METODI NUMERICI PER ZERI DI FUNZIONI

Calcolo Numerico
corso A a.a.2021/22
F. Iavernaro

Problema: Data una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, determinarne gli zeri appartenenti all'intervallo $[a,b]$

Ricordiamo che $\alpha \in [a,b]$ si dice zero di f se $f(\alpha)=0$. Quindi, il problema della determinazione degli zeri di una funzione $f(x)$ è equivalente al problema della risoluzione dell'equazione

$$f(x)=0$$

Esempi

$f(x)=x-\cos x$; $\qquad g(x)=x-e^{-x}$

α è zero di $f \iff f(\alpha)=0 \iff$

α è soluzione dell'equazione $f(x)=0$

Teoremi di localizzazione

Richiamiamo dall' analisi i seguenti risultati

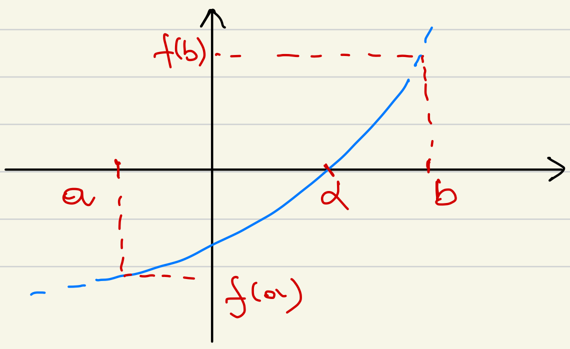
Teorema degli zeri (o di Bolzano)

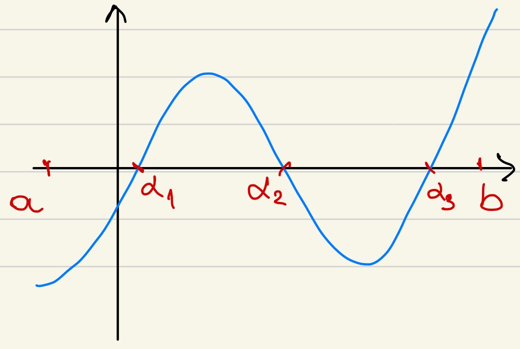
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continua in $[a,b]$
e tale che $f(a)\cdot f(b)<0$ (cioè $f(x)$
cambia segno agli estremi dell'intervallo).
Allora:

$$\exists\, \alpha \in (a,b) \text{ t.c. } f(\alpha)=0$$

cioè, a parole:
f ammette almeno uno zero α in (a,b)

Esempi





Il teorema di Bolzano esprime una condizione sufficiente per l'esistenza di uno zero di f, tuttavia non ne assicura l'unicità.

Per ottenere l'unicità potremmo assumere ulteriormente che f sia strettamente monotona.

Proposizione (di esistenza e unicità dello zero)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, derivabile in $[a,b]$ e t.c.

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \qquad e \qquad f'(x) \neq 0$$

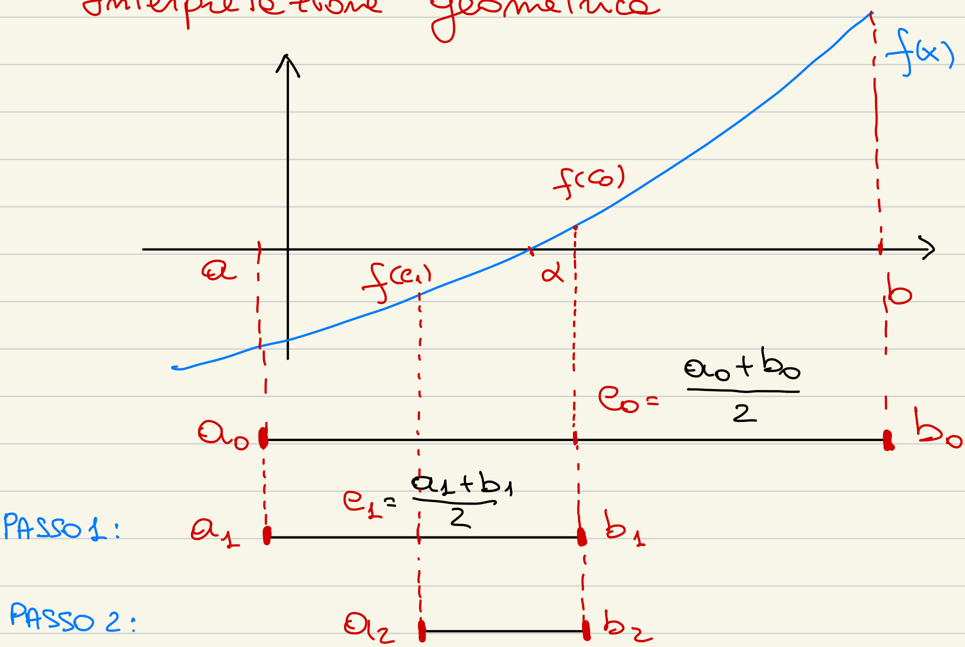
Allora f ammette un unico zero α in (a,b):

$$\exists! \, \alpha \in (a,b) \text{ t.c. } f(\alpha) = 0$$

Metodo delle successive bisezioni

La dimostrazione del teorema degli zeri, fatta in Analisi, è di tipo costruttivo, cioè induce un algoritmo che può essere implementato sul calcolatore per approssimare α, zero di f.

Interpretazione geometrica



Iterando questa procedura, si va a confinare lo zero α in un intervallo di ampiezza piccola a piacere. Se l'ampiezza del generico intervallo è sufficientemente piccolo, possiamo scegliere un qualsiasi suo punto come approssimazione di α; ad esempio

$$c_n \simeq \alpha$$

Definizione formale del metodo

Il metodo delle successive bisezioni definisce tre successioni numeriche

$$\{a_n\} \qquad \{b_n\} \qquad \{c_n\}$$

così definite:

- inizialmente si pone

$$a_0 = a, \qquad b_0 = b, \qquad c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

Al primo passo, costruiamo $[a_1, b_1]$ a partire da $[a_0, b_0]$.

Se $f(c_0) = 0 \longrightarrow$ STOP $\alpha = c_0$.

Altrimenti si pone:

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, c_0], & \text{se } f(a_0)\cdot f(c_0) < 0 \\ [c_0, b_0], & \text{se } f(c_0)\cdot f(b_0) < 0 \end{cases}$$

Procedendo per induzione, supponiamo di aver definito l'intervallo $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ e vediamo come costruire $[a_n, b_n]$.

Si pone: $$c_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

Se $f(c_{n-1}) = 0 \longrightarrow$ STOP poiché $\alpha = c_{n-1}$

Altrimenti:

$$[a_n, b_n] = \begin{cases} [a_{n-1}, c_{n-1}], & \text{se } f(a_{n-1})\cdot f(c_{n-1}) < 0 \\ [c_{n-1}, b_{n-1}], & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nell'ipotesi che $f(c_n) \neq 0 \ \forall n$, si

dimostra che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

DIM

Le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ verificano

le seguenti proprietà:

(1) $\quad [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$

(2) $\quad b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$

(3) $\quad f(a_n) \cdot f(b_n) < 0, \ \forall n$

Dalla proprietà (1) si ricava che

- $a_n \geq a_{n-1}$; $\quad a_n < b$
- $b_n \leq b_{n-1}$; $\quad b_n > a$

Quindi:

$\{a_n\}$ è monotona crescente e limitata superiormente (b è un suo maggiorante).

Dall'analisi sappiamo allora che $\{a_n\}$ ammette limite finito :

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \bar{a} \in \mathbb{R}$$

Analogamente, $\{b_n\}$ è monotona decrescente e limitata inferiormente (a è un suo minorante). Ne consegue che ammetterà limite finito :

$$\exists \lim_{n\to\infty} b_n = \bar{b} \in \mathbb{R}$$

Proviamo ora che $\bar{a} = \bar{b}$. Infatti :

$$\bar{b} - \bar{a} = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n$$ (essendo finiti i limiti)

$$= \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) \underset{(2)}{=} \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (b_{n-1} - a_{n-1})$$

$$= \dots = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \cdot (b-a) = 0$$

Proviamo che $\bar{a}\ (= \bar{b}) = \alpha$

$$0 \le [f(\bar{a})]^2 = f(\bar{a}) \cdot f(\bar{b})$$

$$= f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \quad \left(\text{essendo } f \text{ continua}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \underset{(3)}{\le} 0$$

Consegue che $f(\bar{a}) = 0 \Rightarrow \bar{a} = \alpha$

Occorre infine provare che anche $\{c_n\}$ tende ad α. Essendo $\{c_n\}$ la successione dei punti medi, avremo

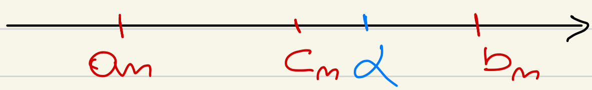
$$\begin{array}{ccccc} a_n & < & c_n & < & b_n \\ {\scriptstyle n\to\infty}\big\downarrow & & & & \big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ \alpha & & & & \alpha \end{array}$$

Dal teorema dei due carabinieri (o del doppio confronto) deduciamo che

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \alpha \qquad \square$$

Criteri di arresto

Non potendo costruire gli infiniti elementi delle successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$, termineremo l'iterazione quando avremo raggiunto un'accuratezza sufficiente.



