

**LOGICA MATEMATICA**  
**A.A. 2021/2022**

**ESERCIZI SU**  
**ALGEBRE DI BOOLE**

**Esercizio 0.1.**

- (a) Esiste un'algebra di Boole di 16 elementi?
- (b) È vero che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , esiste un'algebra di Boole di cardinalità  $n$ ?
- (c) Esiste un'algebra di Boole di cardinalità del continuo?
- (d) Esiste un'algebra di Boole di cardinalità numerabile?
- (e) Si mostri che, per ogni cardinale infinito  $\kappa$ , esiste un'algebra di Boole di cardinalità  $\kappa$ .<sup>1</sup>

*Bozza di soluzione.* (a) Sì. L'insieme delle parti di un insieme di quattro elementi.  
(b) No. Ad esempio, per  $n = 0$  oppure per  $n = 3$ .  
(c) Sì. L'insieme delle parti di un insieme di cardinalità numerabile.  
(d) Sì. L'algebra dei finiti e cofiniti di un insieme numerabile.  
(e) Per ogni cardinale  $\kappa$ , si consideri l'algebra dei finiti e cofiniti di un insieme di cardinalità  $\kappa$ . Soluzione alternativa: si consideri l'algebra libera su  $\kappa$  generatori. Soluzione alternativa: si provi che esiste un'algebra di Boole numerabile e si applichi il teorema di Lowenheim-Skolem.

**Esercizio 0.2.** Sia  $n = p_1 \cdots p_k \in \mathbb{N}$  prodotto di primi  $p_1, \dots, p_k$  distinti. Sia  $D = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ divide } n\}$ . Per ogni  $a \in D$ , sia  $\bar{a} := \frac{n}{a}$ .  $(D, \text{mcd}, \text{mcm}, \bar{\phantom{x}}, 1, n)$  è un'algebra di Boole (non si richiede di dimostrarlo). Si trovi un insieme  $X$  ed un isomorfismo tra  $\mathcal{P}(X)$  e  $D$ .

*Bozza di soluzione.*  $X = \{p_1, \dots, p_k\}$ .

$$f: \mathcal{P}(X) \longrightarrow D$$
$$A \longmapsto \prod_{p \in A} p.$$

**Esercizio 0.3.** Mostrare che una catena di 3 elementi non è un'algebra di Boole.

*Bozza di soluzione.* L'elemento in mezzo alla catena non ha un complemento.

**Esercizio 0.4.** Sia  $X$  un insieme infinito<sup>2</sup>. Sia

$$B := \{Y \subseteq X \mid Y \text{ è finito oppure cofinito}\}$$

("Y cofinito" vuol dire che  $X \setminus Y$  è finito). Dimostrare che  $B$  è una sottomalgebra dell'algebra di Boole di  $\mathcal{P}(X)$ . ( $B$  è chiamata *algebra dei finiti e cofiniti*.)

---

*Date:* 28 ottobre 2022.

<sup>1</sup>Ne segue che ogni insieme infinito può essere dotato della struttura di algebra di Boole.

<sup>2</sup>L'ipotesi di infinitezza non è davvero necessaria.

**Esercizio 0.5.**

- (a) Si esibisca un'algebra di Boole di 16 elementi.
- (b) Si esibisca un'algebra di Boole di cardinalità del continuo.
- (c) Si esibisca un'algebra di Boole di cardinalità numerabile.
- (d) È vero che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , esiste un'algebra di Boole di cardinalità  $n$ ?
- (e) Si mostri che, per ogni cardinale infinito  $\kappa$ , esiste un'algebra di Boole di cardinalità  $\kappa$ .
- (f) È vero che ogni insieme infinito può essere dotato della struttura di algebra di Boole?

**Esercizio 0.6.** Sia  $\langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$  un'algebra di Boole. Dimostrare che

$$\begin{aligned} \varphi: \langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle &\longrightarrow \langle B, \vee, \wedge, \neg, 1, 0 \rangle \\ x &\longmapsto \neg x \end{aligned}$$

è isomorfismo di algebre di Boole (non è necessario dimostrare che  $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 1, 0 \rangle$  è un'algebra di Boole). È un'automorfismo?

