1 prime lezioni

insiemi e logica elementare

numeri reali e naturali

2 maggioranti, minoranti, sup e inf

Def
Sia $A \in \mathbb{R}$ non vuoto.
A è **limitato superiormente** se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq M \ \forall x \in A$. M viene definito come **Maggiorante** di A. Se M di A appartiene ad A si dice **massimo** di A, e viene denotato come $max(A)$

A è **limitato inferiormente** se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq M \ \forall x \in A$. m viene definito come **minorante** di A. Se m di A appartiene ad A si dice **minimo** di A, e viene denotato come $min(A)$

A si dice **limitato** se è limitato sia inferiormente che superiormente

Def
Siano $A, B \in \mathbb{R}$ non vuoti

- $-A \doteq \{-x \mid x \in A\}$
- $A + B \doteq \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$
- $A - B \doteq \{x - y \mid x \in A,\ y \in B\}$

Se $x \in \mathbb{R}$

- $x + A \doteq \{x + y \mid y \in A\}$

non importante, skippo

3 lezioni skippate

Caratterizzazione sup, inf, classi contigue, densità dei razionali

4 Radici, esponenziali reali, funzioni inverse, logaritmi, trigonometriche

Prop - Radici n-esima
per ogni numero nullo positivo a e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un unico numero reale b tale che $b^n = a$. Tale reale positivo è la radice n-esima e si indica con i simboli:

$$\sqrt[n]{a} \quad \doteq \quad a^{\frac{1}{n}}$$

Sia $r \in \mathbb{Q}, r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} q \in \mathbb{N}$. Allora se $a > 0$:

$$a^r \doteq a^{\frac{p}{q}} \doteq \sqrt[q]{a^p} \qquad r \geq 0$$

$$a^r \doteq a^{\frac{p}{q}} \doteq \frac{1}{\sqrt[q]{a^{-p}}} \qquad r < 0$$

La radice possiede le stesse proprietà della potenza intera

Se $0 < a < 1$, allora posto $b = \frac{1}{a}$ e definisco:

$$a^x = \frac{1}{b^x}$$

Operazioni tra funzioni
f, g

- Somma: $(f + g)(x) \doteq f(x) + g(x) \qquad x \in dom(f) \cap dom(g) \neq \emptyset$
- Prodotto: $(f \times g)(x) \doteq f(x) \times g(x) \qquad x \in dom(f) \cap dom(g) \neq \emptyset$
- Rapporto: $(\frac{f}{g})(x) \doteq \frac{f(x)}{g(x)} \qquad x \in dom(f) \cap dom(g) \neq \emptyset, g(x) \neq 0$
- Composizione: $(f \circ g)(x) \doteq f(g(x)) \qquad \forall x \in A$
- Restrizione: $f : A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Se prendo $B \subseteq A$ allora la resitrzione AB di f è: $f \restriction_B : B \to \mathbb{R}$

Def - funzioni limitate
Sia $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R} A \neq \emptyset$, diremo che f è **limitata superiormente** se $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ è limitata superiormente, cioé esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$. Analogamente diremo che f è **limitata inferiormente** se $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ è limitata inferiormente, cioé esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq m \quad \forall x \in A$.
La funzione f sarà **limitata** se è limitata inferiormente e superiormente.

Quindi se $f(A)$ è limitata superiormente allora esiste il suo estremo superiore $sup(f(A))$, ovvero $sup(f) \doteq sup(f(A))$. Lo stesso vale per l'opposto $(inf(f) \doteq$

$sup(f(A)))$.
Se $x_0 \in dom(A)$ e $f(x_0) = sup(f)$ si dice che f ammette **massimo assoluto**. Nel caso dell'estremo inferiore, diremo che f ammette **minimo assoluto**

Def - funzioni monotone
Sia $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R} A \neq \emptyset$. Allora f è detta:

- Crescente: per ogni coppia $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Strettamente crescente: per ogni coppia $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Decrescente: per ogni coppia $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- Strettamente Decrescente: per ogni coppia $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Le funzioni crescenti e decrescenti vengono definite monotone, mentre quelle strettamente crescenti o decrescenti sono strettamente monotone

Prop
Ogni funzione strettamente monotona è iniettiva

Osservazioni:
se f è iniettiva, non per forza è strettamente monotona, ma vale la negazione: se una funzione non è iniettiva, allora sicuramente non è strettamente monotona.

