Lezione 22ª

Integrazione Impropria

$\boxed{\text{Integranda } f(x) \geq 0}$

→ confronto

→ confronto asintotico { casi standard / casi limite

$\boxed{\text{Integranda } f(x) \text{ ha segno qualsiasi}}$

→ assoluta integrabilità

→ trucco dell'integrazione per parti

Esempio 1

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx \qquad f(x) \geq 0$$

L'integrazione ha 2 problemi: zona di integrazione che è una semiretta e integranda divergente nel limite inferiore dell'intervallo.

$\boxed{\text{Problema a } +\infty}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx \qquad \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{10}{x\sqrt{x}} = \frac{10}{x^{3/2}}$$

$$\alpha = \frac{3}{2} > 1 \implies \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} < +\infty$$

poiché $\frac{10}{x\sqrt{x}}$ è integrabile all'infinito $\Rightarrow$ per il Criterio del confronto $\frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}$ è integrabile all'infinito

$\boxed{\text{Problema in } 0}$

Non posso usare la funzione di confronto di prima $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ perché la funzione diverge in ogni intorno di 0 poiché

$$\alpha = \frac{3}{2} > 1$$

Però se guardiamo bene nell'intorno di 0

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}} \sim \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ora $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ quindi

Brutale…

la funzione di confronto $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ con esponente $\alpha = \frac{1}{2}$ quindi l'integrale $\int_0^1 g(x) < +\infty$ e quindi per il criterio del confronto $\int_0^1 f(x) < +\infty$.

Fatto in modo "rigoroso"

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\cancel{\sqrt{x}}} \cdot \cancel{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \; \begin{cases} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $g(x)$ e $f(x)$ hanno lo stesso comportamento sotto l'integrazione in $[0,1]$.

osservazione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx}_{\text{diverge } +\infty} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx}_{\text{converge}} = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}_{\text{converge}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}_{\text{diverge a } +\infty} = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx}_{\text{converge}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\cdot\sqrt{x}}\,dx}_{\text{converge}} \text{ “= converge”}$$

Esempio 2: $\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx$ $\quad f(x) \geq 0$ in $(0,1]$

Posso applicare il confronto asintotico $\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$ $\quad x \to 0^+$

quindi le 2 funzioni hanno lo stesso comportamento sotto l'integrazione in $[0,1]$ ma $\int_0^1 \frac{1}{x}$ diverge!

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sin x}$ è divergente!

Esempio 3

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

ora $f(x)$ ha segno variabile e quindi provo ad applicare l'assoluta convergenza ossia studio $\int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx$

ora $\frac{|\sin x|}{x^2} \geq 0$ in $[2, +\infty)$ e quindi provo ad applicare i criteri sul confronto.

$$\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

ma $\frac{1}{x^2}$ ha esponente $\alpha = 2 > 1$

per cui è integrabile su tutte le semirette $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

Per cui per il criterio sul confronto $\Rightarrow$ $\frac{|\sin x|}{x^2}$ ha integrale convergente in ogni $[a, +\infty)$ (con $a > 0$) per cui ancora per il criterio della convergenza assoluta $\Rightarrow$ $\frac{\sin x}{x^2}$ ha integrale convergente in ogni $[a, +\infty)$ ($a > 0$).

Esempio 4

$$\int_0^{10} \frac{\sin x}{x^2}\,dx = \int_0^{1} \frac{\sin x}{x^2}\,dx + \underbrace{\int_1^{10} \frac{\sin x}{x^2}\,dx}_{\text{esiste come integrale proprio}}$$

$$\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \qquad x \to 0^+$$

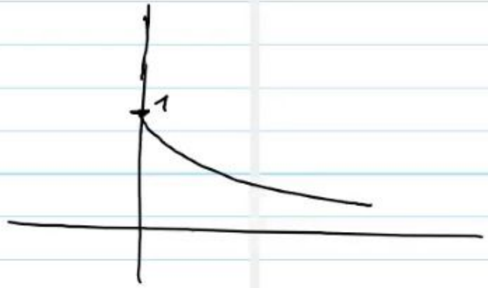
ma allora $\frac{\sin x}{x^2}$ ha lo stesso comportamento di $\frac{1}{x}$ per l'integrazione in $[0,1]$ però $\frac{1}{x}$ ha integrale divergente in $[0,1]$ poiché $\alpha = 1$ quindi $\frac{\sin x}{x^2}$ ha integrazione divergente $(+\infty)$ in $[0,1]$

Conclusione $\int_0^{10} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ è divergente positivamente.

