Università di Trento – Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa
a.a. 2017-18 – PIAZZA 1 – "Insiemistica – Estremo inf/sup.

1.1) i) sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Dite se le seg. prop. sono sempre vere:

a) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in A,\ x \leq y$ — No. È vero solo se A è limitato sup.

b) $\forall x \in A,\ \exists y \in A : x < y$ — No. Se A ammette massimo, allora la prop. è falsa; infatti è vera la sua negazione.

c) $\exists y, z \in \mathbb{R} : \forall x \in A,\ y < x < z$ — No. È vero solo se A è limitato.

ii) $\text{non}\left[\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in A,\ x \leq y\right] = \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in A : x > y.$

$\text{non}\left[\forall x \in A,\ \exists y \in A : x < y\right] = \exists x \in A : \forall y \in A,\ x \geq y.$

$\text{non}\left[\exists y, z \in \mathbb{R} : \forall x \in A,\ y < x < z\right] = \forall y, z \in \mathbb{R}, \exists x \in A : \text{non}\left[y < x \text{ e } x < z\right]$

$= \forall y, z \in \mathbb{R}, \exists x \in A : y \geq x \text{ o } x \geq z.$ ∎

1.2) $E, F \neq \emptyset$, $F \subset E \subset \mathbb{R}$. Allora, necessariamente

a) se F è limitato inferiorm., lo è anche E? No!

esempio: $F = [0,1] \subset E =]-\infty, 1]$.

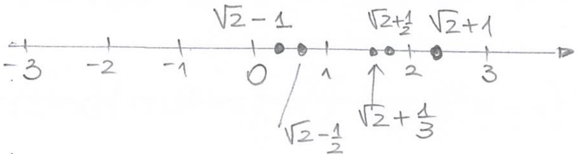
b) se esiste min F, allora esiste min E? No! vedi a).

c) se E è limitato superiormente, allora esiste sup F? Sì!

se E è limitato superiormente, allora lo è anche F e quindi $\exists \sup F$.

d) $E \times F \subset E \times E$? sì poiché $F \subset E$. ∎

1.3) $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt{2} - \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \{\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+\frac{1}{2}, \sqrt{2}+\frac{1}{3}, \dots, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-\frac{1}{2}, \sqrt{2}-\frac{1}{3}, \dots\}$



a) A ammette minimo? Sì, $\min A = \sqrt{2} - 1$.

b) $\sup A = \sqrt{2}+1$, ma non è massimo. NO! $\sup A = \max A = \sqrt{2}+1$.

c) $\inf A = \sqrt{2}$ NO! $\inf A = \min A = \sqrt{2}-1$.

d) A non è limitato NO! $\forall x \in A$, $\sqrt{2}-1 \le x \le \sqrt{2}+1$ ■

1.4) $A = \left\{ x_n = 1 + (-1)^n \frac{(n-1)}{3n} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}$

$$x_n = \begin{cases} 1 + \frac{n-1}{3n} & n \text{ pari} \\ 1 - \frac{n-1}{3n} & n \text{ dispari} \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{3} - \frac{1}{3n} & n \text{ pari} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

a) si ha $\frac{2}{3} \le x_n \le \frac{4}{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, e quindi A è limitato.

b) Proviamo che $\underline{\underline{\inf A = \frac{2}{3}}}$. Abbiamo

i) $\forall x_n \in A$, $\frac{2}{3} \le x_n$

ii) Dobbiamo verificare che $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_n \in A : x_n < \frac{2}{3} + \varepsilon$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario. Allora $\frac{2}{3} + \frac{1}{3n} < \frac{2}{3} + \varepsilon \iff \frac{1}{3n} < \varepsilon \iff$
$\frac{1}{n} < 3\varepsilon$.

Un tale $n \in \mathbb{N}$ esiste per la proprietà archimedea, e possiamo anche supporre che esso sia dispari (altrimenti basta prendere $n+1$ e la disuguaglianza è ancora vera).

Proviamo che $\underline{\underline{\sup A = \frac{4}{3}}}$. Abbiamo

i) $\forall x_n \in A$, $x_n \le 4/3$.

ii) Dobbiamo verificare che $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_n \in A : \frac{4}{3} - \varepsilon < x_n$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario. Allora $\frac{4}{3} - \varepsilon < \frac{4}{3} - \frac{1}{3n} \iff -\varepsilon < -\frac{1}{3n}$
$\iff 3\varepsilon > \frac{1}{n}$.

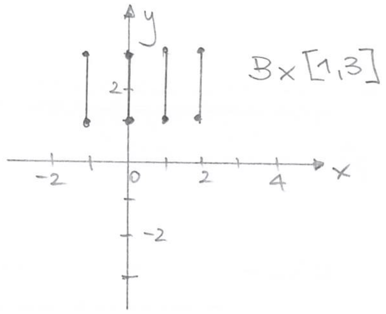
Come sopra, prendendo n pari questa volta, possiamo concludere.
Infine, osserviamo che $\nexists \min A$ e $\nexists \max A$. ■

1.5) $B = \{x \in \mathbb{R} : |(x-2)(x-x^3)| \le 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |(x-2)x(1-x^2)| = 0\}$
$= \{-1, 0, 1, 2\}$.

a) Abbiamo $\mathcal{P}(B)=\{\emptyset, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{-1,0\}, \{-1,1\}, \{-1,2\}, \{0,1\},$
$\{0,2\}, \{1,2\}, \{-1,0,1\}, \{-1,0,2\}, \{-1,1,2\},$
$\{0,1,2\}, B\}$.

