# 1 prime lezioni

insiemi e logica elementare

numeri reali e naturali

# 2 maggioranti, minoranti, sup e inf

**Def**
Sia $A \in \mathbb{R}$ non vuoto.
$A$ è **limitato superiormente** se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq M \ \forall x \in A$. $M$ viene definito come **Maggiorante** di $A$. Se $M$ di $A$ appartiene ad $A$ si dice **massimo** di $A$, e viene denotato come $max(A)$

$A$ è **limitato inferiormente** se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq M \ \forall x \in A$. $m$ viene definito come **minorante** di $A$. Se $m$ di $A$ appartiene ad $A$ si dice **minimo** di $A$, e viene denotato come $min(A)$

$A$ si dice **limitato** se è limitato sia inferiormente che superiormente

**Def**
Siano $A, B \in \mathbb{R}$ non vuoti

- $-A \doteq \{-x \mid x \in A\}$
- $A + B \doteq \{x + y \mid x \in A, \ y \in B\}$
- $A - B \doteq \{x - y \mid x \in A, \ y \in B\}$

Se $x \in \mathbb{R}$

- $x + A \doteq \{x + y \mid y \in A\}$

non importante, skippo

# 3 lezioni skippate

Caratterizzazione sup, inf, classi contigue, densità dei razionali

## 4 Radici, esponenziali reali, funzioni inverse, logaritmi, trigonometriche

**Prop - Radici n-esima**
per ogni numero nullo positivo $a$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un unico numero reale $b$ tale che $b^n = a$. Tale reale positivo è la radice n-esima e si indica con i simboli:

$$\sqrt[n]{a} \quad \doteq \quad a^{\frac{1}{n}}$$

Sia $r \in \mathbb{Q}, r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} q \in \mathbb{N}$. Allora se $a > 0$:

$$a^r \doteq a^{\frac{p}{q}} \doteq \sqrt[q]{a^p} \qquad r \geq 0$$
$$a^r \doteq a^{\frac{p}{q}} \doteq \frac{1}{\sqrt[q]{a^{-p}}} \qquad r < 0$$

La radice possiede le stesse proprietà della potenza intera

Se $0 < a < 1$, allora posto $b = \frac{1}{a}$ e definisco:

$$a^x = \frac{1}{b^x}$$

**Operazioni tra funzioni**
$f, g$

- Somma: $(f+g)(x) \doteq f(x) + g(x) \qquad x \in dom(f) \cap dom(g) \neq \emptyset$
- Prodotto: $(f \times g)(x) \doteq f(x) \times g(x) \qquad x \in dom(f) \cap dom(g) \neq \emptyset$
- Rapporto: $(\frac{f}{g})(x) \doteq \frac{f(x)}{g(x)} \qquad x \in dom(f) \cap dom(g) \neq \emptyset, g(x) \neq 0$
- Composizione: $(f \circ g)(x) \doteq f(g(x)) \qquad \forall x \in A$
- Restrizione: $f : A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Se prendo $B \subseteq A$ allora la resitrzione $AB$ di $f$ è: $f \restriction_B : B \to \mathbb{R}$

**Def - funzioni limitate**
Sia $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R} A \neq \emptyset$, diremo che $f$ è **limitata superiormente** se $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ è limitata superiormente, cioé esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$. Analogamente diremo che $f$ è **limitata inferiormente** se $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ è limitata inferiormente, cioé esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq m \quad \forall x \in A$.
La funzione $f$ sarà **limitata** se è limitata inferiormente e superiormente.

Quindi se $f(A)$ è limitata superiormente allora esiste il suo estremo superiore $sup(f(A))$, ovvero $sup(f) \doteq sup(f(A))$. Lo stesso vale per l'opposto ($inf(f) \doteq$

$sup(f(A)))$.
Se $x_0 \in dom(A)$ e $f(x_0) = sup(f)$ si dice che $f$ ammette **massimo assoluto**. Nel caso dell'estremo inferiore, diremo che $f$ ammette **minimo assoluto**

**Def - funzioni monotone**
Sia $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R} A \neq \emptyset$. Allora $f$ è detta:

- Crescente: per ogni coppia $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Strettamente crescente: per ogni coppia $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Decrescente: per ogni coppia $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- Strettamente Decrescente: per ogni coppia $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Le funzioni crescenti e decrescenti vengono definite monotone, mentre quelle strettamente crescenti o decrescenti sono strettamente monotone

**Prop**
Ogni funzione strettamente monotona è iniettiva

Osservazioni:
se $f$ è iniettiva, non per forza è strettamente monotona, ma vale la negazione: se una funzione non è iniettiva, allora sicuramente non è strettamente monotona.

**Def - Funzioni inverse**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e $f : A \to B$. Se $f$ è biunivoca (iniettiva e suriettiva) allora $f$ è **invertibile** e si chiama funzione inversa di $f$ la funzione $g : B \to A$ e vale:

$$g \circ f = id(A) \qquad (id(x) = x \quad \forall x \in A)$$

La funzione inversa si indica con il simbolo $f^{-1}$

**Def - Funzioni periodiche**
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dice che $f$ è **periodica** se esiste $t \in \mathbb{R}/\{0\}$ tale che:

$$f(x + t) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$t$ è detto periodo di $f$. Il numero $t_0 \doteq min\{t > 0\}$ è detto, se esiste, **minimo periodo** di $f$

**Def - Polinomi e razionali**

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n + x^n \qquad a_0, ...a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Se $a_n \neq 0$ allora diremo che $n$ è il grado del polinomio. $P$ è definito su tutto $\mathbb{R}$. I valori $x \in \mathbb{R}$ per cui $P(x) = 0$ sono detti zeri o radici. Se $P$ ha grado $n$, allora le radici sono al più $n$ numeri reali.
$P$ è detto **irriducibile** se non è scrivibile come prodotto di polinomi di grado minore al grado di $P$. Gli unici polinomi a essere irriducibili sono quelli di 1° grado e quelli di 2° grado con discriminante negativo

Una funzione $f$ è **razionele** se:

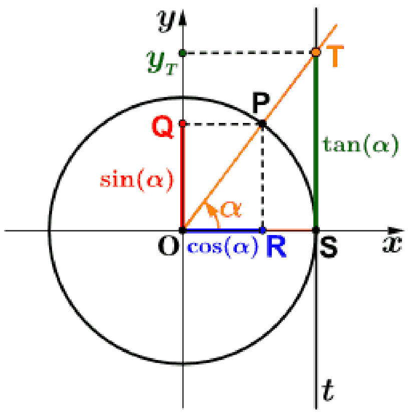
$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$$

dove $n(x)$ e $d(x)$ polinomi, $dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x) \neq 0\}$.
Se $f$ è razionale e $grad(n) > grad(d)$ allora:

$$f(x) = P(X) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

dove $P(x)$ è polinomio quoziente e $r(x)$ è il resto della divisione

**Funzioni trigonometriche e le loro inverse**




$$cos(x) = sin(x + \tfrac{\pi}{2})$$
$$cos(x)^2 + sin(x)^2 = 1$$

parità: coseno è pari, infatti $cos(-x) = cos(x)$, mentre il seno è dispari perché $sin(-x) = -sin(x)$

**tangente e cotangente**
la tangente, $tg(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$, corrisponde alla lunghezza del segmento che cade perpendicolare sull'asse delle x nel punto 1 e che interseca l'estensione del raggio. Il dominio della tangente è $dom(tg) = \mathbb{R}/\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. La contangente, $tg(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$, invece cade sull'asse delle y nel punto 1.