Rigorosamente: controllare l'asintotica con $g(x) = \frac{1}{x}$ per $x \to 0^+$ (A CASA!)

Esempio 5 :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \doteq \lim_{A\to+\infty} \underbrace{\int_0^A e^{-x^2}\,dx}_{Erf(A)}$$



$f(x)=e^{-x^2}$ NON HA PRIMITIVA!

$f(x)>0$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}\cdot x^{10} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10}}{e^{x^2}}$$

$$g(x)=\frac{1}{x^{10}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

$\frac{f(x)}{g(x)}\to 0$ per $x\to+\infty$ $\Rightarrow$ $\frac{f(x)}{g(x)}<1$ per x sufficientemente grandi

$\Rightarrow f(x)<g(x)$ ....

quindi il comportamento di $f(x)$ segue quello di $g(x)=\frac{1}{x^{10}}$ con $\alpha=10>1$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) < +\infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ è convergente!

Esempio 6 : $\int_0^1 \log x \, dx$ $\qquad f(x) = \log x \leq 0$ in $[0,1]$

$$\int_0^1 \log x \, dx = - \int_0^1 (-\log x) \, dx$$

Provo a fare il criterio asintotico in 0 con la funzione $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ che so essere con integrazione convergente in $[0,1]$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\log x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0^+} (-\log x) \cdot \sqrt{x} = 0$$

Limite non standard però sappiamo che $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$ per x sufficientemente vicini a 0

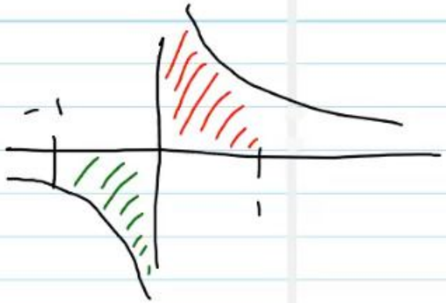
$\Rightarrow$ $f(x) < g(x)$ nello stesso intervallo per cui ~~poiché~~ $g(x)$ è integrabile nell'intorno dell'origine $\Rightarrow$ $f(x)$ ha lo stesso comportamento

$\int_0^1 \log x \, dx$ è convergente $+$.

Esempio 7: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx$ ~~$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}(1-1) = 0$~~

NO!

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx}_{-\infty} + \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx}_{+\infty}$$



Per definizione $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx$ è INDETERMINATO!

Cosa succede se il problema dell'integrazione non è né in 0 né in $+\infty$?

Posso provare ad usare un cambiamento delle variabili

Esempio 8: $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

ho il problema in $x=1$

Pongo $y = x-1$ cioè $x = y+1$

$\Rightarrow dx = dy$ e $\begin{cases} \text{se } x=1 \Rightarrow y=0 \\ \text{se } x=2 \Rightarrow y=1 \end{cases}$

per cui

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2-1}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{y^2+2y+1-1}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{y^2+2y}\,dy$$

$f(y) = \frac{1}{y^2+2y} \geq 0$ si comporta come $\frac{1}{y}$ per $y \to 0^+$

$\int_0^1 \frac{1}{y}\,dy = +\infty$ per cui $\int_0^1 f(y) = +\infty$

e quindi $\int_1^1 \frac{1}{x^2-1}\,dx$ diverge!

$$\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge se } \alpha < 1 \\ \text{diverge } (+\infty) \text{ se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{1}{|b-x|^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge se } \alpha < 1 \\ \text{diverge } (+\infty) \text{ se } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Esempio 9 : $\int_1^3 \frac{1}{\log x}\,dx \qquad f(x) \geq 0$

