1 Introduzione

probabilità $\rightarrow$ misurare l'incertezza
statistica:

- descrittiva
- differenziale $\rightarrow$ campione casuale per stimare un esito

---

probabilità:

$$\frac{casifavorevoli}{casitotali} \textbf{ \underline{SE} } \text{equiprobabili}$$

per contare i casi ci si appoggia alla combinatoria

---

partizione: separazione di A in sottoinsiemi senza elementi comuni

---

NB:

- $\wedge$ - and $\rightarrow$ $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
- $\vee$ - or $\rightarrow$ $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Principi della combinatoria:

1. A insieme, $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ partizione di A $\rightarrow$ $\#A = \sum_{i=1}^{n} \#E_i$
    - A,B insiemi, AxB è l'insieme di coppie ordinate (a,b)

2. $\#(AxB) = \#A \cdot \#B \rightarrow \{A_i\}^n_{i=1} = \bigotimes^n_{i=1} A_i$
3. A,B, $\#(A\cup B) = \underline{\#A + \#B - \#(A\cap B)}$ (non perfetto) $\rightarrow$

$$\# \cup^n_{i=1} A_i = \sum_{i=1}^n \#A_i - \sum_{i<j}\#(A_i\cap A_j) + \sum_{i<j<k}\#(A_i\cap A_j\cap A_k) + \dots$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{+(-1)^{n+1} \#\cap^n_{i=1} A_i}$$

2 Permutazioni e anagrammi

Fattoriale $\rightarrow$ x! = 9! = $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot \dots \cdot 2\cdot 1$

NB: 0! = 1

- "prendiamo" ha 9! anagrammi
- "anagramma" ha tre ripetizioni di a e due ripetizioni di m, quindi per calcolare i casi unici:

$$\frac{9!}{3!\cdot 2!}$$

$$\downarrow$$

per calcolare la probabilitàdegli elementi n, ma mi interessano solo k elementi allora:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

se non sono interessato all'ordine, allora:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} \Rightarrow \binom{n}{k}$$

chiamato anche **coefficente binominiale**

Proprietà:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{\mathrm{n}}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

3 Esperimenti aliatori

Un esperimento si definisce **aliatorio** o casuale se con i dati iniziali il risultato è incerto. I risultati a 2 a2 incompatibili di un esperimento aliatorio sono chiamati **esiti**. Ω denota lo **spazio degli esiti**. Un **evento** è un osservabile di un esperimento aliatorio.

Una parte di Ω può essere considerata come famiglia:

$$\mathcal{F} \subseteq \mathrm{P}(\Omega)$$

Questa è definita come **algebra** se:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- se A$\in \mathcal{F}$ allora A$^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$
- se A,B$\in \mathcal{F}$, allora A$\cup$B$\in \mathcal{F}$

  potremmo scrivere anche $\{\mathrm{A_i}\}_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \subseteq \mathcal{F}$ allora $\cup_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{A_i} \in \mathcal{F}$

Proprietà

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- se A,B$\in \mathcal{F}$ allora A$\cap$B$\in \mathcal{F}$
- se $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{F}$ allora $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$
- se A,B $\in \mathcal{F}$, allora A·B $\in \mathcal{F}$
- se A,B $\in \mathcal{F}$, allora A$\triangle$B $\in \mathcal{F}$

$\mathcal{F} \subseteq$P(Ω) è una **tribù** se:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- A$\in \mathcal{F} \Rightarrow$ $A^C \in \mathcal{F}$
- per ogni famiglia numerabile $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty} \subseteq P(\Omega)$, allora $\cup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

NB: generalmente una tribù è un'algebra se hanno elementi finiti

$\mathcal{F}$ tribù su Ω. Ogni E$\in \mathcal{F}$ (E è sottoinsieme di Ω) si dice **Evento**. I singoletti si chiamano **eventi elementari**. E si verifica se il risultato dell'esperimento appartiene ad E $\mathcal{F}$ tribù su Ω (Ω,$\mathcal{F}$)

Dati Ω, $\mathcal{F}$ tribù su Ω (Ω,$\mathcal{F}$) si chiama **spazio probabilizzabile**.