Sia tangente e cotangente sono funzioni dispari e hanno periodo minimo in $\pi$

**Inverse**

$$arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$
$$arcsin \doteq (sin \restriction_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}$$
$$arcsin(sin(x)) = x \qquad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]]$$

$$arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$arccos \doteq (cos \restriction_{[0,\pi]})^{-1}$$
$$arccos(cos(x)) = x \qquad \forall x \in [0,\pi]$$

$$arctg : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$
$$arctg \doteq (tg \restriction_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}$$
$$arctg(tg(x)) = x \qquad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]]$$

$$arccotg : [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$arccotg \doteq (cotg \restriction_{[0,\pi]})^{-1}$$
$$arccotg(cotg(x)) = x \qquad \forall x \in [0,\pi]$$

**Esponenziali e logaritmi**
Se $a > 0, a^x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} exp_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to a^x \end{aligned}$$

Se $a = 1$ allora ho la funzione banale $a^x = 1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Se $a \neq 1$ allora $a^x > 0$ quindi è limitato inferiormente e il minimo è 0.
L'esponenziale è bigiettiva, quindi invertibile, e la sua funzione inversa è il logaritmo

$$a^y = x \qquad y = log_a(x)$$

Dalle proprietà elementari determiniamo che

- $log_a(a^x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $a^{log_a(x)} = x \qquad \forall x > 0, x \in \mathbb{R}$

**Prop**
Valgono le seguenti proprietà:

- $log_a(x_1 + x_2) = log_a(x_1) + log_a(x-2) \qquad x_{1,2} > 0$
- $log_a(x^\alpha) = \alpha \cdot log_a(x) \qquad x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$
- $log_b(x) = log_a(x) \cdot log_b(a) \qquad x, a, b > 0, a, b \neq 1$

Il logaritmo se viene indicato come $log$ è in base 10, mentre $ln$ se ha come base il numero di nepero

# 5 Successioni di numeri reali

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \in \mathbb{R} \to a(n) \in \mathbb{R} \qquad a(n) = a_n$$
$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...) \Leftrightarrow (a_n)(a_n)_n(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

I componenti della successione si chiamano **termini** della successione $(a_n)$, mentre il valore $n$ si dice **indice**.

NB: è importante **non confondere successione e immagine della successione**.
Es: $(a_n) = (2, -2, 2, -2, 2, -2, ...) \qquad imm(a_n) = \{2, -2\}$

Es: $\sqrt{2}$ si avvicina alla successione $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ con $a_n > 0$ e $a_1 = 2$. La differenza tra $\sqrt{2}$ e $(a_n$, ossia $|a_n - \sqrt{2}|$ viene inteso come **errore assoluto**

**Def**
Diremo che una successione **tende** o **converge** ad un certo numero reale $l$ se per quanto piccolo si scelga $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un naturale $N$ per cui tutti i termini della successione con indici $n < N$ approsimano $l$ con un errore minore di $\varepsilon$. In tal caso il numero $l$ si dice **limite** della successione e la convergenza viene descritta con il simbolo:

$$a_n \to l \qquad\qquad n \to \infty$$

La successione converge a $l \in \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tali che:

$$|a_n - l| < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n > N_\varepsilon$$

Oss: le successioni per cui $a_n \to 0 \qquad n \to \infty$ si dicono **infinitesime**

**Def - successioni divergenti**
Una successione si dice avere limite a $+\infty$ o diverge a $+\infty$ e scriveremo $a_n \to \infty\ quad n \to \infty$ quando, comunque scelto un numero reale, ogni termine della successione da un certo indice in poi è maggiore del numero reale scelto.
In modo formale, per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $N_M \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $n > N_M$ si ha $a_n > M$. Lo stesso si può fare nel caso $(a_n)$ diverge a $-\infty$. Ossia posso dire che $(-a_n)$ diverge a $+\infty$, per cui vale la definizione di prima, ossia, per ogni scelta di $M \in \mathbb{R}$ trovo $N_M \in \mathbb{N}$ per cui ogni $n > N_M \quad -a_n > M$ ossia $A_n < -M$. Anche ora si può scrivere $a_n \to -\infty \quad n \to \infty$

**Def - Carattere delle successioni**
Sia $(a_n)$ successione reale. Se $(a_n)$ ammette limite (finito o infinito) diremo che la successione $(a_n)$ è **regolare**. Se non ammette limite diremo che la successione è **irregolare** o **indeterminata**. Stabilire se $(a_n)$ è regolare o indeterminata vuol dire stabilire il carattere della succesione.

**Teorema - Unicità del limite**
Ogni successione reale regolare ha un solo limite

**Definizione topologica di limite**
Concetto di intorno
$I_\varepsilon(l) \doteq (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \Rightarrow$ Intorno simmetrico di raggio $\varepsilon > 0$.
Al variare di $\varepsilon > 0$ considero la famiglia degli intorni simmetrici

$$\mathcal{B}_l \doteq \{I_\varepsilon(l) \mid \varepsilon > 0\}$$

$\mathcal{B}_l$ è detta **base di intorni** di $l \in \mathbb{R}$. Posso verificare gli intorni di $\pm\infty$ come gli intervalli $(M, +\infty)$ oppure $(-\infty, M)$ per ogni scelta di $M \in \mathbb{R}$

**Teorema - Cambiamento delle variabili**
Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente. Allora se $(a_n)$ è regolare vale:

$$lim\ a_n = lim\ a_{f(n)}$$

Corollario:
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ finito ho:

$$lim\ a_{n+k} = lim\ a_n$$

**Proprietà delle successioni regolari**
**Limitatezza**

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$a(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$$
$$a(\mathbb{N}) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Diremo che $(a_n)$ è **superiormente limitata** se $a(\mathbb{N})$ lo è, ossia esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n < M\ \forall n \in \mathbb{N}$, e quindi diremo che accetta estremo superiore. Invece $(a_n)$ è **inferiormente limitata** se $a(\mathbb{N})$ lo è, ossia esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $a_n > m\ \forall n \in \mathbb{N}$, e quindi accetta estremo inferiore. Diremmo che $(a_n)$ è **limitata** se lo è sia inferiormente che superiormente

**Prop**
Ogni successione convergente è limitata. Ogni successione divergente positivamente è inferiormente limitata e ogni successione divergente negativamente è superiormente limitata

**Prop**
Se $(a_n)$ è regolare allora $(|a_n|)$ è reoglare. Se $(|a_n|)$ è infinitesima allora $(a_n)$ è infinitesima

**Monotonia**
**Def**
Sia $(a_n)$ successione reale.

- $(a_n)$ è crescente se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$
- $(a_n)$ è decrescente se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$
- $(a_n)$ è strettamente crescente se $a_n < a_{n+1} \quad \forall n$
- $(a_n)$ è strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1} \quad \forall n$

**Teorema**
Ogni successione monotona è regolare. in particolare se monotona crescente allora $lim\ a_n = inf(a_n)$

**Algebra dei limiti**

$$\overline{\mathbb{R}} \doteq \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$x \in \overline{\mathbb{R}} \qquad -\infty \leq x \leq +\infty$$

Relazioni indeterminate:

- $\pm\infty \mp \infty$
- $0 \cdot \pm\infty$
- $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $0^0, +\infty^0, 1^{\pm\infty}$

$$a \in \mathbb{R} \qquad a + \pm\infty = \pm\infty \qquad +\infty^a = +\infty$$
$$a \in \mathbb{R}_+ \qquad a \cdot \pm\infty = \pm\infty$$
$$b \in \mathbb{R}_- \qquad b \cdot \pm\infty = \mp\infty \qquad +\infty^b = 0$$
$$+\infty + \infty = +\infty \qquad -\infty - \infty = -\infty$$
$$\frac{1}{\pm\infty} = 0 \qquad +\infty^{-\infty} = 0$$