Il problema è solo in $x=1$, $\log x = \log(1-1+x)$

$= \log(1+(x-1))$

pongo $y = x-1 \Rightarrow x = y+1 \Rightarrow dx = dy$ se $x=1 \Rightarrow y=0$

se $x=3 \Rightarrow y=2$

$$\int_1^3 \frac{1}{\log x}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{\log(1+y)}\,dy$$

ora so che $\log(1+y) \sim y$ per $y \to 0^+$ per cui

$$\frac{1}{\log(1+y)} \sim \frac{1}{y} \text{ per } y \to 0^+ \quad \text{ma} \quad \int_0^2 \frac{1}{y}\,dy = +\infty$$

bene tutto ...

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{\log(1+y)}\,dy = +\infty \Rightarrow \boxed{\int_1^3 \frac{1}{\log x}\,dx = +\infty}$$

$\Rightarrow$ farlo "rigorosamente" (A CASA) ...

Esempio 10:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} \geq 0 \text{ in } (1,+\infty)$$

Integrale improprio con 2 problemi: integrazione in semiretta e integrazione in $x=1$ con funzione ivi divergente a $+\infty$.

Problema a $+\infty$

$$f(x) \sim \overbrace{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}^{g(x)} \quad x\to+\infty \quad \text{ma} \quad \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}} \quad \alpha=\frac{3}{2}>1$$

quindi $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ ha integrazione impropria convergente all'∞

Problema in $x=1$ 2 modi: cambio delle variabili (fatelo voi per controllo)

oppure, in alternativa, notare che

$$\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad \text{per } x\to1^+ \text{ e poiché}$$

colpevole della divergenza in $x=1$

$$\alpha=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx<+\infty$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}} \cdot \sqrt{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{cases} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f e g hanno lo stesso comportamento in un intorno di $x=1$.

g è integrabile $\Rightarrow$ f è integrabile

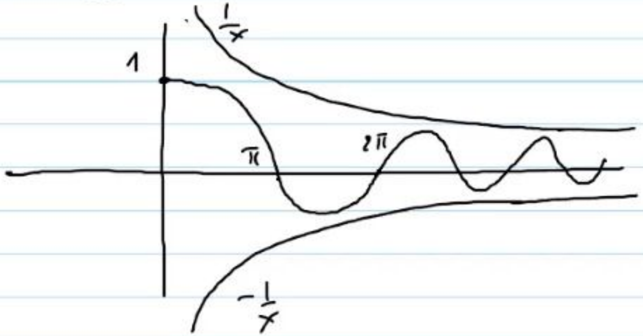
Integrali Oscillanti

Integrazione per parti

Esempio 11 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ — funzione integranda che cambia segno in $(0,+\infty)$

Solo problema all'infinito poiché $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow f(x)$ è limitata in ogni intorno di $x=0$.

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x} \qquad x>0$$



Provo a vedere con l'integrazione assoluta

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \Rightarrow \text{provo con il criterio del confronto}$$

$$\frac{|\sin x|}{x} \le \frac{1}{x}$$

però $\frac{1}{x}$ ha integrale divergente sulle semirette $[a, +\infty)$ $a > 0$

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx < +\infty$$

$\Rightarrow$ non so dire che succede per $\frac{|\sin x|}{x}$

Approccio alternativo: uso la definizione

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^5 \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\text{finito!}} + \underbrace{\int_5^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\substack{\text{integrale improprio} \\ \text{con problema all'infinito}}}$$

Questo integrale lo studio con la definizione:

$$\int_5^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_5^A \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Ora, uso l'integrazione per parti nell'integrale proprio $\int_5^A \frac{\sin x}{x} dx$

$$\int_5^A \frac{\sin x}{x} dx = \text{"} \int_5^A f(x) g'(x) dx \text{"} = \int_5^A \frac{1}{x} \cdot \underbrace{(-\cos x)'}_{g(x) = -\cos x} dx$$

$$= \frac{1}{x} \cdot (-\cos x) \Big|_5^A - \int_5^A -\frac{1}{x^2} \cdot -\cos x \, dx$$

$$= \frac{\cos 5}{5} - \frac{\cos A}{A} - \int_5^A \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$$\int_5^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \to +\infty} \int_5^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos 5}{5} - \underbrace{\int_5^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx}_{\text{questo converge?}}$$

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{integrale convergente poiché } \alpha = 2 > 1$$

ma $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow$ per confronto poiché $\frac{1}{x^2}$ ha integrale in $(5, +\infty)$ convergente $\Rightarrow \int_5^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx < +\infty$!

