1 Introduzione

probabilità → misurare l'incertezza
statistica:

- descrittiva
- differenziale → <u>campione casuale</u> per <u>stimare</u> un esito

---

probabilità:

$$\frac{casi favorevoli}{casi totali}$$ **<u>SE</u>** equiprobabili

per contare i casi ci si appoggia alla <u>combinatoria</u>

---

partizione: separazione di A in sottoinsiemi senza elementi comuni

---

NB:

- $\wedge$ - and → $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
- $\vee$ - or → $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Principi della combinatoria:

1. A insieme, $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ partizione di A → $\#A = \sum_{i=1}^{n} \#E_i$
   - A,B insiemi, AxB è l'insieme di coppie ordinate (a,b)

2. $\#(AxB) = \#A \cdot \#B \rightarrow \{A_i\}^n_{i=1} = \bigotimes^n_{i=1} A_i$
3. A,B, $\#(A \cup B) = \underline{\#A + \#B - \#(A \cap B)}$ (non perfetto) $\rightarrow$

$$\# \cup^n_{i=1} A_i = \sum_{i=1}^n \#A_i - \sum_{i<j} \#(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{+(-1)^{n+1}\ \# \cap^n_{i=1} A_i}$$

2 Permutazioni e anagrammi

Fattoriale $\rightarrow$ x! = 9! = $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

NB: 0! = 1

- "prendiamo" ha 9! anagrammi
- "anagramma" ha tre ripetizioni di a e due ripetizioni di m, quindi per calcolare i casi unici:

$$\frac{9!}{3! \cdot 2!}$$

$$\downarrow$$

per calcolare la probabilitàdegli elementi n, ma mi interessano solo k elementi allora:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

se non sono interessato all'ordine, allora:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} \Rightarrow \binom{n}{k}$$

chiamato anche **coefficente binominiale**

Proprietà:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{\mathrm{n}}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

3 Esperimenti aliatori

Un esperimento si definisce **aliatorio** o casuale se con i dati iniziali il risultato è incerto. I risultati a 2 a2 incompatibili di un esperimento aliatorio sono chiamati **esiti**. Ω denota lo **spazio degli esiti**. Un **evento** è un osservabile di un esperimento aliatorio.

Una parte di Ω può essere considerata come famiglia:

$$\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\Omega)$$

Questa è definita come **algebra** se:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- se $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ allora $\mathrm{A^c} \in \mathcal{F}$
- se $\mathrm{A,B} \in \mathcal{F}$, allora $\mathrm{A \cup B} \in \mathcal{F}$

  potremmo scrivere anche $\{\mathrm{A_i}\}_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \subseteq \mathcal{F}$ allora $\cup_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{A_i} \in \mathcal{F}$

Proprietà

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- se A,B$\in \mathcal{F}$ allora A$\cap$B$\in \mathcal{F}$
- se $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{F}$ allora $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$
- se A,B $\in \mathcal{F}$, allora A$\cdot$B $\in \mathcal{F}$
- se A,B $\in \mathcal{F}$, allora A$\triangle$B $\in \mathcal{F}$

$\mathcal{F} \subseteq$P(Ω) è una **tribù** se:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- A$\in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$
- per ogni famiglia <u>numerabile</u> $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty} \subseteq P(\Omega)$,
  allora $\cup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

NB: generalmente una tribù è un'algebra se hanno elementi finiti

$\mathcal{F}$ tribù su Ω. Ogni E$\in \mathcal{F}$ (E è sottoinsieme di Ω) si dice **Evento**. I singoletti si chiamano **eventi elementari**. E si verifica se il risultato dell'esperimento appartiene ad E $\mathcal{F}$ tribù su Ω (Ω,$\mathcal{F}$)

Dati Ω, $\mathcal{F}$ tribù su Ω (Ω,$\mathcal{F}$) si chiama **spazio probabilizzabile**.

