Lezione 27ª

Esempio 1 $\quad u'' - 3u' - 4u = \sin t$

Si cerca come soluzione particolare ancora una funzione dello stesso tipo del termine non omogeneo

$$\bar{u}(t) = \lambda \sin t + \mu \cos t \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ parametri da determinare}$$

$$\bar{u}'(t) = \lambda \cos t - \mu \sin t \qquad \bar{u}''(t) = -\lambda \sin t - \mu \cos t$$

Sostituendo nell'eq. differenziale:

$$\underbrace{-\lambda \sin t - \mu \cos t}_{\bar{u}''} \underbrace{- 3\lambda \cos t + 3\mu \sin t}_{-3\bar{u}'} \underbrace{- 4\lambda \sin t - 4\mu \cos t}_{-4\bar{u}} = \sin t$$

$$\begin{cases} -\lambda + 3\mu - 4\lambda = 1 & \text{(coeff. di } \sin t) \\ -\mu - 3\lambda - 4\mu = 0 & \text{(coeff. di } \cos t) \end{cases} \iff \begin{cases} -5\lambda + 3\mu = 1 & \cdot 5 \\ -5\mu - 3\lambda = 0 & \cdot 3 \end{cases}$$

$$-25\lambda - 9\lambda = 5 \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{5}{34}}$$

$$\boxed{\mu = -\frac{3}{5}\lambda = \frac{3}{34}}$$

Sol. generale dell'eq. non omogenea è

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} - \frac{5}{34} \sin t + \frac{3}{34} \cos t}$$

Regola generale : se il termine non omogeneo è del tipo $\sin(\alpha t)$ oppure $\cos(\alpha t)$, il tentativo da fare per la soluzione particolare della non omogenea è del tipo $\bar{u}(t) = \lambda \sin(\alpha t) + \mu \cos(\alpha t)$. Questo tentativo funziona se $\sin(\alpha t)$ oppure $\cos(\alpha t)$ <u>non</u> sono soluzioni dell'eq. omogenea associata. Se lo sono allora si includono tante potenze di t quante necessarie.

<u>Esempio 2</u> : $u'' + u = \sin t$

$\Rightarrow$ omogenea associata $u'' + u = 0$

eq. caratteristica $x^2 + 1 = 0$ $x = \pm i$ $\Rightarrow$ Base $\sin t$, $\cos t$

Tentativo giusto per la soluzione particolare dell'eq. non omogenea è del tipo

$$\bar{u}(t) = \lambda t \sin t + \mu t \cos t$$

$$\bar{u}'(t) = \lambda \sin t + \lambda t \cos t + \mu \cos t - \mu t \sin t$$

$$\bar{u}''(t) = \lambda \cos t + \lambda \cos t - \lambda t \sin t - \mu \sin t - \mu \sin t - \mu t \cos t$$

sostituendo nell'eq. differenziale ottengo:

$$2\lambda \cos t \cancel{- \lambda t \sin t} - 2\mu \sin t \cancel{- \mu t \cos t} \cancel{+ \lambda t \sin t} \cancel{+ \mu t \cos t} = \sin t$$

$$2\lambda \cos t - 2\mu \sin t = \sin t \Rightarrow \lambda = 0 \quad -2\mu = 1 \Rightarrow \mu = -\tfrac{1}{2}$$

La soluzione generale dell'eq. non omogenea è:

$$\boxed{u(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t - \frac{1}{2} t \cos t}$$

Esempio 3 $\qquad u'' - 3u' - 4u = t^2$

In questo caso il tentativo da fare per la soluzione particolare dell'eq. non omogenea è del tipo $\bar{u}(t) = at^2 + bt + c$

Polinomio completo dello stesso ordine del termine non omogeneo

$\bar{u}'(t) = 2at + b \qquad \bar{u}'' = 2a$

Sostituendo nell'eq. differenziale si ottiene:

$$2a - 6at - 3b - 4at^2 - 4bt - 4c = t^2$$

$$\begin{cases} -4a = 1 & (\text{termine di } t^2) \\ -6a - 4b = 0 & (\text{termine di } t) \\ 2a - 3b - 4c = 0 & (\text{termine di } t^0) \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{a = -\frac{1}{4}} \\ 4b = -6a = \frac{3}{2} \iff \boxed{b = \frac{3}{8}} \\ -\frac{1}{2} - \frac{9}{8} = 4c \iff \boxed{c = -\frac{13}{32}} \end{cases}$$

La soluzione generale dell'eq. differenziale non omogenea è:

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{4} t^2 + \frac{3}{8} t - \frac{13}{32}}$$

Regola generale: Se il termine non omogeneo è un polinomio in t, allora il tentativo per la soluzione particolare dell'eq. non omogenea è un polinomio completo dello stesso grado del termine non omogeneo. Questo funziona fintanto che non ci sono polinomi come soluzione dell'eq. omogenea associata, ossia quando $x=0$ non è radice dell'eq. caratteristica dell'eq. omogenea associata. Se $x=0$ è invece radice dell'eq. caratteristica con molteplicità m allora bisogna moltiplicare il tentativo per t^m.

