Optimización Comercial

Marco Aias et al.

28 de abril de 2021

1. A realizar

Sea una cierta compañía de trenes de alta velocidad; la cual ofrece servicios de transporte entre distintas ciudades españolas, desde y hacia Madrid.

Sea el trayecto que nos compete Madrid-Bilbao, hemos de determinar la mejor manera de comercializar los asientos de tal tren según los distintos productos ofrecidos.

Consiste en determinar la cantidad de asientos esperados a ser vendidos para cada producto, con tal de que el total vendido sea óptimo.

Para tal se empleará un modelo de manejo de ingresos; ámpliamente usado, el algoritmo heurístico EMSR-b (Expected Marginal Seat Revenue).

Con tal información de demanda esperada para cada producto, se ha de determinar el número de vagones a configurar para el tren, atendiendo a las tasas implicadas.

2. Productos

Clase de reserva	Tarifa [€]	Cambios permitidos	Sala Vip	Fast Track	Elección asiento
A	180	Sí	Sí	Sí	Sí
B	130	Solo 1 (penalización 25 €)	No	Sí	Sí
C	100	Solo 1 (penalización 60 €)	No	No	Sí
D	80	No	No	No	No
E	40	No	No	No	No

Tabla 1: Servicios y precio de cada clase.

3. Demanda

Un departamento de *forecasting* ha proyectado para un día en concreto la demanda esperada para cada producto. Ésta viene recogida en la tabla 2.

Se asume que la demanda para cada clase es independiente del resto; se asume la llegada de los clientes según la tarifa: primero se venden los asientos de la clase E, antes de ser vendidos aquellos con una tarifa más elevada.

Clase de reserva	μ	σ
A	?	?
B	87	8
C	89	9
D	?	?
E	60	9

Tabla 2: Proyección de demanda para cada clase. (Trayecto MAD - BIO)

$$\sigma_1 = e^{\mu/7} + 2 \tag{1}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{10}\mu^3 - 20\mu + 20 \tag{2}$$

La tabla 2 y las ecuaciones (1) y (2) corresponden al trayecto MAD - BIO; las ecuaciones aplican a las clases A y D.

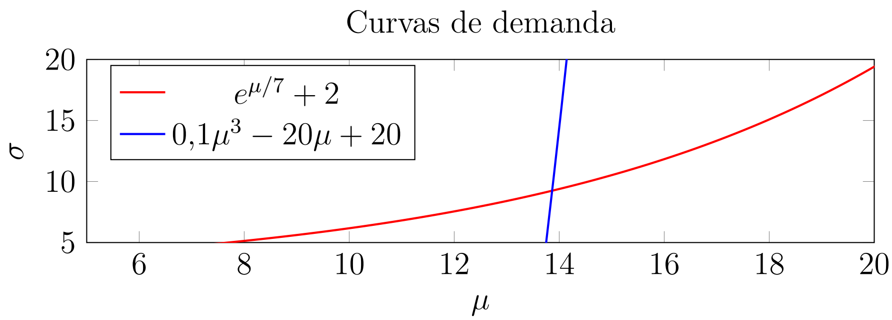

Figura 1: Representación de las ecuaciones (1) y (2)

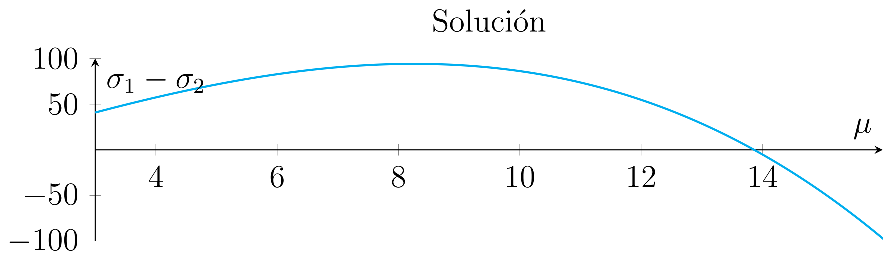

Figura 2: Ecuación (1) - (2)

Sea el espacio de la solución:

$$\{5 \leq \mu \leq 35\}, \{1 \leq \sigma \leq 30\}$$

Según las figuras 1 y 2, la solución se encuentra en un entorno alrededor de $\mu \approx 14$.

4. Probabilidad EMSR

Para el cálculo de los EMSR(s), se requiere conocer la probabilidad de demanda; para lo cual el modelo toma los datos de demanda proyectados en la tabla 2 y forma una distribución normal de probabilidades.

