LEZIONE 6

SUCCESSIONI DI NUMERI REALI

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$n \in \mathbb{N} \to a(n) \in \mathbb{R}$ $\quad a(n) = a_n$

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots) \Leftrightarrow \underline{\underline{(a_n)}}$ $\quad (a_n)_n \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Componenti a_n si dicono: <u>TERMINI</u> della successione (a_n)

e il valore $n \in \mathbb{N}$ si dice <u>INDICE</u>

E' bene <u>NON</u> confondere la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con la sua immagine $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$(a_n) = (-2, 2, -2, 2, -2, 2, \dots)$

$\{-2, 2\}$ = immagine di a

$\sqrt{2}$ $\qquad$ $a_1 = 2$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \qquad a_n > 0$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$a_3 = \frac{17}{12} = 1.416\ldots$$

$$a_4 = \frac{577}{408} = 1.4142\ldots +$$

$$\sqrt{2} = 1{,}41421516\ldots$$

Spieghiamo cosa significa che (a_n) si "avvicina" a $\sqrt{2}$

$|a_n - \sqrt{2}|$ viene inteso come ERRORE ASSOLUTO

Possiamo dire che la successione (a_n) approssima tanto meglio il valore $\sqrt{2}$ al crescere di n tanto più piccolo è l'errore commesso

DEF: Diremo che la successione (a_n) TENDE o CONVERGE ad un certo numero reale l se per quanto piccolo si scelga $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un naturale N per cui tutti i termini della successione con indici $n > N$ approssimano l con un errore minore di ε.

In tal caso il numero l si dice LIMITE della successione (a_n) e la convergenza viene descritta in modo simbolico con

$$a_n \longrightarrow l \qquad n \to +\infty$$

"La successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $l \in \mathbb{R}$ se <u>per ogni $\varepsilon > 0$</u> esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tali che

$$|a_n - l| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } \underline{n \in \mathbb{N}} \quad n > N_\varepsilon \text{."}$$

ESEMPI: 1. + (a_n) $\qquad a_n = \frac{1}{n}$

$(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$

Sospettiamo che (a_n) converge e converge a $\ell = 0$.

Dimostriamolo. Per la definizione, comunque io scelga $\varepsilon > 0$ trovo un naturale N_ε per cui $\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$.

Questo è vero per la proprietà archimedea dei numeri reali (applicata a ε e 1) $\quad N_\varepsilon \varepsilon > 1$

Da questo deduciamo con $\ell = 0$

$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon \qquad \forall n > N_\varepsilon$$

$$\boxed{\frac{1}{n} \to 0 \qquad n \to +\infty}$$

$(b_n) = \left(\frac{1}{n^k}\right)$ $\qquad k \in \mathbb{N}$ fissato $\quad 0 \le \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{n}$

2. (a_n) $\quad a_n = \dfrac{n}{n+1} < 1$

Ragionevole aspettarsi che $\ell = 1$. Dimostriamolo.

Per ogni scelta di $\varepsilon > 0$

$$1-\varepsilon < \frac{n}{n+1} < 1+\varepsilon$$

Dobbiamo cercare l'$N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ per cui la ( ) è verificata per $n > N_\varepsilon$.

$$1-\varepsilon < \frac{n}{n+1} \iff (n+1)(1-\varepsilon) < n$$

$$\iff \cancel{n}+1-\varepsilon(n+1) < \cancel{n} \iff 1 < \varepsilon(n+1)$$

$$\iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Da questo trovo, ad esempio, $N_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$

se $n > N_\varepsilon$ allora

$$n+1 > n > N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{e quindi}$$

$$1-\varepsilon < a_n \quad \text{per tutti gli } n > N_\varepsilon$$

Mettendo insieme le 2 cose si trova la tesi, ossia

$$a_n \to 1 \quad n \to +\infty.$$

OSS: (a_n) per cui $a_n \to 0$ $\quad n \to +\infty$

si dicono INFINITESIME

DEF (SUCCESSIONI DIVERGENTI)

Una successione (a_n) si dice avere limite a $+\infty$ o divergere a $+\infty$ e scriveremo $a_n \to +\infty$ $\quad n \to +\infty$ quando comunque scelto un numero reale ogni termine della successione da un certo indice in poi è maggiore del numero reale scelto.

In modo formale, comunque io scelga (per ogni) $M \in \mathbb{R}$

esiste $N_M \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N_M$ si ha $a_n > M$.