Def - Funzioni inverse
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e $f : A \to B$. Se f è biunivoca (iniettiva e suriettiva) allora f è **invertibile** e si chiama funzione inversa di f la funzione $g : B \to A$ e vale:

$$g \circ f = id(A) \qquad (id(x) = x \quad \forall x \in A)$$

La funzione inversa si indica con il simbolo f^{-1}

Def - Funzioni periodiche
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dice che f è **periodica** se esiste $t \in \mathbb{R}/\{0\}$ tale che:

$$f(x+t) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

t è detto periodo di f. Il numero $t_0 \doteq min\{t > 0\}$ è detto, se esiste, **minimo periodo** di f

Def - Polinomi e razionali

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n + x^n \qquad a_0, ...a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Se $a_n \neq 0$ allora diremo che n è il grado del polinomio. P è definito su tutto $\mathbb{R}$. I valori $x \in \mathbb{R}$ per cui $P(x) = 0$ sono detti zeri o radici. Se P ha grado n, allora le radici sono al più n numeri reali.
P è detto **irriducibile** se non è scrivibile come prodotto di polinomi di grado minore al grado di P. Gli unici polinomi a essere irriducibili sono quelli di 1° grado e quelli di 2° grado con discriminante negativo

Una funzione f è **razionele** se:

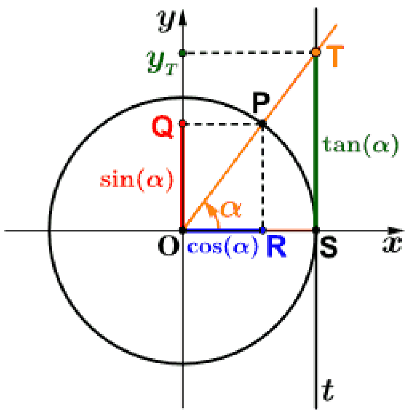
$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$$

dove $n(x)$ e $d(x)$ polinomi, $dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x) \neq 0\}$.
Se f è razionale e $grad(n) > grad(d)$ allora:

$$f(x) = P(X) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

dove $P(x)$ è polinomio quoziente e $r(x)$ è il resto della divisione

Funzioni trigonometriche e le loro inverse



$$cos(x) = sin(x + \tfrac{\pi}{2})$$
$$cos(x)^2 + sin(x)^2 = 1$$

parità: coseno è pari, infatti $cos(-x) = cos(x)$, mentre il seno è dispari perché $sin(-x) = -sin(x)$

tangente e cotangente
la tangente, $tg(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$, corrisponde alla lunghezza del segmento che cade perpendicolare sull'asse delle x nel punto 1 e che interseca l'estensione del raggio. Il dominio della tangente è $dom(tg) = \mathbb{R}/\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. La contangente, $tg(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$, invece cade sull'asse delle y nel punto 1.

Sia tangente e cotangente sono funzioni dispari e hanno periodo minimo in π

Inverse

$$arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$
$$arcsin \doteq (sin \restriction_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}$$
$$arcsin(sin(x)) = x \qquad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]]$$

$$arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$arccos \doteq (cos \restriction_{[0,\pi]})^{-1}$$
$$arccos(cos(x)) = x \qquad \forall x \in [0,\pi]$$

$$arctg : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$
$$arctg \doteq (tg \restriction_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}$$
$$arctg(tg(x)) = x \qquad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]]$$

$$arccotg : [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$arccotg \doteq (cotg \restriction_{[0,\pi]})^{-1}$$
$$arccotg(cotg(x)) = x \qquad \forall x \in [0,\pi]$$

Esponenziali e logaritmi
Se $a > 0, a^x \in \mathbb{R}$

$$exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to a^x$$

Se $a = 1$ allora ho la funzione banale $a^x = 1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Se $a \neq 1$ allora $a^x > 0$ quindi è limitato inferiormente e il minimo è 0.
L'esponenziale è bigiettiva, quindi invertibile, e la sua funzione inversa è il logaritmo

$$a^y = x \qquad y = log_a(x)$$

Dalle proprietà elementari determiniamo che

- $log_a(a^x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $a^{log_a(x)} = x \qquad \forall x > 0, x \in \mathbb{R}$