- Esercizio 0.7.**
- (a) Trovare un esempio di poset non reticolo.
  - (b) Trovare un esempio di reticolo limitato distributivo non complementato.
  - (c) Trovare un esempio di reticolo distributivo non limitato.
  - (d) Trovare un esempio di reticolo limitato complementato non distributivo.

**Esercizio 0.8.** Se un sottoinsieme  $B$  di un'algebra di Boole  $A$  contiene 0 e 1 ed è chiuso per  $\wedge$  e  $\vee$ , ne segue che  $B$  è una sottalgebra di  $A$ ?

*Bozza di soluzione.* No. Si consideri l'algebra di Boole di quattro elementi e si prenda un sottoinsieme di tre elementi che contenga 0 e 1.

**Esercizio 0.9.** Dare un esempio di sottalgebra  $B$  di un'algebra di Boole  $A$  e un sottoinsieme  $E$  di  $B$  tale che  $E$  ha un sup in  $A$  ma non in  $B$ .

**Esercizio 0.10.** Dare un esempio di sottalgebra  $B$  di un'algebra di Boole  $A$  e un sottoinsieme  $E$  di  $B$  tale che  $E$  ha un sup in  $B$  ma non in  $A$ .

## 1. OMOMORFISMI, CONGRUENZE, FILTRI E ULTRAFILTRI

**Esercizio 1.1.** Sia  $X$  un insieme, e sia  $Y$  un suo sottoinsieme.

- (a) Si mostri che la funzione

$$\begin{aligned} \pi: \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(Y) \\ A &\longmapsto A \cap Y \end{aligned}$$

è un omomorfismo suriettivo di algebre di Boole. Inoltre, qual è il kernel di  $\pi$ ?

- (b) La funzione

$$\begin{aligned} \iota: \mathcal{P}(Y) &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ A &\longmapsto A \end{aligned}$$

è un omomorfismo di algebre di Boole?

*Bozza di soluzione.* (a) È chiaramente suriettivo. Mostriamo che è un omomorfismo. Ad esempio, mostriamo che  $\pi$  preserva  $\cap$ , 1,  $\neg$ .

$$\pi(A \cap B) = A \cap B \cap Y = (A \cap Y) \cap (B \cap Y) = \pi(A) \cap \pi(B).$$

$$\begin{aligned}\pi(X) &= X \cap Y = Y \\ \pi(X \setminus A) &= (X \setminus A) \cap Y = Y \setminus A.\end{aligned}$$

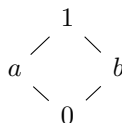
Il kernel è  $\{A \subseteq X \mid Y \subseteq A\}$ .

- (b) In generale  $\iota$  non è un omomorfismo, perché se  $Y \neq X$  non preserva 1 (e neanche  $\neg$ ).

**Esercizio 1.2.** Si mostri che il kernel di un omomorfismo  $f: A \rightarrow B$  di algebre di Boole è un filtro proprio se e solo se  $B$  non è un singoletto.

**Esercizio 1.3.** Siano  $f, g: A \rightarrow B$  omomorfismi suriettivi di algebre di Boole tale che la congruenze  $\equiv_f$  e  $\equiv_g$  su  $A$  (definite da  $x \equiv_f x'$  sse  $f(x) = f(x')$  e da  $x \equiv_g x'$  sse  $g(x) = g(x')$ , si veda Def. 3.45) coincidono. Segue che  $f$  e  $g$  sono uguali?

*Bozza di soluzione.* No. Si prendano sia  $A$  che  $B$  come la seguente algebra di Boole.



Si prenda  $f$  come l'identità e  $g$  come la mappa che manda  $\top$  in  $\top$ ,  $a$  in  $b$ ,  $b$  in  $a$  e  $\perp$  in  $\perp$ .

