LEZIONE 5ª

Conseguenze della completezza di $\mathbb{R}$

Prop 5.1. (Radici n-esime) $(a>0,\ a\in\mathbb{R}_+)$

" Per ogni numero reale positivo a e per ogni $n\in\mathbb{N}$ esiste un unico numero reale positivo b tale che

$$b^n = a$$

Tale reale positivo prende il nome di radice n-esima e si indica col simbolo $\sqrt[n]{a} \doteq a^{\frac{1}{n}}$. "

Un'altra conseguenza importante della completezza è la possibilità di definire potenze con numeri reali positivi

es: $\pi^{\sqrt{2}}$

Abbiamo già visto a^n $n\in\mathbb{Z}$

Sia $r \in \mathbb{Q}$ $\quad r = \frac{p}{q}$ $\quad p \in \mathbb{Z}$ $\quad q \in \mathbb{N}$

Allora se $a > 0$

$$a^r \doteq a^{p/q} \doteq \sqrt[q]{a^p} \qquad r \geq 0 \qquad a^0 = 1$$

$$a^r \doteq a^{p/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^{-p}}} \qquad r < 0$$

Stesse proprietà delle potenze intere.

Siano $a > 0$ $\quad x \in \mathbb{R}$

Se $a = 1$ $\quad 1^x = 1$

Se invece $a > 1$ consideriamo l'insieme

$$E \doteq \{ a^r \mid r \in \mathbb{Q}, \ r \leq x \}$$

2 / 3 08:44

L'insieme E è limitato superiormente

se $n \in \mathbb{N}$ $\quad n > x$ allora a^n è un maggiorante per E

per cui E ammette estremo superiore in $\mathbb{R}$ e definisco

$(a>1)$ $$a^x \doteq \sup E = \sup\{a^r \mid r \in \mathbb{Q},\ r \le x\}.$$

Se $0<a<1$, posto $b = \frac{1}{a} \Rightarrow b>1$ e definisco

$$a^x \doteq \frac{1}{b^x}$$

Si può dimostrare che valgono sempre le regole delle potenze intere e razionali

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad a>0 \quad x,y \in \mathbb{R}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x \qquad a>0\ b>0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$a^0 = 1 \quad \dots$$

Poniamo infine la funzione esponenziale di base $a > 0$

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto a^x$$

Ricordiamo: $A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad A \neq \emptyset$ $\quad f : A \to \mathbb{R}$
$$A \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{dom} f = A \qquad \operatorname{im} f = f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ per } x \in A \}$$

Spesso le funzioni vengono date in forma esplicita (algebrica...) ed è importante caratterizzare il dominio della funzione come sottoinsieme massimale dei reali in cui f è propriamente definita.

Es: 1. $\qquad f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

$$\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0\}$$

$$x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$$

$$\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

2. $a > 0$ $\quad f(x) = \dfrac{a^x + 1}{a^x - 1}$

$$\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} \mid a^x - 1 \neq 0\}$$

