Lezione 18ª

— PRIMITIVE —

Def: "Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo qualsiasi, una PRIMITIVA per f in I" è una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I tale che $F' = f$.

L'insieme di tutte le primitive per f in I si denota col simbolo $D^{-1}f$

$$D^{-1}f \doteq \{ F : I \to \mathbb{R} \mid F'(x) = f(x) \ \forall x \in I \}. \ //$$

OSS: (1) Le primitive per f in I sono tutte funzioni continue in I

(2) Se F e G sono 2 primitive di f in I allora

$$\underbrace{F' = f = G'} \Rightarrow F = G + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow F' = G' \Leftrightarrow F' - G' = 0 \Leftrightarrow (F - G)' = 0 \Leftrightarrow F - G = c$$

$$\Leftrightarrow F = G + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

quindi $$D^{-1} f = \{ F(x) + c \mid c \in \mathbb{R} \}.$$

(3) Vedremo a breve che se f è continua allora $D^{-1}f \neq \emptyset$.

Infatti $D^{-1} f = \emptyset$ se f ha discontinuità di salto

Esempio: $f(x) = \operatorname{segn} x \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

mi chiedo se esiste una primitiva $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per f in $\mathbb{R}$.

Supponiamo che una tale primitiva F per f in $\mathbb{R}$ esiste, $\Rightarrow F \in D^{-1} f$

Allora $F'(x) = 1$, se $x > 0$, e quindi $\boxed{F(x) = x + a}$, $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Allo stesso modo $F'(x) = -1$ se $x < 0$ e quindi $\boxed{F(x) = -x + b}$, $b \in \mathbb{R}$, $x < 0$

Per definizione F è derivabile in $\mathbb{R}$ quindi continua in $\mathbb{R}$, in particolare

F sarà continua in $x = 0$, ossia $\boxed{\lim_{x \to 0^+} F(x) = a}$ mentre se

$\boxed{\lim_{x \to 0^-} F(x) = b}$ $\Rightarrow$ poiché continua in $x = 0$ allora i limiti devono

essere uguali quindi $a = b$ $\Rightarrow$ $\boxed{F(x) = |x| + a}$ NON È POSSIBILE

Ciononostante per funzioni con discontinuità ESSENZIALI la primitiva può esistere:

$$f(x) = \begin{cases} \boxed{2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Il punto "strano" è proprio l'origine, infatti è una discontinuità essenziale per f, infatti

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ (x \neq 0)}} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \Big(\underbrace{2x \sin\frac{1}{x}}_{\to 0} - \cos\frac{1}{x} \Big) = \text{NON ESISTE}$$

$\cos\frac{1}{x} \to$ OSCILLA SENZA MAI CONVERGERE O DIVERGERE

$$\lim_{\substack{x \to 0^- \\ (x \neq 0)}} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \Big(\underbrace{2x \sin\frac{1}{x}}_{\to 0} - \cos\frac{1}{x} \Big) = \text{NON ESISTE}$$

$\cos\frac{1}{x} \to$ OSCILLA

quindi $x = 0$ è DISCONTINUITÀ ESSENZIALE.

Ma f ha PRIMITIVA in $\mathbb{R}$!

Stylus Color Line Eraser Backgrounds Undo Redo Pages Previous Next Erase Board Web Documents Show Desktop OpenBoard

Page 1
Page 2
Page 3
Page 4

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Supponiamo $x \neq 0$

$$F'(x) = \left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)' = 2x \sin \frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \checkmark$$

ora vedo $x = 0$

$$F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - \cancel{F(0)}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ (h \neq 0)}} \frac{F(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \left(h^2 \sin \frac{1}{h}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