Esempio 4

$$u^{(4)} + 9u'' = t^3 - 3$$

Omogenea associata $\quad u^{(4)} + 9u'' = 0$

Eq. caratteristica $\quad x^4 + 9x^2 = 0 \iff x^2(x^2+9) = 0$

$\Rightarrow$ radici : $\quad x = 0$ con molteplicità $m=2$

$x^2+9=0 \iff x = \pm 3i \quad \Rightarrow$ BASE : $\sin 3t, \cos 3t, 1, t$

$\boxed{\alpha=0 \quad \beta=3}$

Il tentativo per l'eq. non omogenea particolare

$$\bar{u}(t) = a t^3 + b t^2 + c t + d$$

fallisce perché tra le soluzioni dell'eq. omogenea associata ci sono 1 e t

Per la regola, poiché $x=0$ è radice con moltep. $m=2$ allora moltiplico il tentativo con t^2, quindi il vero tentativo per la soluzione particolare della eq. non omogenea è nel tempo:

$$\bar{u}(t) = a t^5 + b t^4 + c t^3 + d t^2$$

$$\bar{u}'(t) = 5a t^4 + 4b t^3 + 3c t^2 + 2d t$$

→ $$\bar{u}''(t) = 20a t^3 + 12b t^2 + 6c t + 2d$$

$$\bar{u}'''(t) = 60a t^2 + 24b t + 6c$$

→ $$\bar{u}^{(IV)}(t) = 120a t + 24b$$

Sostituisco nell'eq. differenziale e ottengo:

$$120a t + 24b + 180a t^3 + 108b t^2 + 54c t + 18d = t^3 - 3$$

$$120at + 24b + 180at^3 + 108bt^2 + 54ct + 18d = t^3 - 3$$

$$\begin{cases} 180a = 1 \\ 108b = 0 \\ 120a + 54c = 0 \\ 24b + 18d = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{a = \frac{1}{180}} \\ \boxed{b = 0} \\ \boxed{c} = -\frac{\cancel{120}^{60}}{\cancel{54}_{27}}a = -\frac{\cancel{20}}{9}\cdot\frac{1}{\cancel{180}_9} = \boxed{-\frac{1}{81}} \\ \boxed{d = -\frac{1}{6}} \end{cases}$$

Sol generale dell'eq. diff. non omogenea è:

$$\boxed{u(t) = c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t) + c_3 t + c_4 + \frac{1}{180}t^5 - \frac{1}{81}t^3 - \frac{1}{6}t^2}$$

OSS: Se come termine non omogeneo avete un po' di tutto cioè esponenziali, trigonometriche e polinomi, allora la soluzione particolare della eq. non omogenea deve essere dello stesso tipo. Se usiamo la linearità delle equazioni differenziali allora è sufficiente risolvere con i termini non omogenei uno per volta e poi sommare le soluzioni ottenute.

Metodo di variazione delle costanti

Esempio: Risolvere $u'' - 3u' - 4u = t$

$\bar{u}(t) = at + b$, $\bar{u}'(t) = a$, $\bar{u}''(t) = 0$, sostituendo

$0 - 3a - 4at - 4b = t$ $\begin{cases} -4a = 1 \\ -3a - 4b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{a = -\frac{1}{4}} \\ \boxed{b = \frac{3}{16}} \end{cases}$

Sol. generale dell'eq. non omogenea:

$$\boxed{u(t) = a e^{4t} + b e^{-t} - \frac{1}{4} t + \frac{3}{16}}$$

Modo alternativo: La soluzione generale dell'omogenea è $\boxed{u(t) = a e^{4t} + b e^{-t}}$

