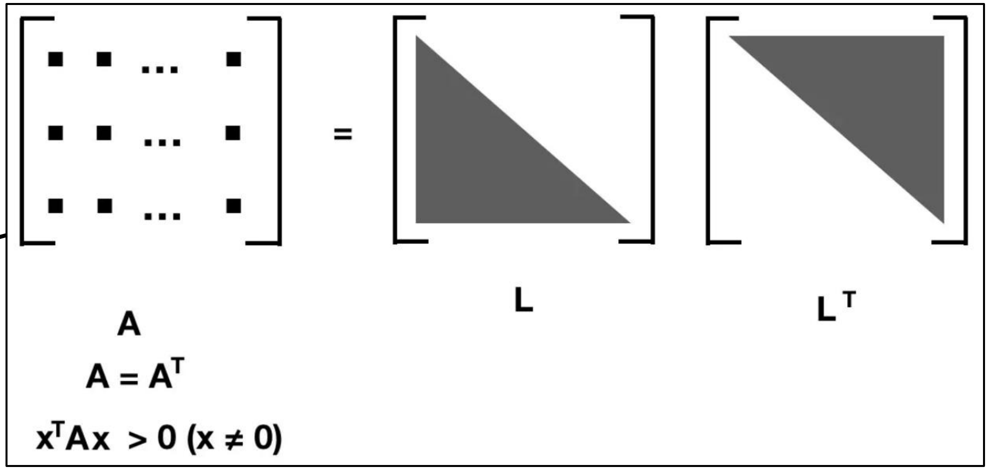
矩阵求解

- 背景
- 曲线曲面基函数矩阵
- 案例分析
- 课后作业

矩阵求解 - 背景

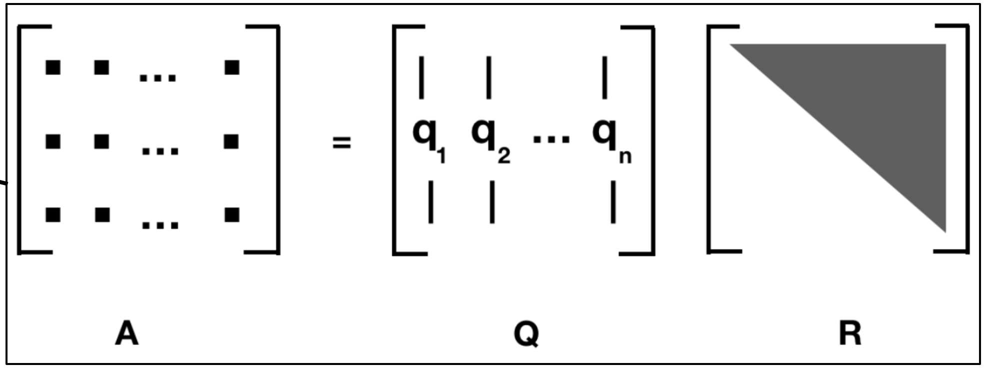
- 大多数问题的描述都可以转换为矩阵的表达
- 矩阵求解的重要工具
  - 加减、乘、逆回忆一下，重要工具书：《The Matrix Cookbook》http://matrixcookbook.com
  - 线性方程组求解：Cholesky分解 https://zhuanlan.zhihu.com/p/112091443

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} = ?$$



  - 矩阵特征值、特征向量与解空间 https://zhuanlan.zhihu.com/p/112327923

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}, \quad \lambda, \boldsymbol{v} = ?$$



矩阵求解 - 背景

- 如果将问题转化为以下形式就可以直接调用已有工具进行求解

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} = ?$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}, \quad \lambda, \boldsymbol{v} = ?$$

- 常用的C++矩阵运算库
  - Eigen：开源，头文件库，性能好，generic programming全球最佳实践，具备所有矩阵运算工具，编码简单，支持并行计算 http://eigen.tuxfamily.org
  - Intel MKL：闭源，商用级别性能，仅限Intel处理器

矩阵求解 - 曲线曲面基函数矩阵

- Bspline曲线曲面天生就可以写成矩阵形式

$$C(t) = \sum_i N_i(t)\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{N}(t)\boldsymbol{P}$$

$$S(t) = \sum_{i,j} N_i^u(u)N_j^v(v)\boldsymbol{p}_i j = \boldsymbol{N}^u(u)\boldsymbol{N}^v(v)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{N}(u,v)\boldsymbol{P}$$

