LOGICA MATEMATICA
A.A. 2021/2022

ESERCIZI SU
ALGEBRE DI BOOLE

Esercizio 1.
(a) Esiste un'algebra di Boole di 16 elementi?
(b) È vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un'algebra di Boole di cardinalità n?
(c) Esiste un'algebra di Boole di cardinalità del continuo?
(d) Esiste un'algebra di Boole di cardinalità numerabile?
(e) Si mostri che, per ogni cardinale infinito κ, esiste un'algebra di Boole di cardinalità κ.[1]

Soluzione. (a) Sì. L'insieme delle parti di un insieme di quattro elementi.
(b) No. Ad esempio, per $n = 0$ oppure per $n = 3$.
(c) Sì. L'insieme delle parti di un insieme di cardinalità numerabile.
(d) Sì. L'algebra dei finiti e cofiniti di un insieme numerabile.
(e) Per ogni cardinale κ, si consideri l'algebra dei finiti e cofiniti di un insieme di cardinalità κ. Soluzione alternativa: si consideri l'algebra libera su κ generatori. Soluzione alternativa: si provi che esiste un'algebra di Boole numerabile e si applichi il teorema di Loweneim-Skolem.

Esercizio 2. Sia $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k \in \mathbb{N}$ prodotto di primi $p_1, \dots, p_k$ distinti. Sia $D = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ divide } n\}$. Per ogni $a \in D$, sia $\overline{a} \coloneqq \frac{n}{a}$. $(D, \mathrm{mcd}, \mathrm{mcm}, {}^{-}, 1, n)$ è un'algebra di Boole (non si richiede di dimostrarlo). Si trovi un insieme X ed un isomorfismo tra $\mathcal{P}(X)$ e D.

Soluzione. $X = \{p_1, \dots, p_k\}$.

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{P}(X) &\longrightarrow D \\ A &\longmapsto \prod_{p \in A} p. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Mostrare che una catena di 3 elementi non è un'algebra di Boole.

Soluzione. L'elemento in mezzo alla catena non ha un complemento.

Esercizio 4. Sia X un insieme infinito[2]. Sia

$$B \coloneqq \{Y \subseteq X \mid Y \text{ è finito oppure cofinito}\}$$

("Y *cofinito*" vuol dire che $X \setminus Y$ è finito). Dimostrare che B è una sottalgebra dell'algebra di Boole di $\mathcal{P}(X)$. (B è chiamata *algebra dei finiti e cofiniti*.)

Esercizio 5.

Date: 3 novembre 2022.
[1] Ne segue che ogni insieme infinito può essere dotato della struttura di algebra di Boole.
[2] L'ipotesi di infinitezza non è davvero necessaria.

(a) Si esibisca un'algebra di Boole di 16 elementi.
(b) Si esibisca un'algebra di Boole di cardinalità del continuo.
(c) Si esibisca un'algebra di Boole di cardinalità numerabile.
(d) È vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un'algebra di Boole di cardinalità n?
(e) Si mostri che, per ogni cardinale infinito κ, esiste un'algebra di Boole di cardinalità κ.
(f) È vero che ogni insieme infinito può essere dotato della struttura di algebra di Boole?

Esercizio 6. Sia $\langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ un'algebra di Boole. Dimostrare che

$$\begin{aligned} \varphi\colon \langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle &\longrightarrow \langle B, \vee, \wedge, \neg, 1, 0\rangle \\ x &\longmapsto \neg x \end{aligned}$$

è isomorfismo di algebre di Boole (non è necessario dimostrare che $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 1, 0\rangle$ è un'algebra di Boole). È un'automorfismo?

Esercizio 7. (a) Trovare un esempio di poset non reticolo.
(b) Trovare un esempio di reticolo limitato distributivo non complementato.
(c) Trovare un esempio di reticolo distributivo non limitato.
(d) Trovare un esempio di reticolo limitato complementato non distributivo.

Esercizio 8. Se un sottoinsieme B di un'algebra di Boole A contiene 0 e 1 ed è chiuso per $\wedge$ e $\vee$, ne segue che B è una sottalgebra di A?

Soluzione. No. Si consideri l'algebra di Boole di quattro elementi e si prenda un sottoinsieme di tre elementi che contenga 0 e 1.

Esercizio 9. Dare un esempio di sottalgebra B di un'algebra di Boole A e un sottoinsieme E di B tale che E ha un sup in A ma non in B.

Esercizio 10. Dare un esempio di sottalgebra B di un'algebra di Boole A e un sottoinsieme E di B tale che E ha un sup in B ma non in A.

