Lezione 26ª

EDO a variabili separabili

Esempio 1

$$\begin{cases} u' = \dfrac{u^2}{1+t^2} \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

① separare

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^2}{1+t^2} \qquad \boxed{\frac{du}{u^2} = \frac{dt}{1+t^2}}$$

② integrare

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$-\frac{1}{u} = \operatorname{arctg} t + c \implies \boxed{\frac{1}{u} = -\operatorname{arctg} t + C}$$

③ ricavare

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{C - \operatorname{arctg} t}}$$

sol. generale eq. diff. ord.

④ determinare C

$$7 = u(0) = \frac{1}{C} \implies C = \frac{1}{7}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{\frac{1}{7} - \operatorname{arctg} t} = \frac{7}{1 - 7\operatorname{arctg} t}}$$

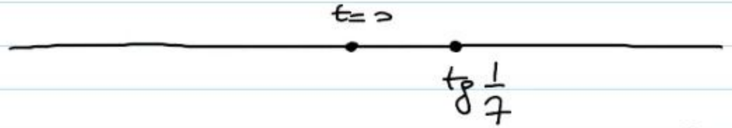
soluzione del problema di Cauchy

⑤ verifica (a casa)

6 studiare la soluzione

$$u(t)=\frac{7}{1-7\,\mathrm{arctg}\,t}$$

abbiamo problemi di esistenza quando $1-7\,\mathrm{arctg}\,t=0 \iff \mathrm{arctg}\,t=\frac{1}{7}$
$\iff \quad t=\mathrm{tg}\,\frac{1}{7}$



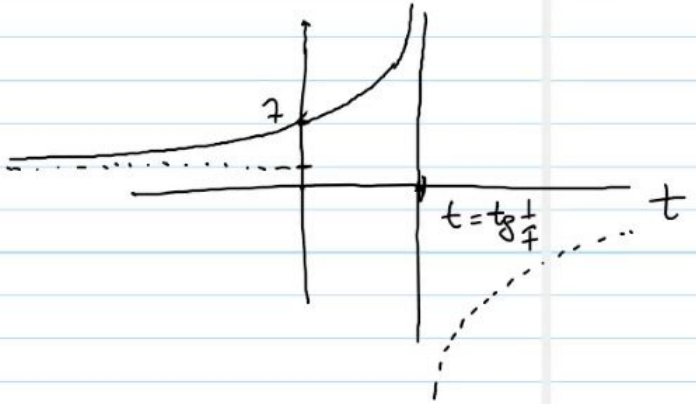
I intervallo massimale di esistenza $I=\left(-\infty, \mathrm{tg}\,\frac{1}{7}\right)$

$\hookrightarrow T =$ LIFE SPAN

$$\lim_{t\to T^-} u(t) = \left[\frac{7}{0^+}\right] = +\infty$$

Quindi la soluzione ha un BLOW-UP

Se $\lim_{t\to-\infty} u(t) = \dfrac{7}{1+\frac{7\pi}{2}}$



Esempio 2

$$\begin{cases} u' = \dfrac{u^2}{1+t^2} \\ u(0) = \dfrac{1}{7} \end{cases}$$

Il procedimento è lo stesso di prima fino alla soluzione generale dell' eq.

$$u(t) = \frac{1}{c - \operatorname{arctg} t}$$

(4) determinare c

$$\frac{1}{7} = u(0) = \frac{1}{c} \iff \boxed{c = 7}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{7 - \operatorname{arctg} t}}$$

soluzione del problema di Cauchy

(5) verifica (a casa)

(6) studiare la funzione

$$7 - \operatorname{arctg} t > 7 - \frac{\pi}{2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Intervallo massimale di esistenza $I = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ tale soluzione ha esistenza globale ovvero esiste per tutti tempi sia nel passato sia nel futuro.

Esempio 3

Stesso problema di Cauchy ma parametrico

$$\begin{cases} u' = \dfrac{u^2}{1+t^2} \\ u(0) = \alpha \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Ci interessa capire cosa succede al variare di α

$$u(t) = \frac{1}{c - \operatorname{arctg} t}$$

(4) Impongo Cauchy

$$\alpha = u(0) = \frac{1}{c} \iff \boxed{c = \frac{1}{\alpha}} \quad \text{quindi}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{\alpha}{1 - \alpha \operatorname{arctg} t}}$$

soluzione del problema di Cauchy parametrico

(5) verifica (a casa)

(6) st. soluzione al variare di α. Ci sono problemi quando $\operatorname{arctg} t = \frac{1}{\alpha}$ ossia quando

$$\frac{1}{\alpha} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad -\frac{\pi}{2} < \frac{1}{\alpha} < \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow \quad \alpha > \frac{2}{\pi}$ oppure $\alpha < -\frac{2}{\pi}$ ho problemi.

