微分几何

——曲面论

曲面论在开发工作中的实际意义

1. 曲面的表达
2. 定量研究与评估曲面的基本方法（曲面质量的好坏，曲面性状的决定因素）
3. 曲面查询功能的底层逻辑

目录

参数连续性

(http://staff.ustc.edu.cn/~lgliu/Courses/GAMES102_2020/default.html)

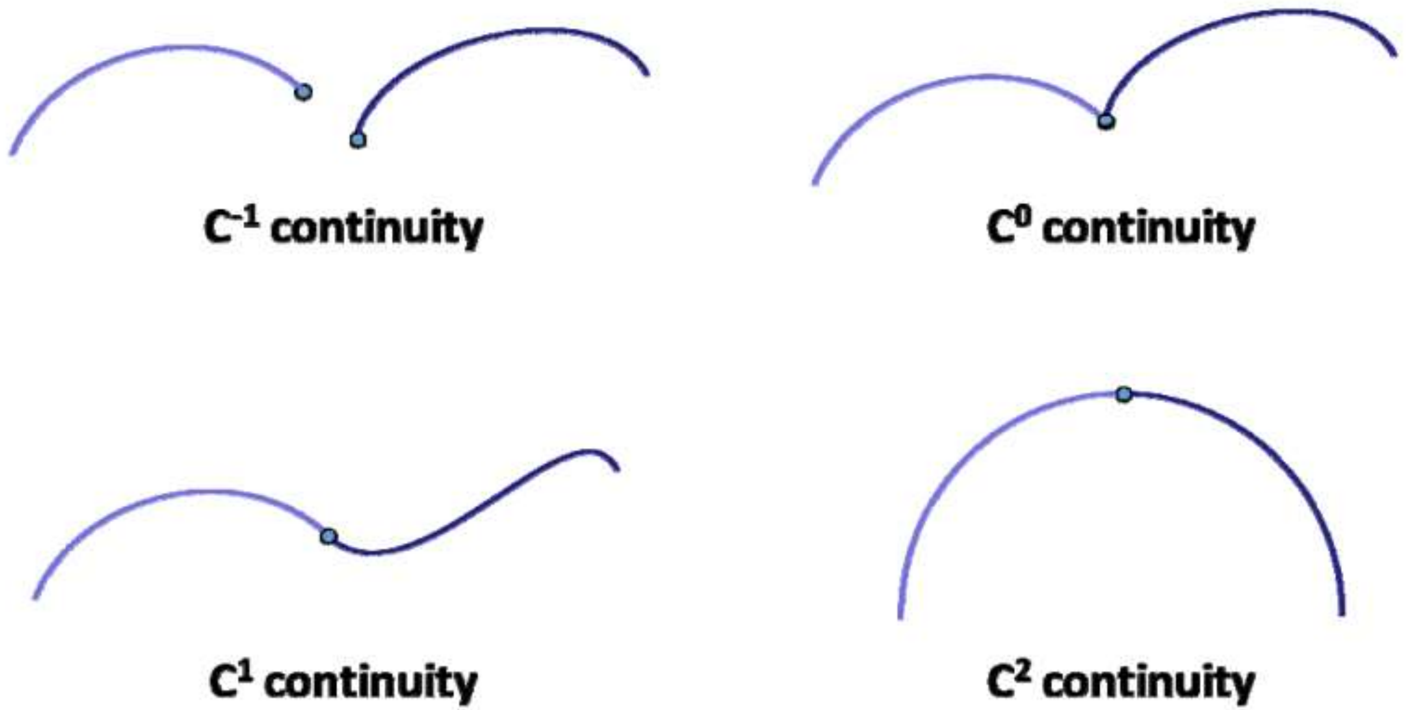
- 在数学分析/高等数学中, 我们所说的“连续性(光滑性)是指“参数连续性”: 给定2条曲线

  $C_1(t)$定义在$[t_0, t_1]$

  $C_2(t)$定义在$[t_1, t_2]$

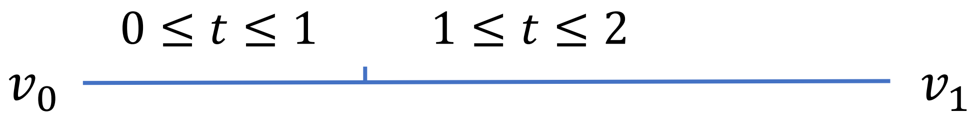
- 曲线C_1和C_2在t_1称为C^r连续的, 如果它们从$degree = 0$至$degree = n$的导数向量在t_1处完全相同.

参数连续性



参数连续性的不足

- 参数连续性过于严格, 在几何设计中不太直观
- 例子: 一条直线



$$C(t) = \begin{cases} v_0 + \dfrac{v_1 - v_0}{3} t, 0 \le t \le 1, \\ v_0 + \dfrac{v_1 - v_0}{3} + \dfrac{2(v_1 - v_0)}{3}(t-1), 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

但是, $C'(1-) = \frac{v_1 - v_0}{3}, C'(1+) = \frac{2(v_1 - v_0)}{3}$

C(t)在t=1的左右导数不相等, 因此, $C(t)$在[0,2]中不是C^1的, 与直线的连续性应是C^∞的矛盾.

原因: 连续性依赖于参数的选择, 同一条直线, 参数不同, 连续阶也不同.

参数连续性的不足

- 参数连续性过于严格，在几何设计中不太直观
- 例子，一条直线

$0 \le s \le \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} \le s \le 2$

- v_0 ——————————— v_1

$$C(t) = \begin{cases} v_0 + \dfrac{v_1 - v_0}{3} s, 0 \le s \le \dfrac{2}{3}, \\ v_0 + \dfrac{v_1 - v_0}{3} + \dfrac{(v_1 - v_0)}{2}(s - \dfrac{2}{3}), \dfrac{2}{3} \le s \le 2. \end{cases}$$

则$C'(\frac{2}{3}-) = C'(\frac{2}{3}+), C(t)$在[0,2]就是$C^\infty$了。

本质: 是引入了一个参数变换$\mathrm{t}(s) = \begin{cases} \frac{3}{2}s, \ 0 \le s < \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4}(s - \frac{2}{3}) + 1, \ \frac{2}{3} \le s \le 2 \end{cases}$，使得不是$C^1$的曲线变成$C^1$的.