(Ω,$\mathcal{F}$), una funzione P:$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}$ si dice **funzione di probabilità** se:

- per ogni evento E P(E)$\geq$0
- P(Ω)=1
- data una famiglia numerabile $\{E_i\}_{i=1}^{+\infty}$ di eventi a 2 a 2 disgiunti:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \text{ (additività)}$$

Proprietà delle probabilità

- $P(\emptyset) = 0$
- $E \in \mathcal{F}$ allora $P(E^c) = 1-P(E)$
- $E,F \in \mathcal{F}$, $E \subseteq F \Rightarrow P(E) \leq P(F)$
  $E \in \mathcal{F}$ $P(E) \leq 1$
- $E,F \in \mathcal{F}$ $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
  $P(E \cup F) \leq P(E) + P(F)$
  $(E_i)_{i=1}^{n}$¡$\mathcal{F}$, $P(\cup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{k \in \mathcal{P}(\{1-n\})} (-1)^{\#k+1} P(\cap_{j \in k} E_j)$
  $(E_i)_{i=1}^{+\infty} \subset \mathcal{F}$, $P(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$
- (disuguaglianza di bonferrow)
  $\sum_{i=1}^{+\infty} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i \cap E_j) \leq P(\cup_{i=1}^{+\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

4 Probabilità condizionata

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $E,F \in \mathcal{F}$ con $P(F) \neq 0$, allora la probabilità di E condizionale a F è:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Dato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e due sotto tribù $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ di $\mathcal{F}$ allora $\mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2$ sono indipendenti se se ogni elemento di $\mathcal{F}_1$ è indipendente da ogni elemento di $\mathcal{F}_2$

$$P(E_1 \cap E_2 \,|\mathcal{F}) = P(E_1|\mathcal{F}) \cdot P(E_2|\mathcal{F})$$

5 funzione di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

1. Ω finito o numerabile

   Ω è dato

   $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

   P: assegnamo ad ogni singoletto $(\omega \in \Omega)$ un probabilità tale che:

   P(ω)$\geq$0

   $\sum$P(ω)=1

   A questo punto $\forall$ E $\in \mathcal{F}$ P(E):=$\sum_{\omega \in E}$P(ω)

2. Spazi prodotto

   considerando più ripetizioni di un esperimento o l'unione di più esperimenti: data una famiglia di sottoinsiemi di Ω dette $\mathcal{A}$. La tribù di $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ generata da $\mathcal{A}$ come la più piccola tribù contenente $\mathcal{A}$

   $$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A}) = \cap\{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ è tribù in } \Omega \text{ e } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}\}$$

   quindi il prodotto $\Omega_1 \times \Omega_2$, la tribù sarà:

   $$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathrm{E}} \bigotimes \mathcal{F}_{\mathrm{E}} = \sigma(\{E_1 \times E_2 : E_1 \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}},\, E_2 \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}}\})$$
   $$(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1),\, (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$$
   $$\Downarrow$$
   $$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$
   $$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathrm{E}} \bigotimes \mathcal{F}_{\mathrm{E}} = \sigma(\{E_1 \times E_2 : E_1 \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}},\, E_2 \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}}\})$$
   $$\mathrm{P} : \mathrm{P}(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2) = \mathrm{P}_1(\mathrm{E}_1) \cdot \mathrm{P}_2(\mathrm{E}_2)$$

   Quindi:
   con un numero finito di esperimenti $\{(\Omega_{\mathrm{i}}, \mathcal{F}_{\mathrm{i}}, P_{\mathrm{i}})\}_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ allora lo spazio prodotto ha forma:
   $\Omega = \bigotimes_{i \in I} \Omega_i$
   $\mathcal{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i = \sigma(\Pi_{i \in I}\ E_i : E_i \in \mathcal{F}_i$ e $\exists$n tc $\forall j \geq n$ E_{j}=Ω_i)
   P = $\bigotimes_{i \in I}$ P_{i} cioé P($\Pi_{i \in I}$ E_{i}) = $\Pi_{i \in I}\mathrm{P}_{\mathrm{i}}(\mathrm{E}_{\mathrm{i}})$

6 Trasformazioni lineari di variabili aleatorie

07/04/21

X variabile aleatoria con legge F_X. Se X è variabile aleatoria discreta:

$$\varphi_Y(y) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} \varphi_X(x)$$

