**LOGICA MATEMATICA**
**A.A. 2021/2022**

**ESERCIZI SU**
**LOGICA DEL PRIM'ORDINE**

## 1. Formalizzazioni al prim'ordine

**Esercizio 1.1.** Formalizzare al prim'ordine la classe dei gruppi.

**Esercizio 1.2.** Formalizzare al prim'ordine la classe degli ordini parziali.

**Esercizio 1.3.** Formalizzare al prim'ordine la classe dei grafi direttati. (per grafi direttati intendiamo che ogni arco ha una direzione; inoltre ammettiamo al più un arco tra due nodi; inoltre ammettiamo che ogni nodo possa avere o possa non avere un arco verso sè stesso.)

**Esercizio 1.4.** Si consideri il laguaggio degli ordini parziali. Si definiscano delle formule che esprimano:

(a) $x$ è il massimo;
(b) $x$ è massimale;
(c) $x$ è strettamente minore di $y$;
(d) $z$ è l'inf di $x$ e $y$.
(e) non c'è elemento strettamente compreso tra $x$ e $y$.

**Esercizio 1.5.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esibire un enunciato al primo ordine che esprima il fatto che in una struttura ci sono almeno $n$ elementi.

**Esercizio 1.6.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esibire un enunciato al primo ordine che esprima il fatto che in una struttura ci sono al massimo $n$ elementi.

**Esercizio 1.7.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esibire un enunciato al primo ordine che esprima il fatto che in una struttura ci sono esattamente $n$ elementi.

**Esercizio 1.8.** Fornire un'assiomatizzazione al prim'ordine (con infiniti assiomi) per ciascuna delle seguenti classi:

(a) gruppi privi di torsione;
(b) grafi aciclici (per grafi intendiamo i grafi direttati, cioè ogni arco ha una direzione; inoltre ammettiamo al più un arco tra due nodi.).

**Esercizio 1.9.** (a) Mostrare che, data una struttura finita $\mathfrak{A}$ per un linguaggio finito, "essere isomorfo ad $\mathfrak{A}$" è definibile con un enunciato al prim'ordine.
(b) Mostrare che esiste una struttura infinita $\mathfrak{A}$ per un linguaggio (finito o infinito) tale che "essere isomorfo ad $\mathfrak{A}$" non è definibile da alcun insieme di enunciati al prim'ordine. *Suggerimento*: si utilizzi il teorema di Löwenheim-Skolem all'insù.

---

*Date*: 10 novembre 2022.

**Esercizio 1.10.** Stabilire in quali dei seguenti casi il termine $f(a,u)$ ($a$ simbolo di costante, $u$ variabile, $f$ simbolo di funzione ternario) è sostituibile per $x$ in $\varphi$, e scrivere $\varphi[f(a,u)/x]$. ($P$, $R$, $S$ sono simboli di predicati)

(a) $f(x,x) = a$.
(b) $\exists x(f(x,x) = x)$.
(c) $P(x) \wedge \exists x R(x,y)$.
(d) $\exists u(S(x,y,u))$.
(e) $\exists x \exists u(f(x,u) = f(u,x))$.
(f) $S(x,y,u)$.

Per ciascuna delle seguenti formule stabilire se è in forma normale prenessa, quali sono le variabili libere, se è un enunciato.

(a) $\exists x(A(x,y) \wedge B(x))$.
(b) $\exists x(\exists y(A(x,y) \to B(x)))$.
(c) $(\neg\exists x(\exists y A(x,y))) \to B(x)$.
(d) $(\exists x A(x,y)) \wedge B(x)$.
(e) $\forall x(\neg\exists y A(x,y))$.
(f) $\exists x A(x,x) \wedge \exists y B(y)$.

**Esercizio 1.11.** Si trovi un insieme coerente di enunicati in un certo linguaggio del prim'ordine che non facciano uso del simbolo di uguaglianza e tale che ogni modello abbia cardinalità almeno 2.

**Esercizio 1.12.** Esiste un'assiomatizzazione al prim'ordine della classe dei gruppi numerabili?

**Esercizio 1.13.** Esibire un linguaggio al prim'ordine e un insieme $\Gamma$ di enunciati che abbia esattamente un modello infinito numerabile (a meno di isomofismi).

