Limiti notevoli trigonometrici

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\tan(x)}{x}=1$$

Vale anche per arcsin, arctan, sinh e tanh

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x)-1}{x}=\frac{1}{2}$$

Limiti notevoli esponenziali

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\frac{1}{\ln(a)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Ordini d'infinito

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^b}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^x}{x!}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[x]{x!}}{x}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{\log(x)^a}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\log(x)}=\infty$$

Sviluppi dell'o-piccolo

Vedi sviluppi di Taylor al 1° ordine, eccezione fatta per il coseno,che va al 2° ordine

$$f(ax)\sim g(ax) \qquad x\to 0\, iff\, f\sim g$$

Tabella funzioni trigonometriche

	0	π/6	π/4	π/3	π/2
sin	0	1/2	√2/2	√3/2	1
cos	1	√3/2	√2/2	1/2	0
tan	0	√3/3	1	√3	-

	-∞	0	+∞
arctan	-π/2	0	π/2

sinh(x): ℝ→ ℝ cosh(x):ℝ→[1,∞)

$$\cot(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Equazione della retta tangente

$$y(x)=m(x-x_0)+q$$

$$m=f^I(x_0) \qquad q=f(x_0)$$

Formule parametriche

$$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Numeri complessi

$$r=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \Theta=\tan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\Theta+2\pi k}{n}\right)}$$

$$z=r(\cos(\Theta)+\sin(\Theta)i)$$

$$z=r\,e^{i\Theta}$$

Derivate Fondamentali

$$x^a=ax^{a-1}$$

$$a^x=a^x\ln(a)$$

$$e^x=e^x$$

$$\log_a x=\frac{1}{x\ln(a)}$$

$$\ln(x)=\frac{1}{x}$$

$$|x|=\frac{|x|}{x}$$

$$\sin(x)=\cos(x)$$

$$\cos(x)=-\sin(x)$$

$$\tan(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\cot(x)=-\frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$\arcsin(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{arccot}(x)=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$\sinh(x)=\cosh(x)$$

$$\cosh(x)=\sinh(x)$$

Regole di derivazione

$$(f\pm g)^I=f^I\pm g^I$$

$$(c\cdot f)^I=c\cdot f^I$$

$$(f\cdot g)^I=f^I\cdot g+g^I\cdot f$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)^I=-\frac{f^I}{g^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)^I=\frac{f^I g-g^I f}{g^2}$$

$$(f)^I=\frac{1}{(f^{-1})^I(f)}$$

di conseguenza

$$(f^{-1})^I=\frac{1}{f^I}$$

$$(g(f))^I=g^I(f)\cdot f^I$$

$$(h(g(f)))^I=h^I(g(f))\cdot g^I(f)\cdot f^I$$

Teorema di Lagrange

(calcolo pendenza fra due punti)

$$h^I(x_0)=\frac{h(b)-h(a)}{b-a}$$

Formula generale

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+o((x-x_0)^i)$$

Sviluppi di Taylor McLaurin

(fino al 5° ordine, valgono solo in $x_0=0$)

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5}{128}x^4+\dots$$

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5}{128}x^4-\dots$$

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4+\dots$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

* seno e coseno iperbolici sono solo somme

$$\arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2$$

$$+\frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3+\dots$$

$$(1-x)^I=1+x+x^2+x^3+\dots$$

Algebra degli sviluppi di Taylor

$$af(x)=aP_n(x)+o(x^n)$$

$$f(x)+g(x)=P_n(x)+Q_n(x)+o(x^n)$$

$$f(x)g(x)=[P_n(x)+o(x^n)]\cdot\dots$$

$$\dots[Q_n(x)+o(x^n)]$$

$$f(g(x))=P_n(Q_n(x))$$

Integrali Fondamentali

$$\int a\,dx=ax+c$$

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln(|x|)+c$$

$$\int\sin(x)\,dx=-\cos(x)+c$$

$$\int\cos(x)\,dx=\sin(x)+c$$

$$\int\frac{1}{\cos^2(x)}dx=\tan(x)+c$$

$$\int\frac{1}{\sin^2(x)}dx=-\cot(x)+c$$

$$\int e^x dx=e^x+c$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln(a)}+c$$

$$\int\sinh(x)\,dx=\cosh(x)+c$$

$$\int\cosh(x)\,dx=\sinh(x)+c$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan(x)+c$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin(x)+c$$

$$\int\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arccos(x)+c$$

Integrazione per parti

$$\int f\,g^I=fg-\int f^I g$$

o in alternativa

$$\int f\,g=fG-\int f^I G$$

Integrazione per sostituzione

$$\int f(g(x))\cdot g^I(x)=\left[\int f(t)\right]_{t=g(x)}$$

Derivata di un integrale

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)}f(x)\right)^I=f(h(x))h^I(x)-f(g(x))g^I(x)$$