Se X è variabile aleatoria assolutamente continua abbiamo 2 strategia:

1. Ricaviamo la legge di Y usando la forma di X e della funzione g
2. usiamo il teorema generale

Teorema del cambio di variabile

Sia X variabile aleatoria continua di densità f_X, sia $Y = g(x)$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a tratti t.c. $P(g(x) = 0) = 0$. Allora:

$$f_Y(y) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} \frac{f_X(x)}{|g^1(x)|}$$

7 Vettori aleatori

Dato uno spazio probabilizzabile $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ consideriamo 2 variabili aliatorie $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^2$

Def: dati $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e X, Y variabili aleatorie su di esso si chiama **coppia di variabili aleatorie** o **variabile aleatoria doppia** o **2-vettore aleatorio**. La funzione $V : \Omega \to \mathbb{R}^2 : V(\omega) = (X(\omega/Y(\omega)))$. Il supporto del vettore aleatorio V:

$$\mathcal{R}_V = \mathcal{R}_{X,Y} = \mathcal{R}_X \times \mathcal{R}_Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathcal{R}_X, y \in \mathcal{R}_Y\}$$

Def: Data (X, Y) coppia di variabili aleatorie, la sua funzione di ripartizione è:

$$F_{X,Y}((x, y)) = F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$F_{X,Y}$ si chiama anche funzione di ripartizione **congiunta** di X e Y

Def: Data (X, Y) coppia di variabili aleatorie, chiameremo **funzione di ripartizione di X condizionata a Y** la funzione:

$$F_{X|Y}(x|y) := \frac{F_{X,Y}(x,y)}{F_Y(y)}$$

Def: Dato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e due tribù $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sono indipendenti se lo sono le tribù $\sigma(x)\ e\ \sigma(y)$ da esse generate

Prop: X, Y sono indipendenti se e solo se:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ F_{X|Y}(x|y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Prop: X, Y sono indipendenti se e solo se:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ F_{X|Y}(x|y) = F_X(x)\ e\ F_{Y|X}(y|x) = F_Y(y)$$

8 Vettori aleatori discreti

Def: Siano X, Y variabili aleatorie discrete su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ chiamiamo **densità discrete congiunte** la funzione $\varphi_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ definita:

$$\varphi_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

la **densità discreta di X condizionata a Y** è $\varphi_{X,Y}$ definità:

9 Schema o processo di Bernoulli

21/04/21

Dati infiniti esperimenti indipendenti e identicamente distribuiti

$$(X_i)_i \in \mathbb{N}\ iid\ X_i \sim bin(1,p)$$

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}/\{0\}}$
Tribù $\mathcal{F}$ generata dai cilindri
P uguale al prodotto delle probabilità delle componenti

9.1 Cilindri

I cilindri sono sottoinsiemi $c \subseteq \Omega$ tali che esiste un $n \in \mathbb{N}/\{0\}$ e un vettore $v \in \{0,1\}^n$:

$$C = \{\omega \in \Omega : \omega_i = v_i\ 1 \leq i \leq n\}$$

Es:

- un successo seguito da due insuccessi:
  Cilindro: $n = 3\ v = (1,0,0) \Rightarrow prob = p(1-p)^2$
- primo successo al k-esimo lancio:
  Cilindro: $(0,0,...,0_{k-1},1_k) \Rightarrow prob = (1-p)^{k-1}p$
- prob 3° lancio sia un successo:
  $(\cdots 1*) = (001) \cup (101) \cup (011) \cup (111)$
  $P(\cdots 1*) = \sum P(...) = (1-p)^2p + 2(1-p)p^2 + p^3 = P(p+(1-p))^2$