La distribución gaussiana:

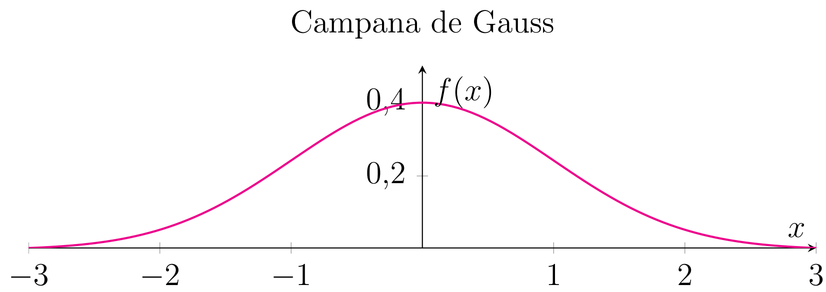

Figura 3: Ecuación $\underset{\mu=0,\,\sigma=1}{(3)}$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \tag{3}$$

$$P(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{=} 1 \tag{4}$$

La integral (4) no se puede resolver de forma analítica, sino por aproximación por el *método del trapecio* y también por el método de Simpson.

Dado que la función (3) es simétrica, la integral $\underset{t=\mu}{(4)}$ es igual a $\frac{1}{2}$. Entonces no es necesario calcular entre $(-\infty, t)$, sino $\frac{1}{2}+\int_{\mu}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ lo que alivia muchos recursos computacionales.

$$P(t) = \frac{1}{2} + \int_{\mu}^{t} \underset{(\mu,\sigma)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

5. Algoritmo EMSR-b

Consiste en proteger suficientes *asientos* de respectivas clases con tal de maximizar el ingreso total.

Se basa en la *Regla de Littlewood*:

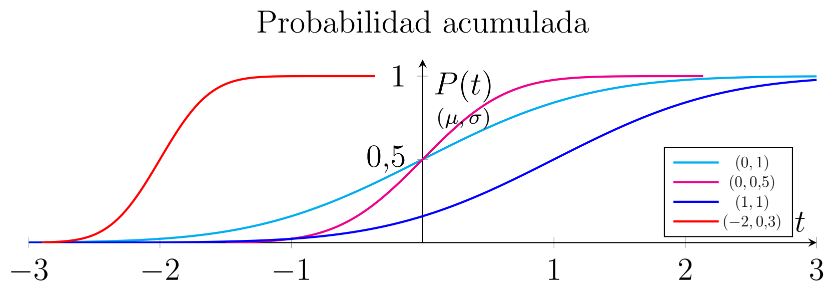

Figura 4: Probabilidad acumulada en función de t y (μ, σ) (5)

Regla 1 *La razón entre las tarifas de respectivas clases ha de ser igual a la probabilidad de ser ocupado el asiento de la clase de la tarifa superior*

Ha de encontrarse el número de asientos protegidos (t) que satisfaga la probabilidad $(P(t))$ (5) de ser ocupados requerida por la razón de las respectivas tarifas.

Ampliamos la tabla 2 para calcular los parámetros relativos a los EMSR(s):

Clase$_i$	Tarifa$_i$	μ_i	σ_i	tmp$_i$	$\overline{\mu}_i$	$\overline{\sigma}_i$	Protección
A_1	180	?	?				
B_2	130	87	8				
C_3	100	89	9				
D_4	80	?	?				
E_5	40	60	9	-	-	-	-

Tabla 3: Valores EMSR-b

Según el algoritmo EMSR-b se comparan las clases en orden ascendente de precio. Se aplica la regla de Littlewood entre una clase y el resto cuál sea de mayor tarifa. i.e. la clase E $(i = 5)$ se compara con el conjunto de las clases A, B, C y D; la clase C $(i = 3)$ se compara con A y B etc.

Entonces se obtiene la tarifa media ponderada de un conjunto de clases como:

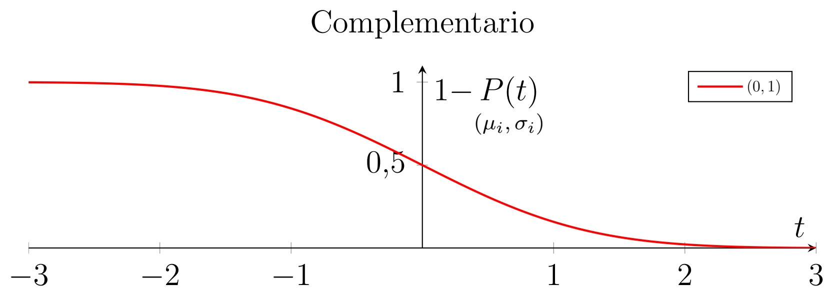

Figura 5: Complementario de CDF

$$\text{Tarifa media ponderada}_i \equiv \text{tmp}_i = \frac{\sum_{k=1}^{i} \text{tarifa}_k \cdot \mu_k}{\sum_{k=1}^{i} \mu_k} \tag{6}$$