*Bozza di soluzione.* Prendo come linguaggio il linguaggio vuoto. Non impongo alcun assioma. Isomorfismo tra modelli vuol dire biezione.

Soluzione alternativa: $\mathbb{Q}$ è l'unico insieme totalmente ordinato numerabile denso senza massimo e minimo. (Cantor's isomorphism theorem.)

Soluzione alternativa: l'algebra di Boole libera su numerabili generatori è l'unica algebra di Boole numerabile senza atomi.

## 2. Conseguenza logica

**Esercizio 2.1.** Si consideri un linguaggio con un solo simbolo, $R$, di predicato e di arietà 2. Si trovi un insieme finito di enunciati in tale linguaggio che abbia un modello infinito ma che non abbia alcun modello finito.

**Esercizio 2.2.** Sia $\Gamma$ l'insieme di formule

- $\forall x \exists y R(x,y)$.
- $\forall x \forall y(R(x,y) \to \neg R(y,x))$.
- $\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$.

Trovare un modello di $\Gamma$. Esiste un modello finito?

**Esercizio 2.3.** Si consideri un linguaggio con un simbolo di costante 0 e un simbolo di funzione 1-ario $s$.

(a) Si trovi un insieme finito $\Gamma$ di enunciati al prim'ordine in tale linguaggio che abbia un modello infinito ma che non abbia alcun modello finito. Si trovino due modelli di $\Gamma$ non isomorfi.
(b) Esiste un insieme (possibilmente infinito) di enunciati al prim'ordine che abbia come unico modello (a meno di isomorfismi) l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali con l'elemento 0 e la funzione successore $s$?

**Esercizio 2.4.** Si consideri un linguaggio $\mathcal{L}$ del prim'ordine con un simbolo di predicato unario $P$ e un simbolo di predicato binario $M$. Sia $\mathfrak{A}_0$ la struttura per $\mathcal{L}$ con insieme soggiacente $A_0 = \{3, 5\}$ in cui $P(x) =$ "$x$ è pari", e $M(x, y) =$ "$x \leq y$" . Siano $a$ e $b$ variabili e sia $\nu_0$ una interpretazione delle variabili in $A_0$ tale che $\nu_0(a) = 3$, $\nu_0(b) = 5$. Per ciascuna formula $\varphi$ tra le seguenti, si stabilisca

(i) se $\mathfrak{A}_0, \nu_0 \vDash \varphi$.
(ii) se $\mathfrak{A}_0 \vDash \varphi$.
(iii) se $\vDash \varphi$.
(iv) se $\varphi$ è soddisfacibile.

Le formule da considerare (con variabili libere contenute in $\{a, b\}$), sono:

(a) $\forall x M(a, x)$.
(b) $\forall x M(b, x)$.
(c) $\neg P(a)$.
(d) $\exists x M(a, x)$.
(e) $\exists x \forall y M(x, y)$.
(f) $\forall x(M(a, x) \to M(x, b))$.
(g) $\forall x(P(x) \to \neg P(x))$.
(h) $\forall x \forall y(M(x, y) \to \neg M(y, x))$.
(i) $\neg(M(a, b) \leftrightarrow M(b, a))$.
(j) $\forall x(M(b, x) \vee M(x, a))$.
(k) $\forall x \exists y M(x, y)$.
(l) $\exists y P(y)$.
(m) $\forall x \neg P(x)$.
(n) $\exists x M(b, x)$.
(o) $\forall x(P(x) \to M(a, x))$.
(p) $\forall x \exists y M(y, x)$.

**Esercizio 2.5.** Produrre controesempi che mostrino che le seguenti formule non sono logicamente valide.

(a) $(\forall x \exists y R(x, y)) \to \exists y R(y, y)$.
(b) $P(a) \vee \neg P(b)$.
(c) $(\exists x \exists y R(x, y)) \to \exists y R(y, y)$.
(d) $\exists x(R(a, x) \vee R(b, x))$.
(e) $(\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)) \to (\exists x(P(x) \leftrightarrow Q(x)))$.
(f) $(\exists x(P(x) \to Q(x))) \to ((\exists x P(x)) \to (\exists x Q(x)))$.