1. Omomorfismi, congruenze, filtri e ultrafiltri

Esercizio 11. Sia X un insieme, e sia Y un suo sottoinsieme.
(a) Si mostri che la funzione

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(Y) \\ A &\longmapsto A \cap Y \end{aligned}$$

è un omomorfismo suriettivo di algebre di Boole. Inoltre, qual è il kernel di r?
(b) La funzione

$$\begin{aligned} \iota\colon \mathcal{P}(Y) &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ A &\longmapsto A \end{aligned}$$

è un omomorfismo di algebre di Boole?

Soluzione. (a) È chiaramente suriettivo. Mostriamo che è un omomorfismo. Ad esempio, mostriamo che π preserva $\cap$, 1, $\neg$.

$$\pi(A \cap B) = A \cap B \cap Y = (A \cap Y) \cap (B \cap Y) = \pi(A) \cap \pi(B).$$

$$\pi(X) = X \cap Y = Y$$

$$\pi(X \setminus A) = (X \setminus A) \cap Y = Y \setminus A.$$

Il kernel è $\{A \subseteq X \mid Y \subseteq A\}$.

(b) In generale ι non è un omomorfismo, perché se $Y \neq X$ non preserva 1 (e neanche $\neg$).

Esercizio 12. Si mostri che una funzione $f\colon A \to B$ tra algebre di Boole è un isomorfismo se e solo se è biettiva e per ogni $x, y \in A$ si ha $x \leq y$ sse $f(x) \leq f(y)$.

Soluzione. Supponiamo che $f\colon A \to B$ è un isomorfismo. Allora è biettiva. Inoltre, per ogni $x, y \in A$, abbiamo

$$x \leq y \iff x \wedge y = x \iff f(x \wedge y) = f(x) \iff f(x) \wedge f(y) = f(x) \iff f(x) \leq f(y).$$

(Se no, potevamo usare il fatto che ogni omomorfismo è monotono crescente, e quindi vale $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, ed inoltre l'inversa g di f è un'omomorfismo, e perciò è monotona crescente, e perciò soddisfa l'implicazione opposta.)

Supponiamo che f è biettiva e per ogni $x, y \in A$ si ha $x \leq y$ sse $f(x) \leq f(y)$. Mostriamo che f preserva $\vee$. Siano $x, y \in A$. Dobbiamo mostrare che $f(x \vee y)$ è il minimo dei maggioranti di $f(x)$ e $f(y)$. Poiché f è monotona crescente, $f(x \vee y)$ è un maggiorante di $f(x)$ e $f(y)$. Sia z un maggiorante di $f(x)$ e $f(y)$. Esiste z' tale che $f(z') = z$. Allora $f(x) \leq f(z')$ e perciò $x \leq z'$. Analogamanete $y \leq z'$. Perciò $x \vee y \leq z'$, e perciò $f(x \vee y) \leq f(z)$.

Esercizio 13. Si mostri che il kernel di un omomorfismo $f\colon A \to B$ di algebre di Boole è un filtro proprio se e solo se B non è un singoletto.

Esercizio 14. Siano $f, g\colon A \to B$ omomorfismi suriettivi di algebre di Boole tale che la congruenze $\equiv_f$ e $\equiv_g$ su A (definite da $x \equiv_f x'$ sse $f(x) = f(x')$ e da $x \equiv_g x'$ sse $g(x) = g(x')$, si veda Def. 3.45) coincidono. Segue che f e g sono uguali?

Soluzione. No. Si prendano sia A che B come la seguente algebra di Boole.

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & / & & \backslash & \\ a & & & & b \\ & \backslash & & / & \\ & & 0 & & \end{array}$$

Si prenda f come l'identità e g come la mappa che manda $\top$ in $\top$, a in b, b in a e $\bot$ in $\bot$.

Esercizio 15. Sia X un insieme. Definisci la relazione $\sim$ su $\mathcal{P}(X)$ come segue: $A \sim B$ se e solo se A e B differiscono su al più un insieme numerabile di elementi, ossia la differenza simmetrica

$$(A \cap (X \setminus B)) \cup ((X \setminus A) \cap B)$$

è al più numerabile. Si dimostri che questa relazione è una congruenza. Se X è numerabile, quanti elementi ha il quoziente $\mathcal{P}(X)/{\sim}$?

Esercizio 16. Una funzione $f\colon A \to B$ è detta *monotona crescente* se, per ogni $x, y \in A$, $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$.

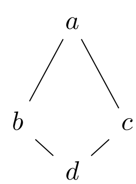
(a) Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa:
Se $f\colon A \to B$ è una funzione monotona crescente tra algebre di Boole, allora f è un omomorfismo di algebre di Boole.