Ora si cerca una soluzione particolare della non omogenea utilizzando la soluzione generale della omogenea ma facendo "VARIARE LE COSTANTI" ossia:

$$\bar{u}(t) = a(t) e^{4t} + b(t) e^{-t}$$

Calcoliamo le derivate e imponiamo certe condizioni che specifichiamo subito:

$$\bar{u}'(t) = a'(t)e^{4t} + 4a(t)e^{4t} + b'(t)e^{-t} - b(t)e^{-t}$$

Ora, impongo che i termini che contengono le derivate sulle $a(t)$ e $b(t)$ si sommino a zero:

$$\boxed{a'(t)e^{4t} + b'(t)e^{-t} = 0} \qquad 1^a \text{ eq.}$$

A questo punto

$$\bar{u}'(t) = 4a(t)e^{4t} - b(t)e^{-t}$$: da qui calcolo $\bar{u}''(t)$, ossia:

$$\bar{u}''(t) = 4a'(t)e^{4t} + 16a(t)e^{4t} - b'(t)e^{-t} + b(t)e^{-t}$$

Sostituisco nell'eq. differenziale e ottengo:

$$4a'(t)e^{4t} + \cancel{16a(t)e^{4t}} - b'(t)e^{-t} + \cancel{b(t)e^{-t}} \qquad \bar{u}''$$

$$\cancel{-12a(t)e^{4t}} + \cancel{3b(t)e^{-t}} \qquad -3\bar{u}'$$

$$\cancel{-4a(t)e^{4t}} - \cancel{4b(t)e^{-t}} \qquad -4\bar{u}$$

$$= t$$

Devono sempre cancellarsi i termini senza derivate di a e b

$$\boxed{4a'(t)e^{4t} - b'(t)e^{-t} = t}$$ 2ª eq.

Metto insieme la 1ª eq. e la 2ª eq. in un sistema di 2 eq. in 2 incognite

$$\begin{cases} a'(t)e^{4t} + b'(t)e^{-t} = 0 \\ 4a'(t)e^{4t} - b'(t)e^{-t} = t \end{cases} \iff \begin{cases} 5a'(t)e^{4t} = t \\ b'(t)e^{-t} = -a'(t)e^{4t} = -\frac{t}{5} \end{cases}$$

Ossia

$$a'(t)\,e^{4t} = \frac{t}{5} \qquad b'(t)\,e^{-t} = -\frac{t}{5}$$

quindi

$$\boxed{a'(t) = \frac{t}{5}e^{-4t}} \qquad \boxed{b'(t) = -\frac{t}{5}e^{t}}$$

Basta integrare e trovare la forma esplicita di a e b :

$$\boxed{a(t)=} \frac{1}{5}\int t e^{-4t}\,dt = \frac{1}{5}\left(\int t\,d\left(-\frac{1}{4}e^{-4t}\right)\right) = -\frac{1}{20}te^{-4t} + \frac{1}{20}\int e^{-4t}\,dt$$

$$\boxed{= -\frac{1}{20}te^{-4t} - \frac{1}{80}e^{-4t}}$$

$$b'(t) = -\frac{t}{5} e^{t} \quad \Rightarrow \quad b(t) = -\frac{1}{5}\int t e^{t}\, dt$$

$$\boxed{b(t) = -\frac{1}{5} t e^{t} + \frac{1}{5}\int e^{t}\, dt = -\frac{1}{5} t e^{t} + \frac{1}{5} e^{t}}$$

Quindi la soluzione particolare è :

$$\bar{u}(t) = \left(-\frac{1}{20} t e^{-4t} - \frac{1}{80} e^{-4t}\right) e^{4t} + \left(-\frac{1}{5} t e^{t} + \frac{1}{5} e^{t}\right) e^{-t}$$

$$= -\frac{1}{20} t - \frac{1}{80} - \frac{1}{5} t + \frac{1}{5} = -\frac{1}{4} t + \frac{3}{16}$$

Equazioni lineari del 1° ordine

$$\boxed{u' + a(t)u = b(t)}$$

2 metodi per la risoluzione:

1. Metodo del fattore integrante
2. omogenea + tentativo

FATTORE INTEGRANTE

Considero una primitiva di $a(t)$, cioè $A'(t) = a(t)$.
Moltiplico l'eq. differenziale per $\boxed{e^{A(t)}}$ FATT. INTEG.

$$\underbrace{u'(t)e^{A(t)} + a(t)u(t)e^{A(t)}}_{\left[u(t)e^{A(t)}\right]'} = b(t)e^{A(t)}$$

$$\left[u(t)e^{A(t)}\right]' = b(t)e^{A(t)}$$

Ora, integrando ambo i membri si ottiene:

$$u(t)e^{A(t)} = \int b(s)e^{A(s)}\,ds + c$$ da cui

$$\boxed{u(t) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)}\int b(s)e^{A(s)}\,ds}$$ formula risolutiva dell'eq. differenziale

Esempio 1:

$$u' + \underbrace{2t}_{=a(t)}\,u = \underbrace{t^3}_{=b(t)}$$

$A(t) = t^2 \Rightarrow$ Fattore integrante $e^{A(t)} = e^{t^2}$.

