

Entwicklung Effizienter Multivariater Lebensdauertests

Developing Efficient Multivariate Lifetime Tests

Der Fakultät Konstruktions-, Produktions- und Fahrzeugtechnik
der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) vorgelegte
Abhandlung

von
Marco Arndt, M.Sc.
aus Ravensburg

Hauptberichter: PD Dr.-Ing. Martin Dazer
Mitberichter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Mit Berichter

Tag der mündlichen Prüfung:

Institut für Maschinenelemente der Universität Stuttgart

2026

Vorwort

Thanks for your service.

Kurzfassung/Abstract

-TODO-TODO-TODO-TODO-TODO-TODO-TODO-TODO-TODO-TODO-TODO-

TODO:

-
- Abstract / Kurzfassung / Danksagung
- Bilder prüfen
- "mark changes after your Oral presentation for review"
- "textcolor blue in definitions ändern
- "Print"Funktion aktivieren
- "nocite"Funktion deaktivieren in main Z.269

-TODO-TODO-TODO-TODO-TODO-TODO-TODO-TODO-TODO-TODO-TODO-

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
Kurzfassung/Abstract	v
Nomenklatur	ix
Abkürzungen	ix
Indizes	ix
Formelzeichen	ix
Abbildungsverzeichnis	xiii
Tabellenverzeichnis	xv
1 Einleitung	1
1.1 Forschungsperspektive und Problembeschreibung	2
1.2 Beitrag dieser Arbeit	3
1.3 Aufbau der Arbeit	4
2 Stand der Forschung und Technik	7
2.1 Zuverlässigkeitstechnik und Wahrscheinlichkeitstheorie	7
2.1.1 Begriffe und Definitionen	8
2.1.2 Deskriptive Statistik für Lebensdauerdaten	9
2.1.3 Parametrische Lebensdauermodelle	11
2.1.4 Parameterschätzverfahren	13
2.2 Statistische Versuchsplanung und Modellbildung	17
2.2.1 Grundbegriffe der statistischen Versuchsplanung	17
2.2.2 Statistische Lebensdauer-Versuchspläne	17
2.2.3 Statistische Modellbildung	17

3	Ansätze zur Effizienzsteigerung in der Planung von ausfallbasierten Lebensdauertests mit mehreren Faktoren	19
3.1	Bewertung des Standes der Forschung und Technik	19
3.2	Forschungsfragen und Aufbau der Arbeit	19
4	Parameter-Screening für multifaktorielle Lebensdauertests	21
4.1	Identifikation potenzieller Einflussgrößen	21
4.2	Kreativmethoden zum Auswahlprozesse im Parameter-Screening	21
4.3	Randbedingungen in der Parameterauswahl für die Zuverlässigkeitsmodellierung	21
4.4	Vorgehen zum heuristische Screening für die Zuverlässigkeitsmodellierung	21
4.5	Zusammenfassung	21
5	Effiziente multivariate Versuchspläne für Lebensdaueruntersuchungen	23
6	Fallstudie	25
7	Zusammenfassung und Ausblick	27
7.1	Key Findings	27
7.2	Diskussion	27
7.3	Ausblick	27
	Literatur	29
	Anhang	33
A	Ein Anhang	33
A.1	Unteranhang 1	33

Nomenklatur

Abkürzungen

<i>cdf</i>	Cumulative Distribution Function
<i>pdf</i>	Probability Density Function
ALT	Accelerated Lifetime Testing
BEV	Battery Electric Vehicle
CI	Confidence Interval
DoE	Design of Experiments
ECU	Electronic Control Unit
EoL	End-of-Life
MLE	Maximum-Likelihood-Estimation
MMR	Median-Rank-Regression-Methode
OLS	Ordinary Least Squares

Indizes

0	zum Zeitpunkt $t = 0$
i	Laufvariable
j	Laufvariable (Parameter-Index)
l	Laufvariable (Parameter-Index)
q	Quantilwert

Formelzeichen

α	Signifikanzniveau
b	Weibull-Formparameter (Weibull-Modul)
δ	Statusindikator (1=Ausfall, 0=Zensiert)
$E(\cdot)$	Erwartungswert
$F(\cdot)$	Ausfallwahrscheinlichkeit, Verteilungsfunktion
$f(\cdot)$	Dichtefunktion
\mathcal{I}	Fisher-Informationsmatrix
\mathcal{I}_O	Beobachtete Fisher-Informationsmatrix
$\Gamma(\cdot)$	Gamma-Funktion
H	Hessian-Matrix (der Log-Likelihood-Funktion)
k	Anzahl der Modellparameter
$\mathcal{L}(\cdot)$	Likelihood-Funktion
$\Lambda(\cdot)$	Log-Likelihood-Funktion
$\lambda(\cdot)$	Ausfallrate
μ	Erwartungswert der Lebensdauer (theoretisch)
n	Stichprobenumfang
Pr	Wahrscheinlichkeit
R	Zuverlässigkeit
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
s	Empirische Standardabweichung (von x)
s^2	Empirische Varianz (von x)
se	Standardfehler (Standard Error)
$\hat{\Sigma}$	Varianz-Kovarianz-Matrix (geschätzt)
σ^2	Varianz der Lebensdauer (theoretisch)
T	Charakteristische Lebensdauer (Skalenparameter)
t	Zeit, Lebensdauermerimal
t	Vektor der Ausfallzeiten
τ	kontinuierliche Zufallsvariable

θ	Vektor der Modellparameter
$\text{Var}[\cdot]$	Varianz-Operator
$\mathcal{W}(\cdot, \cdot)$	Weibull-Verteilung (Notation)
x	Messwert, Variable
\bar{x}	Arithmetischer Mittelwert (empirisch)
z	Integrationsvariable (Gamma-Funktion)

Abbildungsverzeichnis

2.1	Weibull $f(t)$ für ausgewählte Werte von T und b	13
-----	--	----

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

Die Absicherung technischer Produkte und Systeme hinsichtlich ihrer Funktionalität bildet einen zentralen Bestandteil der ingenieurwissenschaftlichen Verantwortlichkeiten im Produktentwicklungsprozess. Motiviert durch Produktversprechen gegenüber der potenziellen Käuferschaft sowie bestehender Kunden, zur Wahrung des Selbstverständnisses einer Marke oder rein aufgrund regulatorischer Vorgaben soll hier im Kontext des vorgesehenen Einsatzzweckes Zuverlässigkeitsmanagement betrieben werden. So wird insbesondere aus Marktperspektive erwartet, dass ein (technisches) Produkt - ein Fahrzeug, ein Smartphone, eine Photovoltaikanlage - seine Funktionalität mindestens zum Gewährleistungs- oder Garantiezeitraum uneingeschränkt erfüllt.