Prop
Valgono le seguenti proprietà:

- $log_a(x_1 + x_2) = log_a(x_1) + log_a(x - 2) \qquad x_{1,2} > 0$
- $log_a(x^\alpha) = \alpha \cdot log_a(x) \qquad x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$
- $log_b(x) = log_a(x) \cdot log_b(a) \qquad x, a, b > 0, a, b \neq 1$

Il logaritmo se viene indicato come log è in base 10, mentre ln se ha come base il numero di nepero

5 Successioni di numeri reali

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \in \mathbb{R} \to a(n) \in \mathbb{R} \qquad a(n) = a_n$$
$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...) \Leftrightarrow (a_n)(a_n)_n(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

I componenti della successione si chiamano **termini** della successione (a_n), mentre il valore n si dice **indice**.

NB: è importante **non confondere successione e immagine della successione**.
Es: $(a_n) = (2, -2, 2, -2, 2, -2, ...) \qquad imm(a_n) = \{2, -2\}$

Es: $\sqrt{2}$ si avvicina alla successione $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ con $a_n > 0$ e $a_1 = 2$. La differenza tra $\sqrt{2}$ e $(a_n$, ossia $|a_n - \sqrt{2}|$ viene inteso come **errore assoluto**

Def
Diremo che una successione **tende** o **converge** ad un certo numero reale l se per quanto piccolo si scelga $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un naturale N per cui tutti i termini della successione con indici $n < N$ approsimano l con un errore minore di ε. In tal caso il numero l si dice **limite** della successione e la convergenza viene descritta con il simbolo:

$$a_n \to l \qquad\qquad n \to \infty$$

La successione converge a $l \in \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tali che:

$$|a_n - l| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n > N_\varepsilon$$

Oss: le successioni per cui $a_n \to 0 \qquad n \to \infty$ si dicono **infinitesime**

Def - successioni divergenti
Una successione si dice avere limite a $+\infty$ o diverge a $+\infty$ e scriveremo $a_n \to \infty\ quadn \to \infty$ quando, comunque scelto un numero reale, ogni termine della successione da un certo indice in poi è maggiore del numero reale scelto.
In modo formale, per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $N_M \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $n > N_M$ si ha $a_n > M$. Lo stesso si può fare nel caso (a_n) diverge a $-\infty$. Ossia posso dire che $(-a_n)$ diverge a $+\infty$, per cui vale la definizione di prima, ossia, per ogni scelta di $M \in \mathbb{R}$ trovo $N_M \in \mathbb{N}$ per cui ogni $n > N_M \quad -a_n > M$ ossia $A_n < -M$. Anche ora si può scrivere $a_n \to -\infty \quad n \to \infty$

Def - Carattere delle successioni
Sia (a_n) successione reale. Se (a_n) ammette limite (finito o infinito) diremo che la successione (a_n) è **regolare**. Se non ammette limite diremo che la successione è **irregolare** o **indeterminata**. Stabilire se (a_n) è regolare o indeterminata vuol dire stabilire il carattere della succesione.

Teorema - Unicità del limite
Ogni successione reale regolare ha un solo limite

Definizione topologica di limite
Concetto di intorno
$I_\varepsilon(l) \doteq (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \Rightarrow$ Intorno simmetrico di raggio $\varepsilon > 0$.
Al variare di $\varepsilon > 0$ considero la famiglia degli intorni simmetrici

$$\mathcal{B}_l \doteq \{I_\varepsilon(l) \mid \varepsilon > 0\}$$

$\mathcal{B}_l$ è detta **base di intorni** di $l \in \mathbb{R}$. Posso verificare gli intorni di $\pm\infty$ come gli intervalli $(M, +\infty)$ oppure $(-\infty, M)$ per ogni scelta di $M \in \mathbb{R}$

Teorema - Cambiamento delle variabili
Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente. Allora se (a_n) è regolare vale:

$$lim\ a_n = lim\ a_{f(n)}$$

Corollario:
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ finito ho:

$$lim\ a_{n+k} = lim\ a_n$$

Proprietà delle successioni regolari
Limitatezza

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$a(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$$
$$a(\mathbb{N}) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Diremo che (a_n) è **superiormente limitata** se $a(\mathbb{N})$ lo è, ossia esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n < M\ \forall n \in \mathbb{N}$, e quindi diremo che accetta estremo superiore. Invece (a_n) è **inferiormente limitata** se $a(\mathbb{N})$ lo è, ossia esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $a_n > m\ \forall n \in \mathbb{N}$, e quindi accetta estremo inferiore. Diremmo che (a_n) è **limitata** se lo è sia inferiormente che superiormente

