LOGICA MATEMATICA
A.A. 2021/2022

ESERCIZI SU
LOGICA PROPOSIZIONALE

Esercizio 0.1. Stabilire la complessità delle seguenti formule.

(a) $(((\neg p) \wedge q) \wedge (\neg q))$.
(b) $((p \wedge q) \wedge (r \wedge s))$.
(c) $((p \wedge q) \wedge (\neg r))$.

1. Soddisfacibilità, conseguenza logica

Esercizio 1.1. Stabilire, mediante le tavole di verità, quali proposizioni sono tautologiche, quali contraddittorie, quali soddisfacibili.

(a) $\neg(A \to A)$.
(b) $A \to (B \vee A)$.
(c) $(A \vee B) \to (\neg A \wedge C)$.
(d) $A \to B$.
(e) $(A \leftrightarrow A) \to (B \leftrightarrow \neg B)$.
(f) $P \to P$.
(g) $\bot \to P$.
(h) $(\neg P \to P) \to P$.
(i) $\neg\neg P \to P$.
(j) $P \to \neg\neg P$.
(k) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \to \neg Q)$.
(l) $(P \wedge Q) \to (P \to Q)$.
(m) $(P \vee Q) \to (P \to Q)$.

Esercizio 1.2. Stabilire quali dei seguenti insiemi di formule è soddisfacibile, nel senso che c'è una valutazione delle lettere proposizionali che rende tutte le formule vere.

(a) $A \to B, \quad (A \vee B) \wedge \neg(A \vee B)$.
(b) $C \to B, \quad A \vee \neg C, \quad \neg(C \wedge A), \quad C$.
(c) $a \to b, \quad b \to c, \quad c \to d, \quad d \to \neg a$.
(d) $a_0 \to b_0, \quad a_0 \wedge a_1 \to b_0 \vee b_1, \quad a_0 \wedge a_1 \wedge a_2 \to b_0 \vee b_1 \vee b_2, \quad \ldots$
(e) $\neg(\neg B \vee A), \quad A \vee \neg C, \quad B \to \neg C$.
(f) $\neg a \wedge b \to c, \quad a \to (\neg a \to b), \quad a \leftrightarrow \neg b$.

Esercizio 1.3. Usando le tavole di verità, stabilire se le seguenti conseguenze logiche sono corrette.

(a) $p \vee q \vdash p \wedge q$.
(b) $p \wedge q \vdash p \vee q$.

Date: 14 ottobre 2022.

(c) $p \to q \wedge r \vdash (p \to q) \to r$.
(d) $p \vee (\neg q \wedge r) \vdash (q \vee \neg r) \to p$.
(e) $p \to \neg p \vdash p$.
(f) $p \to (q \to r) \vdash (p \to q) \to r$.
(g) $(p \to q) \to r \vdash p \to (q \to r)$.
(h) $\vdash p$.

Esercizio 1.4. Usando le tavole di verità, stabilire se le seguenti coppie di formule proposizionali sono logicamente equivalenti.

(a) $(A \to B) \to A$ e A.
(b) $A \to B$ e $B \to A$.
(c) $A \to B$ e $\neg B \to \neg A$.
(d) $A \leftrightarrow B$ e $(A \to B) \wedge (B \to A)$.
(e) $\neg A \vee B$ e $\neg B \vee A$.
(f) $\neg(A \leftrightarrow B)$ e $A \leftrightarrow \neg B$.
(g) $A \vee (B \leftrightarrow C)$ e $(A \vee B) \leftrightarrow (A \vee C)$.
(h) $A \to (B \leftrightarrow C)$ e $(A \to B) \leftrightarrow (A \to C)$.
(i) $A \wedge (B \leftrightarrow C)$ e $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge C)$.
(j) $A \to B$ e $\neg A \vee B$.
(k) $A \to B$ e $\neg(A \wedge \neg B)$.
(l) $\neg(P \wedge Q)$ e $\neg P \vee \neg Q$ (sì: è una delle due leggi di De Morgan).
(m) $\neg(P \vee Q)$ e $\neg P \wedge \neg Q$ (sì: è l'altra delle due leggi di De Morgan).

Esercizio 1.5. Si stabilisca se i seguenti insiemi di formule proposizionali sono coerenti.

(a) $\{\varphi \to \psi, \varphi, \psi\}$.
(b) $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$.

Esercizio 1.6. (Esercizio 2.65, p. 39) Dimostrare che, se Σ è un insieme di formule massimalmente coerente, allora per ogni coppia di formule φ, ψ vale che $\varphi \to \psi \in \Sigma$ sse $\varphi \notin \Sigma$ o $\psi \in \Sigma$.