**Prop**
Supponiamo $(a_n)$ regolare con $a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Se $l_0 \in \mathbb{R}$ è tale che

$$lim\ a_n = l > l_0$$

allora esistono un $N \in \mathbb{N}$ e un numero reale $s > 0$ tali che

$$a_n > s \qquad \forall n > N$$

2. Se $l_0 \in \mathbb{R}$ è tale che

$$lim\ a_n = l < l_0$$

Allora esistono $N \in \mathbb{N}$ ed un numero reale $s < l_0$ tali che

$$a_n < s \qquad \forall n > N$$

Corollario
Sia $(a_n)$ convergente a $l \neq 0$. Allora:

- Se $l > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > \frac{l}{2} \quad \forall n > N$
- Se $l < 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < \frac{l}{2} \quad \forall n > N$
- Esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| > \frac{|l|}{2} \quad \forall n > N$

**Teorema - Algebra delle somme**
Siano $(a_n), (b_n)$ successioni regolari, allora:

1.

$$lim\ (a_n + b_n) = lim\ a_n + lim\ b_n$$

qualora il secondo membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$

2.

$$lim\ (a_n - b_n) = lim\ a_n - lim\ b_n$$

qualora il secondo membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$

**Teorema - Prodotto di limiti per infinitesima**
Siano $(a_n)$ infinitesima e $(b_n)$ limitata. Allora $a_n \cdot b_n \to 0$ è infinitesima

**Teorema - Algebra dei prodotti**
Siano $(a_n), (b_n)$ regolari. Allora si ha:

$$lim\ (a_n \cdot b_n) = lim\ a_n \cdot lim\ b_n$$

qualora in secondo membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$

**Teorema - Limite dei reciproci**
Sia $(a_n)$ regolare $a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$. Sia hanno i seguenti casi:

- Se $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$ allora

$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$$

- Se $a = 0$ e $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ allora

$$\frac{1}{a_n} \to +\infty$$

- Se $a = 0$ e $a_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ allora

$$\frac{1}{a_n} \to -\infty$$

**Teorema - Algebra dei rapporti**
Supponiamo $(a_n)(b_n)$ regolari. Allora se $b_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$lim\ \frac{a_n}{b_n} = \frac{lim\ a_n}{lim\ b_n}$$

qualora il secondo membro sia ben definito in $\overline{\mathbb{R}}$

Corollario

$$lim\ R(a_n) = lim\ \frac{P(a_n)}{Q(a_n)} = \frac{lim\ P(a_n)}{lim\ Q(b_n)} = \frac{P(a)}{Q(a)} = R(a)$$

**Lemma**
Consideriamo le successioni $(e_n), (E_n)$ di termini generici:

$$e_n = (1 + \frac{1}{n})^n \qquad E_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

Sono vere le seguenti affermazioni:

1. $1 < e_n < E_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $(e_n)$ è strettamente crescente
3. $(E_n)$ è strettamente decrescente

**Def - Numero di Nepero**

$$e \cdot lim\ (1+\frac{1}{n})^n$$

**Def**
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in A$. Allora diremmo che $f$ è **CPS** in a se per ogni successione $(a_n), con a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$, convergente ad a si ha

$$lim\ f(a_n) = f(a)$$

Se tale proprietà vale $\forall a \in A$ diremo che $f$ è CPS (in $A$)

Oss: Definizione poco pratica
$lim\ f(a_n) = f(lim\ a_n)$
$A \subseteq dom(f)$

**Lemma**
Sono CPS nei loro domini naturali le seguenti funzioni

- la funzione identica $id$
- funzioni affini: $a \in \mathbb{R} \quad F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad F(x) \doteq x + a$
- valore assoluto
- polinomi e razionali
- la funzione reciproca: $x \to \frac{1}{x}$
- potenze razionali: $x \to x^t$ con $t \in \mathbb{Q}$

**Confronti e stime asintotiche**

$a_n \qquad (b_n)$

$a_n \to \pm\infty \qquad b_n \to \pm\infty$

$$lim\ \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \to (a_n) \text{ è infinito di ordine inferiore di } (b_n) \\ l \in \mathbb{R}/\{0\} & \to (a_n) \text{ ha lo stesso ordine d'infinito di } (b_n \\ \pm\infty & \to (a_n) \text{ è infinito di ordine maggiore di } (b_n \\ \nexists & \to \text{non posso dire nulla} \end{cases}$$

$a_n \to 0 \qquad b_n \to 0$

$$lim\ \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \pm\infty & \to (a_n) \text{ è infinitesimo di ordine inferiore di } (b_n) \\ l \in \mathbb{R}/\{0\} & \to (a_n) \text{ è infinitesimo dello stesso ordine di } (b_n \\ 0 & \to (a_n) \text{ è infinitesimo di ordine maggiore di } (b_n \\ \nexists & \to \text{non posso dire nulla} \end{cases}$$

Con $lim\ \frac{a_n}{b_n} = 1$ dirò che $(a_n)$ è **asintotica** a $(b_n)$ e indicheremo con il simbolo $(a_n) \sim (b_n)$

**Prop**
Valgono i seguenti fatti:

- Se $a_n \sim B_n$, le successioni hanno lo stesso carattere
- Se $a_n \sim b_n \sim ... \sim c_n \Rightarrow a_n \sim b_n$
- una espressione composta da un prodotto o quoziente di più fattori può essere stimata fattore per fattore:

$$a_n \sim a_n^I \quad b_n \sim b_n^I \quad c_n \sim c_n^I \Rightarrow \frac{a_n b_n}{c_n} \sim \frac{a_n^I b_n^I}{c_n^I}$$

**Teorema - Criterio del rapporto**
Sia $(a_n)$ con $a_n > 0 \quad n \in \mathbb{N}$. Se esiste

$$lim\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora

- Se $l < 1 \Rightarrow a_n \to 0$
- Se $l > 1$ (incluso $l = +\infty$) $\Rightarrow a_n \to +\infty$
- Se $l = 1$ non posso dire nulla

65

**Teorema - Gerarchia degli infiniti**
Vale la seguente lista di risultati:

1. $lim\ \frac{log_a n}{n^\alpha} = 0 \qquad \forall a > 1, \forall \alpha > 0$
2. $lim\ \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$
3. $lim\ \frac{a^n}{n!} = 0$
4. $lim\ \frac{n!}{n^n} = 0$

$+\infty^0 = lim\ \sqrt[n]{n} = lim\ n^{\frac{1}{n}} = lim\ e^{\frac{1}{n} log(n)} = e^0 = 1$

$0 < x = e^{log(x)} = a^{log_a(x)}$

**Formula di Stirling**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$$

## 6 Limiti di funzioni

**Def**
Si dice che

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in \mathbb{I}}} f(x) = l$$

Se per ogni successione $(x_n)$ con $x_n \in \mathbb{I}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ per cui $x_n \to c \ n \to \infty \quad \Rightarrow f(x_n) \to lo \quad n \to +\infty$

Con $c \in \overline{\mathbb{R}}$:

- Se $c \in \mathbb{R} \qquad U_c(\delta) = (c - \delta, c + \delta)$
- se $c = \pm\infty \qquad U_{\pm\infty}(\delta) = (\delta, +\infty)$ oppure $(-\infty, \delta)$

**Def**
Diremo che una funzione $f$ ha una certa proprietà **definitivamente** per $x \to c$ se esiste un intorno $U$ di $c$ tale che la proprietà di $f^{(x)}$ vale per ogni $x \in U, \ x \neq c$

**Def - Limite in senso topologico**
Sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia $f$ una funzione definita almeno definitivamente per $x \to c$. Si dice che

$$lim_{x \to c} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

se per ogni intorno $U_l$ esiste un intorno di $c$, $V_c$ tali che per ogni $x \in V_c, \ x \neq c$, allora $f(x) \in U_l$

