Lezione 16

Abbiamo studiato il comportamento locale delle funzioni

STUDIO GLOBALE DELLE FUNZIONI

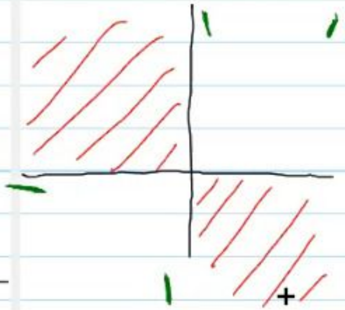
Tracciare il grafico approssimativo di funzioni in tutto l'insieme di definizione

Esempio 1: $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

$\boxed{1° \text{ PUNTO}}$ $\boxed{\text{vedere simmetrie (pari, dispari, periodica)}}$

nel nostro caso nessuna simmetria

$\boxed{2° \text{ PUNTO}}$ $\boxed{\text{insieme di definizione, limiti agli estremi}}$



nel nostro caso f è definita $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{0^+}{-\infty}\right] = 0^-$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

3° PUNTO

Zeri e segno: cioè cerco di risolvere

$f(x)=0, \quad f(x)>0, \quad f(x)<0.$

$f(x) = 0 \neq \dfrac{e^x}{x}$ mai, per nessun $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f(x)>0$

$f(x)<0$

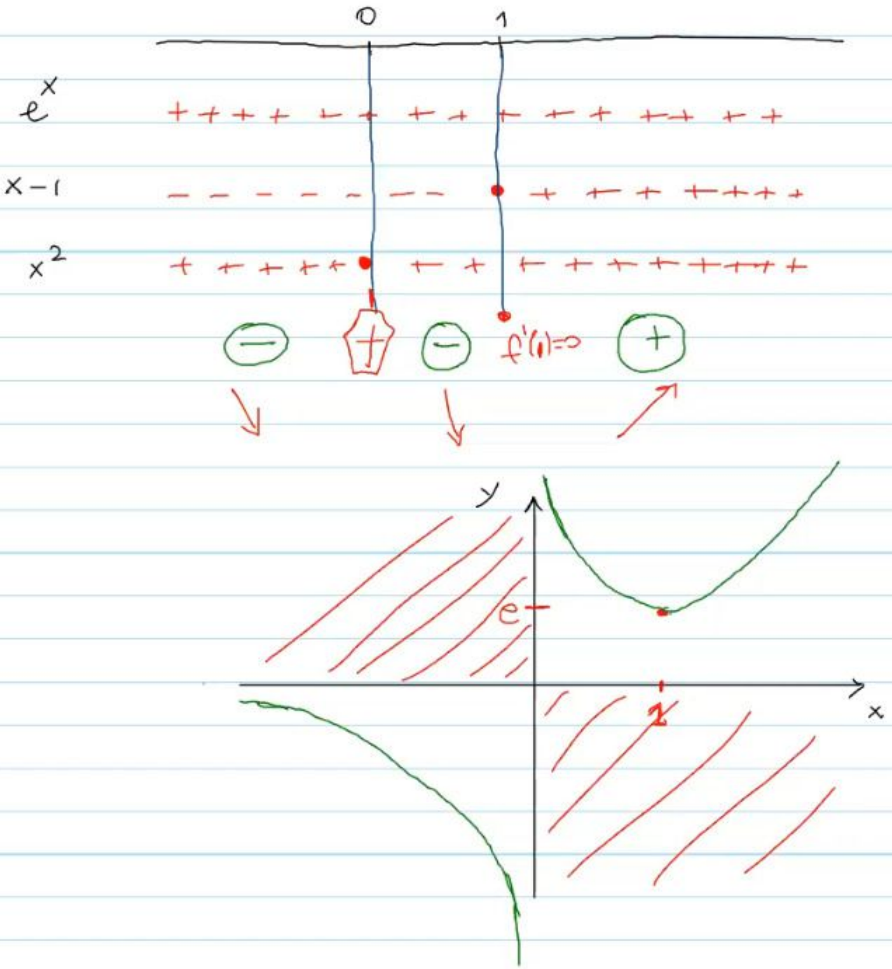
	$x<0$	0	$x>0$
Numeratore	+		+
Denominatore	−		+
	−	+	+

4° Punto

Studio della derivata e zone di monotonia.
Determiniamo dove
- $f'(x)$ esiste
- il segno di $f'(x)$ (zeri e segni, cioè $f'(x)=0, f'(x)>0, f'(x)<0$)

Nel nostro caso f è derivabile ovunque per le regole dell'algebretta delle funzioni elementari