Nota $\#\mathcal{P}(B)=2^4=16$. $\square$

b)



$\square$

c) $\underline{\underline{\inf B = \min B = -1}}$.

$\underline{\underline{\sup B = \max B = 2}}$.

$\blacksquare$

1.6) a) $A=\{x\in\mathbb{R} : x|x|+|x^2-1|\ge 2x\}$. La diseq. si riduce a

$$\begin{cases} x\ge 0\\ x^2-1\ge 0\\ x^2+x^2-1\ge 2x\end{cases} \quad o \quad \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-1<0\\ \cancel{x^2}-\cancel{x^2}+1\ge 2x\end{cases} \quad o \quad \begin{cases}x<0\\ x^2-1\ge 0\\ \cancel{-x^2}+\cancel{x^2}-1\ge 2x\end{cases} \quad o \quad \begin{cases}x<0\\ x^2-1<0\\ -x^2-x^2+1\ge 2x\end{cases}$$

Abbiamo allora

$$\begin{cases}x\ge 1\\ 2x^2-2x-1\ge 0\end{cases} \quad o \quad \begin{cases}0\le x<1\\ 2x\le 1\end{cases} \quad o \quad \begin{cases}x\le -1\\ 2x\le -1\end{cases} \quad o \quad \begin{cases}-1<x<0\\ 2x^2+2x-1\le 0\end{cases},$$

ossia

$$\begin{cases}x\ge 1\\ x\le \frac{1-\sqrt{3}}{2} \ o\ x\ge\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases} \quad o \quad \{0\le x\le \tfrac{1}{2} \quad o \quad \{x\le -1 \quad o \quad \begin{cases}-1<x<0\\ -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\le x\le \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$S_1=\left[\tfrac{1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[\qquad S_2=\left[0,\tfrac{1}{2}\right] \qquad S_3=\left]-\infty,-1\right] \qquad S_4=\left]-1,0\right[.$$

Risulta $\underline{\underline{A=\left]-\infty,\tfrac{1}{2}\right]\cup\left[\tfrac{1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[}}$.

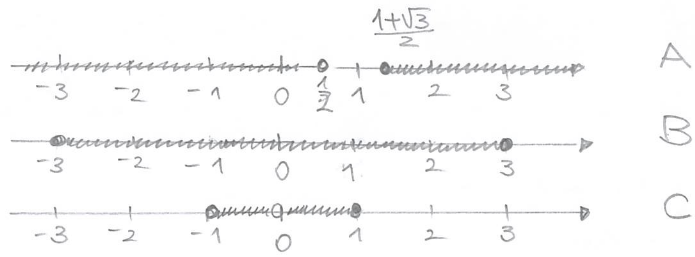
$B=\{x\in\mathbb{R} : \sqrt[3]{x^2-1}\le 2\}$: $\sqrt[3]{x^2-1}\le 2 \iff x^2-1\le 8$
$\iff x^2\le 9$

$=\underline{\underline{[-3,3]}}$.

$C=\{x\in\mathbb{R} : \sqrt[4]{1-|x|}<1\}$: $\sqrt[4]{1-|x|}<1 \iff \begin{cases}1-|x|\ge 0\\ 1-|x|<1\end{cases}$

$=\underline{\underline{[-1,1]\setminus\{0\}}}$.

$\iff \begin{cases}|x|\le 1\\ |x|>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1\le x\le 1\\ x\ne 0\end{cases}$.



b) Solo B è un intervallo, A e B non sono disgiunti, poiché $A \cap B = \left[-3, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 3\right] \neq \emptyset$.

c) $B \cup C = \underline{\underline{B}}$; $\quad B \cap C = \underline{\underline{C}}$, $\quad B \setminus C = \underline{\underline{[-3,-1[\, \cup \{0\} \cup \,]1,3]}}$.

1.7) $D = \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq \dfrac{|x-4|-1}{|x-3|+1} < \dfrac{1}{2} \right\}$.

Oss. che $|x-3|+1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $0 \leq \dfrac{|x-4|-1}{|x-3|+1} < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0 \leq |x-4| - 1 < \frac{1}{2}\left(|x-3|+1\right)$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2|x-4| - 2 < |x-3| + 1$

$\Leftrightarrow 2 \leq 2|x-4| < |x-3| + 3$. Possiamo allora scrivere

$$2 \leq 2|x-4| < |x-3|+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 2(x-4) < (x-3)+3 \\ x-4 \geq 1 \end{cases} \text{o} \begin{cases} 3 \leq x < 4 \\ -2(x-4) < (x-3)+3 \\ -x+4 \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{o} \begin{cases} x < 3 \\ -2(x-4) < -(x-3)+3 \\ -x+4 \geq 1 \end{cases}$$

ossia $\begin{cases} x \geq 5 \\ x < 8 \end{cases}$ o $\begin{cases} 3 \leq x < 4 \\ 3x > 8 \\ x \leq 3 \end{cases}$ o $\begin{cases} x < 3 \\ x > 2 \end{cases}$

$S_1 = [5,8[\qquad S_2 = \{3\} \qquad S_3 =]2,3[$

Risulta $D =]2,3] \cup [5,8[$. Possiamo allora asserire che NON è un intervallo. Si ha $\underline{\underline{\inf D = 2}}$, $\underline{\underline{\sup D = 8}}$.