**Teorema - Teorema del ponte**
Siano $f : I \to \mathbb{R}$, $I$ intervallo di $\mathbb{R}$ non degenere, $l \in \overline{\mathbb{R}}, \ c \in \overline{\mathbb{R}}$ allora

$$lim_{x \to c} f(x) = l$$

se e solo se per ogni successione $(x_n)$ per cui $x_n \in I$ con $x_n \neq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$ per cui $x_n \to c \quad n \to +\infty \Rightarrow f(x_n) \to l \quad n \to +\infty$

4 possibilità caratterizzate dalla scelta di $c$ e $l$
**Limite finito all'infinito**

$$lim_{x\to c}f(x) = l$$

- $c = +\infty, l \in \mathbb{R}$.
  $\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0$ tali che $\forall x$ per cui $x > K$ allora $|f(x) - l| < \varepsilon$

- $c = -\infty, l \in \mathbb{R}$.
  $\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0$ tali che $\forall x$ per cui $x < -K$ allora $|f(x) - l| < \varepsilon$

Queste tipologie di limite caratterizza le cosidette rette asintotiche orizzontali o **asintoti orizzontali** delle funzioni

**Def**
Se $l \in \mathbb{R}$ $c \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice che

$$lim_{x\to c}f(x) = l^+ \qquad \text{(rispettivo } l^-)$$

se per ogni successione $(x_n)$ con $x_n \in I$ $x_n \neq c$ e $x_n \to c \quad n \to +\infty$ si ha che $f(x_n) \to l^+$ per $n \to +\infty$ se e solo se $f(x_n) \geq l$ definitivamente (convergenza per **eccesso** $(l^+)$ o per **difetto**$(l^-)$)

**Limite finito all'infinito**

$$lim_{x\to c}f(x) = l$$

- $c = +\infty, l = +\infty$.
  $\forall H > 0 \exists K > 0$ tali che $\forall x$ per cui $x > K$ allora $f(x) > H$

- $c = +\infty, l = -\infty$.
  $\forall H > 0 \exists K > 0$ tali che $\forall x$ per cui $x > K$ allora $f(x) > -H$

- $c = -\infty, l = +\infty$.
  $\forall H > 0 \exists K > 0$ tali che $\forall x$ per cui $x < -K$ allora $f(x) > H$

- $c = -\infty, l = -\infty$.
  $\forall H > 0 \exists K > 0$ tali che $\forall x$ per cui $x < -K$ allora $f(x) < -H$

Può accadere che in questi casi esistono **asintoti obliqui**

**Def**
Si dice che la funzione $f$ ha asintoto obliquo di equazione $y = mx + q \quad m \neq 0$ per $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ se accade che

$$lim_{x\to+\infty}(f(x) - (mx + q)) = 0 \qquad (lim_{x\to-\infty}(f(x) - (mx + q)) = 0)$$

**Prop**
La funzione $f$ ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:

- $lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$
- $lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = q$

**Limite infinito al finito**

$$lim_{x \to c} f(x) = l$$

$c \in \mathbb{R}, l = +\infty$.
$\forall H > 0 \exists \delta > 0$ tali che $\forall x$ per cui $0 < |x - c| < \delta$ allora $f(x) > H$

$c \in \mathbb{R}, l = -\infty$.
$\forall H > 0 \exists \delta > 0$ tali che $\forall x$ per cui $0 < |x - c| < \delta$ allora $f(x) < -H$

Si possono specificare nel caso in cui $c \in \mathbb{R}$ i limiti destro e sinistro:

- $lim_{x \to c^+} f(x) = l$ per cui $x > c$
- $lim_{x \to c^-} f(x) = l$ per cui $x < c$

**Def**
Si dice che $f$ ha **asintoto verticale** di equazione $x = c \in \mathbb{R}$ se accade che

$$lim_{x \to c} f(x) = +\infty \text{ oppure } lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

o rispettivamente a seconda dei casi

$$lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty \text{ oppure } lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$$
$$lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty \text{ oppure } lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$$

**Limite finito al finito**

$$lim_{x \to c} f(x) = l$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che per ogni $x$ per cui $0 < |x - c| < \delta$ allora

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

**Def**
Diremo che $c$ è un **punto di discontinuità** per la funzione $f$ quando i limiti destro e sinistro di $f$ per $x \to c$ esistono e sono diversi

$$lim_{x \to c^+} f(x) - lim_{x \to c^-} f(x) = \text{salto di } f \text{ in } c$$

NB: $lim_{x \to +\infty} sin(x)$ non esiste

**Calcolo dei limiti**
**Teorema - Criterio del confronto**
Se per $x \to c$ ho $f(x) \to l$, $g(x) \to l$ e si ha che vale $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to c$ allora $h(x) \to l$ per $x \to c$

Corollario
Se per $x \to c$ si ha $g(x) \to 0$ e $|h(x)| \leq g(x)$ definitivamente per $x \to c$ allora $h(x) \to 0$ per $x \to c$

Corollario
Se $f(x) \to 0 \ x \to c$ e $g(x)$ è limitata definitivamente per $x \to c$ allora $f(x)g(x) \to 0 \quad x \to c$

**Teorema - Permanenza del segno**

- Se $f(x) \to l > 0$ per $x \to c$ allora si ha che $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to c$
- se $f(x) \to l$ e $f(x) \geq 0$ per $x \to c$ allora $l \geq 0$
- Se $f$ è asintotica in $c$ e $f(c) > 0$ allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to c$

**Teorema - Algebra dei limiti**
Se $f$ e $g$ sono due funzoini definite almeno rispettivamente per $x \to c$ e $f(x) \to l_1$ e $g(x) \to l_2$ per $x \to c$ allora

$$f \pm g = l_1 \pm l_2 \quad x \to c$$
$$f \cdot g = l_1 \cdot l_2 \quad x \to c$$
$$\frac{f}{g} = \frac{l_1}{l_2} \quad x \to c$$

**Teorema - Cambio delle variabili**
Siano $f, g$ funzioni tali che sia ben definito $f \circ g$ almeno definitivamente per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e supponiamo che

- $g(x) \to t_0$ per $x \to x_0$ con $g(x) \neq t_0$ definitivamente per $x \to x_0$
- esiste $lim_{t \to t_0} f(t) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $lim_{x \to x_0} f(g(x)) = lim_{t \to t_0} f(t)$

**Limiti notevoli**

$$\begin{array}{lcl} lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} & \Rightarrow & 1 \\ lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2} & \Rightarrow & \frac{1}{2} \\ lim_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x} & \Rightarrow & 1 \\ lim_{x\to 0}\frac{arcsin(x)}{x} & \Rightarrow & 1 \\ lim_{x\to 0}\frac{arctg(x)}{x} & \Rightarrow & 1 \\ lim_{x\to \pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x & \Rightarrow & e \\ lim_{x\to 0}\frac{log(1+x)}{x} & \Rightarrow & 1 \\ lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} & \Rightarrow & 1 \end{array}$$

**Def - Prolungamento per continuità**
Se $f$ non è definità in $x = c$ ma esiste

$$lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

allora la funzione può essere **estesa per continuità** ponendo $f(c) \doteq l$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq c \\ l & x = c \end{cases}$$

**Confronti e stime asintotiche**
**Def**
Si dice che 2 funzioni $f, g$ sono **asintotiche** per $x \to c$ se

$$lim_{x \to c} \frac{\hat{f}(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive $f \sim g$

**Teorema - Gerarchia degli infiniti**
Si possono dimostrare i seguenti limiti validi per $\alpha, \beta > 0 \quad a, b > 1, \delta$ qualunque

