1 First week

2^A: insieme delle parti di A $\Rightarrow$ $2^{\wedge \# A}$ = elenco delle parti di A

Relazioni: dati 2 insiemi X e Y, e un sottoinsieme $\mathcal{R}$(X,Y) è detto relazione tra X e Y e scriveremo x$\mathcal{R}$y, x,y$\in \mathcal{R}$

Funzione: siano dati X,Y e dia f una relazione tra X e Y, f $\subset X \times Y$. diremo che f è una funzione da X in Y se vale:

$$\forall x \in X : \exists! y \in Y tc(x, y) \in f$$

Dominio: insieme delle x che vanno in Y

Codomidio: insieme delle y che hanno corrispondenza in X

Legge: proprietà che definisce una relazione da X a Y

Insieme di tutte le funzioni: Y^X corrisponde a tutte le funzioni con leggi diverse ma con stessi insiemi di partenza ed arrivo

Funzione identità: $id_X(X) = X$

Composizione di funzioni: $x \rightarrow^f y \rightarrow^g z \Rightarrow g(f(x)) = z \Rightarrow gof(x) = z$

Iniettiva: ad ogni f(x) corrisponde un solo y
Surgettiva: ad ogni y corrisponde un f(x)
Bigiettiva: sia iniettiva che suriettiva

Inversa: se f è biettiva, allora esiste $g = f^{-1}$

2 Second week

Sistemi equipotenti: X e Y sono equipotenti ($X \sim Y$) se hanno la stessa cardinalità e la funzione $f : X \to Y$ è bigiettiva (o invertibile)

insiemi cardinali: sono gli insiemi in formato {0,1,...,n} equipotenti all'insieme dato, si rapprensentano $|A|$ e definiscono una cardinalità pari a n+1

TEOREMA: X e Y sono equipotenti se e solo se i loro insiemi cardinali sono uguali

$$|X| = |Y|$$

Numeri naturali: sono definiti dagli assiomi di Peano:

- 0 è un numero naturale
- esiste una funzione successivo $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- succ(n) $\in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, cioé il successivo di ogni naturale è diverso da 0
- vale principio d'induzione

Principio d'induzione: con $A \subset \mathbb{N}$

- base induttiva: $0 \in A$
- passo induttivo: $\forall n \in \mathbb{N}, n \in A \Rightarrow succ(n) \in A$, allora $A = \mathbb{N}$

Principio induttivo di prima forma:
Prendiamo una proposizione P(n) e supponiamo che rispetti 2 condizioni:

- la base induttiva: P(0) è vera
- il passo induttivo: $\forall n \in \mathbb{N}$, P(n) è vera (ipotesi induttiva), allora P(succ(n))

Se rispetta queste condizioni allora implica $\forall n \in \mathbb{N}$, P(n)

Teorema di ricorsione: Sia X un insieme, esite una funzione $f : \mathbb{N} \to X$ tc:

$$f(0) = c$$
$$f(succ(n)) = h(n, f(n))$$

Addizione: tramite il teorema di ricorsione definiamo la funzione $m \to n + m :$

$$n + 0 = n$$
$$n + succ(m) = succe(n) + m$$

Moltiplicazione: tramite il teorema di ricorsione definiamo la funzione $m \to nm :$

$$n \cdot 0 = 0$$
$$n(m + 1) = mn + n$$

Ordinamento dei naturali: può essere totale o parziale

Ordine parziale: è una relazione $\mathcal{R} \subset X \times X$ e rispecchia le seguenti proprità:

- riflessiva: $x\mathcal{R}x, \forall x \in X$
- antisimmetrica: $x\mathcal{R}yey\mathcal{R}x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in X$
- transitiva: $x\mathcal{R}y\ e\ y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z, \forall x, y, z \in X$

Ordinamento totale: come l'ordinamento parziale, ma con la proprietà aggiunta:

- tricotomia: $x\mathcal{R}y$ *o* $y\mathcal{R}x\,\forall x, y \in X$

insiemi ordinati: se $\mathcal{R}$ è parziale o totale, dirò che $(X, \mathcal{R})$ è parzialmente o totalmente ordinato

Principio d'induzione shiftato di prima forma: identico alla prima forma ma la base invece che 0, parte da $k \leq n$

- base induttiva: P(k) è vera
- passo induttivo: $\forall n \geq k$, P(n) è vera $\Rightarrow$ P(n+1)