LOGICA MATEMATICA
A.A. 2021/2022

ESERCIZI SU
ALGEBRE DI BOOLE

Esercizio 0.1. Sia $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k \in \mathbb{N}$ prodotto di primi $p_1, \dots, p_k$ distinti. Sia $D = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ divide } n\}$. Per ogni $a \in D$, sia $\overline{a} := \frac{n}{a}$. $(D, \mathrm{mcd}, \mathrm{mcm}, ^{-}, 1, n)$ è un'algebra di Boole (non si richiede di dimostrarlo). Si trovi un insieme X ed un isomorfismo tra $\mathcal{P}(X)$ e D.

Bozza di soluzione. $X = \{p_1, \dots, p_k\}$.

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{P}(X) &\longrightarrow D \\ A &\longmapsto \prod_{p \in A} p. \end{aligned}$$

Esercizio 0.2. Mostrare che l'insieme

$$\{m \in D \mid m \text{ divide } 4\}$$

ordinato per divisibilità non è un'algebra di Boole.

Esercizio 0.3. Sia X un insieme infinito[1]. Sia

$$B := \{Y \subseteq X \mid Y \text{ è finito oppure cofinito}\}$$

("Y *cofinito*" vuol dire che $X \setminus Y$ è finito). Dimostrare che B è una sottalgebra dell'algebra di Boole di $\mathcal{P}(X)$. (B è chiamata *algebra dei finiti e cofiniti.*)

Esercizio 0.4.
(a) Si esibisca un'algebra di Boole di 16 elementi.
(b) Si esibisca un'algebra di Boole di cardinalità del continuo.
(c) Si esibisca un'algebra di Boole di cardinalità numerabile.
(d) È vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un'algebra di Boole di cardinalità n?
(e) Si mostri che, per ogni cardinale infinito κ, esiste un'algebra di Boole di cardinalità κ.
(f) È vero che ogni insieme infinito può essere dotato della struttura di algebra di Boole?

Esercizio 0.5. Sia $\langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ un'algebra di Boole. Dimostrare che

$$\begin{aligned} \varphi\colon \langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle &\longrightarrow \langle B, \vee, \wedge, \neg, 1, 0\rangle \\ x &\longmapsto \neg x \end{aligned}$$

è isomorfismo di algebre di Boole (non è necessario dimostrare che $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 1, 0\rangle$ è un'algebra di Boole). È un'automorfismo?

Date: 14 ottobre 2022.

[1] L'ipotesi di infinitezza non è davvero necessaria.

Esercizio 0.6. (a) Trovare un esempio di poset non reticolo.
(b) Trovare un esempio di reticolo limitato distributivo non complementato.
(c) Trovare un esempio di reticolo distributivo non limitato.
(d) Trovare un esempio di reticolo limitato complementato non distributivo.

Esercizio 0.7. Se un sottoinsieme B di un'algebra di Boole A contiene 0 e 1 ed è chiuso per $\wedge$ e $\vee$, ne segue che B è una sottalgebra di A?

Esercizio 0.8. Dare un esempio di sottalgebra B di un'algebra di Boole A e un sottoinsieme E di B tale che E ha un sup in A ma non in B.

Esercizio 0.9. Dare un esempio di sottalgebra B di un'algebra di Boole A e un sottoinsieme E di B tale che E ha un sup in B ma non in A.

1. Omomorfismi, congruenze, filtri e ultrafiltri

Esercizio 1.1. Sia X un insieme, e sia Y un suo sottoinsieme. Si mostri che la funzione

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(Y) \\ A &\longmapsto A \cap Y \end{aligned}$$

è un omomorfismo suriettivo. Qual è il kernel di r? La funzione

$$\begin{aligned} \iota\colon \mathcal{P}(Y) &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ A &\longmapsto A \end{aligned}$$

è un omomorfismo?

Esercizio 1.2. Si mostri che il kernel di un omomorfismo $f\colon A \to B$ di algebre di Boole è un filtro proprio se e solo se B non è un singoletto.

Esercizio 1.3. Siano $f, g\colon A \to B$ omomorfismi con stesso kernel. Segue che f e g sono uguali?