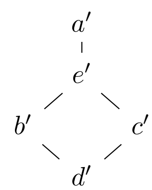
(b) Si stabilisca se la seguente frase è vera o falsa:
Se $f : A \to B$ è una funzione monotona crescente tra reticoli, allora per ogni $x, y \in A$ si ha $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ e $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

(c) Si stabilisca se la seguente frase è vera o falsa:
Se $f : A \to B$ è una funzione monotona crescente tra algebre di Boole tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, allora f è un omomorfismo di algebre di Boole.

Soluzione. (a) Falsa. Sia A l'algebra di Boole con un solo elemento. Sia B la catena di due elementi $\{0, 1\}$. Si consideri la mappa che manda l'unico elemento di A in 0. Non è un omomorfismo perché non preserva 1.

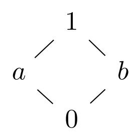
(b) Falsa. Siano A e B, rispettivamente, i seguenti reticoli.





e sia f la mappa che manda a in a', b in b', c in c' e d in d'.

(c) Falsa. Si prendano sia A che B come la seguente algebra di Boole.

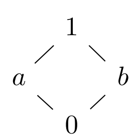


Sia f la mappa che manda 1 in 1, 0 in 0, a in a e b in a. f non è omomorfismo perché $f(a \vee b) = 1 \neq a = a \vee a = f(a) \vee f(b)$. (Questo poteva essere preso come controesempio anche per i due punti precedenti.)

Esercizio 17. Dimostra o confuta la seguente affermazione.

Siano A e B due algebre di Boole, e sia $f : A \to B$ un omomorfismo di algebre di Boole. Per ogni $x, y \in A$ si ha $x \leq y$ se e solo se $f(x) \leq f(y)$.

Soluzione. L'affermazione è falsa. Come controesempio, si prenda A come la seguente algebra di Boole.



e come B l'algebra di Boole singoletto. Sia $f : A \to B$ l'unica funzione da A a B. f è un omomorfismo. $f(1_A) \leq f(0_A)$ ma $1_A \not\leq 0_A$.

Esercizio 18. Sia $f : A \to B$ una funzione tra algebre di Boole che preserva $\vee$, $\wedge$, 0 e 1. Si mostri che f è un omomorfismo.

Esercizio 19. Siano A e B due algebre di Boole, e sia $f : A \to B$ una funzione che preserva $\vee$ e $\neg$. Si mostri che f è un omomorfismo.

Soluzione. Mostriamo che f preserva $\wedge$: $f(x \wedge y) = f(\neg(\neg x \vee \neg y)) = \neg(\neg f(x) \vee \neg f(y)) = f(x) \wedge f(y)$.

Esercizio 20. Sia $f\colon A \to B$ una funzione tra algebre di Boole che preserva $\vee$, $\wedge$, 0 e 1. Si mostri che f è un omomorfismo.

Soluzione. Dobbiamo mostrare che f preserva $\neg$. Si ricordi che $\neg x$ è l'unico elemento tale che $x \vee \neg x = 1$ e $x \wedge \neg x = 0$. Sia $x \in A$. Per mostrare che $f(\neg x) = \neg f(x)$ basta mostrare che $f(x) \vee f(\neg x) = 1$ e $f(x) \wedge f(\neg x) = 0$. Mostriamolo. Abbiamo $f(x) \vee f(\neg x) = f(x \vee \neg x) = f(1) = 1$ e $f(x) \wedge f(\neg x) = f(x \wedge \neg x) = f(0) = 0$.

Esercizio 21. Dimostrare o confutare la seguente affermazione:
Dati due omomorfismi $f, g\colon A \to B$ di algebre di Boole, la funzione

$$\begin{aligned} h\colon A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \vee g(x) \end{aligned}$$

è un omomorfismo di algebre di Boole.

Soluzione. Falso. Si prendano sia A che B come la seguente algebra di Boole.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & 1 & \\ a \arrow[ur, dash] & & b \arrow[ul, dash] \\ & 0 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

Si prenda f come l'identità e g come la mappa che manda $\top$ in $\top$, a in b, b in a e $\bot$ in $\bot$.

La funzione h non preserva $\neg$ (e neanche $\wedge$). Un altro modo di vedere che h non è un omomorfismo è notare che la preimmagine di 0 e la preimmagine di 1 hanno cardinalità diverse.

Esercizio 22. Si mostri che composizione di omomorfismi è omomorfismo.

Esercizio 23. Mostrare che la funzione inversa di un isomorfismo di algebre di Boole è un isomorfismo di algebre di Boole.

Soluzione. Sia $f\colon A \to B$ un isomorfismo di algebre di Boole, e sia g la funzione inversa. g è biettiva, quindi basta mostrare che è un omomorfismo. Basta mostrare che g preserva $\neg$ e $\vee$.

