Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2017-18 - PIAZZA7 - *"...altre 'vecchie conoscenze': limiti - continuità - parte 1 ..."*

1) i) Scrivete in matematichese (... $\forall \varepsilon > 0, \ldots$ oppure $\forall M > 0, \ldots$) la definizione di

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1\,; \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty\,; \qquad \lim_{x\to1} f(x) = 2\,.$$

ii) Scrivete per ciascun limite in i) l'espressione di una funzione con il comportamento espresso dal limite.

2) Provate, usando la definizione di limite, che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x-1} = 2\,.$

3) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

i) $\displaystyle\lim_{x\to1}(3x^2 - \frac{1}{x+1})\,; \qquad \lim_{x\to-\infty}(\frac{5}{x^2+1} + \frac{\sin x}{x+1})\,; \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x + \sqrt{x^2+1})\,;$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to-2^-} \frac{4+x}{|x|-2}\,; \qquad \lim_{x\to-2^+} \frac{4+x}{|x|-2}\,; \qquad \lim_{x\to-1^-} \frac{5x^2+1}{x^3+1}\,; \qquad \lim_{x\to2^-} \frac{\log(x+1)}{x^2-4}\,;$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^2 \cos\frac{1}{x}\,; \qquad \lim_{x\to+\infty}(x^2 + 1 + \arctan(-x))\,; \qquad \lim_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{|x|} + \sin x \cos x)\,.$

4) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{\sin x \cos x}{x^2}\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x^3}{\sqrt{x}+1}\,; \qquad \lim_{x\to-\infty}(x - \arctan x)\,; \qquad \lim_{x\to0^-} \sqrt[3]{x} \cos\frac{1}{x^2}\,.$$

5) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

i) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^3+2x^2}{4x^4+x^5}\,; \qquad \lim_{x\to-2^-}(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-4})\,;$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x}{x-1-2x^4}\,; \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{x+3\sqrt{x}}{2x-6\sqrt{x}}\,; \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3\sqrt{|x|}}{2x-6\sqrt{|x|}}\,;$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-x}{\sqrt{x}+3x^4}\,; \qquad \lim_{x\to-\infty}(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^3}{x^2-1})\,;$

iv) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\arctan x - x^2}{2+x^k}$ per $k \in \{1,2,3\}\,;$ $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{1+x}{\sqrt{-x}-1}\,; \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}\,;$

v) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x}}{x-1}\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})}$ per $\alpha \in \mathbf{R}\,.$

6) Dite se i seguenti insiemi sono limitati inferiormente/superiormente, limitati. In caso affermativo, determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore (motivando la risposta). Dite se sono massimo e/o minimo, rispettivamente.

i) $A = \{x_n = \cos(\dfrac{2}{n+3}) :\ n \in \mathbf{N}, n \geq 0\}$;

ii) $B = \{x_n = \arctan(\dfrac{n-2}{n}) :\ n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}$;

iii) $C = \{x_n = e^{\arcsin(1-\frac{1}{n})} :\ n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}$;

iv) $D = \{x_n = \log_{\frac{1}{2}}(\arcsin(1 - \dfrac{1}{n})) :\ n \in \mathbf{N}, n \geq 2\}$.

7) Determinate, se esistono, $\alpha \in \mathbf{R}$ tali che le funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \alpha & \text{se } x < 0 \\ -2 & \text{se } x = 0 \\ x^2 - 2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \alpha(\sin x - 1) & \text{se } x \leq 0 \\ \\ x^2 - 3x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

risultino continue su tutto $\mathbf{R}$.

8) Determinate, se esistono, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tali che le funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \alpha \cos x + \beta \sin x & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(\frac{\pi}{2} + x) & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \\ 2x + \beta & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \log(x + |\alpha|) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

risultino continue su tutto $\mathbf{R}$.