$\Rightarrow$ F è proprio PRIMITIVA di f in $\mathbb{R}$. ///

4 / 4 09:09

TABELLA DI PRIMITIVA

	$f(x)$	I	$F(x)$	
1.	$\underline{\underline{x^n}}$ $(n \neq -1)$	tutti x $n>0$ in $\mathbb{R}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$(x^{n+1})' = (n+1)x^n$
2.	x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$(0,+\infty)$ $\alpha > 0$ $[0,+\infty)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha$
3.	e^x	$\mathbb{R}$	e^x	
4.	$\underline{\underline{a^x}}$ $(a>0)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{a^x}{\underline{\underline{\log a}}}$	$(a^x)' = (e^{x\log a})'$ $= \log a \, e^{x \log a}$ $= \underline{\underline{\log a}} \; a^x$
5.	$\dfrac{1}{x}$	$(-\infty,0)$ $(0,+\infty)$	$\log\lvert x\rvert$	
6.	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$	

	f	I	F	
7.	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$	
8.	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$	$\operatorname{tg} x$	
9.	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(0, \pi) + k\pi$	$\operatorname{cotg} x$	
10.	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\{ \lvert x \rvert < 1 \}$	$\arcsin x$	$(\sin^{-1} x)$
11.	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arctg} x$	
12.	$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	
13.	$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	

	f	I	F
14.	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{tgh}\, x$ $(\tanh x)$
15.	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\{\lvert x\rvert<1\}$	$\mathrm{arctgh}\, x$ $(\tanh^{-1} x)$
16.	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{arcsinh}\, x$ $(\sinh^{-1} x)$
17.	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\{x>1\}$	$\mathrm{arccosh}\, x$ $(\cosh^{-1} x)$

Controlli: 15. $\boxed{\mathrm{tgh}^{-1} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}} = F(x)$

$$F'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \, \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{\cancel{1-x+(1+x)}}{(1-x)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{1-x^2} \quad \checkmark$$

16. $\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = F(x)$

$$F'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} \cdot \cancel{2}x\right)}_{\frac{\sqrt{x^2+1}\,+\,x}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

17. $\cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = F(x)$

$$F'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} \cdot \cancel{2}x\right)}_{\frac{\sqrt{x^2-1}\,+\,x}{\sqrt{x^2-1}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Proprietà delle primitive

Linearità della derivazione

$$(f+g)' = f' + g' \qquad \boxed{\left(D(af+bg) = aDf + bDg \right)}$$

<u>Teorema</u> (linearità delle primitive)

"Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli.

$\boxed{\text{Assumiamo che } D^{-1}f \neq \emptyset \neq D^{-1}g}$. Allora

$$D^{-1}(af+bg) = a D^{-1}f + b D^{-1}g = \left\{ aF + bG : F \in D^{-1}f,\ G \in D^{-1}g \right\}$$

oss. Senza l'assunzione $D^{-1}f \neq \emptyset \neq D^{-1}g$ ho guai!

Infatti prendiamo $f(x) = \operatorname{segn} x$ $\quad g(x) = -\operatorname{segn} x$ $\quad a = b = 1$

$af + bg = 0$ in $\mathbb{R}$ ma $D^{-1}0 = \mathbb{R}$

ma $D^{-1}f = \emptyset = D^{-1}g$

Teorema (Calcolo per PARTI)

// Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$, derivabili nell'intervallo I, tali che $D^{-1}(f'g) \neq \emptyset \neq D^{-1}(fg')$. Allora si ha

$$\boxed{D^{-1}(f'g) = fg - D^{-1}(g'f)} = \{fg - F : F \in D^{-1}(g'f)\}$$

dim:

L'uguaglianza equivale a dire che se $F \in D^{-1}(f'g)$ e $G \in D^{-1}(g'f)$ allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{F = fg - G + c} \iff (F - fg + G)(x) = c \quad \forall x \in I$$

$$\iff (F - fg + G)'(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

$$F' - (fg)' + G' = 0 \iff F' - f'g - fg' + G' = 0$$

$$\iff \cancel{f'g} - \cancel{f'g} - \cancel{fg'} + \cancel{fg'} = 0 = 0$$

■

Teorema (Calcolo per SOSTITUZIONE)

" Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $f: J \to \mathbb{R}$, $g: I \to J$

tutte funzioni derivabili laddove definite con $D^{-1} f \neq \emptyset$.