**Esercizio 2.6.** Si esibisca un insieme non soddisfacibile di enunciati soddisfacibili.

**Esercizio 2.7.** Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio del prim'ordine, e siano $\varphi$ e $\psi$ formule in tale linguaggio. Dimostra che la condizione (i) qui sotto implica la (ii), ma in generale non vale il viceversa.

(i) Per ogni struttura $\mathfrak{A}$, se $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ allora $\mathfrak{A} \vDash \psi$.

(ii) Se $\models \varphi$ allora $\models \psi$.

**Esercizio 2.8.** Per ognuna dei seguenti enunciati, mostrare che è soddisfacibile ma non logicamente valido.

(a) $\forall x \exists y R(x,y) \land \neg \forall x P(x)$.
(b) $\forall x P(x) \lor \forall x \neg P(x)$.
(c) $P(c) \to \neg P(c)$.
(d) $\forall x \exists y R(x,y) \to \exists y \forall x R(x,y)$.
(e) $\forall x (P(x) \lor Q(x)) \to \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$.
(f) $((\exists x P(x)) \to P(c)) \land \neg P(c)$.
(g) $P(c) \to P(a)$.

**Esercizio 2.9.** Siano $\varphi$ e $\psi$ le formule $\forall x (R(a,x) \land \exists y R(x,y))$ e $\forall x R(x,x)$ rispettivamente. Mostrare che $\varphi \not\models \psi$ e $\psi \not\models \varphi$.

**Esercizio 2.10.** Nelle seguenti domande si consideri come linguaggio il linguaggio dei gruppi.

(a) $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Th}(\mathbb{Z})$? (Consideriamo $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ come gruppi additivi.)
(b) $S_{\mathbb{N}} \in \mathrm{ModTh}(\{\text{gruppi ciclici}\})$? ($S_{\mathbb{N}}$ è il gruppo di permutazioni su $\mathbb{N}$.)
(c) Esiste un gruppo $G$ tale che $\mathrm{Th}(G) = \mathrm{Th}(\{\text{gruppi}\})$?
(d) $\mathbb{Z} \in \mathrm{Th}(\{ \text{ gruppi ciclici finiti } \})$

**Esercizio 2.11.** Si consideri il linguaggio vuoto. Mostrare che

$$\mathrm{Th}(\{\text{strutture finite}\}) = \mathrm{Th}(\{\text{strutture}\}).$$

(Una struttura per il linguaggio vuoto è semplicemente un insieme.)

**Esercizio 2.12.** La teoria dei gruppi è un'estensione conservativa della teoria dei monoidi?

**Esercizio 2.13.** Fornire un esempio di teoria non Henkin.

**Esercizio 2.14.** Moatrare che, per i gruppi, la proprietà di essere ciclico non è esprimibile al prim'ordine.

*Bozza di soluzione.* Löwenheim-Skolem.

## 3. Forme normali prenesse

Ricorda: una formula $\varphi$ è in *forma normale prenessa* se tutti i quantificatori in $\varphi$ (se ce ne sono) appaiono all'inizio della formula, in altre parole se è della forma

$$\spadesuit_1 x_1 \dots \spadesuit_n x_n (\psi)$$

dove, per $i \in \{1, \dots, n\}$, $\spadesuit_i \in \{\forall, \exists\}$, e $\psi$ non ha quantificatori.

**Esercizio 3.1.** Riscrivere le seguenti formule in forma normale prenessa.

(a) $(\neg \exists z Q(x,y,z)) \lor (\forall z \exists w P(w,x,y,z))$.
(b) $(\forall x P(x)) \to Q(y)$.
(c) $\exists x (P(x) \land \exists x\, Q(x))$.
(d) $P(x,y) \land \forall x\, Q(x)$.
(e) $\exists x \Big( P(x) \land \forall y \big( Q(x) \land \exists x\, R(x,y) \big) \Big)$.
(f) $\exists z (S(y,z) \land \exists y (S(z,y) \land \forall z (S(x,z) \land S(z,y))))$.
(g) $(\forall x (R(x) \to P(x,y))) \to ((\exists y R(x)) \to (\exists z P(y,z)))$.
(h) $(\exists x R(x,y)) \to (P(x) \to \neg (R(x,u)))$.
(i) $(\forall z (R(x,z) \land R(x,y))) \to \exists w (R(x,w) \land R(y,w) \land R(z,w))$.

