

CAPITOLO 2

DINAMICA DI UN ROBOT

INTRODUZIONE

La conoscenza della dinamica di un robot è il primo passo per poter progettare un controllo adeguato a soddisfare i vincoli di stabilità. Questo è vero soprattutto per un robot la cui dinamica è particolarmente complicata.

In questo capitolo verrà ricavata la dinamica di un robot con n -link accoppiati a giunti di rotazione e verranno analizzati tutti quei termini di coppia che intervengono nel comportamento dinamico del sistema.

2.1 MODELLO DELLA DINAMICA

Per un robot si possono scegliere diversi modelli della dinamica a seconda delle ipotesi che si assumono sul comportamento dei giunti e dei link.

Nel caso in cui la rigidità degli accoppiamenti *giunti-link* sia infinita ci si riferirà ad un **modello rigido**, altrimenti, se viene presa in considerazione l'elasticità dei giunti, si avrà un **modello elastico**.

Un giunto rigido può essere schematicamente rappresentato come in figura 2.1, dove la posizione angolare del link q_l è legata proporzionalmente alla posizione q_m del rotore tramite il rapporto di trasmissione $n=q_m/q_l$.

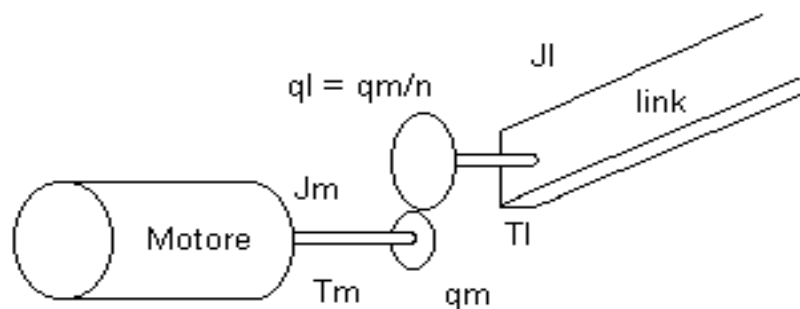


Figura 2.1: Schema giunto rigido.

Naturalmente, nel caso in cui l'accoppiamento *giunto-link* della trasmissione sia caratterizzato da un comportamento di tipo elastico, ad esempio modellizzabile come una molla torsionale con un certo coefficiente di elasticità k , si dovrà considerare nel modello della dinamica anche questo aspetto [1]. Si consideri ora un robot con n *link accoppiati rigidamente ai giunti*; le equazioni della dinamica vengono derivate direttamente dall'espressione della *Lagrangiana*:

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - U(q) = \text{En. Cinetica} - \text{En. Potenziale} , \quad (2.1)$$

dove q è il vettore delle singole posizioni angolari degli n link mentre $M(q)$ è la matrice di inerzia di ordine $n \times n$. Di conseguenza le equazioni della dinamica del robot sono date da:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (2.2)$$

con τ vettore di dimensione n i cui termini sono costituiti dalle coppie esercitate su ogni giunto.

In assenza delle coppie di attrito si può scrivere la (2.2) nel seguente modo:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + T_g(q) = \tau \quad (2.3)$$

Il termine $C(q, \dot{q})$ indica la matrice $n \times n$ delle coppie centripete e di Coriolis, mentre il vettore $g(q)$ si riferisce alle coppie gravitazionali agenti ad ogni giunto ed è il gradiente dell'energia potenziale $U(q)$, ovvero:

$$T_g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q} \Rightarrow U(q_b) - U(q_a) = \int_{q_a}^{q_b} T_g(q)^T dq \quad (2.4)$$

La (2.4) esprime una ben nota proprietà dell'energia potenziale, secondo la quale una sua variazione causata dalla modifica della posizione assunta dai vari giunti, dipende solo dalla posizione finale ed iniziale e non dalla particolare traiettoria eseguita per passare da q_a a q_b .

L'equazione del moto (2.3) gode di alcune proprietà fondamentali che possono essere utili per facilitare la progettazione dei sistemi di controllo [2] e che sono di seguito riportate:

Proprietà 1. La matrice d'inerzia $M(q)$ è simmetrica definita positiva.