Prop
Ogni successione convergente è limitata. Ogni successione divergente positivamente è inferiormente limitata e ogni successione divergente negativamente è superiormente limitata

Prop
Se (a_n) è regolare allora $(|a_n|)$ è reoglare. Se $(|a_n|)$ è infinitesima allora (a_n) è infinitesima

Monotonia
Def
Sia (a_n) successione reale.

- (a_n) è crescente se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$
- (a_n) è decrescente se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$
- (a_n) è strettamente crescente se $a_n < a_{n+1} \quad \forall n$
- (a_n) è strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1} \quad \forall n$

Teorema
Ogni successione monotona è regolare. in particolare se monotona crescente allora $lim\ a_n = inf(a_n)$

Algebra dei limiti

$$\overline{\mathbb{R}} \doteq \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$x \in \overline{\mathbb{R}} \qquad -\infty \leq x \leq +\infty$$

Relazioni indeterminate:

- $\pm\infty \mp \infty$
- $0 \cdot \pm\infty$
- $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $0^0, +\infty^0, 1^{\pm\infty}$

$$a \in \mathbb{R} \qquad a + \pm\infty = \pm\infty \qquad +\infty^a = +\infty$$
$$a \in \mathbb{R}_+ \qquad a \cdot \pm\infty = \pm\infty$$
$$b \in \mathbb{R}_- \qquad b \cdot \pm\infty = \mp\infty \qquad +\infty^b = 0$$
$$+\infty + \infty = +\infty \qquad -\infty - \infty = -\infty$$
$$\frac{1}{\pm\infty} = 0 \qquad +\infty^{-\infty} = 0$$

Prop
Supponiamo (a_n) regolare con $a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Se $l_0 \in \mathbb{R}$ è tale che

$$lim\ a_n = l > l_0$$

allora esistono un $N \in \mathbb{N}$ e un numero reale $s > 0$ tali che

$$a_n > s \qquad \forall n > N$$

2. Se $l_0 \in \mathbb{R}$ è tale che

$$lim\ a_n = l < l_0$$

Allora esistono $N \in \mathbb{N}$ ed un numero reale $s < l_0$ tali che

$$a_n < s \qquad \forall n > N$$

Corollario
Sia (a_n) convergente a $l \neq 0$. Allora:

- Se $l > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > \frac{l}{2} \quad \forall n > N$
- Se $l < 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < \frac{l}{2} \quad \forall n > N$
- Esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| > \frac{|l|}{2} \quad \forall n > N$

Teorema - Algebra delle somme
Siano $(a_n), (b_n)$ successioni regolari, allora:

1.

$$lim\ (a_n + b_n) = lim\ a_n + lim\ b_n$$

qualora il secondo membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$

2.

$$lim\ (a_n - b_n) = lim\ a_n - lim\ b_n$$

qualora il secondo membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$

Teorema - Prodotto di limiti per infinitesima
Siano (a_n) infinitesima e (b_n) limitata. Allora $a_n \cdot b_n \to 0$ è infinitesima

Teorema - Algebra dei prodotti
Siano $(a_n), (b_n)$ regolari. Allora si ha:

$$lim\ (a_n \cdot b_n) = lim\ a_n \cdot lim\ b_n$$

qualora in secondo membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$

Teorema - Limite dei reciproci
Sia (a_n) regolare $a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$. Sia hanno i seguenti casi:

- Se $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$ allora
$$\tfrac{1}{a_n} \to \tfrac{1}{a}$$
- Se $a = 0$ e $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ allora
$$\tfrac{1}{a_n} \to +\infty$$
- Se $a = 0$ e $a_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ allora
$$\tfrac{1}{a_n} \to -\infty$$