$$a^x - 1 = 0 \iff a^x = 1 \iff x = 0$$

$$\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$

$$\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x + 4 \geq 0\}$$

$$x^2+5x+4 = (x+4)(x+1)$$

$x_1=-4 \quad x_2=-1$ radici di $x^2+5x+4=0$

$$x^2+5x+4 \geq 0 \qquad \boxed{x \in (-\infty,-4)\cup(-1,+\infty)}$$

Dom f

4. $$f(x)=\sqrt{\frac{-x^2+4}{2x^2-x-1}}$$

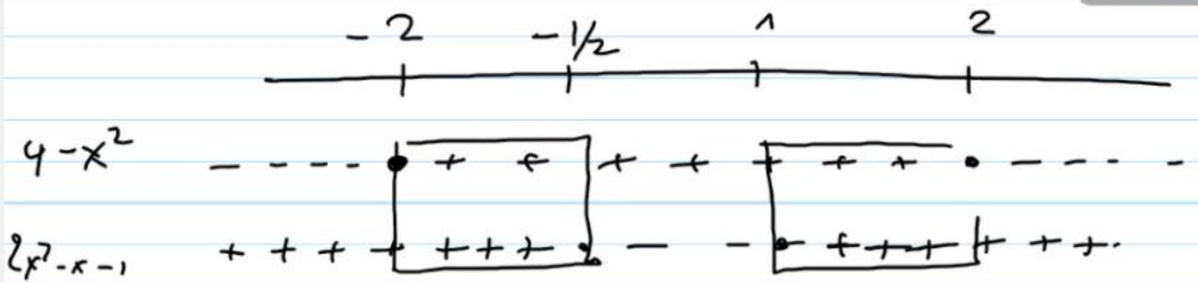
$$\frac{-x^2+4}{2x^2-x-1}\geq 0$$

2 possibilità

$$\begin{cases} 4-x^2\geq 0 \\ 2x^2-x-1>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4-x^2<0 \\ 2x^2-x-1<0 \end{cases}$$

$$4-x^2\geq 0 \iff x^2\leq 4 \iff x\in(-2,2) \quad (|x|\leq 2)$$

$$2x^2-x-1>0 \longrightarrow 2x^2-x-1=0 \iff x_1=-\frac{1}{2} \quad x_2=1$$



$$x \in \left[-2, -\tfrac{1}{2}\right) \cup (1, 2]$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{Dom}\, f = \left[-2, -\tfrac{1}{2}\right) \cup (1, 2]$$

FUNZIONI A TRATTI

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 2 \\ x^2 & 2 \le x < \overset{3}{4} \\ -3 & 4 \le x < 8 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{dom}\, f = (-\infty, 8) \qquad \mathrm{dom}\, \tilde{f} = (-\infty, 3) \cup [4, 8)$$

OPERAZIONI TRA FUNZIONI

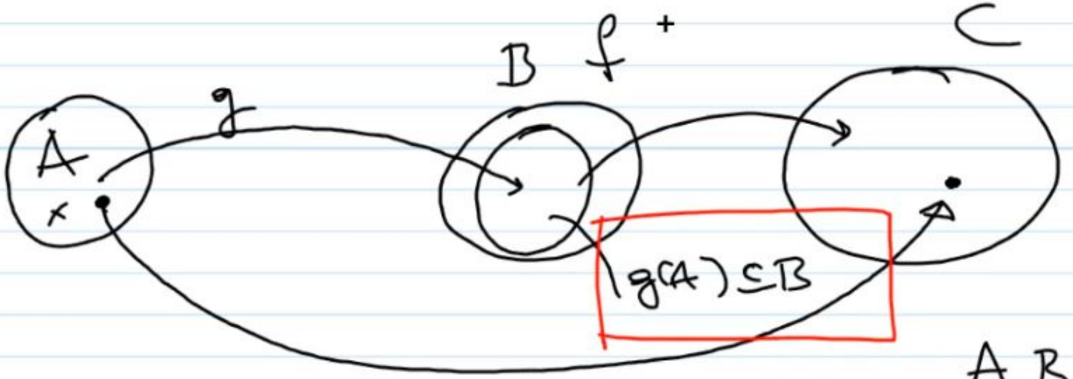
f, g

1. SOMMA $\quad (f+g)(x) \doteq f(x)+g(x) \quad x \in \text{dom}\, f \cap \text{dom}\, g \neq \emptyset$

2. PRODOTTO $\quad (f \cdot g)(x) \doteq f(x) \cdot g(x) \quad x \in \text{dom}\, f \cap \text{dom}\, g \neq \emptyset$

3. RAPPORTO $\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) \doteq \frac{f(x)}{g(x)} \quad x \in \text{dom}\, f \cap \text{dom}\, g \neq \emptyset$, $\; g(x) \neq 0$

4. COMPOSIZIONE



COMPOSIZIONE

$$\boxed{(f \circ g)(x) \doteq f(g(x)) \quad \forall x \in A}$$

$A, B, C \subseteq \mathbb{R}$

Stylus Color Line Eraser Backgrounds Undo Redo Pages Previous Next Erase Board Web Documents Show Desktop OpenBoard

Page 4

Page 5

Page 6

Page 7

Page 8

Page 9

9 / 11 09:33

⑤ RESTRIZIONE

$$f: A \to \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R} \qquad A \neq \emptyset$$

se prendo $B \subseteq A$

$$\underbrace{f|_B}_{\text{RESTRIZIONE A } B \text{ di } f} : B \to \mathbb{R}$$

NUOVA FUNZIONE

FUNZIONI LIMITATE

DEF 5.2 : " Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \phi$, Diremo che f è LIMITATA SUPERIORMENTE se $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ è LIMITATA SUPERIORMENTE, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M$ $\forall x \in A$.