Proprietà 2. Il prodotto seguente è nullo

$$\dot{q}^T \{ \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \} \dot{q} = 0 \quad (2.5)$$

Dimostrazione:

La matrice delle coppie centripete e di Coriolis può essere scritta nel seguente modo:

$$C(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial M(q)}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Definendo quindi le matrici T e S come:

$$T = \dot{M}(q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial M(q)}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (2.7)$$

$$S = \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

si vede che i loro singoli elementi valgono:

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (2.9)$$

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_k \quad (2.10)$$

Di conseguenza si ha:

$$\begin{aligned}
& \dot{q}^T \{ \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \} \dot{q} = \dot{q}^T \left(T - 2 \left(T - \frac{1}{2} S \right) \right) \dot{q} = \dot{q}^T S \dot{q} - \dot{q}^T T \dot{q} = \\
& = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_k \right) \dot{q}_i \dot{q}_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \dot{q}_i \dot{q}_j = 0 \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Proprietà 3. La coppia gravitazionale è lipschitziana [3], cioè:

$$\exists k_g > 0: \quad \|T_g(x) - T_g(y)\| \leq k_g \|x - y\| \quad \forall x, y \in R^n \quad (2.12)$$

con k_g tale che:
$$k_g \geq \left\| \frac{\partial T_g(q)}{\partial q} \right\| \quad \forall q \in R^n$$

Inoltre la costante k_g può essere valutata in questo modo:

$$k_g \geq n \left(\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial T_{g_i}(q)}{\partial q_j} \right| \right) \quad (2.13)$$

ovvero n -volte il massimo della più grande componente del gradiente della coppia gravitazionale.

Proprietà 4. Esiste una costante positiva k_c tale che $\forall x, y, z \in R^n$ si ha:

$$\|C(x, y)z\| \leq k_c \|y\| \|z\| \quad (2.14)$$

Proprietà 5. L'energia potenziale $U(q)$ e il vettore coppia gravitazionale soddisfano la seguente proprietà:

$$\frac{k_g}{2} \|y - x\|^2 + U(x) - U(y) + T_g(y)^T [y - x] \geq 0 \quad \forall x, y \in R^n \quad (2.15)$$

Tutte queste proprietà sono fondamentali per poter ottenere delle opportune *funzioni di Liapunov* da applicare nell'analisi dell'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso, con un regolatore PD come mostrato nel capitolo 4.

2.2 MODELLO RIGIDO E COPPIE DI ATTRITO

Sempre nell'ipotesi di assumere gli accoppiamenti *giunto-link* rigidi, si può completare l'equazione (2.3) della dinamica considerando anche le coppie di attrito che intervengono sulle parti in moto dei motori e delle trasmissioni.

Le coppie di attrito sono di diversa natura. La *coppia di attrito viscoso* risulta essere proporzionale alla velocità di rotazione, mentre quella di *attrito coulombiano* è costante ma cambia direzione a seconda del segno della velocità.

Aggiungendo questi termini di coppia nell'equazione (2.3) si ottiene:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + T_g(q) + F_v\dot{q} + F_c \text{sign}(\dot{q}) = \tau \quad (2.16)$$

dove F_v rappresenta la matrice diagonale dei coefficienti di attrito viscoso, mentre F_c è il vettore delle ampiezze delle coppie di attrito coulombiano, valutata per ogni giunto.

L'identificazione dei coefficienti di attrito viscoso e delle ampiezze delle coppie di attrito coulombiano è importante per poter eseguire a livello di controllo una loro compensazione diretta dal momento che esse, soprattutto alle basse velocità, deteriorano le prestazioni del controllo. Un'analisi più completa sulla natura microscopica dell'attrito verrà presentata nei capitoli 6 - 8, in cui saranno illustrati i risultati sperimentali delle misure di tali componenti svolte per il giunto 1 del robot SMART 3S-2 in dotazione al laboratorio di Azionamenti Elettrici.