Ora, moltiplico l'eq. per il fattore integrante e ottengo:

$$\underbrace{u'e^{t^2} + 2tu\,e^{t^2}}_{} = t^3 e^{t^2}$$

$$\left(ue^{t^2}\right)' = t^3 e^{t^2}$$

da cui, ottengo, integrando:

$$u(t)e^{t^2} = \int t^3 e^{t^2}\,dt + c$$

moltiplico tutto per e^{-t^2} e ottengo:

$$u(t) = c\,e^{-t^2} + e^{-t^2}\cdot \underbrace{\int t^3 e^{t^2}\,dt}_{}$$

$$\int t^3 e^{t^2}\,dt = \int t^2 \cdot t e^{t^2}\,dt = t^2\cdot \frac{1}{2} e^{t^2} - \int \frac{1}{\cancel{2}} e^{t^2}\,\cancel{2}t\,dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2}$$

In conclusione, la soluzione:

$$\boxed{u(t) = c\,e^{-t^2} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}}$$

2° metodo : omogenea + particolare

$$u(t) = \underbrace{c\, u_1(t)}_{\substack{\text{sol. eq.}\\ \text{omogenea}}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\substack{\text{sol. particolare}\\ \text{non omogenea}}}$$

Eq. omogenea associata è : $\boxed{u'(t) + a(t)\,u(t) = 0}$

$$u' + a(t)u = 0 \iff u' = -a(t)\,u$$

Uso le variabili separabili per integrarli

① separare : $\frac{du}{dt} = -a(t)\,u \iff \frac{du}{u} = -a(t)\,dt$

② integrare : $\int \frac{du}{u} = -\int a(t)\,dt \Rightarrow \log|u| = -A(t) + c$

③ ricavare :

$$\log|u| = -A(t) + c \Rightarrow |u| = e^{-A(t)+c} \Rightarrow u(t) = \pm\, e^{-A(t)+c}$$

$$u(t) = \pm e^{c}\, e^{-A(t)} = c\, e^{-A(t)}$$

Quindi la soluzione dell'eq. omogenea associata è $\boxed{u(t) = c\, e^{-A(t)}}$

Devo trovare una sol. particolare della non omogenea e uso la variazione delle costanti:

$$\bar{u}(t) = c(t)\, e^{-A(t)}$$

$$\bar{u}'(t) = c'(t) e^{-A(t)} - c(t)\, a(t)\, e^{-A(t)}$$, sostituisco nell'eq. diff.:

$$c'(t) e^{-A(t)} - \cancel{c(t)\, a(t)\, e^{-A(t)}} + \cancel{a(t)\, c(t)\, e^{-A(t)}} = b(t)$$

$$c'(t)\, e^{-A(t)} = b(t)$$

$$c'(t) = b(t) e^{A(t)} \Rightarrow \text{integrando} \quad c(t) = \int b(t) e^{A(t)}\, dt$$

da cui

$$\boxed{\bar{u}(t) = e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)}\, dt}$$

soluzione particolare della non omogenea

Riconsideriamo l'esempio $u' + 2t u = t^3$

l'omogenea associata è $u' + 2t u = 0$. La risolviamo con il metodo della separazione delle variabili ottenendo $u' = -2t u$ $\quad \frac{du}{dt} = -2t u$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = -2t\, dt \Rightarrow \log|u| = -t^2 + c \Rightarrow u(t) = \pm e^{c} e^{-t^2} = c\, e^{-t^2}$$

Per trovare la sol. particolare uso come tentativo un polinomio di ordine 2 $\quad \bar{u}(t) = at^2 + bt + c$

$\bar{u}'(t) = 2at + b$ e sostituisco nell'eq. trovando

$$\underbrace{2at + b}_{\bar{u}'} + \underbrace{2at^3 + 2bt^2 + 2ct}_{2t\bar{u}} = t^3$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 0 \\ 2a + 2c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$\boxed{a = \frac{1}{2}}$ $\quad \boxed{b = 0}$ $\quad \boxed{c = -\frac{1}{2}}$

Quindi la soluzione particolare è $\bar{u}(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}$

ossia la soluzione generale dell'eq. di ft è :

$$\boxed{u(t) = Ce^{-t^2} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}}$$