Volendo scegliere c_n quale approssimante di α, andiamone a calcolare la distanza:

$$|c_n - \alpha| \leq b_n - a_n$$

La maggiorazione $b_n - a_n$ è calcolabile

Quindi, come criterio di arresto, possiamo usare

$$b_n - a_n < tol$$

essendo tol la precisione richiesta dall'utente.

Seguono i codici MATLAB e PYTHON

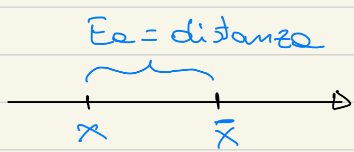
Richiamiamo le seguenti definizioni

Siano $x \in \mathbb{R}$ una quantità teorica e $\bar{x}$ una sua approssimazione.

Si definiscono:

Errore assoluto

$$E_a = |x - \bar{x}|$$



L'errore assoluto è la distanza tra x e $\bar{x}$

sulla retta reale.

Errore relativo

$$E_r = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|} \quad \text{se } x \neq 0$$

L'errore relativo scala l'errore assoluto della grandezza della quantità da approssimare.
L'importanza dell'errore relativo è quella di fornirci un'informazione sul numero di cifre significative corrette contenute nell'approssimazione $\bar{x}$. Più precisamente, lavorando in base 10, se

$$\frac{|x - \bar{x}|}{|x|} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-d}$$

allora l'approssimazione $\bar{x}$ conterrà almeno

d cifre significative corrette. Questo significa che gli arrotondamenti di x e $\bar{x}$ a d cifre coincidono.

Errore misto

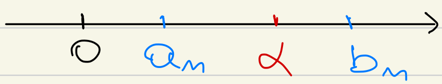
$$E_m = \frac{|x - \bar{x}|}{1 + |x|}$$

L'errore misto è utile sul calcolatore quando $|x| \approx 0$, per cui l'espressione dell'errore relativo causerebbe problemi. Può essere interpretato come una via intermedia tra l'errore assoluto e l'errore relativo. Infatti

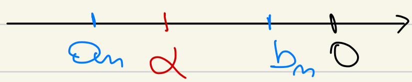
$$\frac{|x-\bar{x}|}{1+|x|} \begin{cases} \sim |x-\bar{x}| & \text{se } x \approx 0 \\ \sim \dfrac{|x-\bar{x}|}{|x|} & \text{se } |x| \gg 1 \end{cases}$$

Torniamo a discutere i criteri di arresto del metodo delle successive bisezioni. Abbiamo già esaminato quello sull'errore assoluto. Vediamo come ottenere un criterio di arresto basato sull'errore relativo. Facciamo riferimento ai seguenti grafici

$\alpha > 0$



$\alpha < 0$



Poiché $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$, per n grande, a_n e b_n avranno lo stesso segno di α.

Pertanto:

$\alpha > 0$: $\quad a_n < \alpha \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{a_n}$

$\alpha < 0$: $\quad \alpha < b_n \Rightarrow \dfrac{1}{-\alpha} < \dfrac{1}{-b_n} \iff$

$$\frac{1}{|\alpha|} < \frac{1}{|b_n|}$$

Volendo racchiudere in un unico caso:

$$\frac{1}{|\alpha|} < \frac{1}{\min\{|a_n|, |b_n|\}}$$

In definitiva, il criterio di arresto sull'errore assoluto diventa:

$$\frac{b_n - a_n}{\min\{|a_n|, |b_n|\}} < tol$$

Infine, il criterio di arresto sull'errore misto è:

$$\frac{b_n - a_n}{1 + \min\{|a_n|, |b_n|\}} < tol$$

Osservazione. Lavorando con l'errore assoluto, è possibile stabilire a priori il numero di iterazioni necessarie per ottenere una certa accuratezza tol. Infatti, durante la dimostrazione della convergenza, avevamo stabilito che

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Dunque, il criterio di arresto

$$b_n - a_n < tol$$

diventa

$$\frac{b-a}{2^n} < tol$$

che può essere risolta rispetto all'incognita n:

$$2^n > \frac{b-a}{tol}$$

$$n > \log_2 \frac{b-a}{tol}$$

arrotondamento all'intero successivo

Quindi potremo scegliere $n = \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{tol} \right\rceil$

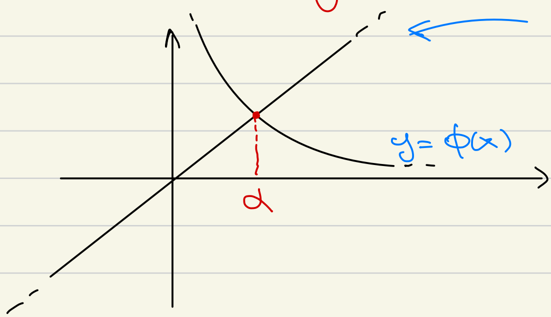
METODI ONE-STEP (a un passo)

Definizione

Sia $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$. $\alpha \in [a,b]$ si dice **punto fisso** di ϕ se

$$\phi(\alpha) = \alpha$$

Interpretazione geometrica



Poiché la prima bisettrice è il luogo geometrico dei punti che hanno le stesse ascisse e ordinate, i punti fissi di ϕ sono le ascisse dei punti di intersezione del grafico di ϕ con la prima bisettrice. In effetti

$$x = \phi(x) \iff \begin{cases} y = x \\ y = \phi(x) \end{cases}$$

Trasformeremo il problema della ricerca degli zeri di una funzione $f(x)$ in un problema equivalente della ricerca dei punti fissi di un'opportuna funzione $\phi(x)$:

$$f(x) = 0 \iff x = \phi(x)$$

α zero di f $\qquad\qquad$ α punto fisso di ϕ

Dire che i due problemi sono equivalenti, significa dire che le due equazioni $f(x)=0$ e $x=\phi(x)$ ammettono le medesime soluzioni.

Il vantaggio di operare con la ϕ è che l'equazione $x=\phi(x)$ suggerisce il seguente metodo risolutivo. Si genera la seguente successione

(1) $$\begin{cases} x_0 \text{ assegnato} \\ x_n = \phi(x_{n-1}) \end{cases}$$ (stima iniziale di α)

Sotto opportune ipotesi che studieremo in seguito, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

cioè, la successione $\{x_n\}$ converge a un punto fisso di ϕ.

Esempio

$f(x) = x - \cos x$

$f(x) = 0 \iff x - \cos x = 0 \iff x = \cos x$

e quindi scegliamo $\phi(x) = \cos x$.

Partiamo da $x_0 = 0$ e calcoliamo la successione $\{x_n\}$:

$x_0 = 0$

$x_1 = \cos(x_0) = \cos(0) = 1$

$x_2 = \cos(x_1) = \cos(1) = 0.5403\ldots$

$x_3 = \cos(x_2) = 0.8575\ldots$

$x_4 =$

$x_5 =$

x_6

$\vdots$

$x_{10} = \cos(x_9) \approx 0.73140\ldots$

$\vdots$

$x_{20} = \quad \approx 0.73893\ldots \approx \alpha$

La (1) è detta metodo one-step

(la costruzione di x_n dipende dall'elemento precedentemente calcolato x_{n-1}).