2.3 ESEMPIO DI MANIPOLATORE A DUE GIUNTI

Per un manipolatore robotico sotto le ipotesi di assenza di fenomeni di attrito e con accoppiamenti *giunto-link* rigidi, l'equazione della dinamica è data dalla (2.3), riportata qui di seguito:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + T_g(q) = \tau \quad (2.3)$$

Si consideri ora un manipolatore a due gradi di libertà ottenuti con due giunti di rotazione e si analizzino in dettaglio i termini dell'equazione (2.3).

Idealmente tale manipolatore possiede una struttura come quella evidenziata in figura 2.2, dove le masse dei link, dei giunti, delle trasmissioni e delle parti rotanti dei motori, vengono unificate nelle masse m_1 e m_2 poste alle estremità dei link..

Gli elementi della matrice d'inerzia $M(q)$ saranno:

$$M(q) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2C_2 + J_{1m} + J_{1g} & m_2l_2^2 + m_2l_1l_2C_2 \\ m_2l_2^2 + m_2l_1l_2C_2 & m_2l_2^2 + J_{2m} + J_{2g} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

da cui si vede che si tratta di una matrice simmetrica definita positiva.

Gli elementi di $C(q, \dot{q})$, $T_g(q)$ sono:

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2l_1l_2S_2\dot{q}_2 & -m_2l_1l_2S_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ m_2l_1l_2S_2\dot{q}_1 & \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$T_g(q) = \begin{bmatrix} g(m_1l_1C_1 + m_2l_1C_1 + m_2l_2C_{12}) \\ gm_2l_2C_{12} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Dove: $C_i = \cos(q_i)$, $C_{ij} = \cos(q_i + q_j)$, $S_i = \sin(q_i)$.

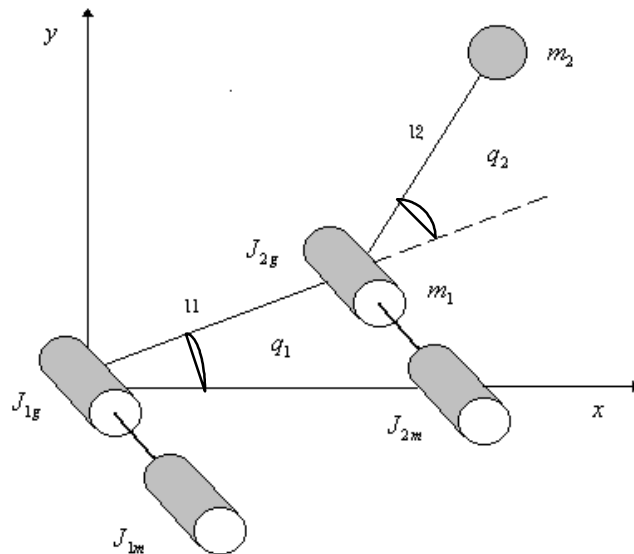


Figura 2.2: Manipolatore a due gradi di libertà.

Questo esempio di manipolatore a due giunti è rappresentativo di molte realizzazioni di robot industriali; in particolare esso può schematizzare il funzionamento di due giunti in gravità come ad esempio i giunti 2 e 3 del robot COMAU.

Si osservi che se il link 1 del robot in figura è posizionato verticalmente, cioè $q_1=90^\circ$, allora si ha per la componente x: $T_{g2}(q) = g \cdot m_2 \cdot r_2 \cdot \cos(90^\circ + q_2) = g \cdot m_2 \cdot r_2 \cdot \sin(q_2)$. Quindi se il giunto 1 resta fisso a 90° , la coppia gravitazionale agente sul giunto 2 varia sinusoidalmente con l'angolo q_2 . La configurazione sopra descritta è quella considerata durante le misure sperimentali della coppia gravitazionale, come si vedrà nei capitoli successivi, in cui il giunto 2 del robot COMAU viene frenato meccanicamente in posizione verticale mentre il giunto 3 ruota dando origine ad una coppia $T_{g2}(q)$ sinusoidale.