10 Geometriche

Una varibile aleatoria ($T_1 := inf\{i \geq 1 : \omega_i = 1\}$) è una geometrica di parametro p $X \sim geom(p)$ se è l'istante precedente al primo successo in un processo di Bernoulli di parametro p cdf di una geometria:

$$F_X(x) \begin{cases} 0 \quad x < 0 \\ \sum_{k=0}^{x} \varphi_x(k) = 1 - (1-p)^x \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Assenza di memoria: $\forall n, k \in \mathbb{N} \quad P(x \geq n + k | X \geq n) = P(X \geq k)$
es:

$$(Y \geq 60 + 30 | Y \geq 60) = (Y \geq 30) = (1-p)^{30}$$

11 Binominali negative

T_n= istante dell'n-esimo successo

$T_1 := inf\{i \geq 1 : \omega_i = 1\}$
$T_{n+1} := inf\{i \geq T_n : \omega_i = 1\}$ $n \geq 1$

X è una variabile aleatoria binominale negativa (o di pascal) di parametri n e p se è il numero di insuccessi precedenti all'n-ennesimo successo di uno schema di bernoulli di parametro p $X \sim NB(n,p)$

$$pnk \in \mathbb{N}\varphi_x(k) \begin{cases} = P(x = k) = P(T_n = k + n) \\ = P(\omega_{n+k} = 1, \sum_{j=1} \omega_j = n - 1) \\ = p\binom{k+n-1}{n-1} p^{n-1}(1-p)^k \end{cases} \Rightarrow \binom{k+n-1}{n-1} p^n (1-p)^k \tag{2}$$

12 Riproducibilità

22/04/21

Una famiglia di variabili aleatorie si dice riproducibile se sommando 2 variabili aleatorie indipendenti appartenenti a quella famiglia abbiano ancora una variabile aleatoria della medesima famiglia

Prop: La famiglia delle binominali a parametro p fissato è riproducibile. Se $X \sim bin(n,p),\ Y \sim bin(m,p)$, X e Y indipendenti allora:

$$X + Y \sim bin(n+m, p)$$

13 Ipergeometriche

Data un urna con n biglie bianche e n biglie nere, contiamo le bianche:
- con reimmissione abbiamo $bin(k, \frac{n}{m+n})$
- senza reimmissione usiamo un'ipergeometrica

Def: Si chiama ipergeometrica di parametri k, n, m la variabile aleatoria che conta il numero di bianche tra le estratte senza reimmissione

$$X \sim hyp(k, n, m)$$

$$\varphi_x(b) : \begin{cases} \frac{\binom{m}{b}\binom{n}{k-b}}{\binom{n+m}{k}} \\ 0 \ \ altrimenti \end{cases}$$

28/04/2021

Prop: Siano $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ interi non negativi che tendono in modo monotono a $+\infty$, $\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} b_i = +\infty$ o tali che $\lim_{i\to\infty} \frac{a_i}{b_i+a_i} = \alpha,\ \alpha \in [0,1]$, allora:

$$\frac{\binom{a_i}{k}\binom{b_i}{n-k}}{\binom{a_i+b_i}{n}} \to_{i\to\infty} \binom{n}{k}\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}$$

14 Poisson

Def: X è variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda > 0$ se:

$$\varphi_x(k) \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} & k \in \mathbb{N} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

e si denota come $X \sim Pois(\lambda)$

Es:
in una partita di calcio vengono segnati 2.5 gol di media. X determina la probabilità di fare gol in un intervallo:
$\Rightarrow$ dividiamo 90' in 5 intervalli: $X \sim bin(5, 1/2)$
$\Rightarrow$ dividiamo in 20 intervalli: $X \sim bin(20, 1/8)$
$\Rightarrow$ dividiamo in 90 intervalli: $X \sim bin(90, 1/36)$

Questa successione tende a una variabile aleatoria di Poisson

Oss: Poisson viene a volte utilizzato come descrizione di una binomiale con n, p piccoli o grandi, non precisi

Prop: $\{p_n\}_n$ successione di numeri in $[0,1]$ tale che $\lim_{x\to\infty} n \cdot p_n = \lambda \in \mathbb{R}^+$ allora $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Prop: Le variabili aleatorie di Poisson sono riproducibili. $X \sim Pois(\lambda_1)$, $Y \sim Pois(\lambda_2)$:

$$X + Y \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$$