

1 prime lezioni

insiemi e logica elementare

numeri reali e naturali

2 maggioranti, minoranti, sup e inf

Def

Sia $A \in \mathbb{R}$ non vuoto.

A è **limitato superiormente** se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq M \ \forall x \in A$. M viene definito come **Maggiorante** di A . Se M di A appartiene ad A si dice **massimo** di A , e viene denotato come $\max(A)$

A è **limitato inferiormente** se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq m \ \forall x \in A$. m viene definito come **minorante** di A . Se m di A appartiene ad A si dice **minimo** di A , e viene denotato come $\min(A)$

A si dice **limitato** se è limitato sia inferiormente che superiormente

Def

Siano $A, B \in \mathbb{R}$ non vuoti

- $-A \doteq \{-x \mid x \in A\}$
- $A + B \doteq \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$
- $A - B \doteq \{x - y \mid x \in A, y \in B\}$

Se $x \in \mathbb{R}$

- $x + A \doteq \{x + y \mid y \in A\}$

non importante, skippo

3 lezioni skipgate

Caratterizzazione sup, inf, classi contigue, densità dei razionali

4 Radici, esponenziali reali, funzioni inverse, logaritmi, trigonometriche

Prop - Radici n-esima

per ogni numero nullo positivo a e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un unico numero reale b tale che $b^n = a$. Tale reale positivo è la radice n-esima e si indica con i simboli:

$$\sqrt[n]{a} \doteq a^{\frac{1}{n}}$$

Sia $r \in \mathbb{Q}, r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Allora se $a > 0$:

$$a^r \doteq a^{\frac{p}{q}} \doteq \sqrt[q]{a^p} \quad r \geq 0$$

$$a^r \doteq a^{\frac{p}{q}} \doteq \frac{1}{\sqrt[q]{a^{-p}}} \quad r < 0$$

La radice possiede le stesse proprietà della potenza intera

Se $0 < a < 1$, allora posto $b = \frac{1}{a}$ e definisco:

$$a^x = \frac{1}{b^x}$$

Operazioni tra funzioni

f, g

- Somma: $(f + g)(x) \doteq f(x) + g(x) \quad x \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) \neq \emptyset$
- Prodotto: $(f \times g)(x) \doteq f(x) \times g(x) \quad x \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) \neq \emptyset$
- Rapporto: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) \doteq \frac{f(x)}{g(x)} \quad x \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) \neq \emptyset, g(x) \neq 0$
- Composizione: $(f \circ g)(x) \doteq f(g(x)) \quad \forall x \in A$
- Restrizione: $f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Se prendo $B \subseteq A$ allora la restrizione AB di f è:
 $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}$

Def - funzioni limitate

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, diremo che f è **limitata superiormente** se $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ è limitata superiormente, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$. Analogamente diremo che f è **limitata inferiormente** se $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ è limitata inferiormente, cioè esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq m \quad \forall x \in A$.

La funzione f sarà **limitata** se è limitata inferiormente e superiormente.

Quindi se $f(A)$ è limitata superiormente allora esiste il suo estremo superiore $\sup(f(A))$, ovvero $\sup(f) \doteq \sup(f(A))$. Lo stesso vale per l'opposto ($\inf(f) \doteq \inf(f(A))$).

Se $x_0 \in \text{dom}(A)$ e $f(x_0) = \sup(f)$ si dice che f ammette **massimo assoluto**. Nel caso dell'estremo inferiore, diremo che f ammette **minimo assoluto**.

Def - funzioni monotone

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Allora f è detta:

- Crescente: per ogni coppia $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Strettamente crescente: per ogni coppia $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Decrescente: per ogni coppia $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- Strettamente Decrescente: per ogni coppia $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Le funzioni crescenti e decrescenti vengono definite monotone, mentre quelle strettamente crescenti o decrescenti sono strettamente monotone

Prop

Ogni funzione strettamente monotona è iniettiva

Osservazioni:

se f è iniettiva, non per forza è strettamente monotona, ma vale la negazione: se una funzione non è iniettiva, allora sicuramente non è strettamente monotona.

Def - Funzioni inverse

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e $f : A \rightarrow B$. Se f è biunivoca (iniettiva e suriettiva) allora f è **invertibile** e si chiama funzione inversa di f la funzione $g : B \rightarrow A$ e vale:

$$g \circ f = id(A) \quad (id(x) = x \quad \forall x \in A)$$

La funzione inversa si indica con il simbolo f^{-1}

Def - Funzioni periodiche

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è **periodica** se esiste $t \in \mathbb{R}/\{0\}$ tale che:

$$f(x+t) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

t è detto periodo di f . Il numero $t_0 \doteq \min\{t > 0\}$ è detto, se esiste, **minimo periodo** di f

Def - Polinomi e razionali

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Se $a_n \neq 0$ allora diremo che n è il grado del polinomio. P è definito su tutto \mathbb{R} . I valori $x \in \mathbb{R}$ per cui $P(x) = 0$ sono detti zeri o radici. Se P ha grado n , allora le radici sono al più n numeri reali. P è detto **irriducibile** se non è scrivibile come prodotto di polinomi di grado minore al grado di P . Gli unici polinomi a essere irriducibili sono quelli di 1° grado e quelli di 2° grado con discriminante negativo

Una funzione f è **razionale** se:

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$$

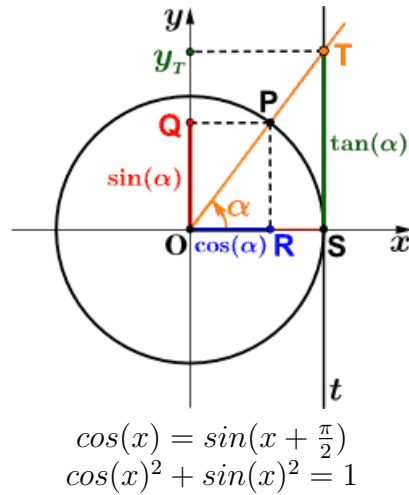
dove $n(x)$ e $d(x)$ polinomi, $dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x) \neq 0\}$.

Se f è razionale e $grad(n) > grad(d)$ allora:

$$f(x) = P(X) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

dove $P(x)$ è polinomio quoziente e $r(x)$ è il resto della divisione

Funzioni trigonometriche e le loro inverse



parità: coseno è pari, infatti $\cos(-x) = \cos(x)$, mentre il seno è dispari perché $\sin(-x) = -\sin(x)$

tangente e cotangente

la tangente, $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, corrisponde alla lunghezza del segmento che cade perpendicolare sull'asse delle x nel punto 1 e che interseca l'estensione del raggio. Il dominio della tangente è $dom(tg) = \mathbb{R}/\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. La cotangente, $ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, invece cade sull'asse delle y nel punto 1.