1. $lim_{x \to +\infty} \frac{(log_a(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$
2. $lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0$
3. $lim_{x \to 0^+} x^\beta (-log(x))^\delta = 0$

## 7 Limiti e tecnologia dell'o piccolo

**Def**
Si dice che $f$ è **o piccolo** di $g$ per $x \to x_0$ e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad x \to x_0$$

se esiste una fuzione $w(x)$ tale che

$$\begin{gathered} f(x) = w(x)g(x) \\ lim_{x \to x_0} w(x) = 0 \end{gathered}$$

**Def - Quasi equivalente**
supponiamo che $g(x) \neq 0$ almeno definitivamente in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ allora

$$w(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

**Proprietà algebriche dell'o piccolo**
$f_1(x) = o(g(x)) \quad x \to x_0 \qquad f_2(x) = o(g(x)) \quad x \to x_0$

- $f_1 + f_2$ :
  $$f_1(x) + f_2(x) = w_1(x)g(x) + w_2(x)g(x) = g(x)(w_1(x) + w_2(x))$$
  quindi
  $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x)) \qquad x \to x_0$
- $f_1 - f_2$ :
  $$f_1(x) + f_2(x) = g(x)(w_1(x) - w_2(x))$$
  $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x)) \qquad x \to x_0$
- $cf_1$
  $$cf_1(x) = cw_1(x)g(x)$$
  $c \cdot o(g(x)) = o(g(x)) \qquad x \to x_0$
- $f_1 \cdot f_2$
  $$f_1(x)f_2(x) = w_1(x)w_2(x)g^2(x)$$
  $o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g^2(x)) \qquad x \to x_0$
- $\frac{f_1}{f_2}$
  $$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{0}{0} = ?$$

**Transitività di o piccolo**
Se $f(x) = o(g(x)) \quad x \to x_0$ e $g(x) = o(h(x)) \quad x \to x_0$ allora

$$f(x) = o(h(x)) \quad x \to x_0$$

**altre proprietà**

$f(x) = o(g_1(x) + g_2(x)) = o(g_1(x)) + o(g_2(x))$

$f(x) = o(c \cdot g(x)) = o(g(x))$

**Teorema - Cancellazione**
Se $f_1(x) = o(f(x)) \quad g_1(x) = o(g(x))$

$$lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

**Sviluppi per** $x \to 0$

$$\begin{array}{lcc|lcc} sin(x) & 0 & x + o(x) & arctg(x) & = & x + o(x) \\ tg(x) & 0 & x + o(x) & arcsin(x) & = & x + o(x) \\ cos(x) & 0 & 1 + o(x) & cos(x) & = & 1 - \frac{x^2}{2} + o(x) \\ e^x & 0 & 1 + x + o(x) & log(1+x) & = & x + o(x) \end{array}$$

Oss: $x^\alpha = o(x^\beta) \quad \forall \alpha > \beta \quad x \to 0$

**Def - Equivalenza asintotica**
Si di che $f$ è **asintoticamente equivalente** a $g$ per $x \to 0$ e si scrive $f(x) \sim g(x) \quad x \to x_0$ se esiste una funzione $w$ tale che

$$\begin{gathered} f(x) = w(x)g(x) \\ \text{con} \\ lim_{x\to x_0} w(x) = 1 \end{gathered}$$

**Def - Quasi equivalente**
Se $g(X) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$ (tranne al più di $x$) allora $f(x) \sim g(x) \quad x \to x_0$ se

$$lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

# 8 Derivabilità e differenziabilità

**Def**
Si dice che $f$ è **differenziabile** in $x_0$ se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad h \to 0$$

In tal caso $\alpha$ è detto **differenziale** di $f$ in $x_0$

**Teorema**
Una funzione $f$ è differenziale in $x_0$ se e solo se $f$ è derivabile in $x_0$. Inoltre, se questo è vero, allora $\alpha = f^I(x_0)$

**Teorema**
Ogni funzione $f$ derivabile in $x_0$ è continua in $x_0$

**Regole della derivazione e derivate di funzioni elementari**

$$\begin{array}{lcc|lcc}
(\text{costante})^I & = & 0 & (arctg(x))^I & = & \frac{1}{1+x^2} \\
(e^x)^I & = & e^x & (arcsin(x))^I & = & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(a^x)^I & = & a^x \cdot log(a) & (arccos(x))^I & = & -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(log(x))^I & = & \frac{1}{x} & (tg(x))^I & = & \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tg^2(x) \\
(sin(x))^I & = & cos(x) & (x^\alpha)^I & = & \alpha x^{\alpha-1} \quad ,\alpha \neq 0 \\
(cos(x))^I & = & -sin(x) & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcc|lcc}
(f \pm g)^I & = & f^I \pm g^I & (\alpha f)^I & = & \alpha f^I \\
(f \cdot g)^I & = & f^I g + f g^I & (\frac{1}{f})^I & = & -\frac{f^I}{f^2} \\
(\frac{f}{g})^I & = & \frac{f^I g - f g^I}{g^2} & (f(g(x)))^I & = & f^I(g(x)) \cdot g^I(x)
\end{array}$$

Se $f$ e $g$ sono inverse una dell'altra: $g^I(x) = \frac{1}{f^I(g(x))}$

# 9 De L'Hôpital e Taylor

**Teorema di de l'hopital**

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Supponiamo che

- Al netto delle condizione sopra le quali i rapporti $\frac{f}{g} > \frac{f^I}{g^I}$ esistono in un opportuno intorno di $x_0$
- il limite sia del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- esiste in $\overline{\mathbb{R}}$ il limite

$$lim_{x \to x_0} \frac{f^I(x)}{g^I(x)}$$

allora

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x \to x_0} \frac{f^I(x)}{g^I(x)}$$

Operativamente: eseguo il limite e controllo che sia del tipo indefinito, poi eseguo il limite delle derivate. Se quest'ultimo non esiste, non posso dire nulla del primo limite. Se esiste in $\overline{\mathbb{R}}$, tutto ok. Se è ancora del tipo indeterminato allora riapplico l'hopital

**Teorema di Taylor**
Possiamo approssimare una funzione $f(x)$ con un polinomio $P_n(x)$ di grado $P \leq n$ con $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad x \to 0$$

Sia $\delta > 0$ e sia $f : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$. Sia $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che

- $f$ è derivabile in $(-\delta, \delta)$ $n-1$ volte
- $f$ è derivabile $n$-volte in $x = 0$

Allora esiste il polinoimo di Taylor $P_n(x)$ ed è dato dalla seguente formula

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f^I(0)}{1!}x + \frac{f^{II}(0)}{2!}x^2 + ... + + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

**Lemma - Formula di Taylor con resto di Peano**
Se il polinomio di Taylor esiste allora è unico

Oss: Formula di Taylor-Mc Laurin

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o(x^n) \qquad f^{(0)}(0) = f(0)$$

**Sviluppi di Taylor per funzioni elementari**

$$\begin{array}{ccl} e^x & = & 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ sin(x) & = & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \\ cos(x) & = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \\ log(1+x) & = & x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + ... \\ arctg(x) & = & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \\ (1+x)^\alpha & = & 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ... \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccl} e^x & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^k) \\ sin(x) & = & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1}) \\ cos(x) & = & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k}) \\ log(1+x) & = & \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{(k)!} + o(x^k) \\ arctg(x) & = & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1}) \end{array}$$

**Formula di Taylor con centro qualunque**
Siano $\delta > 0, x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $f = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

- $f$ abbia derivte di ordine $n - 1$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
- $f$ abbia derivate di ordine $n$ in $x_0$

Allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$$

Possiamo scrivere anche $x - x_0 = h \to 0$ se $x \to x_0$

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(h)^k + o((h)^k)$$

**Operazioni con i polinomi di Taylor**
$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

**Somma**
$S(x) = f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n)$

**Prodotto per costante**
$a \cdot f(x) = a \cdot P_n(x) + o(x^n)$

**Prodotto per funzioni**
$P(x) = f(x)g(x) = P_n(x)Q_n(x) + o(x^n)$

**Composizione di funzioni**
Ho varie possibilità

$f(ax) = P_n(ax) + o(x^n)$

$f(x^a) = P_n(x^a) + o(x^{an})$

**Composizioni**
$f(g(x)) = P_n(Q_n(x)) + o(x^n)$

# 10 Funzioni iperboliche

$$\text{Seno iperbolico } sinh(x) \doteq \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\text{Coseno iperbolico } cosh(x) \doteq \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\text{Tangente iperbolica } tanh(x) \doteq \frac{sinh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Il coseno iperbolico è pari, mentre seno e tangente imprbolica sono dispari

**Derivate**

$(sinh(x))^I = cosh(x)$

$(cosh(x))^I = sinh(x)$

$(tanh(x))^I = 1 - (tanh(x))^2 = \frac{(cosh(x))^2 - (sinh(x))^2}{(cosh(x))^2}$

**Sviluppi di Taylor**

$cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...$

$sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ...$

**Relazione iperbolica fondamentale**
$(cosh(x))^2 - (sinh(x))^2 = 1$

**Formule di duplicazione**
$sinh(2x) = 2 \cdot sinh(x)cosh(x)$

**Monotonia**
$sinh(x)$ è strettamente crescente, lo stesso vale per $cosh(x)$ con $x \geq 0$

**Inverse**
l'inversa del seno iperbolico è il settore seno iperbolico:

$$settsinh(x) = log(x + \sqrt{1 + x^2})$$

il settore coseno iperbolico è

$$settcosh(x) = log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

e il settore tangente iperbolica

$$setttanh(x) = log(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}) = \frac{1}{2}ln(\frac{1+x}{1-x})$$

# 11 Comportamento globale delle funzioni

**Punto 1 - Vedere la simmetria**

**Punto 2 - Insieme di definizione, limiti agli estremi**

**Punto 3 - zeri e segno**
Cerco di risolvere $f(x) = 0, f(x) > 0, f(x) < 0$

**Punto 4 - Studio della derivata e zone di monotonia**
Determinare se $f^I(x)$ esiste e il suo segno

# 12 Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = T_n(x) + o(x^n)$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) = T_n(x) + \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

**Lemma**
Sia $g$ una funzione tale che $g(0) = g^I(0) = ... = g^{(n)}(0) = 0$. Allora esiste $c$ compreso tra $x$ e 0 tale che

$$\tfrac{g(x)}{x^{n+1}} = \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

# 13 Primitive

**Def**
Sia $f : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I$ intervallo qualsiasi, ma **primitiva** per $f$ in $I$ è una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ derivabile in $I$ tale che $F^I = f$.
L'insieme di tutte le primitive per $f$ in $I$ si denota con il simbolo $D_f^{-1}$

$$D_f^{-1} \doteq \{F : I \to \mathbb{R} \mid f^I(x) = f(x) \quad \forall x \in I\}$$

Oss: Se $F$ e $G$ sono due primitive di $f$ in $I$ allora

$$F^I = f = G^I \Rightarrow F = G + c$$
quindi
$$D_f^{-1} \doteq \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Oss: se $f$ è continua, allora $D^{-1}f \neq \emptyset$

**Tabella di primitiva**

| $f(x)$ | $I$ | $F(x)$ | |
|---|---|---|---|
| $x^n \quad (n \neq -1)$ | se $n > 0, \mathbb{R}$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $(x^{n+1})^I = (n+1)x^n$ |
| $x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$ | $(0, +\infty)$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | $(x^{\alpha+1})^I = (\alpha+1)x^\alpha$ |
| $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $e^x$ | |
| $a^x \quad (a > 0)$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{a^x}{lna}$ | $(a^x)^I = log_a a^x$ |
| $\frac{1}{x}$ | $(-\infty, 0)(0, +\infty)$ | $ln\|x\|$ | |
| $sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $-cos(x)$ | |
| $cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $sin(x)$ | |
| $\frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tg^2(x)$ | $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$ | $tg(x)$ | |
| $-\frac{1}{sin^2(x)}$ | $(0, \pi) + k\pi$ | $cotg(x)$ | |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\|x\| < 1$ | $arcsin(x)$ | $(sin^{-1}(x))$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ | $arctg(x)$ | |
| $sinh(x)$ | $\mathbb{R}$ | $cosh(x)$ | |
| $cosh(x)$ | $\mathbb{R}$ | $sinh(x)$ | |
| $\frac{1}{cosh^2(x)}$ | $\mathbb{R}$ | $tgh(x)$ | $(tanh(x))$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $\|x\| < 1$ | $arctgh(x)$ | $(tanh^{-1}(x))$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\mathbb{R}$ | $arcsinh(x)$ | $(sinh^{-1}(x))$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $x > 1$ | $arccosh(x)$ | $(cosh^{-1}(x))$ |

**Proprietà delle primitive - Linearità della derivazione**

$$(f + g)^I = f^I + g^I \qquad (D(af + bg) = aDf + bDg)$$

**Teorema - linearità delle primitive**
Siano $f, g : I \to \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli. Assumiamo che $D^{-1}f \neq \emptyset \neq D^{-1}g$. Allora

$$D^{-1}(af + bg) = aD^{-1}f + bD^{-1}g$$

**Teorema - Calcolo per parti**
Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$, derivabili nell'intervallo $I$, tali che $D^{-1}(f^I g) \neq \emptyset \neq D^{-1}(fg^I)$. Allora si ha

$$D^{-1}(f^I g) = fg - D^{-1}(g^I f)$$

**Teorema - Calcolo per sostituzione**
Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $f : J \to \mathbb{R}, g : I \to J$ tutte le funzioni derivabili laddove definite con $D^{-1}f \neq \emptyset$. Allora se $F \in D^{-1}f$ si ha

$$D^{-1}(f \circ g \cdot g^I) = \{F \circ g + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Oss: leibniz usava $\int f(x)dx \equiv D^{-1}(f)$

**Casi tipici**
**Linearità,riscalamenti, traslazioni**
Se $F^I(x) = f(x) \quad \forall x \in I$ allora una primitiva di $af(bx + c)$ è data da $F(bx + c) \cdot \frac{a}{b}$

**Sostituzione**
Se l'integrando è nella forma $f \circ g \cdot g^I$ e conosco $F \in D^{-1}f$ allora la primitiva è $F \circ g$

**Integrazione per parti**

$$\begin{gathered}(fg)^I = f^I g + fg^I \\ \Downarrow \\ D^{-1}(f^I g) = fg - D^{-1}(fg^I)\end{gathered}$$

**Strategia generale per ingrare funzioni razionali**
$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad grad(P) = n \quad grad(Q) = m$

1. Se $n \geq m$ allora faccio subito la divisione di polinomi

   $$\tfrac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \tfrac{R(x)}{Q(x)}$$

2. Uso il teorema fondamentale dell'Algebra, cioé che un polinomi $Q(x)$ ammette questa fattorizzazione

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot ...(x - x_r)^{k_r}((x - u_1)^2 + v_1^2)^{m_1} \cdot ...((x - u_c)^2 + v_c^2)^{m_c}$$

3. **Formula di Hermite**

$$\tilde{Q}(x) = (x - x_1)^{k_1 - 1} \cdot ...(x - x_r)^{k_r - 1}((x - u_1)^2 + v_1^2)^{m_1 - 1} \cdot ...((x - u_c)^2 + v_c^2)^{m_c - 1}$$

