Lezione 23ª

NUMERI COMPLESSI

$\mathbb{C}$ numeri complessi

Tipicamente hanno 3 rappresentazioni equivalenti

→ Rapp. CARTESIANA

→ Rapp. TRIGONOMETRICA

→ Rapp. ESPONENZIALE o EULERIANA

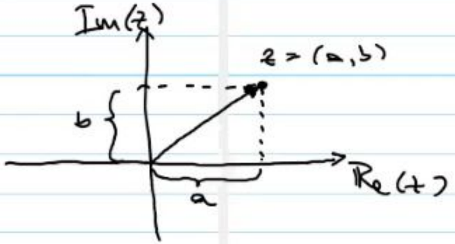
FORMA CARTESIANA

$z \in \mathbb{C} \longrightarrow z = (a, b) \quad a, b \in \mathbb{R}$

COPPIA ORDINATA DI NUMERI REALI

$(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Si preferisce scrivere $z = (a, b) \doteq \boxed{a + b\,\underline{i}}$

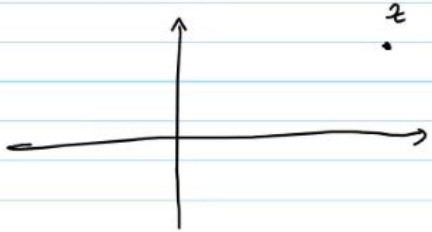


i = UNITÀ IMMAGINARIA $\quad i^2 = -1$

$a = \mathrm{Re}(z)$ = parte reale di z

$b = \mathrm{Im}(z)$ = parte immaginaria di z

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (basta porre $b=0$ in $z=a+ib$)



PIANO ARGAND - GAUSS

Operazioni algebriche

$$z = a+bi \,, \quad w = c+di \quad \in \mathbb{C}$$

$$z+w = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

$$z-w = (a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$$

$$z\cdot w = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bd\underbrace{i^2}_{=-1} = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$w \neq 0 \quad \frac{1}{w} = \frac{1}{c+di} = \frac{1}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{c-di}{c^2+d^2} = \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i$$

$$(c+di)(c-di) = c^2-(di)^2 = c^2-d^2i^2 = c^2+d^2$$

Fare il rapporto tra numeri complessi è ora semplice

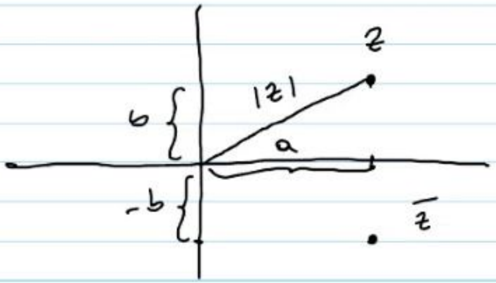
$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = (a+bi)\frac{(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac - adi + bci - bd\overset{-1}{i^2}}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Def: Si dice COMPLESSO CONIUGATO di $z = a+bi$ il numero complesso $\bar{z} \doteq a - bi$

Si dice MODULO di $z = a+bi$ il numero reale non negativo

$$|z| \doteq \sqrt{a^2+b^2}$$



Nel piano di ARGAND-GAUSS

$\bar{z}$ il coniugato di z è simmetrico rispetto all'asse della parte reale di z

$|z|$ è la distanza di z dall'origine

OSS: 1. $|z| = |\bar{z}|$

2. $|z| = 0 \iff z = 0$

Proprietà del coniugato

(i) $\overline{(\bar{z})} = z$

(ii) il coniugato rispetta le operazioni algebriche

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \qquad \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \frac{1}{\bar{w}}$$

Verifichiamo per il prodotto (a casa fate il resto)

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd)-(ad+bc)i$$

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (a-bi)(c-di) = (ac-bd)-(ad+bc)i$$

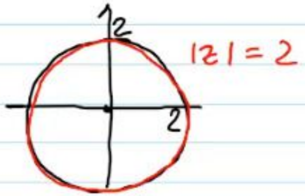
Relazione tra coniugato, modulo, reciproco

$z = a+bi \qquad \bar{z} = a-bi \qquad z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ sempre se $z \neq 0$

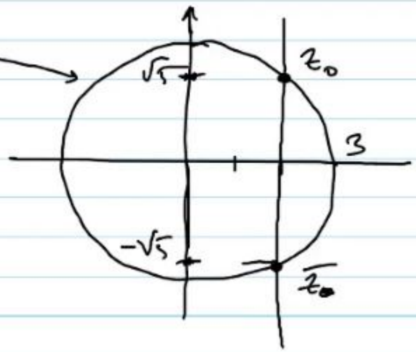
Esercizio: (a) Come sono fatti nel piano di Argand-Gauss tutti $z \in \mathbb{C}$ per cui $|z| = 2$?