Sia tangente e cotangente sono funzioni dispari e hanno periodo minimo in π

Inverse

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \arcsin &\doteq (\sin \upharpoonright_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1} \\ \arcsin(\sin(x)) &= x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ \arccos &\doteq (\cos \upharpoonright_{[0, \pi]})^{-1} \\ \arccos(\cos(x)) &= x \quad \forall x \in [0, \pi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arctg : [-1, 1] &\rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \arctg &\doteq (tg \upharpoonright_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1} \\ \arctg(tg(x)) &= x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{arccotg} : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ \text{arccotg} &\doteq (\text{cotg} \upharpoonright_{[0, \pi]})^{-1} \\ \text{arccotg}(\text{cotg}(x)) &= x \quad \forall x \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Esponenziali e logaritmi

Se $a > 0, a^x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow a^x \end{aligned}$$

Se $a = 1$ allora ho la funzione banale $a^x = 1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Se $a \neq 1$ allora $a^x > 0$ quindi è limitato inferiormente e il minimo è 0.

L'esponenziale è bigettiva, quindi invertibile, e la sua funzione inversa è il logaritmo

$$a^y = x \quad y = \log_a(x)$$

Dalle proprietà elementari determiniamo che

- $\log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $a^{\log_a(x)} = x \quad \forall x > 0, x \in \mathbb{R}$

Prop

Valgono le seguenti proprietà:

- $\log_a(x_1 + x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x - 2) \quad x_{1,2} > 0$
- $\log_a(x^\alpha) = \alpha \cdot \log_a(x) \quad x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\log_b(x) = \log_a(x) \cdot \log_b(a) \quad x, a, b > 0, a, b \neq 1$

Il logaritmo se viene indicato come \log è in base 10, mentre \ln se ha come base il numero di nepero

5 Successioni di numeri reali

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N} &\rightarrow a(n) \in \mathbb{R} \quad a(n) = a_n \\ (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots) &\Leftrightarrow (a_n)(a_n)_n(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

I componenti della successione si chiamano **termini** della successione (a_n) , mentre il valore n si dice **indice**.

NB: è importante **non confondere successione e immagine della successione**.

Es: $(a_n) = (2, -2, 2, -2, 2, -2, \dots)$ $imm(a_n) = \{2, -2\}$

Es: $\sqrt{2}$ si avvicina alla successione $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ con $a_n > 0$ e $a_1 = 2$. La differenza tra $\sqrt{2}$ e (a_n) , ossia $|a_n - \sqrt{2}|$ viene inteso come **errore assoluto**

Def

Diremo che una successione **tende** o **converge** ad un certo numero reale l se per quanto piccolo si scelga $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un naturale N per cui tutti i termini della successione con indici $n < N$ approssimano l con un errore minore di ε . In tal caso il numero l si dice **limite** della successione e la convergenza viene descritta con il simbolo:

$$a_n \rightarrow l \quad n \rightarrow \infty$$

La successione converge a $l \in \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tali che:

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > N_\varepsilon$$

Oss: le successioni per cui $a_n \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$ si dicono **infinitesime**

Def - successioni divergenti

Una successione si dice avere limite a $+\infty$ o diverge a $+\infty$ e scriveremo $a_n \rightarrow \infty$ quando, comunque scelto un numero reale, ogni termine della successione da un certo indice in poi è maggiore del numero reale scelto.

In modo formale, per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $N_M \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $n > N_M$ si ha $a_n > M$. Lo stesso si può fare nel caso (a_n) diverge a $-\infty$. Ossia posso dire che $(-a_n)$ diverge a $+\infty$, per cui vale la definizione di prima, ossia, per ogni scelta di $M \in \mathbb{R}$ trovo $N_M \in \mathbb{N}$ per cui ogni $n > N_M$ $-a_n > M$ ossia $A_n < -M$. Anche ora si può scrivere $a_n \rightarrow -\infty$ $n \rightarrow \infty$

Def - Carattere delle successioni

Sia (a_n) successione reale. Se (a_n) ammette limite (finito o infinito) diremo che la successione (a_n) è **regolare**. Se non ammette limite diremo che la successione è **irregolare** o **indeterminata**. Stabilire se (a_n) è regolare o indeterminata vuol dire stabilire il carattere della successione.

Teorema - Unicità del limite

Ogni successione reale regolare ha un solo limite

Definizione topologica di limite

Concetto di intorno

$I_\varepsilon(l) \doteq (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \Rightarrow$ Intorno simmetrico di raggio $\varepsilon > 0$.

Al variare di $\varepsilon > 0$ considero la famiglia degli intorni simmetrici

$$\mathcal{B}_l \doteq \{I_\varepsilon(l) \mid \varepsilon > 0\}$$

\mathcal{B}_l è detta **base di intorni** di $l \in \mathbb{R}$. Posso verificare gli intorni di $\pm\infty$ come gli intervalli $(M, +\infty)$ oppure $(-\infty, M)$ per ogni scelta di $M \in \mathbb{R}$

Teorema - Cambiamento delle variabili

Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente. Allora se (a_n) è regolare vale:

$$\lim a_n = \lim a_{f(n)}$$

Corollario:

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ finito ho:

$$\lim a_{n+k} = \lim a_n$$

Proprietà delle successioni regolari

Limitatezza

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ a(\mathbb{N}) &\subset \mathbb{R} \\ a(\mathbb{N}) &= \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Diremo che (a_n) è **superiormente limitata** se $a(\mathbb{N})$ lo è, ossia esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n < M \forall n \in \mathbb{N}$, e quindi diremo che accetta estremo superiore. Invece (a_n) è **inferiormente limitata** se $a(\mathbb{N})$ lo è, ossia esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $a_n > m \forall n \in \mathbb{N}$, e quindi accetta estremo inferiore. Diremmo che (a_n) è **limitata** se lo è sia inferiormente che superiormente

Prop

Ogni successione convergente è limitata. Ogni successione divergente positivamente è inferiormente limitata e ogni successione divergente negativamente è superiormente limitata

Prop

Se (a_n) è regolare allora $(|a_n|)$ è regolare. Se $(|a_n|)$ è infinitesima allora (a_n) è infinitesima

Monotonia

Def

Sia (a_n) successione reale.

- (a_n) è crescente se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$
- (a_n) è decrescente se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$
- (a_n) è strettamente crescente se $a_n < a_{n+1} \quad \forall n$
- (a_n) è strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1} \quad \forall n$

Teorema

Ogni successione monotona è regolare. in particolare se monotona crescente allora $\lim a_n = \inf(a_n)$

Algebra dei limiti

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R}} &\doteq \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x \in \overline{\mathbb{R}} &\quad -\infty \leq x \leq +\infty \end{aligned}$$

Relazioni indeterminate:

- $\pm\infty \mp \infty$
- $0 \cdot \pm\infty$
- $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $0^0, +\infty^0, 1^{\pm\infty}$

$$a \in \mathbb{R} \quad a + \pm\infty = \pm\infty \quad +\infty^a = +\infty$$

$$a \in \mathbb{R}_+ \quad a \cdot \pm\infty = \pm\infty$$

$$b \in \mathbb{R}_- \quad b \cdot \pm\infty = \mp\infty \quad +\infty^b = 0$$

$$+\infty + \infty = +\infty \quad -\infty - \infty = -\infty$$

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0 \quad +\infty^{-\infty} = 0$$