Teorema - Algebra dei rapporti
Supponiamo $(a_n)(b_n)$ regolari. Allora se $b_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$lim\ \tfrac{a_n}{b_n} = \tfrac{lim\ a_n}{lim\ b_n}$$

qualora il secondo membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$

Corollario

$$lim\ R(a_n) = lim\ \tfrac{P(a_n)}{Q(a_n)} = \tfrac{lim\ P(a_n)}{lim\ Q(b_n)} = \tfrac{P(a)}{Q(a)} = R(a)$$

Lemma
Consideriamo le successioni $(e_n), (E_n)$ di termini generici:

$$e_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n \qquad E_n = (1 + \tfrac{1}{n})^{n+1}$$

Sono vere le seguenti affermazioni:

1. $1 < e_n < E_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. (e_n) è strettamente crescente
3. (E_n) è strettamente decrescente

Def - Numero di Nepero

$$e \cdot lim\ (1+\frac{1}{n})^n$$

Def
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in A$. Allora diremmo che f è **CPS** in a se per ogni successione $(a_n), con a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$, convergente ad a si ha

$$lim\ f(a_n) = f(a)$$

Se tale proprietà vale $\forall a \in A$ diremo che f è CPS (in A)

Oss: Definizione poco pratica
$lim\ f(a_n) = f(lim\ a_n)$
$A \subseteq dom(f)$

Lemma
Sono CPS nei loro domini naturali le seguenti funzioni

- la funzione identica id
- funzioni affini: $a \in \mathbb{R} \quad F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad F(x) \doteq x + a$
- valore assoluto
- polinomi e razionali
- la funzione reciproca: $x \to \frac{1}{x}$
- potenze razionali: $x \to x^t$ con $t \in \mathbb{Q}$

Confronti e stime asintotiche

$a_n \qquad (b_n)$

$a_n \to \pm\infty \qquad b_n \to \pm\infty$

$$lim\ \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \to (a_n) \text{ è infinito di ordine inferiore di } (b_n) \\ l \in \mathbb{R}/\{0\} & \to (a_n) \text{ ha lo stesso ordine d'infinito di } (b_n \\ \pm\infty & \to (a_n) \text{ è infinito di ordine maggiore di } (b_n \\ \nexists & \to \text{non posso dire nulla} \end{cases}$$

$a_n \to 0 \qquad b_n \to 0$

$$lim\ \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \pm\infty & \to (a_n) \text{ è infinitesimo di ordine inferiore di } (b_n) \\ l \in \mathbb{R}/\{0\} & \to (a_n) \text{ è infinitesimo dello stesso ordine di } (b_n \\ 0 & \to (a_n) \text{ è infinitesimo di ordine maggiore di } (b_n \\ \nexists & \to \text{non posso dire nulla} \end{cases}$$

Con $lim\ \frac{a_n}{b_n} = 1$ dirò che (a_n) è **asintotica** a (b_n) e indicheremo con il simbolo $(a_n) \sim (b_n)$

Prop
Valgono i seguenti fatti:

- Se $a_n \sim B_n$, le successioni hanno lo stesso carattere
- Se $a_n \sim b_n \sim ... \sim c_n \Rightarrow a_n \sim b_n$
- una espressione composta da un prodotto o quoziente di più fattori può essere stimata fattore per fattore:

$$a_n \sim a_n^I \quad b_n \sim b_n^I \quad c_n \sim c_n^I \Rightarrow \frac{a_n b_n}{c_n} \sim \frac{a_n^I b_n^I}{c_n^I}$$

Teorema - Criterio del rapporto
Sia (a_n) con $a_n > 0 \quad n \in \mathbb{N}$. Se esiste

$$lim\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora

- Se $l < 1 \Rightarrow a_n \to 0$
- Se $l > 1$ (incluso $l = +\infty$) $\Rightarrow a_n \to +\infty$
- Se $l = 1$ non posso dire nulla

Teorema - Gerarchia degli infiniti
Vale la seguente lista di risultati:

1. $lim\ \frac{log_a n}{n^\alpha} = 0 \qquad \forall a > 1, \forall \alpha > 0$
2. $lim\ \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$
3. $lim\ \frac{a^n}{n!} = 0$
4. $lim\ \frac{n!}{n^n} = 0$

$+\infty^0 = lim\ \sqrt[n]{n} = lim\ n^{\frac{1}{n}} = lim\ e^{\frac{1}{n}log(n)} = e^0 = 1$

$0 < x = e^{log(x)} = a^{log_a(x)}$

Formula di Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$$