Esercizio 1.7. Si mostri che $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$ sse $\varphi \vdash \psi \to \sigma$.

Esercizio 1.8. Si verifichi che, se $F \to G$ è una tautologia e gli insiemi di variabili in F e G sono disgiunti, allora F è insoddisfacibile oppure G è una tautologia.

2. Riduzione a forma normale

Ricorda che una formula proposizionale φ è detta in *forma normale*

- *congiuntiva* se $\varphi = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k$, dove ciascun ψ_i è una disgiunzione di variabili proposizionali e negazioni di variabili proposizionali.
- *disgiuntiva* se $\varphi = \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_k$, dove ciascun ψ_i è una congiunzione di variabili proposizionali e negazioni di variabili proposizionali.

Esercizio 2.1. Per ognuna delle seguenti formule proposizionali, scriverne una equivalente in forma normale congiuntiva e una equivalente in forma normale disgiuntiva (alcune sono già scritte in forma normale congiuntiva e/o disgiuntiva).

(a) $\neg a \leftrightarrow b$.
(b) $a \wedge (b \vee c)$.
(c) $((a \vee b) \wedge c) \vee d$.
(d) $a \vee b$.

(e) $(a \vee b) \to c$.
(f) $a \wedge (a \to b)$.
(g) $(a \to b) \wedge (b \to a)$.
(h) $(a \wedge b) \vee (c \wedge d)$.
(i) $\neg(a \to b) \vee (\neg a \wedge c)$.
(j) $a \leftrightarrow ((b \wedge \neg a) \vee c)$.
(k) $(a \vee b) \wedge (\neg b \vee c)$.
(l) $\neg a \vee (b \to \neg c)$.
(m) $(a \wedge \neg b) \vee (a \wedge c)$.
(n) $(a \vee b) \leftrightarrow \neg c$.
(o) $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
(p) $((\varphi \to \psi) \to \psi) \to \psi$.
(q) $(\varphi \to (\varphi \wedge \neg\psi)) \wedge (\psi \to (\psi \wedge \neg\varphi))$.

3. Applicazioni della compattezza

Esercizio 3.1. È facile vedere che ognin insieme parzialmente ordinato su un insieme finito può essere esteso a un ordine totale. Si utilizzi il teorema di compattezza per mostrare che questo risultato è vero anche per insiemi infinti.

4. Deduzione naturale proposizionale

Per ottenere una deduzione naturale, un metodo che solitamente funziona è provare a dimostrare in modo informale ciò che bisogna dimostrare, e poi formalizzarlo. Quindi bisogna partire dalla domanda: "Se volessi dimostrare questo fatto, cosa farei?". Solitamente le difficoltà sono date dall'utilizzo del ragionamento per assurdo.

Esercizio 4.1. Utilizzando le regole della deduzione naturale, produrre derivazioni per i seguenti fatti:

(a) $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$.
(b) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$.
(c) $\neg\psi \to \neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$.
(d) $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$.
(e) $\varphi \wedge \psi \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.
(f) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.
(g) $\bot \vdash \varphi$.
(h) $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$.
(i) $p \wedge q \vdash p \vee q$.
(j) $p \vee q \vdash q \vee p$.
(k) $\varphi \vee \psi, \psi \to \sigma \vdash \varphi \vee \sigma$.
(l) $\varphi \to (\psi \to \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi \to \chi)$.
(m) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma))$.
(n) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)$.
(o) $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$.
(p) $\varphi \to (\psi \to \sigma), \varphi, \neg\sigma \vdash \neg\psi$.
(q) $(p \to q) \wedge (q \to p) \vdash (p \vee q) \to (p \wedge q)$.
(r) $(p \vee q) \to (p \wedge q) \vdash (p \to q) \wedge (q \to p)$.
(s) $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$.
(t) $(q \to r) \wedge (q \vee p) \vdash (p \to q) \to (r \wedge q)$.

(u) $p \to q, p \wedge \neg q \vdash r$.
(v) $\vdash (p \to q) \to ((p \wedge r) \to (q \wedge r))$.
(w) $p \to (q \wedge r) \vdash (p \to q) \wedge (p \to r)$.
(x) $p \to (p \to q), p \vdash q$.
(y) $p \to (q \to r) \vdash q \to (p \to r)$.
(z) $\neg p \vee q \vdash p \to q$.

Bozza di soluzione. Segnalo dove si usa il ragionamento per assurdo: in (c), nell'implicazione $\to$ di (d), in (f), in (g) (btw, in alcuni testi $\perp \vdash \varphi$ viene presa come regola di eliminazione di $\perp$ (in analogia alla regola di eliminazione di $\vee$)), in (h) (per dedurre ψ da $\perp$), in (k) (per dedurre ψ da $\perp$), in (u) (per dedurre r da $\perp$), in (z) (per dedurre q da $\perp$).