Prop

Supponiamo (a_n) regolare con $a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Se $l_0 \in \mathbb{R}$ è tale che

$$\lim a_n = l > l_0$$

allora esistono un $N \in \mathbb{N}$ e un numero reale $s > 0$ tali che

$$a_n > s \quad \forall n > N$$

2. Se $l_0 \in \mathbb{R}$ è tale che

$$\lim a_n = l < l_0$$

Allora esistono $N \in \mathbb{N}$ ed un numero reale $s < l_0$ tali che

$$a_n < s \quad \forall n > N$$

Corollario

Sia (a_n) convergente a $l \neq 0$. Allora:

- Se $l > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > \frac{l}{2} \quad \forall n > N$
- Se $l < 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < \frac{l}{2} \quad \forall n > N$
- Esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| > \frac{|l|}{2} \quad \forall n > N$

Teorema - Algebra delle somme

Siano $(a_n), (b_n)$ successioni regolari, allora:

1.

$$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$$

qualora il secondo membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$

2.

$$\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$$

qualora il secondo membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$

Teorema - Prodotto di limiti per infinitesima

Siano (a_n) infinitesima e (b_n) limitata. Allora $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$ è infinitesima

Teorema - Algebra dei prodotti

Siano $(a_n), (b_n)$ regolari. Allora si ha:

$$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$$

qualora in secondo membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$

Teorema - Limite dei reciproci

Sia (a_n) regolare $a_n \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$. Sia hanno i seguenti casi:

- Se $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$ allora

$$\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$$

- Se $a = 0$ e $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ allora

$$\frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$$

- Se $a = 0$ e $a_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ allora

$$\frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty$$

Teorema - Algebra dei rapporti

Supponiamo $(a_n), (b_n)$ regolari. Allora se $b_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

qualora il secondo membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$

Corollario

$$\lim R(a_n) = \lim \frac{P(a_n)}{Q(a_n)} = \frac{\lim P(a_n)}{\lim Q(a_n)} = \frac{P(a)}{Q(a)} = R(a)$$

Lemma

Consideriamo le successioni $(e_n), (E_n)$ di termini generici:

$$e_n = (1 + \frac{1}{n})^n \quad E_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

Sono vere le seguenti affermazioni:

1. $1 < e_n < E_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. (e_n) è strettamente crescente
3. (E_n) è strettamente decrescente

Def - Numero di Nepero

$$e \cdot \lim (1 + \frac{1}{n})^n$$

Def

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$. Allora diremo che f è **CPS** in a se per ogni successione (a_n) , con $a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$, convergente ad a si ha

$$\lim f(a_n) = f(a)$$

Se tale proprietà vale $\forall a \in A$ diremo che f è CPS (in A)

Oss: Definizione poco pratica

$$\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$$

$$A \subseteq \text{dom}(f)$$

Lemma

Sono CPS nei loro domini naturali le seguenti funzioni

- la funzione identica id
- funzioni affini: $a \in \mathbb{R} \quad F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x) \doteq x + a$
- valore assoluto
- polinomi e razionali
- la funzione reciproca: $x \rightarrow \frac{1}{x}$
- potenze razionali: $x \rightarrow x^t$ con $t \in \mathbb{Q}$

Confronti e stime asintotiche

$$a_n \quad (b_n)$$

$$a_n \rightarrow \pm\infty \quad b_n \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \rightarrow (a_n) \text{ è infinito di ordine inferiore di } (b_n) \\ l \in \mathbb{R}/\{0\} & \rightarrow (a_n) \text{ ha lo stesso ordine d'infinito di } (b_n) \\ \pm\infty & \rightarrow (a_n) \text{ è infinito di ordine maggiore di } (b_n) \\ \nexists & \rightarrow \text{non posso dire nulla} \end{cases}$$

$$a_n \rightarrow 0 \quad b_n \rightarrow 0$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \pm\infty & \rightarrow (a_n) \text{ è infinitesimo di ordine inferiore di } (b_n) \\ l \in \mathbb{R}/\{0\} & \rightarrow (a_n) \text{ è infinitesimo dello stesso ordine di } (b_n) \\ 0 & \rightarrow (a_n) \text{ è infinitesimo di ordine maggiore di } (b_n) \\ \nexists & \rightarrow \text{non posso dire nulla} \end{cases}$$

Con $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$ dirò che (a_n) è **asintotica** a (b_n) e indicheremo con il simbolo $(a_n) \sim (b_n)$

Prop

Valgono i seguenti fatti:

- Se $a_n \sim B_n$, le successioni hanno lo stesso carattere
- Se $a_n \sim b_n \sim \dots \sim c_n \Rightarrow a_n \sim b_n$
- una espressione composta da un prodotto o quoziente di più fattori può essere stimata fattore per fattore:

$$a_n \sim a_n^I \quad b_n \sim b_n^I \quad c_n \sim c_n^I \Rightarrow \frac{a_n b_n}{c_n} \sim \frac{a_n^I b_n^I}{c_n^I}$$

Teorema - Criterio del rapporto

Sia (a_n) con $a_n > 0 \quad n \in \mathbb{N}$. Se esiste

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora

- Se $l < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$
- Se $l > 1$ (incluso $l = +\infty$) $\Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$
- Se $l = 1$ non posso dire nulla

65

Teorema - Gerarchia degli infiniti

Vale la seguente lista di risultati:

1. $\lim \frac{\log a^n}{n^\alpha} = 0 \quad \forall a > 1, \forall \alpha > 0$
2. $\lim \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$
3. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$
4. $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

$$+\infty^0 = \lim \sqrt[n]{n} = \lim n^{\frac{1}{n}} = \lim e^{\frac{1}{n} \log(n)} = e^0 = 1$$

$$0 < x = e^{\log(x)} = a^{\log_a(x)}$$

Formula di Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$$

6 Limiti di funzioni

Def

Si dice che

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \in \mathbb{I}}} f(x) = l$$

Se per ogni successione (x_n) con $x_n \in \mathbb{I}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ per cui $x_n \rightarrow c$ $n \rightarrow \infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l$ $n \rightarrow +\infty$

Con $c \in \overline{\mathbb{R}}$:

- Se $c \in \mathbb{R}$ $U_c(\delta) = (c - \delta, c + \delta)$
- se $c = \pm\infty$ $U_{\pm\infty}(\delta) = (\delta, +\infty)$ oppure $(-\infty, \delta)$

Def

Diremo che una funzione f ha una certa proprietà **definitivamente** per $x \rightarrow c$ se esiste un intorno U di c tale che la proprietà di $f^{(x)}$ vale per ogni $x \in U$, $x \neq c$

Def - Limite in senso topologico

Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia f una funzione definita almeno definitivamente per $x \rightarrow c$. Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

se per ogni intorno U_l esiste un intorno di c , V_c tali che per ogni $x \in V_c$, $x \neq c$, allora $f(x) \in U_l$

Teorema - Teorema del ponte

Siano $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo di \mathbb{R} non degenerare, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$ allora

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

se e solo se per ogni successione (x_n) per cui $x_n \in I$ con $x_n \neq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$ per cui $x_n \rightarrow c$ $n \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l$ $n \rightarrow +\infty$