Mentre se $\alpha \in \left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$ $\Rightarrow$ ho soluzione globale

Esempio 4

$$\begin{cases} u' = \dfrac{u^2}{1+t^2} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Sempre la stessa sol. generale $u(t) = \dfrac{1}{C - \operatorname{arctg} t}$

(4) determino C $\quad 0 = u(0) = \dfrac{1}{C} \Rightarrow$ non ho soluzioni per C

ma il Teorema di esistenza e unicità mi garantisce che una soluzione esiste ...
quale è? È la soluzione banale $u(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Esempio 5

$$\begin{cases} u' = u^3 t^2 \\ u(0) = -3 \end{cases}$$

(1) separare $\quad \dfrac{du}{u^3} = t^2\,dt$

(2) integrare $\quad -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{u^2} = \dfrac{t^3}{3} + c$

(3) ricavare

$$\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} = -\frac{t^3}{3} + c \iff \frac{1}{u^2} = -\frac{2}{3}t^3 + c$$

$$u^2(t) = \frac{1}{c - \frac{2}{3}t^3} \Rightarrow \boxed{u(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{c - \frac{2}{3}t^3}}}$$

soluzione generale dell'eq. diff.

(4) determinare C $\quad -3 = u(0) = \pm \dfrac{1}{\sqrt{c}} \Rightarrow$ soluzione col segno meno

$$\Rightarrow 3 = \frac{1}{\sqrt{c}} \iff \boxed{c = \frac{1}{9}}$$

sol. del problema di Cauchy

$$\boxed{u(t) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} - \frac{2}{3}t^3}} = -\frac{3}{\sqrt{1-6t^3}}}$$

(5) verifica (a casa)

(6) studiare la soluzione

$$1-6t^3 > 0 \iff t^3 < \frac{1}{6} \iff t < \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$$

l'intervallo massimale di esistenza $I = \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{6}}\right)$

$\hookrightarrow T =$ LIFE SPAN

Poi, $\lim_{t\to T^-} u(t) = \left(\frac{-3}{0^+}\right) = -\infty$

quindi ho un BLOW-UP

Esempio 6

$$\begin{cases} u' = ut^2 \\ u(0) = -3 \end{cases}$$

(1) separare $\frac{du}{u} = t^2 dt$ (2) integrare $\int \frac{du}{u} = \int t^2 dt \Rightarrow \log|u(t)| = \frac{t^3}{3} + c$

(3) ricavare $\Rightarrow$ $|u(t)| = e^{\frac{1}{3}t^3 + c}$ $\Rightarrow$ $\boxed{u(t) = \pm e^{\frac{1}{3}t^3 + c}}$

sol. generale

(4) determinare c

$$-3 = u(0) = \pm e^{c} \Rightarrow$$ soluzione col segno negativo

$$\Rightarrow \boxed{c = \log 3}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = -3\, e^{\frac{1}{3}t^3}}$$

sol. problema di Cauchy

(5) verifica (a casa)

(6) studiare la soluzione

$u(t)$ esiste sempre quindi $I \equiv \mathbb{R}$

ho soluzione globale

Esempio 7

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{1}{u} \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

(1) separare $u\,du = -dt$

(2) integrare $\int u\,du = -\int dt \Rightarrow \frac{u^2}{2} = -t + c$

(3) ricavare $u^2 = -2t + c \Rightarrow \boxed{u(t) = \pm\sqrt{c - 2t}}$ sol. generale dell'eq.

