Lezione 20ª

Integrazione alla Riemann (Cauchy)

Su $\mathbb{R}$ $\qquad \underbrace{\text{Riemann - Cauchy - Darboux}} \subset \text{Lebesgue} \subset \text{Integrali calibrati}$

4 punti fondamentali
- → come si scrivono
- → significato geometrico
- → definizione formale
- → calcolo

Notazioni: Ingredienti della teoria dell'integrazione (PROPRIA)

① zona di integrazione: intervallo $[a,b]$ $\boxed{\text{limitato}}$

② funzione integranda: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\boxed{\text{limitata}}$

ossia esiste $M\in\mathbb{R}$ tale che
$|f(x)| \le M$

$$\int_a^b f(x)\,\boxed{dx}$$

funzione integranda

simbolo un po' misterioso

simbolo dell'integrale

$$\left(\int f\,dx \ , \ \int f\right)$$

efficiente come notazione se si vuole sapere su quale variabile stiamo integrando

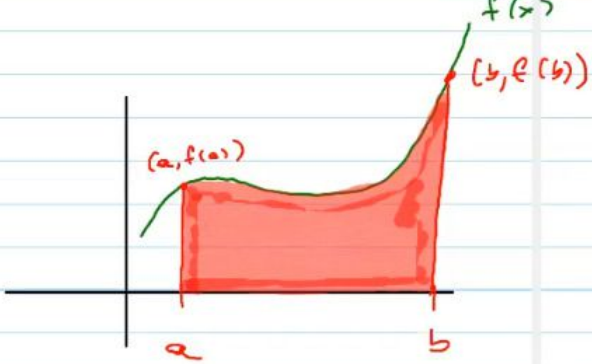
Estensioni:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$a<b$ $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

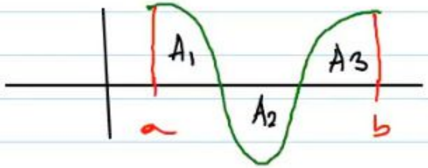
2° punto Significato geometrico

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ = numero reale che rappresenta l'AREA con SEGNO della ZONA che è racchiusa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse



Area con segno ⇒ parti sopra l'asse delle x con segno positivo
" sotto " " " " negativo

$$\int_a^b f(x) = Area(A_1) - Area(A_2) + Area(A_3)$$

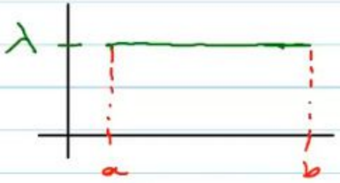


3° passo — DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE

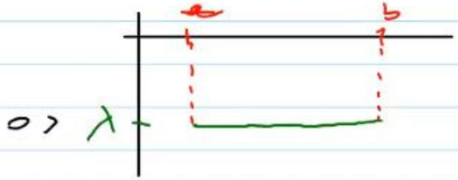
- CASO BANALE o SEMPLICE
- CASO QUASI SEMPLICE
- CASO GENERALE

- CASO SEMPLICE

$f(x) \equiv \lambda$ cioè funzione costante uguale a λ $\forall x \in [a,b]$



$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot\lambda$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot\lambda \quad \text{ma } \lambda<0$$

- CASO QUASI-SEMPLICE

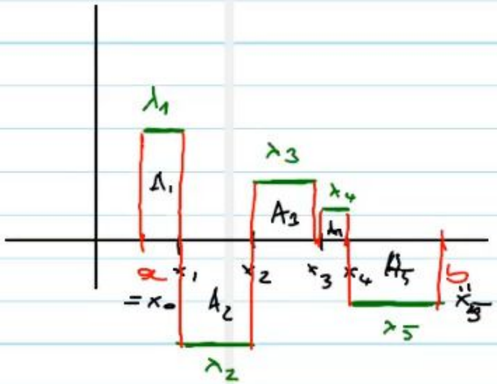
f(x) è costante a tratti

ossia esistono numeri

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

ed esistono numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ per cui

$$f(x) = \lambda_i \quad \forall x \in \underbrace{[x_{i-1}, x_i]}_{\text{intervallo } i\text{-esimo}} \quad \forall\, i = 1, \dots, n$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{somma delle aree delle regioni } A_i \text{ con segno}$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{lunghezza intervallo } i\text{-esimo}} \cdot \lambda_i \;\Big\}\; \text{altezza rettangolo } A_i$$