$z = a + bi$ $\qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \sqrt{a^2+b^2} = 2 \iff \boxed{a^2+b^2=4}$



(b) trovare tutti $z \in \mathbb{C}$ per cui $|z| = 3$ e $\mathrm{Re}(z) = 2$

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 9 \\ a = 2 \end{cases}$$



$b^2 = 5 \implies b = \pm\sqrt{5}$

$$\boxed{z_0 = 2 + \sqrt{5}\, i \qquad \bar{z}_0 = 2 - \sqrt{5}\, i}$$

Proprietà del modulo

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R} \quad z \in \mathbb{C} \qquad \lambda z \in \mathbb{C}$

$z = a + bi \qquad \lambda z = \lambda a + \lambda b i \qquad |\lambda z| = \sqrt{\lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2} = |\lambda|\,|z|$

In generale $\quad z \in \mathbb{C}\,,\ w \in \mathbb{C}$

$$|z \cdot w| = |z|\,|w|$$

inoltre se $z \neq 0 \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

<u>verifichiamo la 2ª</u>

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$$

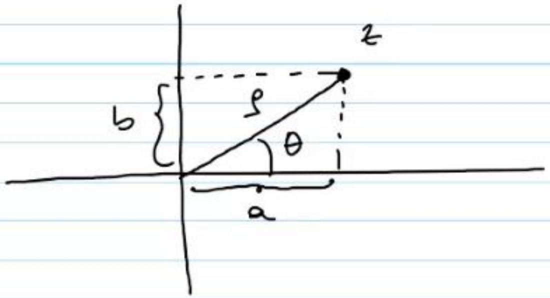
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|^2} \cdot |\bar{z}| = \frac{1}{|z|^2}\,|z| = \frac{1}{|z|}$$

verifica della 1ª

$$|z \cdot w|^2 = |z|^2\,|w|^2$$

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w)\overline{(z \cdot w)} = z \cdot \underbrace{w \cdot \bar{z}} \cdot \bar{w} = z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w} = |z|^2\,|w|^2$$

Rappresentazione Trigonometrica



$$\boxed{\begin{aligned} a &= \rho\cos\theta \\ b &= \rho\sin\theta \end{aligned}}$$

$$z = a + bi = \rho\cos\theta + \rho\sin\theta\, i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

→ ρ è la distanza di z dall'origine, per cui $\rho = |z|$

→ θ si chiama ARGOMENTO di z (θ è un angolo)

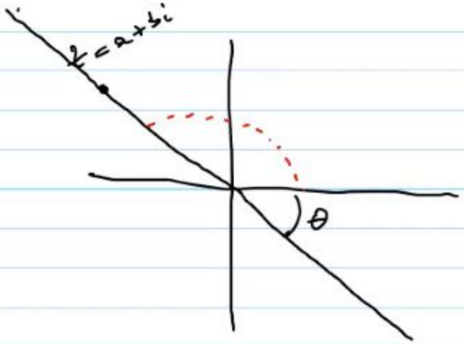
Quindi se conosco $(\rho, \theta) \Rightarrow a$ e b sono dati dalla formula di passaggio

viceversa se conosco $(a, b) \Rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

bisogna fare però attenzione a determinare θ, meglio vedere il disegno in modo esplicito piuttosto che far uso delle formule trigonometriche

$a \neq 0 \quad \frac{b}{a} = \frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta} = tg\,\theta \Rightarrow \theta = arctg\,\frac{b}{a}$

$\frac{b}{a}$



quindi arctg $\frac{b}{a}$ va bene nel 1° e 4° quadrante ma fallisce per il 2° e 3° quadrante dove l'angolo giusto è quello dell'arctg $+ \pi$.