Über den gesamten Produktlebenszyklus hinweg unterstützen Methoden der Zuverlässigkeitstechnik dabei, diese Anforderungen systematisch zu erfüllen. Verfahren aus dem Bereich „Safety“, explorative Datenanalysen zur Untersuchung der Produktperformance im Betrieb oder Test, effiziente Versuchsplanung zur Analyse oder zum Nachweis der Lebensdauer am Design, Methoden der beschleunigten Versuchsplanung, engl. [Accelerated Lifetime Testing \(ALT\)](#), der Aufbau probabilistischer Lebensdauermodelle sowie das Risikomanagement im Allgemeinen eignen sich für diese Herausforderung. Das zentrale Ergebnis liegt in der Ermittlung der Ausfallwahrscheinlichkeit als Komplement zur Zuverlässigkeit - also der Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt unter den definierten Randbedingungen eine vorgegebene Zeitdauer ohne funktionskritischen Ausfall übersteht [1]. Üblicherweise soll so nachgewiesen werden, dass das Erzeugnis dem Einfluss einer bestimmten Belastung - beispielsweise einer physikalischen oder elektrischen Kraft, einem Wärmeeintrag oder der Exposition gegenüber einer chemischen Beanspruchung - standhält. Gelingt in der Praxis keine hinreichend genaue Quantifizierung dieser probabilistischen Metrik, so liegen die Ursachen jedoch nicht zwangsläufig allein in ökonomischen Einschränkungen wie dem Zeit- und Kostenbudget für ein erforder-

liches Testing oder einem fehlenden methodischen Know-how - vielmehr könnten *mehrere* Einflussfaktoren auf die Zuverlässigkeit einwirken und sogar Wechselwirkungen ausprägen, ohne dass dies adäquat wahrgenommen oder antizipiert wird. Moderne Produkte können schlichtweg durch multivariat bedingte Fehlermechanismen ausfallen.

1.1 Forschungsperspektive und Problembeschreibung

Da trotz genannter Umstände die Kundenanforderungen und Garantiebedingungen üblicherweise als unveränderlich, teils sogar als zunehmend anspruchsvoller zu verstehen sind, werden Unsicherheiten in der Lebensdauerabsicherung dann meist nur durch präventive Wartungsstrategien, durch Tolerierung von Restrisiken oder durch die Inkaufnahme nachträglicher Schadensbegrenzung behandelt. Der zugrunde liegende Gedanke: ehe ein Produkt, dessen Lebensdauerverhalten nicht quantifizierbar verstanden ist, einen kritischen Verschleißzustand erreicht, wird es im Rahmen eines festgelegten Wartungsintervalls vorsorglich ersetzt. Dabei könnte zugrunde liegen, dass schlichtweg kein physikalisches Modell oder eine ausreichend ausgeprägte empirische Datengrundlage vorhanden ist. Führt auch diese Vorsorge zu erheblichen Regress- oder Kulanzkosten, müssen ausfallschutzorientierte Maßnahmen - bis hin zu Rückrufaktionen - frühzeitig eingeplant und umgesetzt werden, um Image- und Kostenrisiken (wenn auch selten nachhaltig) zu minimieren. Um jenes zu vermeiden, muss also bereits im Vorfeld den verschiedensten Randbedingungen mithilfe der Zuverlässigkeitstechnik begegnet werden. Besonders komplexe Randbedingungen lassen sich beispielsweise durch eine hochgradige Integration von Elektrifizierung und Digitalisierung, verkürzte Entwicklungszyklen, verschärfter Kostendruck, sich per se verändernde Prioritäten aus Marktperspektive, wandelnde Materialauswahl und -komposition, leistungsoptimierte Belastungsszenarien, intensivierte Einsatzbedingungen und nicht zuletzt eine effiziente Ressourcennutzung innerhalb eines Produkts beschreiben - um nur einige zu nennen. Ein einfaches Beispiel verdeutlicht dies: Der komfortable sowie ausfallfreie Betrieb eines Fahrzeugs soll einerseits gegenüber verschiedensten Schadensursachen gewährleistet werden; andererseits hängt er maßgeblich vom Funktionserhalt einer inzwischen

bis zu dreistelligen Anzahl an [Electronic Control Units \(ECUs\)](#) ab - während in der jüngeren Vergangenheit noch eine geringe bis mittlere zweistellige Anzahl mit nur begrenztem Funktionsumfang üblich war [2]. Oder aber der störungsfreie Betrieb digitaler Services im [Battery Electric Vehicle \(BEV\)](#) setzt bei Zentralisierung von [ECU-Funktionen](#) die stetige Funktionsfähigkeit der Traktionsbatterie voraus, durch deren chemische Alterung, verschiedenst beeinflusst, sich jedoch zeitgleich wiederum weitere Unsicherheiten aus verschiedenen Einflüssen eingliedern können. Ein damit betrachtetes System bildet somit ein vielfältig komplexeres Netzwerk aus teils wechselwirkenden oder direkten Eigenschaften, die zu einem Versagen führen könnten.

