LEZIONE 13ª

"Teorema di De L'Hôpital"

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}} \qquad x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$$

// Supponiamo che

(i) Al netto delle condizioni sotto le quali i rapporti $\frac{f}{g}$, $\frac{f'}{g'}$ esistono in un opportuno intorno di x_0

(ii) il limite sia del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

(iii) esista in $\overline{\mathbb{R}}$ il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

//

Operativamente

→ Devo fare il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e controllo che sia del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

Poi faccio il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(A) Se quest'ultimo non esiste non posso dire nulla $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

(B) Se quest'ultimo esiste in $\overline{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow$ tutto OK

(C) Se quest'ultimo è del tipo indeterminato $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ allora provo a riapplicare l'Hôpital, cioè faccio $\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$

<u>Esempio 1</u>: $\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x} = \cancel{\lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin x}{1}} = 0$

ERRORE!

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$

Esempio 2 :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\cos(3x) + x}{x} \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

$\Rightarrow$ proviamo applicare l'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\cos(3x) + x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-6\sin(3x) + 1}{1} = \text{NON ESISTE}$$

$\Rightarrow$ non possiamo dire nulla sul limite originario

$\boxed{\text{Esempio 3}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x + x^2}{\sin^2 x}$$

$\boxed{1^\circ \text{ modo con i limiti notevoli}}$

$$\frac{e^x - 1 - \sin x + x^2}{\sin^2 x} = \frac{x \underbrace{\boxed{\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)}}_{\to 1} - \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\to 1} \cdot x + x^2}{\underbrace{\boxed{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}}_{\to 1} \cdot x^2} \to \frac{x^2}{x^2} = 1$$

NON SI POSSONO UTILIZZARE

I LIMITI NOTEVOLI A METÀ

2° modo con equivalenza asintotica

$$e^x-1\sim x \qquad \sin x\sim x \qquad \sin^2 x\sim x^2 \qquad x\to 0$$

$$\frac{e^x-1-\sin x+x^2}{\sin^2 x}\sim\frac{x-x+x^2}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}=1$$

NON SI PUÒ USARE L'EQ. ASINT. SENZA SAPERE COSA SI FA.

3° modo con l'Hôpital

mi trovo infatti nella situazione in cui $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x+x^2}{\sin^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x+x^2}{\sin^2 x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x+2x}{2\sin x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x+2}{2(\cos^2 x-\sin^2 x)}=\frac{3}{2}\ !$$

2° modo con o-piccolo

$$\frac{e^x-1-\sin x+x^2}{\sin^2 x}=\frac{\cancel{1}+\cancel{x}+o(x)-\cancel{1}-(\cancel{x}+o(x))+x^2}{x^2+o(x^2)}=\frac{o(x)}{o(x)}\quad ???$$

Sembrerebbe che l'Hôpital risolva tutto ma questo è illusorio perché iterare le derivate è sempre molto complicato perché le funzioni diventano peggiori da utilizzare nel limite.

Esempio 4 $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = [\infty \cdot 0]$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi/2 - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 \quad !$$

Teorema di Taylor

OBIETTIVO: Approssimare una funzione con un polinomio

Problema: Data una funzione $f(x)$ e un naturale n trovare un polinomio $P_n(x)$ grado $P \leq n$ tale che

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad x \to 0}$$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO

Lemma: Se il polinomio di Taylor esiste è unico

dim: $$f(x) = \underbrace{P_n(x) + o(x^n)} = \underbrace{Q_n(x) + o(x^n)} \qquad x \to 0$$

$$\underbrace{P_n(x) - Q_n(x)}_{\leq n} = o(x^n) \qquad x \to 0$$

per cui questa identità è vera se e solo se $P_n(x) - Q_n(x) \equiv 0$

Teorema di Taylor

" Sia $\delta > 0$ e sia $f: (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$. Sia $n \in \mathbb{N}$

e supponiamo che:

$\Rightarrow$ (i) f è derivabile in $(-\delta, \delta)$ $n-1$ - volte

$\Rightarrow$ (ii) f è derivabile n-volte in $x=0$

Allora esiste il polinomio di Taylor $P_n(x)$ ed è dato dalla seguente formula

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n ."$$

Oss: 1.

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o(x^n)} \qquad f^{(0)}(0) = f(0)$$

FORMULA TAYLOR-McLAURIN

2. $n \to n+1$ semplicemente un termine in più se le condizioni (i) e (ii) lo permettono.