(a) Mostriamo che g preserva $\neg$. Sia $x \in B$. Poiché f è suriettiva, esiste $x' \in A$ tale che $f(x') = x$. Allora $g(\neg x) = g(\neg f(x')) = g(f(\neg x')) = \neg x'$. Inoltre $\neg g(x) = \neg g(f(x')) = \neg x'$. Perciò $g(\neg x) = \neg g(x)$.
   Modo alternativo: Per mostrare che $g(\neg x) = \neg g(x)$ basta mostrare che $g(\neg x)$ e $\neg g(x)$ hanno la stessa immagine tramite f, poiché f è iniettiva. Mostriamolo. $f(g(\neg x)) = \neg x$, e $f(\neg g(x)) = \neg f(g(x)) = \neg x$.
(b) Mostriamo che g preserva $\vee$. Siano $x, y \in A$. Poiché f è suriettiva, esistono $x', y' \in A$ tali che $f(x') = x$ e $f(y') = y$. Allora $g(x \vee y) = g(f(x') \vee f(y')) = g(f(x' \vee y')) = x' \vee y'$. Inoltre $g(x) \vee g(y) = g(f(x')) \vee g(f(y')) = x' \vee y'$.
   Modo alternativo: Per mostrare che $g(x \vee y)$ e $g(x) \vee g(y)$ sono uguali basta mostrare che hanno la stessa immagine. Mostriamolo. $f(g(x \vee y)) = x \vee y$, e $f(g(x) \vee g(y)) = f(g(x)) \vee f(g(y)) = x \vee y$.

Esercizio 24. Si mostri che ogni filtro generato da un insieme finito è principale.

Esercizio 25. Si mostri che ogni filtro è l'intersezione dei filtri massimali che lo estendono.

Soluzione. Sia A un'algebra di Boole. Sia F un filtro di A. Sia Ult l'insieme dei filtri massimali (equivalentemente, gli ultrafiltri) di A. Mostriamo che $F = \bigcap_{U \in \mathrm{Ult}} U$. L'inclusione $F \subseteq \bigcap_{U \in \mathrm{Ult}} U$ è immediata. Mostriamo l'inclusione $\bigcap_{U \in \mathrm{Ult}} U \subseteq F$. Dobbiamo mostrare che, per ogni $c \in A$, se $c \in \bigcap_{U \in \mathrm{Ult}} U$ allora $c \in F$. Equivalentemente (prendendo la contronominale), dobbiamo mostrare che, per ogni $c \in A$, se $c \notin F$ allora $c \notin \bigcap_{U \in \mathrm{Ult}} U$. Sia $c \in A$ con $c \notin F$. Allora, per il Corollario 3.84, esiste $U_0 \in \mathrm{Ult}$ che estende F ma non contiene c. Allora $c \notin \bigcap_{U \in \mathrm{Ult}} U$.

Esercizio 26. Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon A \to C$ omomorfismi suriettivi (cioè epimorfismi) di algebre di Boole. Supponiamo $\ker f = \ker g$. Si mostri che esiste un isomorfismo $h\colon B \to C$ tale che $g = h \circ f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[d, dashed, "\exists h"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Esercizio 27. Trovare un insieme di variabili P e un insieme di formule proposizionali le cui variabili appartengono a P tali che $|\mathrm{LT}_\Gamma(P)| = 8$.

Esercizio 28. Sia X un insieme. Si mostri che

$$C \coloneqq \{Y \subseteq X \mid X \setminus Y \text{ è finito}\}$$

è un filtro di $\mathcal{P}(X)$. Sotto quali condizioni su X il filtro C è proprio?

Soluzione. ...

Il filtro è proprio se e solo se X è infinito.

Esercizio 29. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, si definisca

$$I_k \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}.$$

L'insieme

$$\mathcal{A} = \{I_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

è un filtro di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

Se sì, dimostrarlo, se no, descrivere il filtro generato.

Soluzione. No, perché non è chiuso verso l'alto. Per esempio, $I_3 \subseteq I_3 \cup \{1\}$, $I_3 \in \mathcal{A}$, $I_3 \cup \{1\} \notin \mathcal{A}$.

Il filtro generato è il filtro dei finiti e cofiniti. Usando Proposizione 3.69, otteniamo che il filtro generato da $\mathcal{A}$ è

$$\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{A} : X \supseteq Y_1 \cap \dots \cap Y_n\},$$

il quale, poiché $\mathcal{A}$ è chiuso per intersezioni finite, è uguale a

$$\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \exists Y \in \mathcal{A} : X \supseteq Y\},$$

il quale è l'insieme dei sottoinsiemi cofiniti di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Esercizio 30. Sia X un insieme finito. Si mostri che ogni filtro di $\mathcal{P}(X)$ è principale.