Confronto asintotico

con ∫f e ∫g e 0<f(x)<g(x):

se g converge → f converge

se f diverge → g diverge

Convergenza

$$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha} & \alpha<1\\ \infty & \alpha\geq 1\end{cases} \qquad \int_1^\infty\frac{1}{x^\alpha}=\begin{cases}c & \alpha>1\\ \infty & \alpha\leq 1\end{cases}$$

Asintoti

x→ ∞

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x} \qquad \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}$$

x→ 0

$$\tan^{-1}(x)\sim x \qquad \log(1+x)\sim x$$

Equazioni differenziali 1° ordine

$$y^I+a(x)y(x)=f(x) \quad \Rightarrow$$

$$y(x)=e^{-A(x)}\left(\int f(x)e^{A(x)}dx+c\right)$$

Equazioni differenziali 2° ordine

(Valori lambda)

$$\lambda_1\neq\lambda_2\gg c_1e^{\lambda_1}+c_2e^{\lambda_2}$$

$$\lambda_1=\lambda_2\gg c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}$$

$$\lambda=\alpha\pm i\beta\gg$$

$$c_1e^{\alpha x}\sin(\beta x)+c_2e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

Equazioni differenziali a variabili separabili

$$y^I(x)=a(x)b(y) \quad\rightarrow$$

$$\int\frac{1}{b(y)}=\int a(x)$$

Proprietà varie

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a(b)-\log_a(c)$$

$$x=e^{\log(x)}$$

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$$

$$\frac{1}{f\,g}=\frac{ag}{f}.+\frac{bf}{g}=ag+bf=1$$

$$\frac{x^a}{x^b}=\frac{1}{x^{b-a}}$$

$$1=\cos^2(x)+\sin^2(x)$$

$$\sin(-x)=-\sin(x)$$

$$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

Analisi delle funzioni

Determinare estremo superiore/inferiore

- **Caso disequazione**: Si cercano i punti dove la funzione rispetta la disequazione (dove x è maggiore o minore di 0), poi si confrontano gli insiemi e si individua i limite superiore (la parentesi a destra)

- **Caso due funzioni**: Si esaminano entrambe le funzioni applicando i vari n. Generalmente gli insiemi generati si rimpiccioliscono

Retta tangente alla funzione

- **Caso funzione normale**: Si calcola la derivata della funzione data e la si applica alla x del punto, ottenendo la m, di conseguenza si applica la seguente formula: $m(x-p_x)+p_y$

- **Caso funzione inversa**: Bisogna calcolare la derivata della funzione inversa, questo ci permette di applicare la formula: $(f^{-1})^I=\frac{1}{f^I}$, dopo di che si calcola con quale $f(x)=y$ dove y è fornita dalla consegna e poi alla fine la formula della retta corrisponde a $m(x-p_y)+p_x$

Identificare punti critici

- **Caso base**: Per identificare un punto critico, abbiamo bisogno di porre la derivata della funzione equivalente a zero ($f^I(x)=0$). Questo però non è sufficiente, bisogna anche analizzare gli intorni del punto per verificare il segno della derivata (disequazione $f^I(x)>0$). Inoltre vanno analizzati i limiti dell'intervallo

Numeri complessi

Soluzione di un'equazione complessa

- **Caso sistema di equazioni**: Converto i numeri complessi in modo da ottenere una equazione con gli elementi $Re(z)$ e $Im(z)$ e risolvo il sistema. In alcuni casi devo risolvere equazioni di secondo grado. In base ai risultati capisco il tipo di soluzione:
    - a e b definiti: un punto
    - a e b definiti ma con due risultati (x^2): due/quattro punti
    - $a/b=?$ e $b\neq ?$ o $a=b$: una retta
    - $a^2+b^2\leq x$: un cerchio
    - $a^2+b^2=x$: una circonferenza (con $ca^2+b^2+db<1$, c schiaccia la circonferenza, mentre d la sposta)
- $a<c$ o $a<b$: semipiano

Radici di un numero complesso

- **Caso determinare polinomio da radice**: possiamo prendere le incognite del polinomio, applicare la formula $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e metterla in equivalenza con la radice fornita
- **Caso equazione**: Si cerca di risolvere l'equazione individuando il valore di a e b
- **Caso determinare radice di un polinomio**: Si risolve con la classica formula $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Limiti

Calcolo

- **Caso generico**: Cerchiamo di individuare la funzione fratta, e applichiamo dell'hopital $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f^I(x)}{g^I(x)}$