Le funzioni costanti a tratti vengono chiamate spesso con nomi equivalenti

funzioni semplici, funzioni a gradino

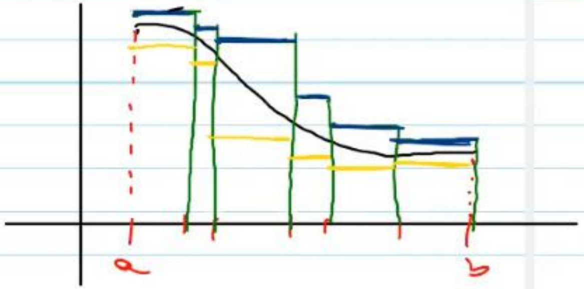
• CASO GENERALE

Sia ora $f(x)$ una funzione limitata generica.

Definire:

$I^+(f,[a,b])$ integrale superiore

$I^-(f,[a,b])$ integrale inferiore



$$I^+(f,[a,b]) = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx \;\middle|\; \varphi \text{ è funzione a gradino per cui } \varphi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b] \right\}$$

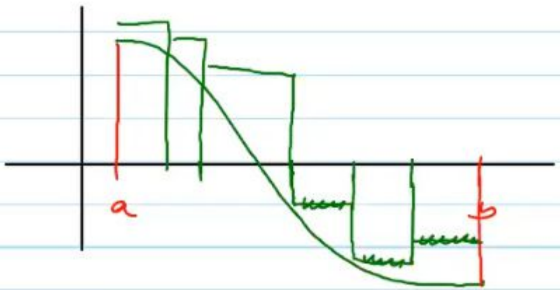
oss: Per avvicinarsi all'area sul grafico di f con le aree delle funzioni a gradino più grandi di f cerco di fare suddivisioni più fitte possibili

$$I^-(f,[a,b]) = \sup \left\{ \int_a^b \psi(x)\,dx \;\middle|\; \psi \text{ è a gradino e } \psi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b] \right\}$$

oss: Gli estremi inferiore e superiore sono presi su insiemi non vuoti perché f è limitata

Page 1 Page 2 Page 3 Page 4 Page 5 Page 6 Page 7
6 / 7 09:52

OSS 2:



<u>Teorema</u>: "Per ogni funzione limitata f su $[a,b]$ si ha che l'integrale superiore e l'integrale inferiore esistono sempre! E vale

$$I^-(f,[a,b]) \le I^+(f,[a,b])$$ "

<u>DEF</u>: Diremo che la funzione limitata $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è INTEGRABILE (secondo Riemann) su $[a,b]$ se

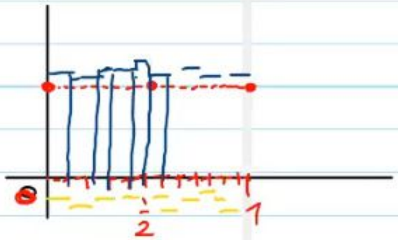
$$I^-(f,[a,b]) = I^+(f,[a,b])$$

Esempio funzione non integrabile secondo Riemann

ossia un esempio in cui $I^+ > I^-$

$[a,b]=[0,1]$

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$



φ a gradino $\varphi(x)\geq f(x)\geq 1$

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\lambda_i \geq 1$$

$\Rightarrow \quad I^+(f,[a,b]) = 1$

ψ a gradino $\psi(x)\leq f(x)$ $\quad \forall x\in[a,b]$

$$\int_0^1 \psi(x)\,dx \leq 0$$

$\Rightarrow \quad I^-(f,[a,b]) = 0$

$>$ $\quad \Rightarrow$ f non è integrabile in $[0,1]$

Teorema Abbiamo che $I^+ = I^-$ e dunque la corrispondente funzione è integrabile in $[a,b]$ in tutti i casi seguenti:

(1) Se la funzione è MONOTONA

(2) Se la funzione è CONTINUA

(3) Se la funzione è continua a tratti, ossia è continua ovunque tranne in un numero finito di punti