Esercizio 31. Sia X un insieme infinito. Si mostri che esiste un filtro di $\mathcal{P}(X)$ non principale.

Esercizio 32. Sia $n \in \mathbb{N}$, e sia B un'algebra di Boole di n elementi. Quanti filtri ha B? Quante congruenze?

Soluzione. La soluzione è n ad entrambe le domande. Dimostriamolo.

Dimostriamo anzitutto la seguente cosa:

Lemma 33. *Ogni filtro F in un algebra di Boole B finita è principale, cioè esiste un elemento x tale che $F = \uparrow x$ (dove $\uparrow x$ denota l'insieme $\{y \in B \mid x \leq y\}$).*

Dimostrazione del lemma. Sia F un filtro dell'algebra di Boole finita B. Allora F è finito. Poiché i filtri sono chiusi per inf finiti, anche $\inf F$ appartiene a F, cioè $\inf F$ è il minimo di F. Quindi, $F \subseteq \uparrow (\inf F)$. Poiché i filtri sono chiusi verso l'alto e $\inf F \in F$, abbiamo $\uparrow (\inf F) \subseteq F$. Perciò $F = \uparrow (\inf F)$. □

Concludiamo ora la soluzione dell'esercizio. Sia $\mathrm{Filt}(B)$ l'insieme dei filtri di B. La mappa

$$\begin{aligned} B &\longrightarrow \mathrm{Filt}(B) \\ b &\longmapsto \uparrow b \end{aligned}$$

è ben definita (cioè $\uparrow b$ è un filtro per ogni b), iniettiva (perché l'ordine parziale $\leq$ su B è, per definizione di ordine parziale, antisimmetrico) e suriettiva per il lemma sopra. Perciò $\mathrm{Filt}(B)$ ha la stessa cardinalità di B, cioè n.

Le congruenze sono in biezione con i filtri, perciò sono n anch'esse.

Esercizio 34. Dimostra o confuta la seguente affermazione.

Per ogni algebra di Boole B, ogni filtro di B è principale.

Soluzione. Falso. Si prenda un insieme X infinito e si consideri l'algebra di Boole $\mathcal{P}(X)$. L'insieme dei sottoinsiemi cofiniti di X è un filtro. Inoltre, non è principale perché non ha minimo: per ogni insieme cofinito A ne esiste uno più piccolo (basta togliere un elemento ad A).

Esercizio 35. Sia A un'algebra di Boole finita. Si mostri che gli ultrafiltri sono esattamente i filtri principali $\mathcal{F}_a$ generati da un elemento $a \in A$ che è minimale tra gli elementi non nulli di A.[3]

Soluzione. Poiché A è finita, ogni filtro di A è principale. Per $a, b \in A$ abbiamo $\mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{F}_b$ se e solo se $a \leq b$. Inoltre, $\mathcal{F}_a$ è proprio se e solo se $a = 0$. Perciò, $\mathcal{F}_a$ è massimale tra i filtri propri se e solo se a è minimale tra gli elementi non nulli.

Esercizio 36. Sia X un insieme finito, con n elementi. Quanti filtri ammette $\mathcal{P}(X)$? Quante congruenze? Quanti ultrafiltri?

Esercizio 37. Sia X un insieme finito, e sia n la cardinalità di X. Quanti sono gli ultrafiltri di $\mathcal{P}(X)$?

Soluzione. Sono n. Dimostriamolo. Poiché $\mathcal{P}(X)$ è finita, gli ultrafiltri di $\mathcal{P}(X)$ sono esattamente i filtri principali generati da un elemento $A \in \mathcal{P}(X)$ che è minimale tra gli elementi di $\mathcal{P}(X)$ non nulli, cioè i singoletti.

Esercizio 38. Sia X un insieme e U un ultrafiltro dell'algebra di Boole $\mathcal{P}(X)$. Mostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti.

(a) U è principale, cioè esiste $Y \in \mathcal{P}(X)$ tale che U è il filtro generato da Y (cioè $U = \{Z \subseteq X \mid Y \subseteq Z\}$).
(b) Esiste un elemento $x \in X$ tale che $U = \{Y \subseteq X \mid x \in Y\}$.

[3] Un elemento minimale tra gli elementi non nulli è detto atomo.

Soluzione. (b) $\Rightarrow$ (a). U è il filtro generato da $\{x\}$.

(a) $\Rightarrow$ (b). Supponiamo (a). Allora esiste $Y \in \mathcal{P}(X)$ tale che Y è minimo di U. $Y \neq \varnothing$ perché U è proprio. Esiste $x \in Y$. $\uparrow\{x\}$ è filtro proprio. $U = \uparrow Y \subseteq \uparrow\{x\}$. Dato che U è massimale tra i filtri propri rispetto all'inclusione, $Y = \uparrow\{x\}$.