Prodotti di numeri complessi in rapp. trigonometrica

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z\cdot w = \rho r\Big[\underbrace{(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi)}_{\cos(\theta+\varphi)} + i\underbrace{(\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi\sin\theta)}_{\sin(\theta+\varphi)}\Big]$$

$$z\cdot w = \rho r\left(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)\right)$$

Fare il prodotto in rapp. trigonometrica vuol dire

→ moltiplicare i moduli

→ sommare gli argomenti

Analogamente la divisione in rapp. trigonometrica vuol dire

→ dividere i moduli

→ sottrarre gli argomenti

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r}\left(\cos(\theta-\varphi)+i\sin(\theta-\varphi)\right) \qquad w\neq 0$$

Rappresentazione esponenziale

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{i\theta}$$

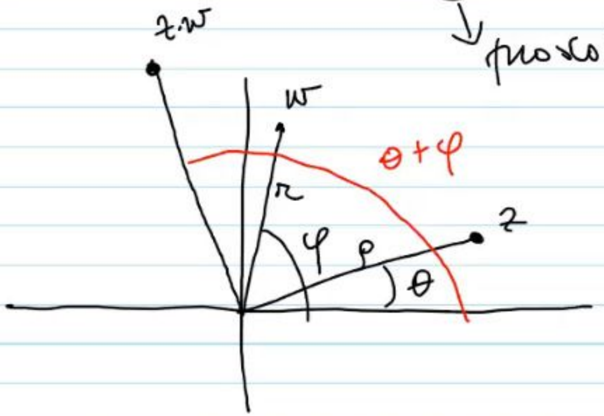
regola brutale (per ora) $\quad e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$z = \rho e^{i\theta} \qquad w = r e^{i\varphi}$

$$z \cdot w = \rho r\, e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = \rho r\, e^{i(\theta+\varphi)}$$

$\to$ somma degli argomenti

ρr $\to$ prodotto dei moduli



Potenza n-esima di un numero complesso

$z = a + bi \qquad z^n = (a+bi)^n =$ binomio di Newton ....

$z = \rho e^{i\theta} \qquad \boxed{z^n = \rho^n e^{in\theta}}$

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Stylus Color Line Eraser Backgrounds Undo Redo Pages Previous Next Erase Board Web Documents Show Desktop OpenBoard

Page 1 Page 2 Page 3 Page 4 Page 5 Page 6 Page 7 Page 8 Page 9 Page 10 Page 11

11 / 11 10:10

esercizio $\quad n = 2 \quad \rho = 1$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + i\, 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta) \\ 2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta) \end{cases}$$

$n = 3 \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = *$

$$\cos^3\theta + 3\cos^2\theta\,(i\sin\theta) + 3\cos\theta\,(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$$

$$-\sin^2\theta \qquad i^3\sin^3\theta = i^2\cdot i\,\sin^3\theta = -i\sin^3\theta$$

$$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

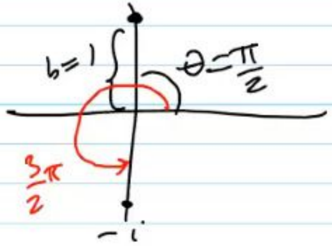
$$+\, i\,(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) = *$$

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \qquad \sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

$$i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = i^2\cdot i = -i \qquad i^4 = i^2\cdot i^2 = +1 \qquad i^5 = i^4\cdot i = i$$

$i^3 = -i$

i^3 in forma esponenziale?



$|i| = 1$

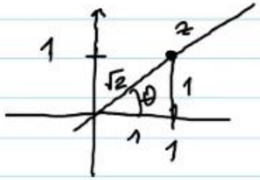
$i = 1 \cdot e^{i\pi/2}$

$i^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Esercizio $(1+i)^{2020}$

1° modo: binomio di Newton (lo lascio a voi...)

2° modo:



$z = 1+i$

$|z| = \sqrt{2} = \rho$

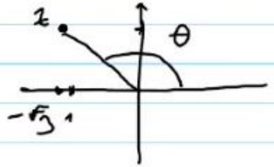
$\theta = \frac{\pi}{4}$

$505 = 504 + 1$

$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\boxed{z^{2020}} = (\sqrt{2})^{2020}\, e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 2020} = 2^{1010}\, e^{i505\pi} = 2^{1010}\, e^{i(504+1)\pi} = 2^{1010}\, \overset{1}{\overset{\parallel}{e^{i504\pi}}} \cdot e^{i\pi} = \boxed{-2^{1010}}$$

Esercizio 2 $(i-\sqrt{3})^{22}$ scriverlo in forma cartesiana



$$z = i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + i$$

$$\rho = |z| = 2$$

$$z = 2\Big(\underbrace{-\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\theta} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\theta}\, i\Big) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= 2\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z^{22} = 2^{22}\, e^{i\frac{5\pi}{6}\cdot 22} = 2^{22}\, e^{i\frac{55}{3}\pi}$$

$$55 = 54 + 1$$

$$\frac{55}{3} = \frac{54}{3} + \frac{1}{3} = 18 + \frac{1}{3}$$

$$= 2^{22}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2^{22}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2^{22}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