4 possibilità caratterizzate dalla scelta di c e l

Limite finito all'infinito

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

$$c = +\infty, l \in \mathbb{R}.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \text{ tali che } \forall x \text{ per cui } x > K \text{ allora } |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$c = -\infty, l \in \mathbb{R}.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \text{ tali che } \forall x \text{ per cui } x < -K \text{ allora } |f(x) - l| < \varepsilon$$

Queste tipologie di limite caratterizza le cosiddette rette asintotiche orizzontali o **asintoti orizzontali** delle funzioni

Def

Se $l \in \mathbb{R}$ $c \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice che

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l^+ \quad (\text{rispettivamente } l^-)$$

se per ogni successione (x_n) con $x_n \in I$ $x_n \neq c$ e $x_n \rightarrow c$ $n \rightarrow +\infty$ si ha che $f(x_n) \rightarrow l^+$ per $n \rightarrow +\infty$ se e solo se $f(x_n) \geq l$ definitivamente (convergenza per **eccesso** (l^+) o per **difetto** (l^-))

Limite finito all'infinito

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

$$c = +\infty, l = +\infty.$$

$$\forall H > 0 \exists K > 0 \text{ tali che } \forall x \text{ per cui } x > K \text{ allora } f(x) > H$$

$$c = +\infty, l = -\infty.$$

$$\forall H > 0 \exists K > 0 \text{ tali che } \forall x \text{ per cui } x > K \text{ allora } f(x) > -H$$

$$c = -\infty, l = +\infty.$$

$$\forall H > 0 \exists K > 0 \text{ tali che } \forall x \text{ per cui } x < -K \text{ allora } f(x) > H$$

$$c = -\infty, l = -\infty.$$

$$\forall H > 0 \exists K > 0 \text{ tali che } \forall x \text{ per cui } x < -K \text{ allora } f(x) < -H$$

Può accadere che in questi casi esistono **asintoti obliqui**

Def

Si dice che la funzione f ha asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$ $m \neq 0$ per $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) se accade che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0 \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0)$$

Prop

La funzione f ammette asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q$

Limite infinito al finito

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

$$c \in \mathbb{R}, l = +\infty.$$

$$\forall H > 0 \exists \delta > 0 \text{ tali che } \forall x \text{ per cui } 0 < |x - c| < \delta \text{ allora } f(x) > H$$

$$c \in \mathbb{R}, l = -\infty.$$

$$\forall H > 0 \exists \delta > 0 \text{ tali che } \forall x \text{ per cui } 0 < |x - c| < \delta \text{ allora } f(x) < -H$$

Si possono specificare nel caso in cui $c \in \mathbb{R}$ i limiti destro e sinistro:

- $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$ per cui $x > c$
- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$ per cui $x < c$

Def

Si dice che f ha **asintoto verticale** di equazione $x = c \in \mathbb{R}$ se accade che

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty \text{ oppure } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

o rispettivamente a seconda dei casi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) &= +\infty \text{ oppure } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= +\infty \text{ oppure } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

Limite finito al finito

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che per ogni x per cui $0 < |x - c| < \delta$ allora

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Def

Diremo che c è un **punto di discontinuità** per la funzione f quando i limiti destro e sinistro di f per $x \rightarrow c$ esistono e sono diversi

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \text{salto di } f \text{ in } c$$

NB: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ non esiste

Calcolo dei limiti

Teorema - Criterio del confronto

Se per $x \rightarrow c$ ho $f(x) \rightarrow l$, $g(x) \rightarrow l$ e si ha che vale $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \rightarrow c$ allora $h(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow c$

Corollario

Se per $x \rightarrow c$ si ha $g(x) \rightarrow 0$ e $|h(x)| \leq g(x)$ definitivamente per $x \rightarrow c$ allora $h(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow c$

Corollario

Se $f(x) \rightarrow 0$ $x \rightarrow c$ e $g(x)$ è limitata definitivamente per $x \rightarrow c$ allora $f(x)g(x) \rightarrow 0$ $x \rightarrow c$

Teorema - Permanenza del segno

- Se $f(x) \rightarrow l > 0$ per $x \rightarrow c$ allora si ha che $f(x) > 0$ definitivamente per $x \rightarrow c$
- se $f(x) \rightarrow l$ e $f(x) \geq 0$ per $x \rightarrow c$ allora $l \geq 0$
- Se f è asintotica in c e $f(c) > 0$ allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \rightarrow c$

Teorema - Algebra dei limiti

Se f e g sono due funzoini definite almeno rispettivamente per $x \rightarrow c$ e $f(x) \rightarrow l_1$ e $g(x) \rightarrow l_2$ per $x \rightarrow c$ allora

$$\begin{aligned} f \pm g &= l_1 \pm l_2 \quad x \rightarrow c \\ f \cdot g &= l_1 \cdot l_2 \quad x \rightarrow c \\ \frac{f}{g} &= \frac{l_1}{l_2} \quad x \rightarrow c \end{aligned}$$

Teorema - Cambio delle variabili

Siano f, g funzioni tali che sia ben definito $f \circ g$ almeno definitivamente per $x \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e supponiamo che

- $g(x) \rightarrow t_0$ per $x \rightarrow x_0$ con $g(x) \neq t_0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$
- esiste $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$

Limiti notevoli

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} &\Rightarrow 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &\Rightarrow \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} &\Rightarrow 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} &\Rightarrow 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} &\Rightarrow 1 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &\Rightarrow e \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} &\Rightarrow 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &\Rightarrow 1 \end{aligned}$$

Def - Prolungamento per continuità

Se f non è definita in $x = c$ ma esiste

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

allora la funzione può essere **estesa per continuità** ponendo $f(c) \doteq l$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq c \\ l & x = c \end{cases}$$

Confronti e stime asintotiche

Def

Si dice che 2 funzioni f, g sono **asintotiche** per $x \rightarrow c$ se

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\hat{f}(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive $f \sim g$

Teorema - Gerarchia degli infiniti

Si possono dimostrare i seguenti limiti validi per $\alpha, \beta > 0$ $a, b > 1, \delta$ qualunque

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta (-\log(x))^\delta = 0$

7 Limiti e tecnologia dell'ò piccolo

Def

Si dice che f è **o piccolo** di g per $x \rightarrow x_0$ e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

se esiste una funzione $w(x)$ tale che

$$\begin{aligned} f(x) &= w(x)g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} w(x) &= 0 \end{aligned}$$

Def - Quasi equivalente

supponiamo che $g(x) \neq 0$ almeno definitivamente in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ allora

$$w(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Proprietà algebriche dell'ò piccolo

$$f_1(x) = o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0 \quad f_2(x) = o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

- $f_1 + f_2$:

$$f_1(x) + f_2(x) = w_1(x)g(x) + w_2(x)g(x) = g(x)(w_1(x) + w_2(x))$$

quindi

$$o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

- $f_1 - f_2 :$

$$f_1(x) + f_2(x) = g(x)(w_1(x) - w_2(x))$$

$$o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

- cf_1

$$cf_1(x) = cw_1(x)g(x)$$

$$c \cdot o(g(x)) = o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

- $f_1 \cdot f_2$

$$f_1(x)f_2(x) = w_1(x)w_2(x)g^2(x)$$

$$o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g^2(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