Esercizio 39. Sia X un insieme e U un ultrafiltro dell'algebra di Boole $\mathcal{P}(X)$. Si mostri che le seguenti condizioni sono equivalenti.

(a) U non è principale.
(b) Ogni sottoinsieme $Y \subseteq X$ cofinito (cioè tale che $X \setminus Y$ è finito) appartiene a U.

Soluzione. (b) $\Rightarrow$ (a). Assumiamo (b). Supponiamo per assurdo che U sia principale e facciamo vedere che esiste un sottoinsieme Y cofinito che non appartiene a U. Se U è principale, allora esiste $x \in X$ tale che $U = \uparrow\{x\}$. Poiché $X \setminus \{x\}$ è cofinito, appartiene a U. Perciò anche $\varnothing = \{x\} \cap (X \setminus \{x\})$ apparterrebbe a U, e quindi U non è proprio; assurdo.

(a) $\Rightarrow$ (b). Sia U non principale. Supponiamo, per assurdo che esista Y cofinito con $Y \notin U$. Allora $X \setminus Y$ è finito e appartiene a U. $X \setminus Y = \{x_1, \dots, x_n\}$. Allora $\{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\} = X \setminus Y \in U$. Poiché U è un ultrafiltro, U è primo, e perciò esiste $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\{x_i\} \in U$. Perciò U è l'ultrafiltro principale generato da x_i.

Esercizio 40. Sia X un insieme infinito. Sia $\mathcal{B}$ l'insieme dei sottoinsiemi A di $X \cup \{\infty\}$ tali che (A è finito e non contiene ∞) oppure (A è cofinito e contiene ∞). Mostrare che $\mathcal{B}$ è un'algebra di Boole isomorfa all'algebra dei finiti e cofiniti di X.

Soluzione. È un'algebra di Boole perché è una sottalgebra di $\mathcal{P}(X \cup \infty)$, che è un'algebra di Boole. Definiamo un isomorfismo da $\mathcal{P}(X \cup \infty)$ a $\mathcal{P}(X)$: $A \mapsto A \setminus \{\infty\}$.

Esercizio 41. Sia X un insieme infinito. Si consideri la sottalgebra di $\mathcal{P}(X)$

$$A \coloneqq \{Y \subseteq X \mid Y \text{ è finito o cofinito}\}.$$

Si caratterizzino tutti gli ultrafiltri di A. Come si deduce dalla dimostrazione del Teorema 3.86 delle dispense (Rappresentazione di Stone), denotando con $\mathcal{U}(A)$ l'algebra delle parti dell'insieme degli ultrafiltri di A, l'algebra A è isomorfa a una sottalgebra A' di $\mathcal{P}(\mathcal{U}(A))$. Quali sono gli elementi di tale sottalgebra? (Si dia una descrizione più esplicita possibile.)

Esercizio 42. Sia X un insieme infinito. Si mostri che esiste un ultrafiltro di $\mathcal{P}(X)$ non principale.

Soluzione. Sia F il filtro dei cofiniti. Poiché X è infinito, F è proprio. Per il teorema dell'ultrafiltro (Teorema 3.82), F si estende a un ultrafiltro U. U non può essere principale perché contiene tutti i cofiniti (e quindi anche i complementari dei singoletti).

Esercizio 43. Sia X un insieme, sia $\mathcal{A}$ una sottalgebra di Boole di $\mathcal{P}(X)$ e sia $x \in X$. Mostrare che $F \coloneqq \{Y \in \mathcal{A} \mid x \in Y\}$ è un ultrafiltro di $\mathcal{A}$. È corretto asserire che è principale?

Soluzione. È chiaramente un filtro, ed è proprio perché $\varnothing \notin F$. Per ogni $Y \in \mathcal{A}$ abbiamo $A \in F$ (cioè $x \in A$) oppure $\neg A \in F$ (cioè $x \in X \setminus A$). Perciò, per il Lemma 3.79, è un ultrafiltro.

Non è corretto asserire che è principale. Infatti, si consideri il seguente controesempio. Sia X un insieme infinito, e sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei sottoinsiemi A di $X \cup \{\infty\}$

tali che (A è finito e non contiene ∞) oppure (A è cofinito e contiene ∞). Si prenda $x = \infty$.

Esercizio 44. Sia X un insieme infinito. Quali sottoinsiemi di X appartengono ad ogni ultrafiltro non principale di $\mathcal{P}(X)$?

Esercizio 45. Si mostri che, se F è un filtro che non è un ultrafiltro, allora F è contenuto in almeno due ultrafiltri diversi.

