Lezione 21ª

Integrazione generalizzata (IMPROPRIA)

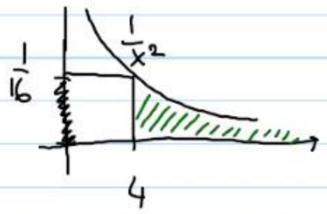
2 ingredienti cruciale nell'integrazione (propria)

- intervallo di integrazione è limitato
- funzione integranda è limitata

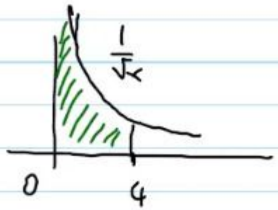
Integrazione impropria è quando almeno uno dei due ingredienti dell'integrazione Riemanniana non è soddisfatto

Esempi

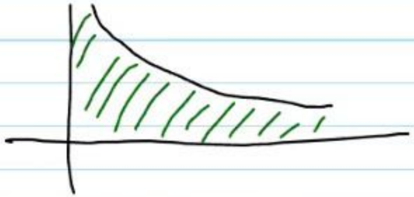
$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$$



integranda limitata
intervallo non limitato



integranda non limitata
intervallo limitato



integranda non limitata
intervallo non limitato

Strategia generale: ridursi a situazioni in cui è presente solo uno dei problemi legati alla limitatezza

Solo di 2 tipi:

<u>1° TIPO</u> zona di integrazione <u>non</u> è limitata, quindi integro su una semiretta del tipo $[a,+\infty)$ $(-\infty,a]$.

funzione integranda è limitata

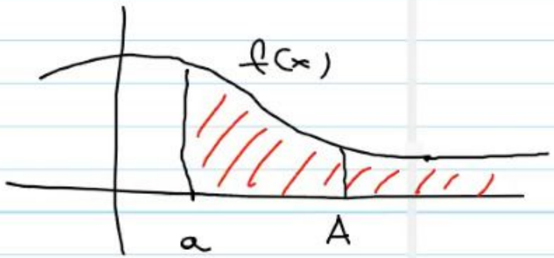
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \qquad \text{oppure} \qquad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

<u>2ª TIPO</u> integranda non limitata in uno degli estremi di integrazione di intervallo limitato $[a,b]$

Definizione di come fare gli integrali del 1° TIPO:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \doteq \lim_{A\to+\infty} \underbrace{\int_a^A f(x)\,dx}}$$

integrale "normale"
perché f è limitata
e $[a,A]$ è limitato

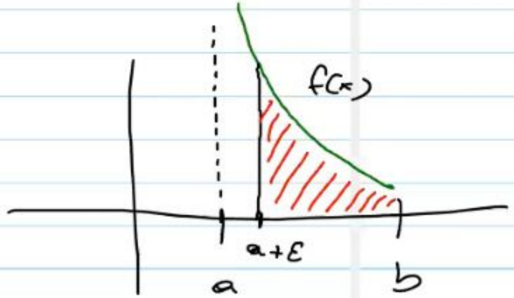


In modo analogo

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \doteq \lim_{A\to+\infty} \overbrace{\int_{-A}^{a} f(x)\,dx}$$

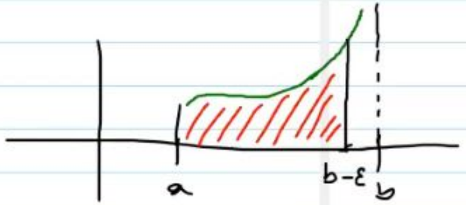
Nel caso di integrali del 2° TIPO

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx}$$



In modo analogo

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$



Riassumendo: Ho 4 possibilità per ogni tipologia di integrazione

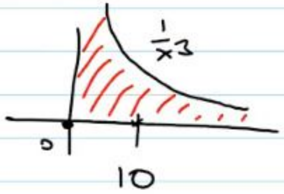
- l'integrale <u>converge</u> ad un numero reale
- l'integrale <u>diverge</u> positivamente ($\to +\infty$)
- " " negativamente ($\to -\infty$)
- l'integrale non converge né diverge, il limite non esiste.

In modo pratico, se ho più di un problema del 1° e 2° TIPO faccio nel modo seguente:

1. Spezzo l'integrazione in tanti integrali in ciascuno dei quali è presente solo un problema del 1° o 2° TIPO.
2. Studio i singoli pezzi
3. deduco il comportamento complessivo mettendo insieme i singoli risultati ed usando le regole associate a $\overline{\mathbb{R}}$