Damit kann festgehalten werden: Produktdesigns werden angesichts steigender Kundenanforderungen zunehmend raffinierter und im Sinne des Effizienzgedankens optimiert (z.B. durch mehr Sensorik, Rechenleistung und fortschrittliche Assistenzsysteme), gleichzeitig wird jedoch die Art und Weise eines möglichen Funktionsverlustes zunehmend komplexer. Somit rückt die Fähigkeit, Prognosen über die Lebensdauer und Ausfallwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von mehreren Einflussgrößen treffen zu können, zunehmend in den unternehmerischen Fokus. Über die klassische Testplanung im Rahmen der Zuverlässigkeitstechnik hinaus erfordert dies also Methoden der statistischen Versuchsplanung bei gleichzeitiger Berücksichtigung *mehrerer* Einflussfaktoren auf die Lebensdauer. Methoden wie [ALT](#) und die Lebensdauermodellbildung behalten dabei weiterhin ihre Relevanz und bilden einen unverzichtbaren Bestandteil einer fundierten Teststrategie.

1.2 Beitrag dieser Arbeit

Ausgehend von der beschriebenen Problemstellung lässt sich der übergeordnete Beitrag dieser Arbeit wie folgt formulieren: Liegt ein komplexes technisches System vor und soll dieses hinsichtlich seiner Lebensdauer empirisch untersucht werden, um fundierte Prognosen über die Funktionalität im Betrieb treffen zu können, so müssen mehrdimensionale Lebensdaueruntersuchungen nach dem Prinzip des [Design of Experiments \(DoE\)](#) geplant werden. Neben der bloßen Implementierung von mehrdimensionalen Tests für die Lebensdauererprobung berücksichtigt dieser Ansatz damit:

- eine effiziente Methodik zur gezielten Vorauswahl relevanter Faktoren aus der Gesamtheit potenzieller Systemparameter - mit dem Ziel, deren signifikanten Einfluss auf die Lebensdauer zu untersuchen;
- die Auswahl geeigneter Strategien und passender Testpläne zur statistisch abgesicherten Quantifizierung von Einflüssen auf die Lebensdauer, in Kombination mit konventionellen Zuverlässigkeitsmethoden wie beispielsweise ALT;
- eine präzise Parameterschätzung zur mathematischen Beschreibung der Effekte auf Basis der als signifikant identifizierten Einflussgrößen;
- die Bilanzierung geeigneter Testpläne im Vergleich zu etablierten, in der Literatur bereits umfangreich diskutierten Versuchsplänen, insbesondere hinsichtlich potenzieller Abweichungen bei nicht-normalverteilten Daten.

1.3 Aufbau der Arbeit

Der allgemeine inhaltliche Aufbau der vorliegenden Arbeit kann **Abb. 1** entnommen werden. So folgt auf die in diesem Abschnitt beschriebene Problemstellung sowie Ausführung über den generellen Beitrag der Arbeit weiter in Kapitel 2 der relevante Stand aus aktueller Forschung und Literatur. Kapitel 3 fasst schließlich den Forschungsbedarf zusammen und stellt das Ziel der Arbeit, aus der sich die relevanten Forschungsfragen ergeben, konkret heraus. Kapitel 4 beinhaltet die Vorstellung zu effizienten, qualitativen Screening-Methoden. Hier werden die herausgearbeiteten Vorschläge zu einer Auswahl an heuristischen Methoden für die Selektion der perspektivisch wenig relevanten Faktoren beschrieben, die für die Umsetzung in der experimentellen statistischen Datenerhebung für maßgeblich erachtet werden. Weiter werden in Kapitel 5 darauf die Rahmenbedingungen für die zur statistischen Versuchsplanung neu herausgearbeiteten Versuchsplankonfigurationen für effiziente Lebensdauertests abgeglichen und schließlich bewertet. Als Ergebnis sind neben neuen, effizienten Versuchsplänen auch die relevanten Merkmale beschrieben, die es bedarf, um Versuchspläne im Kontext von Lebensdauertests zu bewerten. **Kapitel 6**. Abschließend stellt Kapitel 7 eine Zusammenfassung über die methodische Herangehensweise und die erreichten Ergebnisse der Arbeit zusammen und ordnet diese

für künftige Forschungsbestrebungen im Bereich der multivariaten Lebensdauer-Versuchsplanung ein.

2 Stand der Forschung und Technik

Dieses Kapitel stellt die für diese Arbeit erforderlichen technischen und methodischen Grundlagen bereit. Zunächst werde in Abschnitt 2.1 zentrale Begriffe und Konzepte der Zuverlässigkeitstechnik sowie das grundlegende statistische Verfahren zur Lebensdauer-Datenanalyse in Kombination mit Versuchsplänen erläutert. Darauf aufbauend folgen in Abschnitt 2.2 die Einführung und die Einordnung von DoE sowie der multivariaten Lebensdauermodellierung aus dem Stand der Technik und der Wissenschaft, die beide für die Entwicklung effizienter Lebensdauer-versuchspläne maßgeblich sind. Im Kontext der Lebensdauererprobung umfasst dies insbesondere typische, statistische Versuchspläne sowie Metriken und Indikatoren zur allgemeinen Bewertung der Versuchspläne.

2.1 Zuverlässigkeitstechnik und Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Zuverlässigkeitstechnik befasst sich mit der probabilistischen Beschreibung der Lebensdauer technischer Produkte und Systeme sowie der strategischen und statistischen Planung von Lebensdauer-tests. Ziel ist die statistische Modellierung des Ausfallverhaltens unter Berücksichtigung der Funktionalität des Produkts bei relevanten Randbedingungen. Eine zentrale Aufgabe besteht somit in der statistischen Charakterisierung des Ausfallbegriffs mithilfe deskriptiver Statistik sowie in der Parametrisierung geeigneter Verteilungen zur Abbildung des Lebensdauer- verhaltens. Die Modellierung kann - abhängig von den Randbedingungen - auf Basis *einer einzelnen* Belastungsgröße oder *mehrerer* Beanspruchungsparameter erfolgen, die gemeinsam den Produktausfall determinieren. Ein grundlegendes Verständnis des Umgangs mit zufallsverteilten Lebensdauerereignissen ist daher eine elementare Voraussetzung für die statistische Versuchsplanung im Rahmen der Zuverlässigkeitstechnik. Weiterführende Konzepte und vertiefte methodische Ansätze zur Zu-

verlässigkeitstechnik sowie zur statistischen Testplanung sind allen voran in der Standardliteratur von Bertsche und Dazer [1] dargelegt, an deren Vorgehensweise sich die nachfolgenden Ausführungen orientieren.

