LEZIONE 10

LIMITI DI FUNZIONI

$f : I \to \mathbb{R}$ $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo non degenere

$c \in \overline{\mathbb{R}}$ $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

DEF 10.1 : "Si dice che

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in I}} f(x) = \ell$$

LIMITI PER SUCCESSIONI

se per ogni successione (x_n) con $x_n \in I$ $\forall n \in \mathbb{N}$ per cui $x_n \to c$ $n \to +\infty$

$\Rightarrow$ $f(x_n) \to \ell$ $n \to +\infty$."

$\delta > 0$

Se $c \in \overline{\mathbb{R}}$ se $c \in \mathbb{R}$ $U_c(\delta) = (c-\delta, c+\delta)$ intorno di c

se $c = \pm\infty$ $U_{\pm\infty}(\delta)$ $<$ $(\delta, +\infty)$, $(-\infty, \delta)$ intorni di $\pm\infty$

DEF 10.2 Diciamo che una funzione f ha una certa proprietà DEFINITIVAMENTE per $x \to c$ se esiste un intorno U di c tale che la proprietà di $f(x)$ vale per ogni $\underbrace{x \in U \quad x \neq c}_{\dot{U} = U \setminus \{c\}}$ $\Big)\ c \in \mathbb{R}$

DEF 10.3. (LIMITE IN SENSO TOPOLOGICO)

"Sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia f una funzione <u>definita almeno definitivamente per $x \to c$</u>. Si dice che

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

se per ogni intorno U_ℓ esiste un intorno di c V_c tale che per ogni $x \in V_c$, $x \neq c$, allora $f(x) \in U_\ell$."

Teorema 10.4 (Teorema PONTE)

"Siano $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$ non degenere, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell$$

se e solo se per ogni successione (x_n) per cui $x_n \in I$ con $x_n \neq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$ per cui $x_n \to c$ $n \to +\infty$ $\Rightarrow$ $f(x_n) \to \ell$ $n \to +\infty$. //

4 POSSIBILITÀ caratterizzate dalle scelte di $c \in \overline{\mathbb{R}}$ $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

1°. LIMITE FINITO ALL'INFINITO

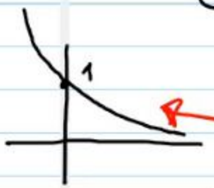
$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = \ell}$$

(i) $c = +\infty$ $\ell \in \mathbb{R}$

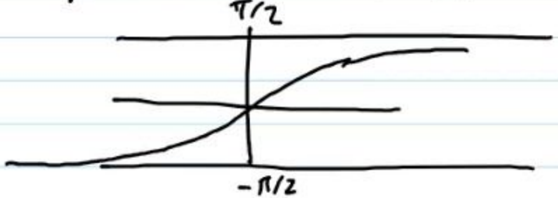
$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0$ tale che $\forall x$ per cui $x > K$ allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

(ii) $c = -\infty$ $\ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0$ tale che $\forall x$ per cui $x < -K$ allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$



es: $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$



$+$

$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$

Queste tipologie di limite caratterizza le cosiddette rette asintotiche orizzontali o ASINTOTI ORIZZONTALI delle funzioni

DEF 10.5 Se $\ell \in \mathbb{R}$ $c \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice che

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell^+ \quad (\text{rispett. } \ell^-)$$

se per ogni successione (x_n) con $x_n \in I$ $x_n \neq c$ e $x_n \to c$ $n \to +\infty$ si ha che $f(x_n) \to \ell^+$ (rispett. ℓ^-) per $n \to +\infty$ ~~se~~ e allora $f(x_n) \geq \ell$ definitivamente ($f(x_n) \leq \ell$ definitivamente)

(Convergenza per ECCESSO (ℓ^+) o per DIFETTO (ℓ^-))

es: $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ $x \to 0$ di non convergenza per eccesso o difetto.

