几何内核部样条知识基础

曲面建模组

2024 年 7 月 3 日

目录

1 插节

设 $\boldsymbol{C}^w(t)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(t)\boldsymbol{P}_i^w$ 是定义在节点矢量 $\mathrm{Knot}=\{t_0,t_1,...,t_m\}$ 上的 NURBS 曲线。插节是指给定一个新节点 $\hat{t}\in[t_k,t_{k+1})$，将 $\hat{t}$ 插入节点矢量 Knot，形成新的节点矢量 $\hat{\mathrm{Knot}}=\{\hat{t}_0=t_0,...,\hat{t}_k=t_k,\hat{t}_{k+1}=\hat{t},\hat{t}_{k+2}=t_{k+1},...,\hat{t}_{m+1}=t_m\}$。分别用 V_{Knot} 和 $V_{\hat{\mathrm{Knot}}}$ 表示定义在两个节点向量上的向量空间时，有 $V_{\mathrm{Knot}}\subset V_{\hat{\mathrm{Knot}}}$。因此 $\boldsymbol{C}^w(t)$ 可以表示为定义在 $\hat{\mathrm{Knot}}$ 上的 NURBS 曲线

$$C^w(t)=\sum_{i=0}^{n+1}\hat{N}_{i,p}(t)\boldsymbol{Q}_i^w$$

插节只改变了空间基底，对曲线的几何和参数化不改变。因此，插节是找新控制点 $\boldsymbol{Q}_i^w$ 的过程

找新的 $\boldsymbol{Q}_i^w$ 有两种办法，第一种直接联立方程

$$\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(t)\boldsymbol{P}_i^w=\sum_{i=0}^{n+1}\hat{N}_{i,p}(t)\boldsymbol{Q}_i^w$$

对于三维空间中的曲线那就是一个 4(n+2) 阶的非奇异带状线性方程组，用迭代法求解费时费力。

第二种办法是考虑了样条基函数本身的性质，由于每个基函数 $N_{i,p}(t)$ 的只在 $[t_i,t_{i+p+1}]$ 上非零，再观察节点向量就能发现

$$N_{i,p}(t)=\hat{N}_{i,p}(t),\quad i=0,...,k-p-1$$

$$N_{i,p}(t)=\hat{N}_{i+1,p}(t),\quad i=k+1,...,n$$

那么有

$$\boldsymbol{P}_i^w=\boldsymbol{Q}_i^w,\quad i=0,...,k-p-1$$

$$\boldsymbol{P}_i^w=\boldsymbol{Q}_{i+1}^w,\quad i=k+1,...,n$$

对于剩下的基函数 $N_{i,p}(t)(i=k-p,...,k)$ 通过归纳法事实上有

$$N_{i,p}(t)=\frac{\hat{t}-\hat{t}_i}{\hat{t}_{i+p+1}-\hat{t}_i}\hat{N}_{i,p}(t)+\frac{\hat{t}_{i+p+2}-\hat{t}}{\hat{t}_{i+p+2}-\hat{t}_{i+1}}\hat{N}_{i,p}(t)$$

把这一项带入之前的联立方程组就得到

$$\sum_{i=k-p}^{k}\left(\frac{\hat{t}-\hat{t}_i}{\hat{t}_{i+p+1}-\hat{t}_i}\hat{N}_{i,p}(t)+\frac{\hat{t}_{i+p+2}-\hat{t}}{\hat{t}_{i+p+2}-\hat{t}_{i+1}}\hat{N}_{i,p}(t)\right)\boldsymbol{P}_i^w=\sum_{i=k-p}^{k+1}\hat{N}_{i,p}(t)\boldsymbol{Q}_i^w$$

通过简单的移项就可以解得新的控制点

$$\boldsymbol{Q}_i^w=\frac{\hat{t}-t_i}{t_{i+p}-t_i}\boldsymbol{P}_i^w+\frac{t_{i+p}-\hat{t}}{t_{i+p}-t_i}\boldsymbol{P}_{i-1}^w,\quad i=k-p+1,...,k$$

