Lezione 25ª

Equazioni differenziali ordinarie

Sono equazioni che legano una funzione incognita $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto u(t)$ con alcune delle sue derivate.

Esempio: $$u'(t) + (u(t))^2 + t \sin u(t) = 0$$

oss: Oltre ad avere la funzione $u(t)$ come incognita anche il dominio di $u(t)$ è una incognita!

DEF: Si dice ORDINE di una EDO il massimo ordine di derivazione presente nell'eq.

In modo molto ASTRATTO una EDO si presenta nella forma

$$\Phi\left(u^{(n)}(t), u^{(n-1)}(t), \ldots, u'(t), u(t), t\right) = 0$$

Def: Si dice una EDO in forma NORMALE se la derivata di ordine massimo dell'eq. è "ricavata" rispetto al resto

Per una EDO di ordine n vuol dire: $$\boxed{u^{(n)}(t) = F\left(u^{(n-1)}(t), \ldots, u(t), t\right)}$$

Esempi: 1. $\boxed{u''(t) = (u'(t))^2 + \cos t}$

2. $(u'(t))^3 + \cos u(t) = t^2$ EDO 1° ordine NON in forma NORMALE

$$(u'(t))^3 = t^2 - \cos u(t) \Rightarrow \boxed{u'(t) = \sqrt[3]{t^2 - \cos u(t)}}$$

3. $(u'(t))^2 = u(t)$ EDO 1° ordine non in forma NORMALE

↳ non è riconducibile alla forma normale perché c'è ambiguità

OSS: in forma più semplice

1. $u'' = u'^2 + \cos t$
2. $u'^3 + \cos u = t^2$
3. $u'^2 = u$

DEF: Una EDO si dice AUTONOMA se la variabile t compare solo come argomento della funzione incognita u
Altrimenti si dice NON AUTONOMA

Per grandi linee faremo solo 3 TIPI di EDO.

1° TIPO Sono EDO 1° ordine A VARIABILI SEPARABILI

Noi sappiamo che in forma normale

$$u' = F(u,t)$$

$$F(u,t) = f(t)\,g(u)$$

Esempi:

1. $u' + t = tu \implies u' = t(u-1) \iff f(t) = t \quad g(u) = u-1$

2. $u' = t^2 u^3 \implies f(t) = t^2 \quad g(u) = u^3$

3. $u' = u^4 = 1 \cdot u^4 \implies f(t) = 1 \quad g(u) = u^4$

<u>Fatto generale</u>: tutte le EDO 1° ordine in forma normale AUTONOME si scrivono nella forma

$$u' = g(u) = \underbrace{1}_{f(t)=1} \cdot\, g(u)$$

$\implies$ sono anche a variabili separabili.

Def: Una EDO si dice LINEARE se la funzione incognita u e le sue derivate compaiono al 1° grado e non all'interno di funzioni, cioè della forma

$$a_n(t)\, u^{(n)} + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\, u' + a_0(t)\, u = f(t)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k(t)}_{\text{coefficienti}}\, u^{(k)} = f(t) \longrightarrow \text{termine noto}$$

Una EDO è detta OMOGENEA se il termine noto è 0

Esempio: $\underbrace{1}_{a_2(t)} \cdot u'' + \underbrace{3t}_{a_1(t)}\, u' + \underbrace{t^2}_{a_0(t)}\, u = \underbrace{\sin t}_{f(t)}$

$\boxed{u' + t^2 u = t^3}$ lineare

$u' + t\, u^2 = t^3$ non lineare

$\boxed{u' + \cos u = t}$ non lineare

$\boxed{u'' + u' \cdot u = 0}$ non è lineare

Def: Una EDO lineare si dice a COEFF. COSTANTI se i coeff. $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ sono tutte funzioni numeriche ossia costanti

esempio: $\boxed{3u''' + u'' + 2u = \cos t}$

OSS: → Una EDO lineare a coeff. cost. è autonoma?

no perché può esserci sempre il termine noto $f(t) \neq$ costante

→ Una EDO lineare autonoma è omogenea?