2.1.1 Begriffe und Definitionen

Der **Ausfall** eines technischen Produkts bezeichnet den Zeitpunkt innerhalb seiner Lebensdauer, zu dem die geforderte Funktionalität unter definierten Umgebungs- und Randbedingungen nicht mehr erfüllt ist - also das Lebensdauerende - engl. **End-of-Life (EoL)**. Als **Belastung** werden die von außen auf ein Produkt einwirkenden Einflussparameter - Kräfte und Momente im mechanischen Kontext - bezeichnet. *Einzelne* oder zeitgleich *mehrere* Einflussparameter induzieren infolge der Produktgestalt daraus **Beanspruchungen**: innere Kräfte, Momente und lokale Spannungen. Belastung und Beanspruchung sind die maßgeblichen Faktoren, welche die Lebensdauer determinieren. Die **Ausfallzeit**, welche diese Zustandsänderung zeitlich definiert, wird im Allgemeinen als kontinuierliche Zufallsvariable $\tau > 0$ aufgefasst. So ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt im Zeitraum bis t einen Funktionsverlust erleidet, zu

$$F(t) = \Pr(\tau \leq t) = \int_0^t f(t) dt. \quad (2.1)$$

Diese Funktion beschreibt die **Ausfallwahrscheinlichkeit**. Sie definiert damit die Verteilungsfunktion - engl. **Cumulative Distribution Function (cdf)** - für stochastische **EoL**-Events, während die **Zuverlässigkeit**

$$R(t) = \Pr(\tau > t) = 1 - F(t) = \int_t^\infty f(t) dt, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

komplementär diejenige Wahrscheinlichkeit $R(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ quantifiziert, zu der das nicht reparierbare Produkt die realisierte Zeit t überlebt: also frei von Funktionsverlust bleibt und funktionsfähig ist [1, 3, 4]. Damit ist die Zuverlässigkeit mathematisch als reellwertige, monoton fallende und stetige Funktion definiert. Gleichwohl ist $R(t)$ keine universelle Eigenschaft, sondern vielmehr eine Funktion der Betriebsbedingungen. Diese Bedingungen umfassen unter anderem eine oder mehrere Belastungsarten und deren Niveaus, Nutzungsverhalten sowie spezifische

Betriebsprofile. Mechanische, elektrische und thermische Belastungen treten dabei am häufigsten auf [5]. Die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** - engl. **Probability Density Function (pdf)** - $f(t)$ der Ausfallzeit beschreibt, wie sich die Wahrscheinlichkeiten der Ausfälle über der Zeit verteilen. Sie folgt somit der Ableitung der *cdf*:

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}\Pr(\tau \leq t), \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

Damit repräsentiert $f(t)$ die Ausfallintensität pro Zeiteinheit und ist proportional zur lokalen Änderungsrate der Ausfallwahrscheinlichkeit. Als vierte fundamentale Größe der Zuverlässigkeitsanalyse wird außerdem die **Ausfallrate** (auch Hazard-Funktion) $\lambda(t)$ eingeführt. Sie quantifiziert das momentane Ausfallrisiko eines Produkts zum Zeitpunkt t , bedingt dadurch, dass es bis zu diesem Zeitpunkt überlebt hat ($R(t) > 0$). Mathematisch ist sie als das Verhältnis der *pdf* zur Zuverlässigkeitsfunktion $R(t)$ definiert:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr(t < \tau \leq t + \Delta t | \tau > t)}{\Delta t} = \frac{1}{R(t)} \left[-\frac{dR(t)}{dt} \right] = \frac{f(t)}{R(t)}. \quad (2.4)$$

Die Ausfallrate $\lambda(t)$ ist von zentraler Bedeutung, da ihr zeitlicher Verlauf (z.B. konstant, steigend, fallend) direkte Rückschlüsse auf zugrundeliegende Ausfallmechanismen wie Frühausfälle, Zufallsausfälle oder Verschleiß (vgl. "Badewannenkurve") zulässt [1, 5, 6].

2.1.2 Deskriptive Statistik für Lebensdauerdaten

Die im vorherigen Abschnitt definierten Funktionen $F(t)$, $R(t)$, $f(t)$ und $\lambda(t)$ beschreiben das stochastische Ausfallverhalten eines Produktes auf einer theoretischen Populationsebene. Für die praktische Anwendung im Engineering müssen diese Funktionen, respektive die Parameter der ihnen zugrundeliegenden Verteilungsmodelle, auf Basis von empirisch ermittelten Lebensdauerdaten jedoch approximiert werden.

Die deskriptive Statistik stellt die notwendigen Methoden zur initialen Charakterisierung, Quantifizierung und Aufbereitung dieser Stichprobendaten bereit. Zur Beschreibung der Lebensdauerverteilungen sind **Lageparameter** und **Streuungs-**

maße notwendig, die zunächst theoretisch (für die Grundgesamtheit) definiert und anschließend aus der Stichprobe berechnet werden.