La funzione ϕ è detta funzione iteratrice

Osservazione

Se ϕ è una funzione continua in $[a, b]$ ed esiste $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$, necessariamente α

dovrà essere punto fisso di ϕ. Infatti:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \phi(x_{n-1}) = \phi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right)$$

ϕ è continua

$$= \phi(\alpha)$$

Notazioni e richiami

Denoteremo con

$$\mathcal{C}([a,b]) = \{ f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ continua in } [a,b] \}$$

$$\mathcal{C}^1([a,b]) = \{ f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ derivabile in } [a,b] \text{ con } f'(x) \text{ continua in } [a,b] \}$$

Evidentemente $\mathcal{C}^1([a,b]) \subset \mathcal{C}([a,b])$

Più in generale:

$$\mathcal{C}^k([a,b]) = \{ f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ derivabile } k \text{ volte in } [a,b], \text{ con } f^{(k)}(x) \text{ continue in } [a,b] \}$$

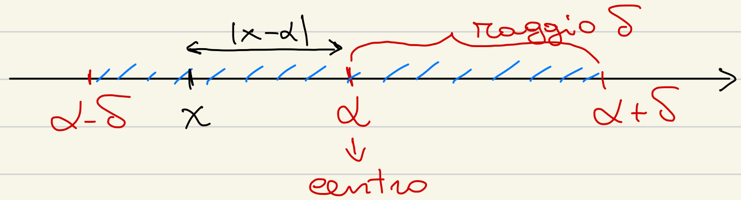
$$\mathcal{C}^k([a,b]) \subset \mathcal{C}^{k-1}([a,b]) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1([a,b]) \subset \mathcal{C}([a,b])$$

Intorno sferico.

Siano $\alpha \in \mathbb{R}$, e $\delta > 0$. Si definisce intorno sferico di centro α e raggio δ e lo si denota con $B(\alpha, \delta)$:

Ball

$$B(\alpha,\delta) = (\alpha-\delta, \alpha+\delta)$$



Vediamo di interpretare la scrittura $x \in B(\alpha,\delta)$

$$x \in B(\alpha,\delta) \iff x \in (\alpha-\delta, \alpha+\delta) \iff$$

$$\alpha-\delta < x < \alpha+\delta \iff -\delta < x-\alpha < \delta \iff$$

$$\underbrace{|x-\alpha|}_{\text{distanza di } x \text{ dal centro } \alpha} < \underbrace{\delta}_{\text{raggio}}$$

In conclusione: $x \in B(\alpha, \delta) \iff$ la distanza di x dal centro α dell'intorno è minore del raggio δ.

Definizione (di convergenza locale)

Siano $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\alpha \in (a,b)$ punto fisso di ϕ. Il metodo one-step indotto dalla funzione iteratrice ϕ si dice **localmente convergente** al punto fisso α se:

$\exists\, B(\alpha, \delta)$, intorno sferico di centro α e raggio δ, tale che, $\forall x_0 \in B(\alpha, \delta)$:

(a) $\quad x_n \in B(\alpha, \delta), \quad n \geq 0$

(b) $\quad \lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$

Osservazione. Nel caso di convergenza locale si richiede che x_0 sia una stima sufficientemente buona di α.

Definizione (di convergenza globale)

Siano $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ e α punto fisso di ϕ.
Il metodo iterativo one-step definito dalla funzione iteratrice ϕ è detto **globalmente convergente** ad α in $[a,b]$ se, $\forall x_0 \in [a,b]$:

(a) $\quad x_n \in [a,b], \quad n \geq 0$

(b) $\quad \lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$

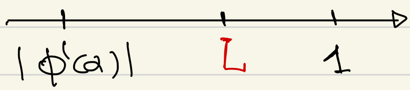
Osservazione:

Convergenza globale $\Rightarrow$ convergenza locale

Teorema (condizione sufficiente per la convergenza locale)

Siano $\phi \in C^1([a,b])$ e α punto fisso di ϕ in (a,b). Allora, se $|\phi'(\alpha)| < 1$ il metodo one-step definito dalla funzione iteratrice ϕ risulta localmente convergente ad α.

DIM



Sia $0 < L < 1$ t.c. $|\phi'(\alpha)| < L < 1$

Essendo $\phi \in C^1([a,b])$, $\phi'(x)$ è continua in $[a,b]$ così pure il suo valore assoluto $|\phi'(x)|$. Per il teorema della permanenza del segno vicino ad α, $|\phi'(x)|$ continua a essere minore di L:

$\exists\, B(\alpha,\delta)$ t.c. $\quad |\phi'(x)| < L \quad \forall x \in B(\alpha,\delta)$

Facciamo vedere che, all'interno di questo intorno, sono verificate le due proprietà (a) e (b) della definizione di convergenza locale.

Proprietà (a)

Si procede per induzione sull'indice n.

Per $n=0$ l'asserto è vero in quanto, per definizione, sappiamo che $x_0 \in B(\alpha,\delta)$.

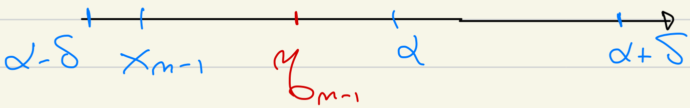
Supponiamo l'asserto vero per $n-1$, cioè $x_{n-1} \in B(\alpha,\delta)$ e proviamolo per n. Risulta:

$$|x_n - \alpha| = |\phi(x_{n-1}) - \phi(\alpha)|$$

$$= |\phi'(\eta_{n-1})(x_{n-1} - \alpha)|$$

per il teorema di Lagrange

dove η_{n-1} è un opportuno punto tra x_{n-1} e α



Osserviamo che $\eta_{n-1} \in B(\alpha, \delta) \Rightarrow |\phi'(\eta_{n-1})| < L$

Dunque:

$$|x_n-\alpha| = |\phi(\eta_{n-1})| \cdot |x_{n-1}-\alpha| < L\,|x_{n-1}-\alpha|$$

dall'ipotesi induttiva $$< L \cdot \delta \overset{L<1}{<} \delta$$

Proprietà (b)

Abbiamo visto che $|x_n-\alpha| < L\,|x_{n-1}-\alpha|$

Essendo n generico, possiamo iterare:

$$|x_n-\alpha| < L\,|x_{n-1}-\alpha| < L^2\,|x_{n-2}-\alpha| < \dots$$
$$< L^n\,|x_0-\alpha|$$

Quindi, in conclusione:

$$0 \leq |x_n - \alpha| < L^n |x_0 - \alpha|$$

$$L^n |x_0 - \alpha| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Per il teorema della convergenza obbligata (o dei due carabinieri):

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - \alpha| = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha \qquad \square$$

Osservazione

- Se $|\phi'(\alpha)| > 1$ il metodo non può essere localmente convergente ad α. Infatti, vicino ad α, $|\phi'(x)| > L > 1$ e quindi se x_0 è sufficientemente vicino ad α

$$|x_1 - \alpha| > L|x_0 - \alpha| > |x_0 - \alpha|$$

ci allontaniamo da α.

- Se $|\phi'(\alpha)| = 1$, non si può dire nulla a priori circa la convergenza locale.

Osserviamo ulteriormente che nelle ipotesi avremmo potuto scrivere $\phi \in C^1(B(\alpha, r))$ anziché scrivere $\phi \in C^1([a,b])$.

Teorema (Condizione sufficiente per la convergenza globale)

Sia $\phi \in C^1([a,b])$ tale che:

1) $\phi([a,b]) \subset [a,b]$

2) $|\phi'(x)| < 1, \quad \forall x \in [a,b]$

Allora ϕ ammette un unico punto fisso $\alpha \in [a,b]$ e il metodo one-step definito dalla funzione iteratrice ϕ risulta essere globalmente convergente ad α nell'intervallo $[a,b]$.

DIM

Proviamo innanzitutto l'esistenza e l'unicità del punto fisso α di ϕ. A tal fine consideriamo la seguente funzione ausiliaria $g(x)$:

$$g(x) = x - \phi(x)$$

Ovviamente $g \in C^1([a,b])$ e risulta

$$g'(x) = 1 - \phi'(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

cioè $g(x)$ è strettamente crescente in $[a,b]$.

Inoltre:

$$\left.\begin{aligned} g(a) &= a - \phi(a) \leq 0 \\ g(b) &= b - \phi(b) \geq 0 \end{aligned}\right\} \text{dalle (1)}$$

Per un teorema di localizzazione, $g(x)$ ammette un unico zero $\alpha \in [a, b]$:

$$\exists! \, \alpha \in [a, b] \quad t.c. \quad g(\alpha) = 0$$

$$\alpha - \phi(\alpha) = 0 \iff \alpha = \phi(\alpha)$$

Ora passiamo a dimostrare le proprietà (a) e (b) della definizione di convergenza globale.