Esercizio 46. Sia $\mathcal{F}$ un filtro proprio su A e sia B un sottoinsieme di A tale che $A \setminus B \notin \mathcal{F}$. Si mostri che esiste un filtro proprio $\mathcal{F}'$ tale che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ e $B \in \mathcal{F}$.

Esercizio 47. Sia S un sottoinsieme di un'algebra di Boole A, e sia $x \in A$. Si supponga che S abbia la finite intersection property. Si mostri che $A \cup \{x\}$ ha la finite intersection property oppure $A \cup \{\neg x\}$ ha la finite intersection property.

Esercizio 48. Sia $\{A_i \mid i \in I\}$ (con $I \neq \emptyset$) una catena di sottoinsiemi di un'algebra di Boole (cioè una collezione di sottoinsiemi totalmente ordinati per inclusione insiemistica). Si mostri che se per ogni $i \in I$ l'insieme A_i ha la finite intersection property allora anche l'unione $\bigcup_{i \in I} A_i$ ha la finite intersection property.

Esercizio 49. Si esibiscano un'algebra di Boole A e un sottoinsieme S con le seguenti proprietà: $0 \notin S$, per ogni $x, y \in S$ si ha $x \wedge y \neq 0$, ma S non ha la finite intersection property.

Esercizio 50. Quali sono gli ultrafiltri dell'algebra di Boole dei finiti-cofiniti di un insieme infinito X?

Soluzione. Sono i filtri principali ($\uparrow \{x\}$, $x \in X$) e il filtro dei cofiniti.

Esercizio 51. Sia $\mathcal{B}$ l'insieme dei sottoinsiemi A di $X \cup \{\infty\}$ tali che (A è finito e non contiene ∞) oppure (A è cofinito e contiene ∞). Sia Ult l'insieme di ultrafiltri di $\mathcal{B}$. Mostrare che la mappa

$$\begin{aligned} U\colon X \cup \{\infty\} &\longrightarrow \mathrm{Ult} \\ x &\longmapsto \{A \in \mathcal{B} \mid x \in A\} \end{aligned}$$

è biunivoca.

2. Algebre di Lindenbaum

Esercizio 52. Siano x e y variabili distinte.

(a) $[x] = [y]$ in $\mathrm{LT}_\emptyset(\{x, y\})$?
(b) $\neg([x] \wedge [y]) = \neg[x] \vee \neg[y]$ in $\mathrm{LT}_\emptyset(\{x, y\})$?
(c) $[x] \wedge [y] = [x]$ in $\mathrm{LT}_\emptyset(\{x, y\})$?
(d) $[x] \wedge [y] = [x]$ in $\mathrm{LT}_{\{x \to y\}}(\{x, y\})$?
(e) $[x] \to [y] = [y] \to [x]$ in $\mathrm{LT}_{\{x \vee y\}}(\{x, y\})$?
(f) $[x] \vee [y] = [x] \wedge [y]$ in $\mathrm{LT}_\emptyset(\{x, y\})$?

Esercizio 53. Sia P un insieme finito. Si stabilisca il numero di elementi dell'algebra di Lindenbaum-Tarski $\mathrm{LT}_\emptyset(P)$ in funzione del numero di elementi di P.

Esercizio 54. Si stabilisca il numero di elementi di un insieme X tale che $|\mathcal{P}(X)| = 4$. Si stabilisca il numero di elementi di un insieme P tale che $|\mathrm{LT}_\emptyset(P)| = 4$.

Esercizio 55. È vero che, per ogni algebra di Boole A finita, esiste un insieme P tale che $A \cong \mathrm{LT}_\emptyset(P)$?

Esercizio 56. È vero che, per ogni algebra di Boole A, esistono un insieme P e un insieme Γ di formule proposizionali con variabili appartenenti a P tale che $A \cong \mathrm{LT}_\Gamma(P)$?

Esercizio 57. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro di un'algebra di Lindenbaum $\mathrm{LT}_\emptyset(P)$. Si mostri che, per tutte le formule φ, ψ nelle variabili proposizionali in P,

(a) $[\neg\varphi] \in \mathcal{U}$ se e solo se $[\varphi] \notin \mathcal{U}$.
(b) $[\varphi \wedge \psi] \in \mathcal{U}$ se e solo se $[\varphi] \in \mathcal{U}$ e $[\psi] \in \mathcal{U}$.
(c) Se $[\varphi], [\varphi \to \psi] \in \mathcal{U}$ allora $[\psi] \in \mathcal{U}$.

Esercizio 58. Qual è l'algebra libera generata dall'insieme vuoto?

Esercizio 59. Sia A l'algebra di Boole degenere (cioè A è un singoletto). Mostrare che non esiste alcun sottoinsieme X di A tale che A è liberamente generata da X.