Analogamente, f è LIMITATA INFERIORMENTE se $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ è LIMITATA INFERIORMENTE, cioè esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq f(x)$ $\forall x \in A$.

La funzione f si dirà LIMITATA se è limitata superiormente ed inferiormente, cioè esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in A$.

Quindi se $f(A)$ è limitato superiormente allora esiste il suo estremo superiore in $\mathbb{R}$ $\sup f(A)$ e diremo che f ha estremo superiore e indichiamo

$$\sup f \doteq \sup f(A)$$

Lo stesso se $f(A)$ è limitata inferiormente $\Rightarrow \inf f = \inf f(A)$

Se $x_0 \in \mathrm{dom}(A)$ e vale che $f(x_0) = \sup f$ si dice che f AMMETTE MASSIMO ASSOLUTO e x_0 si dice punto di massimo assoluto per f

Lo stesso vale per l'estremo inferiore, se $x_0 \in A$ e

$f(x_0) = \inf f \Rightarrow$ diremo che f AMMETTE MINIMO ASSOLUTO e x_0 è il punto di minimo assoluto per f.

FUNZIONI MONOTONE

DEF 5.3^{4} Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$.

Allora f è detta

(i) CRESCENTE se per ogni coppia $x_1, x_2 \in A$

se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

(ii) STRETTAMENTE CRESCENTE - - - - - - -

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(iii) DECRESCENTE - - - - -

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

(iv) STRETTAMENTE DECRESCENTE - - - -

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

MONOTONA

STRETT. MONOTONA

Prop 5.4

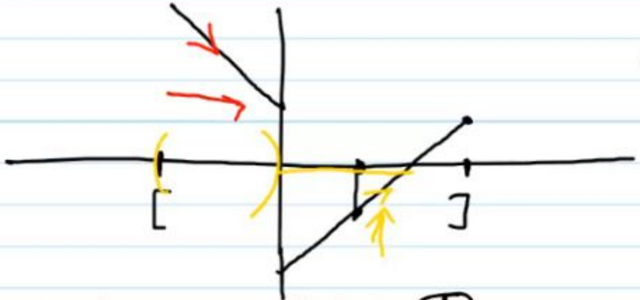
"Ogni funzione strettamente monotona è iniettiva"

Dim: Supp. f strett. crescente e siano $x_1, x_2 \in A = \text{dom} f$, $x_1 \neq x_2$. Allora se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ quindi f è iniettiva. ■

OSS: 2 CONSIDERAZIONI

1ª è che se f è iniettiva allora non è detto che sia strett. monotona

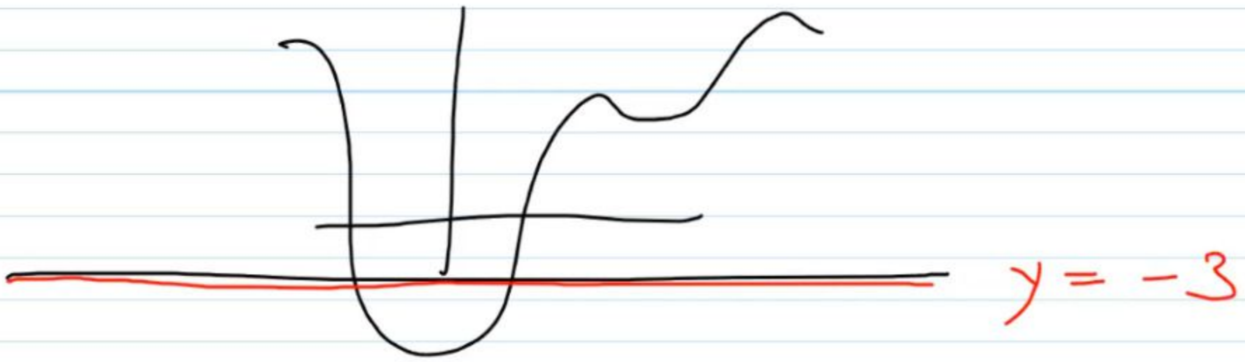
es:

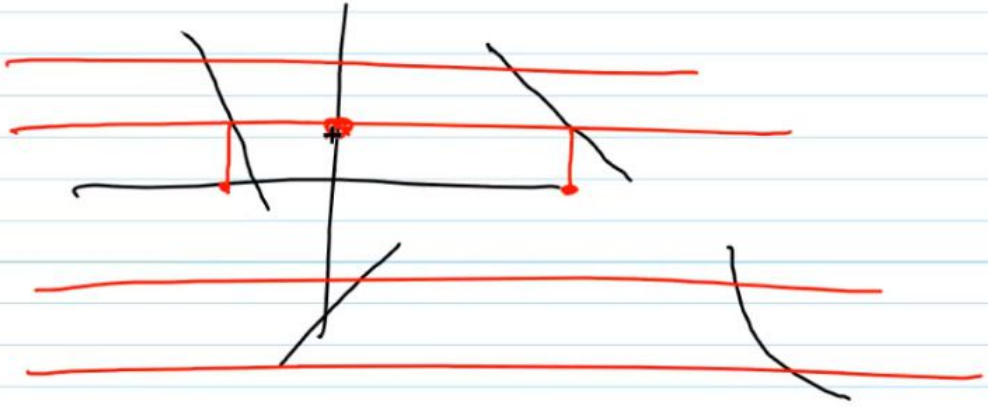


è iniettiva ma non è strett. monotona

2ª è vera la negazione della Proposizione: funzioni non iniettive non sono strett. monotone.

Criterio per iniettività se abbiamo il grafico di una funzione





FUNZIONI INVERSE

DEF 5.5

"Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e $f : A \to B$

se f è biunivoca (iniettiva e suriettiva) $\to f(A) = B$

allora f è INVERTIBILE e si chiama FUNZIONE INVERSA di f la funzione $g : B \to A$

e vale

$$g \circ f = id_A \qquad (id_A(x) = x \quad \forall x \in A)$$

Ossia ad ogni $y \in B$ associo l'unico $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Normalmente g si indica col simbolo $\underline{\underline{f^{-1}}}$ $(f^{-1}(x))$"

FUNZIONI PERIODICHE

DEF 5.6

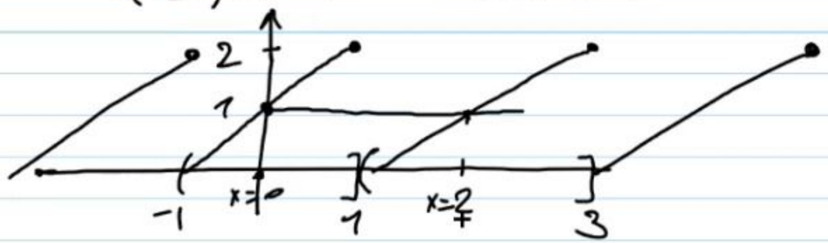
" Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dice che f è PERIODICA se esiste $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$ T è detto PERIODO di f

Il numero $T_0 \doteq \min\{T>0 \mid f(x+T) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$

se esiste è detto il MINIMO PERIODO di f "

es: 1. $f(x) = x - 2n + 1 \qquad x \in (2n-1, 2n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$



f è periodica di periodo (minimo) $T_0 = 2$

Page 12
Page 13
Page 14
Page 15
Page 16
Page 17
17 / 19 10:12

2) $f(x) = c \qquad c \in \mathbb{R}$ fissato $\forall x \in \mathbb{R}$

Tutti ~~gli~~ i $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sono periodi per f

$$\underbrace{T_0 = \min\{T > 0 \mid f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}}_{\text{non esiste!}}$$

$\Rightarrow$ f non ha minimo periodo pur essendo periodica

POLINOMI e RAZIONALI

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad \text{con } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}$$

e se $a_n \neq 0 \Rightarrow$ diremo che n è il grado del polinomio

P è definito su tutto $\mathbb{R}$

I valori $x \in \mathbb{R}$ per cui $P(x) = 0$ sono detti ZERI - RADICI

Se P ha grado n allora le radici sono <u>al più</u> n numeri reali

P è detto IRRIDUCIBILE se non è scrivibile come prodotto di polinomi di grado minore al grado di P

Si può dimostrare che gli unici polinomi irriducibili sono quelli di 1° grado e i polinomi di 2° grado con discriminante negativo.