- $\frac{f_1}{f_2}$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{0}{0} = ?$$

Transitività di o piccolo

Se $f(x) = o(g(x))$ $x \rightarrow x_0$ e $g(x) = o(h(x))$ $x \rightarrow x_0$ allora

$$f(x) = o(h(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

altre proprietà

$$f(x) = o(g_1(x) + g_2(x)) = o(g_1(x)) + o(g_2(x))$$

$$f(x) = o(c \cdot g(x)) = o(g(x))$$

Teorema - Cancellazione

Se $f_1(x) = o(f(x))$ $g_1(x) = o(g(x))$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Sviluppi per $x \rightarrow 0$

$$\begin{array}{llll} \sin(x) & 0 & x + o(x) & \left| \begin{array}{ll} \arctg(x) & = & x + o(x) \\ \arcsin(x) & = & x + o(x) \\ \cos(x) & 0 & 1 + o(x) & \left| \begin{array}{ll} \cos(x) & = & 1 - \frac{x^2}{2} + o(x) \\ \log(1+x) & = & x + o(x) \end{array} \right. \end{array} \right. \\ tg(x) & 0 & x + o(x) & \\ e^x & 0 & 1 + x + o(x) & \end{array}$$

Oss: $x^\alpha = o(x^\beta)$ $\forall \alpha > \beta$ $x \rightarrow 0$

Def - Equivalenza asintotica

Si dice che f è **asintoticamente equivalente** a g per $x \rightarrow 0$ e si scrive $f(x) \sim g(x)$ $x \rightarrow x_0$ se esiste una funzione w tale che

$$f(x) = w(x)g(x)$$

con

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 1$$

Def - Quasi equivalente

Se $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ (tranne al più di x) allora $f(x) \sim g(x) \quad x \rightarrow x_0$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

8 Derivabilità e differenziabilità

Def

Si dice che f è **differenziabile** in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad h \rightarrow 0$$

In tal caso α è detto **differenziale** di f in x_0

Teorema

Una funzione f è differenziale in x_0 se e solo se f è derivabile in x_0 . Inoltre, se questo è vero, allora $\alpha = f^I(x_0)$

Teorema

Ogni funzione f derivabile in x_0 è continua in x_0

Regole della derivazione e derivate di funzioni elementari

$$\begin{array}{lcl} (\text{costante})^I & = & 0 \\ (e^x)^I & = & e^x \\ (a^x)^I & = & a^x \cdot \log(a) \\ (\log(x))^I & = & \frac{1}{x} \\ (\sin(x))^I & = & \cos(x) \\ (\cos(x))^I & = & -\sin(x) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} (\arctg(x))^I & = & \frac{1}{1+x^2} \\ (\arcsin(x))^I & = & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arccos(x))^I & = & -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (tg(x))^I & = & \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + tg^2(x) \\ (x^\alpha)^I & = & \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcl} (f \pm g)^I & = & f^I \pm g^I \\ (f \cdot g)^I & = & f^I g + f g^I \\ \left(\frac{f}{g}\right)^I & = & \frac{f^I g - f g^I}{g^2} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} (\alpha f)^I & = & \alpha f^I \\ \left(\frac{1}{f}\right)^I & = & -\frac{f^I}{f^2} \\ (f(g(x)))^I & = & f^I(g(x)) \cdot g^I(x) \end{array} \right.$$

$$(f(x))^{g(x)} = f^g(g^I \ln(f) + \frac{g+f^I}{f})$$

Se f e g sono inverse una dell'altra: $g^I(x) = \frac{1}{f^I(g(x))}$

9 De L'Hôpital e Taylor

Teorema di de l'hôpital

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Supponiamo che

- Al netto delle condizione sopra le quali i rapporti $\frac{f}{g} > \frac{f^I}{g^I}$ esistono in un opportuno intorno di x_0
- il limite sia del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- esiste in $\overline{\mathbb{R}}$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^I(x)}{g^I(x)}$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^I(x)}{g^I(x)}$$

Operativamente: eseguo il limite e controllo che sia del tipo indefinito, poi eseguo il limite delle derivate. Se quest'ultimo non esiste, non posso dire nulla del primo limite. Se esiste in $\overline{\mathbb{R}}$, tutto ok. Se è ancora del tipo indeterminato allora riapplico l'hôpital

Teorema di Taylor

Possiamo approssimare una funzione $f(x)$ con un polinomio $P_n(x)$ di grado $P \leq n$ con $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad x \rightarrow 0$$

Sia $\delta > 0$ e sia $f : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che

- f è derivabile in $(-\delta, \delta)$ $n - 1$ volte
- f è derivabile n -volte in $x = 0$

Allora esiste il polinomio di Taylor $P_n(x)$ ed è dato dalla seguente formula

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Lemma - Formula di Taylor con resto di Peano

Se il polinomio di Taylor esiste allora è unico

Oss: Formula di Taylor-Mc Laurin

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o(x^n) \quad f^{(0)}(0) = f(0)$$

Sviluppi di Taylor per funzioni elementari

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \arctg(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots\end{aligned}$$

\Downarrow

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^k) \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1}) \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k}) \\ \log(1+x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{(k)!} + o(x^k) \\ \arctg(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})\end{aligned}$$

Formula di Taylor con centro qualunque

Siano $\delta > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $f = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

- f abbia derivate di ordine $n-1$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
- f abbia derivate di ordine n in x_0

Allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$$

Possiamo scrivere anche $x - x_0 = h \rightarrow 0$ se $x \rightarrow x_0$

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (h)^k + o((h)^k)$$

Operazioni con i polinomi di Taylor

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

Somma

$$S(x) = f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n)$$

Prodotto per costante

$$a \cdot f(x) = a \cdot P_n(x) + o(x^n)$$

Prodotto per funzioni

$$P(x) = f(x)g(x) = P_n(x)Q_n(x) + o(x^n)$$

Composizione di funzioni

Ho varie possibilità

$$f(ax) = P_n(ax) + o(x^n)$$

$$f(x^a) = P_n(x^a) + o(x^{an})$$

Composizioni

$$f(g(x)) = P_n(Q_n(x)) + o(x^n)$$

10 Funzioni iperboliche

$$\text{Seno iperbolico } \sinh(x) \doteq \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{Coseno iperbolico } \cosh(x) \doteq \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{Tangente iperbolica } \tanh(x) \doteq \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Il coseno iperbolico è pari, mentre seno e tangente iperbolica sono dispari

Derivate

$$(\sinh(x))^I = \cosh(x)$$

$$(\cosh(x))^I = \sinh(x)$$

$$(\tanh(x))^I = 1 - (\tanh(x))^2 = \frac{(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2}{(\cosh(x))^2}$$

Sviluppi di Taylor

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Relazione iperbolica fondamentale

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$$

Formule di duplicazione

$$\sinh(2x) = 2 \cdot \sinh(x) \cosh(x)$$

Monotonia

$\sinh(x)$ è strettamente crescente, lo stesso vale per $\cosh(x)$ con $x \geq 0$