Esempi:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ ha 2 problemi



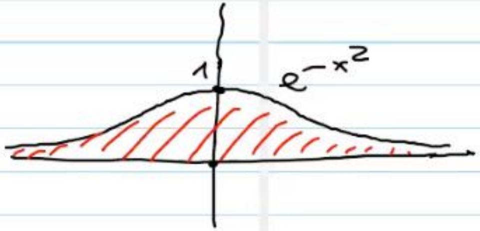
un problema è $[0,+\infty)$ non limitato

l'altro è che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \underbrace{\int_0^{10} \frac{1}{x^3}\,dx}_{2^\circ \text{ TIPO}} + \underbrace{\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx}_{1^\circ \text{ TIPO}}$$

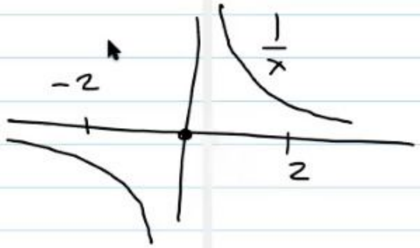
non dipende dalla scelta di 10 ....

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx}_{\text{integrali } 1^\circ \text{ TIPO}}$$



$$= \int_{-\infty}^{-3} e^{-x^2}\,dx + \int_{-3}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

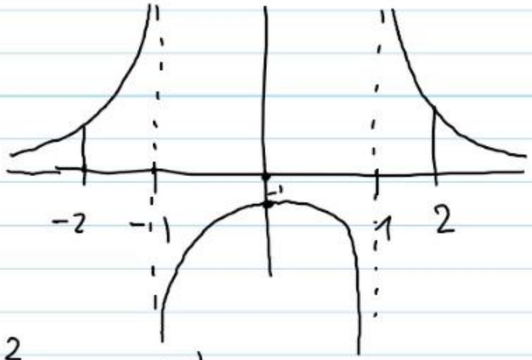
3. $$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x}\,dx$$



4. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx$$

$$x^4-1 = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{(x^2-1)}\underset{\substack{\neq \\ 0}}{(x^2+1)}$$

$x = \pm 1$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx = \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} + \int_{1}^{2} + \int_{2}^{+\infty}$$

Spezzo in 6 sotto problemi del 1° e 2° TIPO.

Esempio 1

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_2^A \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]_2^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{2}$$

Esempio 2.

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-2x}\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2A}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

Esempio 3

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty}\left[\operatorname{arctg} A - \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{=0}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Esempio 4

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right)_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = +\infty$$

Esempio 5.

$$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^5$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\left(\sqrt{5} - \sqrt{\varepsilon}\right)$$

$$= 2\sqrt{5}$$

Supponiamo di avere $a \geq 0$.

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[\log x\right]_a^A = \lim_{A\to+\infty} \left(\log\frac{A}{a}\right) = +\infty$$

$$\int_0^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\log x\right]_\varepsilon^a = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\log\frac{a}{\varepsilon}\right] = +\infty$$

Stylus Color Line Eraser Backgrounds Undo Redo Pages Previous Next Erase Board Web Documents Show Desktop OpenBoard

$a>0$
$\alpha>0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A x^{-\alpha}\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^A$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$$

Ho 2 casi:

1°. $\alpha-1>0 \Rightarrow^{\alpha>1} \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A^{\alpha-1}} = 0$, quindi l'integrale converge a $-\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{a^{\alpha-1}}$

2° $\alpha-1<0 \Rightarrow \alpha<1$ $\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A^{\alpha-1}} = +\infty$, quindi l'integrale diverge positivamente.

Page 1 Page 2 Page 3 Page 4 Page 5 Page 6 Page 7 Page 8 Page 9

9 / 9 09:58

Concludendo:

$$a>0 \qquad \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha>1 \\ \text{diverge} & \text{se } 0<\alpha\le 1\end{cases}$$

Allo stesso modo vedo l'integrale

$$a>0 \qquad \int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_\varepsilon^a$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{-\alpha+1}\left(a^{-\alpha+1} - \varepsilon^{-\alpha+1}\right)$$

Ci sono 2 casi:

1° $\alpha-1<0$, ossia $\alpha<1$, $\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0$, quindi

l'integrale converge a $\frac{1}{1-\alpha}\,a^{1-\alpha}$

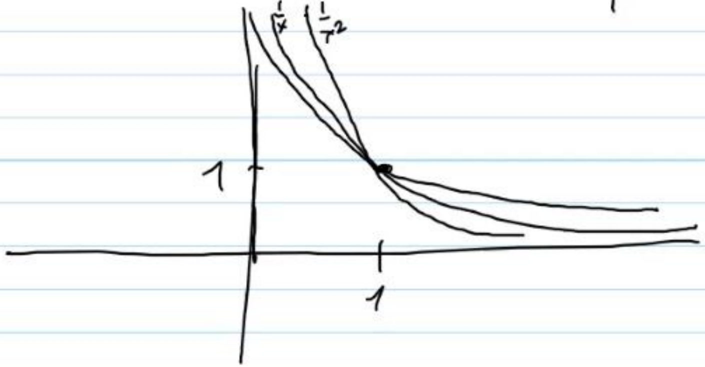
2° caso $\alpha-1>0$, cioè $\alpha>1$, $\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} +\infty$

quindi, tenendo conto del coefficiente davanti a $\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}$, l'integrale diverge positivamente!