no, perché il termine noto $f(t) =$ costante

$$\boxed{u''' + u = 5}$$

$\boxed{\text{2° TIPO}}$ EDO lineari del 1° ordine

$$\boxed{a_1(t)\,u' + a_0(t)\,u = f(t)}$$

Se $a_1(t) \neq 0 \Rightarrow$ divido per $a_1(t)$ e ottengo $\boxed{u' + a(t)u = b(t)}$

$\boxed{\text{3° TIPO}}$ EDO lineari di ordine k a coeff. costanti e non omogenee

$$\sum_{j=0}^{k} a_j u^{(j)} = f(t) \qquad a_j \in \mathbb{R} \quad j = 0, \dots, k$$

$$a_k u^{(k)} + a_{k-1} u^{(k-1)} + \dots + a_0 u = f(t)$$

Esempi:

1. $u'' + 3u' = \sin t$
2. $u^{(IV)} + 5u = e^{t}$

Esempio 1: $\boxed{u' = 2u}$

una soluzione è $u(t) = e^{2t}$

un'altra soluzione è $u(t) = 5e^{2t}$

In effetti anche $u(t) = Ce^{2t}$ è soluzione per ogni $C \in \mathbb{R}$ e queste sono le uniche soluzioni dell'eq.

Esempio 2: $\boxed{u'' = -u}$

Una soluzione è $u(t) = \sin t$ e un'altra è $u(t) = \cos t$

In effetti abbiamo per entrambi i casi di prima una infinità di soluzioni perché possono avere come soluzioni anche

$u(t) = a \sin t$ $\quad a \in \mathbb{R}$ e lo stesso per $u(t) = b \cos t$ $\quad b \in \mathbb{R}$

In effetti la soluzione più generale dell'eq. è

$$u(t) = a \sin t + b \cos t \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Esempio 3: $u' = -u^2 \Rightarrow u(t) = \frac{1}{t}$

La soluzione più generale è $u(t) = \frac{1}{t + C}$ $\quad C \in \mathbb{R}$

<u>Fatto generale</u>: Una EDO di ordine k ha come soluzione generale una funzione di k parametri ossia tanti parametri quanto è l'ordine dell'equazione.

$\boxed{\text{PROBLEMA DI CAUCHY}}$

Problema di Cauchy $\cong$ EDO + condizioni iniziali

Le condizioni iniziali per una EDO di ordine k prescrivono il valore della funzione incognita u e di tutte le sue derivate fino all'ordine $k-1$ per uno stesso valore di t che viene detto ISTANTE INIZIALE

Esempio 1: Per una EDO del 1° ordine il problema di Cauchy è della forma

$$\begin{cases} u' = F(t,u) \\ u(\underbrace{t_0) = u_0}_{\text{dati del problema}} \end{cases}$$

Risolvere il problema di Cauchy vuol dire trovare fra le infinite soluzioni del problema della EDO quella che verifica la condizione iniziale.

$$\begin{cases} u' = 2u \\ u(3) = 5 \end{cases} \qquad u(t) = c e^{2t} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\hookrightarrow \quad u(3) = c e^{6} = 5 \iff c e^{6} = 5 \iff c = 5 e^{-6}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{u(t) = 5 e^{-6} e^{2t} = 5 e^{2t-6}}$$

Per una EDO del 2° ordine il problema di Cauchy è del tipo:

$$\begin{cases} u'' = F(u', u, t) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \end{cases}$$

t_0, u_0, u_1 sono dati del problema

$$\underbrace{\begin{cases} u'' + 3u' + 5u = \sin t \\ u(2) = 5 \\ u'(2) = 7 \end{cases}}$$

problema di Cauchy

$$\underbrace{\begin{cases} u'' + \dots \\ u(\boxed{2}) = 5 \\ u'(\boxed{3}) = 7 \end{cases}}$$

non è un problema di Cauchy perché devo avere lo stesso t_0

$$\underbrace{\begin{cases} u'' + \dots \\ u(2) = 5 \\ \underline{u''(2)} = 10 \end{cases}}$$

non è un problema di Cauchy perché devo prescrivere all'istante iniziale u e u' non u''

Teorema di ESISTENZA (PEANO)

