal{I}\to\mathbb{R}^n$ 为一正则参数曲线, 则 $\mathbf{C}$ 可以弧长重参数化, 且重参数化的曲线也是正则的. 此外, 若 $\mathbf{C}$ 是 C^k 的, 重参数化的曲线也是 C^k 的.



$$\boldsymbol{\alpha}(t)=(\cos t,\sin t),$$
$$\boldsymbol{\beta}(t)=(\cos 2t,\sin 2t).$$

1 概述

2 回顾
- 内积和外积
- 曲线的表达

3 曲线论
- 参数曲线
- 局部性质
- 全局性质

4 总结

空间曲线基本定理

定理 (空间曲线基本定理)

设 $\mathscr{J} \subset \mathbb{R}$, 且 $0 \in \mathscr{J}$. 给定连续可微的函数 $\kappa : \mathscr{J} \to \mathbb{R}^+$ 和 $\tau : \mathscr{J} \to \mathbb{R}$, 存在开区间 $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}, 0 \in \mathcal{I}$, 以及正则向量函数 $\mathbf{C} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3$, 使 $\mathbf{C}$ 为弧长参数化的曲线, 且分别以 κ, τ 为曲率, 挠率. 进一步, 任意两条以 κ 为曲率, 以 τ 为挠率的曲线可以通过刚体运动从一条映射到另一条.

Frenet 标架

单位切向量

定义 (单位切向量, Unit Tangent Vector)

设 $\mathbf{C}: \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3$ 为一条正则参数曲线. $\mathbf{C}$ 在 $t \in \mathcal{I}$ 处的单位切向量定义为:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{C}'(t)}{\|\mathbf{C}'(t)\|_2}. \tag{5}$$

注

1. 在弧长参数化下, $\|\mathbf{C}'(t)\|_2 = 1$, 因此,

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{C}'(t). \tag{6}$$

2. 当 $\|\mathbf{C}'(t)\|_2$ 为常数时, 曲线在该参数化下弧长的变化时均匀的.

Frenet 标架

主法向量

定义 (主法向量, Principal Normal Vector)

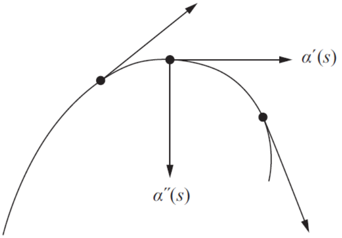
设 $\mathbf{C}: \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3$ 为一条正则参数曲线, 且 $\mathbf{C} \in \mathrm{C}^2(\mathcal{I})$, $\mathbf{T}(t)$ 为 $\mathbf{C}$ 在 $t \in \mathcal{I}$ 处的单位切向量. $\mathbf{C}$ 在 $t \in \mathcal{I}$ 处的主法向量定义为:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|_2}. \tag{7}$$

注

在弧长参数化下,

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{C}''(t)}{\|\mathbf{C}''(t)\|_2}. \tag{8}$$



(a) $\boldsymbol{\alpha}$ 为曲线的弧长参数化.

Frenet 标架

从法向量

定义 (从法向量, Binormal Vector)

设 $\mathbf{C}:\mathcal{I}\to\mathbb{R}^3$ 为一条正则参数曲线, 且 $\mathbf{C}\in C^2(\mathcal{I})$, $\mathbf{T}(t)$ 为 $\mathbf{C}$ 在 $t\in\mathcal{I}$ 处的单位切向量, $\mathbf{N}(t)$ 为 $\mathbf{C}$ 在 $t\in\mathcal{I}$ 处的主法向量. $\mathbf{C}$ 在 $t\in\mathcal{I}$ 处的从法向量定义为:

$$\mathbf{B}(t)=\mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t). \tag{9}$$

注

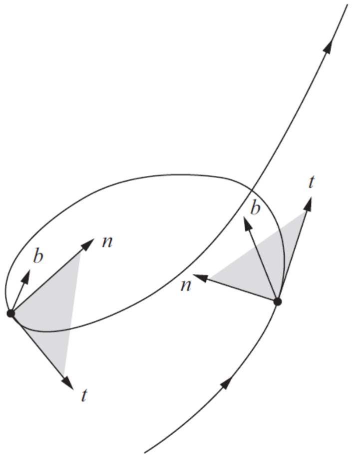
在弧长参数化下,

$$\mathbf{B}(t)=\frac{\mathbf{C}'(t)\times\mathbf{C}''(t)}{\|\mathbf{C}''(t)\|_2}. \tag{10}$$