Der primäre Lageparameter ist der **Erwartungswert** μ der Zufallsvariable τ . Er repräsentiert den Schwerpunkt von $f(t)$ und wird für kontinuierliche Lebensdauerdaten berechnet als:

$$\mu = E[\tau] = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt. \quad (2.5)$$

Ein weiterer Lageparameter ist das **Quantil** t_q der Lebensdauer. Es definiert den Zeitpunkt, zu dem $F(t)$ den Anteil q (respektive das **Perzentil** in Prozentpunkten) erreicht:

$$F(t_q) = q, \quad q \in [0, 1]. \quad (2.6)$$

Damit gibt das q - Quantil denjenigen Lebensdauerwert an, unterhalb dessen der Anteil q aller betrachteten Produkte ausgefallen ist. Ein spezieller Fall ist der **Median** $t_{0.5}$, bei dem die Ausfallwahrscheinlichkeit 50% beträgt:

$$F(t_{0.5}) = 0.5. \quad (2.7)$$

Der Median beschreibt somit den Zeitpunkt, zu dem die Hälfte aller Produkte ausgefallen ist. Damit teilt er die Fläche 1 unter der pdf in zwei gleich große Teilflächen [5, 7].

Das primäre Streuungsmaß ist die **theoretische Varianz** σ^2 , welche die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert beschreibt:

$$\sigma^2 = \text{Var}[\tau] = E[(\tau - \mu)^2] = \int_0^{\infty} (t - \mu)^2 \cdot f(t) dt. \quad (2.8)$$

Da μ und σ^2 als theoretische Parameter üblicherweise unbekannt sind, werden auch sie durch empirische Statistiken approximiert, die aus einer Stichprobe vom Umfang n (bestehend aus den Messwerten x_1, \dots, x_n) berechnet werden. Diese werden wiederum als Realisierungen der Zufallsvariable τ aufgefasst.

Das gängige empirische Äquivalent für den Erwartungswert μ ist der **arithmetische Mittelwert** \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.9)$$

Analog wird die theoretische Varianz σ^2 durch die **empirische Varianz** s^2 (eine erwartungstreue Kenngröße) approximiert:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (2.10)$$

Die **empirische Standardabweichung** $s = \sqrt{s^2}$ dient entsprechend als Näherung für die theoretische Standardabweichung $\sqrt{\sigma^2}$.

2.1.3 Parametrische Lebensdauermodelle

Während die deskriptiven Statistiken \bar{x} und s^2 die zentrale Tendenz und die Streuung der vorliegenden Stichprobe quantifizieren, erlauben sie keine Extrapolation oder die Modellierung der zugrundeliegenden Funktionen $F(t)$ und $f(t)$ der Grundgesamtheit. Um eine prädiktive, mathematische Beschreibung des stochastischen Ausfallverhaltens zu erhalten, müssen die in Abschnitt 2.1.1 definierten Lebensdauerfunktionen durch geeignete parametrische Verteilungsmodelle approximiert werden. Diese Verteilungsmodelle bieten eine geschlossene mathematische Form für *cdf* und *pdf* und ermöglichen es, das komplexe Ausfallverhalten durch eine geringe Anzahl von Parametern zu charakterisieren.

Weibull-Verteilung

In der Zuverlässigkeitstechnik hat sich die **Weibull-Verteilung** aufgrund ihrer hohen Flexibilität als das am häufigsten verwendete Modell etabliert. Je nach zugrundeliegendem physikalischen Ausfallmechanismus finden jedoch auch andere statistische Verteilungen Anwendung, wie beispielsweise die **Lognormal-Verteilung** (häufig bei Ermüdungs-, Korrosions- oder Diffusionsprozessen), die **Exponentialverteilung** (zur Modellierung von Zufallsausfällen ohne Alterungseffekte) oder die **Beta-Verteilung** (allgemein zur formenreichen Modellierung von R über dem festen Intervall $[0, 1]$). Für weitere Ausführungen dazu sei an dieser Stelle jedoch auf bereits ausreichend diskutierte Beiträge in beispielsweise [1, 3, 5, 8] verwiesen.

Die (zwei-parametrische) Weibull-Verteilung ist das Standardmodell zur Beschreibung der Lebensdauer von technischen Produkten ohne die Berücksichtigung eines möglichen dritten Parameters - der ausfallfreien Zeit t_0 . Sie wird durch den

Formparameter $b > 0$ (Weibull-Modul) und die **charakteristische Lebensdauer** $T > 0$ (Skalenparameter), welche dem 63,2-ten Perzentil $t_{0,632}$ entspricht, beschrieben. Unabhängig von b gilt hier: $F(T) = 1 - e^{-1} \approx 63,2\%$. Folgt die Lebensdauer-Zufallsvariable τ dieser Verteilung, wird dies mathematisch als $\tau \sim \mathcal{W}(T, b)$ notiert. Damit ist sie in der Lage, alle drei Phasen der "Badewannenkurve" (Frühausfälle mit $b < 1$, Zufallsausfälle $b \approx 1$, Verschleißausfälle mit $b > 1$) durch die Wahl ihrer Parametrisierung abzubilden, vgl. [1].

Die Einheit des Skalenparameters T entspricht der Einheit des Messwertes (t in Stunden, Überrollungen, Kilometer, etc.). Die *pdf* der Weibull-Verteilung ist damit definiert als:

$$f(t) = \frac{b}{T^b} t^{b-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{T} \right)^b \right], \quad t > 0. \quad (2.11)$$

Die *cdf* ergibt sich durch Integration der *pdf* zu:

$$F(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{T} \right)^b \right], \quad t > 0. \quad (2.12)$$

Aus $f(t)$ und $R(t) = 1 - F(t)$ leitet sich die **Ausfallrate** $\lambda(t)$ der Weibull-Verteilung ab:

$$\lambda(t) = \frac{b}{T} \left(\frac{t}{T} \right)^{b-1}, \quad t > 0. \quad (2.13)$$

Der Erwartungswert μ (vgl. Gleichung (2.5)) und die Varianz σ^2 (vgl. Gleichung (2.8)) der Weibull-Verteilung lassen sich ebenfalls in geschlossener Form ausdrücken. Sie sind von der **Gamma-Funktion** $\Gamma(\cdot)$ abhängig, welche für $x > 0$ definiert ist als:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty z^{x-1} \exp(-z) dz. \quad (2.14)$$