**Esercizio 1.4.** Sia  $X$  un insieme. Definisci la relazione  $\sim$  su  $\mathcal{P}(X)$  come segue:  $A \sim B$  se e solo se  $A$  e  $B$  differiscono su al più un insieme numerabile di elementi, ossia la differenza simmetrica

$$(A \cap (X \setminus B)) \cup ((X \setminus A) \cap B)$$

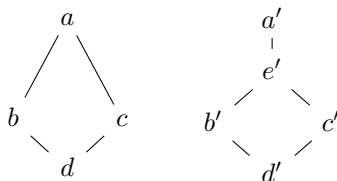
è al più numerabile. Si dimostri che questa relazione è una congruenza. Se  $X$  è numerabile, quanti elementi ha il quoziente  $\mathcal{P}(X)/\sim$ ?

**Esercizio 1.5.** Una funzione  $f: A \rightarrow B$  è detta *monotona crescente* se, per ogni  $x, y \in A$ ,  $x \leq y$  implica  $f(x) \leq f(y)$ .

- Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa:  
Se  $f: A \rightarrow B$  è una funzione monotona crescente tra algebre di Boole, allora  $f$  è un omomorfismo di algebre di Boole.
- Si stabilisca se la seguente frase è vera o falsa:  
Se  $f: A \rightarrow B$  è una funzione monotona crescente tra reticoli, allora per ogni  $x, y \in A$  si ha  $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$  e  $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ .
- Si stabilisca se la seguente frase è vera o falsa:  
Se  $f: A \rightarrow B$  è una funzione monotona crescente tra algebre di Boole tale che  $f(0) = 0$  e  $f(1) = 1$ , allora  $f$  è un omomorfismo di algebre di Boole.

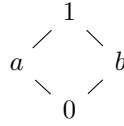
*Bozza di soluzione.* (a) Falsa. Sia  $A$  l'algebra di Boole con un solo elemento. Sia  $B$  la catena di due elementi  $\{0, 1\}$ . Si consideri la mappa che manda l'unico elemento di  $A$  in 0. Non è un omomorfismo perché non preserva 1.

- (b) Falsa. Siano  $A$  e  $B$ , rispettivamente, i seguenti reticoli.



e sia  $f$  la mappa che manda  $a$  in  $a'$ ,  $b$  in  $b'$ ,  $c$  in  $c'$  e  $d$  in  $d'$ .

(c) Falsa. Si prendano sia  $A$  che  $B$  come la seguente algebra di Boole.

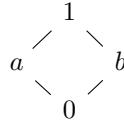


Sia  $f$  la mappa che manda 1 in 1, 0 in 0,  $a$  in  $a$  e  $b$  in  $a$ .  $f$  non è omomorfismo perché  $f(a \vee b) = 1 \neq a = a \vee a = f(a) \vee f(b)$ . (Questo poteva essere preso come controesempio anche per i due punti precedenti.)

**Esercizio 1.6.** Dimostra o confuta la seguente affermazione.

Siano  $A$  e  $B$  due algebre di Boole, e sia  $f: A \rightarrow B$  un omomorfismo di algebre di Boole. Per ogni  $x, y \in A$  si ha  $x \leq y$  se e solo se  $f(x) \leq f(y)$ .

*Bozza di soluzione.* L'affermazione è falsa. Come controesempio, si prenda  $A$  come la seguente algebra di Boole.



e come  $B$  l'algebra di Boole singoletto. Sia  $f: A \rightarrow B$  l'unica funzione da  $A$  a  $B$ .  $f$  è un omomorfismo.  $f(1_A) \leq f(0_A)$  ma  $1_A \not\leq 0_A$ .

**Esercizio 1.7.** Sia  $f: A \rightarrow B$  una funzione tra algebre di Boole che preserva  $\vee$ ,  $\wedge$ , 0 e 1. Si mostri che  $f$  è un omomorfismo.

**Esercizio 1.8.** Siano  $A$  e  $B$  due algebre di Boole, e sia  $f: A \rightarrow B$  una funzione che preserva  $\vee$  e  $\neg$ . Si mostri che  $f$  è un omomorfismo.