(4) determino c

$5 = u(0) = \pm\sqrt{c} \Rightarrow$ soluzione col segno positivo

$\Rightarrow \sqrt{c} = 5 \iff \boxed{c = 25}$

Quindi $\boxed{u(t) = \sqrt{25 - 2t}}$ soluzione del problema di Cauchy

(5) verifica (a casa)

(6) studiare la soluzione $25 - 2t \geq 0 \iff 2t \leq 25 \iff t \leq \frac{25}{2} = T$

Intervallo massimale di esistenza è $I = \left(-\infty, \frac{25}{2}\right)$

$\lim_{t \to T^-} u(t) = 0 \Rightarrow$ non c'è BLOW-UP

EQUAZIONI DIFF. LINEARI OMOGENEE

$$a_n(t)\, u^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)\, u'(t) + a_0(t)\, u(t) = 0$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} a_j(t)\, u^{(j)}(t) = 0}$$

$\boxed{\text{Teoria generale}}$ "L'insieme delle soluzioni dell'eq. diff. lineare omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n

Detta $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ una base di tale spazio, la soluzione generale si scrive come combinazione lineare degli elementi della base, ossia

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_n u_n(t) \qquad c_j \in \mathbb{R} \quad j = 1, \dots, n$$ "

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Per una EDO lineare e omogenea l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni è sempre o tutto $\mathbb{R}$ oppure una semiretta (che contiene il punto iniziale del problema di Cauchy ed è l'intervallo in cui i coefficienti $a_j(t)$ $j = 1, \dots, n$ sono ben definiti)

Per la linearità esiste un algoritmo specifico per trovare una base dello spazio lineare delle soluzioni.

Caso eq. diff. lineari omogenee di ordine 2 con coefficienti costanti

$$\boxed{a u'' + b u' + c u = 0}$$

Associo a tale equazione una nuova equazione nel modo seguente

$$a x^2 + b x + c = 0$$ Polinomio caratteristico

Considero le radici di questo polinomio. Ho 3 casi:

1° CASO $\Delta > 0$. Allora il polinomio ha 2 radici reali distinte: λ, μ

Allora una base è $e^{\lambda t}, e^{\mu t}$, quindi la sol. generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

2° CASO $\Delta = 0$. Allora il polinomio ha 1 radice reale di molt. 2: λ

Allora una base è $e^{\lambda t}, \; t e^{\lambda t}$

3° CASO $\Delta < 0$. Allora il polinomio non ha radici reali, ma ha 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$

Allora una base è data da

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad , \quad e^{\alpha t}\sin(\beta t) \quad ,$$ quindi la sol. generale

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

Se abbiamo EDO lineare omogenea di grado n con coeff. costanti

si considera il polinomio caratteristico $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$

e si vanno a cercare le radici

→ ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molteplicità 1 produce un elemento $e^{\lambda t}$

→ ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ " " m produce m elementi della base:

$$e^{\lambda t}, \quad t e^{\lambda t}, \quad t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t}$$

→ ogni coppia di $\underbrace{\text{radici complesse coniugate}}_{\alpha \pm i\beta}$ di molt. 1 producono gli elementi della base

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad , \quad e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

→ ogni coppia di radici complesse coniugate di molt. m producono elementi della base del tipo

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ e^{\alpha t}\sin(\beta t),\ t e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ t e^{\alpha t}\sin(\beta t),\ \dots,\ t^{m-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t),$$
$$t^{m-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

→ In finale ricordiamo che la dimensione dello spazio vettoriale è n

Esempio 1

$$u'' - 4u' - 5u = 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \longrightarrow (x-5)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \text{ radici } \quad x = 5 \quad x = -1$$

$$\Rightarrow e^{5t},\ e^{-t} \quad \Rightarrow \text{ soluzione generale } \quad u(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}$$

Esempio 2

$$u'' - 4u' + 4u = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x-2)^2 = 0 \quad 1 \text{ radice molt. } 2$$

$$\text{base} \Rightarrow e^{2t},\ t e^{2t} \Rightarrow \text{sol. generale } \quad u(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$
$$= (c_1 + c_2 t) e^{2t}$$

Esempio 3

$$u'' + 10u' + 29u = 0$$

$$x^2 + 10x + 29 = 0$$

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 29} = -5 \pm \sqrt{-4} = -5 \pm 2i = \alpha \pm i\beta$$

base $\Rightarrow$ $e^{-5t}\cos(2t)$, $e^{-5t}\sin(2t)$

soluzione generale $u(t) = c_1 e^{-5t}\cos(2t) + c_2 e^{-5t}\sin(2t)$.