Der Erwartungswert μ der Weibull-verteilten Lebensdauer τ ergibt sich zu:

$$\mu = E[\tau] = T \cdot \Gamma \left(1 + \frac{1}{b} \right). \quad (2.15)$$

Die Varianz σ^2 ist gegeben durch:

$$\sigma^2 = \text{Var}[\tau] = T^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{b} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{b} \right) \right]. \quad (2.16)$$

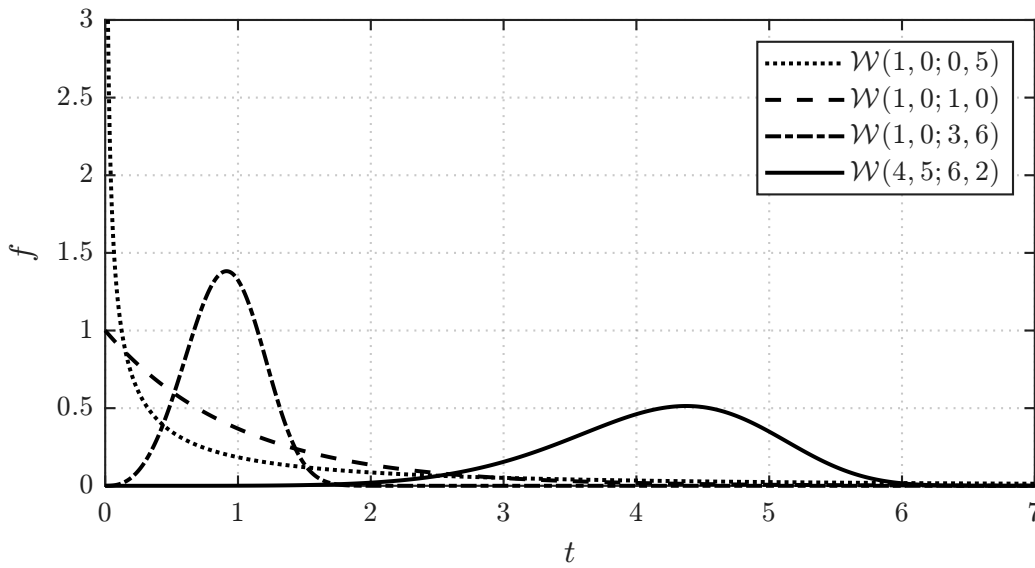


Abbildung 2.1: Weibull $f(t)$ für ausgewählte Werte von T und b .

Die Ausprägung der erwähnten Flexibilität der Weibull-Verteilung ist durch Abbildung 2.1 nachvollziehbar. Ein Spezialfall tritt ein für $b = 1$, da sich in diesem Fall die Weibull-Verteilung zur Exponentialverteilung mit dem Ausfallraten-Parameter $\lambda = 1/T$ und dem Erwartungswert $\mu = T$ reduziert. Für $b = 3, 6$ wird die Schiefe der *pdf* annähernd eliminiert, sodass sich die Weibull-Verteilung einer Normalverteilung annähert [9, 10].

2.1.4 Parameterschätzverfahren

Soll eine geschlossene mathematische Beschreibung des stochastischen Ausfallverhaltens eines Produktes gefunden werden, ist das im vorherigen Abschnitt 2.1.2 definierte parametrische Verteilungsmodell $\tau \sim \mathcal{W}(T, b)$ zu schätzen. Die Modellparameter der Grundgesamtheit sind in der praktischen Anwendung jedoch unbekannt. Die zentrale Problemstellung der **Parameterschätzung** besteht somit darin, aus der empirischen Stichprobe bestehend aus n Realisierungen t_1, \dots, t_n der Zufallsvariable τ statistisch fundierte Schätzwerte \hat{T} und \hat{b} zu gewinnen. Diese sind Voraussetzung, um das Lebensdauermodell (z.B. Gleichung (2.12)) zu quantifizieren und prädiktive Aussagen zu Quantilen oder der Zuverlässigkeit $R(t)$ zu ermöglichen. Eine wesentliche Komplikation hierbei sind jedoch das mögliche Auftre-

ten von unvollständigen bzw. **zensierten** Daten sowie *multivariate* Abhängigkeiten der Belastungen zur Messgröße. Während für die Schätzung von Verteilungsparametern einfache Verfahren, wie die **Momentenmethode** oder die **Methode der kleinsten Fehlerquadrate** - engl. **Ordinary Least Squares (OLS)**, die beispielsweise bei der **Median-Rank-Regression-Methode (MMR)** im Wahrscheinlichkeitsnetz Anwendung findet, existieren, sind diese für die umfassende Analyse vielschichtiger Lebensdauerdaten in der Regel unzureichend und hier nur der Vollständigkeit wegen erwähnt - vgl. [1, 11]. Das universell anwendbare und robuste Verfahren, das Herausforderungen wie zensierte Daten und multivariate Modelle inhärent behandelt, ist die **Maximum-Likelihood-Estimation (MLE)** [1, 4, 12].

Maximum-Likelihood-Estimation

Das Grundprinzip der **MLE** besteht darin, diejenigen Parameterwerte (z.B. \hat{T}, \hat{b}) als Schätzwerte auszuwählen, welche die Wahrscheinlichkeit (engl. Likelihood) maximieren, die empirisch beobachtete Stichprobe (bestehend aus unabhängigen Ausfällen und Zensierungen) zu erhalten. Mathematisch wird die Wahrscheinlichkeit der Realisierung von $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ einer Stichprobe durch die **Likelihood-Funktion** \mathcal{L} bestimmt. Diese ist eine Funktion des unbekannten Parametervektors $\boldsymbol{\theta}$, der k zu schätzende Parameter enthält (z.B. $\boldsymbol{\theta} = (T, b)$ mit $k = 2$).

