Simulador de Sistema Solar

Marco Beltrán

Febrero 2025

Introducción

En este documento se simula el movimiento orbital de dos planetas: la Tierra y Mercurio, aplicando las leyes de la física que rigen su comportamiento, tales como la ley de gravitación universal de Newton, las leyes de Kepler y la conservación de la energía.

El sistema de simulación se resuelve numéricamente utilizando el método de Euler para aproximar las posiciones y velocidades de los planetas a lo largo del tiempo.

Datos Iniciales

La información relevante sobre los planetas se muestra en la siguiente tabla:

Planeta	**Masa (kg)**	**Eje Semimayor (AU)**	**Excentricidad**
Mercurio	3.30×10^{23}	0.39	0.206
Tierra	5.97×10^{24}	1.00	0.017

Cálculos para Mercurio y la Tierra

1. Determinación de $r_{\max}$ y $v_{\min}$

Usamos la fórmula del afelio para determinar $r_{\max}$ y la fórmula para la velocidad mínima $v_{\min}$:

$$r_{\max} = a(1+e)$$

Para Mercurio y la Tierra:

$$r_{\text{max, Mercurio}} = 0.39\,\text{AU} \times (1 + 0.206) = 0.469\,\text{AU}$$
$$r_{\text{max, Tierra}} = 1.00\,\text{AU} \times (1 + 0.017) = 1.017\,\text{AU}$$

La velocidad mínima en el afelio, $v_{\min}$, se obtiene de la siguiente manera:

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{GM_S(1-e)}{a(1+e)}}$$

2. Determinación del Período Orbital

El período orbital T se calcula usando la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{a^3}$$

Para Mercurio y la Tierra:

$$T_{\text{Mercurio}} = \sqrt{(0.39)^3} \approx 0.24\,\text{años}$$
$$T_{\text{Tierra}} = \sqrt{(1.00)^3} = 1\,\text{año}$$

Comprobación de las Leyes de Kepler

Primera Ley de Kepler

La primera ley de Kepler establece que las órbitas de los planetas son elípticas, con el Sol en uno de los focos. Las simulaciones gráficas de las órbitas de la Tierra y Mercurio confirman que sus trayectorias son elípticas, con el Sol en uno de los focos. La fórmula de la órbita elíptica es:

$$r = \frac{a \times (1 - e^2)}{1 + e \times \cos(\theta)}$$

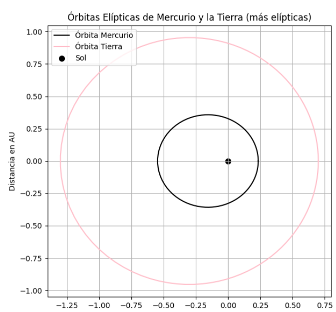

Figure 1: Órbitas elípticas de Mercurio y la Tierra alrededor del Sol.

$$r = \frac{a \times (1 - e^2)}{1 + e \times \cos(\theta)}$$

Segunda Ley de Kepler

La segunda ley de Kepler establece que una línea que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales. Para comprobar esta ley, calculamos el momento angular L_z en cada paso de la simulación utilizando:

$$L_z = M_P(xv_y - yv_x)$$

El valor de L_z debe ser constante a lo largo del tiempo, lo que indicará que la tasa de cambio del área es constante. Además, la velocidad angular basada en el eje semimayor se calcula como:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$

Tercera Ley de Kepler

La tercera ley de Kepler dice que el período orbital T está relacionado con el semieje mayor a de la órbita mediante la siguiente relación:

$$\frac{T^2}{a^3} = 1$$

Verificando para los valores de Mercurio y la Tierra:

$$\frac{T^2_{\text{Mercurio}}}{a^3_{\text{Mercurio}}} \approx \frac{(0.24)^2}{(0.39)^3} \approx 1$$

$$\frac{T^2_{\text{Tierra}}}{a^3_{\text{Tierra}}} = \frac{(1)^2}{(1)^3} = 1$$

Esto confirma que la tercera ley de Kepler se cumple para ambos planetas.

Planeta	$r_{\mathbf{max}}$ **(AU)**	T **(años)**	$\frac{T^2}{a^3}$ **(años^2/AU^3)**
Mercurio	0.469	0.24	1
Tierra	1.017	1.00	1

Table 1: Resultados de los cálculos orbitales para Mercurio y la Tierra.

Conservación de la Energía

En cada paso de la simulación, calculamos la energía cinética K y la energía potencial U de la siguiente manera:

$$K = \frac{1}{2}M_P v^2$$

$$U = -\frac{GM_S M_P}{r}$$

$$E_{\text{total}} = K + U$$

Se debe verificar si la energía total E_{total} se conserva durante la simulación.
La posición orbital en coordenadas cartesianas se calcula mediante:

$$x = r \times \cos(\theta)$$

$$z = r \times \sin(\theta)$$

$$y = r \times \sin(i)$$

La relación entre la energía cinética y la energía potencial en un sistema gravitacional es:

$$K = -\frac{U}{2}$$

Esto debe cumplirse a lo largo del tiempo. Una gráfica de K/U versus el tiempo puede ser útil para observar la conservación de la energía.

Conclusión

Los resultados obtenidos a partir de las simulaciones confirman que los planetas siguen las leyes de Kepler y que la conservación de la energía es válida en el modelo de simulación. La tercera ley de Kepler fue particularmente útil para verificar la relación entre el período orbital y el semieje mayor de la órbita.