Es: $P(x) = x^4 + 1$

$$= \left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\cdot x + 1\right)$$

Una funzione f è detta RAZIONALE se

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$$

$n(x)$ e $d(x)$ polinomi, $\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x) \neq 0\}$

Se f è razionale e grado $n >$ grado d allora

$$f(x) = P(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

$\frac{r(x)}{d(x)} \to$ resto della divisione

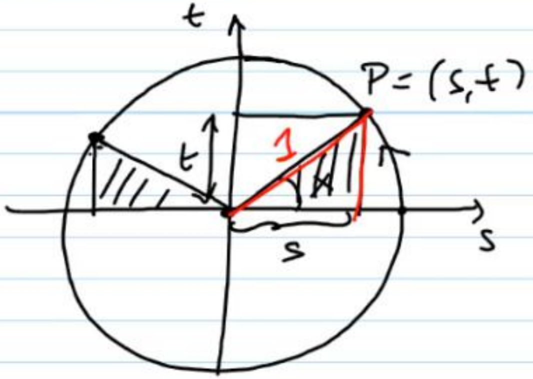
e

grado $r <$ grado d

$P(x)$ $\uparrow$ polinomio quoziente

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

E LORO INVERSE



$$s = \cos x \qquad \mathbb{R} \ni x \longmapsto \cos x \in \mathbb{R}$$

$$t = \sin x \qquad \mathbb{R} \ni x \longmapsto \sin x \in \mathbb{R}$$

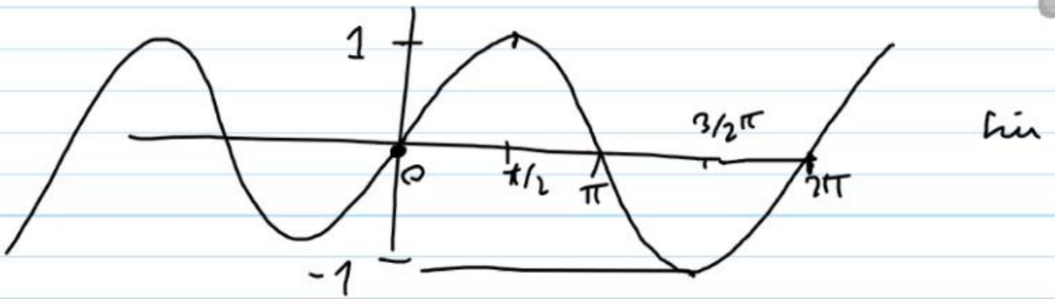
$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

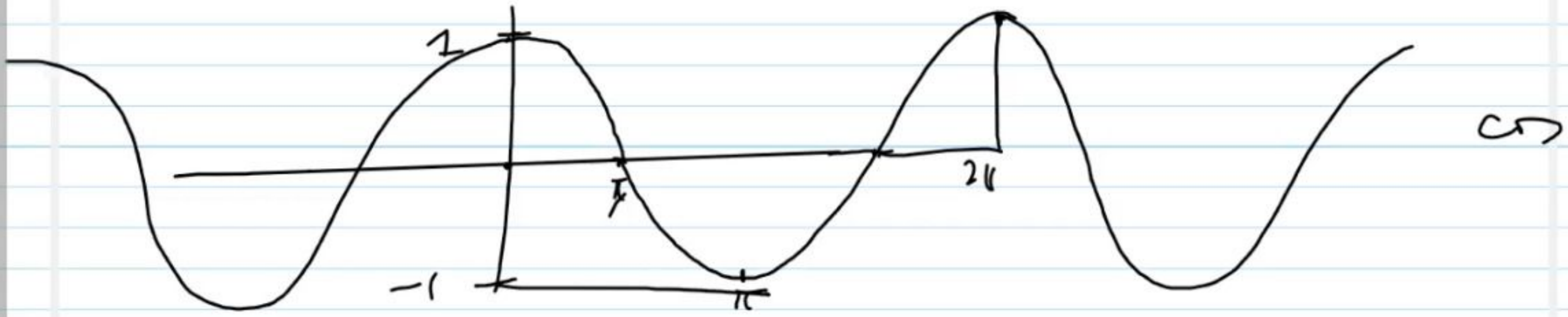
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