Consideriamo il problema di Cauchy per una EDO di ordine k in forma NORMALE

$$
\begin{cases}
u^{(k)} = F(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}) \\
\left.\begin{array}{l}
u(t_0) = u_0 \\
u'(t_0) = u_1 \\
\vdots \\
u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1}
\end{array}\right\} k \text{ condizioni iniziali}
\end{cases}
$$

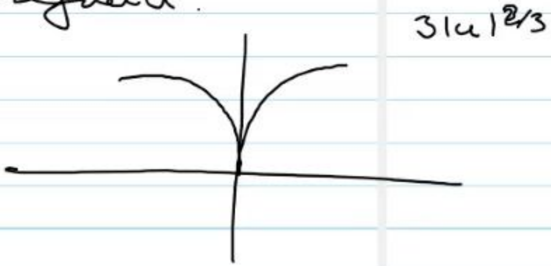
Se la funzione F è continua allora il problema di Cauchy ha almeno una soluzione LOCALE ossia esiste un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ con $t_0 \in I$, per cui esiste $u : I \to \mathbb{R}$ che soddisfa l'EDO e le k condizioni iniziali.

Teorema di ESISTENZA ED UNICITÀ LOCALE

Se F è un po' più che continua, diciamo derivabile, allora la soluzione del problema di Cauchy è anche unica, cioè le condizioni iniziali permettono di fissare in modo univoco i k parametri della sol. generale

Esempio Consideriamo il problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} u' = 3|u|^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$



La funzione $f(x) = 3|x|^{2/3}$ è continua ma non è derivabile in $x = 0$

Una soluzione ovvia è $u(t) \equiv 0$

un'altra soluzione è $u(t) = t^3$

In questo problema ci sono tantissime altre soluzioni, ad esempio:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \le c \\ (t-c)^3 & t \ge c \end{cases}$$ con $c > 0$ arbitrario

EDO a variabili separabili

$$u' = f(t)\,g(u)$$

Esempio $\quad u' = u^2 \cos t$

1. separare le variabili
2. integrare
3. ricavare la soluzione

(1) separare $\quad \dfrac{du}{dt} = u^2 \cos t$

a sinistra tutto ciò che riguarda la u
a destra " " " " " t

$$\frac{du}{u^2} = \cos t \, dt$$

(2) integrare

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \cos t \, dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{u} = \sin t + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

(3) ricavare

$$\frac{1}{u} = -\sin t + c \quad \Rightarrow \quad \boxed{u(t) = \frac{1}{-\sin t + c}}$$

sol. generale della EDO

Spesso si ha anche una condizione iniziale (Problema di Cauchy)

$$\begin{cases} u' = u^2 \cos t \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

(4) determinare il parametro C della soluzione generale dalla condizione iniziale

$$u(0) = 5 \qquad u(t) = \frac{1}{C - \sin t} \Rightarrow u(0) = \frac{1}{C} = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{5}}$$

Ora posso scrivere la soluzione unica del problema di Cauchy

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{5} - \sin t} \Rightarrow \boxed{u(t) = \frac{5}{1 - 5\sin t}}$$

sol. del Prob. di Cauchy

(5) verifica!

$u(0) = 5$ ✓

$$u'(t) = \frac{-5(-5\cos t)}{(1-5\sin t)^2} = \frac{25\cos t}{(1-5\sin t)^2} = \overbrace{\frac{25}{(1-5\sin t)^2}}^{u^2(t)} \cdot \cos t$$

(6) Studio della soluzione ottenuta

$$u(t) = \frac{5}{1 - 5\sin t}$$

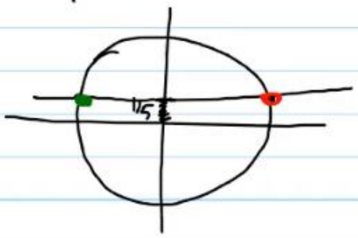
Def: Si dice INTERVALLO MASSIMALE DI ESISTENZA il pezzo dell'insieme di definizione della soluzione che contiene l'istante iniziale