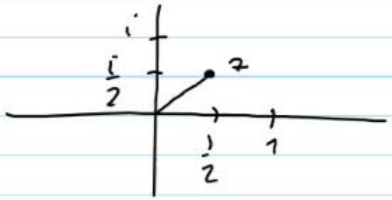
$$= 2^{21} + 2^{21}\sqrt{3}\, i$$

forma cartesiana

Esercizio 2

$$(1-i)^{-7} = \frac{1}{(1-i)^7}$$

in rapp. cartesiana



$$z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}(1+i)$$

$$\rho = |z| = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/4} \Rightarrow z^7 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^7 e^{i\frac{7}{4}\pi} = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{16}i$$

Radici n-esime di un numero complesso

Sia $w \in \mathbb{C}$ fissato. Trovare <u>LE</u> radici n-esime vuol dire trovare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\boxed{z^n = w}$$

Questo problema ha

→ soluzione unica se $w = 0 \Rightarrow z = 0$

→ se $w \neq 0$ ci sono ESATTAMENTE n soluzioni che rappresentate nel piano di Argand-Gauss sono i vertici di un poligono regolare di n lati con centro nell'origine.

oss: $w = r e^{i\varphi}$ DATO del PROBLEMA

$z = \rho e^{i\theta}$ da trovare $\Rightarrow \boxed{z^n = w}$

$$z^n = \rho^n e^{in\theta} = r e^{i\varphi}$$

$\Rightarrow$ i moduli devono essere uguali $\Rightarrow$ $\boxed{\rho^n = r}$

$\Rightarrow$ gli argomenti saranno uguali ma a meno di multipli di 2π $\Rightarrow$ $\boxed{n\theta = \varphi + 2k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$

Allora $\rho = \sqrt[n]{r} > 0$

$$\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k}{n}\pi \;)$$

Dando a k i valori $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ottengo n soluzioni con gli argomenti sfasati di $\frac{2\pi}{n}$ l'uno con il successivo

Infatti se a k sostituisco valori precedenti (<0) o successivi $(n, n+1, \dots)$ ritrovo le stesse soluzioni

esempi: $k = n \rightsquigarrow \theta = \frac{\varphi}{n} + \underbrace{2\pi}_{\text{non conta}} = \frac{\varphi}{n}$ come $k=0$

$k = n+1 \rightsquigarrow \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2n+2}{n}\pi = \frac{\varphi}{n} + \overbrace{2\pi}^{\text{non conta}} + \frac{2\pi}{n}$ come $k=1$

Quindi le n radici di $z^n = w$ sono tutte sulla stessa circonferenza di raggio $\rho = \sqrt[n]{r}$ e di argomenti sfasati di $\frac{2\pi}{n}$.

<u>Esempio</u> se $a = 4$ e voglio le radici quadrate come numero reale $\Rightarrow$ 2

se penso $a=4$ come numero complesso $\Rightarrow$ ho 2 radici quadrate $z = 2$ $\quad z = -2$

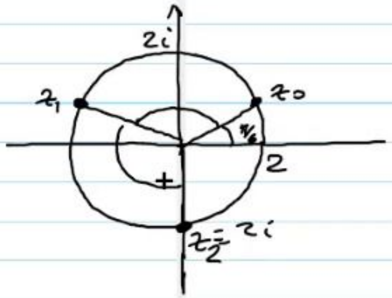
<u>Esempio</u>: Scrivere in forma cartesiana le 3 radici complesse (cubiche) di $w = 8i$

$$r = |w| = 8 \qquad \theta = \pi/2 \qquad \Rightarrow \qquad w = 8\, e^{i\pi/2}$$

$$z = \rho\, e^{i\theta} \qquad z^3 = \rho^3 e^{i3\theta} = 8\, e^{i\pi/2}$$

$$\begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2$$

$$\rho = \sqrt[3]{8} = 2$$



$k=0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{6}$

$k=1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$k=2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi$

$z_0 = 2e^{i\pi/6}$ $\quad z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ $\quad z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ $\quad = -2i$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ $\quad = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= \sqrt{3} + i$ $\quad = -\sqrt{3} + i$

Esempio: $w = -i$ troviamo le radici seste

$$w = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}} \qquad z^6 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$\rho^6 e^{i6\theta} = e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

$$\rho = 1 \qquad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{6} \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

è sufficiente trovare z_0 (con $k=0$) e poi fare gli spostamenti di $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$$z_0 = e^{i\pi/4}$$