LEZIONE 7ª

(a_n) successione reale

$$\underbrace{a_n \to \ell \quad n \to +\infty \qquad \ell \in \mathbb{R} \quad \ell \in \{\pm\infty\}}_{\text{successioni regolari}}$$

$$\lim a_n = \ell \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \qquad \lim_n a_n = \ell$$

Teorema 6.16 (Cambiamento delle variabili)

"Sia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente. Allora se (a_n) è regolare vale

$$\lim a_n = \lim a_{f(n)} \text{ ."}$$

dim: $(a_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ è veramente una successione?

Ricordiamo che se f è strett. crescente è anche iniettiva

$\Rightarrow$ $f(\mathbb{N})$ è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ infinito $\Rightarrow$ $\sup f(\mathbb{N}) = +\infty$

$\Rightarrow$ $(a_{f(n)})$ è una successione nel senso proprio del termine

Supp (a_n) sia regolare. Allora sappiamo che in ognuno dei 3 casi possibili (convergenza reale, divergenza a $\pm\infty$) si ha che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ vale una delle 3 possibili caratterizzazioni di "convergenza"

Poiché $f(\mathbb{N})$ è infinito, in corrispondenza di N esiste un indice $k_N \in \mathbb{N}$ tale che $\underline{\underline{f(k_N) > N}}$. Ora poiché f è strett. crescente questo implica che per ogni $n > k_N$ avrò che $f(n) > f(k_N) > N$

$\Rightarrow$ (a_n) e $(a_{f(n)})$ hanno lo stesso carattere quindi $(a_{f(n)})$ è regolare poiché (a_n) lo è. ■

Corollario 6.17 " Per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato ho

$$\boxed{\lim a_{n+k} = \lim a_n} \text{ "}$$

dim: $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad k(n) = n + k$

Proprietà successioni regolari: LIMITATEZZA, MONOTONIA, ALGEBRA DEI LIMITI

1. LIMITATEZZA

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad (n, a(n)) \equiv a_n$$

$$a(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$$

$$\boxed{a(\mathbb{N}) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$$

diremo che (a_n) è sup. limitata se $a(\mathbb{N})$ lo è

ossia se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(a_n) è inf. limitata se $a(\mathbb{N})$ lo è

ossia se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \ge m$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Diremo che (a_n) è limitata se esistono $m, M \in \mathbb{R}$

per cui $m \le a_n \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Quindi se (a_n) è sup limitata $\Rightarrow$ ammette estremo superiore

e scriviamo $\sup a_n = \sup a(\mathbb{N})$

Se (a_n) è limit. inferiormente $\Rightarrow$ ha un estremo inferiore e scrivo che $\inf a_n \doteq \inf a(\mathbb{N})$

Prop 6.18 "Ogni successione convergente è limitata. Ogni successione divergente positivamente è inferiormente limitata e ogni successione divergente negativamente è superiormente limitata."

dim: Supp $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Scelgo $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}$ per cui per ogni $n > N_1$ ho che vale

$$\boxed{\ell - 1 < a_n < \ell + 1}$$

Poniamo $M \doteq \max\{a_1, a_2, \dots, a_{N_1}, \ell + 1\}$ per cui

$$a_n < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$m \doteq \min\{a_1, a_2, \dots, a_{N_1}, \ell - 1\}$$ per cui

$$a_n > m \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ora se $a_n \to +\infty$, possiamo scegliere $L \in \mathbb{R}$
e in corrispondenza $N \in \mathbb{N}$ tali che $\forall n > N \Rightarrow a_n > L$.
Ora troviamo $m < \min\{a_1, a_2, \dots, a_N, L\}$
per cui $\underline{a_n > m \quad \forall n \in \mathbb{N}}$. ■

Prop. 6.19 "Se (a_n) è regolare allora $(|a_n|)$ è regolare.
Se $(|a_n|)$ è infinitesima allora (a_n) è infinitesima."

dim:

$$\Rightarrow \big|\,|a_n| - |\ell|\,\big| \le \underbrace{|a_n - \ell|}_{\text{piccolo quanto voglio}}$$