2° LIMITE INFINITO ALL'INFINITO

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell$$

(i) $c = +\infty \quad \ell = +\infty$

$\forall H > 0 \;\; \exists K > 0 \;\; \text{t.c.} \;\; \forall x$ per cui $\underline{x > K} \Rightarrow \underline{f(x) > H}$

(ii) $c = +\infty \quad \ell = -\infty$

$\forall H > 0 \;\; \exists K > 0 \;\; \text{t.c.} \;\; \forall x$ per cui $x > K \Rightarrow f(x) < -H$

(iii) $c = -\infty \quad \ell = +\infty$

$\forall H > 0 \;\; \exists K > 0 \;\; \text{t.c.} \;\; \forall x$ per cui $x < -K \Rightarrow f(x) > H$

(iv) $c = -\infty \quad \ell = -\infty$

$\forall H > 0 \;\; \exists K > 0 \;\; \text{t.c.} \;\; \forall x$ per cui $x < -K \Rightarrow f(x) < -H$.

es: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \sin x + x^2 = +\infty.$

<u>Può</u> accadere che in questo caso esistano ASINTOTI OBLIQUI

DEF 10.6 "Si dice che la funzione f ha asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$ $(m \neq 0)$ per $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ se accade che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (mx+q) \right) = 0 \qquad \left(\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - (mx+q) \right) = 0 \right)$$

"

Prop 10.7 "La funzione f ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$$ coefficiente angolare

2. $$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right) = q$$

"

es: 1. $f(x) = e^x + 2x + 1$

per $x \to -\infty$ $\boxed{y = 2x + 1}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + 2x + 1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to 0} + 2 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \right) = 2 = m$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - 2x \right) \overset{?}{=} q \quad ?$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(e^x + 2x + 1 - 2x \right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\underbrace{e^x}_{\to 0} + 1 \right) = 1 = q$$

2. $f(x) = 3x + \sqrt{x}$ non ha asint. obliquo per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(3 + \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{x}}_{= \frac{1}{\sqrt{x}}} \right) = 3 = m \neq 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(3x + \sqrt{x} - 3x \right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{No!}$$

3° LIMITE INFINITO AL FINITO

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

(i) $c \in \mathbb{R}$ $\quad l = +\infty$

$\forall H > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x$ per cui $0 < |x - c| < \delta$

$\Rightarrow f(x) > H$

(ii) $c \in \mathbb{R}$ $\quad l = -\infty$

$\forall H > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x$ per cui $0 < |x - c| < \delta$

$\Rightarrow f(x) < -H$.

es: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Page 2 Page 3 Page 4 Page 5 Page 6 Page 7 Page 8 Page 9
9 / 9 09:46

si possono specificare nel caso in cui $c \in \mathbb{R}$ i limiti destro e sinistro

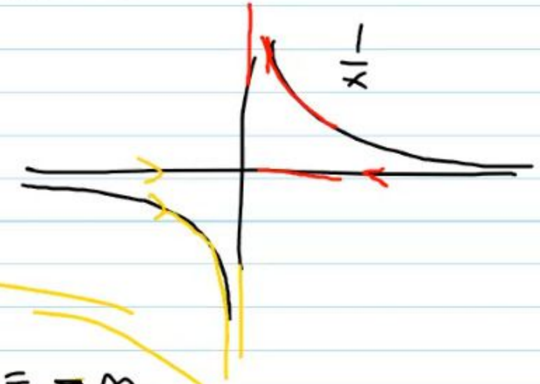
DESTRO $\quad \lim_{x \to c^+} f(x) = \ell \quad$ per cui $\quad x > c$

($x \to c^+$ significa arrivare a c da valori più grandi di c)

SINISTRO $\quad \lim_{x \to c^-} f(x) = \ell \quad$ per cui $\quad x < c$

($x \to c^-$ significa arrivare a c da valori più piccoli di c)

es: $\quad f(x) = \frac{1}{x}$



$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \quad ?$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \neq \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

DEF 10.8 Si dice che f ha ASINTOTO VERTICALE di equazione $x = c \in \mathbb{R}$ se accade che

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

o rispettivamente a seconda dei casi

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$$

es: $x = 0$ è asintoto verticale per $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$,
$h(x) = \log x$

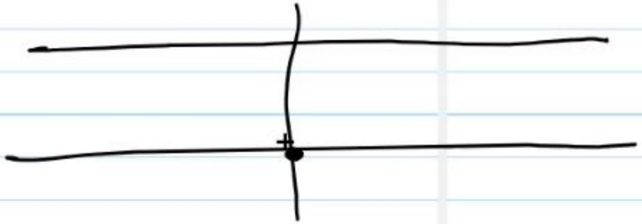
4° LIMITE FINITO AL FINITO

$$\lim_{x\to c} f(x) = l$$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ t.c. per ogni x per cui $\underline{0<|x-c|<\delta}$
allora $|f(x)-l|<\varepsilon$.

es. 1. $\lim_{x\to 0} \sin x = \sin\left(\lim_{x\to 0} x\right) = 0$.