因此，对于一个 p 阶曲线，每插入一次节，只有 p 个新的控制点需要计算

2 升阶

本节开始抹去上标 w，视所有曲线为四维空间中的非有理 B 样条曲线

设 $\boldsymbol{C}(t)=\sum_{i=0}^n N_{i,p}(t)\boldsymbol{P}_i$ 是定义在节点矢量

$$\text{Knot}=\{\overbrace{a,\cdots,a}^{p+1\text{个}},\overbrace{t_1,\cdots,t_1}^{m_1\text{个}},\cdots,\overbrace{t_s,\cdots,t_s}^{m_s\text{个}},\overbrace{b,\cdots,b}^{p+1\text{个}}\}$$

上的 p 阶 B 样条曲线，升阶指的是找到一条新的 $p+1$ 阶 B 样条曲线 $\hat{C}(t)$ 使

$$\boldsymbol{C}(t)=\hat{\boldsymbol{C}}(t)=\sum_{i=0}^{\hat{n}} N_{i,p+1}(t)\boldsymbol{Q}_i$$

成立，并且该曲线所在节点矢量为

$$\hat{\text{Knot}}=\{\overbrace{a,\cdots,a}^{p+2\text{个}},\overbrace{t_1,\cdots,t_1}^{m_1+1\text{个}},\cdots,\overbrace{t_s,\cdots,t_s}^{m_s+1\text{个}},\overbrace{b,\cdots,b}^{p+2\text{个}}\}$$

升阶后得到的基函数空间事实上是包含升阶前的基函数空间的

$$V_{\text{Knot}}\subset V_{\hat{\text{Knot}}}$$

因此每一条曲线都能精准升任意阶。比较直接能想到的方法是联立方程来求解

$$\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(t)\boldsymbol{P}_i=\sum_{i=0}^{\hat{n}} N_{i,p+1}(t)\boldsymbol{Q}_i$$

实际上利用之前的插节算法可以得到更为高效的算法，对每个内部节点进行插节，使其变成由多个 Bézier 曲线段组成，再依次对每个 Bézier 段升阶，去掉多余节点即可完成。这里先给出 Bézier 曲线的升阶算法。

对于一条 p 阶 Bézier 曲线

$$\boldsymbol{C}_p(t)=\sum_{i=0}^{p} B_{i,p}(t)\boldsymbol{P}_i$$

将它在 $p+1$ 阶的基函数空间中表示为

$$\boldsymbol{C}_{p+1}(t)=\sum_{i=0}^{p+1} B_{i,p+1}(t)\boldsymbol{Q}_i$$

令这两个式子相等

$$\sum_{i=0}^{p} B_{i,p}(t)\boldsymbol{P}_i=\sum_{i=0}^{p}((1-t)B_{i,p}(t)+uB_{i,p}(t))\boldsymbol{P}_i=\sum_{i=0}^{p+1} B_{i,p+1}(t)\boldsymbol{Q}_i$$

记

$$\left(\begin{array}{c} p \\ i \end{array}\right)=\frac{p!}{i!(p-i)!}$$

有

$$\sum_{i=0}^{p+1}\left(\begin{array}{c} p+1 \\ i \end{array}\right)t^i(1-t)^{p+1-i}\boldsymbol{Q}_i=\sum_{i=0}^{p}\left(\begin{array}{c} p \\ i \end{array}\right)(t^i(1-t)^{p+1-i}+t^{i+1}(1-t)^{p-i}\boldsymbol{P}_i$$

观察可得

$$\left(\begin{array}{c} p+1 \\ i \end{array}\right)\boldsymbol{Q}_i=\left(\begin{array}{c} p \\ i \end{array}\right)\boldsymbol{P}_i+\left(\begin{array}{c} p \\ i-1 \end{array}\right)\boldsymbol{P}_{i-1}$$

$$\boldsymbol{Q}_i = (1-\alpha_i)\boldsymbol{P}_i + \alpha_i \boldsymbol{P}_{i-1}$$