*Bozza di soluzione.* Mostriamo che  $f$  preserva  $\wedge$ :  $f(x \wedge y) = f(\neg(\neg x \vee \neg y)) = \neg(\neg f(x) \vee \neg f(y)) = f(x) \wedge f(y)$ .

**Esercizio 1.9.** Sia  $f: A \rightarrow B$  una funzione tra algebre di Boole che preserva  $\vee$ ,  $\wedge$ , 0 e 1. Si mostri che  $f$  è un omomorfismo.

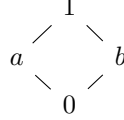
*Bozza di soluzione.* Dobbiamo mostrare che  $f$  preserva  $\neg$ . Si ricordi che  $\neg x$  è l'unico elemento tale che  $x \vee \neg x = 1$  e  $x \wedge \neg x = 0$ . Sia  $x \in A$ . Per mostrare che  $f(\neg x) = \neg f(x)$  basta mostrare che  $f(x) \vee f(\neg x) = 1$  e  $f(x) \wedge f(\neg x) = 0$ . Mostriamolo. Abbiamo  $f(x) \vee f(\neg x) = f(x \vee \neg x) = f(1) = 1$  e  $f(x) \wedge f(\neg x) = f(x \wedge \neg x) = f(0) = 0$ .

**Esercizio 1.10.** Dimostrare o confutare la seguente affermazione: Dati due omomorfismi  $f, g: A \rightarrow B$  di algebre di Boole, la funzione

$$\begin{aligned}
 h: A &\longrightarrow B \\
 x &\longmapsto f(x) \vee g(x)
 \end{aligned}$$

è un omomorfismo di algebre di Boole.

*Bozza di soluzione.* Falso. Si prendano sia  $A$  che  $B$  come la seguente algebra di Boole.



Si prenda  $f$  come l'identità e  $g$  come la mappa che manda  $\top$  in  $\top$ ,  $a$  in  $b$ ,  $b$  in  $a$  e  $\perp$  in  $\perp$ .

La funzione  $h$  non preserva  $\neg$  (e neanche  $\wedge$ ). Un altro modo di vedere che  $h$  non è un omomorfismo è notare che la preimmagine di 0 e la preimmagine di 1 hanno cardinalità diverse.

**Esercizio 1.11.** Si mostri che composizione di omomorfismi è omomorfismo.

**Esercizio 1.12.** Mostrare che la funzione inversa di un isomorfismo di algebre di Boole è un isomorfismo di algebre di Boole.

*Bozza di soluzione.* Sia  $f: A \rightarrow B$  un isomorfismo di algebre di Boole, e sia  $g$  la funzione inversa.  $g$  è biettiva, quindi basta mostrare che è un omomorfismo. Basta mostrare che  $g$  preserva  $\neg$  e  $\vee$ .

- (a) Mostriamo che  $g$  preserva  $\neg$ . Sia  $x \in B$ . Poiché  $f$  è suriettiva, esiste  $x' \in A$  tale che  $f(x') = x$ . Allora  $g(\neg x) = g(\neg f(x')) = g(f(\neg x')) = \neg x'$ . Inoltre  $\neg g(x) = \neg g(f(x')) = \neg x'$ . Perciò  $g(\neg x) = \neg g(x)$ .

Modo alternativo: Per mostrare che  $g(\neg x) = \neg g(x)$  basta mostrare che  $g(\neg x)$  e  $\neg g(x)$  hanno la stessa immagine tramite  $f$ , poiché  $f$  è iniettiva. Mostriamolo.  $f(g(\neg x)) = \neg x$ , e  $f(\neg g(x)) = \neg f(g(x)) = \neg x$ .

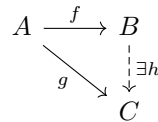
- (b) Mostriamo che  $g$  preserva  $\vee$ . Siano  $x, y \in A$ . Poiché  $f$  è suriettiva, esistono  $x', y' \in A$  tali che  $f(x') = x$  e  $f(y') = y$ . Allora  $g(x \vee y) = g(f(x') \vee f(y')) = g(f(x' \vee y')) = x' \vee y'$ . Inoltre  $g(x) \vee g(y) = g(f(x')) \vee g(f(y')) = x' \vee y'$ .