2. $f(x)=\begin{cases} 1 & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$



$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 0$$

DEF 10.9 Diremo che c è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ per la funzione f quando i limiti destro e sinistro di f per $x \to c$ esistono finiti e sono diversi

$$\lim_{x \to c^+} f(x) - \lim_{x \to c^-} f(x) = \text{SALTO di } f \text{ in } c$$

es: la funzione segno ha in $c=0$ un salto $= 2$

" " gradino ha in $c=0$ un salto $= 1$.

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$

$\Rightarrow$ $c=0$ PUNTO DI DISC. con salto $= 2$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sin x} \quad \boxed{\text{NON ESISTE}}$$

$x_n = n\pi \quad n \in \mathbb{N} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sin(x_n) = 0$

$\neq$

$y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad n \in \mathbb{N} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sin(y_n) = 1$

CALCOLO DEI LIMITI

Teorema 10.10 (CRITERIO DEL CONFRONTO)

"Se per $x \to c$ ho $f(x) \to \ell$, $g(x) \to \ell$ e si ha che vale

$$f(x) \le h(x) \le g(x) \quad \text{definitivamente per } x \to c$$

allora $h(x) \to \ell$ per $x \to c$."

Corollario 10.11' "Se per $x \to c$ si ha $g(x) \to 0$ e $|h(x)| \leq g(x)$ definitivamente per $x \to c$ $\Rightarrow$ $h(x) \to 0$ per $x \to c$."

Corollario 10.11'' "Se $f(x) \to 0$ $x \to c$ e $g(x)$ è limitata definitivamente per $x \to c$ allora $f(x)\,g(x) \to 0$ $x \to c$." //

Teorema 10.12 (Teorema PERMANENZA DEL SEGNO)

(i) Se $f(x) \to \ell > 0$ per $x \to c$ allora si ha che $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to c$

(ii) Se $f(x) \to \ell$ e $f(x) \geq 0$ per $x \to c$ allora $\ell \geq 0$.

(iii) Se f è continua in c e $f(c) > 0$ $\Rightarrow$ $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to c$. //

Teorema 10.13 (ALGEBRA DEI LIMITI)

Se f e g sono due funzioni definite almeno definitivamente per $x \to c$ e $f(x) \to \ell_1$ e $g(x) \to \ell_2$ per $x \to c$

allora

$$\left.\begin{array}{lll} f \pm g \longrightarrow \ell_1 \pm \ell_2 & & x \to c \\ f \cdot g \longrightarrow \ell_1 \cdot \ell_2 & & x \to c \\ f/g \longrightarrow \ell_1/\ell_2 & & x \to c \end{array}\right\}$$

qualora le operazioni nel membro di destra siano ben definite in $\overline{\mathbb{R}}$

Teorema 10.15 (CAMBIO DELLE VARIABILI)

// Siano f, g funzioni tali che sia ben definita $f \circ g$ almeno definitivamente per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e supponiamo che