Proprietà (a)

Dall'ipotesi 1) sappiamo che

$$\phi([a,b]) \subset [a,b]$$

ciò significa che :

$$\forall x \in [a,b] : \quad \phi(x) \in [a,b]$$

Questo equivale alla proprietà (a) :

$$x_0 \in [a,b] \Rightarrow x_1 = \phi(x_0) \in [a,b] \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_n \in [a,b]$$

Proprietà (b)

Sia $$M = \max_{a \le x \le b} |\phi'(x)| < 1$$

Il massimo M esiste per il teorema di Weierstrass, essendo $|\phi'(x)|$ continua in $[a,b]$.

$$0 \le |x_n - \alpha| = |\phi(x_{n-1}) - \phi(\alpha)|$$

$$= |\phi'(\eta_{n-1})| \, |x_{n-1} - \alpha|$$

$$< M \, |x_{n-1} - \alpha| < M^2 \, |x_{n-2} - \alpha| \ldots$$

$$< M^n \, |x_0 - \alpha|$$

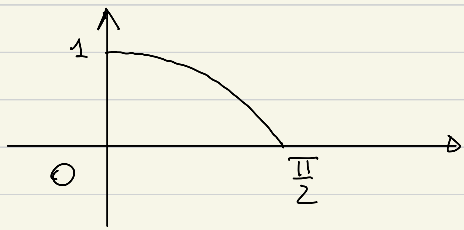
Per il teorema dei due carabinieri

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - \alpha| = 0 \qquad \square$$

Esempio Riprendiamo l'esempio

$$x - \cos x = 0 \iff x = \cos x$$

$$\phi(x) = \cos x \,, \qquad x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$



$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \cos x \le 1 < \frac{\pi}{2}$$

quindi la proprietà 1) è verificata:

$$\phi([0, \tfrac{\pi}{2}]) \subset [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

Inoltre:

$$|\phi'(x)| = |-\sin x| = \sin x$$

$$0 \le \sin x \le 1 \quad \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

La proprietà 2) è verificata in $[0, \frac{\pi}{2})$ essendo $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

Tuttavia, scegliendo $x_0 = \frac{\pi}{2}$ otteniamo:

$x_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ e quindi anche con questa scelta di x_0 otteniamo la convergenza ad α. Quindi il metodo risulta globalmente convergente in $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Esercizio

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^3 - 2x - 5, \qquad x \in [1,3]$$

1) Provare che $f(x)$ ammette un unico zero $\alpha \in (1,3)$

2) Per l'approssimazione di α si considerino i seguenti due metodi iterativi one-step:

(a) Il primo metodo è ottenuto andando a risolvere l'equazione

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

isolando il secondo termine:

$$x = \frac{x^3 - 5}{2}.$$

Ciò suggerisce la funzione iteratrice

$$\phi_1(x) = \frac{x^3 - 5}{2}$$

(b) Lo si ottiene risolvendo rispetto al primo termine x^3:

$$x = \sqrt[3]{2x+5}$$

da cui la funzione iteratrice

$$\phi_2(x) = \sqrt[3]{2x+5}$$

Studiare la convergenza locale e globale dei due metodi definiti da $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$.

Svolgimento

1) $f(1) = 1^3 - 2\cdot 1 - 5 = 1-2-5 = -6 < 0$

$f(3) = 3^3 - 2\cdot 3 - 5 = 27 - 11 = 16 > 0$

$f'(x) = 3x^2 - 2 > 0 \quad \forall x \in [1,3]$

Per il secondo teorema di localizzazione degli zeri, f ammette un unico zero $\alpha \in (1,3)$

2) Cominciamo a studiare il metodo (a).

$$\phi_1(x) = \frac{x^3-5}{2} \quad \text{da cui}$$

$$\phi_1'(x) = \frac{3}{2}x^2 \geq \frac{3}{2} > 1 \qquad \forall x \in [1,3]$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_1'(\alpha) > 1$$

Quindi il metodo (a) non converge localmente.

A maggior ragione non converge globalmente in [1,3].

Passiamo a studiare il metodo (b)

$$\phi_2(x) = \sqrt[3]{2x+5} = (2x+5)^{\frac{1}{3}}$$

$$\phi_2'(x) = \frac{1}{3}(2x+5)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+5)^2}}$$

$\phi_2'(x)$ decresce nell'intervallo di lavoro [1,3],

pertanto:

$$0 < \phi_2'(x) \leq \max_{1 \leq x \leq 3} \phi_2'(x) = \phi_2'(1) = \frac{2}{3} \cdot (7)^{-\frac{2}{3}} \approx 0.18$$

$$0 < \phi_2'(x) < 1$$

Possiamo subito concludere che $|\phi_2'(\alpha)| < 1$ e quindi il metodo (b) converge localmente.

Per la convergenza globale, resta da provare la condizione 1) del relativo teorema:

$\phi_2([1,3]) \subset [1,3]$, il che significa:

$$1 \leq x \leq 3 \implies 1 \leq \phi_2(x) \leq 3$$

Dovremo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2x+5} \geq 1 \\ \sqrt[3]{2x+5} \leq 3 \end{cases}$$

Detto S l'insieme delle soluzioni dobbiamo verificare se $[1,3] \subset S$

La risoluzione del sistema è lasciata per esercizio. Seguiremo un'alternativa più breve. Abbiamo visto che $\phi_2'(x) > 0$, quindi $\phi_2(x)$ è strettamente crescente in $[1,3]$. Allora:

$$1 \leq x \leq 3 \implies \underset{\substack{\| \\ \sqrt[3]{7} \approx 1.91 \\ \vee \\ 1}}{\phi_2(1)} \leq \phi_2(x) \leq \underset{\substack{\| \\ \sqrt[3]{11} \approx 2.22 \\ \wedge \\ 3}}{\phi_2(3)}$$

Quindi abbiamo provato che $1 < \phi_2(x) < 3$. Il metodo (b) risulta globalmente convergente in $[1,3]$

Osservazione

La scorciatoia è possibile quando $\phi(x)$

è monotona in $[a,b]$. In particolare:

$\phi(x)$ è crescente in $[a,b]$:

$$a \leq x \leq b \Rightarrow \phi(a) \leq \phi(x) \leq \phi(b)$$

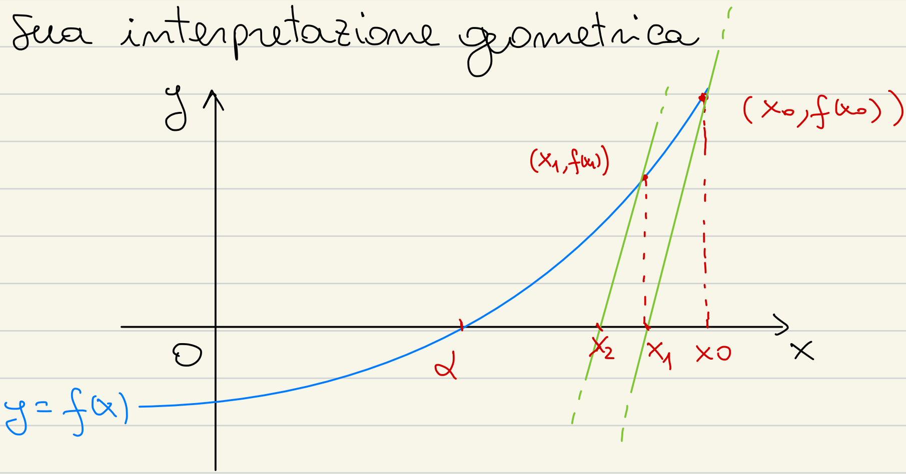
$\phi(x)$ è decrescente in $[a,b]$:

$$a \leq x \leq b \Rightarrow \phi(b) \leq \phi(x) \leq \phi(a)$$

Procediamo col definire e studiare i metodi one-step principali.

Metodo della direzione costante

Introduciamo questo metodo mediante la sua interpretazione geometrica



A partire da una stima iniziale x_0 di α, si considera la retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$ e di coefficiente angolare $\frac{1}{m}$ (con $m \neq 0$). La sua equazione sarà:

$$y - f(x_0) = \frac{1}{m}(x - x_0)$$

Definiamo x_1 come l'intercetta di questa retta con l'asse delle ascisse:

$$\begin{cases} y - f(x_0) = \frac{1}{m}(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui

$$x_1 = x_0 - m f(x_0)$$

Iterando la procedura si perviene al metodo delle direzione costante:

$$\begin{cases} x_0 \text{ assegnato} \\ x_n = x_{n-1} - m f(x_{n-1}) \end{cases}$$

La funzione iteratrice è:

$$\phi(x) = x - m f(x)$$

Essa dipende dal parametro m. Come deve essere scelto questo parametro per ottenere convergenza locale o globale? Risulta:

$$\phi'(x) = 1 - m f'(x)$$

Convergenza locale

Dovremo imporre $|\phi'(\alpha)| < 1$

$-1 < 1 - m f'(\alpha) < 1$ sottraendo 1

$-2 < -m f'(\alpha) < 0$ cambiamo segno

$$\boxed{0 < m f'(\alpha) < 2}$$

Questa è la condizione per la convergenza locale. Per la convergenza globale si ha il seguente risultato.