Per l'integrazione assoluta $\Rightarrow \int_5^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx < +\infty$!

Morale: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ è convergente.

La stessa cosa funziona per integrali del tipo $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\,dx$ con $a>0$.

e anche $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a}\,dx$ con $a>0$ $b>0$

<u>Esercizio 12</u>: $\displaystyle\int_0^{5} \frac{\cos x}{x}\,dx$ integrale improprio con problema in $x=0$ dove $f(x)$ diverge positivamente

brutalmente: $\displaystyle\frac{\cos x}{x} \sim \frac{1}{x}$ $x \to 0$ ma $\displaystyle\frac{1}{x}$ ha integrale divergente intorno a 0.

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^{5} \frac{\cos x}{x}\,dx$ <u>diverge</u>! $+$

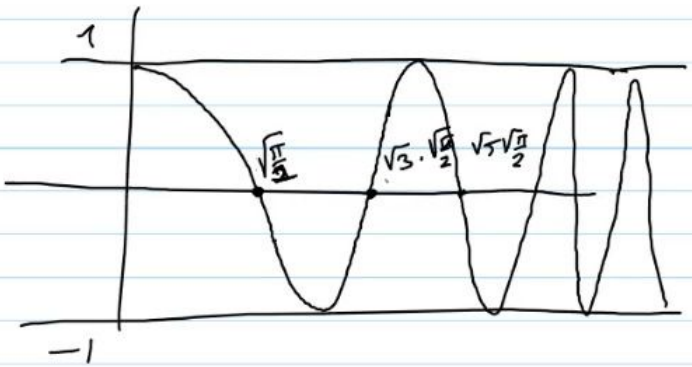
Esempio 13

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$$

$k \in \mathbb{N}_0$

$$\cos(x^2) = 0 \qquad x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{2k+1}$$

$k = 0$



$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \underbrace{\int_0^5 \cos(x^2)\,dx}_{\substack{\text{integrale} \\ \text{proprio} \\ \Rightarrow \text{finito}}} + \underbrace{\int_5^{+\infty} \cos(x^2)\,dx}_{\substack{\text{integrale} \\ \text{improprio}}}$$

Page 8
Page 9
Page 10
Page 11
Page 12
Page 13
Page 14
Page 15
Page 16
Page 17
Page 18

come prima

$$\int_5^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_5^A \cos(x^2)\,dx$$

cerco di usare l'integrazione per parti in $\int_5^A \cos(x^2)\,dx$

$$\int_5^A \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)}\cdot x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\sin(x^2)\Big|_5^A + \int_5^A \frac{\frac{1}{2}\sin(x^2)}{x^2}\,dx$$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2}\sin(x^2)\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin A^2}{A} - \frac{\sin 25}{5}\right) + \frac{1}{2}\int_5^A \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx$$

$\downarrow_{A\to+\infty}$ 0 $\qquad \downarrow$ $\frac{\sin 25}{5}$ $\qquad \downarrow$ $\frac{1}{2}\int_5^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx$

$$\int_5^{+\infty}\cos(x^2) = -\frac{\sin 25}{10} + \frac{1}{2}\int_5^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx$$

$\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ converge poiché $\alpha = 2 > 1$

$$\int_5^{+\infty} \frac{|\sin(x^2)|}{x^2}\,dx \quad \text{converge poiché} \quad \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

e per integrazione assoluta $\Rightarrow \displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx$ converge!

Quindi ne concludiamo che

$$\int_5^{+\infty} \cos(x^2)\,dx \quad \underline{\text{converge}}!$$

La stessa tipologia di discorso si può fare per integrali del tipo

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^a)\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x^a)\,dx \qquad a > 1$$