2.4 FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL 1° ORDINE DI UN GIUNTO

Si ricava ora la funzione di trasferimento per un giunto rigido considerando la dinamica del link e quella del motore con riferimento alla schematizzazione di un giunto di figura 2.3 riportata nel seguito.

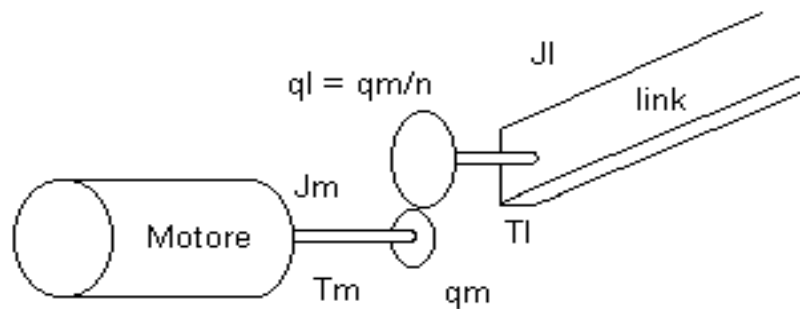


Figura 2.3 Schema del giunto

La dinamica del motore è caratterizzata dai termini di inerzia, attrito viscoso, coulombiano e statico [4], per cui :

$$J_m \ddot{q}_m + F_{vm} \dot{q}_m + F_{cm} \text{sign}(\dot{q}_m) = T_m - T_r \quad (2.20)$$

dove non si ha movimento fino a che $|T_m - T_r| < |T_s|$ con T_s coppia di attrito statico.

Il motore sviluppa una coppia motrice che nel caso dei motori sincroni a magneti permanenti montati sugli assi del robot SMART 3-S2, è proporzionale al valore efficace della corrente, quindi:

$$T_m = k_t \cdot I \text{ con } k_t \text{ costante di coppia del motore.}$$

La presenza della trasmissione fa sì che la posizione angolare q_l e la coppia T_l disponibili sul lato del link, siano: $q_l = q_m / n$, $T_l = nT_m$.

La dinamica del link sarà invece caratterizzata, trascurando le componenti di Coriolis e centrifughe, da:

$$J_l \ddot{q}_l + T_g(q_l) + F_{vl} \dot{q}_l + F_{cl} \text{sign}(\dot{q}_l) = T_l \quad (2.21)$$

$$\text{con } T_g(q_l) = g \cdot m \cdot r \cdot \cos(q_l) = K \cdot \cos(q_l) .$$

Trascurando la dinamica elettrica del motore rispetto a quella meccanica e l'attrito coulombiano, sostituendo l'equazione della dinamica del motore in quella del link e trasformando secondo Laplace, si ottiene la seguente funzione di trasferimento:

$$\frac{q_m(s)}{I(s)} = \frac{K_t}{\left(J_m + \frac{J_l}{n^2} \right) s^2 + \left(F_{vm} + \frac{F_{vl}}{n^2} \right) s + \frac{K}{n^2}} \quad (2.22)$$

dove $K=0$ per i giunti non in gravità. Di conseguenza la funzione di trasferimento tra la velocità motore \dot{q}_m e la corrente I , è del primo ordine come si vede dallo schema a blocchi di figura 2.4.