Teorema (di convergenza globale)

Sia $f \in C^1([a,b])$ tale che:

(a) $f(a) \cdot f(b) < 0$

(b) $f'(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a,b]$

(c) $0 < m f'(x) \leq 1, \quad \forall x \in [a,b]$

Allora f ammette un unico zero $\alpha \in (a,b)$ e il metodo della direzione costante converge globalmente ad α in tutto l'intervallo $[a,b]$.

Dalla (c) ricaviamo:

$$0 < m \cdot f'(x) \leq 1 \quad \text{cambiamo segno}$$

$$-1 \leq -m f'(x) < 0 \quad \text{aggiungiamo } 1$$

$$0 \leq 1 - m f'(x) < 1$$

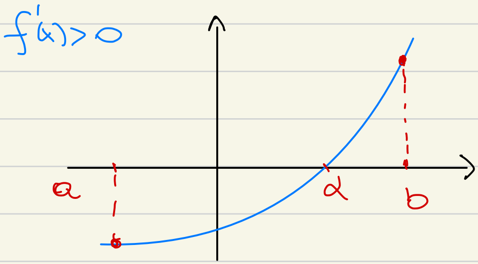
$$0 \leq \phi'(x) < 1$$

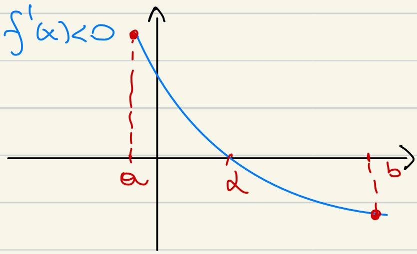
Quindi la seconda ipotesi del teorema di convergenza globale è soddisfatta. Resta da provare che $\phi([a,b]) \subset [a,b]$

Poiché $\phi'(x) \geq 0$, $\phi(x)$ è monotona crescente e quindi

$$a \leq x \leq b \implies \phi(a) \leq \phi(x) \leq \phi(b)$$

Si possono presentare i due casi schematizzati nelle due figure sottostanti:





Discutiamo il primo caso ($f'(x)>0$); l'altro lo si lascia per esercizio. Risulta:

$$\phi(a) = a - \underset{\underset{0}{\vee}}{m} \, f\underset{\underset{0}{\wedge}}{(a)} > a$$

$$\phi(b) = b - \underset{\underset{0}{\vee}}{m} \, f\underset{\underset{0}{\vee}}{(b)} < b$$

In conclusione

$$a \leq x \leq b \Rightarrow \quad a \leq \phi(x) \leq b \qquad \square$$

Metodo di Newton (o delle tangenti)

Definiamo questo metodo mediante due strategie diverse

Approccio analitico

A partire da una stima iniziale x_0, sviluppiamo $f(x)$ come polinomio di Taylor arrestato al primo ordine in un intorno di x_0:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{parte lineare di } f} + \underbrace{o(x-x_0)}_{\substack{\text{infinitesimo di} \\ \text{ordine superiore}}}$$

dove $o(x-x_0)$ denota un infinitesimo di ordine superiore al primo per $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

Se x è vicino a x_0, potremo trascurare l'infinitesimo $o(x-x_0)$ e scrivere

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Anziché risolvere $f(x) = 0$, risolveremo

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Denotando con x_1 la soluzione, si ottiene:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

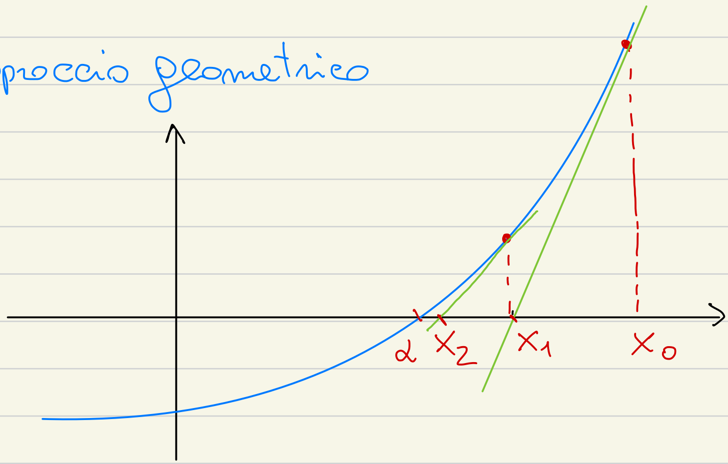
Iterando la procedura si ottiene il metodo di Newton:

$$\begin{cases} x_0 \text{ assegnato} \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{cases}$$

Da cui, la funzione iteratrice è:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Approccio geometrico



L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0, è:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

Denotiamo con x_1 l'intercetta della retta con l'asse x. Ponendo $y=0$, si ottiene

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Iterando la procedura si ottiene il metodo di Newton.

Studiamo la convergenza locale del metodo di Newton. Premettiamo la seguente definizione.

Definizione (molteplicità di uno zero)

Sia $f \in C^d(B(\alpha, \delta))$, α zero di f.

La molteplicità (o ordine) dello zero α di f è un intero d tale che:

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(d-1)}(\alpha) = 0 \quad \wedge \quad f^{(d)}(\alpha) \neq 0$$

Significato analitico

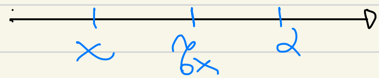
Consideriamo lo sviluppo di Taylor di f in un intorno di α:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + f''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \dots + f^{(d-1)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^{d-1}}{(d-1)!} + f^{(d)}(\eta_x)\frac{(x-\alpha)^d}{d!}$$

Poiché la molteplicità di α è d, risulta:

$$f(x) = \frac{f^{(d)}(\gamma_x)}{d!}(x-\alpha)^d,$$ con γ_x opportuno

punto tra x e α



Poiché $f^{(d)}(\alpha)\neq 0$, per $x \simeq \alpha$ anche $f^{(d)}(\gamma_x)\neq 0$. Osserviamo che in un intorno di α, $f(x)$ si comporta come

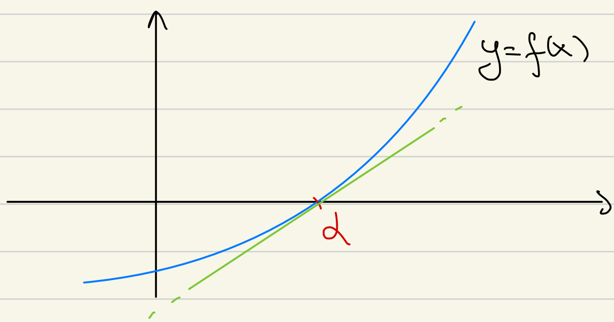
$$f(x) \simeq \text{cost.}\,(x-\alpha)^d$$

e quindi

$$f(x)=0 \quad \sim \quad (x-\alpha)^d = 0$$

Interpretazione geometrica

$d=1$ $\left(f(\alpha)=0 \ \wedge\ f'(\alpha)\neq 0 \right)$



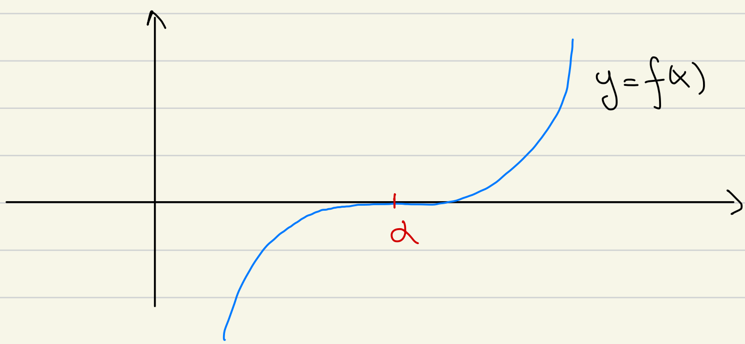
In tal caso α si dice zero semplice.

Questo è il caso più frequente.

$d = 2 \quad \left(f(\alpha) = f'(\alpha) = 0 \ \wedge \ f''(\alpha) \neq 0 \right)$

In questo caso α si dice zero doppio.

$d = 3 \quad \left(f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0 \ \wedge \ f'''(\alpha) \neq 0 \right)$



Torniamo al metodo di Newton.

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

La sua derivata prima è:

$$\phi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Distinguiamo due casi

- α zero semplice: $f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) \neq 0$

Possiamo calcolare

$$\phi'(\alpha) = \frac{f(\alpha) \cdot f''(\alpha)}{\underbrace{[f'(\alpha)]^2}_{\neq 0}} = 0$$

Dal teorema di convergenza locale, concludiamo che il metodo di Newton è localmente convergente

- α zero di molteplicità $d \geq 2$:

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(d-1)}(\alpha) = 0 \quad \wedge \quad f^{(d)}(\alpha) \neq 0$$

$\phi'(x)$ non è definita in α poiché il denominatore si annulla. Tuttavia, è possibile dimostrare che

$$\lim_{x \to \alpha} \phi'(x) = 1 - \frac{1}{d}$$

Possiamo prolungare la $\phi'(x)$ per continuità in α, ponendo, per definizione

$$\phi'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \phi'(\alpha) = 1 - \frac{1}{d}$$

Anche in questo caso risulta che $|\phi'(\alpha)| < 1$ e otteniamo la convergenza locale

Conclusione: il metodo di Newton è sempre localmente convergente.