Taylor

- **Caso centro ≠ 0** : Si individuano $f^{(I)},\dots,f^{(n)}$ per poi applicare la formula $\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$

- **Caso funzione composta**: bisogna calcolare la funzione interna $g(x)$ nel centro definito x_0 e poi la funzione esterna centrata in $g(x_0)$

- **Caso integrale definito**: Derivo l'integrale fino all'ordine richiesto, applicando poi la formula del caso in centro $\neq 0$

Successioni

- **Caso generale**: Cerchiamo di estrarre la n o di portarla al denominatore, in modo che ad infinito tenda a 0. Possiamo anche applicare i limiti notevoli a patto che le funzioni composte tendano a 0

- **Caso radici**: Possiamo usare la razionalizzazione ($\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ o $\sqrt{x}-\sqrt{x+a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+a}}$)

Derivate

Definire a per mantenere continuità e derivabilità

- **Caso continuità**: basta trovare il valore che rende equivalenti $f(x_o^-)$ e $f(x_o^+)$. Questo si può effettuare con i limiti notevoli o anche con Taylor in $x_0=0$

- **Caso derivabilità**: Bisogna effettuare lo stesso calcolo per la continuità, ma l'equazione va messa a sistema con l'equivalenza tra $f^I(x_0^-)$ e $f(x_o^+)$

In un intervallo esiste un punto tale che:

- **Caso generico**: Qui possono essere applicati due possibili teoremi:
    - **Lagrange**: $\exists f^I(x)=\frac{h(b)-h(a)}{b-a}$
    - **Valori continui**: $\exists x_0 \rightarrow a<x_0<b$
- **Caso periodico**: Il periodo t indica ogni quanto la funzione si ripete
- **Caso della catena**: Basta convertire la forma scomposta in composta: $\lim_{\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=(f(g(x)))^I|_{x=x_0}$ che diventa $f^I(g(x))g^I(x)|_{x=x_0}$

Equazioni differenziali

Trovare la soluzione al problema di cauchy

- **TRUCCO**: Calcolare le soluzioni in $x_0=0$ e confrontare con le condizioni di cauchy

- **Caso EDO a variabili separabili**: Sono in forma $y^I(x)=a(x)b(y(t))$, che diventa $\int\frac{1}{b(y(x))}=\int a(x)$

- **Caso EDO di primo ordine****: Cerco di modificare la funzione per ottenere la forma $y^I(x)+a(x)y(x)=f(x)$, da qui posso applicare la formula $e^{-A(x)}(\int f(x)e^{A(x)}dx+c)$ dove $A(x)=\int a(x)$

- **Caso EDO non omogenea**: Oltre alla soluzione generale, bisogna anche trovare la soluzione particolare della parte non omogenea. Quindi se $\{f(x)=P(x)$, allora eseguiamo $f(Q(x))$ dove $Q(x)$ è la forma particolare at^2+bt+c, e mettiamo tutto a sistema con $P(x)$, separando per i gradi di t. Quindi se la soluzione di $f(x)$ è $s(x)$, allora la nostra soluzione generica è $s(x)+f(Q(x))$

Verificare l'intorno di x della soluzione

- **Caso generale**: Per determinare la monotonia di una funzione in un punto, se $f^I(x_0)>0$ allora è crescente, se no è decrescente. Per la convessità, $f^{II}(x_0)>0$, se no è concava

Integrali

Calcolo valore integrale definito

- **Caso funzione composta**: Devo applicare l'integrazione per sostituzione, ossia $\int_b^a f(g(x))g^I(x)$ applico $t=g(x)$ e $dt=g^I(x)dx$ ottenendo $\int_{g(b)}^{g(a)} f(t)dt$ e poi nella soluzione sostituisco $F(t)$ con $F(g(x))$. A questo punto posso applicare $\int_b^a \rightarrow F(b)-F(a)$

- **Caso funzione non semplice**: Posso provare ad approcciare la funzione con integrazione per parti: con $\int f(x)$ posso sempre applicare la formula $\int f(x)g^I(x)=fg-\int f^Ig$ usando come $g^I(x)=1$ e $g(x)=x$, sperando che la derivata di $f(x)$ sia più semplice da processare

Calcolo di un integrale improprio

- **Caso variabile per esistenza/convergenza di un integrale**: Si cerca la divergenza (generalmente $\int^{+\infty} x$ e $_0\int\frac{1}{x}$) e si usano gli asintoti per individuare come convergere usando $\frac{1}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$ se $\alpha<1$. Per approssimare a 0 si può usare taylor

- **Caso funzione classica**: Si effettua il calcolo come un integrale definito, può necessitare però di trasformazioni e separazioni dell'intervallo dell'integrale