几何连续性: 性质

【定义】

设$C(t)(a \le t \le b)$是给定的曲线.

若存在一个参数变化$t = \rho(s)(a_1 \le t \le b_1)$,

使得$C(\rho(s)) \epsilon C^n[a_1, b_1]$,且$\frac{dC(\rho(s))}{ds} \neq 0$,

则称曲线$C(t)(a \le t \le b)$是n阶几何连续的曲线, 记为

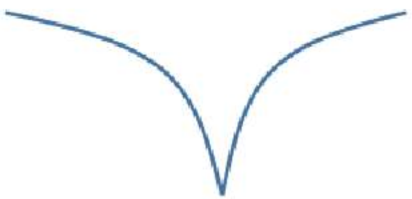
$C(t) \epsilon GC^n[a, b]$或$C(t) \epsilon G^n[a, b]$.

【性质】

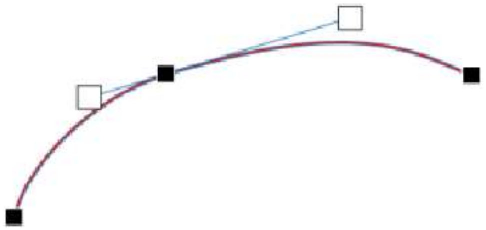
1. 条件$\frac{dC(\rho(s))}{ds} \neq 0$保证了曲线上无奇点;
2. 几何连续性与参数选取无关, 是曲线本身固有的几何性质;
3. G^n的条件比C^n的宽，曲线类型更多.

几何连续性的具体表现形式

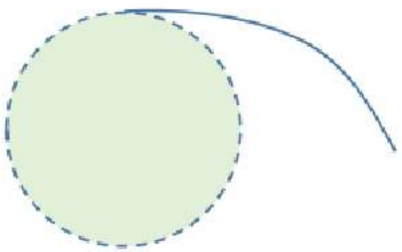
- G^0: 表示两曲线有公共的连接端点, 与C^0的条件一致
- G^1: 两曲线在连接点处有公共的切线, 即切线方向连续
- G^2: 两曲线在连接点处有公共的曲率圆, 即曲率连续



G^0



G^1



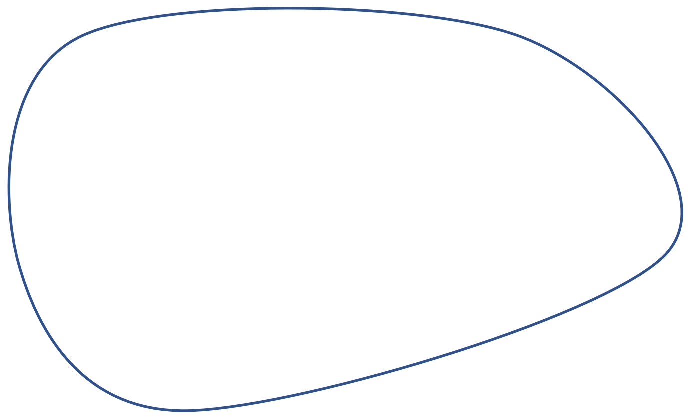
G^2

基本概念

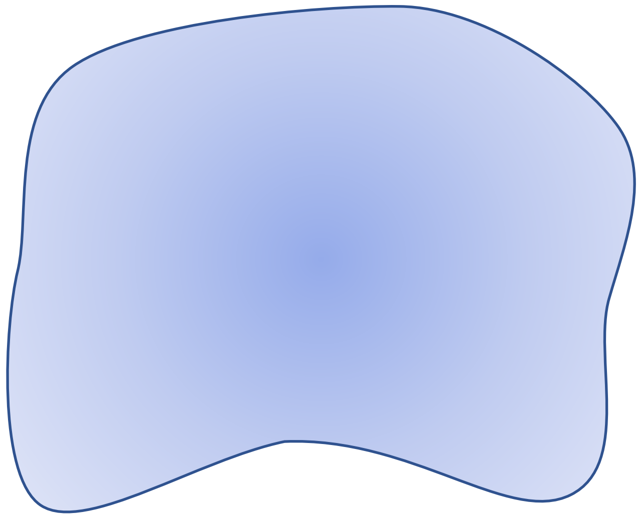
1. 什么是曲面

（1）几何定义: 曲面是直线或曲线在某些约束下的运动轨迹

（2）解析定义: 参数曲面S是指从E^2的一个区域D (即E^2中的一个连通开子集)到空间E^3的一个连续映射$S: D \to E^3$.



区域D



曲面S

基本概念

2. 曲面的表达

- 参数方程$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$ $(u,v) \in D$

- 向量方程:
- $S = S(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

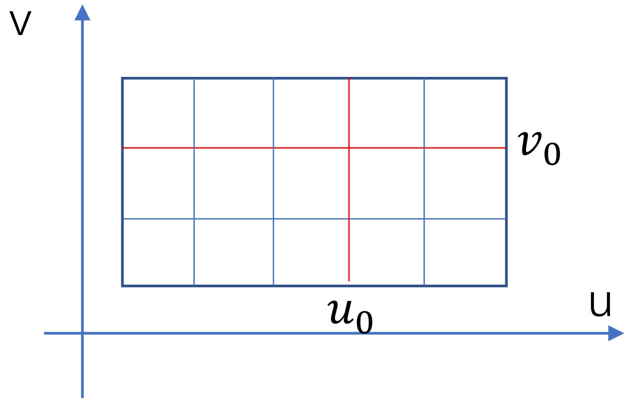
- 注：假定函数$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$有连续的3次以上的各阶偏导数.