(Ω,$\mathcal{F}$), una funzione P:$\mathcal{F} \to \mathcal{R}$ si dice **funzione di probabilità** se:

- per ogni evento E P(E)$\geq$0
- P(Ω)=1
- data una famiglia numerabile $\{E_i\}_{i=1}^{+\infty}$ di eventi a 2 a 2 disgiunti:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \text{ (additività)}$$

Proprietà delle probabilità

- P($\emptyset$) = 0
- E$\in \mathcal{F}$ allora P(E^c) = 1-P(E)
- E,F$\in \mathcal{F}$, E$\subseteq$F $\Rightarrow$ P(E)$\leq$P(F)
  E$\in \mathcal{F}$ P(E)$\leq$1
- E,F$\in \mathcal{F}$ P(E$\cup$F)=P(E)+P(F)-P(E$\cap$F)
  P(E$\cup$F)$\leq$P(E)+P(F)
  $(E_i)_{i=1}^{n}$¡$\mathcal{F}$, P($\cup_{i=1}^{n}$E$_i$)=$\sum_{k\in\mathcal{P}(\{1-n\})}(-1)^{\#k+1}$ P($\cap_{j\in k}$E$_j$)
  $(E_i)_{i=1}^{+\infty}\subset \mathcal{F}$, P($\cup_{i=1}^{\infty}E_i$)$\leq$ $\sum_{i=1}^{\infty}$ P(E$_i$)
- (disuguaglianza di bonferrow)
  $\sum_{i=1}^{+\infty}$ P(E$_i$) - $\sum_{i<j}$ P(E$_i\cap$E$_j$) $\leq$ P($\cup_{i=1}^{+\infty}$E$_i$) $\leq$ $\sum_{i=1}^{\infty}$ P(E$_i$)

4 Probabilità condizionata

(Ω, $\mathcal{F}$, P), E,F$\in \mathcal{F}$ con P(F)$\neq$0, allora la probabilità di E condizionale a F è:

$$P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

Dato (Ω, $\mathcal{F}$, P) e due sotto tribù $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ di $\mathcal{F}$ allora $\mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2$ sono indipendenti se se ogni elemento di $\mathcal{F}_1$ è indipendente da ogni elemento di $\mathcal{F}_2$

$$P(E_1\cap E_2\ |\mathcal{F}) = P(E_1|\mathcal{F}) \cdot P(E_2|\mathcal{F})$$

5 funzione di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

1. Ω finito o numerabile

   Ω è dato

   $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

   P: assegnamo ad ogni singoletto $(\omega \in \Omega)$ un probabilità tale che:

   P$(\omega)\geq$0

   $\sum$P(ω)=1

   A questo punto $\forall$ E $\in \mathcal{F}$ P(E):=$\sum_{\omega \in E}$P(ω)

2. Spazi prodotto

   considerando più ripetizioni di un esperimento o l'unione di più esperimenti: data una famiglia di sottoinsiemi di Ω dette $\mathcal{A}$. La tribù di $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ generata da $\mathcal{A}$ come la più piccola tribù contenente $\mathcal{A}$

   $$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A}) = \cap\{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ è tribù in } \Omega \text{ e } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}\}$$

   quindi il prodotto $\Omega_1 \times \Omega_2$, la tribù sarà:

   $$\begin{gathered}
   \mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathrm{E}} \bigotimes \mathcal{F}_{\mathrm{E}} = \sigma(\{E_1 \times E_2 : E_1 \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}}, E_2 \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}}\}) \\
   (\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2) \\
   \Downarrow \\
   \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \\
   \mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathrm{E}} \bigotimes \mathcal{F}_{\mathrm{E}} = \sigma(\{E_1 \times E_2 : E_1 \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}}, E_2 \in \mathcal{F}_{\mathrm{E}}\}) \\
   \mathrm{P} : \mathrm{P}(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2) = \mathrm{P}_1(\mathrm{E}_1) \cdot \mathrm{P}_2(\mathrm{E}_2)
   \end{gathered}$$

   Quindi:
   con un numero finito di esperimenti $\{(\Omega_{\mathrm{i}}, \mathcal{F}_{\mathrm{i}}, P_{\mathrm{i}})\}_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ allora lo spazio prodotto ha forma:
   $\Omega = \bigotimes_{i \in I} \Omega_i$
   $\mathcal{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i = \sigma(\Pi_{i \in I}\ E_i : E_i \in \mathcal{F}_i$ e $\exists$n tc $\forall j \geq n$ E_{j}=$\Omega_i)$
   P = $\bigotimes_{i \in I}$ P_{i} cioé P$(\Pi_{i \in I}$ $\mathrm{E}_{\mathrm{i}})$ = $\Pi_{i \in I}\mathrm{P}_{\mathrm{i}}(\mathrm{E}_{\mathrm{i}})$