Frenet 标架

定义 (Frenet 标架, Frenet Frame)

设 $\mathbf{C}:\mathcal{I}\to\mathbb{R}^3$ 为一条正则参数曲线, 且 $\mathbf{C}\in C^2(\mathcal{I})$. 设 $\mathbf{T}(t),\mathbf{N}(t),\mathbf{B}(t)$ 分别为 $\mathbf{C}$ 在 $t\in\mathcal{I}$ 处的单位切向量, 主法向量和从法向量, 称 $\{\mathbf{C}(t);\mathbf{T}(t),\mathbf{N}(t),\mathbf{B}(t)\}$ 为曲线 $\mathbf{C}$ 在 t 处的 Frenet 标架. 平面 $\{\mathbf{C}(t);\mathbf{T}(t),\mathbf{N}(t)\}$ 称为密切平面 (Osculating Plane).



曲率

定义 (曲率, Curvature)

设 $\mathbf{C}: \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3$ 为一条正则参数曲线, 且 $\mathbf{C} \in C^2(\mathcal{I})$. $\mathbf{C}$ 的曲率 $\kappa: \mathcal{I} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 定义为:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|_2}{\|\mathbf{C}'(t)\|_2}. \tag{11}$$

注

1. 当 $\mathbf{N}(t)$ 良定义时,
$$\mathbf{T}'(t) = \|\mathbf{T}'(t)\|_2 \mathbf{N}(t) = \kappa(t)\|\mathbf{C}'(t)\|_2 \mathbf{N}(t). \tag{12}$$
2. $\kappa(t) \equiv 0 \iff \mathbf{C}(t)$ 是一条直线 *(段)*.

挠率

定义 (挠率, Torsion)

设 $\mathbf{C}:\mathcal{I}\to\mathbb{R}^3$ 为一条正则参数曲线, 且其 Frenet 标架在 $\mathcal{I}$ 上处处存在. $\mathbf{C}$ 的挠率 $\tau:\mathcal{I}\to\mathbb{R}$ 由下式唯一确定:

$$\mathbf{B}'(t) = -\tau(t)\|\mathbf{C}'(t)\|_2\mathbf{N}(t). \tag{13}$$

由 $\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}$, $\mathbf{T}'\parallel\mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}' =& \mathbf{T}'\times\mathbf{N}+\mathbf{T}\times\mathbf{N}'\\ =&\mathbf{T}\times(c_1\mathbf{T}+c_2\mathbf{N}+c_3\mathbf{B})\\ =&c_2\mathbf{B}-c_3\mathbf{N}.\end{aligned}$$

而 $\mathbf{B}'\perp\mathbf{B}$, 故 $\mathbf{B}'\parallel\mathbf{N}$, 即(13)是合理的.

注

$\tau\equiv 0 \iff$ 曲线 $\mathbf{C}$ 为 *(落在密切平面里的)* 平面曲线.

Frenet 公式

性质 (Frenet 公式)

记 $s' = \|\mathbf{C}'(t)\|_2$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B}) = (\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B})\begin{pmatrix} 0 & -s'\kappa & 0 \\ s'\kappa & 0 & -s'\tau \\ 0 & s'\tau & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

有关 $\mathbf{T}', \mathbf{B}'$ 的部分可由(12), (13)得到, 下面计算 $\mathbf{N}'$. 由 Frenet 标架,

$$<\mathbf{T},\mathbf{N}>=0, <\mathbf{N},\mathbf{B}>=0. \tag{15}$$

$$<\mathbf{T}',\mathbf{N}>+<\mathbf{T},\mathbf{N}'>=0, <\mathbf{N}',\mathbf{B}>+<\mathbf{N},\mathbf{B}'>=0. \tag{16}$$

$$\begin{cases} <\mathbf{N}',\mathbf{T}>=-<\mathbf{T}',\mathbf{N}>=-\|\mathbf{T}'\|_2<\mathbf{N},\mathbf{N}>=-s'\kappa, \\ <\mathbf{N}',\mathbf{B}>=-<\mathbf{B}',\mathbf{N}>=-\tau\|\mathbf{C}'\|_2<\mathbf{N},\mathbf{N}>=-s'\tau. \end{cases} \tag{17}$$