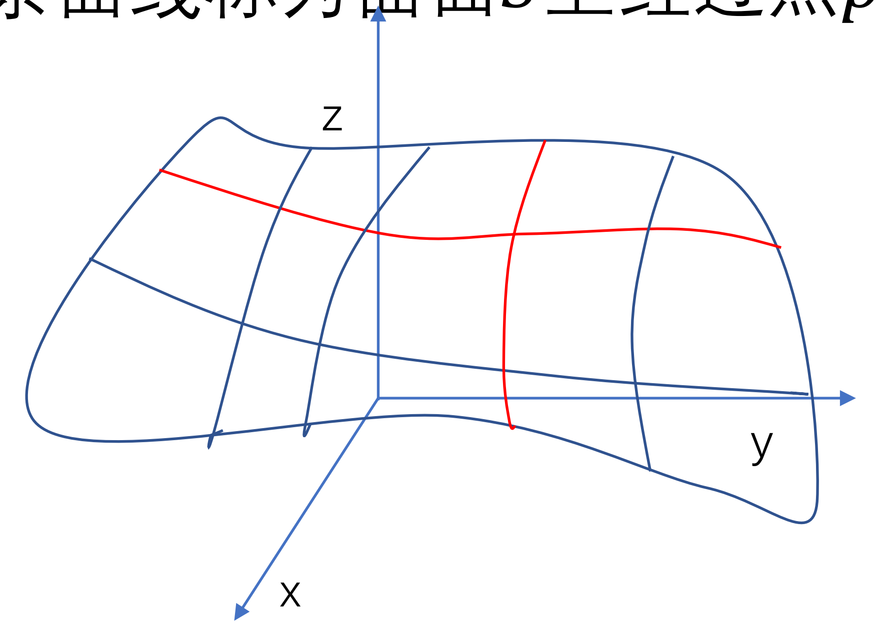
基本概念

3. 正则参数曲面(regular parameterized surface)

在曲面S上取定一点p_0, 向量$\boldsymbol{Op_0} = \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$

(1) v -曲线:让参数u固定, $u = u_0$, 而让参数v变化, 则动点描出一条落在曲面S上的曲线$C(u_0, v)$, 这条曲线称为曲面S上经过点p_0的v -曲线. 同理可定义u -曲线.





基本概念

3. 正则参数曲面

(2)正则: 曲面S的参数曲线在点p_0的两个切向量是: $S_u(u_0, v_0) = \frac{\partial s}{\partial u}\Big|_{(u_0,v_0)}$, $S_v(u_0, v_0) = \frac{\partial s}{\partial v}\Big|_{(u_0,v_0)}$,如果$S_u \times S_v|_{(u_0,v_0)} \neq 0$, 则称曲面$S$在点$p_0$是正则的. 定义叉乘结果指向的一侧为曲面的正侧.

(3)正则参数曲面: 3次以上连续可微的, 处处是正则点的参数曲面.

基本概念

4. 正则曲面(regular surface)

- 设S是E^3的一个子集, 如果对于任意一点$p \in S$, 必存在点p在E^3中的一个邻域$V \subset E^3$, 以及E^2中的一个区域U, 使得在U和$V \cap S$之间能够建立一一的, 双向都是连续的对应, 并且该对应r: $U \to V \cap S \subset E^3$本身是一个正则参数曲面 $S(u,v)(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, $(u,v) \in U$, 则称S是E^3中的一张正则曲面, 简称曲面.
- 注: 正则参数曲面与E^2中的一个开区域同胚; 正则曲面是把一片片正则参数曲面粘起来的结果.

基本概念

5. 切向量

- 切向量(tangent vector): 曲面S上经过点p的任意一条连续可微曲线在该点的切向量称为曲面S在点p的切向量.
- 切空间(tangent space): 曲面S在点p的全体切向量构成一个二维向量空间, 这个向量空间称为曲面S在点p的切空间, 记作$T_P S$.
- 切平面(tangent plane): 在空间E^3中经过点p, 由切向量S_u, S_v张成的二维平面称为曲面S在点p的切平面, 参数方程为:

$$\boldsymbol{X}(\alpha,\beta) = S(u,v) + \alpha S_{\boldsymbol{u}}(u,v) + \beta S_{\boldsymbol{v}}(u,v)$$

基本概念

6. 法向量(normal vector)

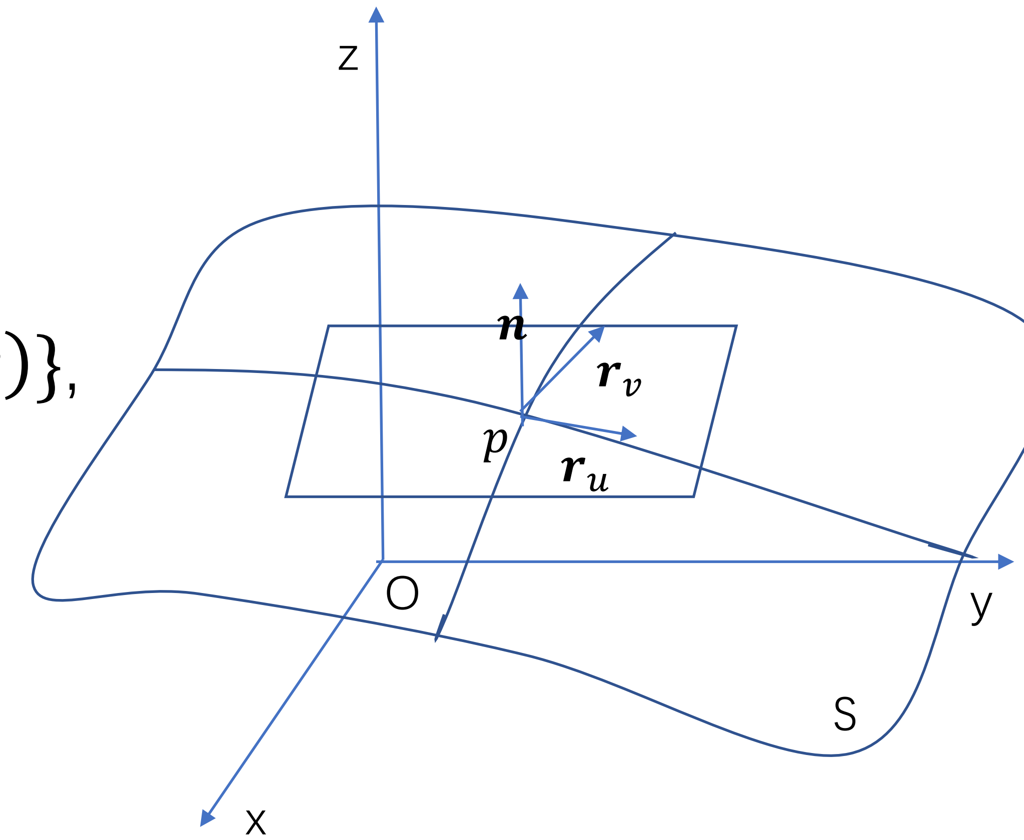
- $\boldsymbol{n}(u,v)=\frac{S_u(u,v)\times S_v(u,v)}{|S_u(u,v)\times S_v(u,v)|}$

7.自然标架(natural frames)：

- $\{S(u,v);S_u(u,v),S_v(u,v),\boldsymbol{n}(u,v)\}$,

称为曲面的自然标架.