Esercizio 4.2. Utilizzando le regole della deduzione naturale, produrre una derivazione per
$$\neg\neg(p \wedge q) \vdash p$$
e stabilire la lunghezza della derivazione trovata.

5. Qualche indovinello

Segnalo alcuni indovinelli collegato alla logica proposizionale. Provare a risolverli non è un modo efficiente per prepararsi all'esame, quindi date più importanza agi altri esercizi. Però è più divertente.

L'ultimo di questi indovinelli (Esercizio 5.4) ha ricevuto il titolo di "indovinello più difficile del mondo" (almeno secondo Wikipedia). Gli indovinelli precedenti sono utili per risolverlo.

Esercizio 5.1. Un certo stato è abitato solamente da veritieri (= persone che dicono sempre la verità) e bugiardi (= persone che mentono sempre). Inoltre, le persone rispondono solo a domande *con risposta sì o no.* Un turista arriva a un bivio in cui una strada porta alla capitale e l'altra no. Non c'è alcuna indicazione su quale strada prendere, ma c'è un nativo al bivio. Quale domanda alla quale rispondere con sì o no potrebbe fare il turista per determinare quale strada prendere?

Suggerimento: Sia
$$P \coloneqq \text{“Sei un veritiero.”}$$
e sia
$$Q \coloneqq \text{“Il bivio di sinistra porta alla capitale.”.}$$
Costruire, con l'aiuto di un'opportuna tavola di verità, una formula proposizionale φ con lettere proposizionali P e Q tale per cui la risposta del nativo alla domanda "φ?" sia "sì" se e solo se Q è vera.

Esercizio 5.2. Un turista si reca in uno stato i cui abitanti parlano una lingua in cui le parole "sì" e "no" si dicono "ja" e "da", ma il turista non sa quale di questi termini corrisponda a "sì" e quale a "no". Nonostante i nativi capiscano la lingua del turista, essi parlano sempre nella propria lingua. Il turista arriva a un bivio in cui una strada porta alla capitale e l'altra no. Non c'è alcuna indicazione su quale strada prendere, ma c'è un nativo al bivio. Quale domanda alla quale rispondere con sì o no potrebbe fare il turista per determinare quale strada prendere?

Suggerimento: Sia
$$R \coloneqq \text{“Il termine “ja” della vostra lingua corrisponde al termine “sì” nella mia lingua.”}$$

e sia

$$S \coloneqq \text{ “Il bivio di sinistra porta alla capitale.”.}$$

Costruire, con l’aiuto di un’opportuna tavola di verità, una formula proposizionale ψ con lettere proposizionali R e S tale per cui la risposta del nativo alla domanda “ψ?” sia “ja” se e solo se S è vera.

Esercizio 5.3. In un certo stato ci sono due tipi di persone: veritieri (che dicono sempre la verità), e imprevedibili (che rispondono il vero o il falso in modo casuale). Un turista si trova a un bivio in cui una strada porta alla capitale e l’altra no. Al bivio ci sono tre nativi: il turista sa che uno si chiama Valerio, uno Marco e uno Ivo, e che Valerio e Marco sono veritieri, mentre Ivo è imprevedibile, ma non sa chi sia chi. Come può il turista, ponendo tre domande dalla risposta “sì o no”, stabilire il nome di ciascuno?

(Non è necessario porre le domande a persone diverse. Si può decidere una domanda e l’interlocutore a seconda delle risposte avute in precedenza.)

Esercizio 5.4. (L’indovinello più difficile del mondo secondo Wikipedia (https://it.wikipedia.org/wiki/L%27indovinello_pi%C3%B9_difficile_del_mondo).) Tre oracoli divini A, B, e C sono chiamati, in un qualche ordine, Verace, Mendace e Imprevedibile. Verace dice sempre il vero, Mendace dice sempre il falso, mentre Imprevedibile decide se essere sincero o meno in modo completamente casuale. L’obiettivo del gioco è determinare le identità di A, B, e C ponendo loro tre domande a cui è possibile rispondere con un "sì" o con un "no". Ogni domanda deve essere posta a uno solo degli oracoli, che, pur comprendendo l’italiano, risponderà sempre nella propria lingua con le parole “da” o “ja”. Non si sa quale di questi termini corrisponda a “sì” e quale a “no”.

Suggerimento: la soluzione è la stessa di Esercizio 5.3, ma ciascuna domanda va modificata come negli Esercizi 5.1 e 5.2.