Für den vereinfachten Fall, dass die Stichprobe ausschließlich aus n exakten Ausfallereignissen (vollständige Daten) besteht, ist die Likelihood-Funktion \mathcal{L} das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichten $f(\cdot)$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{t}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(t_i|\boldsymbol{\theta}). \quad (2.17)$$

Zur Vereinfachung der numerischen Berechnung wird in der Anwendung die **Log-Likelihood-Funktion** Λ verwendet. Durch die Logarithmierung wird das Produkt (Gleichung (2.17)) in eine äquivalente, leichter zu maximierende Summe überführt:

$$\Lambda := \ln(\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})) = \sum_{i=1}^n \ln[f(t_i|\boldsymbol{\theta})]. \quad (2.18)$$

Wie zuvor dargelegt, ist dieser vereinfachte Ansatz für Lebensdauerdaten jedoch oft unzureichend, da er das Auftreten von zensierten Daten vernachlässigt. Für die prak-

tische Anwendung existiert jedoch die entsprechende Erweiterung der Likelihood-Funktion um die Differenzierung etwaiger Testausgänge als *Durchläufer*. Dazu wird die Stichprobe als Paarung von t_i, δ_i für \mathbf{t} definiert, wobei t_i der beobachteten Zeit und δ_i einem Statusindikator ($\delta_i = 1$ für einen exakten Ausfall; $\delta_i = 0$ für eine Rechts-Zensierung) entspricht [1, 4, 5, 6, 13]. \mathcal{L} für rechts-zensierte Lebensdauerdaten lautet somit:

$$\mathcal{L}(\mathbf{t}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n \left[f(t_i|\boldsymbol{\theta})^{\delta_i} \cdot R(t_i|\boldsymbol{\theta})^{1-\delta_i} \right] \quad (2.19)$$

und definiert die Log-Likelihood Funktion als:

$$\Lambda := \ln(\mathcal{L}(\mathbf{t}|\boldsymbol{\theta})) = \sum_{i=1}^n [\delta_i \cdot \ln f(t_i|\boldsymbol{\theta}) + (1 - \delta_i) \cdot \ln R(t_i|\boldsymbol{\theta})]. \quad (2.20)$$

Der Parametervektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, der den Wert von $\Lambda(\boldsymbol{\theta})$ maximiert, liefert die MLE-Werte. Die Schätzwerte repräsentieren die (asymptotisch) effizientesten Schätzwerte für die Parameter der Grundgesamtheit. Dies erfolgt mathematisch durch Nullsetzen k partieller Ableitungen von Λ , sofern mathematisch entsprechende Schätzwerte in geschlossener Form durch $\partial\Lambda/\partial\boldsymbol{\theta} \stackrel{!}{=} 0$ identifiziert werden können [4, 5, 9, 14]. Andernfalls werden numerische Optimierungsalgorithmen, vgl. Newton-Raphson-Verfahren, Patternsearch und vergleichbare dafür herangezogen, siehe weiterführend [14, 15, 16]. An dieser Stelle sei erwähnt, dass systematische Verzerrungen (engl. **Bias**) in $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ aufgrund kleiner Stichprobenumfänge auftreten können und korrigierbar sind, vgl. [5, 17, 18].

Die Qualität der Parameterschätzung beeinflusst daraus nicht nur die Prädiktionsgüte zur Schätzung der Lebensdauer oder Zuverlässigkeit - sie bedingt schließlich auch die Effizienz des Schätzverfahrens. Wird im Sinne eines effizienten Verfahrens zur multivariaten Lebensdauermodellbildung eine Methodik gesucht, ist auch die Qualität der Parameterschätzung damit entscheidend. Vertrauensbereiche, oder engl. **Confidence Intervals (CIs)**, können eine Metrik für die Qualität der Modellierung einnehmen, da sie die Unsicherheit oder *Unschärfe* in der Prädiktion bemessen.

Vertrauensbereiche

Zur Quantifizierung der statistischen Unsicherheit von $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ eignet sich die auf der MLE-Theorie basierende Inferenzstatistik. Diese liefert eine Methodik zur Berechnung von

CI's für die Parameter $\hat{\theta}$ sowie für alle daraus abgeleiteten Funktionen (z.B. Quantile \hat{t}_q oder die Zuverlässigkeit $\hat{R}(t)$) [4, 12].

Die Methodik basiert auf der asymptotischen Normalverteilung der MLE-Schätzer $\hat{\theta}$. Die Grundlage zur Berechnung der Vertrauensbereiche liefert die **Fisher-Informationmatrix (FIM)**, \mathcal{I} , welche die "Information" der Stichprobe über die Parameter quantifiziert. Gemäß Nelson [12] wird in der Praxis die **beobachtete FIM** (\mathcal{I}_O) verwendet. Diese ist definiert als die negative **Hessian-Matrix** \mathbf{H} der Log-Likelihood-Funktion, ausgewertet an der Stelle der MLE-Schätzwerte $\hat{\theta}$:

$$\mathcal{I}_O = -\mathbf{H}(\hat{\theta}) = - \left[\frac{\partial^2 \Lambda(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_l} \right]_{\theta=\hat{\theta}}. \quad (2.21)$$

Die Matrix \mathbf{H} ist die $(k \times k)$ -Matrix der zweiten partiellen Ableitungen von Λ (vgl. Gl. (2.20)) nach allen Parameterkombinationen $(j, l = 1, \dots, k)$.

Die Invertierung der FIM liefert die (approximative) **Varianz-Kovarianz-Matrix** $\hat{\Sigma}$ der geschätzten Parameter:

$$\hat{\Sigma} \approx \mathcal{I}_O^{-1}. \quad (2.22)$$

Die Diagonalelemente dieser Matrix, $\hat{\Sigma}_{jj}$, sind die Varianzen $\text{Var}(\hat{\theta}_j)$ der einzelnen Parameterschätzer. Die Quadratwurzel daraus ist der **Standardfehler** (engl. Standard Error): $se_j = \sqrt{\hat{\Sigma}_{jj}}$.