Para el conjunto de demanda se agregan las demandas:

$$\overline{\mu}_i = \sum_{k=1}^{i} \mu_k \tag{7}$$

Para la desviación conjunta se toma la raíz cuadrada del sumatorio de las varianzas:

$$\overline{\sigma}_i = \sqrt{\sum_{k=1}^{i} \sigma_k^2} \tag{8}$$

Dados estos parámetros conjuntos, se procede a aplicar la regla de Littlewood entre cada clase y el conjunto restante.

$$\frac{\text{tarifa}_{i+1}}{\text{tmp}_i} = \underset{(\overline{\mu}_i, \overline{\sigma}_i)}{P}(x > \theta_i) \tag{9}$$

Ha de encontrarse un valor θ_i para cada conjunto de clase, que representa el número de asientos protegidos, para el cuál la probabilidad de que tantos sean ocupados sea igual a la razón de tarifas.

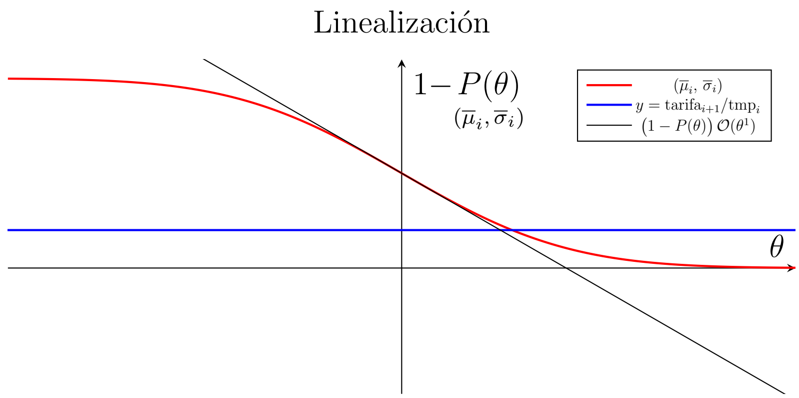

Figura 6: Resolución de (10)

$$g(\theta) = \frac{1}{2} - \int_{\mu_i}^{\theta_i} \underset{(\overline{\mu}_i, \overline{\sigma}_i)}{f(x)}\, \mathrm{d}x - \frac{\text{tarifa}_{i+1}}{\text{tmp}_i} = 0 \tag{10}$$

Se puede resolver por linealización, i.e. Newton.

Se resuelve para todos los valores EMSR y completa la tabla 3.

5.1. Valores preliminares

Clase$_i$	Tarifa$_i$	μ_i	σ_i	tmp$_i$	$\overline{\mu}_i$	$\overline{\sigma}_i$	Protección
A$_1$	180	14	9	180	14	9	9
B$_2$	130	87	8	137	101	12	94
C$_3$	100	89	9	120	190	15	183
D$_4$	80	14	9	117	204	18	211
E$_5$	40	60	9	(99)	(264)	(20)	(289)*

Tabla 4: Valores EMSR-b preliminares

6. Vagones

Las tasas relativas al número de vagones y al número de pasajeros se recojen en la tabla 5.