## 4. Deduzione naturale al prim'ordine

**Esercizio 4.1.** Utilizzando le regole della deduzione naturale, produrre derivazioni per i seguenti fatti (le lettere $x$, $y$, $z$ sono variabili, le lettere $a$, $b$, $c$ sono costanti):

(a) $\vdash\ \forall x \neg (F(x) \wedge \neg F(x))$.
(b) $R(a), \forall x(R(x) \to S(x)) \vdash \exists x S(x)$.
(c) $\exists x R(x), \forall x(R(x) \to S(x)) \vdash \exists x S(x)$.
(d) $\forall x R(x) \vdash \forall y R(y)$.
(e) $\exists x R(x) \vdash \exists y R(y)$.
(f) $\neg \exists x \neg R(x) \vdash \forall x R(x)$.
(g) $\neg \forall x R(x) \vdash \exists x \neg R(x)$.
(h) $\exists x \neg R(x) \vdash \neg \forall x R(x)$.
(i) $\exists x \exists y R(x,y) \vdash \exists y \exists x R(x,y)$.
(j) $\forall x(F(x) \to G(a)) \vdash (\exists x F(x)) \to G(a)$.
(k) $(\exists x F(x)) \to G(a) \vdash \forall x(F(x) \to G(a))$.
(l) $\exists x(P \to R(x)) \vdash P \to \exists x R(x)$.
(m) $\exists x \forall y A(x,y) \vdash \forall y \exists x A(x,y)$.
(n) $\vdash \exists x \exists y (R(x,y) \to R(y,x))$.
(o) $\exists x(R(x) \to \forall y R(y))$ (in ["Logic and Structure", van Dalen], è scritto che è istruttivo pensare a $R(x)$ come "$x$ beve").
(p) $\forall x(F(x) \vee \neg F(x))$.
(q) $\forall x F(x) \wedge \forall x G(x)\ \vdash\ \forall x(F(x) \wedge G(x))$.
(r) $\forall x \exists y \forall z R(x,y,z)\ \vdash\ \forall x \forall z \exists y R(x,y,z)$.
(s) $\forall x \forall y R(x,y) \vdash \forall x(R(x,x) \wedge \forall y R(y,x))$.
(t) $\forall x \forall y R(x,y) \vdash \forall x \forall y(R(x,y) \wedge R(y,x))$.
(u) $\exists x P(x) \vee \exists y Q(y) \vdash \exists z(P(z) \vee Q(z))$.
(v) $\forall x(\exists y P(y) \to Q(x)) \vdash \forall x \exists y(P(y) \to Q(x))$.
(w) $\forall x \neg \forall y(P(x,y) \to Q(x,y)) \vdash \forall x \exists y P(x,y)$.
(x) $\neg \forall x \neg \forall y R(y,x) \vdash \forall x \neg \forall y \neg R(x,y)$.
(y) $\forall x(F(x) \to G(x)), \forall x F(x) \vdash \exists x G(x)$.
(z) $\forall x(F(x) \to \neg G(x)), \exists x G(x) \vdash \exists x \neg F(x)$.

**Esercizio 4.2.** É vero che $R(x) \vdash \forall x R(x)$?

**Esercizio 4.3.** Una variante del paradosso di Russell può essere esposta così:

Ogni barbiere rade esattamente quelli che non si radono da sé. Perciò non ci sono barbieri.

Semplifichiamola a

Nessuno rade esattamente chi non si rade da sè.

Si formalizzi quest'ultimo enunciato al prim'ordine e lo si dimostri con la derivazione naturale. (Utilizza un simbolo di predicato binario $R$ per esprimere "$x$ rade $y$" come $R(x,y)$.) (Interpretando $R(x,y)$ come $x \ni y$ nella struttura i cui elementi sono gli insiemi (trascurando problemi di grossezza), l'affermazione si può riformulare come "Non esiste l'insieme degli insiemi che non si appartengono".)