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$



$f'(x)=0 \iff x=1$

$f'(x)>0 \iff x\in(1,+\infty)$

$f'(x)<0 \iff x\in(-\infty,0)\cup(0,1)$

tipicamente è importante calcolare il valore della funzione nei punti in cui $f'=0$

$f(1)=\frac{e^1}{1}=e$

Applicazioni: 1 esempio studiare il sup/inf max/min

$$A = \left\{ \frac{e^x}{x} \;\middle|\; x > 0 \right\}$$

Per noi $\Rightarrow$ $\sup A = +\infty$ $\quad$ $\max A =$ NON ESISTE

$\inf A = \min A = e$ $\quad$ $x = 1$ è punto di minimo

Altro esempio

$$B = \left\{ \frac{e^x}{x} \;\middle|\; x \in [-4, -2] \right\}$$

Poiché $f(x) = \frac{e^x}{x}$ ha derivata $f'(x) < 0$ per ogni $x \in [-4, -2]$

$\Rightarrow$ è strett. decrescente

$$\sup B = f(-4) = \frac{e^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4e^4} = \text{MAX } B$$

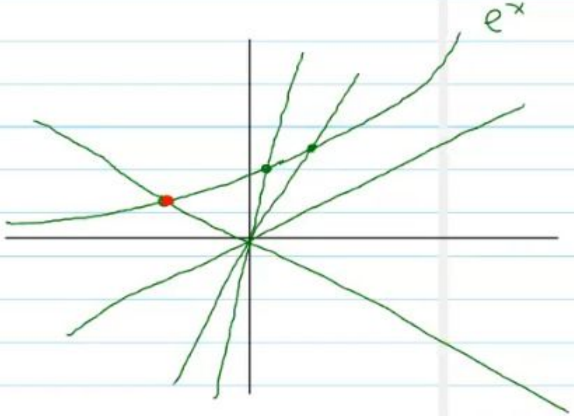
$$\inf B = f(-2) = \frac{e^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2e^2} = \min B$$

(2) Risoluzioni di equazioni:

$$\frac{e^x}{x} = 2020$$

ha 2 soluzioni: una in $(0,1)$ e l'altra in $(1,+\infty)$

Chiederci se $\lambda \in \mathbb{R}$ quali soluzioni possono avere per l'eq $\boxed{e^x = \lambda x}$



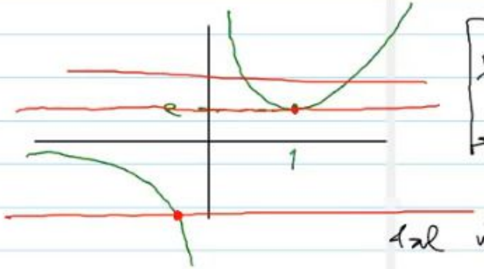
$\boxed{1° \text{ modo}}$ Sovrapposizione dei grafici

Modalità sbagliata, meglio non usare

$\boxed{2° \text{ modo}}$ isolamento del parametro
ridursi a qualcosa del tipo

$$f(x) = \lambda$$

Nel nostro caso $\boxed{\frac{e^x}{x} = \lambda}$



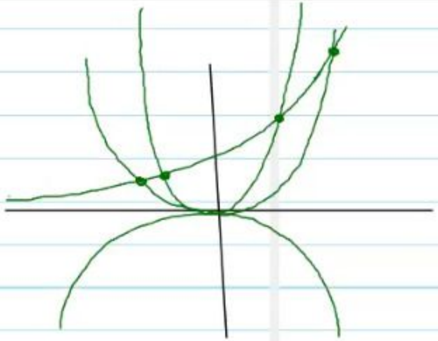
$\lambda < 0$ 1 sol.
$\lambda \in (0,e)$ 0 sol.
$\lambda = e$ 1 sol.
$\lambda > e$ 2 sol.

1 sol in $(-\infty, 0) \cup \{1\}$

Esempio 2

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

$$\boxed{e^x = \lambda x^2}$$



Isoliamo il parametro λ

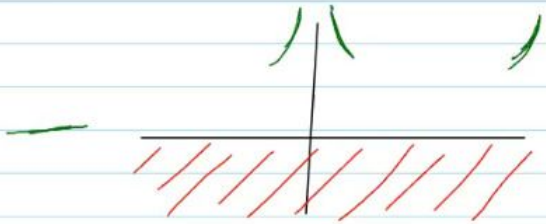
$$\boxed{\frac{e^x}{x^2} = \lambda}$$

$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ studio veloce

$\boxed{1^\circ \text{ PASSO}}$ NO, nessuna simmetria

$\boxed{2^\circ \text{ PASSO}}$ Definita e continua per $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = +\infty$$