Studiamo ora la convergenza globale

Teorema (di conv. globale del metodo di Newton)

Sia $f \in C^2([a,b])$ tale che:

(a) $f(a) \cdot f(b) < 0$

(b) $f'(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a,b]$

(c) $f''(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a,b]$

Allora f ammette un unico zero $\alpha \in (a,b)$.

Inoltre, scelto $x_0 \in [a,b]$ tale che

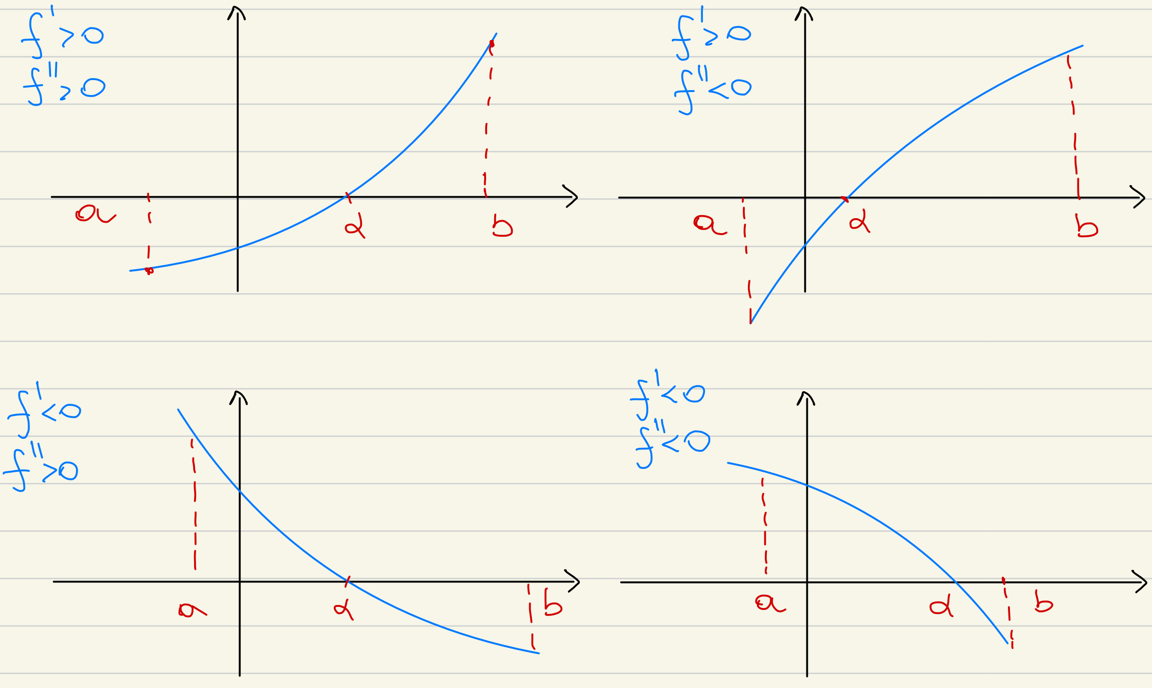
$f(x_0) \cdot f''(x) > 0$, il metodo di Newton

genera una successione $\{x_n\}$ che

converge ad α monotonicamente

DIM

L'esistenza e l'unicità dello zero $\alpha \in (a,b)$ di f discende dalle ipotesi (a) + (b).
Si distinguono quattro casi schematizzati nei grafici sottostanti:



Esaminiamo il primo caso, $f'(x)>0$ e $f''(x)>0$, mentre gli altri 3 casi sono lasciati per esercizio.

Ricordiamo che:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad , \quad \phi'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Dall'enunciato del teorema, dovremo scegliere $x_0 \in (\alpha, b]$. Facciamo innanzitutto vedere che

$$\phi((\alpha, b]) \subset (\alpha, b]$$

Poiché in $(\alpha, b]$ risulta $\phi'(x) > 0$, ne consegue che ϕ è strettamente crescente in $(\alpha, b]$:

$$\alpha < x \leq b \implies \phi(\alpha) < \phi(x) \leq \phi(b)$$

Ora:

$$\phi(\alpha) = \alpha$$

$$\phi(b) = b - \frac{\overset{>0}{f(b)}}{\underset{>0}{f'(b)}} < b$$

Abbiamo provato che $\alpha < \phi(x) < b$

Facciamo infine vedere che $\{x_n\}$ converge ad α ed è una successione strettamente decrescente.

Dal punto precedente sappiamo che $x_n \in (\alpha, b]$ $\forall\, n \geq 0$.

$$x_n = x_{n-1} - \frac{\overset{>0}{f(x_{n-1})}}{\underset{>0}{f'(x_{n-1})}} < x_{n-1}$$

$\{x_n\}$ è strettamente decrescente e limitato inferiormente da α. Dall'analisi ammetterà limite finito

$$\exists \lim_{n \to \infty} x_n = \beta \geq \alpha$$

Poiché β è punto fisso di ϕ, necessariamente dovrà essere $\beta = \alpha$ $\square$

Corollario Nelle stesse ipotesi (a), (b) e (c) del teorema, se $x_0 \in [a,b]$ e $x_1 = \phi(x_0) \in [a,b]$, allora la successione $\{x_n\}$ converge ad α.

DIM

Facendo riferimento sempre al primo caso, se scegliamo $x_0 \in [a, \alpha)$, essendo $\phi'(x) < 0$ in $[a, \alpha)$ segue che $\phi(x)$ è strettamente decrescente e quindi

$$x_0 < \alpha \implies x_1 = \phi(x_0) > \phi(\alpha) = \alpha$$

e quindi, dall'ipotesi $x_1 \in [a, b]$ segue che $x_1 \in (\alpha, b]$ e da questo punto in poi vale il teorema precedente.

Ordine di convergenza

È uno strumento che ci consente di stimare la velocità con cui una successione convergente tende al suo valore limite. Questo strumento ci consentirà di confrontare i metodi iterativi in base alla rapidità di convergenza delle successioni che essi generano.

Definizione

Sia $\{x_n\}$ una successione convergente ad $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha \in \mathbb{R}$$

Si definisce ordine di convergenza della successione $\{x_n\}$ un reale positivo $p > 0$ tale che esista e sia finito il seguente limite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = c$$

con $0 < c < +\infty$

Significato

Per n abbastanza grande (definitivamente)

possiamo scrivere

$$\frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} \approx c$$

da cui

$$|x_{n+1} - \alpha| \approx c \cdot |x_n - \alpha|^p$$

Tale uguaglianza relaziona l'errore assoluto a un generico passo con l'errore assoluto al passo precedente e quindi esprime la legge con cui l'errore si riduce (per n grande) ad ogni passo. Ne consegue che la riduzione dell'errore ad ogni passo sarà tanto maggiore

- quanto più grande è il valore di p
- quanto più piccolo è il valore di c

La costante c è detta costante asintotica di convergenza. La convergenza si dice:

- lineare, se $p = 1$;
- superlineare, se $p > 1$;
- quadratica, se $p = 2$.

Osservazione

Se $p = 1$, necessariamente $0 < c < 1$. Infatti, per n grande, abbiamo

$$|x_{n+1} - \alpha| \simeq c\,|x_n - \alpha|$$

Se c fosse maggiore o uguale a 1,
la distanza tra x_n e α non si ridurrebbe
al crescere di n, e ciò contraddice l'ipotesi
che $x_n \longrightarrow \alpha$.

Definizione (di ordine di convergenza di un metodo iterativo)

Un metodo iterativo per la ricerca degli zeri di una funzione si dice avere ordine p se, applicato a una data classe di funzioni, genera successioni che convergono allo zero con ordine p.