Esempio 4 $u'' + 4u' = 0$

$x^2 + 4x = 0 \Rightarrow = x(x+4) \Rightarrow$ 2 radici $x=0$, $x=-4$

base $\Rightarrow$ $\underset{1}{\overset{\shortparallel}{e^{0t}}}$, e^{-4t} $\Rightarrow$ soluzione generale $u(t) = c_1 + c_2 e^{-4t}$

Esempio 5 $u'' - 4u = 0$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0$ 2 radici $x = 2$, $x = -2$

base $\Rightarrow$ e^{2t} , e^{-2t} $\Rightarrow$ sol. generale $u(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$

Esempio 6 $u'' + 4u = 0$

$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow$ radici complesse coniugate $x = \pm 2i$

$\alpha = 0 \quad \beta = 2 \Leftarrow \alpha \pm i\beta$

base $\Rightarrow$ $\underset{1}{\overset{\shortparallel}{e^{0t}}}\cos(2t)$, $\underset{1}{\overset{\shortparallel}{e^{0t}}}\sin(2t)$

sol. generale $u(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$

Esempio 7

$$u^{(4)} + 9u'' = 0$$

$$x^4 + 9x^2 = 0$$

$$x^2(x^2+9) = 0 \Rightarrow \text{radici:}$$

una reale di molt. 2 $x=0$

una coppia complessa coniugata di molt. 1

$\alpha \pm i\beta = \pm 3i$

$\iff \alpha = 0 \quad \beta = 3$

base $\Rightarrow$ $\underbrace{e^{0t}}_{=1}$, $t\underbrace{e^{0t}}_{=1}$, $\underbrace{e^{0t}}_{=1}\cos(3t)$, $\underbrace{e^{0t}}_{=1}\sin(3t)$

$\Rightarrow$ sol generale $u(t) = c_1 + c_2 t + c_3\cos(3t) + c_4\sin(3t)$

Esempio 8

$$u^{(4)} + 2u'' + u = 0$$

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0$$

$$(x^2+1)^2 = 0$$

2 radici complesse coniugate di molt. 2 $x = \pm i$ $\alpha = 0$ $\beta = 1$

base $\Rightarrow$ $\underbrace{e^{0t}}_{=1}\cos(t)$, $\underbrace{e^{0t}}_{=1}\sin t$, $t\underbrace{e^{0t}}_{=1}\cos t$, $t\underbrace{e^{0t}}_{=1}\sin t$

sol. generale $u(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + c_3 t\cos t + c_4 t\sin t$.

OSS: Esistenza su tutto $\mathbb{R}$, se i coefficienti non hanno problemi la soluzione non ha problemi

Perché la base si trova in questo modo?

$$a u'' + b u' + c u = 0$$

$$u(t) = e^{\lambda t}$$

$u'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ $\quad u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, sostituisco nell'eq. diff e trovo

$$a \lambda^2 e^{\lambda t} + b \lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0$$

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c) e^{\lambda t} = 0 \iff \boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$$

EDO LINEARI NON OMOGENEE

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} a_j(t)\, u^{(j)}(t) = f(t)}$$

Fatto generale "Se u e v sono soluzioni dell'equazione non omogenea allora $w = u - v$ è soluzione dell'equazione omogenea associata, cioè l'eq. senza il termine $f(t)$"

dim: $w(t) = u(t) - v(t)$ allora per ogni $j \in \mathbb{N}$ ho che

$$w^{(j)}(t) = u^{(j)}(t) - v^{(j)}(t)$$

quindi

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(t)\, w^{(j)}(t) \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\left(u^{(j)}(t) - v^{(j)}(t)\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{n} a_j(t)\, u^{(j)}(t)}_{f(t)} - \underbrace{\sum_{j=0}^{n} a_j(t)\, v^{(j)}(t)}_{f(t)} = 0$$

$\blacksquare$

Conseguenza: La soluzione generale dell'EDO lineare non omogenea si scrive nella forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_n u_n(t) + \bar{u}(t)$$

dove $u_1, \dots, u_n$ sono una base dello spazio lineare delle soluzioni dell'eq. omogenea associata, e $\bar{u}$ è una soluzione dell'eq. non omogenea detta soluzione particolare

Operativamente:

1. Trovare la base dell'eq. omogenea associata
2. una soluzione qualsiasi dell'eq. non omogenea

Come trovo $\bar{u}$? Ci sono 2 metodi:

1. Variazione delle costanti (Lagrange)
2. Provare ad indovinare

Il primo è sistematico e funziona sempre ma richiede tantissimi conti anche nei casi più semplici

il secondo non è sistematico, funziona solo in casi semplici ma è sostanzialmente immediato.