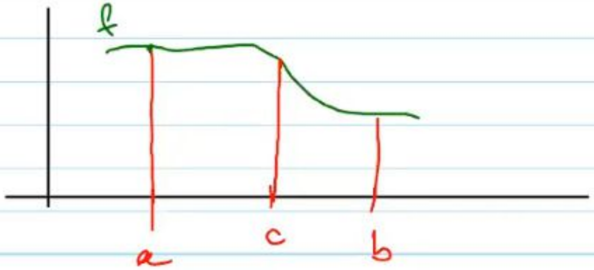
Proprietà degli integrali

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$\lambda \in \mathbb{R}$
$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

integrale è una applicazione lineare tra le funzioni integrabili secondo Riemann in $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \text{BOH!}$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$ ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE

<u>Criterio di integrabilità</u> "Una funzione f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ trovo 2 funzioni a gradino φ, ψ in $[a,b]$ tali che

$$\varphi(x) \geq f(x) \geq \psi(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

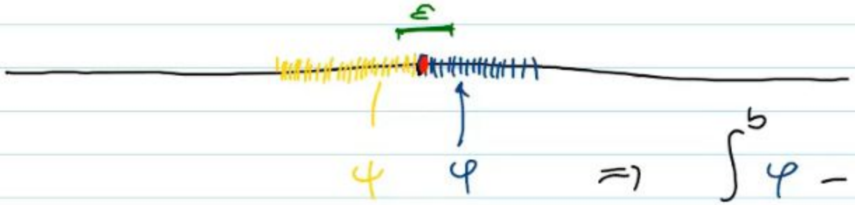
per le quali

$$\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\,dx \leq \varepsilon.$$

Si può scegliere per φ e ψ la stessa suddivisione di $[a,b]$."

"dim": $(\Rightarrow)$ Supp f integrabile in $[a,b]$

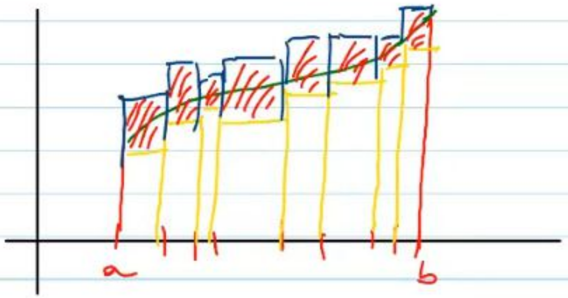
$$\Rightarrow \underbrace{I^+(f,[a,b])}_{\inf \int_a^b \varphi} = \underbrace{I^-(f,[a,b])}_{\sup \int_a^b \psi}$$



$$\Rightarrow \int_a^b \varphi - \psi \le \varepsilon$$

$(\Leftarrow)$

$$\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) \le \varepsilon$$



dimostrazione integrabilità funzioni monotone

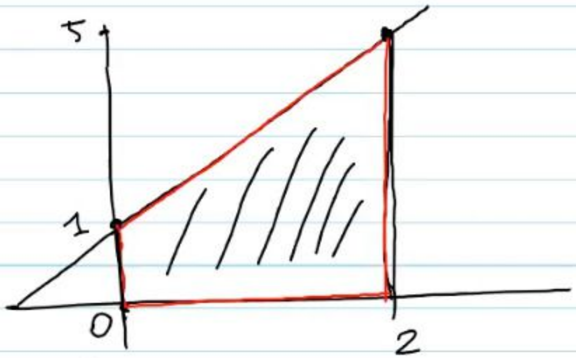
n sottointervalli di lunghezza $\frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b (\varphi - \psi)\,dx = \big(f(b) - f(a)\big) \cdot \frac{b-a}{n} \le \varepsilon$$

$\Rightarrow$ f monotona è integrabile in $[a,b]$

Esempi:

1. $$\int_0^2 (2x+1)\,dx$$



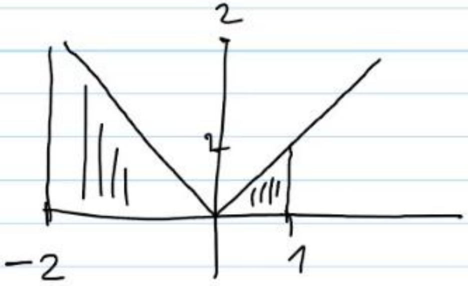
$= \text{area del trapezio}$

$= \frac{1}{2}(\text{somma lunghezza basi}) \cdot \text{altezza}$

$= \frac{1}{2}(1+5) \cdot 2 = 6$

2. $$\int_{-2}^{1} |x|\,dx$$

$= \frac{5}{2}$



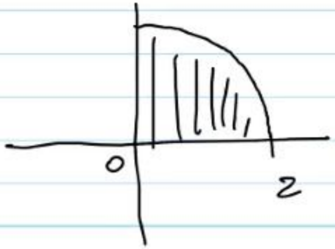
3. $$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