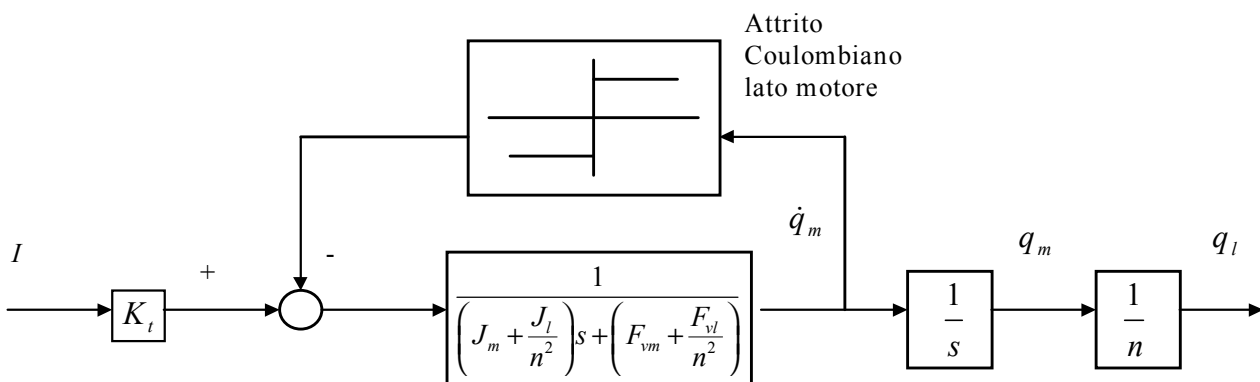


Figura 2.4 Schema a blocchi

Fornendo un segnale di ingresso persistentemente eccitante al sistema giunto è possibile, tramite delle procedure di identificazione ARMAX, stimare la funzione di trasferimento corrente/velocità motore, così come è stato fatto per i singoli giunti del robot SMART 3S-2, [4], [5]. Come esempio viene riportato in figura 2.5 il diagramma di Bode per la funzione di trasferimento stimata per il giunto 1.

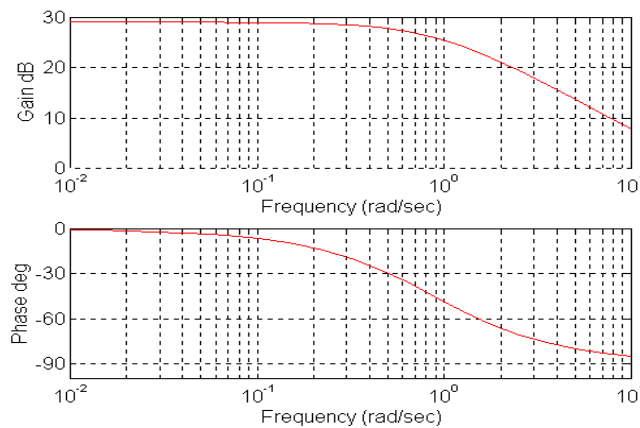


Figura 2.5: F.d.t. giunto 1, in configurazione di massima inerzia.

2.5 MODELLO ELASTICO

Per completare la panoramica relativa alla modellizzazione della dinamica di un robot, si analizza ora il comportamento elastico dei giunti 1, 4, 5 e 6. In generale nel progetto del controllo di posizione per robot industriali, ci si riferisce di norma ad un modello rigido della struttura meccanica: i link sono assimilati a corpi rigidi e ciascun motore è considerato solidale con il link che movimenta.

Tuttavia, se da un lato l'ipotesi di rigidità del link può essere ritenuta accettabile nelle bande di frequenza (~ 30 Hz) usualmente richieste al controllo di posizione e velocità, dall'altro essa risulta limitativa, e non in grado di spiegare alcuni fenomeni vibratori riscontrabili nel moto di robot industriali.

Considerare i fenomeni elastici risulta inoltre indispensabile qualora si vogliano migliorare le prestazioni del controllo di posizione, richiedendo velocità di risposta e precisioni più elevate.

Le cause fisiche della deformabilità dei giunti possono essere individuate nella torsione degli alberi di trasmissione del moto e nella elasticità presente nei riduttori, in particolare quelli di tipo Harmonic Drive, utilizzati nella robotica industriale. È inoltre possibile, dal punto di vista modellistico, concentrare l'elasticità della struttura nei giunti e formulare un modello matematico del robot industriale [1] nel quale i giunti vengono rappresentati per mezzo di molle torsionali

interposte tra il link ed il motore, le cui coordinate angolari risultano essere non più solidali, come mostrato in figura 2.6.