Esercizio 1.4. Sia X un insieme. Definisci la relazione $\sim$ su $\mathcal{P}(X)$ come segue: $A \sim B$ se e solo se A e B differiscono su al più un insieme numerabile di elementi, ossia la differenza simmetrica

$$(A \cap (X \setminus B)) \cup ((X \setminus A) \cap B)$$

è al più numerabile. Si dimostri che questa relazione è una congruenza. Se X è numerabile, quanti elementi ha il quoziente $\mathcal{P}(X)/{\sim}$?

Esercizio 1.5. Si stabilisca se la seguente frase è vera o falsa: Se $f\colon A \to B$ è una funzione da un reticolo A a un reticolo B tale che, per ogni $x, y \in A$, $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$, allora per ogni $x, y \in A$ si ha $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ e $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

Esercizio 1.6. Sia $f\colon A \to B$ una funzione monotona (i.e. $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$) tra algebre di Boole tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Si può concludere che f preserva $\wedge$ e $\vee$?

Esercizio 1.7. Sia $f\colon A \to B$ una funzione tra algebre di Boole che preserva $\vee$, $\wedge$, 0 e 1. Si mostri che f è un omomorfismo.

Esercizio 1.8. Siano A e B due algebre di Boole, e sia $f\colon A \to B$ una funzione che preserva $\vee$ e $\neg$. Si mostri che f è un omomorfismo.

Esercizio 1.9. Siano $f, g\colon A \to B$ due omomorfismi di algebre di Boole. Si definisca la funzione

$$\begin{aligned} f \vee g\colon A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \vee g(x). \end{aligned}$$

La funzione $f \vee g$ è un omomorfismo?

Esercizio 1.10. Si mostri che composizione di omomorfismi è omomorfismo.

Esercizio 1.11. Mostrare che la funzione inversa di un isomorfismo di algebre di Boole è un isomorfismo di algebre di Boole.

Esercizio 1.12. Si mostri che ogni filtro generato da un insieme finito è principale.

Esercizio 1.13. Si mostri che ogni filtro è l'intersezione dei filtri massimali che lo estendono.

Esercizio 1.14. Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon A \to C$ omomorfismi suriettivi (cioè epimorfismi) di algebre di Boole. Supponiamo $\ker f = \ker g$. Si mostri che esiste un isomorfismo $h\colon B \to C$ tale che $g = h \circ f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[d, dashed, "\exists h"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Esercizio 1.15. Trovare un insieme di variabili P e un insieme di formule proposizionali le cui variabili appartengono a P tali che $|\mathrm{LT}_\Gamma(P)| = 8$.

Esercizio 1.16. Sia X un insieme. Si mostri che

$$C \coloneqq \{Y \subseteq X \mid X \setminus Y \text{ è finito}\}$$

è un filtro di $\mathcal{P}(X)$. Sotto quali condizioni su X il filtro C è proprio?

Esercizio 1.17. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, si definisca

$$I_k \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}.$$

L'insieme

$$\{I_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

è un filtro di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

Esercizio 1.18. Sia X un insieme finito. Si mostri che ogni filtro di $\mathcal{P}(X)$ è principale.

Esercizio 1.19. Sia X un insieme infinito. Si mostri che esiste un filtro di $\mathcal{P}(X)$ non principale.

Esercizio 1.20. Sia X un insieme finito, con n elementi. Quanti filtri ammette $\mathcal{P}(X)$? Quante congruenze? Quanti ultrafiltri?

Esercizio 1.21. Sia X un insieme e U un ultrafiltro dell'algebra di Boole $\mathcal{P}(X)$. Mostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti.

(a) U è principale.
(b) Esiste un elemento $x \in X$ tale che $U = \{Y \subseteq X \mid x \in Y\}$.

Esercizio 1.22. Sia X un insieme e U un ultrafiltro dell'algebra di Boole $\mathcal{P}(X)$. Si mostri che le seguenti condizioni sono equivalenti.

(a) U non è principale.
(b) Ogni sottoinsieme $Y \subseteq X$ cofinito (cioè tale che $X \setminus Y$ è finito) appartiene a U.

Esercizio 1.23. Sia X un insieme infinito. Si consideri la sottalgebra di $\mathcal{P}(X)$

$$A \coloneqq \{Y \subseteq X \mid Y \textit{ è finito o cofinito}\}.$$

Si caratterizzino tutti gli ultrafiltri di A. Come si deduce dalla dimostrazione del Teorema 3.86 delle dispense (Rappresentazione di Stone), denotando con $\mathcal{U}(A)$ l'algebra delle parti dell'insieme degli ultrafiltri di A, l'algebra A è isomorfa a una sottalgebra A' di $\mathcal{P}(\mathcal{U}(A))$. Quali sono gli elementi di tale sottalgebra? (Si dia una descrizione più esplicita possibile.)