... ■

$a_n = (-1)^n \qquad |a_n| = |(-1)^n| = 1$

$a_n = (-1)^n n \qquad |a_n| = n$

2. MONOTONIA

Def 6.21 Sia (a_n) successione reale

1. (a_n) è crescente se $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n$
2. (a_n) è decrescente se $a_n \ge a_{n+1}$ $\forall n$
3. (a_n) è strett. crescente se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$
4. (a_n) è strett. decrescente se $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$

Teorema 6.22 "Ogni successione monotona (a_n) è regolare. In particolare se monotona crescente allora $\lim a_n = \sup a_n$, se monotona decrescente allora $\lim a_n = \inf a_n$."

dim: Supp (a_n) sia monotona crescente e limitata superiormente. Allora esiste $M = \sup a_n \in \mathbb{R}$ per cui $\forall n \in \mathbb{N}$ vale

$$a_n \le a_{n+1} \le M.$$

Per definizione di estremo superiore, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ per cui trovo $a_N \in a(\mathbb{N})$ per cui $M - \varepsilon < a_N$

e questo continua ad essere vero $\forall\ n > N$ ossia $\underline{a_n > a_N > M - \varepsilon}$.

Dalla costruzione però sappiamo che poiché M è estremo superiore di (a_n) ho che $a_n < M + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Per cui per ogni $n > N$ ottengo che $M - \varepsilon < a_n < M + \varepsilon$.

ossia $\lim a_n = M = \sup a_n$.

$\blacksquare$

3. ALGEBRA DEI LIMITI

$$\overline{\mathbb{R}} \doteq \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$x \in \overline{\mathbb{R}}$ $\qquad -\infty \le x \le +\infty$

Relazioni indeterminate

1. $+\infty - \infty \quad (-\infty + \infty)$
2. $0 \cdot \pm\infty$
3. $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
4. 0^0 , $+\infty^0$, $1^{\pm\infty}$

7 relazioni

$a \in \mathbb{R}$ $\qquad a + \pm\infty = \pm\infty$ $\qquad +\infty^a = +\infty$

$a \in \mathbb{R}_+$ $\qquad a \cdot \pm\infty = \pm\infty$

$b \in \mathbb{R}_-$ $\qquad b \cdot \pm\infty = \mp\infty$ $\qquad +\infty^b = +0$

$+\infty + \infty = +\infty$ $\qquad -\infty - \infty = -\infty$

$\frac{1}{\pm\infty} = 0$ $\qquad +\infty^{-\infty} = 0$

$x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ $\qquad x+y,\ x \cdot y,\ x^y$

Prop. 6.24. "Supp. (a_n) regolare con $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

1. Se $\ell_0 \in \mathbb{R}$ è tale che

$$\lim a_n = \ell > \ell_0$$

allora esistono un $N \in \mathbb{N}$ ed un numero reale $s > \ell_0$ tali che

$$a_n > s \quad \forall n > N.$$

2. Se $\ell_0 \in \mathbb{R}$ è tale che

$$\boxed{\lim a_n = \ell < \ell_0}$$

allora esistono $N \in \mathbb{N}$ ed un reale $s < \ell_0$ tali che $a_n < s$ $\forall n > N$. //

Corollario 6.25 "Sia (a_n) convergente a $\ell \neq 0$. Allora

1. Se $\ell > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > \frac{\ell}{2}$ $\forall n > N$.
2. Se $\ell < 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < \frac{\ell}{2}$ $\forall n > N$.
3. Esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| > \frac{|\ell|}{2}$ $\forall n > N$."

Teorema 6.26 (Algebra delle somme).

"Siano (a_n) (b_n) successioni regolari, allora:

1. $$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$$
qualora il 2° membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$.

2. $$\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$$
qualora il 2° membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$.

dim: $a_n \to a \in \mathbb{R}$ $\quad b_n \to b \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ tale che $\forall n > N$

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad |b_n - b| < \varepsilon .$$

$$\underbrace{|(a_n+b_n)-(a+b)|}_{\forall n > N} = |a_n - a + b_n - b| \underbrace{\le}_{\text{dis. triangolare}} |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon$$

$\square$

Teorema 6.27 (Prodotto di limitata per infinitesima)

Siano (a_n) infinitesima e (b_n) limitata. Allora

$a_n \cdot b_n \to 0$ (è infinitesima).

dim:

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| \le |a_n| \cdot M \le M\varepsilon \qquad |b_n| \le M$$