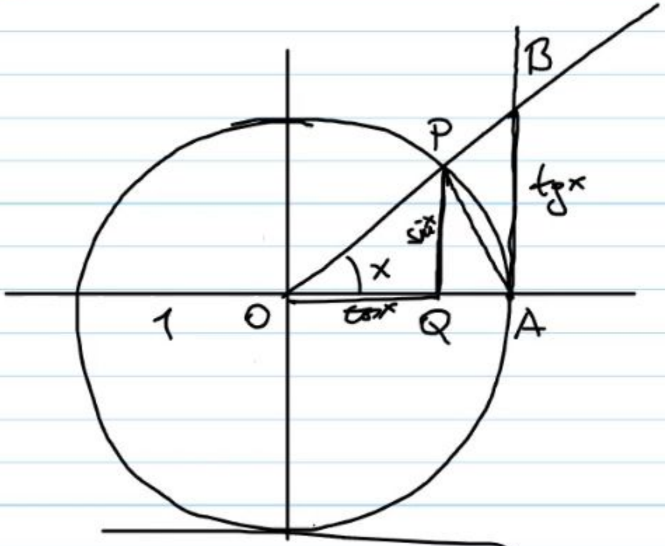
(i) $g(x) \to t_0$ per $x \to x_0$ con $g(x) \neq t_0$ definitiv. per $x \to x_0$

(ii) esiste $\lim_{t \to t_0} f(t) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora $$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{t \to t_0} f(t).$$ //

LIMITI NOTEVOLI

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$



$$\boxed{\sin x < x < \operatorname{tg} x}$$

$x \in (0, \pi/2)$

divido per $\sin x > 0$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

poiché coseno è continua e vale $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

$= 1$ per il Teorema del confronto ho la tesi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

DEF: Prolungamento per continuità

Se f non è definita in $x = c$ ma esiste finito

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

allora la funzione può essere **ESTESA PER CONTINUITÀ** ponendo $f(c) \doteq \ell$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq c \\ \ell & x = c \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$\xrightarrow{x\to 0} \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1}$$

di nuovo $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1}$$

$t = \arcsin x \Rightarrow x = \sin t$ e $x \to 0$ e $t \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e}$$

Page 14 Page 15 Page 16 Page 17 Page 18 Page 19 Page 20 Page 21
21 / 21 10:57

$$\boxed{\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\log\left(\lim\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\log(1+y) = 1$$

$$y = \frac{1}{x} \qquad y\to 0 \quad \text{se } x\to\pm\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1}$$

con $y = e^x - 1$ dal precedente.

CONFRONTI E STIME ASINTOTICHE

DEF 10.17 "Si dice che 2 funzioni f, g sono ASINTOTICHE per $x \to c$ se

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive $f \sim g$ "

ES: Dai limiti notevoli per $\underline{x \to 0}$

$\sin x \sim x \qquad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \qquad e^x - 1 \sim x \qquad \log(1+x) \sim x$

$\sin x \sim x \quad x \to 0$

$$\boxed{\sin \cancel{\sim} x \quad \text{per } x \to +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0}$$

$\varepsilon(x) \to 0$ infinitesima

$\sin \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x) \qquad 1-\cos \varepsilon(x) \sim \frac{\varepsilon(x)^2}{2}$

$e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x) \qquad \log(1+\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$

Teorema (GERARCHIA INFINITI)

Si possono dimostrare i seguenti limiti validi per $\alpha, \beta > 0$

$a, b > 1$, γ qualunque

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0$

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0$

3. $\lim_{y\to 0^+} y^{\beta}(-\log y)^{\gamma} = 0$ //

Es:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^{x^2}-1)\sin x}{x(1-\cos 2x)} = 1/2$

Per $x\to 0$ $\quad x^2 \to 0 \quad e^{x^2}-1 \sim x^2$ $\qquad \sin x \sim x$

$2x \to 0 \quad 1-\cos 2x \sim \dfrac{4x^2}{2} = 2x^2$

$$\frac{(e^{x^2}-1)\sin x}{x(1-\cos 2x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\cancel{x^2}\cdot \cancel{x}}{\cancel{x}\cdot 2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^{2x^5}-1}}{\log(1-x^2\sqrt{x})} = -\sqrt{2}$$

$$x\to 0 \qquad 2x^5 \to 0 \qquad e^{2x^5}-1 \sim 2x^5$$

$$x^2\sqrt{x} \to 0 \qquad \log(1-x^2\sqrt{x}) \sim -x^2\sqrt{x} = -x^{5/2}$$

$$\frac{\sqrt{e^{2x^5}-1}}{\log(1-x^2\sqrt{x})} \sim \frac{\sqrt{2x^5}}{-x^{5/2}} = \frac{\sqrt{2}\,x^{5/2}}{-x^{5/2}} = -\sqrt{2}$$