- 太抽象？那把矩阵展开来看，一目了然

$\boldsymbol{N} \in \mathbb{R}^{3\times 3(m+1)(n+1)}$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}(u,v) = \left[\boldsymbol{N}_0(u,v), \cdots, \boldsymbol{N}_i(u,v), \cdots, \boldsymbol{N}_{(m+1)(n+1)}(u,v)\right]^{\mathsf{T}}, \text{ and}$$

$$\boldsymbol{N}_i(u,v) = \begin{bmatrix} N_i^u(u)\cdot N_i^v(v) & 0 & 0 \\ 0 & N_i^u(u)\cdot N_i^v(v) & 0 \\ 0 & 0 & N_i^u(u)\cdot N_i^v(v) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

$\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{3(m+1)(n+1)\times 1}$

$$\boldsymbol{P} = \left[\boldsymbol{p}_0, \cdots, \boldsymbol{p}_i, \cdots, \boldsymbol{p}_{(m+1)\times(n+1)-1}\right]^{\mathsf{T}}, \text{ and}$$

$$\boldsymbol{p}_i = \left[x_i, y_i, z_i\right]^{\mathsf{T}}$$

矩阵求解 - 曲线曲面基函数矩阵

- 除了常用控制点的基函数矩阵，也可以将多项式不同阶数变量的基函数构造成矩阵，比如Bezier曲线的Bernstein基函数

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{3} B_{i,3}(t)\mathbf{C}_p$$

- 分解来看其中控制点和基函数

$$\mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_p^{(0)} & \mathbf{c}_p^{(1)} & \mathbf{c}_p^{(2)} & \mathbf{c}_p^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_3(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

Bernstein基函数

t多项式

矩阵求解 - 曲线曲面基函数矩阵

- 那么，了解矩阵的形式可以拿来做什么？
  - 自交判定
  - 曲面补面
  - 拟合
  - 体积、质量、转动惯量计算
  - ……

矩阵求解 - 案例分析1

- Bezier曲线自交检测
  - 先把Bezier曲线写成多项式的形式

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{B}_3(t) = \mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix},$$

  - 那么自交等价于寻找一对多项式向量$\mathbf{t}_1$不等于$\mathbf{t}_2$，且

$$\mathbf{A}\mathbf{t}_1 = \mathbf{A}\mathbf{t}_2$$

  - 那么等价于下式存在非零解空间$\boldsymbol{x}^*$，且在$\boldsymbol{x}^*$前提下存在合理的$\boldsymbol{t}_1$和$\boldsymbol{t}_2$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