Modo alternativo: Per mostrare che  $g(x \vee y)$  e  $g(x) \vee g(y)$  sono uguali basta mostrare che hanno la stessa immagine. Mostriamolo.  $f(g(x \vee y)) = x \vee y$ , e  $f(g(x) \vee g(y)) = f(g(x)) \vee f(g(y)) = x \vee y$ .

**Esercizio 1.13.** Si mostri che ogni filtro generato da un insieme finito è principale.

**Esercizio 1.14.** Si mostri che ogni filtro è l'intersezione dei filtri massimali che lo estendono.

**Esercizio 1.15.** Siano  $f: A \rightarrow B$  e  $g: A \rightarrow C$  omomorfismi suriettivi (cioè epimorfismi) di algebre di Boole. Supponiamo  $\ker f = \ker g$ . Si mostri che esiste un isomorfismo  $h: B \rightarrow C$  tale che  $g = h \circ f$ .



**Esercizio 1.16.** Trovare un insieme di variabili  $P$  e un insieme di formule proposizionali le cui variabili appartengono a  $P$  tali che  $|\text{LT}_\Gamma(P)| = 8$ .

**Esercizio 1.17.** Sia  $X$  un insieme. Si mostri che

$$C := \{Y \subseteq X \mid X \setminus Y \text{ è finito}\}$$

è un filtro di  $\mathcal{P}(X)$ . Sotto quali condizioni su  $X$  il filtro  $C$  è proprio?

**Esercizio 1.18.** Per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , si definisca

$$I_k := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}.$$

L'insieme

$$\{I_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

è un filtro di  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ?

**Esercizio 1.19.** Sia  $X$  un insieme finito. Si mostri che ogni filtro di  $\mathcal{P}(X)$  è principale.

**Esercizio 1.20.** Sia  $X$  un insieme infinito. Si mostri che esiste un filtro di  $\mathcal{P}(X)$  non principale.

**Esercizio 1.21.** Sia  $n \in \mathbb{N}$ , e sia  $B$  un'algebra di Boole di  $n$  elementi. Quanti filtri ha  $B$ ? Quante congruenze?

*Bozza di soluzione.* La soluzione è  $n$  ad entrambe le domande. Dimostriamolo.

Dimostriamo anzitutto la seguente cosa:

*Lemma 1.22.* Ogni filtro  $F$  in un'algebra di Boole  $B$  finita è principale, cioè esiste un elemento  $x$  tale che  $F = \uparrow x$  (dove  $\uparrow x$  denota l'insieme  $\{y \in B \mid x \leq y\}$ ).

*Dimostrazione del lemma.* Sia  $F$  un filtro dell'algebra di Boole finita  $B$ . Allora  $F$  è finito. Poiché i filtri sono chiusi per inf finiti, anche  $\inf F$  appartiene a  $F$ , cioè  $\inf F$  è il minimo di  $F$ . Quindi,  $F \subseteq \uparrow (\inf F)$ . Poiché i filtri sono chiusi verso l'alto e  $\inf F \in F$ , abbiamo  $\uparrow (\inf F) \subseteq F$ . Perciò  $F = \uparrow (\inf F)$ .  $\square$

Concludiamo ora la soluzione dell'esercizio. Sia  $\text{Filt}(B)$  l'insieme dei filtri di  $B$ . La mappa

$$\begin{aligned} B &\longrightarrow \text{Filt}(B) \\ b &\longmapsto \uparrow b \end{aligned}$$

è ben definita (cioè  $\uparrow b$  è un filtro per ogni  $b$ ), iniettiva (perché l'ordine parziale  $\leq$  su  $B$  è, per definizione di ordine parziale, antisimmetrico) e suriettiva per il lemma sopra. Perciò  $\text{Filt}(B)$  ha la stessa cardinalità di  $B$ , cioè  $n$ .

Le congruenze sono in biezione con i filtri, perciò sono  $n$  anch'esse.