Allora se $F \in D^{-1} f$ si ha:

$$D^{-1}(f \circ g \cdot g') = \{ F \circ g + c \mid c \in \mathbb{R} \}."$$

dim: Dalla regola della derivata a catena

$$(F \circ g + c)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= (f \circ g)(x) \cdot g'(x) \quad \forall x \in I$$

ESEMPI DI CALCOLO DI PRIMITIVE

LEIBNIZ USAVA $\int f(x)\,dx \equiv D^{-1}(f)$

$$\int f(x)\,dx = D^{-1}(f)$$

$$\int f(x) \qquad \int f$$

CASI TIPICI:

A. LINEARITÀ, RISCALAMENTI, TRASLAZIONI

Se $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$ $\quad I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

Allora una primitiva di $a\,f(bx+c)$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

è data da $F(bx+c) \cdot \frac{a}{b}$

Esempio A1.

$$\int \frac{\alpha}{x - x_0}\,dx \qquad \alpha, x_0 \in \mathbb{R} \text{ fissati}$$

$$a\,f(bx+c) \Rightarrow \frac{\alpha}{x-x_0} \iff a = \alpha, \quad b = 1, \quad c = -x_0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad a\, f(bx+c) = \frac{\alpha}{x - x_0}$$

$$F(x) = \log|x| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha \log|x - x_0|}$$

$$\int \frac{\alpha}{x - x_0}\, dx = \alpha \log|x - x_0| + \text{costante}$$

Esempio A2 $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+3}\, dx$

$\dfrac{1}{2x^2+3}$ è molto simile a $\dfrac{1}{x^2+1} = f(x)$ $\quad \boxed{F(x) = \operatorname{arctg} x}$

$$\parallel \quad \frac{1}{2x^2+3} = \frac{1}{3\left(\frac{2}{3}x^2+1\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}x^2+1}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right)^2+1} = \frac{1}{3} f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right) \qquad a = \frac{1}{3} \quad b = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad c = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underset{=\cancel{\sqrt{3}}\sqrt{3}}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \cdot F\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,x\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,x\right)$$

$$\int \frac{1}{2x^2+3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,x\right).$$

Exemplu A) : $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^2 & +0 & +1 & & x-1 \\ \hline
-\cancel{x^2} & +x & +0 & & x+1 \\ \hline
0 & x & +1 & & \\
 & -x & +1 & & \\ \hline
 & 0 & +2 & &
\end{array}
\qquad
\frac{x^2+1}{x-1} = x+1 + \frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx = \int\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx = \int x\,dx + \int 1\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + 2\log|x-1|$$

Page 6 Page 7 Page 8 Page 9 Page 10 Page 11 Page 12 Page 13 Page 14
13 / 15 11:05

Exemplo A4.

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{a(1+x)+b(1-x)}{(1-x)(1+x)}$$

$$1 = a(1+x) + b(1-x) = a+b+(a-b)x$$

$$\begin{cases} 1 = a+b \\ 0 = a-b \iff a=b \Rightarrow a+a=1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2} = b} \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\,dx}_{-\frac{1}{2}\log|1-x|} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx}_{\frac{1}{2}\log|x+1|}$$

$$-\frac{1}{2}\log|1-x| + \frac{1}{2}\log|x+1| = \frac{1}{2}\left(\log|1+x| - \log|1-x|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

B SOSTITUZIONE

Regola: Se l'integrando è nella forma $f \circ g \cdot g'$ e conosco $F \in D^{-1} f$ allora la primitiva di $f \circ g \cdot g'$ è $F \circ g$.

Esempio B1. $$\underbrace{\int x \, e^{x^2}}_{\sim f \circ g \cdot g'} dx$$

$f(x) = e^x \quad g(x) = x^2 \quad g'(x) = 2x \quad F(x) = e^x$

$$f \circ g \; g' = 2x \, e^{x^2}$$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} F(g(x)) = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

Esempio B2.

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} = -\frac{(\cos x)'}{1-\cos^2 x}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad g(x) = \cos x$$

$$(f\circ g)(x) = \frac{1}{1-\cos^2 x} \cdot g'(x) = -\sin x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| = \frac{1}{2}\log\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \qquad = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$