Esempio

Consideriamo due metodi iterativi one-step definiti dalle due funzioni iteratrici ϕ_1 e ϕ_2, e supponiamo che, applicati per la ricerca di uno zero α di una funzione f :

ϕ_1 : $p_1 = 1$ (convergenza lineare) e $c_1 = \frac{1}{10}$

ϕ_2 : $p_2 = 2$ (convergenza quadratica) e $c_2 = 10$

Stiamo avvantaggiando il primo metodo relativamente al valore della costante asintotica:

$$c_2 = 100 \cdot c_1$$

Ipotesi di lavoro: scegliamo, per i due metodi, una condizione iniziale x_0 t.c.

$$|x_0 - \alpha| = 10^{-2}$$

e supponiamo di trovarci in un intorno abbastanza piccolo di α, in modo tale che

$$|x_{n+1} - \alpha| \approx c\, |x_n - \alpha|^p$$

Generiamo le due successioni.

n	ERRORE ASSOLUTO $x_{n+1} = \phi_1(x_n)$	ERRORE ASSOLUTO $x_{n+1} = \phi_2(x_n)$
0	10^{-2}	10^{-2}
1	$\approx 10^{-3}$	$\approx 10^{-3}$
2	$\approx 10^{-4}$	$\approx 10^{-5}$
3	$\approx 10^{-5}$	$\approx 10^{-9}$
4	$\approx 10^{-6}$	$\approx 10^{-17}$

Osservazione

In caso di convergenza quadratica, se la costante asintotica $c \approx 1$, il numero di cifre significative dell'approssimazione allo zero α, definitivamente raddoppia da un passo al successivo

$$|x_{n+1} - \alpha| \approx \underset{\substack{\wr\wr \\ 1}}{c}\, |x_n - \alpha|^2$$

Se $\frac{|x_n - \alpha|}{|\alpha|} < 10^{-d}$, quindi x_n contiene

d cifre significative corrette, abbiamo:

$$\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|\alpha|} \approx \frac{|x_n-\alpha|^2}{|\alpha|} = |\alpha| \cdot \left(\frac{|x_n-\alpha|}{|\alpha|}\right)^2$$

$$< |\alpha| \, 10^{-2d}$$

Come determinare l'ordine di convergenza p di un metodo iterativo? La seguente proposizione ci fornisce una semplice risposta nel caso dei metodi iterativi one-step.

Proposizione

Sia $\phi \in C^p(B(\alpha,\delta))$, con α punto fisso di ϕ.

Sono equivalenti le seguenti due proposizioni

(a) Il metodo iterativo one-step definito da ϕ ha ordine p.

(b) $\phi'(\alpha) = \phi''(\alpha) = \dots = \phi^{(p-1)}(\alpha) = 0 \ \wedge \ \phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$

DIM Delle due implicazioni (a) $\Rightarrow$ (b) e (b) $\Rightarrow$ (a), mostreremo solo la seconda, che è la più importante. La prima è lasciata per esercizio (la procedura è analoga a quella descritta qui sotto).

(b) $\Rightarrow$ (a) Consideriamo lo sviluppo di Taylor della funzione iteratrice ϕ in un intorno di α:

$$\phi(x) = \phi(\alpha) + \phi'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{\phi''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\phi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x-\alpha)^{p-1} + \frac{\phi^{(p)}(\eta_x)}{p!}(x-\alpha)^p$$

Con η_x opportuno punto tra x e α.

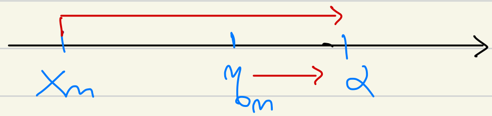
Dall'ipotesi (b) possiamo semplificare come:

$$\phi(x) = \phi(\alpha) + \frac{\phi^{(p)}(\eta_x)}{p!}(x-\alpha)^p$$

Per la successione $\{x_n\}$ generata dal metodo possiamo scrivere:

$$x_{n+1}-\alpha = \phi(x_n)-\phi(\alpha) = \frac{\phi^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n-\alpha)^p$$

dove ξ_n è un opportuno punto tra x_n e α



Si noti che, poiché $x_n \to \alpha$, anche $\xi_n \longrightarrow \alpha$

Otteniamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\phi^{(p)}(\xi_n)|}{p!}$$

$$= \frac{1}{p!} \cdot \left|\phi^{(p)}\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n\right)\right| = \frac{1}{p!}\left|\phi^{(p)}(\alpha)\right|^{\neq 0} \quad \square$$

Osservazione La costante asintotica di convergenza dei metodi one-step è: $\quad \frac{1}{p!}\left|\phi^{(p)}(\alpha)\right|$

In particolare, per $p=1$,

$$C = |\phi'(\alpha)|$$

Determiniamo ora l'ordine di convergenza dei due metodi one-step finora studiati.

Metodo della direzione costante

$$\phi(x) = x - m f(x)$$

$$\phi'(x) = 1 - m f'(x)$$

$$\phi'(\alpha) = 1 - m f'(\alpha)$$

Distinguiamo due casi

- $m \neq \dfrac{1}{f'(\alpha)}$. Questo è il caso generale.

  Risulta $\phi'(\alpha) \neq 0$ e quindi l'ordine di convergenza è $p = 1$

- $m = \dfrac{1}{f'(\alpha)}$. In questo caso eccezionale risulta $\phi'(\alpha) = 0$ e quindi la successione $\{x_n\}$ generata con questa scelta converge ad α con ordine $p = 2$.

Conclusione: l'ordine di convergenza del metodo della direzione costante è $p = 1$.

Metodo di Newton

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\phi'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Distinguiamo due casi

- α zero semplice. In questo caso generale:

$$\phi'(\alpha) = 0$$

In generale, $\phi'(\alpha) \neq 0$, quindi il metodo di Newton, in presenza di zeri semplici, ha ordine $p=2$.

- α zero di molteplicità $d>1$. In tal caso, avevamo provato che

$$\phi'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \phi'(x) = 1 - \frac{1}{d} \neq 0$$

In presenza di zeri multipli, la successione $\{x_n\}$ generata dal metodo di Newton converge ad α linearmente.

Commenti sul metodo di Newton.

Vantaggio: il metodo di Newton ha ordine di convergenza $p=2$.

Svantaggi:

- Per la sua implementazione, occorre preventivamente calcolare l'espressione della derivata prima di f.

Ciò può essere oneroso se f ha una espressione complicata o addirittura impossibile se l'espressione di f non è nota (black-box)

- Il costo computazionale per iterata del metodo di Newton è:

$$\frac{2 \text{ valutazioni di funzione}}{\text{iterata}}$$

quindi, ad esempio, costa il doppio rispetto al metodo della direzione costante. Si osservi che il numero di valutazioni di funzione è proporzionale al tempo di esecuzione sul calcolatore.

- La convergenza del metodo può rallentare molto se x_n non è abbastanza vicino add. In alcuni casi la regione di convergente potrebbe essere molto piccola, il ché richiederebbe una stima iniziale x_0 molto buona.

Per questo motivo si introducono alcune varianti del metodo di Newton che possano risolvere uno o più degli svantaggi sopra elencati.
Ne analizziamo due.

Metodo di Newton modificato

Non è altro che il metodo delle direzione costante con la seguente definizione del parametro m:

$$m = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Il metodo di Newton modificato è:

$$\begin{cases} x_0 \text{ assegnato} \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

La derivata prima di f va calcolata solo nel punto iniziale. L'idea è che se $x_0 \approx \alpha$ allora $f'(x_0) \approx f'(\alpha)$ e quindi

$$m = \frac{1}{f'(x_0)} \approx \frac{1}{f'(\alpha)}$$

Ricordiamo che per $m = 1/f'(\alpha)$ la convergenza sarebbe quadratica. Nel nostro caso, il metodo diventa lineare, ma la costante asintotica è piccola:

$$|\phi'(\alpha)| = |1 - m f'(\alpha)| = \left|1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(x_0)}\right| << 1$$

Costo computazionale: $\dfrac{\text{1 valutazione di funzione}}{\text{iterata}}$

Metodo delle secanti

Lo si ottiene dal metodo di Newton operando la seguente approssimazione della derivata prima di f in x_n:

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Il metodo delle secanti è così definito:

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ assegnati}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

È un metodo a due passi. Si può dimostrare che il suo ordine è:

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{(sezione aurea)}$$

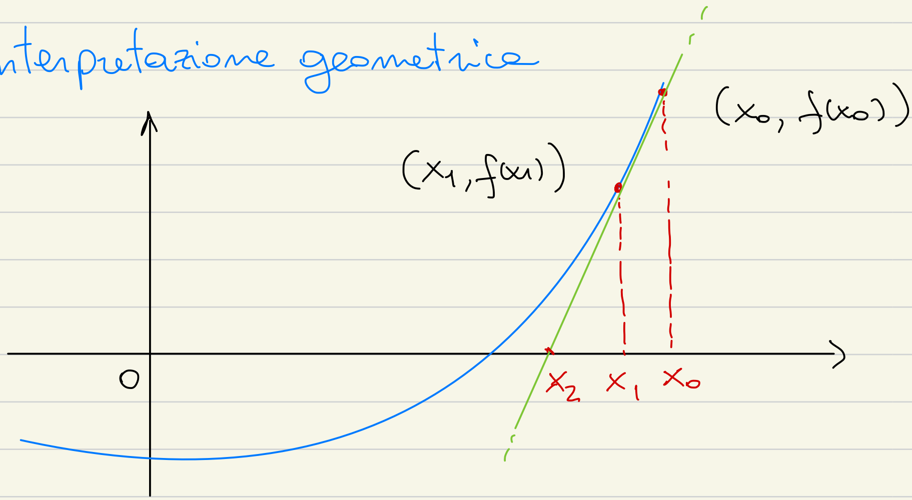
$\simeq 1.6$

Si tratta di un metodo superlineare $1 < p < 2$.