**Esercizio 1.23.** Dimostra o confuta la seguente affermazione.

Per ogni algebra di Boole  $B$ , ogni filtro di  $B$  è principale.

*Bozza di soluzione.* Falso. Si prenda un insieme  $X$  infinito e si consideri l'algebra di Boole  $\mathcal{P}(X)$ . L'insieme dei sottoinsiemi cofiniti di  $X$  è un filtro. Inoltre, non è principale perché non ha minimo: per ogni insieme cofinito  $A$  ne esiste uno più piccolo (basta togliere un elemento ad  $A$ ).

**Esercizio 1.24.** Sia  $X$  un insieme finito, con  $n$  elementi. Quanti filtri ammette  $\mathcal{P}(X)$ ? Quante congruenze? Quanti ultrafiltri?

**Esercizio 1.25.** Sia  $X$  un insieme e  $U$  un ultrafiltro dell'algebra di Boole  $\mathcal{P}(X)$ . Mostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti.

- (a)  $U$  è principale.
- (b) Esiste un elemento  $x \in X$  tale che  $U = \{Y \subseteq X \mid x \in Y\}$ .

**Esercizio 1.26.** Sia  $X$  un insieme e  $U$  un ultrafiltro dell'algebra di Boole  $\mathcal{P}(X)$ . Si mostri che le seguenti condizioni sono equivalenti.

- (a)  $U$  non è principale.
- (b) Ogni sottoinsieme  $Y \subseteq X$  cofinito (cioè tale che  $X \setminus Y$  è finito) appartiene a  $U$ .

**Esercizio 1.27.** Sia  $X$  un insieme infinito. Si consideri la sottalgebra di  $\mathcal{P}(X)$

$$A := \{Y \subseteq X \mid Y \text{ è finito o cofinito}\}.$$

Si caratterizzino tutti gli ultrafiltri di  $A$ . Come si deduce dalla dimostrazione del Teorema 3.86 delle dispense (Rappresentazione di Stone), denotando con  $\mathcal{U}(A)$  l'algebra delle parti dell'insieme degli ultrafiltri di  $A$ , l'algebra  $A$  è isomorfa a una sottalgebra  $A'$  di  $\mathcal{P}(\mathcal{U}(A))$ . Quali sono gli elementi di tale sottalgebra? (Si dia una descrizione più esplicita possibile.)

**Esercizio 1.28.** Mostrare che, se  $X$  è un insieme infinito, esiste un ultrafiltro non principale di  $\mathcal{P}(X)$ .

**Esercizio 1.29.** Sia  $X$  un insieme infinito. Quali sottoinsiemi di  $X$  appartengono ad ogni ultrafiltro non principale di  $\mathcal{P}(X)$ ?

**Esercizio 1.30.** Si mostri che, se  $F$  è un filtro che non è un ultrafiltro, allora  $F$  è contenuto in almeno due ultrafiltri diversi.

**Esercizio 1.31.** Sia  $\mathcal{F}$  un filtro proprio su  $A$  e sia  $B$  un sottoinsieme di  $A$  tale che  $A \setminus B \notin \mathcal{F}$ . Si mostri che esiste un filtro proprio  $\mathcal{F}'$  tale che  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$  e  $B \in \mathcal{F}'$ .

**Esercizio 1.32.** Sia  $S$  un sottoinsieme di un'algebra di Boole  $A$ , e sia  $x \in A$ . Si supponga che  $S$  abbia la finite intersection property. Si mostri che  $A \cup \{x\}$  ha la finite intersection property oppure  $A \cup \{\neg x\}$  ha la finite intersection property.

**Esercizio 1.33.** Sia  $\{A_i \mid i \in I\}$  (con  $I \neq \emptyset$ ) una catena di sottoinsiemi di un'algebra di Boole (cioè una collezione di sottoinsiemi totalmente ordinati per inclusione insiemistica). Si mostri che se per ogni  $i \in I$  l'insieme  $A_i$  ha la finite intersection property allora anche l'unione  $\bigcup_{i \in I} A_i$  ha la finite intersection property.