其中

$$\alpha_i = \frac{i}{p+1}, \quad i = 0, 1, \cdots, p+1$$

得到 Bézier 升阶算法后，我们以一条三阶 B 样条为例来说明升阶流程

1. 假设该曲线的节点矢量为

$$\mathrm{Knot} = \{0, 0, 0, 0, t_1, t_2, 1, 1, 1, 1\}$$

2. 将 t_1 插入两次，此时曲线在区间 $[0, t_1]$ 上与一条定义在节点向量

$$\mathrm{Knot}_1 = \{0, 0, 0, 0, t_1, t_1, t_1, t_1\}$$

   上的 Bézier 曲线相同且它们拥有相同的控制点

3. 对该 Bézier 曲线升阶得到新的五个控制点，用新的五个控制点替换原来样条曲线的四个控制点，此时的节点向量变成了

$$\mathrm{Knot} = \{0, 0, 0, 0, 0, t_1, t_1, t_1, t_1, t_2, 1, 1, 1, 1\}$$

4. 将 t_2 插入两次，此时曲线在区间 $[t_1, t_2]$ 上与一条定义在节点向量

$$\mathrm{Knot}_2 = \{t_1, t_1, t_1, t_1, t_2, t_2, t_2, t_2\}$$

   上的 Bézier 曲线相同且它们拥有相同的控制点

5. 对该 Bézier 曲线升阶得到新的五个控制点，用新的五个控制点替换原来样条曲线的四个控制点，此时的节点向量变成了

$$\mathrm{Knot} = \{0, 0, 0, 0, 0, t_1, t_1, t_1, t_1, t_2, t_2, t_2, t_2, 1, 1, 1, 1\}$$

6. 去节 t_1 两次，此时的节点向量变成了

$$\mathrm{Knot} = \{0, 0, 0, 0, 0, t_1, t_1, t_2, t_2, t_2, t_2, 1, 1, 1, 1\}$$

7. 对最后一个 Bézier 曲线升阶，并替换控制点，节点向量变成了

$$\mathrm{Knot} = \{0, 0, 0, 0, 0, t_1, t_1, t_2, t_2, t_2, t_2, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

8. 去节 t_2 两次，此时的节点向量变成了

$$\mathrm{Knot} = \{0, 0, 0, 0, 0, t_1, t_1, t_2, t_2, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

得到了一条保几何、参数的 4 阶 C^2 连续的曲线。

3 降阶

设 $\boldsymbol{C}(t)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(t)\boldsymbol{Q}_i$ 是定义在节点矢量

$$\mathrm{Knot}=\{\overbrace{a,\cdots,a}^{p+1\text{个}},\overbrace{t_1,\cdots,t_1}^{m_1\text{个}},\cdots,\overbrace{t_s,\cdots,t_s}^{m_s\text{个}},\overbrace{b,\cdots,b}^{p+1\text{个}}\}$$

上的 p 阶 B 样条曲线，降阶指的是找到一条新的 $p-1$ 阶 B 样条曲线 $\hat{C}(t)$ 使

$$\boldsymbol{C}(t)=\hat{\boldsymbol{C}}(t)=\sum_{i=0}^{\hat{n}}N_{i,p-1}(t)\boldsymbol{P}_i$$

成立，并且该曲线所在节点矢量为

$$\hat{\mathrm{Knot}}=\{\overbrace{a,\cdots,a}^{p\text{个}},\overbrace{t_1,\cdots,t_1}^{m_1-1\text{个}},\cdots,\overbrace{t_s,\cdots,t_s}^{m_s-1\text{个}},\overbrace{b,\cdots,b}^{p\text{个}}\}$$