NON SI CAPISCE UN CAZZO CI RITORNO DOPO

**Cambio delle variabili**
Supponiamo che la funzione $g : I \to J$ abbia l'inversa $g^{-1} : J \to I$. Dalla formula del teorema di sostituzione possiamo dedurre se $\hat{F} \in D^{-1}(f \circ g \cdot g^I) \Rightarrow \hat{F} \mid_{x=g^{-1}(y)}= \hat{F} \circ g \in D^{-1} f$

$$\int (f \circ y)(x) \frac{dy(x)}{dx} dx \mid_{x=x(y)}= \int f(y) dy$$
$$\Downarrow$$
$$\int f(y) dy = \int f(y(x)) \frac{dy}{dx} dx \mid_{x=x(y)}$$

# 14 Integrazione

**Integrazione alla Riemann (Cauchy)**
**Notazioni**
Per la teoria di integrazione propria

- Zona di integrazione, o intervallo $[a, b]$
- funzione integranda $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(X)\, dx$$

$$\textstyle\int_a^b c\, dx$$

Oss:

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

$$\int_a^b f(X)\, dx = -\int_b^a f(X)\, dx$$

**Significato geometrico**
L'integrale corrisponde al numero reale che rappresenta l'area con segno della zona che è racchiusa tra il grafico di $f$ e l'asse delle ascisse

**Definizione dell'integrale**

- Caso banale o semplice:
  $f(x) = \lambda$, cioé una funzione costante.

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot \lambda$$

- Caso quasi semplice:
  $f(x)$ è costante a tratti. quindi corrisponde alla somma delle varie aree che compongono la funzione
- Caso generale:
  Sia $f(x)$ una funzione limitata generica. Definiamo un integrale superiore e uno inferiore a intervalli molto ristretti e ripetuti

  ANCHE QUESTO LO SALTO PERCHÈ È SCRITTO DA CANI

**Teorema**
Per ogni funzione limitata $f$ su $[a, b]$ si ha che l'integrale superiore e l'integrale inferiore esistono sempre e vale

$$I^-(f, [a, b]) \leq I^+(f, [a, b])$$

**Def**
Diremo che la funzione limite $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è **integrabile** in $[a, b]$ se

$$I^-(f, [a, b]) = I^+(f, [a, b])$$

**Teorema**
Abbiamo che $I^+ = I^-$ e dunque la corrispondente funzione è integrabile in $[a, b]$ in tutti i casi seguenti: se la funzione è monotona, se la funzione è continua e se la funzione è continua a tratti, ossia è continua ovunque tranne in un numero finito di punti

**Proprietà degli integrali**

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)$$

$$\int_a^b \lambda f(x) = \lambda \int_a^b f(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)$$

**Criterio di integrabilità**
Una funzione $f$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ trovo due funzioni a gradino $\phi, \psi$ tali che

$$\phi(x) \geq f(x) \geq \psi(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

per le quali

$$\int_a^b (\phi(x) - \psi(x))dx \leq \varepsilon$$

Oss: Per calcolare gli integrali vengono usate le primitive

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

**Funzione integrale**

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

**Teorema - Media integrale**
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$ e continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

**Teorema - Teorema fondamentale della teoria dell'integrazione**
La funzioine integrale $\Phi$ è una primitiva per $f$ in $[a, b]$

# 15 Integrazione generalizzata, o impropria

L'integrazione propria richiede un intervallo limitato e una funzione integranda limitata. Una integrazione impropria è quando almeno una della due consizioni non è soddisfatta. Generalmente ci si riduce a situazioni in cui è presente solo uno dei problemi legati alla limitatezza, ossia quando la zona di integrazione non è limitata, quindi in intervalli come $(-\infty, a]$ oppure $[a, +\infty)$, oppure integranda non limitata in uno degli estremi di integrazione di intervallo limitato $[a, b]$

Integrali del 1° tipo

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \doteq lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx$$

Integrali del 2° tipo

$$\int_a^b f(x)dx \doteq lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Riassumendo ho 4 possibilità per ogni tipologia di integrazione

- L'integrale converge ad un numero reale
- L'integrale diverge positivamente ($\to +\infty$)
- L'integrale diverge negativamente ($\to -\infty$)
- l'integrale non converge ne diverge, il limite non esiste

Praticamente se ho integrali del 1° o 2° secondo tipo spezzo l'integrazione, studio i singoli pezzi e deduco il comportamento complessivo

Integrando $f(x) \geq 0$ uso il confronto o il confronto asintotico (caso standard e casi limiti)

Integrando $f$ segno qualsiasi
- assoluta integrabilità
- integrazione per parti
- metodo triangolini

**1° Caso - Integrando $f(x) \geq 0$**
L'integrale inproprio di $f$ può solo convergere o divergere positivamente

**Criterio del confronto**: supponiamo di avere un intervallo generico $E \in \mathbb{R}$ e che $\forall x \in E$ si abbia $g(x) \geq f(x) \geq 0$. Allora valgono le seguenti implicazioni

$$\text{Se } 0 \leq \int_E g(x)dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_E f(x)dx < +\infty$$
$$\text{Se } 0 \leq \int_E f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_E g(x)dx = +\infty$$

**Criterio del confronto asintotico**

$$\int_E f(x)dx \qquad \int_E g(x)dx$$

Supponiamo $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ in $E$, e supponiamo che $lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0, \pm\infty$. Allora gli integrali hanno lo stesso comportamento, cioé il primo integrale converge se e solo se converge il secondo

STA DIVENTANDO UN CASINO, NON SI CAPISCE NIENTE, JUMPO

# 16 Equazioni differenziali ordinarie

Sono equazioni che legano una funzione incognita $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \to u(t)$ con alcune delle sue derivate

Oss: Oltre ad avere la funzione $u(t)$ come incognita anche il dominio di $u(t)$ è un'incognita

**Def**
Si dice **ordine** di una EDO il massimo ordine di derivazione presente nell'equazione. in modo molto astratto una EDO si presenta nella forma

$$\Phi(u^{(n)}(t), u^{(n-1)}(t), ..., u^{I}(t), u(t), t) = 0$$

**Def**
Si dice una EDO in forma **normale** se la derivata di ordine massimo dell'equazione è ricavata rispetto al resto. Per una EDO di ordine $n$ vuol dire:

$$n^{(n)}(t) = F(u^{(n-1)}(t), ..., u(t), t)$$

**Def**
Una EDO si dice **autonoma** se la variabile t compare solo come argomento della funzione incognita $u$. Altrimenti si dice **non autonoma**

**3 tipi di EDO**
**EDO di 1° ordine a variabili separabili**

Noi sappiamo che in forma normale

$$u^{I} = F(u, t)$$

$F(u, t) = f(t)g(u)$

Fatto generale: tutte le EDO di 1° ordine in forma normale autonome si scrivono nella forma $u^{I} = g(u) = 1 \cdot g(u)$

**Def**
Una EDO si dice **lineare** se la funzione incognita $u$ e le sue derivate compaiono al 1° grado e non all'interno di funzioni, ossia nella forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)u^{(k)} = f(t) \qquad (f(t) \to \text{ } termine \text{ } noto)$$

Una EDO è detta **omogenea** se il termine noto è 0

**Def**
Una EDO lineare si dice a **coefficenti costanti** se i coefficenti $a_n(t), ..., a_0(t)$ sono tutte funzioni numeriche, ossia costanti

**EDO lineare del 1° ordine**

$$a_1(t)u^I + a_0(t)u = f(t)$$

Se $a_1(t) \neq 0$ allora divido per $a_1(t)$ e ottengo

$$n^I + a(t)u = b(t)$$

**EDO lineari di ordine k a coefficenti costanti e non omogenee**

$$\sum_{j=0}^{k} a_j u^{(j)} = f(t)$$

Fatto generale: Una EDO di ordine $k$ ha come soluzione generale una funzione di $k$ parametri