$\Rightarrow$ periodiche di periodo 2π

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

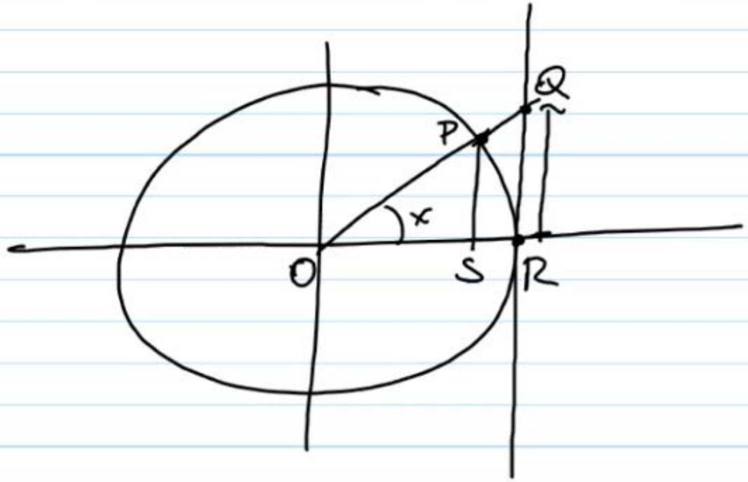




PARITÀ: $\cos(-x) = \cos x$ coseno è PARI

$\sin(-x) = -\sin x$ seno è DISPARI

TANGENTE e COTANGENTE



$\overline{QR} = tg\,x$ (tang x ....)

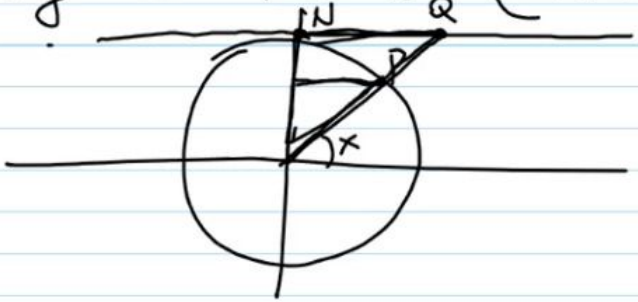
$$\frac{\overline{QR}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{PS}}{\overline{OS}}$$

$\overline{OR} = 1$

$$\boxed{tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

Poiché $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\text{dom } tg = \mathbb{R} \setminus \{ x = \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$$



$\overline{NQ} = \text{cotg}\,x$

$$\text{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Poiché $\sin x = 0$

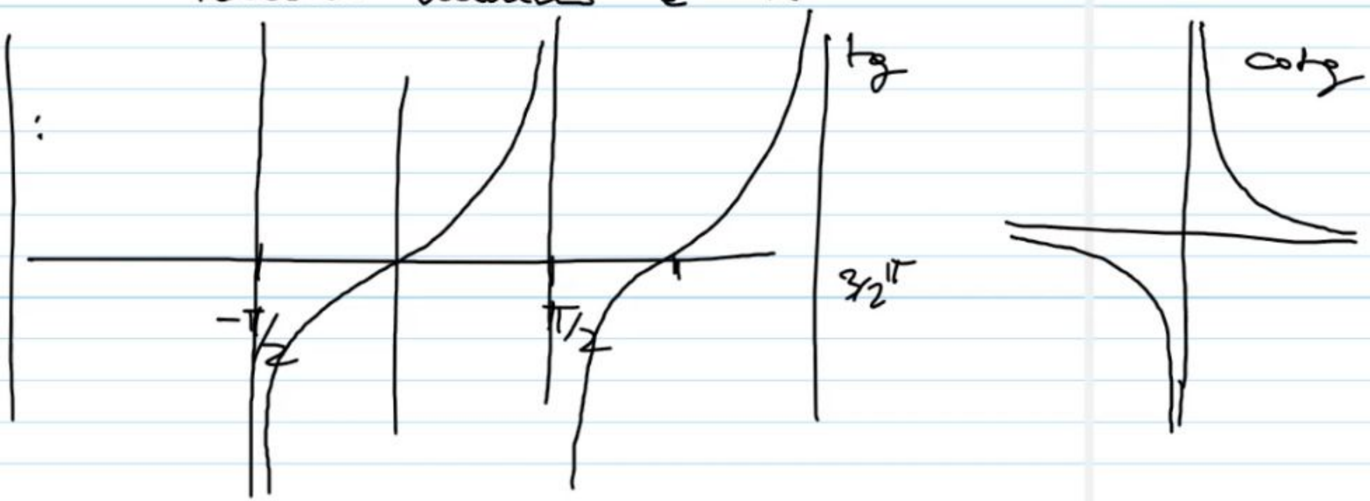
$$\iff x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{dom cotg} = \mathbb{R} \setminus \{ x = k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