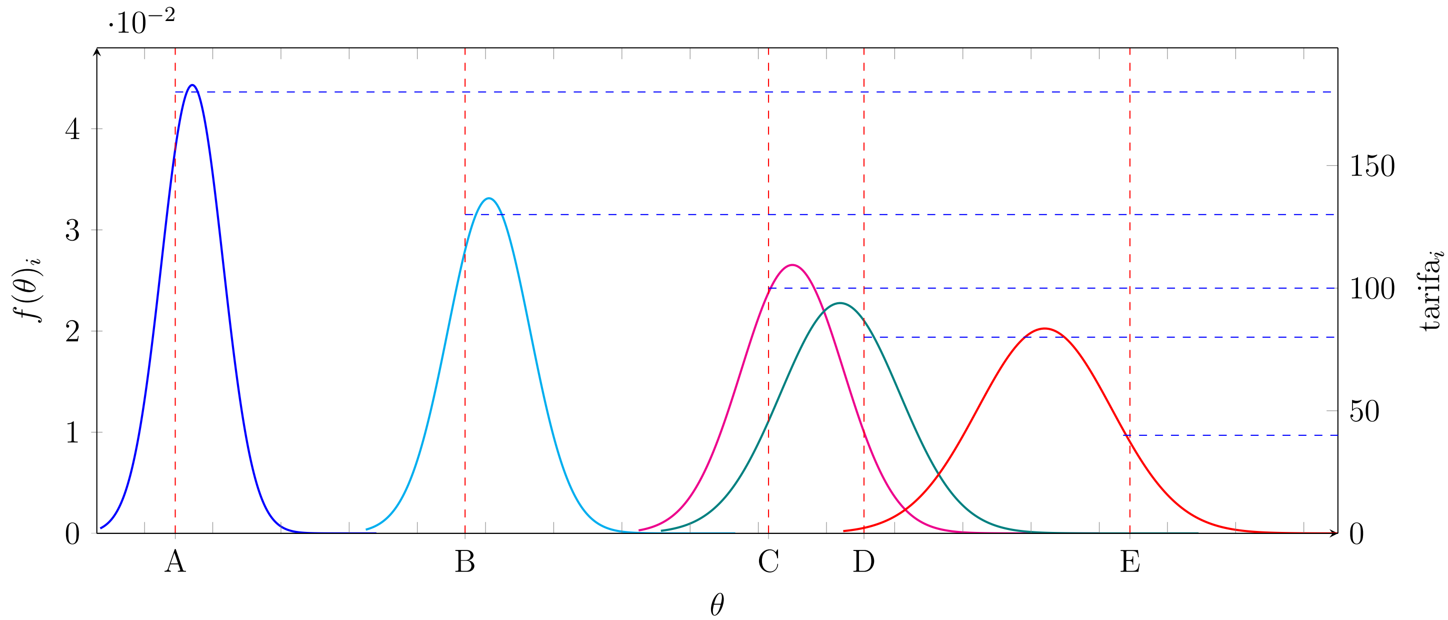

Figura 7: Distribuciones

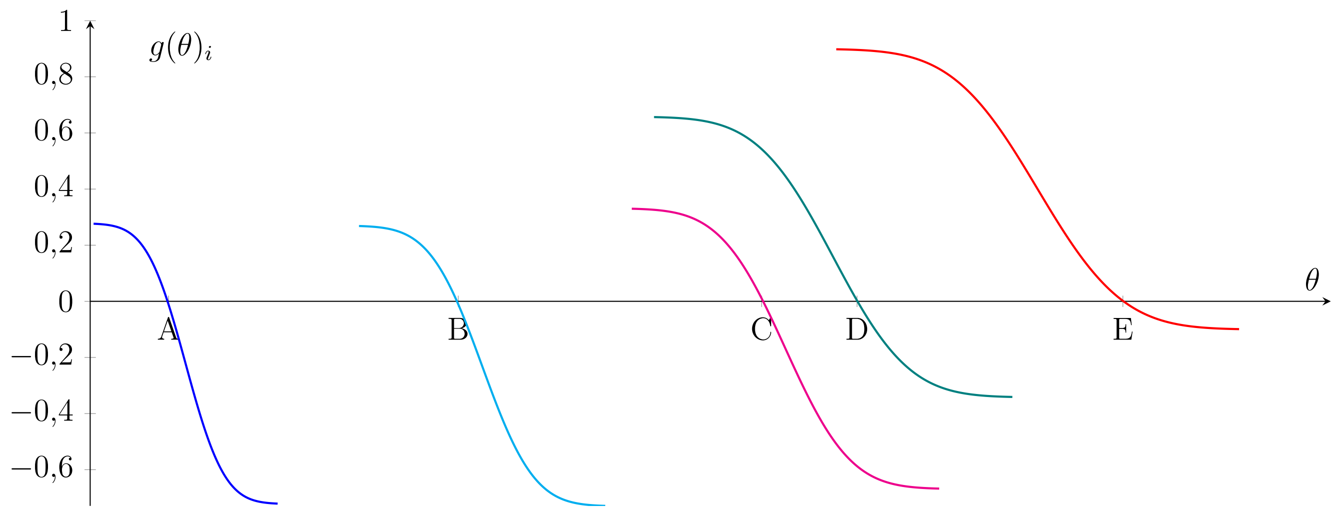

Figura 8: Distribuciones

Concepto	Tasa [€]
Tasa por pasajero	1,5
Coste por vagón	500

Tabla 5: Conceptos relativos a vagones y pasajeros