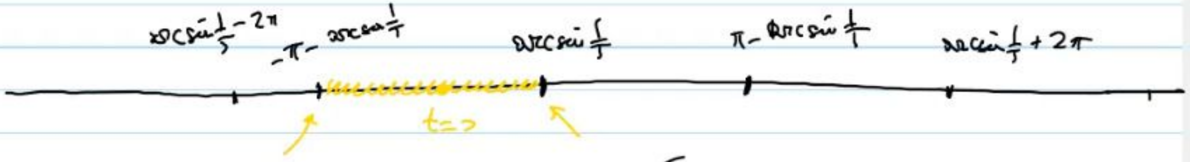
Nel nostro esempio: $u(t)$ è definita se $1 - 5\sin t \neq 0 \iff \boxed{\sin t \neq \frac{1}{5}}$

Andiamo a vedere quali valori di t violano la condizione, ossia per quali t

$$\sin t = \frac{1}{5} \iff t = \arcsin\frac{1}{5} + 2k\pi$$

$$t = \pi - \arcsin\frac{1}{5} + 2k\pi$$





intervallo massimale di esistenza è $I = \left(-\pi - \arcsin\frac{1}{5},\ \arcsin\frac{1}{5}\right)$

Esempio 2:

$$\begin{cases} u' = u^2 t^3 \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

1. separare $\qquad \dfrac{du}{dt} = u^2 t^3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{u^2} = t^3\,dt$

2. integrare $\qquad \displaystyle\int \frac{du}{u^2} = \int t^3\,dt \iff -\frac{1}{u} = \frac{t^4}{4} + c$

3. ricavare la soluzione

$$\frac{1}{u} = -\frac{t^4}{4} + c$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \frac{1}{c - \frac{t^4}{4}} = \frac{4}{c - t^4}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{4}{c - t^4}}$$ soluzione generale

4. determinare c dalla condizione iniziale

$$u(0) = 7 = \frac{4}{c} \iff \boxed{c = \frac{4}{7}}$$

Quindi la soluzione del Prob. di Cauchy è

$$\boxed{u(t) = \frac{28}{4 - 7t^4}}$$

(5) Verifica! $u(0) = \frac{28}{4} = 7$ ✓ u^2

$$u'(t) = \frac{-28\,(-28t^3)}{(4-7t^4)^2} = \frac{28^2}{(4-7t^4)^2} \cdot t^3$$

(6) studiare la soluzione: la funzione $u(t)$ è definita quando

$$4 - 7t^4 \neq 0 \iff t^4 \neq \frac{4}{7} \iff t \neq \pm\sqrt[4]{\frac{4}{7}}$$

$-\sqrt[4]{\frac{4}{7}}$ $t=0$ $\sqrt[4]{\frac{4}{7}}$

$$I = \left(-\sqrt[4]{\frac{4}{7}},\ +\sqrt[4]{\frac{4}{7}}\right)$$

intervallo massimale di esistenza della soluzione del problema di Cauchy.

Def: Si dice TEMPO DI VITA (LIFE SPAN) della soluzione (nel futuro) l'estremo superiore dell'intervallo massimale di esistenza

nel nostro esempio: T = Tempo di vita $= \sqrt[4]{\frac{4}{7}}$

Ci sono vari casi:

→ se il tempo di vita è $+\infty$ si dice che la soluzione ha esistenza globale nel futuro

→ se il tempo di vita è $< +\infty$, cioè è un numero T allora si dice che la soluzione MUORE al tempo T

In questo caso ci sono 2 possibili cause:

1 - se $\lim_{t \to T^-} u(t) = \pm\infty \Rightarrow$ si dice che la soluzione ha uno SCOPPIAMENTO (BLOW-UP) al tempo T

Nel nostro esempio $\lim_{t \to \sqrt[4]{\frac{4}{7}}^-} u(t) = \lim_{t \to \sqrt[4]{\frac{4}{7}}^-} \frac{28}{4-7t^4} = \left[\frac{28}{0^+}\right] = +\infty$

2 – se non c'è SCOPPIAMENTO ma "$u(t)$ esce dalla zona in cui il termine di destra dell'eq. è definito" allora si dice che la soluzione ha una ROTTURA (Break-down)

In genere, ma non sempre, questo vuol dire che

$$\lim_{t\to T^-} u'(t) = \pm\infty$$