Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2017-2018 - Foglio di esercizi 15 *"stiamo per convergere... - integrali impropri ed eq. differenziali"*

15.1) i) Calcolate il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_{2x}^{x^2} \sqrt{1-t^2}dt + 2x - x^2}{x^3}.$$

ii) Determinate l'ordine d'infinitesimo e la parte principale, per $x \to 0$, dell'infinitesimo $f(x) = \sin x - \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt.$

15.2) Discutete la convergenza dei seguenti integrali generalizzati. Calcolate poi, usando la definizione, i loro valori.

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\, dx\,;$ ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{3}{x^2+2x+3}\, dx\,.$

15.3) Discutete la convergenza dei seguenti integrali impropri:

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt[3]{x}}\, dx\,;$ ii) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin\sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}\arctan\sqrt[4]{x}} dx\,.$

15.4) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha > 0$, per i quali i seguenti integrali impropri convergono:

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\arctan\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\, dx\,;$ ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1-\cos x)^{3\alpha}\arctan(x^{-3})}{(x^2+x)^{\frac{\alpha}{3}}\arctan x^2} dx\,.$

15.5) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha > 0$, tali che risultino convergenti i seguenti integrali impropri:

i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin\sqrt{1-x}}{(\tan\sqrt{1-x})(1-\cos x^{2\alpha})}\, dx\,;$ ii) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{e^{\sqrt[3]{3-x}}-1}{\sqrt{(x-1)^{4\alpha}(3-x)^{2\alpha}}} dx\,.$

15.6) Risolvete i seguenti problemi di Cauchy:

i) $\begin{cases} y'(x) = \arctan x \\ y(0) = 1\,; \end{cases}$ ii) $\begin{cases} y'(x) = e^x \cos x \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$

Determinate i più grandi intervalli in cui sono definite le soluzioni.

15.7) Risolvete i seguenti problemi di Cauchy:

i) $\begin{cases} y'(x) = x(\cos x + e^x) \\ y(0) = 1\,; \end{cases}$ ii) $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} \\ y(3) = 1\,. \end{cases}$

Determinate i più grandi intervalli in cui sono definite le soluzioni.

15.8) Determinate l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

i) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x}$; ii) $y'(x) + y^2(x)\sin x = 0$; iii) $y'(x)y(x) = x(2 + y^2(x))$.