PARITÀ: tg e cotg sono dispari perché il seno è dispari e coseno è pari

PERIODICITÀ: Periodo minimo è π

GRAFICO:



INVERSE

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

$$\underbrace{\sin\restriction_{[-\pi/2,\, \pi/2]} \text{ è iniettiva}}, \quad \sin\left([-\pi/2,\, \pi/2]\right) = [-1, 1]$$

$\Rightarrow$ è SURIETTIVA

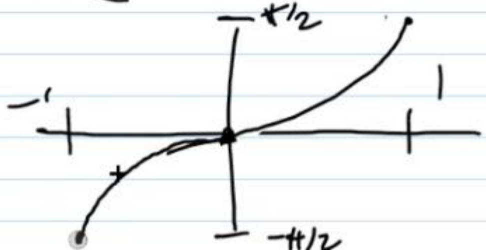
è biunivoca $\Rightarrow$ $\sin\restriction_{[-\pi/2,\, \pi/2]}$ è invertibile!

$$\arcsin \doteq \left(\sin\restriction_{[-\pi/2,\, \pi/2]}\right)^{-1} \qquad \text{ARCOSENO}$$

ed è l'unica funzione $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2,\, \pi/2]$

per cui

$$\arcsin(\sin x) = x \qquad \forall\, x \in [-\pi/2,\, \pi/2]$$



$$\cos\big|_{[0,\pi]} \Rightarrow \text{strett. decrescente} \Rightarrow \text{iniettiva}$$

inoltre $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$

Allora esiste ed è unica l'inversa

$$\arccos \doteq \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$$

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

per cui $\boxed{\arccos(\cos x) = x}$ $\forall x \in [0,\pi]$

TANGENTE

$$\operatorname{tg}\big|_{(-\pi/2,\ \pi/2)} \Rightarrow \text{strett. crescente} \Rightarrow \text{iniettiva}$$

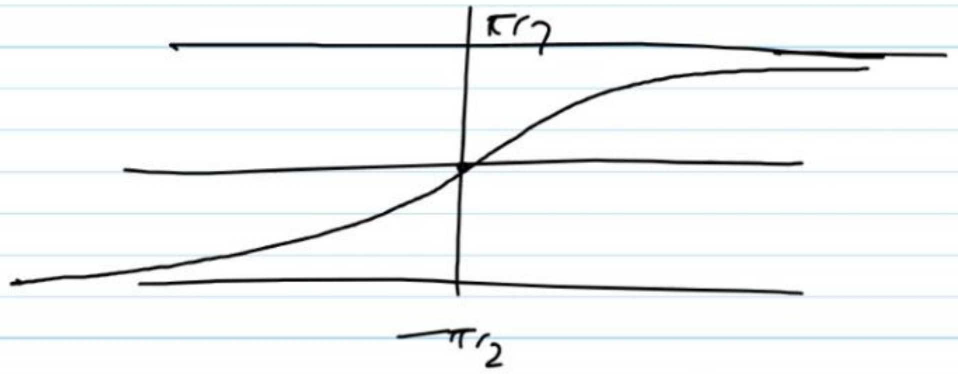
$$\operatorname{tg}(-\pi/2, \pi/2) = \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ esiste inversa per cui

$$\operatorname{arctg} \doteq \left(\operatorname{tg}\restriction_{(-\pi/2,\pi/2)} \right)^{-1}$$

$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ per cui

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$



Per la cotangente ci si restringe all'intervallo $(0,\pi)$

$\operatorname{cotg}\restriction_{(0,\pi)} \Rightarrow$ strett. decrescente $\Rightarrow$ iniettiva

$\operatorname{cotg}(0,\pi) = \mathbb{R}$ suriettiva

Allora esiste un'unica inversa

$$\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$$

per cui

$$\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) = x \qquad \forall x \in (0,\pi)$$

ESPONENZIALI e LOGARITMI

Visto che se $a > 0 \Rightarrow a^x \quad x \in \mathbb{R}$

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \ni \longmapsto a^x$$

Se $a = 1$ ho una funzione banale $a^x = 1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Se $a \neq 1 \Rightarrow a^x > 0$ quindi è limitata inferiormente

ma si può dimostrare che $\inf\{a^x \mid x \in \mathbb{R}\} = \{0\}$.

per cui $\exp_a(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_+$, si può dimostrare che $\boxed{\exp_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+}$

$\Rightarrow$ $\exp_a$ è suriettiva

Verifichiamo se è iniettiva.