SVILUPPI DI TAYLOR PER FUNZIONI ELEMENTARI

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

numero reale

Esempio (RECALL)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x + x^2}{\sin^2 x} =$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin x = x + o(x^2)$$

$$e^x - 1 - \sin x + x^2 = \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1} - \cancel{x} - o(x^2) + x^2 =$$

$$= \frac{3}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2} + o(1)$$

$$(\sin x)^2 = (x + o(x^2))^2 = x^2 + o(x^2)$$

$$\text{frazione} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{3}{2} + o(1) \longrightarrow \frac{3}{2} \quad x \to 0$$

$$x^2 + o(x^2) = x^2(1 + o(1))$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)$$ poco utile

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P_3(x)} + o(x^3)$$ Taylor con $n=3$

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P_4(x)} + o(x^4)$$ Taylor con $n=4$

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{\cancel{P_5(x)}} + o(x^5)$$ non è Taylor con $n=5$

perché manca $\frac{x^5}{5!}$

Sviluppi di Taylor funzioni elementari

1. e^x $\quad f(x) = e^x \quad f^{(k)}(x) = e^x \quad f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

per cui

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \qquad x \to 0$$

2. $\sin x$ $\quad f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f''' = -\cos x$

$$f^{(iv)}(x) = \sin x$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \qquad x \to 0$$

3. $\cos x$ $\quad \cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \qquad x \to 0$

4 $\log(1+x)$ $\qquad f(x) = \log(1+x)$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $\qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$$f'''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f^{(IV)}(x) = 2 \cdot \frac{3(1+x)^2}{(1+x)^6} = 6\,\frac{1}{(1+x)^4}$$

$3 \cdot 2 = 3!$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k} \qquad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

(si dimostra per induzione)

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) \qquad x \to 0$$

5.

$(1+x)^\alpha$

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = -1 & (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \\ \alpha = \frac{1}{2} & (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \end{array}\right\} x \to 0$$

+

FORMULA DI TAYLOR CON CENTRO QUALUNQUE

Teorema Taylor

"Siano $\delta > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, e sia $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) f abbia derivate di ordine $n-1$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

(ii) f abbia derivata di ordine n in x_0

Allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad x \to x_0$$

"

Posso scrivere anche $x - x_0 = h \to 0$ se $x \to x_0$

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n) \quad h \to 0$$

$n = 1$

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad h \to 0}$$

Operazioni con i polinomi di Taylor

SOMMA

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad x \to 0$$

$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n) \qquad x \to 0$$

$$S(x) = f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n) \qquad x \to 0$$

PRODOTTO PER COSTANTE

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad x \to 0$$

$a \in \mathbb{R}$

$$a f(x) = a P_n(x) + o(x^n) \qquad x \to 0$$

PRODOTTO DI FUNZIONI

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n) \qquad x \to 0$$

$$P(x) = f(x)g(x) = (P_n + o(x^n))(Q_n + o(x^n))$$

$$= P_n(x)Q_n(x) + \underbrace{P_n(x)o(x^n) + Q_n(x)o(x^n) + o(x^n)^2}_{o(x^n)}$$

Esempio 1. $f(x) = \sin x \log(1+x)$ Costr. Taylor in $x_0 = 0$ e $n = 4$

1° modo (BOVINO) Calcolare tutte le derivate e ....

2° modo sviluppo sen e log in modo indipendente

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{1}{6} x^4 + o(x^4)$$

Quanto vale $f^{(4)}(0)$?

$$\boxed{\cancel{f^{(4)}(0) = \frac{1}{6}}}$$

$$\boxed{\frac{1}{6} = \frac{f^4(0)}{4!}} \Rightarrow f^{(4)}(0) = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4$$

Composizione di funzioni $\quad f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad x \to 0$

Varie possibilità

1. $f(ax) = P_n(ax) + o(a^n x^n) = P_n(ax) + o(x^n) \quad x \to 0$

2. $f(x^a) = P_n(x^a) + o(x^{an}) \quad x \to 0$

Esempio: $\quad f(x) = e^{x^2} \cos(3x) \quad x \to 0 \quad n = 4$

$$\left.\begin{aligned} e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) \\ \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) \end{aligned}\right\} \quad t \to 0$$

$$\left.\begin{aligned} e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ \cos 3x &= 1 - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^4}{24} + o(x^4) \end{aligned}\right| \quad x \to 0$$

$$f(x) = e^{x^2}\cos(3x) = \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^4}{24} + o(x^4)\right)$$

$$= 1 - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^4}{24} + o(x^4) + x^2 - \frac{9}{2}x^4 + \frac{x^4}{2}$$

$$= 1 - \frac{7}{2}x^2 + \underline{\left(\frac{3^4}{24} - \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\right)}x^4 + o(x^4) \quad x \to 0$$

Esempio 2. $f(x) = \sin x^5$ $\qquad n = 15$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$f(x) = x^5 - \frac{x^{15}}{3!} + \underbrace{o(x^{15})}_{\not\equiv\; o(x^{24})} \quad x \to 0$$

Come calcolo $f^{(2016)}(0) = 0$ $\qquad f^{(2015)}(0) = \,?$ $\qquad ?$

$f^{(2015)}(0)$ la trovo nel coefficiente di x^{2015}

il quale arriva dal coefficiente di t^{403}

poiché $2015 = 403 \cdot 5$

$$\sin t = \dots - \frac{t^{403}}{403!} + \dots$$

$$\sin x^5 = \dots - \frac{x^{2015}}{403!} = \frac{f^{(2015)}(0)}{(2015)!}$$

$$f^{(2015)}(0) = - \frac{(2015)!}{(403)!} \quad \dots \quad +$$