**Problema di Cauchy**
Il problema di Cauchy corrisponde a una EDO con condizioni iniziali. Le condizioni iniziali per una EDO di ordine $k$ prescrivono il valore della funzione incognita $u$ e di tutte le sue derivate fino all'ordine $k-1$ per uno stesso valore di $t$ che viene detto **istante iniziale**

**Teorema di esistenza (Peano)**
Consideriamo il problema di Cauchy per una EDO di ordine $k$ in forma normale.

$$\begin{cases} u^{(k)} = F(t, u, ..., u^{(k-1)}) \\ k \ condizioni \ iniziali \end{cases}$$

Se la funzione $F$ è continua allora il problema di Cauchy ha almeno una soluzione **locale**, ossia esiste un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ con $t_0 \in I$, per cui esiste $u : I \to \mathbb{R}$ che soddisfe l'EDO e le condizioni iniziali

**Teorema di esistenza ed unicità locale**
Se $F$ è un po' più che continua, diciamo derivabile, allora la soluzione del problema di Cauchy è anche unica, ossia le condizioni iniziali permettono di fissare in modo univoco i $k$ parametri della soluzione generale

**EDO a variabili separabili**

$$u^I = f(t)g(u)$$

separare le variabili $\to$ integrare $\to$ ricavare la soluzione

**Def**
Si dice **intervalloo massimale di esistenza** il pezzo dell'insieme di definizione della soluzione che contiene l'istante iniziale

**Def**
Si dice **tempo di vita** (o life span) della soluzione, l'estremo superiore dell'intervallo massimale di esistenza
Questo genera vari risultati

- Se il tempo di vita è $+\infty$ si dice che la soluzione ha esistenza globale nel futuro
- Se il tempo di vita è $< +\infty$, ossia è un numero $T$, allora si dice che la soluzione muore al tempo $T$. Questo ha 2 possibili cause:

  - Se $lim_{t \to T^-} u(t) = \pm\infty$ si dice che la soluzione ha uno scoppiamento (blowup) al tempo $T$

  - Se non c'è scoppiamento ma $u(t)$ esce dalla zona in cui i termini dell'equazione sono definiti, allora si dice che la soluzione ha una rottura (breakdown)

**Equazioni differenziali lineari omogenee**

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(t)u^{(j)}(t) = 0$$

**Teoria generale**
L'insieme delle soluzioni dell'ED linere omogenee è uno spazio vettoriale di dimensione $n$. Detta $u_1(t), ..., u_n(t)$ una base di tale spazio, la soluzione generale si scrive come combinazioe lineare degli elementi della base, ossia

$$u(t) = c_1u_1(t) + ... + c_nu_n(t)$$

**Fatto generale**
Per una EDO lineare omogenea l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è sempre o tutto $\mathbb{R}$ oppure una semiretta.
Per la linearità esiste un algoritmo specifico per trovare una base dello spazio lineare delle soluzioni

Caso ED lineari omogenee di ordine 2 con coefficenti costanti

$$au^{II} + bu^{I} + cu = 0$$

Associo a tale equazione una nuova equazione nel modo seguente

$$ax^2 + bx + c = 0$$

considero le radici di questo polinomio. Ho 3 casi:

- $\Delta > 0$: il polinomio ha 2 radici reali distinte $(\lambda, \mu)$. Allora la base è $e^{\lambda t}, e^{\mu t}$quindi in generale

$$u(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2e^{\mu t}$$

- $\Delta = 0$: Allora il polinomio ha una radice reale. Quindi la base è

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}$$

- $\Delta < 0$: Allora il polinomio non ha radici reali ma ha 2 radici complesse coniugate, quindi la base è

$$e^{\alpha t}cos(\beta t), e^{\alpha t}sin(\beta t)$$

  con soluzione generale

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t}cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}sin(\beta t)$$

Se abbiamo EDO lineare omogenea di grado $n$ con coefficenti costanti si considera il polinomio caratteristico

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$

e si vanno a cercare le radici

- ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molteplicità 1 produce un elemento $e^{\lambda t}$
- ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molteplicità $m$ produce $m$ eleementi delle basi

$$e^{\lambda t}, ..., t^{m-1}e^{\lambda t}$$

- ogni coppia di radici complesse coniugate di molteplicità 1 produco gli elementi della base

$$e^{\alpha t}cos(\beta t), e^{\alpha t}sin(\beta t)$$

- ogni coppia di radici complesse coniugata di molteplicità $m$ producono elementi sulla base del tipo

$$e^{\alpha t}cos(\beta t), e^{\alpha t}sin(\beta t), ..., t^{m-1}e^{\alpha t}cos(\beta t), t^{m-1}e^{\alpha t}sin(\beta t)$$

- in finale ricordiamo che la dimensione dello spazio vettoriale è $n$

### EDO lineari non omogenee

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(t)u^{(j)}(t) = f(t)$$

**Fatto generale**
Se $u$ e $v$ sono soluzioni dell'equazione non omogenea allora $w = u - v$ è soluzione dell'equazione omogenea associata, ossia l'equazionesenza il termine $f(t)$

Conseguenza: la soluzione generale dell'EDO lineare non omogenea si scrive nella forma

$$u(t) = c_1u_1(t) + ... + c_nu_n(t) + \overline{u}(t)$$

Operativamente: trovo la base dell'equazioni omogenee associate, poi una soluzione qualsiasi dell'equazione non omogenea. $\overline{u}$ lo strovo con la variazione delle costanti (Lagrange)

**Regola generale**
Se il termine di non omogeneità è del tipo $f(t) = e^{\alpha t}$ allora il tentativo da fare per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è del tipo $\overline{u}(t) = \lambda e^{\alpha t}$. Questa funzione se $\alpha$ non è radice del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata. Se in caso contrario $\alpha$ è radice di molteplicità del polinomio caratteristico allora il tentativo deve essere del tipo

$$\overline{u}(t) = \lambda t^m e^{\alpha t}$$

**Regola generale**
Se il termine non omogeneo è del tipo $sin(\alpha t)$ oppure $cos(\alpha t)$, il tentativo da fare per la soluzione particolare della non omogenea è del tipo

$$\overline{u}(t) = \lambda sin(\alpha t) + \mu cos(\alpha t)$$

Questo tentativo funziona se $sin(\alpha t)$ oppure $cos(\alpha t)$ non sono soluzioni dell'equazione omogenea associata. Se lo sono allora si includono tutte le potenze di $t$ quanto necessario

**Regola generale**
Se il termine non omogeneo è un polinomio in $t$, allora il tentativo per la soluzione particolare dell'equazione non omogenea è un polinomio completo dello stesso grado del termine non omogeneo. Questo funziona fintanto che non ci sono polinomi come soluzione dell'equazione omogenea associata, ossia quando $x = 0$ non è radice dell'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata. Se $x = 0$ è invece radice dell'equazione caratteristica di molteplicità $m$ allora bisogna moltiplicare il tentativo per $t^m$

### Metodo della variazione delle costanti

### Equazioni lineari del 1° ordine

$$u^I + a(t)u = b(t)$$

Per risolvere possiamo usare il metodo del fattore integrante o usiamo un omogenea + tentativo

**Fattore integrante**
Considera un primitiva di $a$, ossia $A^I(t) = a(t)$. Moltiplico l'eq. differenziale per

$e^{A(t)}$ e poi integrando da entrambi i lati otteniamo

$$u(t) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int b(o)e^{A(o)}do$$

**Omogenea + particolare**
L'equazione omogenea associata è

$$u^I + a(t)u(t) = 0$$

Poi uso le variabili separabili e integro