Se $a > 1$ $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ strett. crescente $\Rightarrow$ iniettiva

Se $0 < a < 1$ $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_2} < a^{x_1}$ strett. decrescente $\Rightarrow$ iniettiva

Per cui esiste l'inversa della funzione

$$\exp_a(x) \doteq a^x \qquad \text{con } a > 0 \quad a \neq 1$$

Quindi esiste ed è unica la funzione per cui ad ogni $x \in \mathbb{R}_+$ associo un unico $y \in \mathbb{R}$ tali che

$$a^y = x$$

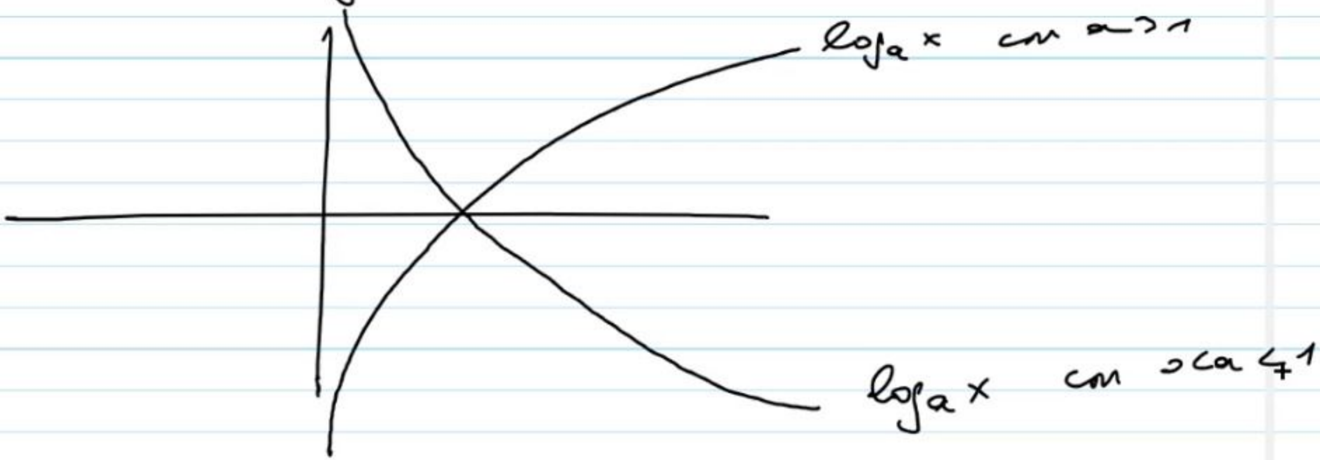
Allora chiamiamo $y \doteq \log_a x$

Dalle proprietà elementari delle funzioni esponenziali si trova

$$\log_a(a^x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad \forall x > 0 \qquad x \in \mathbb{R}_+$$

MONOTONIA di $\log_a$



Page 24
Page 25
Page 26
Page 27
Page 28
Page 29
29 / 32 11:16

Prop. 5.7

" Valgono le seguenti identità

(1) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \qquad x_1 > 0 \quad x_2 > 0$

(2) $\log_a (x^{\alpha}) = \alpha \log_a x \qquad x > 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$

(3) $\log_b (x) = \log_a (x) \cdot \log_b a \qquad x > 0, \ a > 0 \ b > 0, \ a, b \neq 1.$ "

$a = 10 \qquad \mathrm{Log} \doteq \log_{10}$

$a = e$ ↑ numero di NEPERO

$2 < e < 3$

$\boxed{\log \quad \ln = \log_e}$

$$1 = 1^{1} = 1^{2/2} = \sqrt{1^2} = \sqrt{(-1)^2} = (-1)^{2/2} = (-1)^1 = -1$$