Esercizio 60. Si mostri che, per ogni algebra di Boole B, esistono un'algebra libera A e un omomorfismo suriettivo $f \colon A \to B$.

Esercizio 61. Sia A un algebra di Boole. Si mostri che esiste un insieme P e un insieme Γ di formule proposizionali tali che A è isomorfo a $\mathrm{LT}_\Gamma(P)$.

Esercizio 62. Trovare un insieme di variabili P e un insieme di formule proposizionali Γ con variabili in P tale che $|\mathrm{LT}_\Gamma(P)| = 8$.

Esercizio 63. Mostrare che ogni algebra di Boole è isomorfa a $\mathrm{LT}_\Gamma(P)$ per qualche P e Γ. (Qui è ammesso prendere Γ incoerente per ottenere l'algebra di Boole di un solo elemento.)

Esercizio 64. Sia X un insieme (di variabili proposizionali). Mostrare che i seguenti insiemi sono in biezione.

(a) $\{Y \mid Y \subseteq X\}$.
(b) $\{\Sigma \mid \Sigma$ insieme massimalmente coerente di formule proposizionali con variabili in $X\}$.
(c) $\{\mathcal{U} \mid \mathcal{U}$ ultrafiltro di $\mathrm{LT}_\varnothing(X)\}$.

3. Algebre atomiche

Esercizio 65. Sia B algebra di Boole finita, di cardinalità 2^n, dove n è il numero di atomi. Dimostra che qualunque insieme di $n-1$ atomi di B genera B.

Esercizio 66. Siano A un algebra di Boole, e sia B una sua sottalgebra (cioè $B \subseteq A$, e B è chiuso per le operazioni booleane). È vero che ogni atomo dell'algebra di Boole B è atomo dell'algebra di Boole A?

Esercizio 67. Siano B_1 e B_2 algebre di Boole finite, con $|B_1| = |B_2| = 2^n$. Quanti isomorfismi ci sono da B_1 a B_2?

Esercizio 68. Un insieme parzialmente ordinato è detto *completo* se ogni suo sottoinsieme ammette sup (equivalentemente, se ogni suo sottoinsieme ammette inf). Si mostri che esistono algebre di Boole che non sono complete.

Soluzione. Sia B l'algebra di Boole dei finiti-cofiniti di $\mathbb{N}$. B non è completa. Infatti, sia P il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ costituito da tutti i numeri pari. Sia S l'insieme dei sottoinsiemi finiti di P. S è un sottoinsieme di B che non ammette sup.

Esercizio 69. Esibire un'algebra atomica che non sia completa (cioè che non ammette sup e inf arbitrari). (Tale algebra non può essere isomorfa a un'algebra delle parti, in quanto queste sono sempre complete.)

Esercizio 70. Sia $U \coloneqq \{a, b, c\}$. Determinare il numero di sottalgebre di $\mathcal{P}(U)$.

Esercizio 71. Diciamo che un'algebra di Boole A è *densa* se per ogni $x, y \in A$ tali che $x < y$ esiste $z \in A$ tale che $x < z < y$. Si mostri che un'algebra di Boole è densa se e solo se non ha atomi.

4. Curiosità

Gli ultrafiltri possono essere usati per rispondere (negativamente) alla seguente domanda:

È vero che, per ogni gioco a turni (potenzialemente infiniti) tra due giocatori che preveda in ogni caso un vincitore e uno sconfitto (quindi senza possibilità di pareggiare) e che sia deterministico (cioè non c'è una componente randomica), esiste una strategia vincente per almeno uno dei due giocatori?

La risposta (abbastanza sorprendentemente) è no. Un gioco senza strategie vincenti è il seguente.

Si fissi un ultrafiltro non-principale U di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. A turno, il giocatore A e il giocatore B scelgono un numero naturale, con la condizione che esso sia strettamente maggiore di quelli scelti precedentemente. Indicando con a_i l'i-esimo numero scelto da A e con b_i l'i-esimo numero scelto da B, avremo una successione

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < b_3 < \dots$$

B vince se $\bigcup_{i \in \mathbb{N}}([a_i + 1, b_i] \cap \mathbb{N}) \in U$, altrimenti vince A.

La dimostrazione del fatto che né A né B ha una strategia vincente si basa su un argomento di "rubare la strategia": se A avesse una strategia vincente, allora B potrebbe copiarla per ottenere una strategia vincente per sé (il che è assurdo perchè non possono avere entrambi strategie vincenti), e viceversa. Per maggiori dettagli, si veda il libro [Logic in games. Johan Van Benthem. 2014. M.I.T. Press., Example 5.1, p. 105].