Frenet 标架，曲率，挠率的计算

一般参数化

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{C}' \times \mathbf{C}''\|_2}{\|\mathbf{C}'\|_2^3} \tag{18a}$$

$$\tau = \frac{< \mathbf{C}' \times \mathbf{C}'', \mathbf{C}''' >}{\|\mathbf{C}' \times \mathbf{C}''\|_2^2} \tag{18b}$$

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{C}'}{\|\mathbf{C}'\|_2} \tag{18c}$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{C}' \times \mathbf{C}'' \times \mathbf{C}'}{\|\mathbf{C}'\|_2 \|\mathbf{C}' \times \mathbf{C}''\|_2} \tag{18d}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{C}' \times \mathbf{C}''}{\|\mathbf{C}' \times \mathbf{C}''\|_2} \tag{18e}$$

弧长参数化

$$\kappa = \|\mathbf{C}''\|_2 \tag{19a}$$

$$\tau = \frac{< \mathbf{C}' \times \mathbf{C}'', \mathbf{C}''' >}{\|\mathbf{C}''\|_2^2} \tag{19b}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}' \tag{19c}$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{C}''}{\|\mathbf{C}''\|_2} \tag{19d}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{C}' \times \mathbf{C}''}{\|\mathbf{C}''\|_2} \tag{19e}$$

应用

曲线的局部二阶近似

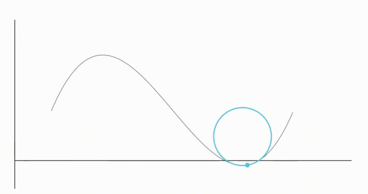
定义 (曲率圆)

正则曲线 $\mathbf{C}(t)$ 在点 $t = t_0$ 处的曲率圆为

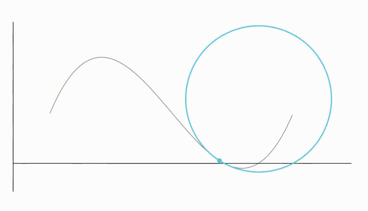
$$\mathbf{C}_{circle}(\theta) = \left(\mathbf{C} + \frac{1}{\kappa}\mathbf{N}\right) + \frac{1}{\kappa}\left(\mathbf{T}\sin\theta - \mathbf{N}\cos\theta\right). \qquad (20)$$

其中, 圆心 $\mathbf{C} + \frac{1}{\kappa}\mathbf{N}$ 称为曲率中心, 半径 $\frac{1}{\kappa}$ 称为曲率半径.

在点 $\mathbf{C}(t_0)$ 处, 曲线 $\mathbf{C}(t)$ 与其曲率圆有相同的切向量和有向密切平面.



(a)



(b)

1. 概述
2. 回顾
   - 内积和外积
   - 曲线的表达
3. 曲线论
   - 参数曲线
   - 局部性质
   - 全局性质
4. 总结

基本性质

闭曲线, 自交, 简单曲线

定义 (闭曲线, Closed)

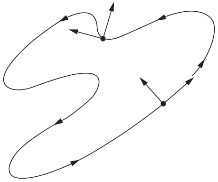
称一条空间参数曲线是闭曲线 (闭的), 如果存在该参数曲线的参数化 $\mathbf{C}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$, 使得 $\mathbf{C}(a)=\mathbf{C}(b)$. 进一步, 如果 $\mathbf{C}\in\mathrm{C}^k$, 且 $\mathbf{C}^{(i)}(a)=\mathbf{C}^{(i)}(b), i=0,1,\cdots,k$, 则称该闭曲线是 C^k 的.

定义 (简单曲线, Simple)

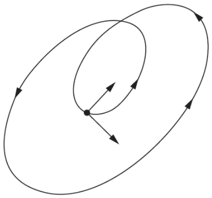
如果一条空间参数曲线不是闭的, 且是 1-1 的, 则称其是简单曲线 (简单的); 如果一条空间参数曲线是闭的, 且限制在端点外是 1-1 的则称其为简单的.

定义 (自交, Self-intersection)

一条参数曲线被称为在点 P 是自交的, 如果该参数曲线不是简单的.



(a)



(b)

总结

1. 研究对象——正则曲线
2. 几何不变量——曲率和挠率
3. 研究曲线局部性质的工具——Frenet 标架
4. 曲线的局部二阶近似——曲率圆

谢谢！