注: $\boldsymbol{S}_u$, $\boldsymbol{S}_v$不一定正交.



第一基本形式(the first fundamental form)

- 曲面S在任意一点$S(u,v)$的任意一个切向量为:

$$dS(u,v) = S_u(u,v)du + S_v(u,v)dv$$

第一类基本量:

$$E(u,v) = S_u(u,v) \cdot S_u(u,v),$$
$$F(u,v) = S_u(u,v) \cdot S_v(u,v) = S_v(u,v) \cdot S_u(u,v),$$
$$G(u,v) = S_v(u,v) \cdot S_v(u,v)$$

第一基本形式

- $I = dS(u,v)\cdot dS(u,v)$
$= (S_u(u,v)du + S_v(u,v)dv)\cdot(S_u(u,v)du + S_v(u,v)dv)$
$= E(u,v)(du)^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)(dv)^2$
$= (du,dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$称二次微分式$I$是曲面$S$的第一基本形式.

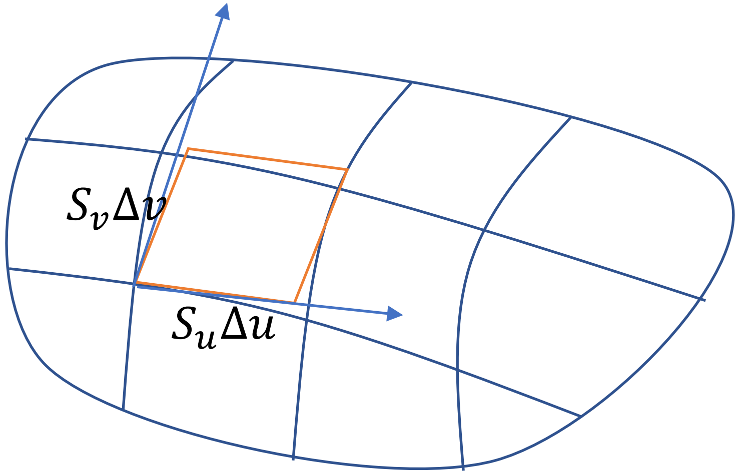
第一基本形式应用

(1)几何意义: 切向量dS长度的平方

(2)曲线的弧长(曲面上曲线):

$$l = \int_a^b |C'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt$$

(3)曲面的面积: $A = \iint_D \sqrt{EG - F^2}dudv$



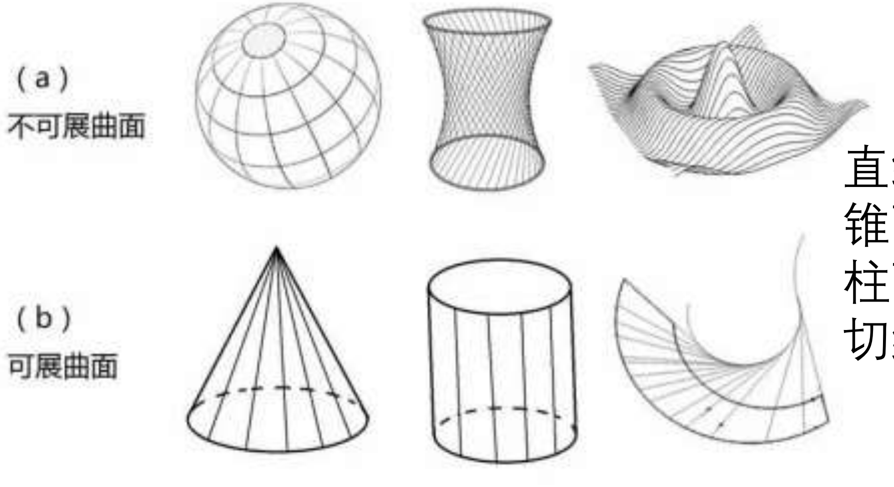
保长对应

切映射: 假设映射$\sigma: S_1 \to S_2$是三次以上连续可微的, 映射σ在每一点$p \in S_1$诱导出从切空间$T_P S_1$到切空间$T_{\sigma(p)} S_2$的一个线性映射$\sigma_{*p}: T_p S_1 \to T_{\sigma(p)} S_2$, 称此映射为由映射$\sigma$在点$p$的切空间$T_p S$上诱导的切映射.

保长映射: 设$\sigma: S_1 \to S_2$是从正则参数曲面S_1到正则参数曲面S_2的3次以上连续可微映射. 如果在每一点$p \in S_1$, 切映射$\sigma_{*p}: T_p S_1 \to T_{\sigma(p)} S_2$都保持切向量的长度不变, 即对于任意的$X \in T_p S_1$都有$\left|\sigma_{*p}(\mathrm{X})\right| = |\mathrm{X}|$, 则称$\sigma: S_1 \to S_2$是从曲面$S_1$到曲面$S_2$的保长映射.

可展曲面

- 定义: 设S是直纹面, 如果曲面S的切平面沿每一条直母线是不变的, 则称该直纹面是可展曲面.
- 定理: 可展曲面在局部上是柱面, 锥面和一条空间曲线的切线面,或者是用这三种曲面以充分连续可微的方式沿直母线拼接的结果.
- 定理: 可展曲面在局部上可以和平面建立保长对应.