矩阵求解 - 案例分析1

- Dim-2 Deg-3 Bezier曲线自交检测
  - 所以自交问题就变成判定下式是否有非零特征值

    $$\mathbf{A}(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

  - 将A进行SVD

    $$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{T}}$$

  - 如果是一个deg=3的Bezier曲线，将会是如右形式

    $$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 4},$$

    $$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

  - 如果2个特征值均不为零，则存在自交，自交点存在于零特征值对应的特征向量张成的解平面（null space），在这个空间中的向量通过A会映射到0

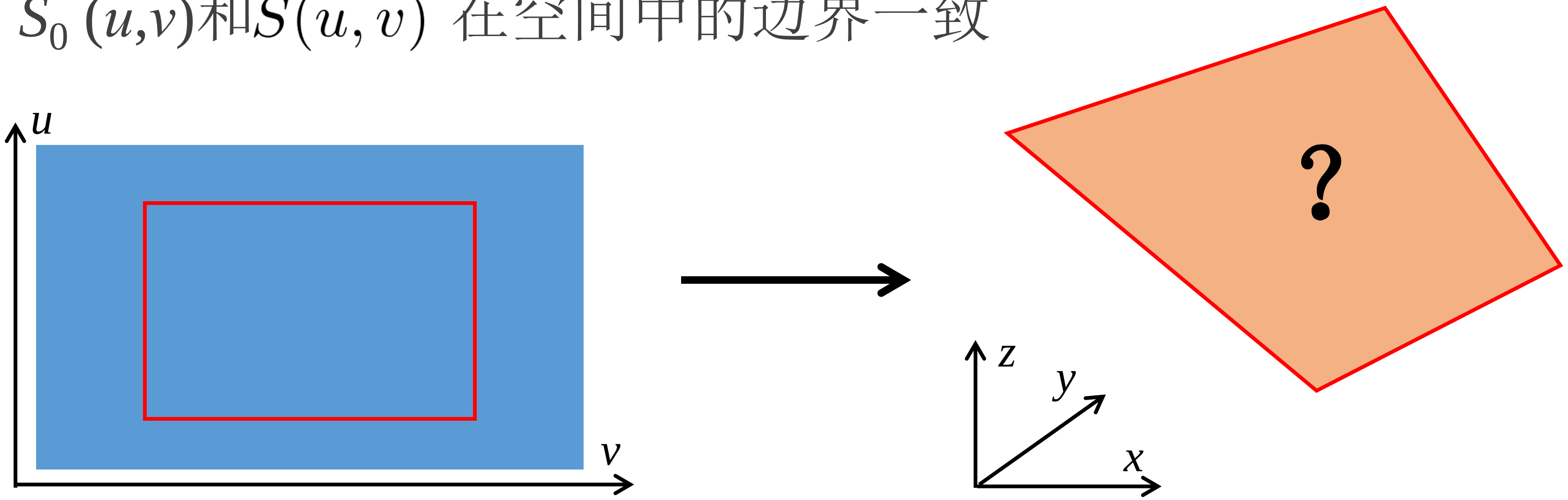
再通过解方程来确定解平面中求解合理的t_1和t_2

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ t_1 - t_2 \\ t_1^2 - t_2^2 \\ t_1^3 - t_2^3 \end{bmatrix} = \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \alpha_4 \mathbf{v}_4$$

如果3个特征值为0？
如果4个特征值为0？

矩阵求解 - 案例分析2

- Bspline曲面光顺
  - 给定了一个曲面映射$S(u,v)$，在其u-v空间中定义了裁剪曲线
  - 这个曲面要看起来很光顺，成为一个新的$\hat{S}(u,v)$
  - $S_0(u,v)$和$\hat{S}(u,v)$ 在空间中的边界一致



矩阵求解 - 案例分析2

- Bspline曲面光顺怎么定义？
  - 我们通过能量定义“光顺”，我们可以理解为一个曲面是一张薄铁，薄铁变形能量最低的状态是“光顺”
  - 一阶变形能量：极限是极小曲面，最低状态在平面边界下是平面

$$\Pi_{\text{stretch}} = \frac{1}{2}\alpha \int_{\Omega} \|\boldsymbol{S}(u,v) - \hat{\boldsymbol{S}}(u,v)\|^2 \,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$$

$$\Pi_{\text{stretch}} = \frac{1}{2}\alpha \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}\right)^2 \right) \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$$

  - 二阶弯曲能量：极限是曲率处处均匀曲面

$$\Pi_{\text{bend}} = \frac{1}{2}\beta \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{S}}{\partial u^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{S}}{\partial u \partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{S}}{\partial v^2}\right)^2 \right) \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$$

  - 三阶弯曲变化能量：进一步调节弯曲的渐变性

$$\Pi_{\text{roc}} = \frac{1}{2}\gamma \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^3 \boldsymbol{S}}{\partial u^3}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial^3 \boldsymbol{S}}{\partial u^2 \partial v}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial^3 \boldsymbol{S}}{\partial u \partial v^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 \boldsymbol{S}}{\partial v^3}\right)^2 \right) \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v$$

矩阵求解 - 案例分析2

- 怎么保证边界
  - 假定$S(u_0, v_0)$是一个在曲面上的点，要约束到一个给定边界上的点$\hat{\boldsymbol{P}}$
  - 如果曲面上的点$S(u_0, v_0)$远离了$\hat{\boldsymbol{P}}$，则会产生额外的能量
  - 定义这个能量为

$$\Pi_{\mathrm{pntP}} = \frac{1}{2} k_{\mathrm{pntP}} \| \boldsymbol{S}(u_0, v_0) - \hat{\boldsymbol{P}} \|^2$$

  - 其他由约束产生的能量......

$$\Pi_{\mathrm{srf}} = (\Pi_{\mathrm{stretch}} + \Pi_{\mathrm{bend}} + \Pi_{\mathrm{roc}}) + (\Pi_{\mathrm{pntP}} + \Pi_{\mathrm{pntD}} + \Pi_{\mathrm{crvP}} + \Pi_{\mathrm{crvD}} + \Pi_{\mathrm{crvC}})$$

- 建立方程，这个曲面具有的能量=内部能量+外部能量，所以能量最小的曲面控制点应该为

$$\boldsymbol{P}^* = \arg\min \Pi_{\mathrm{srf}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\Pi_{\mathrm{srf}}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{P}} = \frac{\Pi_{\mathrm{stretch}}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{P}} + \frac{\Pi_{\mathrm{bend}}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{P}} + \frac{\Pi_{\mathrm{roc}}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{P}} + \frac{\Pi_{\mathrm{pntP}}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{P}} + \frac{\Pi_{\mathrm{pntD}}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{P}} + \frac{\Pi_{\mathrm{crvP}}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{P}} + \frac{\Pi_{\mathrm{crvD}}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{P}} + \frac{\Pi_{\mathrm{crvC}}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{P}} = 0$$