Lo stesso si può fare nel caso (a_n) diverge a $-\infty$. Osservo

però che $(-a_n)$ diverge a $+\infty$ per cui vale

la definizione di prima, ovvero, per ogni scelta di $M \in \mathbb{R}$

trovo $N_M \in \mathbb{N}$ per cui per ogni $n > N_M$ $\; -a_n > M$

ovvero $a_n < -M$

Anche ora si può scrivere $a_n \to -\infty \quad n \to +\infty$.

Esempio: $(a_n) \quad a_n = 2n - n^2 \quad a_n \to -\infty \quad n \to +\infty$

Scelgo $M > 0$, dovrò dimostrare che $a_n < -M$ da un certo n in poi. $a_n < -M \iff 2n - n^2 < -M$

$\iff n^2 - 2n - M > 0 \Rightarrow n > 1 + \sqrt{M+1}$

DEF: (Carattere delle successioni)

"Sia (a_n) successione reale. Se (a_n) ammette limite (finito o infinito) diremo che la successione (a_n) è REGOLARE. Se (a_n) non ammette limite diremo che la successione è IRREGOLARE o INDETERMINATA.

Stabilire se (a_n) è Regolare o indeterminata vuol dire stabilire il carattere della successione."

Teorema (UNICITÀ DEL LIMITE)

"Ogni successione reale (a_n) regolare ha un solo limite"

dim: Supponiamo che (a_n) abbia limiti distinti $l_1 \neq l_2$

Supponiamo che senza perdere di generalità sia $l_1 < l_2$

Allora esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $l_1 < M < l_2$

Consideriamo $a_n \to l_1$ $n \to +\infty$.

Ho 2 possibilità $l_1 \in \mathbb{R}$ oppure $l_1 = -\infty$.

Supp $l_1 = -\infty$ $\Rightarrow$ sappiamo che esiste $N_1 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > N_1$ $\boxed{a_n < M}$

Se ora $l_1 \in \mathbb{R}$, scelgo $\varepsilon = M - l_1 > 0$ per cui esiste $N_1 \in \mathbb{N}$ per cui $\forall n > N_1$ $\boxed{a_n < l_1 + \varepsilon = M}$

Ora considero $a_n \to l_2$ $n \to +\infty$

Ho 2 possibilità come prima. $l_2 \in \mathbb{R}$ oppure $l_2 = +\infty$.

trovo $N_2 \in \mathbb{N}$ per cui $\forall n > N_2$ $\boxed{a_n > M}$

Metto ora assieme le 2 disuguaglianze, per cui se $N = \max\{N_1, N_2\}$

trovo che $\forall n > N$ $M < a_n < M$

ma questo è impossibile $\Rightarrow$ $l_1 \equiv l_2$. ∎

$$\lim a_n = \ell \qquad (\ell \in \mathbb{R} \qquad \ell = \pm\infty)$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$$

Definizione topologica di limite

Concetto di INTORNO

$$|a_n - \ell| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$a_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$

$$I_\varepsilon(\ell) \doteq (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$

INTORNO SIMMETRICO DI RAGGIO $\varepsilon > 0$

Al variare di $\varepsilon > 0$ consideriamo la famiglia degli intorni simmetrici

$$\mathcal{B}_\ell \doteq \{ I_\varepsilon(\ell) \mid \varepsilon > 0 \}$$

$\mathcal{B}_\ell$ è detta BASE DI INTORNI di $\ell \in \mathbb{R}$

$a_n \to \ell \iff \forall\, B \in \mathcal{B}_\ell$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $n > N$ $a_n \in B$.

Posso definire gli intorni di $\pm\infty$ come gli intervalli $(M, +\infty)$ oppure $(-\infty, M)$ per ogni scelta di $M \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{+\infty} = \{ (M, +\infty) \mid M \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{B}_{-\infty} = \{ (-\infty, M) \mid M \in \mathbb{R} \}$$

$a(n) = a_n \qquad a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a_n \to \ell$

$\Updownarrow$

$\exists\, N \in \mathbb{N}$ per cui $n \geq N$

$\exists\, U \in \mathcal{B}_{+\infty}$ per cui $\forall n \in U \cap \mathbb{N}$

$\forall B \in \mathcal{B}_\ell \; \exists\, U \in \mathcal{B}_{+\infty}$, per i quali per ogni $n \in U \cap \mathbb{N}$ si ha $a(n) \in B$