直纹面: $S(u,v) = a(u) + vl(u)$, $l(u)$为单位向量
锥面: $S(u,v) = a + vl(u)$, $l(u)$为单位向量
柱面: $S(u,v) = a(u) + vl$
切线面: $S\ (u,v) = a(u) + va'(u)$

第二基本形式(the first fundamental form)(曲面弯曲的直观认识)

称二次微分式 II $= d^2S\cdot n = -dS\cdot dn$

$= L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2$

为曲面的第二基本形式,

其中$L = S_{uu}\cdot n = -S_u\cdot n_u$

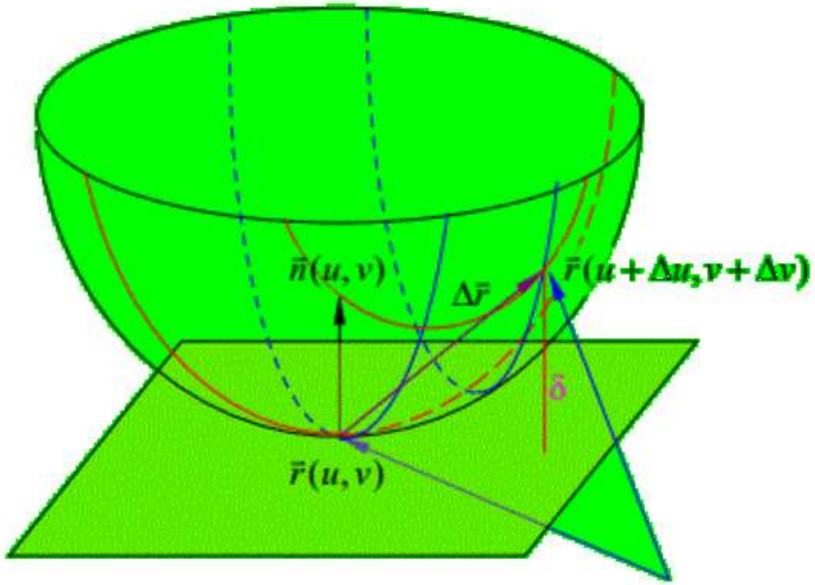
$M = S_{uv}\cdot n = -S_u\cdot S_v$

$N = S_{vv}\cdot n = -S_v\cdot n_v$

称为第二类基本量.

几何意义: 有向距离的$\delta(du,dv)$

主要部分的2倍.



法曲率(normal curvature)(从曲线认识曲面)

- 曲面S上曲线C的法曲率: 是曲线C上的曲率向量在法方向上的投影.
- 曲面上曲线参数方程$C(s) = S(u(s), v(s))$
- 单位切向量: $\alpha(s) = C_u \frac{du(s)}{ds} + C_v \frac{dv(s)}{ds}$
- 曲率向量: $\frac{d\alpha(s)}{ds} = k\beta(s) = S_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2S_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + S_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 +$

$$S_u \frac{d^2u}{ds^2} + S_v \frac{d^2v}{ds^2}$$

- 投影:

$$k_n = \frac{d\alpha}{ds} = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

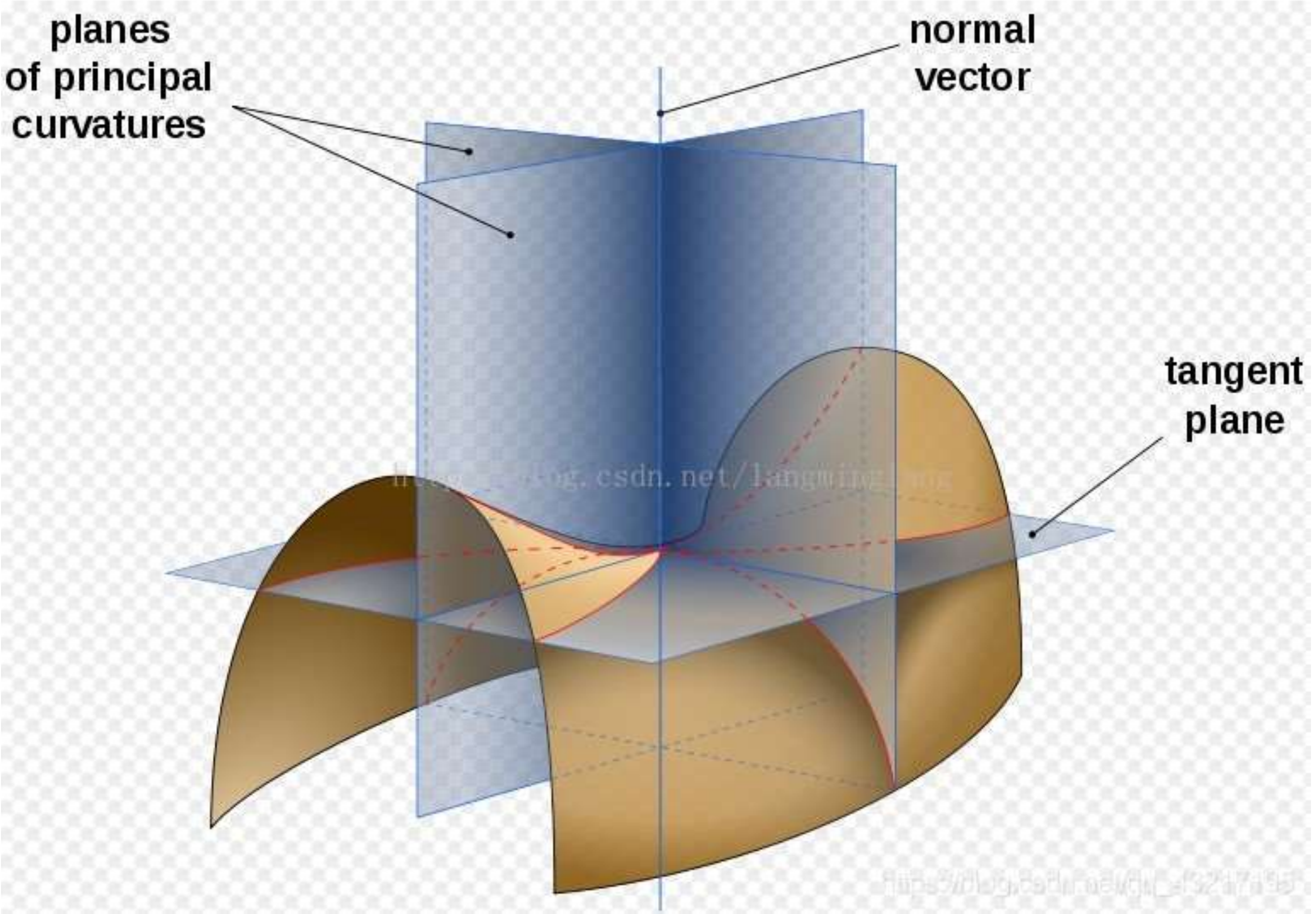
法曲率

- 曲面在点(u,v)处沿切方向(du,dv)的法曲率:

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{L(du)^2+2Mdudv+N(dv)^2}{E(du)^2+2Fdudv+G(dv)^2}$$

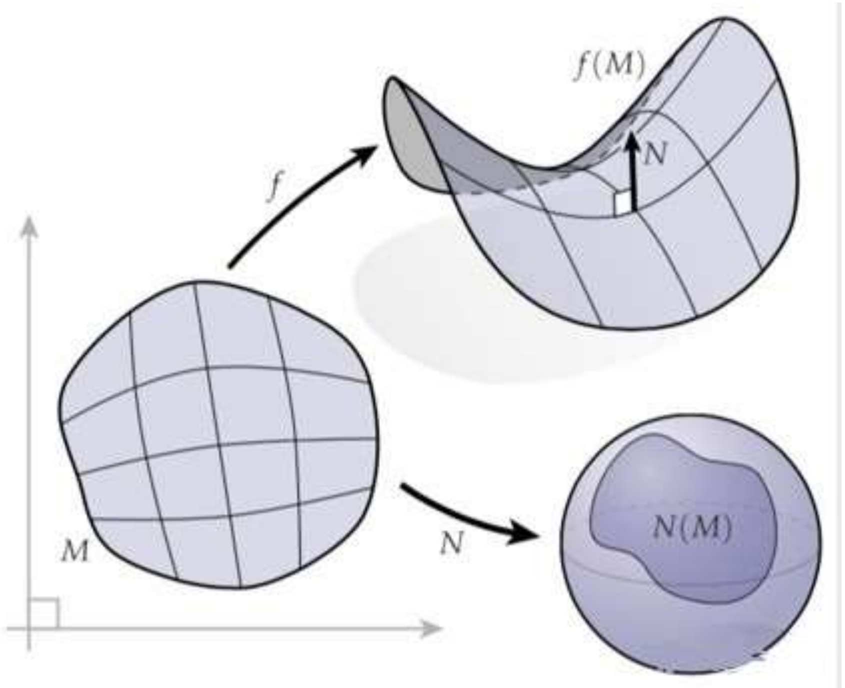
正则参数曲面在任意一个固定点, 其法曲率必定在两个彼此正交的切方向上分别取最大值和最小值. 取最大值和最小值的方向称为曲面在该点的主方向, 相应的法曲率称为曲面在该点的主曲率.

主曲率(principal curvature)



Gauss映射

- Gauss映射: 设$S = S(u,v)$是一块正则参数曲面, 它在每一点处有一个确定的单位法向量$n(u,v)$. 将$n(u,v)$在空间E^3中平行移动到坐标原点O,那么它的终点便落在E^3中的单位球面Σ上, 于是得到从曲面S到Σ的一个可微映射$g: S \to \Sigma$, 使得$g\big(S(u,v)\big) = n(u,v)$, 这个映射称为Gauss映射.



Weingarten映射（shape operator）

- Gauss映射: $g: S \to \Sigma$诱导出从曲面S在点p的切空间T_pS到球面Σ在像点$g(p)$的切空间$T_{g(p)}\Sigma$的切映射:
$$g_*: T_pS \to T_{g(p)}\Sigma$$
- Weingarten映射:切映射g_*可以看做从切空间T_pS到它自身的线性映射(切空间T_pS和切空间$T_{g(p)}\Sigma$平行), 令$W = -g_*: T_pS \to T_pS$, 称W为曲面S在点p的Weingarten映射
$$W(r_u) = -n_u, W(r_v) = -n_v$$

正则参数曲面在每一点的Weingarten映射的两个特征值恰好是该曲面在这一点的主曲率, 对应的特征方向为主方向.

主曲率的计算

- 设曲面S的方程是$S=S(u,v)$, 假设$\delta S=S_u\delta u+S_v\delta v$是曲面在点$(u,v)$的一个主方向, 即$(\delta u,\delta v)\neq 0$,并且有实数$\lambda$使得

$$W(\delta r)=\lambda\delta r$$

计算可得:$\lambda^2-\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}\lambda+\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$=0

由根与系数的关系得: $$k_1+k_2=2H=\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}$$