$f(x) = \sqrt{4-x^2}$

$y = \sqrt{4-x^2} \iff y^2 = 4-x^2 \iff \boxed{x^2+y^2=4}$

Page 4 Page 5 Page 6 Page 7 Page 8 Page 9 Page 10 Page 11 Page 12 Page 13

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$



$= \frac{1}{4}$ area cerchio

$= \frac{1}{4}\pi 4 = \pi$

Come si calcolano gli integrali?

Si usano le primitive! ossia gli integrali indefiniti visti la scorsa settimana

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\qquad F : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Tecnica di calcolo: È sufficiente trovare una primitiva F di f in $[a,b]$ per cui per ogni $[c,d] \subseteq [a,b]$ si ha

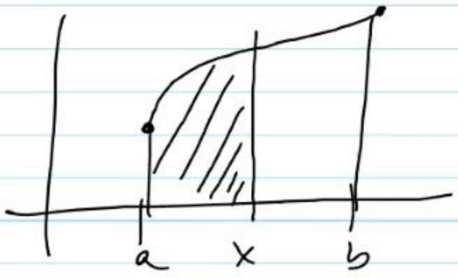
$$\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c) \left(= \Big[F(x)\Big]_c^d = \Big[F(x)\Big]_{x=c}^{x=d} \right)$$

Funzione integrale

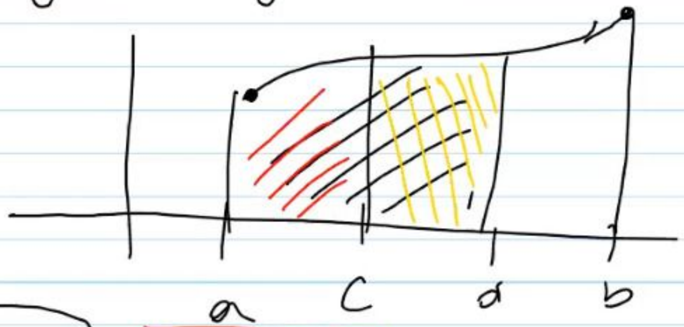
$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

funzione integrale

variabile di integrazione



A che serve la funzione integrale?



$$\boxed{\int_c^d f(x)\,dx} = \boxed{\int_a^d f(x)\,dx} - \boxed{\int_a^c f(x)\,dx} = \Phi(d) - \Phi(c) = \left[\Phi(x)\right]_c^d$$

dobbiamo dimostrare che Φ è primitiva di f in $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b$$

quindi mi rimane da dimostrare che $\Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Teorema (Media Integrale)

" Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a,b]$ e continua. Allora esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$."

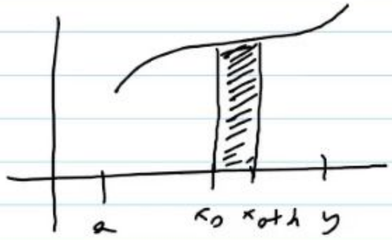
Teorema (Teorema Fondamentale della teoria dell'integrazione)

" La funzione integrale Φ è una primitiva per f in $[a,b]$."

dim: Devo dimostrare che $\Phi'(x_0) = f(x_0)$

Uso rapporto incrementale per Φ in x_0

$$\boxed{\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h}} = \frac{1}{h}\left(\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)\right)$$



$$= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(x)\,dx - \int_a^{x_0} f(x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_{a}^{x_0+h} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{a} f(x)\,dx\right) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = *$$

uso teorema media integrale fra $[x_0, x_0+h]$ quindi esiste $\boxed{c \in [x_0, x_0+h]}$ per cui

$$* = \frac{1}{\cancel{h}} f(c)\,\cancel{h} = \boxed{f(c)}$$

$$\Phi'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{f(c) = f(x_0)}_{\text{continuità di } f}\ !$$