矩阵求解 - 案例分析2

- 怎么求解？利用曲面的矩阵表达
  - 比如一阶能量与求导

$$\Pi_{\text{pntP}} = \frac{1}{2} k_{\text{pntP}} \|\boldsymbol{S}(\hat{u},\hat{v}) - \hat{\boldsymbol{P}}\|^2 = \frac{1}{2} k_{\text{pntP}} \left((\boldsymbol{N}\boldsymbol{P})^\top (\boldsymbol{N}\boldsymbol{P}) - 2(\boldsymbol{N}\boldsymbol{P})^\top \hat{\boldsymbol{P}} + \|\hat{\boldsymbol{P}}\|^2 \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\Pi_{\text{stretch}}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{P}} = \alpha \left(\int_\Omega \left(\boldsymbol{N}_u^\top \boldsymbol{N}_u + \boldsymbol{N}_v^\top \boldsymbol{N}_v \right) \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v \right) \boldsymbol{P}. = \alpha \boldsymbol{K}_{\text{stretch}} \boldsymbol{P}.$$

  - 比如点约束能量与求导

$$\Pi_{\text{stretch}} = \frac{1}{2}\alpha \int_\Omega \left(\left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial v}\right)^2 \right) \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v = \frac{1}{2}\alpha \int_\Omega \left((\boldsymbol{N}_u\boldsymbol{P})^\top (\boldsymbol{N}_u\boldsymbol{P}) + (\boldsymbol{N}_v\boldsymbol{P})^\top (\boldsymbol{N}_v\boldsymbol{P}) \right) \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\Pi_{\text{pntP}}}{\mathrm{d}\,\boldsymbol{P}} = k_{\text{pntP}} \left(\boldsymbol{N}^\top \boldsymbol{N} \right) \boldsymbol{P} - k_{\text{pntP}} \boldsymbol{N}^\top \hat{\boldsymbol{P}} = k_{\text{pntP}} \boldsymbol{K}_{\text{pntP}} - k_{\text{pntP}} \boldsymbol{f}_{\text{pntP}}$$

  - 所以，把控制点向量***P***作为未知数单列出来，可以得到一个线性方程组表达，求解即可

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K} &= \boldsymbol{K}_{\text{int}} + \boldsymbol{K}_{\text{ext}} \\
\boldsymbol{K}_{\text{int}} &= \mathcal{A}_{i=0}^{(m+1)\times(n+1)} \left(\alpha \boldsymbol{K}^{(e)}_{\text{stretch}} + \beta \boldsymbol{K}^{(e)}_{\text{bend}} + \gamma \boldsymbol{K}^{(e)}_{\text{roc}} \right) \\
\boldsymbol{K}_{\text{ext}} &= \mathcal{A}_{i=0}^{(m+1)\times(n+1)} \left(k_{\text{pntP}} \boldsymbol{K}^{(e)}_{\text{pntP}} + k_{\text{pntD}} \boldsymbol{K}^{(e)}_{\text{pntD}} + k_{\text{crvP}} \boldsymbol{K}^{(e)}_{\text{crvP}} + k_{\text{crvD}} \boldsymbol{K}^{(e)}_{\text{crvD}} + k_{\text{crvC}} \boldsymbol{K}^{(e)}_{\text{crvC}} \right) \\
\boldsymbol{f} &= \mathcal{A}_{i=0}^{(m+1)\times(n+1)} \left(k_{\text{pntP}} \boldsymbol{f}^{(e)}_{\text{pntP}} + k_{\text{crvP}} \boldsymbol{f}^{(e)}_{\text{crvP}} + k_{\text{crvC}} \boldsymbol{f}^{(e)}_{\text{crvC}} \right)
\end{aligned}$$

矩阵求解 - 课后作业

- Bspline曲线拟合（0.5d）- 求$\boldsymbol{P}$
  - 曲线参数t序列：0，0.1，0.3，0.5，1.0
  - 经过的点P_0序列：（0，0，0），（1，0，2），（2，1，3），（3，4，2），（4，0，0）
  - 给定deg=3，均匀knot分布
  - 需要样条作业中的曲线基函数计算
  - 利用Eigen库的矩阵工具
  - 提示1：最小二乘法
  - 提示2：$\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_0$

编码实践

- 实践题目

编码实践 - 实践题目

- 二选一（1.5d）
  - 曲线拟合单元测试编写
  - 距离计算单元测试编写
- 作业时间节点
  - 课程当天下午完成课后作业1
  - 课程结束后第一天中午前完成课后作业2
  - 课程结束后第三天前完成编码实践