Esercizio 1.24. Mostrare che, se X è un insieme infinito, esiste un ultrafiltro non principale di $\mathcal{P}(X)$.

Esercizio 1.25. Sia X un insieme infinito. Quali sottoinsiemi di X appartengono ad ogni ultrafiltro non principale di $\mathcal{P}(X)$?

Esercizio 1.26. Si mostri che, se F è un filtro che non è un ultrafiltro, allora F è contenuto in almeno due ultrafiltri diversi.

Esercizio 1.27. Sia $\mathcal{F}$ un filtro proprio su A e sia B un sottoinsieme di A tale che $A \setminus B \notin \mathcal{F}$. Si mostri che esiste un filtro proprio $\mathcal{F}'$ tale che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ e $B \in \mathcal{F}$.

Esercizio 1.28. Sia S un sottoinsieme di un'algebra di Boole A, e sia $x \in A$. Si supponga che S abbia la finite intersection property. Si mostri che $A \cup \{x\}$ ha la finite intersection property oppure $A \cup \{\neg x\}$ ha la finite intersection property.

Esercizio 1.29. Sia $\{A_i \mid i \in I\}$ (con $I \neq \emptyset$) una catena di sottoinsiemi di un'algebra di Boole (cioè una collezione di sottoinsiemi totalmente ordinati per inclusione insiemistica). Si mostri che se per ogni $i \in I$ l'insieme A_i ha la finite intersection property allora anche l'unione $\bigcup_{i \in I} A_i$ ha la finite intersection property.

Esercizio 1.30. Si esibiscano un'algebra di Boole A e un sottoinsieme S con le seguenti proprietà: $0 \notin S$, per ogni $x, y \in S$ si ha $x \wedge y \neq 0$, ma S non ha la finite intersection property.

2. Algebre di Lindenbaum

Esercizio 2.1. Siano x e y variabili distinte.

(a) $[x] = [y]$ in $\mathrm{LT}_\emptyset(\{x, y\})$?
(b) $\neg([x] \wedge [y]) = \neg[x] \vee \neg[y]$ in $\mathrm{LT}_\emptyset(\{x, y\})$?
(c) $[x] \wedge [y] = [x]$ in $\mathrm{LT}_\emptyset(\{x, y\})$?
(d) $[x] \wedge [y] = [x]$ in $\mathrm{LT}_{\{x \to y\}}(\{x, y\})$?
(e) $[x] \to [y] = [y] \to [x]$ in $\mathrm{LT}_{\{x \vee y\}}(\{x, y\})$?
(f) $[x] \vee [y] = [x] \wedge [y]$ in $\mathrm{LT}_\emptyset(\{x, y\})$?

Esercizio 2.2. Sia P un insieme finito. Si stabilisca il numero di elementi dell'algebra di Lindenbaum-Tarski $\mathrm{LT}_\emptyset(P)$ in funzione del numero di elementi di P.

Esercizio 2.3. Si stabilisca il numero di elementi di un insieme X tale che $|\mathcal{P}(X)| = 4$. Si stabilisca il numero di elementi di un insieme P tale che $|\mathrm{LT}_\emptyset(P)| = 4$.

Esercizio 2.4. È vero che, per ogni algebra di Boole A finita, esiste un insieme P tale che $A \cong \mathrm{LT}_{\emptyset}(P)$?

Esercizio 2.5. È vero che, per ogni algebra di Boole A, esistono un insieme P e un insieme Γ di formule proposizionali con variabili appartenenti a P tale che $A \cong \mathrm{LT}_{\Gamma}(P)$?

Esercizio 2.6. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro di un'algebra di Lindenbaum $\mathrm{LT}_{\emptyset}(P)$. Si mostri che, per tutte le formule φ, ψ nelle variabili proposizionali in P,
- (a) $[\neg\varphi] \in \mathcal{U}$ se e solo se $[\varphi] \notin \mathcal{U}$.
- (b) $[\varphi \wedge \psi] \in \mathcal{U}$ se e solo se $[\varphi] \in \mathcal{U}$ e $[\psi] \in \mathcal{U}$.
- (c) Se $[\varphi], [\varphi \to \psi] \in \mathcal{U}$ allora $[\psi] \in \mathcal{U}$.