Inverse

l'inversa del seno iperbolico è il settore seno iperbolico:

$$\text{settsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$$

il settore coseno iperbolico è

$$\text{settcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

e il settore tangente iperbolica

$$\text{setttanh}(x) = \log\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

11 Comportamento globale delle funzioni

Punto 1 - Vedere la simmetria

Punto 2 - Insieme di definizione, limiti agli estremi

Punto 3 - zeri e segno

Cerco di risolvere $f(x) = 0, f(x) > 0, f(x) < 0$

Punto 4 - Studio della derivata e zone di monotonia

Determinare se $f'(x)$ esiste e il suo segno

12 Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(x) + o(x^n) \\ &\Downarrow \\ f(x) &= T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \end{aligned}$$

Lemma

Sia g una funzione tale che $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0$. Allora esiste c compreso tra x e 0 tale che

$$\frac{g(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

13 Primitive

Def

Sia $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo qualsiasi, ma **primitiva** per f in I è una funzione $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I tale che $F' = f$.

L'insieme di tutte le primitive per f in I si denota con il simbolo D_f^{-1}

$$D_f^{-1} \doteq \{F : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f'(x) = f(x) \quad \forall x \in I\}$$

Oss: Se F e G sono due primitive di f in I allora

$$\begin{aligned} F' = f = G' &\Rightarrow F = G + c \\ &\text{quindi} \\ D_f^{-1} &\doteq \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Oss: se f è continua, allora $D^{-1}f \neq \emptyset$

Tabella di primitiva

$f(x)$	I	$F(x)$	
$x^n \quad (n \neq -1)$	se $n > 0, \mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$(x^{n+1})' = (n+1)x^n$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$(0, +\infty)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha$
e^x	\mathbb{R}	e^x	
$a^x \quad (a > 0)$	\mathbb{R}	$\frac{a^x}{\ln a}$	$(a^x)' = \log_a a^x$
$\frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$\ln x $	
$\sin(x)$	\mathbb{R}	$-\cos(x)$	
$\cos(x)$	\mathbb{R}	$\sin(x)$	
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$	$\tan(x)$	
$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$(0, \pi) + k\pi$	$\cot(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$	$\arcsin(x)$	$(\sin^{-1}(x))'$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	\mathbb{R}	$\frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$	
$\sinh(x)$	\mathbb{R}	$\cosh(x)$	
$\cosh(x)$	\mathbb{R}	$\sinh(x)$	
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	\mathbb{R}	$\tanh(x)$	$(\tanh(x))'$
$\frac{1}{1-x^2}$	$ x < 1$	$\operatorname{arctanh}(x)$	$(\tanh^{-1}(x))'$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	\mathbb{R}	$\operatorname{arcsinh}(x)$	$(\sinh^{-1}(x))'$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x > 1$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$(\cosh^{-1}(x))'$

Proprietà delle primitive - Linearità della derivazione

$$(f + g)' = f' + g' \quad (D(af + bg) = aDf + bDg)$$

Teorema - linearità delle primitive

Siano $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli. Assumiamo che $D^{-1}f \neq \emptyset \neq D^{-1}g$. Allora

$$D^{-1}(af + bg) = aD^{-1}f + bD^{-1}g$$

Teorema - Calcolo per parti

Siano $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, derivabili nell'intervallo I , tali che $D^{-1}(f^I g) \neq \emptyset \neq D^{-1}(f g^I)$. Allora si ha

$$D^{-1}(f^I g) = f g - D^{-1}(g^I f)$$

Teorema - Calcolo per sostituzione

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $f : J \rightarrow \mathbb{R}, g : I \rightarrow J$ tutte le funzioni derivabili laddove definite con $D^{-1}f \neq \emptyset$. Allora se $F \in D^{-1}f$ si ha

$$D^{-1}(f \circ g \cdot g^I) = \{F \circ g + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Oss: leibniz usava $\int f(x)dx \equiv D^{-1}(f)$

Casi tipici

Linearità, riscalamenti, traslazioni

Se $F^I(x) = f(x) \quad \forall x \in I$ allora una primitiva di $af(bx+c)$ è data da $F(bx+c) \cdot \frac{a}{b}$

Sostituzione

Se l'integrando è nella forma $f \circ g \cdot g^I$ e conosco $F \in D^{-1}f$ allora la primitiva è $F \circ g$

Integrazione per parti

$$\begin{aligned} (fg)^I &= f^I g + f g^I \\ &\Downarrow \\ D^{-1}(f^I g) &= f g - D^{-1}(f g^I) \end{aligned}$$

Strategia generale per integrare funzioni razionali

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{grad}(P) = n \quad \text{grad}(Q) = m$$

1. Se $n \geq m$ allora faccio subito la divisione di polinomi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

2. Uso il teorema fondamentale dell'Algebra, cioè che un polinomi $Q(x)$ ammette questa fattorizzazione

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_r)^{k_r} ((x - u_1)^2 + v_1^2)^{m_1} \cdot \dots \cdot ((x - u_c)^2 + v_c^2)^{m_c}$$

3. Formula di Hermite

$$\tilde{Q}(x) = (x - x_1)^{k_1-1} \cdot \dots \cdot (x - x_r)^{k_r-1} ((x - u_1)^2 + v_1^2)^{m_1-1} \cdot \dots \cdot ((x - u_c)^2 + v_c^2)^{m_c-1}$$

NON SI CAPISCE UN CAZZO CI RITORNO DOPO

Cambio delle variabili

Supponiamo che la funzione $g : I \rightarrow J$ abbia l'inversa $g^{-1} : J \rightarrow I$. Dalla formula del teorema di sostituzione possiamo dedurre se $\hat{F} \in D^{-1}(f \circ g \cdot g^I) \Rightarrow \hat{F} \mid_{x=g^{-1}(y)} = \hat{F} \circ g \in D^{-1}f$

$$\begin{aligned} \int (f \circ g)(x) \frac{dy(x)}{dx} dx \mid_{x=g^{-1}(y)} &= \int f(y) dy \\ &\Downarrow \\ \int f(y) dy &= \int f(y(x)) \frac{dy}{dx} dx \mid_{x=g^{-1}(y)} \end{aligned}$$

14 Integrazione

Integrazione alla Riemann (Cauchy)

Notazioni

Per la teoria di integrazione propria

- Zona di integrazione, o intervallo $[a, b]$
- funzione integranda $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(X) dx$$

$$\int_a^b c dx$$

Oss:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(X) dx = - \int_b^a f(X) dx$$

Significato geometrico

L'integrale corrisponde al numero reale che rappresenta l'area con segno della zona che è racchiusa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse

Definizione dell'integrale

- Caso banale o semplice:
 $f(x) = \lambda$, cioè una funzione costante.