Esempio 1 $\qquad u'' - 3u' - 4u = e^{2t}$

$\Rightarrow$ sol. omogenea $\Rightarrow$ polinomio caratt. $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow$ radici reali

$x = 4 \quad x = -1 \Rightarrow$ base $e^{4t}, e^{-t} \Rightarrow$ sol. generale omogenea ass. $\boxed{ae^{4t} + be^{-t}}$ +

$\Rightarrow$ soluzione particolare non omogenea

$$\bar{u}(t) = \lambda e^{2t}$$

$\bar{u}'(t) = 2\lambda e^{2t} \quad u''(t) = 4\lambda e^{2t}$ e sostituiamo nell'eq. diff.

$$4\lambda e^{2t} - 6\lambda e^{2t} - 4\lambda e^{2t} = e^{2t} \iff 4\lambda - 6\lambda - 4\lambda = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{6}} \Rightarrow \boxed{\bar{u}(t) = -\frac{1}{6} e^{2t}}$$

17 / 17 10:57

Soluzione generale eq. non omogenea è

$$\boxed{u(t) = a e^{4t} + b e^{-t} - \frac{1}{6} e^{2t}}$$

Esempio 2

$$u'' - 3u' - 4u = e^{-7t}$$

$\Rightarrow$ per la parte omogenea abbiamo già visto prima.

$\Rightarrow$ devo trovare una sol. particolare della non omogenea in base al termine noto

$$\bar{u}(t) = \lambda e^{-7t}$$

$u'(t) = -7\lambda e^{-7t}$ $\quad u'' = +49\lambda e^{-7t}$, sostituiamo nell'eq. non omogenea

$$49\lambda e^{-7t} + 21\lambda e^{-7t} - 4\lambda e^{-7t} = e^{-7t} \iff 49\lambda + 21\lambda - 4\lambda = 1$$

$$\iff 66\lambda = 1 \iff \boxed{\lambda = \frac{1}{66}}$$

Esempio 3) $u'' - 3u' - 4u = e^{4t}$

Cerco una sol. particolare del tipo $u(t) = \lambda e^{4t}$

$u' = 4\lambda e^{4t}$, $u'' = 16\lambda e^{4t}$, sostituisco nell'eq. non omogenea

$$16\lambda e^{4t} - 12\lambda e^{4t} - 4\lambda e^{4t} = e^{4t}$$

$$\iff 16\lambda - 12\lambda - 4\lambda = 1 \iff 0 = 1 \Rightarrow ???$$

Tutto è assurdo perché e^{4t} è un elemento della base dell'eq. omogenea associata!

In casi come questo, se il termine noto è del tipo di uno degli elementi della base, il tentativo da fare deve essere del tipo

$$\bar{u}(t) = \lambda t e^{4t}$$

$\bar{u}'(t) = \lambda e^{4t} + 4\lambda t e^{4t}$ $\quad \bar{u}'' = \underbrace{4\lambda e^{4t} + 4\lambda e^{4t}}_{8\lambda e^{4t}} + 16\lambda t e^{4t}$, sostituisco nell'eq.

e ottengo

$$8\lambda e^{4t} + 16\lambda t e^{4t} - 3\lambda e^{4t} - 12\lambda t e^{4t} - 4\lambda t e^{4t} = e^{4t}$$

$$8\lambda + 16\lambda t - 3\lambda - 12\lambda t - 4\lambda t = 1 \iff \boxed{\lambda = \frac{1}{5}}$$

La soluzione generale dell'eq. non omogenea è

$$\boxed{u(t) = a e^{4t} + b e^{-t} + \frac{1}{5} t e^{4t}}$$

Regola generale Se il termine di non omogeneità è del tipo $f(t) = e^{\alpha t}$ allora il tentativo da fare per trovare una soluzione particolare dell'eq. non omogenea è del tipo $\boxed{\bar{u}(t) = \lambda e^{\alpha t}}$. Questo funziona se α non è radice del polinomio caratteristico dell'eq. omogenea associata. Se in caso contrario α è radice di molteplicità m del polinomio caratteristico allora il tentativo deve essere del tipo

$$\boxed{\bar{u}(t) = \lambda t^m e^{\alpha t}}$$