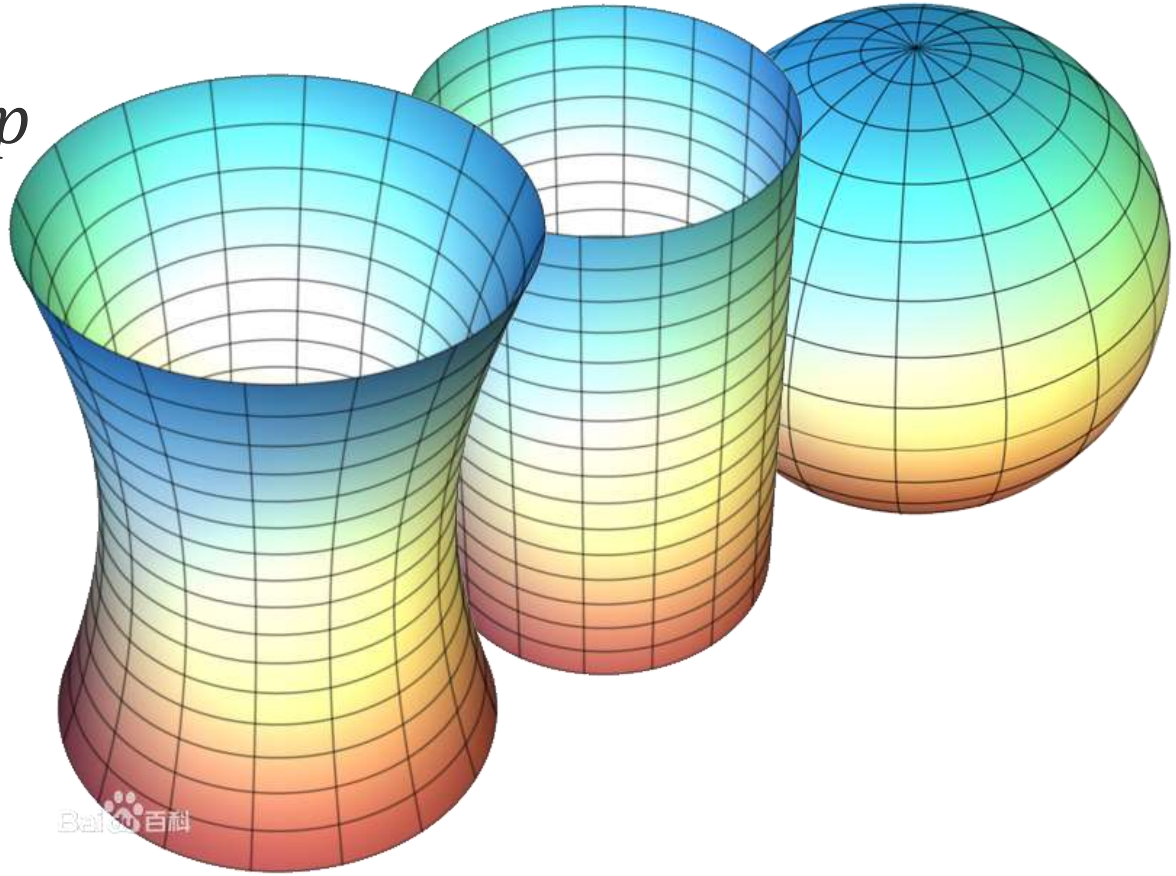
$$k_1k_2=K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

称$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$为平均曲率(mean curvature), $K=k_1k_2$为Gauss曲率或总曲率(Gaussian curvature).

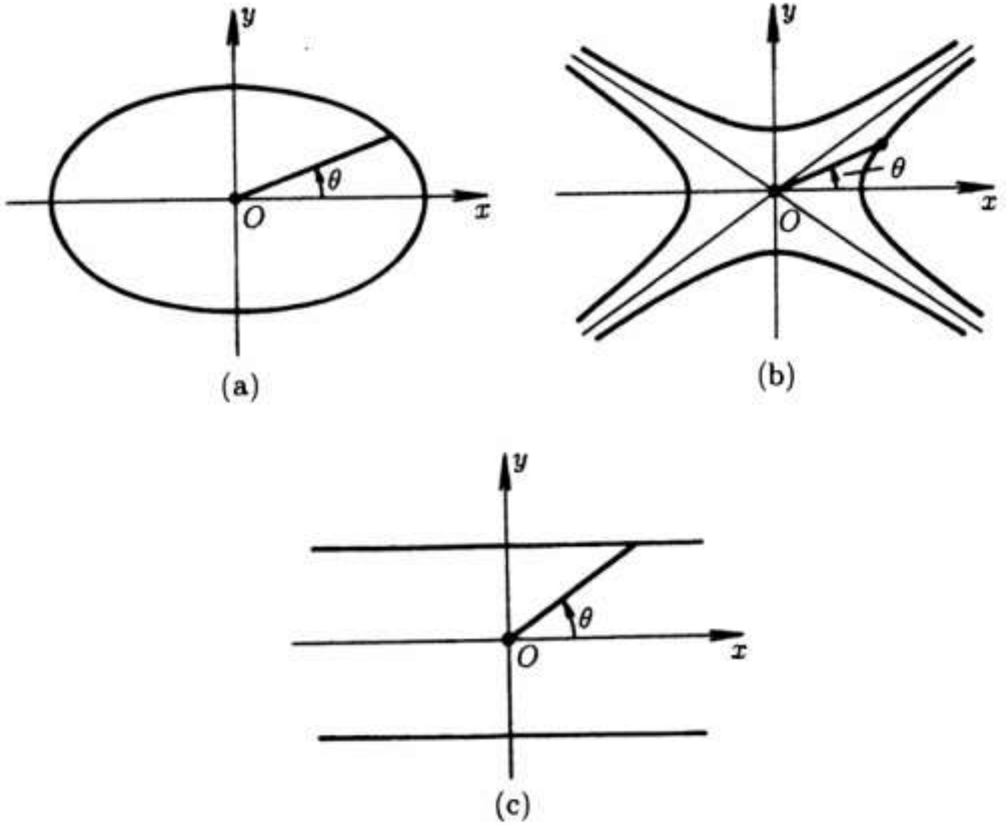
高斯曲率

几何意义: 曲面S在点p的Gauss曲率的绝对值$|K(p)|$是，围绕点p的小区域D在Gauss映射下的像$g(D)$的面积与区域D的面积之比在区域D收缩到点p的极限.

负高斯曲率曲面(双曲面),
零高斯曲率曲面(圆柱面),
正高斯曲率曲面(球面).



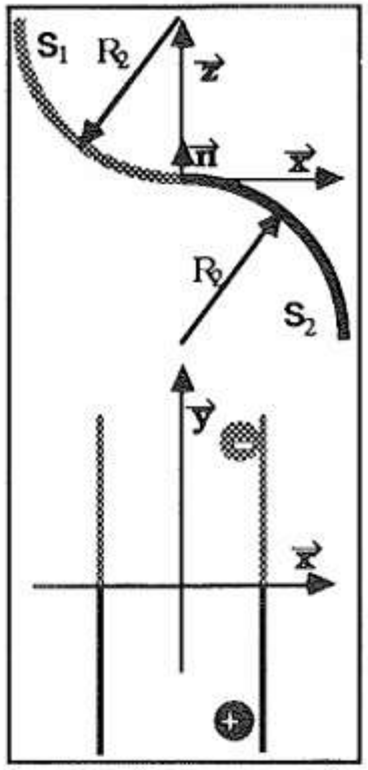
Dupin标形(Dupin indicatrix)



$$k_1x^2 + k_2y^2 = sign(k_n(\theta))$$

$$\begin{cases} |k_1|x^2 + |k_2|y^2 = 1 & k_1k_2 > 0 \\ |k_1|x^2 - |k_2|y^2 = \pm 1 & k_1k_2 < 0 \\ |k_1|x^2 = 1 & k_1 \neq 0, k_2 = 0 \\ |k_2|y^2 = 1 & k_1 = 0, k_2 \neq 0 \end{cases}$$