**Esercizio 1.34.** Si esibiscano un'algebra di Boole  $A$  e un sottoinsieme  $S$  con le seguenti proprietà:  $0 \notin S$ , per ogni  $x, y \in S$  si ha  $x \wedge y \neq 0$ , ma  $S$  non ha la finite intersection property.

**Esercizio 1.35.** Quali sono gli ultrafiltri dell'algebra dei finiti-cofiniti di  $\mathbb{N}$ ?

## 2. ALGEBRE DI LINDENBAUM

**Esercizio 2.1.** Siano  $x$  e  $y$  variabili distinte.

- (a)  $[x] = [y]$  in  $\text{LT}_\emptyset(\{x, y\})$ ?
- (b)  $\neg([x] \wedge [y]) = \neg[x] \vee \neg[y]$  in  $\text{LT}_\emptyset(\{x, y\})$ ?
- (c)  $[x] \wedge [y] = [x]$  in  $\text{LT}_\emptyset(\{x, y\})$ ?
- (d)  $[x] \wedge [y] = [x]$  in  $\text{LT}_{\{x \rightarrow y\}}(\{x, y\})$ ?
- (e)  $[x] \rightarrow [y] = [y] \rightarrow [x]$  in  $\text{LT}_{\{x \vee y\}}(\{x, y\})$ ?
- (f)  $[x] \vee [y] = [x] \wedge [y]$  in  $\text{LT}_\emptyset(\{x, y\})$ ?

**Esercizio 2.2.** Sia  $P$  un insieme finito. Si stabilisca il numero di elementi dell'algebra di Lindenbaum-Tarski  $\text{LT}_\emptyset(P)$  in funzione del numero di elementi di  $P$ .

**Esercizio 2.3.** Si stabilisca il numero di elementi di un insieme  $X$  tale che  $|\mathcal{P}(X)| = 4$ . Si stabilisca il numero di elementi di un insieme  $P$  tale che  $|\text{LT}_\emptyset(P)| = 4$ .

**Esercizio 2.4.** È vero che, per ogni algebra di Boole  $A$  finita, esiste un insieme  $P$  tale che  $A \cong \text{LT}_\emptyset(P)$ ?

**Esercizio 2.5.** È vero che, per ogni algebra di Boole  $A$ , esistono un insieme  $P$  e un insieme  $\Gamma$  di formule proposizionali con variabili appartenenti a  $P$  tale che  $A \cong \text{LT}_\Gamma(P)$ ?

**Esercizio 2.6.** Sia  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro di un'algebra di Lindenbaum  $\text{LT}_\emptyset(P)$ . Si mostri che, per tutte le formule  $\varphi, \psi$  nelle variabili proposizionali in  $P$ ,

- (a)  $[\neg\varphi] \in \mathcal{U}$  se e solo se  $[\varphi] \notin \mathcal{U}$ .
- (b)  $[\varphi \wedge \psi] \in \mathcal{U}$  se e solo se  $[\varphi] \in \mathcal{U}$  e  $[\psi] \in \mathcal{U}$ .
- (c) Se  $[\varphi], [\varphi \rightarrow \psi] \in \mathcal{U}$  allora  $[\psi] \in \mathcal{U}$ .

**Esercizio 2.7.** Qual è l'algebra libera generata dall'insieme vuoto?

**Esercizio 2.8.** Sia  $A$  l'algebra di Boole degenera (cioè  $A$  è un singoletto). Mostrare che non esiste alcun sottoinsieme  $X$  di  $A$  tale che  $A$  è liberamente generata da  $X$ .

**Esercizio 2.9.** Si mostri che, per ogni algebra di Boole  $B$ , esistono un'algebra libera  $A$  e un omomorfismo suriettivo  $f: A \rightarrow B$ .

**Esercizio 2.10.** Sia  $A$  un'algebra di Boole. Si mostri che esiste un insieme  $P$  e un insieme  $\Gamma$  di formule proposizionali tali che  $A$  è isomorfo a  $\text{LT}_\Gamma(P)$ .