Concludendo

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{converge per } \alpha<1 \\ \text{diverge per } \alpha\geq 1. \end{cases}$$

I 2 casi visti ora hanno un comportamento speculare



Tutto quanto fatto finora si può generalizzare al caso delle funzioni del tipo $f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^\alpha}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato

quindi sia il ruolo che giocava $x_0 = 0$ lo gioca un qualsiasi $x_0 \neq 0$

$a > x_0$ $\quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{(x-x_0)^\alpha}\, dx$ oppure $\int_{x_0}^{a} \frac{1}{(x-x_0)^\alpha}\, dx$

le regole di divergenza e convergenza saranno le stesse!

Attenzione! $\boxed{\cancel{\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}\, dx = ? = 0 ?}}$

Integranda $f(x) \geq 0$

→ confronto

→ confronto asintotico { caso standard / casi limiti

Integranda f segno qualsiasi

→ assoluta integrabilità

→ trucco integrazione per parti

→ metodo triangolini

1° CASO Integranda $f(x) \geq 0$

⇒ l'integrale improprio di f può solo convergere

o divergere positivamente

Criterio del confronto Supponiamo di avere un intervallo generico $E \subseteq \mathbb{R}$

e che $\forall x \in E$ si abbia $g(x) \geq f(x) \geq 0$

Allora valgono le seguenti implicazioni

Se $0 \leq \int_E g(x)\,dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x)\,dx < +\infty$.

Se $\int_E f(x)\,dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x)\,dx = +\infty$

Criterio del confronto asintotico

$$\boxed{\int_E f(x)\,dx \qquad\qquad \int_E g(x)\,dx}$$

Supponiamo $f(x)\geq 0$ e $g(x)>0$ in E

Supponiamo che $\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l \begin{cases}\neq 0\\ \neq\pm\infty\end{cases}}$ (CASO STANDARD)

↳ è il punto in E in cui c'è il problema

che può essere $x_0\in\mathbb{R}$ oppure $x_0=\pm\infty$.

Allora gli integrali hanno lo stesso comportamento, cioè il primo integrale converge se e solo se converge il secondo integrale.

CASI LIMITE ($l=0$ oppure $l=\pm\infty$).

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \implies \frac{f(x)}{g(x)}<1 \implies f(x)<g(x)$$ in un intorno di x_0

e allora applico il Criterio del confronto, quindi se

$\int_E g(x)\,dx<+\infty \implies \int_E f(x)\,dx<+\infty$; se $\int_E g(x)\,dx=+\infty \implies$ non so dire nulla su $\int_E f$

Supponiamo ora che $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

In questo caso allora in un intorno opportuno di x_0 succede che

$\frac{f(x)}{g(x)} > 1 \Rightarrow f(x) > g(x)$ e nuovamente applico il Criterio del confronto, ossia

se $\int_E g(x)\,dx < +\infty \Rightarrow$ non si dice nulla su $\int_E f$

se $\int_E g(x)\,dx = +\infty \Rightarrow \int_E f(x)\,dx = +\infty$

Nel caso in cui segno di $f(x)$ è qualsiasi allora vale il Criterio dell'assoluta integrabilità ossia:

$\int_E |f(x)|\,dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x)\,dx < +\infty$!!!

$\int_E |f(x)|\,dx = +\infty \Rightarrow$ non posso dire nulla su $\int_E f(x)\,dx$ ...+.

Esempio ? $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$

Ho 2 problemi e quindi $\int_0^1 + \int_{1^+}^{+\infty}$

Considero $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$. con $f(x) > 0$

$\boxed{\text{Brutale}}$: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$ quindi $\int f(x)\,dx$ con problema a $+\infty$ si comporta come $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ con problema all'infinito, ma noi sappiamo che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

$\boxed{\text{Rigoroso}}$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \cdot x^2 = 1 \begin{cases} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{cases}$ CASO STANDARD

$\Rightarrow$ i 2 integrali $\int_1^{+\infty} f$ e $\int_1^{+\infty} g$ hanno lo stesso comportamento

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$$

$\boxed{\text{Brutale:}}$ $f(x) > 0$ e $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0^+$

$\Rightarrow$ l'integrale per f in $[0,1]$ si comporta come l'integrale di $\frac{1}{\sqrt{x}}$ in $[0,1]$, poiché quest'ultimo integrale converge $\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$ è convergente.

$\boxed{\text{Rigoroso:}}$ $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x}+1} = 1 \begin{cases} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{cases}$$

CASO STAND.

$\Rightarrow$ ritroviamo il carattere di convergenza visto prima.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty} =$$ converge perché convergono i singoli pezzi.