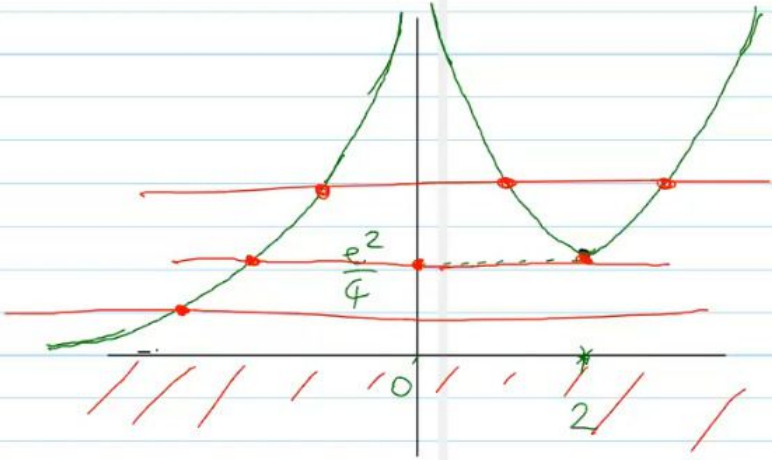
$\boxed{3° \text{ PASSO}}$ Segno e zeri di f

$f(x) > 0$ ovvio

$\boxed{4° \text{ PASSO}}$ Segno di f'

$$f'(x) = \frac{e^x x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x (x-2)}{x^3}$$

		0		2	
e^x	+		+		+
$x-2$	−		−	•	+
x^3	−	•	+		+
	+	+	−	$f'(2)=0$	+
	↗		↘		↗



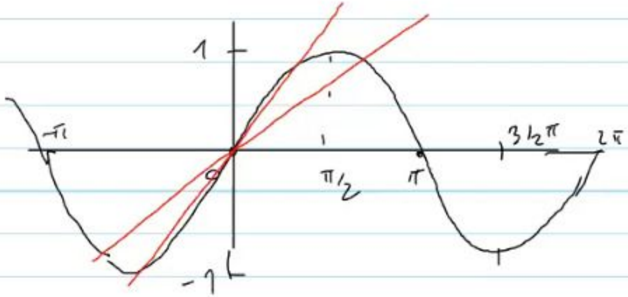
$\lambda \leq 0$ nessuna soluzione

$\lambda \in (0, \frac{e^2}{4})$ 1 soluzione

$\lambda = \frac{e^2}{4}$ 2 soluzioni

$\lambda > \frac{e^2}{4}$ 3 soluzioni

Esempio 3: Risolvere l'eq. $\sin x = x$



sovrapposizione dei grafici è ambigua!

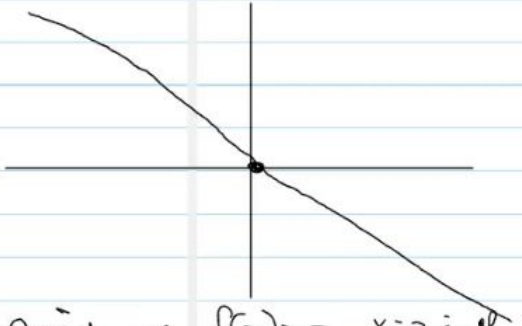
$\Rightarrow$ faccio altro, definisco $f(x) = \sin x - x$ e cerco $\boxed{f(x) = 0}$

Studiare il grafico globale di f

$\boxed{1° \text{ PASSO}}$ f è dispari e non periodica, è suffic. studiare $x > 0$

$\boxed{2° \text{ PASSO}}$ dominio è $\mathbb{R}$, continua, limiti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (\sin x - x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$\Rightarrow$ f è surgettiva per cui almeno una soluzione $\Rightarrow$ $f(0) = 0$ $x = 0$ è sol-

$\boxed{\text{3° PASSO}}$ zeri e segno

$f(x) = 0 \iff$ è equivalente a risolvere il problema

VADO AVANTI

$\boxed{\text{4° PASSO}}$ Derivata e monotonia

$f'(x) = \cos x - 1 \qquad f'(x) = 0 \iff \cos x = 1 \qquad \underline{x = 2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{f'(x) \leq 0 \quad \text{sempre}} \implies f$ è <u>decrescente</u>

ci piacerebbe che fosse strett. decrescente:

Teorema Monotonia 3 si applica perché $f'(x) = 0$ solo in punti isolati $\implies f$ è strett. decrescente.