**Esercizio 2.11.** Trovare un insieme di variabili  $P$  e un insieme di formule proposizionali  $\Gamma$  con variabili in  $P$  tale che  $|\text{LT}_\Gamma(P)| = 8$ .

**Esercizio 2.12.** Mostrare che ogni algebra di Boole è isomorfa a  $\text{LT}_\Gamma(P)$  per qualche  $P$  e  $\Gamma$ . (Qui è ammesso prendere  $\Gamma$  incoerente per ottenere l'algebra di Boole di un solo elemento.)

**Esercizio 2.13.** Sia  $X$  un insieme (di variabili proposizionali). Mostrare che i seguenti insiemi sono in biezione.

- (a)  $\{Y \mid Y \subseteq X\}$ .
- (b)  $\{\Sigma \mid \Sigma \text{ insieme massimalmente coerente di formule proposizionali con variabili in } X\}$ .
- (c)  $\{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \text{ ultrafiltro di } \text{LT}_\emptyset(X)\}$ .

### 3. ALGEBRE ATOMICHE

**Esercizio 3.1.** Sia  $B$  algebra di Boole finita, di cardinalità  $2^n$ , dove  $n$  è il numero di atomi. Dimostra che qualunque insieme di  $n - 1$  atomi di  $B$  genera  $B$ .

**Esercizio 3.2.** Siano  $A$  un'algebra di Boole, e sia  $B$  una sua sottalgebra (cioè  $B \subseteq A$ , e  $B$  è chiuso per le operazioni booleane). È vero che ogni atomo dell'algebra di Boole  $B$  è atomo dell'algebra di Boole  $A$ ?

**Esercizio 3.3.** Siano  $B_1$  e  $B_2$  algebre di Boole finite, con  $|B_1| = |B_2| = 2^n$ . Quanti isomorfismi ci sono da  $B_1$  a  $B_2$ ?

**Esercizio 3.4.** Esibire un'algebra atomica che non sia completa (cioè che non ammette sup e inf arbitrari). (Tale algebra non può essere isomorfa a un'algebra delle parti, in quanto queste sono sempre complete.)

**Esercizio 3.5.** Sia  $U := \{a, b, c\}$ . Determinare il numero di sottalgebre di  $\mathcal{P}(U)$ .

**Esercizio 3.6.** Diciamo che un'algebra di Boole  $A$  è *densa* se per ogni  $x, y \in A$  tali che  $x < y$  esiste  $z \in A$  tale che  $x < z < y$ . Si mostri che un'algebra di Boole è densa se e solo se non ha atomi.



## 4. CURIOSITÀ

Gli ultrafiltri possono essere usati per rispondere (negativamente) alla seguente domanda:

È vero che, per ogni gioco a turni (potenzialmente infiniti) tra due giocatori che preveda in ogni caso un vincitore e uno sconfitto (quindi senza possibilità di pareggiare) e che sia deterministico (cioè non c'è una componente randomica), esiste una strategia vincente per almeno uno dei due giocatori?

La risposta (abbastanza sorprendentemente) è no. Un gioco senza strategie vincenti è il seguente.

Si fissi un ultrafiltro non-principale  $U$  di  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . A turno, il giocatore  $A$  e il giocatore  $B$  scelgono un numero naturale, con la condizione che esso sia strettamente maggiore di quelli scelti precedentemente. Indicando con  $a_i$  l' $i$ -esimo numero scelto da  $A$  e con  $b_i$  l' $i$ -esimo numero scelto da  $B$ , avremo una successione

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < b_3 < \dots$$

$B$  vince se  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} ([a_i + 1, b_i] \cap \mathbb{N}) \in U$ , altrimenti vince  $A$ .

La dimostrazione del fatto che né  $A$  né  $B$  ha una strategia vincente si basa su un argomento di “rubare la strategia”: se  $A$  avesse una strategia vincente, allora  $B$  potrebbe copiarla per ottenere una strategia vincente per sé (il che è assurdo perché non possono avere entrambi strategie vincenti), e viceversa. Per maggiori dettagli, si veda il libro [Logic in games. Johan Van Benthem. 2014. M.I.T. Press., Example 5.1, p. 105].