Dupin标形的应用



Linkage curve: 两张曲面的拼接处曲线.
G2连续: 对于linkage curve上的任一点, 两张曲面在该点的任意方向法曲率相同.
G2连续的充要条件1:对于linkage curve上的任一点, dupin标形相同且法曲率符号相同.
G2连续的充要条件2(three tangents theorem):对于linkage curve上的任一点, 存在3个两两不共线的切方向，使得两曲面在该点这3个切方向上法曲率相同

只满足dupin标形相同, 不一定G2. 反例见左上图, 两个半径相同, 轴平行, 相切于母线的柱面, linkage curve上每一点的dupin标形均相同(平行的直线, 见左下图).

曲面的存在唯一性定理

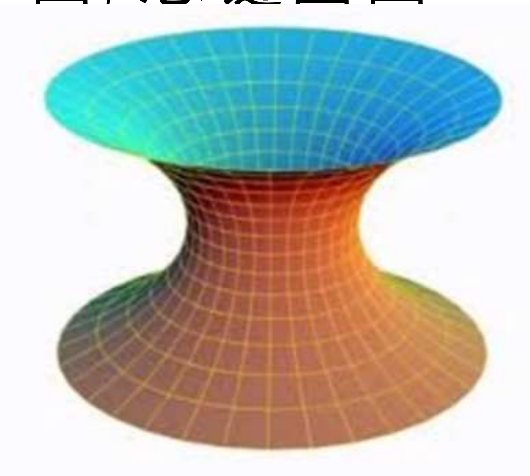
- 如果两个二次微分式φ, ω满足Gauss-Codazzi方程, 则存在一个正则参数曲面分别以φ, ω为第一基本形式和第二基本形式; 在E^3中任意两个满足上述条件的曲面必定能在E^3中的一个刚体运动下彼此重合.

Gauss绝妙定理（Egregium Theorem）

- Gauss绝妙定理: 曲面的Gauss曲率是曲面在保长变换下的不变量.
- 内蕴几何学: 专门研究曲面上由它的第一基本形式决定的几何学称为曲面内蕴几何学.
- 脐点(umbilical point): 是曲面的第一类基本量与第二类基本量成比例的点, 如果比值是零, 则称该脐点为平点, 非零则称为圆点.
- 空间E^3中的一块无脐点的曲面S是可展曲面的充分必要条件是它的Gauss曲率K恒等于零.
- 注: 对于任意非脐点, 可以发现两个主方向和曲面法向, 两两正交, 故这三个方向和该点可以构成一个标架.

极小曲面(Minimal Surface)

平均曲率恒为零的曲面称为极小曲面.
性质: 以所给定的曲线为边界的
曲面中面积最小的曲面必定是极小曲
面.
常见极小曲面: 平面, 悬链曲面



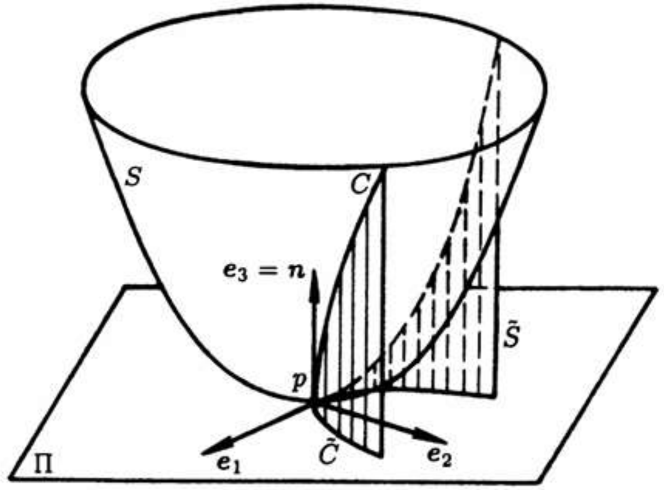
测地曲率(geodesic curvature)

由于Frenet标架只包含曲线本身的信息, 对于曲面上曲线, 我们考虑建立新的正交标架场$\{C; e_1, e_2, e_3\}$(Darboux标架)其定义为:

其定义为: $e_1 = \frac{dr(s)}{s} = \alpha(s)$

$e_3 = n(s)$

$e_2 = e_3 \times e_1 = n(s) \times \alpha(s)$



测地曲率

- $$\frac{dC(s)}{ds} = e_1$$

$$\frac{de_1(s)}{ds} = k_g e_2 + k_n e_3$$

$$\frac{de_2(s)}{ds} = -k_g e_1 + \tau_g e_3$$

$$\frac{de_3(s)}{ds} = -k_n e_1 - \tau_g e_2$$

$$k_n = \frac{de_1(s)}{ds} \cdot e_3 = C''(s) \cdot n$$

$$k_g = \frac{d^2C(s)}{ds^2} \cdot e_2 = C''(s) \cdot \big(n(s) \times C'(s)\big)$$

$$= (n(s), C'(s), C''(s))$$

$$\tau_g = -\frac{de_3(s)}{ds} \cdot \big(n \times C'(s)\big)$$

$$= -(n(s) \times C'(s) \cdot n'(s)) = \big(n(s), n'(s), C'(s)\big)$$

称k_g为曲面S上曲线C的测地曲率.
称τ_g为曲面S上曲线C的测地挠率.
称曲面上测地曲率恒等于零的曲线为曲面上的测地线.

Gauss-Bonnet公式

- Gauss-Bonnet公式:假定曲线C是有向曲面S上的一条由n段光滑曲线组成的分段光滑简单闭曲线, 它所包围成的区域D是曲面S上的一个单连通区域, 则:

$$\oint_C \ k_g ds + \iint_D \ K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

- 其中k_g是曲线C的测地曲率, K是曲面S的Gauss曲率, α_i表示曲线C在角点$s = s_i$的外角.

作业

- 证明: 正螺旋面$S = (ucosv, usinv, bv)$是极小曲面

Q&A