Il costo computazionale : $\dfrac{1 \text{ valutazione di funz.}}{\text{iterata}}$

perché ?

Interpretazione geometrica



Il punto x_2 lo si ottiene come intercetta della retta secante il grafico della funzione f nei punti di ascissa x_0 e x_1. L'equazione di questa retta è :

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Criteri di arresto

Poiché non possiamo calcolare gli infiniti elementi della successione $\{x_n\}$ ed inoltre considerando che il calcolatore ha una precisione finita, arresteremo l'iterazione quando

$$(*) \qquad |x_n - \alpha| < tol$$

dove tol è una tolleranza assegnata in input dall'utente. Un'analoga condizione possiamo scriverla per l'errore relativo e per l'errore misto. Al momento concentriamo la nostra attenzione sull'errore assoluto. Quando la condizione $(*)$ si realizza, il processo di iterazione ha termine e si considera l'ultimo elemento calcolato della successione quale approssimante di α:

$$x_n \simeq \alpha$$

Poiché α non è noto, la (*) non è una condizione operativa. Si possono seguire due strade:

- determinare una maggiorazione calcolabile dell'errore assoluto
- determinare una stima dell'errore assoluto

Maggiorazione dell'errore assoluto

Consideriamo

$$x_{n+1} - x_n = x_{n+1} - \alpha + \alpha - x_n$$

$$= \phi(x_n) - \phi(\alpha) - (x_n - \alpha)$$

η_{n} opportuno punto tra x_n e α

$$= \phi'(\eta_{n})(x_n - \alpha) - (x_n - \alpha)$$

$$= \left(\phi'(\eta_{n}) - 1\right)(x_n - \alpha)$$

Poiché $\eta_{n} \longrightarrow \alpha$ per $n \longrightarrow \infty$

ciò implica che $|\phi'(\eta_{n})| < 1$ per n grande

e quindi, per n grande

$$1 - \phi'(\eta_{n}) \geq 1 - |\phi'(\eta_{n})| > 0$$

Dalle uguaglianze precedenti ricaviamo:

$$|x_n - \alpha| = \frac{1}{|1 - \phi'(\eta_{n})|} \cdot |x_{n+1} - x_n|$$

$$\leq \frac{1}{1 - |\phi'(\eta_{n})|} |x_{n+1} - x_n|$$

Se si riesce a determinare un intervallo $[a, b]$ tale che:

- $\alpha \in (a, b)$ e • $|\phi'(x)| < 1$ in $[a, b]$

denotando con $\quad M = \max_{a \le x \le b} |\phi'(x)| < 1$

per n grande $\quad \eta_n \in (a, b)$ e quindi

$$|\phi'(\eta_n)| \le M$$

$$-|\phi'(\eta_n)| \ge -M$$

$$1 - |\phi'(\eta_n)| \ge 1 - M$$

$$\frac{1}{1 - |\phi'(\eta_n)|} \le \frac{1}{1 - M}$$

Sfruttando questa maggiorazione otteniamo

$$|x_n - \alpha| \le \frac{1}{1 - M} |x_{n+1} - x_n|$$

Abbiamo ottenuto una maggiorazione calcolabile dell'errore assoluto. Il criterio di arresto diventa

$$\frac{1}{1 - M} |x_{n+1} - x_n| < tol$$

Stima dell'errore

Anziché determinare una maggiorazione dell'errore, se ne determina una stima.

In generale si sceglie :

$$|x_n - \alpha| \simeq C_1 \, |x_{n+1} - x_n|$$

C_1 è una costante solitamente fissata a 1:

$$C_1 = 1$$

oppure $C_1 > 1$. La scelta $C_1 = 1$ è certamente appropriata per il metodo di Newton. Infatti sappiamo che, in presenza di zeri semplici, $\phi'(\alpha) = 0$; ciò significa che, per n grande, $\phi'(\eta_{n}) \simeq 0$ e quindi

$$\frac{1}{1 - \phi'(\eta_n)} \simeq 1$$

Scegliendo $C = 1$, il criterio di arresto si semplifica come

$$|x_{n+1} - x_n| < tol$$

Per l'errore relativo, possiamo usare il seguente criterio di arresto:

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < tol$$

Infine, per l'errore misto:

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 + |x_{n+1}|} < tol$$

Appendice

Richiami sui numeri complessi

Unità immaginaria : $i = \sqrt{-1}$

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ ha la forma

$$z = a + i\,b, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

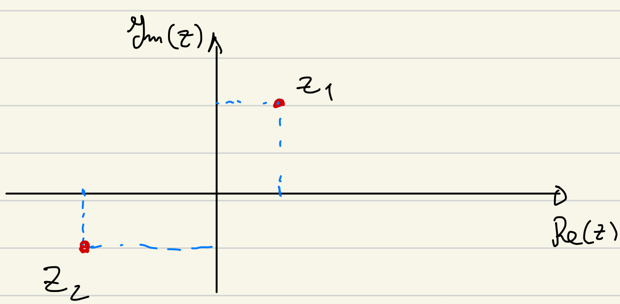
parte reale di z ← a $\qquad$ b → parte immaginaria di z

Un numero complesso lo si rappresenta sul piano complesso (o di Gauss), un piano cartesiano in cui l'asse delle ascisse corrisponde alla parte reale di z, $\mathrm{Re}(z)$, e l'asse delle ordinate alla parte immaginaria di z, $\mathrm{Im}(z)$

Esempio

$z_1 = 1 + 2i$

$z_2 = -2 - i$



Sui numeri complessi si definiscono le operazioni consuete dell'aritmetica reale.

Siano $z_1 = x_1 + i y_1$, $z_2 = x_2 + i y_2$

Addizione:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i (y_1 + y_2)$$

Sottrazione: analoga

Moltiplicazione:

osserviamo che $i^2 = i * i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$

$$z_1 * z_2 = (x_1 + i y_1) * (x_2 + i y_2)$$

$$= x_1 \cdot x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 - y_1 y_2$$

$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio di grado n ha esattamente

n radici in $\mathbb{C}$ contate con la loro molteplicità.

Esempi

1) $x^2 = 1 \longrightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 1$

2) $x^2 = -1 \longrightarrow x_1 = -i, \quad x_2 = +i$

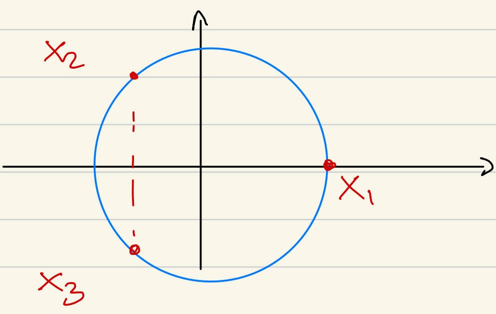
3) $x^3 = 1$

Le tre radici sono

$x_1 = 1$ (unica radice reale)

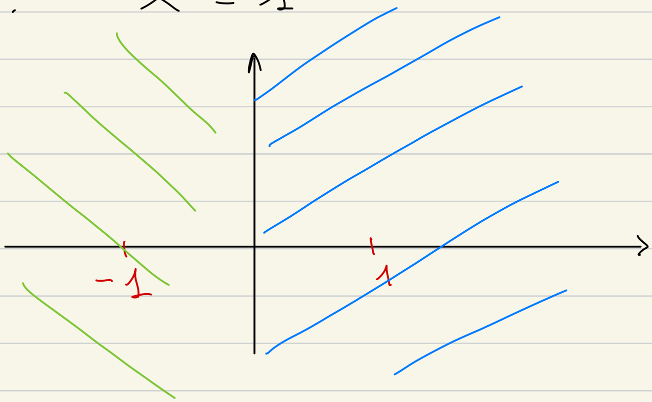
$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$



Regioni di attrazione per il metodo di Newton

Esempio: $x^2 = 1$



Esempio $x^3 = 1$

Vedere l'esempio frattale_cubico.py in python.