降阶后得到的基函数空间事实上是被包含在降阶前的基函数空间内的

$$V_{\hat{\mathrm{Knot}}}\subset V_{\mathrm{Knot}}$$

因此虽然每一条曲线都能精准升阶，但不一定能精准降阶。但只要误差在容许范围内我们就视为可降阶的。

仿照之前的升阶操作，我们实际上是对每个 Bézier 段进行降阶，因此对于一般的 B 样条曲线，我们大致是重复以下三个步骤

1. 从 B 样条曲线中提取第 i 个 Bézier 段
2. 对第 i 个 Bézier 段降阶
3. 消去第 $i-1$ 段和第 i 段的多余节点

在这个过程中降阶，与去节是升阶与插节的反向操作，自然可以采取在参数域上多采样解方程来尽可能减小误差，同样考虑到效率问题，这里介绍的方法是升阶与插节的反推，不涉及大规模线性方程组求解。此处以一条 4 阶曲线为例来说明

1. 假设该曲线的节点矢量为

$$\mathrm{Knot}=\{0,0,0,0,0,t_1,t_1,t_2,t_2,1,1,1,1,1\}$$

2. 将 t_1 插入两次，此时曲线在区间 $[0,t_1]$ 上与一条定义在节点向量

$$\mathrm{Knot}_1=\{0,0,0,0,0,t_1,t_1,t_1,t_1,t_1\}$$

   上的 Bézier 曲线相同且它们拥有相同的控制点

3. 对该 Bézier 曲线降阶得到新的四个控制点，用新的四个控制点替换原来样条曲线的五个控制点，此时的节点向量变成了（注意到 t_1 的重复度在第一个区间来看是 3，在第二个区间上来看是 4，因为此时两个区间阶数不一样。因为阶数不一样，事实上不存在定义在如下节点矢量上的样条曲线，这样写只是为了书写方便，只有在操作完全完成后曲线才有定义）

$$\mathrm{Knot}=\{0,0,0,0,t_1,t_1,t_1,t_2,t_2,1,1,1,1,1\}$$

4. 将 t_2 插入两次，此时曲线在区间 $[t_1, t_2]$ 上与一条定义在节点向量

$$\mathrm{Knot}_2 = \{t_1, t_1, t_1, t_1, t_1, t_2, t_2, t_2, t_2, t_2\}$$

   上的 Bézier 曲线相同且它们拥有相同的控制点

5. 对该 Bézier 曲线降阶得到新的四个控制点，用新的四个控制点替换原来样条曲线的五个控制点，此时的节点向量变成了

$$\mathrm{Knot} = \{0, 0, 0, 0, t_1, t_1, t_1, t_1, t_2, t_2, t_2, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

6. 去节 t_1 两次，此时的节点向量变成了

$$\mathrm{Knot} = \{0, 0, 0, 0, t_1, t_2, t_2, t_2, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

7. 对最后一个 Bézier 曲线降阶，并替换控制点，节点向量变成了

$$\mathrm{Knot} = \{0, 0, 0, 0, t_1, t_2, t_2, t_2, 1, 1, 1, 1\}$$

8. 去节 t_2 两次，此时的节点向量变成了

$$\mathrm{Knot} = \{0, 0, 0, 0, t_1, t_2, 1, 1, 1, 1\}$$

这样就能得到一条带误差的 $p-1$ 阶 B 样条曲线。

由于问题的超定性，从 Q_0 出发与从 Q_p 求得的 P_i 是不同的，一般的策略是从两头分别开始求 P_i，在相遇时 P_i 取从两个方向求得的均值。这种方法好处是简单、快速，坏处是这种操作无法确定对误差有什么影响，不过我们利用样条函数的凸包性可以得到他的最大误差估计，以下给出 p 为偶数情况时的估计

$$\left|\boldsymbol{C}(t) - \hat{\boldsymbol{C}}(t)\right| \leq \left|\boldsymbol{Q}_{r+1} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{P}_r + \boldsymbol{P}_{r+1})\right|$$

另外对于曲面降阶，只需对曲面每一列的控制点应用曲线降阶技术就可以。