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot \lambda$$

- Caso quasi semplice:
 $f(x)$ è costante a tratti. quindi corrisponde alla somma delle varie aree che compongono la funzione
- Caso generale:
Sia $f(x)$ una funzione limitata generica. Definiamo un integrale superiore e uno inferiore a intervalli molto ristretti e ripetuti

ANCHE QUESTO LO SALTO PERCHÈ È SCRITTO DA CANI

Teorema

Per ogni funzione limitata f su $[a, b]$ si ha che l'integrale superiore e l'integrale inferiore esistono sempre e vale

$$I^-(f, [a, b]) \leq I^+(f, [a, b])$$

Def

Diremo che la funzione limite $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è **integrabile** in $[a, b]$ se

$$I^-(f, [a, b]) = I^+(f, [a, b])$$

Teorema

Abbiamo che $I^+ = I^-$ e dunque la corrispondente funzione è integrabile in $[a, b]$ in tutti i casi seguenti: se la funzione è monotona, se la funzione è continua e se la funzione è continua a tratti, ossia è continua ovunque tranne in un numero finito di punti

Proprietà degli integrali

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)$$

$$\int_a^b \lambda f(x) = \lambda \int_a^b f(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)$$

Criterio di integrabilità

Una funzione f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ trovo due funzioni a gradino ϕ, ψ tali che

$$\phi(x) \geq f(x) \geq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

per le quali

$$\int_a^b (\phi(x) - \psi(x))dx \leq \varepsilon$$

Oss: Per calcolare gli integrali vengono usate le primitive

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Funzione integrale

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Teorema - Media integrale

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$ e continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

Teorema - Teorema fondamentale della teoria dell'integrazione

La funzione integrale Φ è una primitiva per f in $[a, b]$

15 Integrazione generalizzata, o impropria

L'integrazione propria richiede un intervallo limitato e una funzione integranda limitata. Una integrazione impropria è quando almeno una delle due condizioni non è soddisfatta. Generalmente ci si riduce a situazioni in cui è presente solo uno dei problemi legati alla limitatezza, ossia quando la zona di integrazione non è limitata, quindi in intervalli come $(-\infty, a]$ oppure $[a, +\infty)$, oppure integranda non limitata in uno degli estremi di integrazione di intervallo limitato $[a, b]$

Integrali del 1° tipo

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \doteq \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx$$

Integrali del 2° tipo

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Riassumendo ho 4 possibilità per ogni tipologia di integrazione

- L'integrale converge ad un numero reale
- L'integrale diverge positivamente ($\rightarrow +\infty$)
- L'integrale diverge negativamente ($\rightarrow -\infty$)
- l'integrale non converge né diverge, il limite non esiste

Praticamente se ho integrali del 1° o 2° secondo tipo spezzo l'integrazione, studio i singoli pezzi e deduco il comportamento complessivo

Integrando $f(x) \geq 0$ uso il confronto o il confronto asintotico (caso standard e casi limiti)

Integrando f segno qualsiasi

- assoluta integrabilità
- integrazione per parti
- metodo triangolini

1° Caso - Integrando $f(x) \geq 0$

L'integrale improprio di f può solo convergere o divergere positivamente

Criterio del confronto: supponiamo di avere un intervallo generico $E \in \mathbb{R}$ e che $\forall x \in E$ si abbia $g(x) \geq f(x) \geq 0$. Allora valgono le seguenti implicazioni

$$\begin{aligned} \text{Se } 0 \leq \int_E g(x)dx < +\infty &\Rightarrow \int_E f(x)dx < +\infty \\ \text{Se } 0 \leq \int_E f(x) = +\infty &\Rightarrow \int_E g(x)dx = +\infty \end{aligned}$$

Criterio del confronto asintotico

$$\int_E f(x)dx \quad \int_E g(x)dx$$

Supponiamo $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ in E , e supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0, \pm\infty$. Allora gli integrali hanno lo stesso comportamento, cioè il primo integrale converge se e solo se converge il secondo

STA DIVENTANDO UN CASINO, NON SI CAPISCE NIENTE, JUMPO

16 Numeri complessi

$$z = a + bi \Rightarrow (a, b) = (Re(z), Im(z))$$

Algebra

$$z = a + bi \quad w = c + di$$

$$z + w = (a + c, b + d)$$

$$z \cdot w = (ac - bd, bc + ad)$$

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$$

Complesso coniugato

$$\bar{z} = (a, -b)$$

Modulo del complesso

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Forme

- Algebrica: $z = a + bi$
- Trigonometrica: $z = r(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{r}$$

a è asse delle ascisse (x), b è asse delle ordinate (y), r la distanza tra (a, b) e 0 e θ l'angolo

- Gaussiana: $z = (a, b)$
- Esponenziale: $z = re^{i\theta}$
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$$
$$\bar{z} = re^{-i\theta} \quad e^{i\pi} = -1$$

Proprietà

$$\begin{array}{ll} \overline{(\bar{z})} = z & \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \\ \overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w} & \overline{\frac{1}{w}} = \frac{1}{\bar{w}} \\ z \cdot \bar{z} = |z|^2 & |\lambda z| = |\lambda| |z| \\ \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \end{array}$$

Esponenziale

$$z = re^{i\theta}$$

r è chiamato modulo, mentre θ è chiamato argomento

Proprietà

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$z^n = [re^{i\theta}]^n = r^n e^{in\theta}$$

$$r = |z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta \in [-\pi, \pi] \quad CE : n \geq 0$$

Procedimento:

1. grafico
2. calcolo arcotangente (\arctan)
3. percorso mancante

17 Equazioni differenziali ordinarie

Sono equazioni che legano una funzione incognita $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow u(t)$ con alcune delle sue derivate

Oss: Oltre ad avere la funzione $u(t)$ come incognita anche il dominio di $u(t)$ è un'incognita

Def

Si dice **ordine** di una EDO il massimo ordine di derivazione presente nell'equazione. in modo molto astratto una EDO si presenta nella forma

$$\Phi(u^{(n)}(t), u^{(n-1)}(t), \dots, u^I(t), u(t), t) = 0$$

Def

Si dice una EDO in forma **normale** se la derivata di ordine massimo dell'equazione è ricavata rispetto al resto. Per una EDO di ordine n vuol dire:

$$u^{(n)}(t) = F(u^{(n-1)}(t), \dots, u(t), t)$$

Def

Una EDO si dice **autonoma** se la variabile t compare solo come argomento della funzione incognita u . Altrimenti si dice **non autonoma**

3 tipi di EDO

EDO di 1° ordine a variabili separabili

Noi sappiamo che in forma normale

$$u^I = F(u, t)$$

$$F(u, t) = f(t)g(u)$$

Fatto generale: tutte le EDO di 1° ordine in forma normale autonome si scrivono nella forma $u^I = g(u) = 1 \cdot g(u)$

Def

Una EDO si dice **lineare** se la funzione incognita u e le sue derivate compaiono al 1° grado e non all'interno di funzioni, ossia nella forma

$$\sum_{k=0}^n a_k(t)u^{(k)} = f(t) \quad (f(t) \rightarrow \text{termine noto})$$

Una EDO è detta **omogenea** se il termine noto è 0

Def

Una EDO lineare si dice a **coefficienti costanti** se i coefficienti $a_n(t), \dots, a_0(t)$ sono tutte funzioni numeriche, ossia costanti