$\implies f(x) = 0$ ha una sola soluzione perché f è biiettiva su $\mathbb{R}$ $\implies$ $\boxed{x = 0 \text{ è sol. unica}}$

Formula di Taylor con resto di Lagrange ($x_0 = 0$)

$$f(x) = \underbrace{T_n(x)}_{\text{polinomio di Taylor di ordine } n} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{resto di Peano}} \qquad x \to 0$$

$$\Uparrow$$

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

RESTO DI LAGRANGE

Ad essere precisi: Supponiamo f derivabile $n+1$-volte nel suo dominio di definizione.

Dato un punto $x \in \operatorname{dom} f$, esiste un punto c compreso tra 0 e x per cui vale la formula appena scritta

Scriviamo in modo esplicito:

$$f(x) = \boxed{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \qquad x \to 0$$

OSS: $n = 0$ $\quad \underline{f(x)} = f(0) + \frac{f'(c)}{1!} x = \underline{f(0) + f'(c)\, x}$

$[0, x]$ $\quad \boxed{f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)}$

Teorema di Lagrange

$\left(f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \right)$

Generalizziamo la formula con $x_0 \neq 0$

$$f(x) = \underbrace{\boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}}_{\text{"} T_n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad x \to x_0$$

c tra x e x_0

dim: Poniamo

$$g(x) = f(x) - T_n(x)$$

$$g(x_0) = f(x_0) - T_n(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!} 2(x-x_0) - \frac{f'''(x_0)}{3!} 3(x-x_0)^2 + \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(x-x_0)^{n-1}$$

$$g'(x_0) = 0$$

iterando trovo $g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$

$g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \Rightarrow$ voglio dimostrare che $\boxed{\frac{g(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}}$

Lemma: Sia g una funzione tale che $g(0) = g'(0) = g^{(2)}(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0$

Allora esiste c compreso fra x e 0 tale che

$$\boxed{\frac{g(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}}$$

Taylor con resto Lagrange per $x_0 = 0$

dim: Si usa il Teorema di Cauchy

$$\frac{g(x)}{x^{n+1}} = \frac{g(x)-g(0)}{x^{n+1}-0^{n+1}} = \frac{g'(c_1)}{(n+1)\,c_1^n} = \frac{g'(c_1)-g'(0)}{(n+1)(c_1^n-0^n)} = \frac{g''(c_2)}{(n+1)n\,c_2^{n-1}} = \frac{g'(c_2)-g'(0)}{(n+1)n(c_2^{n-1}-0^{n-1})} =$$

ITERANDO

$$= \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

APPLICAZIONE: Ci chiediamo: calcolare $\operatorname{sen}\frac{1}{10}$ in modo approssimato.

Uso Taylor con $n=4$ $\quad T_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$

Invece di scrivere $\sin\frac{1}{10}$ $\quad T_4\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10^3} = \frac{600-1}{6000} = \frac{599}{6000}$

Quanto è buona questa approssimazione ce lo dice il resto di Lagrange.

$$|f(x) - T_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x^{n+1}|$$

$$|f(x) - T_4(x)| = \frac{|f^{(5)}(c)|}{5!} |x^5| \qquad \text{Taylor-Lagrange } n=4$$

$$\left|\sin\frac{1}{10} - \frac{599}{6000}\right| = \frac{|f^{(5)}(c)|}{120} \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{|f^{(5)}(c)|}{12.000.000} \leq \frac{1}{12.000.000}$$

$$f(x) = \sin x \qquad |f^{(5)}(x)| = |\cos x| \leq 1$$

$$\frac{599}{6000} = 0{,}09983333 \qquad \sin\frac{1}{10} = 0{,}0998334\ldots$$

APPLICAZIONE: $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1° modo grafico con quanto fatto nella 1ª parte della lezione

2° modo Taylor-Lagrange per $f=e^x$ con $n=1$ $x_0=0$

$$f(x) = e^x = T_1(x) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{e^c}{2!}x^2 \qquad x \to 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{e^c}{2!}x^2 \qquad x \to 0$$

$\frac{e^c}{2!}x^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \boxed{e^x \geq 1 + x}$$

APPLICAZIONE 3: Dimostrare che la serie di Taylor del coseno converge

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad x \to 0$$

$$\boxed{f(x) \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}$$ SERIE DI TAYLOR

per cui per dimostrare questo è sufficiente dimostrare che

$$0 \leq |f(x) - T_n(x)| \to 0 \qquad n \to +\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x^{n+1}| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \qquad n \to +\infty$$