$\square$

Ex: $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$ $\qquad c_n = a_n \cdot b_n \qquad a_n = \dfrac{1}{n} \qquad b_n = (-1)^n$

Teorema 6.29 (Algebra dei prodotti)

"Siano (a_n) (b_n) regolari. Allora si ha

$$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$$

qualora il 2° membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$."

dim: Supp $a_n \to a \in \mathbb{R}$ $\quad b_n \to b \in \mathbb{R}$. Allora sono successioni limitate per cui, ad esempio, esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|a_n| \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

dis. triangolare

$$|a_n \cdot b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$$
$$= |\underbrace{a_n (b_n - b)} + \underbrace{(a_n - a) \cdot b}| \le \underbrace{|a_n (b_n - b)| + |b (a_n - a)|}$$

$$\le |a_n|\,|b_n-b| + |b|\,|a_n-a|$$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N}$ tale che $|a_n-a|<\varepsilon$ $\quad |b_n-b|<\varepsilon$ $\quad \forall n>N$

$$\le M\varepsilon + |b|\varepsilon = \varepsilon\underbrace{(M+|b|)}_{>0} \qquad \forall n>N$$

OSS: $P(x) = c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1 x + c_0 \qquad c_j\in\mathbb{R}$

$$P(a_n) = c_k a_n^k + \dots + c_1 a_n + c_0$$

$a_n \to a \in \mathbb{R}$ $\qquad \boxed{P(a_n) \to P(a)}$

$a_n^s \quad \forall s\in\mathbb{N} \Rightarrow a_n^s \to a^s$

$a_n^{s=1} \to a \qquad a_n^2 = a_n\cdot a_n \to a^2$

uso l'induzione dicendo che per qualche $k \in \mathbb{N}$

è vero che $a_n^k \to a^k$

e dimostro che è vero che $a_n^{k+1} \to a^{k+1}$

$$|a_n^{k+1} - a^{k+1}| = |a_n^k \cdot a_n - a^k \cdot a|$$

$$= |a_n^k \cdot a_n \underbrace{- a_n^k a + a_n^k \cdot a}_{=0} - a^k \cdot a|$$

$$= |a_n^k (a_n - a) + a(a_n^k - a^k)|$$

$$\le |a_n^k| \, |a_n - a| + |a| \, |a_n^k - a^k|$$

$$\le M\varepsilon + |a|\varepsilon = \varepsilon (M + |a|) \qquad n > N_\varepsilon$$

$\Rightarrow \; a_n^s \to a^s \quad \forall s \in \mathbb{N}$ se $a_n \to a \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{P(a_n) \to P(a) \quad \text{se} \quad a_n \to a.}$$

Teorema 6.32 (limite dei reciproci)

" Sia (a_n) regolare $a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si hanno i seguenti casi:

① Se $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$ allora

$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a} \qquad \left(\frac{1}{\pm\infty} = 0 \right)$$

② Se $a = 0$ e $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora

$$\frac{1}{a_n} \to +\infty$$

③ Se $a = 0$ e $a_n < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora

$$\frac{1}{a_n} \to -\infty .$$

//

dim: Supp $a_n \to a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Possiamo usare il Corollario 6.25 e dire che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n > N$ $a_n > \frac{a}{2}$

da cui $\frac{1}{a_n} < \frac{2}{a}$

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a_n a}\right| = \frac{1}{|a_n a|}\,|a_n - a| = \frac{1}{|a_n||a|}\,|a_n - a|$$

$$\leq \frac{2}{a^2}\,|a_n - a| < \frac{2}{a^2}\cdot \varepsilon$$ ■

Teorema 6.33 (Algebra dei rapporti)

"Supponiamo (a_n) (b_n) regolari. Allora se $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \qquad \left(\neq \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$$

qualora il 2° membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$."

dim:

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$$

oss: Funzioni razionali $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

$$R(a_n) = \frac{P(a_n)}{Q(a_n)} \qquad a_n \to a$$

$$\underbrace{R(a_n) \to R(a)}_{\text{continua per successioni}} \quad \text{se} \quad Q(a) \neq 0 \qquad a_n \in \operatorname{dom} R \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Corollario 6.35

$$\lim R(a_n) = \lim \frac{P(a_n)}{Q(a_n)} = \frac{\lim P(a_n)}{\lim Q(a_n)} = \frac{P(a)}{Q(a)} = R(a)$$

+-