EDO lineare del 1° ordine

$$a_1(t)u^I + a_0(t)u = f(t)$$

Se $a_1(t) \neq 0$ allora divido per $a_1(t)$ e ottengo

$$u^I + a(t)u = b(t)$$

EDO lineari di ordine k a coefficienti costanti e non omogenee

$$\sum_{j=0}^k a_j u^{(j)} = f(t)$$

Fatto generale: Una EDO di ordine k ha come soluzione generale una funzione di k parametri

Problema di Cauchy

Il problema di Cauchy corrisponde a una EDO con condizioni iniziali. Le condizioni iniziali per una EDO di ordine k prescrivono il valore della funzione incognita u e di tutte le sue derivate fino all'ordine $k - 1$ per uno stesso valore di t che viene detto **istante iniziale**

Teorema di esistenza (Peano)

Consideriamo il problema di Cauchy per una EDO di ordine k in forma normale.

$$\begin{cases} u^{(k)} = F(t, u, \dots, u^{(k-1)}) \\ k \text{ condizioni iniziali} \end{cases}$$

Se la funzione F è continua allora il problema di Cauchy ha almeno una soluzione **locale**, ossia esiste un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ con $t_0 \in I$, per cui esiste $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa l'EDO e le condizioni iniziali

Teorema di esistenza ed unicità locale

Se F è un po' più che continua, diciamo derivabile, allora la soluzione del problema di Cauchy è anche unica, ossia le condizioni iniziali permettono di fissare in modo univoco i k parametri della soluzione generale

EDO a variabili separabili

$$u^I = f(t)g(u)$$

separare le variabili \rightarrow integrare \rightarrow ricavare la soluzione

Def

Si dice **intervallo massimale di esistenza** il pezzo dell'insieme di definizione della soluzione che contiene l'istante iniziale

Def

Si dice **tempo di vita** (o life span) della soluzione, l'estremo superiore dell'intervallo massimale di esistenza

Questo genera vari risultati

- Se il tempo di vita è $+\infty$ si dice che la soluzione ha esistenza globale nel futuro
- Se il tempo di vita è $< +\infty$, ossia è un numero T , allora si dice che la soluzione muore al tempo T . Questo ha 2 possibili cause:
 - Se $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \pm\infty$ si dice che la soluzione ha uno scoppio (blowup) al tempo T
 - Se non c'è scoppio ma $u(t)$ esce dalla zona in cui i termini dell'equazione sono definiti, allora si dice che la soluzione ha una rottura (breakdown)

Equazioni differenziali lineari omogenee

$$\sum_{j=0}^n a_j(t) u^{(j)}(t) = 0$$

Teoria generale

L'insieme delle soluzioni dell'ED lineare omogenee è uno spazio vettoriale di dimensione n . Detta $u_1(t), \dots, u_n(t)$ una base di tale spazio, la soluzione generale si scrive come combinazione lineare degli elementi della base, ossia

$$u(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)$$

Fatto generale

Per una EDO lineare omogenea l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è sempre o tutto \mathbb{R} oppure una semiretta.

Per la linearità esiste un algoritmo specifico per trovare una base dello spazio lineare delle soluzioni

Caso ED lineari omogenee di ordine 2 con coefficienti costanti

$$au'' + bu' + cu = 0$$

Associo a tale equazione una nuova equazione nel modo seguente

$$ax^2 + bx + c = 0$$

considero le radici di questo polinomio. Ho 3 casi:

- $\Delta > 0$: il polinomio ha 2 radici reali distinte (λ, μ) . Allora la base è $e^{\lambda t}, e^{\mu t}$ quindi in generale

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

- $\Delta = 0$: Allora il polinomio ha una radice reale. Quindi la base è

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}$$

- $\Delta < 0$: Allora il polinomio non ha radici reali ma ha 2 radici complesse coniugate, quindi la base è

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

con soluzione generale

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Se abbiamo EDO lineare omogenea di grado n con coefficienti costanti si considera il polinomio caratteristico

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$$

e si vanno a cercare le radici

- ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molteplicità 1 produce un elemento $e^{\lambda t}$
- ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molteplicità m produce m elementi delle basi

$$e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t}$$

- ogni coppia di radici complesse coniugate di molteplicità 1 producono gli elementi della base

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

- ogni coppia di radici complesse coniugata di molteplicità m producono elementi sulla base del tipo

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t), \dots, t^{m-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t), t^{m-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

- in finale ricordiamo che la dimensione dello spazio vettoriale è n

EDO lineari non omogenee

$$\sum_{j=0}^n a_j(t) u^{(j)}(t) = f(t)$$

Fatto generale

Se u e v sono soluzioni dell'equazione non omogenea allora $w = u - v$ è soluzione dell'equazione omogenea associata, ossia l'equazione senza il termine $f(t)$

Conseguenza: la soluzione generale dell'EDO lineare non omogenea si scrive nella forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t) + \bar{u}(t)$$

Operativamente: trovo la base dell'equazioni omogenee associate, poi una soluzione qualsiasi dell'equazione non omogenea. \bar{u} lo stavo con la variazione delle costanti (Lagrange)

Regola generale

Se il termine di non omogeneità è del tipo $f(t) = e^{\alpha t}$ allora il tentativo da fare per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è del tipo $\bar{u}(t) = \lambda e^{\alpha t}$. Questa funzione se α non è radice del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata. Se in caso contrario α è radice di molteplicità del polinomio caratteristico allora il tentativo deve essere del tipo

$$\bar{u}(t) = \lambda t^m e^{\alpha t}$$

Regola generale

Se il termine non omogeneo è del tipo $\sin(\alpha t)$ oppure $\cos(\alpha t)$, il tentativo da fare per la soluzione particolare della non omogenea è del tipo

$$\bar{u}(t) = \lambda \sin(\alpha t) + \mu \cos(\alpha t)$$

Questo tentativo funziona se $\sin(\alpha t)$ oppure $\cos(\alpha t)$ non sono soluzioni dell'equazione omogenea associata. Se lo sono allora si includono tutte le potenze di t quanto necessario

Regola generale

Se il termine non omogeneo è un polinomio in t , allora il tentativo per la soluzione particolare dell'equazione non omogenea è un polinomio completo dello stesso grado del termine non omogeneo. Questo funziona fintanto che non ci sono polinomi come soluzione dell'equazione omogenea associata, ossia quando $x = 0$ non è radice dell'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata. Se $x = 0$ è invece radice dell'equazione caratteristica di molteplicità m allora bisogna moltiplicare il tentativo per t^m

Metodo della variazione delle costanti

Equazioni lineari del 1° ordine

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Per risolvere possiamo usare il metodo del fattore integrante o usiamo un omogenea + tentativo

Fattore integrante

Considera una primitiva di a , ossia $A'(t) = a(t)$. Moltiplico l'eq. differenziale per $e^{A(t)}$ e poi integrando da entrambi i lati otteniamo

$$u(t) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int b(o)e^{A(o)} do$$

Omogenea + particolare

L'equazione omogenea associata è

$$u' + a(t)u(t) = 0$$

Poi uso le variabili separabili e integro