Esercizio 2.7. Qual è l'algebra libera generata dall'insieme vuoto?

Esercizio 2.8. Sia A l'algebra di Boole degenere (cioè A è un singoletto). Mostrare che non esiste alcun sottoinsieme X di A tale che A è liberamente generata da X.

Esercizio 2.9. Si mostri che, per ogni algebra di Boole B, esistono un'algebra libera A e un omomorfismo suriettivo $f\colon A \to B$.

Esercizio 2.10. Sia A un algebra di Boole. Si mostri che esiste un insieme P e un insieme Γ di formule proposizionali tali che A è isomorfo a $\mathrm{LT}_{\Gamma}(P)$.

Esercizio 2.11. Trovare un insieme di variabili P e un insieme di formule proposizionali Γ con variabili in P tale che $|\mathrm{LT}_{\Gamma}(P)| = 8$.

Esercizio 2.12. Mostrare che ogni algebra di Boole è isomorfa a $\mathrm{LT}_{\Gamma}(P)$ per qualche P e Γ. (Qui è ammesso prendere Γ incoerente per ottenere l'algebra di Boole di un solo elemento.)

Esercizio 2.13. Sia X un insieme (di variabili proposizionali). Mostrare che i seguenti insiemi sono in biezione.
- (a) $\{Y \mid Y \subseteq X\}$.
- (b) $\{\Sigma \mid \Sigma$ insieme massimalmente coerente di formule proposizionali con variabili in $X\}$.
- (c) $\{\mathcal{U} \mid \mathcal{U}$ ultrafiltro di $\mathrm{LT}_{\varnothing}(X)\}$.

3. Algebre atomiche

Esercizio 3.1. Sia B algebra di Boole finita, di cardinalità 2^n, dove n è il numero di atomi. Dimostra che qualunque insieme di $n-1$ atomi di B genera B.

Esercizio 3.2. Siano A un algebra di Boole, e sia B una sua sottalgebra (cioè $B \subseteq A$, e B è chiuso per le operazioni booleane). È vero che ogni atomo dell'algebra di Boole B è atomo dell'algebra di Boole A?

Esercizio 3.3. Siano B_1 e B_2 algebre di Boole finite, con $|B_1| = |B_2| = 2^n$. Quanti isomorfismi ci sono da B_1 a B_2?

Esercizio 3.4. Esibire un'algebra atomica che non sia completa (cioè che non ammette sup e inf arbitrari). (Tale algebra non può essere isomorfa a un'algebra delle parti, in quanto queste sono sempre complete.)

Esercizio 3.5. Sia $U := \{a, b, c\}$. Determinare il numero di sottalgebre di $\mathcal{P}(U)$.

Esercizio 3.6. Diciamo che un'algebra di Boole A è *densa* se per ogni $x, y \in A$ tali che $x < y$ esiste $z \in A$ tale che $x < z < y$. Si mostri che un'algebra di Boole è densa se e solo se non ha atomi.

4. Curiosità

Gli ultrafiltri possono essere usati per rispondere (negativamente) alla seguente domanda:

È vero che, per ogni gioco a turni (potenzialemente infiniti) tra due giocatori che preveda in ogni caso un vincitore e uno sconfitto (quindi senza possibilità di pareggiare) e che sia deterministico (cioè non c'è una componente randomica), esiste una strategia vincente per almeno uno dei due giocatori?

La risposta (abbastanza sorprendentemente) è no. Un gioco senza strategie vincenti è il seguente.

Si fissi un ultrafiltro non-principale U di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. A turno, il giocatore A e il giocatore B scelgono un numero naturale, con la condizione che esso sia strettamente maggiore di quelli scelti precedentemente. Indicando con a_i l'i-esimo numero scelto da A e con b_i l'i-esimo numero scelto da B, avremo una successione

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < b_3 < \dots$$

B vince se $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}([a_i + 1, b_i] \cap \mathbb{N}) \in U$, altrimenti vince A.

La dimostrazione del fatto che né A né B ha una strategia vincente si basa su un argomento di "rubare la strategia": se A avesse una strategia vincente, allora B potrebbe copiarla per ottenere una strategia vincente per sé (il che è assurdo perchè non possono avere entrambi strategie vincenti), e viceversa. Per maggiori dettagli, si veda il libro [Logic in games. Johan Van Benthem. 2014. M.I.T. Press., Example 5.1, p. 105].