**Esercizio 4.4.** Si dimostri con la deduzione naturale che, nel detto "chi ha i denti non ha il pane, e chi ha il pane non ha i denti", si sta dicendo due volte la stessa cosa, cioè le seguenti affermazioni sono logicamente equivalenti:

(a) $\forall x(D(x) \to \neg P(x))$ (chi ha i denti non ha il pane).
(b) $\forall x(P(x) \to \neg D(x))$ (chi ha ha il pane non ha i denti).

## 5. Applicazioni della compattezza

**Esercizio 5.1.** Mostra che le seguenti classi non sono assiomatizzabili al prim'ordine:

(a) gruppi finiti;
(b) gruppi di torsione;
(c) grafi connessi.

Nota che in (b) e (c) si utilizzano delle formule con variabili libere.

*Bozza di soluzione.* Per (c): $\varphi_n :=$ la distanza da $x$ a $y$ è almeno $n$ (cioè non esistono cammini di lunghezza meno di $n$).

Note: per dimostrare la non assiomatizzabilità al prim'ordine di una certa properietà $P$, si utilizza praticamente sempre il teorema di compattezza; si scrive "non $P$" come una congiunzione di infiniti assiomi $\{\varphi_i\}_i$ al prim'ordine tali che ogni sottoinsieme finito di $\{\varphi_i\}_i$ non contraddice $P$ (ma la loro congiunzione sì)...

**Esercizio 5.2.** Mostrare che la classe dei gruppi privi di torsione non è finitamente assiomatizzabile.

**Esercizio 5.3.** Mostrare che la classe dei grafi aciclici non è finitamente assiomatizzabile.

**Esercizio 5.4.** Siano $K_1$ e $K_2$ teorie in uno stesso linguaggio $\mathcal{L}$. Si assuma che ogni struttura $M$ per $\mathcal{L}$ sia un modello di $K_1$ sse non è un modello di $K_2$. Si mostri che $K_1$ e $K_2$ sono finitamente assiomatizzabili.

## 6. Ultraprodotti

**Esercizio 6.1.** Esiste un'ultrapotenza infinita di un'insieme di due elementi?

**Esercizio 6.2.** Sia $A$ un insieme finito. Sia $I$ un insieme e $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su $I$. Mostrare che l'immersione canonica

$$A \to \prod_{i\in I} A/\mathcal{U}$$

è biiettiva.

**Esercizio 6.3.** Mostrare che, data una struttura finita $A$, ogni ultrapotenza di $A$ è isomorfa ad $A$.

**Esercizio 6.4.** Mostrare che la classe degli insiemi ben ordinati non è assiomatizzabili al prim'ordine. (Insieme ben ordinato := insieme totalmente ordinato ogni sottoinsieme non vuoto del quale ha minimo.)

*Bozza di soluzione.* Considera un'ultraprotenza $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}/\mathcal{F}$, con $\mathcal{F}$ che estende i cofiniti e considera la successione di elementi

$$a_j = [(\underbrace{0,\dots,0}_{j \text{ volte}}, 1, 2, 3, 4, \dots)].$$

**Esercizio 6.5.** Mostrare (usando gli ultraprodotti) che la classe dei gruppi finiti non è assiomatizzabile al prim'ordine.

*Bozza di soluzione.* Trovare un ultrapodotto infinito di gruppi finiti. Sia $C_n$ un gruppo ciclico di ordine $n$, generato da $g_n$. Considera $(\prod_{n\in\mathbb{N}} C_n)/\mathcal{F}$, con $\mathcal{F}$ ultrafiltro che estende i cofiniti. Considera gli elementi

$$\begin{gathered} t_1 \coloneqq [(g_1^1, g_2^1, g_3^1, g_4^1, \dots)], \\ t_2 \coloneqq [(g_1^2, g_2^2, g_3^2, g_4^2, \dots)] \\ t_3 \coloneqq [(g_1^3, g_2^3, g_3^3, g_4^3, \dots)] \\ \vdots \end{gathered}$$

**Esercizio 6.6.** Mostrare (usando gli ultraprodotti) che la proprietà di essere un campo (commutativo) di caratteristica zero non è una proprietà esprimibile al prim'ordine.