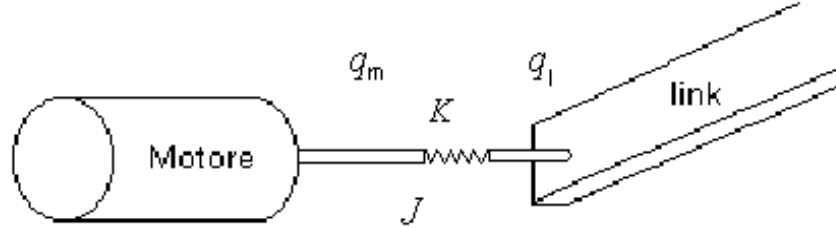


Figura 2.6: Schematizzazione di un giunto elastico.

La dinamica di un robot con n -link e giunti elastici, trascurando i termini di attrito, è data da:

$$M(q_1)\ddot{q}_1 + C(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_1 + T_g(q_1) + K[q_1 - q_2] = 0 \quad (2.23)$$

$$J\ddot{q}_2 - K[q_1 - q_2] = \tau \quad (2.24)$$

dove q_1 , q_2 rappresentano rispettivamente il vettore delle posizioni angolari dei link e il vettore delle posizioni angolari dei rotori divise per il rapporto di trasmissione, mentre J è la matrice diagonale delle inerzie dei rotori riflesse sul lato dei link e K è la matrice dei coefficienti di elasticità.

2.6 FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL 3° ORDINE

Riferendosi ad accoppiamenti *giunto-link* elastici e privi di massa, il moto di un singolo giunto può essere così descritto:

$$J_m\ddot{q}_m + f_m\dot{q}_m + T_{cm}\text{sign}(\dot{q}_m) = K_t I - T_{el} \quad (2.25)$$

$$T'_{el} = nT_{el} = [K_{el}(q_m - nq_l) + f_{el}(\dot{q}_m - n\dot{q}_l)] \quad (2.26)$$

$$J_l\ddot{q}_l + f_l\dot{q}_l + T_{cl}\text{sign}(\dot{q}_l) = T'_{el} - K_g q_l \quad (2.27)$$

dove le equazioni (2.25), (2.26), (2.27) indicano rispettivamente le dinamiche del motore, dell'accoppiamento elastico e del link, comprensive anche dei termini di attrito viscoso e coulombiano.

Dalla dinamica sopra descritta trascurando l'attrito coulombiano, si deriva un funzione di trasferimento tra velocità motore \dot{q}_m e corrente I del terzo ordine:

$$G(s) = \frac{\dot{q}_m(s)}{I(s)} = \frac{\alpha_0 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2}{\beta_0 s^3 + \beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3} \quad (2.28)$$

Attraverso una procedimento di identificazione ARMAX si possono identificare i parametri della funzione di trasferimento per i giunti del robot SMART 3S-2 e verificare la presenza di quei fenomeni di risonanza meccanica che nascono tra i diversi giunti.

I risultati sperimentali ottenuti per il giunto 1 del robot COMAU, riportati sotto forma di diagramma di Bode di figura 2.7, confermano che se il giunto si muove ad alte velocità possono instaurarsi fenomeni di risonanza meccanica originati dalla natura elastica degli accoppiamenti.

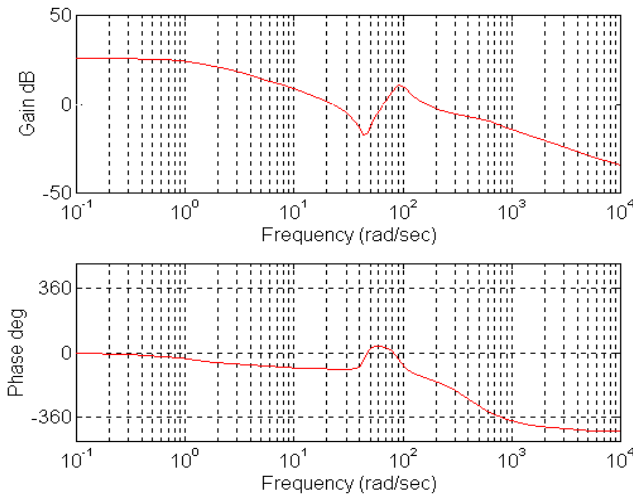


Figura 2.7: diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s)$ identificata per il giunto 1.