Basierend auf der Annahme der asymptotischen Normalität der Schätzer wird ein zweiseitiges $(1 - \alpha)$ -CI für einen Parameter $\hat{\theta}_j$ approximiert durch:

$$\text{CI}_j = \hat{\theta}_j \pm z_{1-\alpha/2} \cdot se_j, \quad (2.23)$$

wobei $z_{1-\alpha/2}$ das $(1 - \alpha/2)$ -Quantil der Standardnormalverteilung ist (z.B. $z_{0.975} \approx 1,96$ für ein 95%-CI). Da Lebensdauerparameter (z.B. T, b) oft auf $\mathbb{R}_{>0}$ beschränkt sind, werden CI's robust über eine Log-Transformation der Parameter berechnet, um physikalisch unmögliche (negative) Intervallgrenzen zu vermeiden [4, 12].

- lawless
- nelson (p251)

2.2 Statistische Versuchsplanung und Modellbildung

2.2.1 Grundbegriffe der statistischen Versuchsplanung

2.2.2 Statistische Lebensdauer-Versuchspläne

2.2.3 Statistische Modellbildung

- wu
- wütherich
- yang p282 erster abschnitt
- russell doe for glm kap1.4 p12

3 Ansätze zur Effizienzsteigerung in der Planung von ausfallbasierten Lebensdauertests mit mehreren Faktoren

3.1 Bewertung des Standes der Forschung und Technik

3.2 Forschungsfragen und Aufbau der Arbeit

4 Parameter-Screening für multifaktorielle Lebensdauertests

4.1 Identifikation potenzieller Einflussgrößen

4.2 Kreativmethoden zum Auswahlprozesse im Parameter-Screening

4.3 Randbedingungen in der Parameterauswahl für die Zuverlässigkeitsmodellierung

4.4 Vorgehen zum heuristische Screening für die Zuverlässigkeitsmodellierung

4.5 Zusammenfassung

5 Effiziente multivariate Versuchspläne für Lebensdaueruntersuchungen

6 Fallstudie

7 Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Key Findings

7.2 Diskussion

7.3 Ausblick

Literatur

- [1] B. Bertsche und M. Dazer. *Zuverlässigkeit im Fahrzeug- und Maschinenbau: Ermittlung von Bauteil- und System-Zuverlässigkeiten*. 4. Auflage. Lehrbuch. Berlin und Heidelberg: Springer Vieweg, 2022. ISBN: 978-3-662-65023-3. URL: <http://www.springer.com/>.
- [2] *DAT Report 2025: Kurzbericht*. Ostfildern, Deutschland, Februar 2025. URL: https://www.dat.de/fileadmin/protected/DAT_Report/2025/DAT-Report-2025-Kurzbericht.pdf.
- [3] A. Birolini. *Reliability Engineering*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2017. ISBN: 978-3-662-54208-8. DOI: [10.1007/978-3-662-54209-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-54209-5).
- [4] W. Q. Meeker, L. A. Escobar und F. G. Pascual. *Statistical methods for reliability data*. Second edition. Wiley series in probability and statistics. Hoboken, NJ: Wiley, 2022. ISBN: 978-1-118-11545-9.
- [5] G. Yang. *Life cycle reliability engineering*. Hoboken, N.J.: Wiley, 2007. ISBN: 9780471715290. URL: <http://www.loc.gov/catdir/enhancements/fy0740/2006019150-b.html>.
- [6] S. E. Rigdon, R. Pan, D. C. Montgomery und L. J. Freeman. *Design of experiments for reliability achievement*. Hoboken, NJ: Wiley, 2022. ISBN: 9781119237693. DOI: [10.1002/9781119237754](https://doi.org/10.1002/9781119237754).
- [7] L. Fahrmeir, C. Heumann, R. Künstler, I. Pigeot und G. Tutz. *Statistik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016. ISBN: 978-3-662-50371-3. DOI: [10.1007/978-3-662-50372-0](https://doi.org/10.1007/978-3-662-50372-0).
- [8] J. Hedderich und L. Sachs. *Angewandte Statistik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020. ISBN: 978-3-662-62293-3. DOI: [10.1007/978-3-662-62294-0](https://doi.org/10.1007/978-3-662-62294-0).

- [9] H. Rinne. *The Weibull Distribution: A Handbook*. 1st ed. London: CRC Press LLC, 2008. ISBN: 978-1-4200-8743-7. URL: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/kxp/detail.action?docID=1633687>.
- [10] D. Kececioglu. *Reliability & life testing handbook*. Lancaster, PA: DEStech Publications, 2002. ISBN: 1-932078-03-7.
- [11] D. C. Montgomery, E. A. Peck und G. G. Vining. *Introduction to linear regression analysis*. Sixth edition. Wiley series in probability and statistics. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2021. ISBN: 978-1-119-57872-7.
- [12] W. Nelson. *Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis*. 1st ed. Bd. v.344. Wiley Series in Probability and Statistics Series. Newark: John Wiley & Sons Incorporated, 1990. ISBN: 978-0471697367. URL: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/kxp/detail.action?docID=469757>.
- [13] C.-F. Wu und M. Hamada. *Experiments: Planning, analysis and optimization*. Third edition. Wiley series in probability and statistics. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2021. ISBN: 9781119470106. URL: <https://zbmath.org/?q=an%3A1460.62003>.
- [14] W. Nelson. *Applied Life Data Analysis*. Bd. v.577. Wiley series in probability and statistics. Hoboken: John Wiley & Sons Inc, 2005. ISBN: 9780471644620. URL: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/kxp/detail.action?docID=226561>.
- [15] H. Qiao und C. P. Tsokos. „Parameter estimation of the Weibull probability distribution“. In: *Mathematics and Computers in Simulation* 37.1 (1994), S. 47–55. ISSN: 0378-4754. DOI: [10.1016/0378-4754\(94\)90058-2](https://doi.org/10.1016/0378-4754(94)90058-2).
- [16] A. Kremer und B. Bertsche. „A New Approach for Parametrizing Multidimensional Lifetime Models“. In: *Proceedings of the 29th European Safety and Reliability Conference (ESREL)*. Hrsg. von M. Beer und E. Zio. Europe und Singapore: European Safety and Reliability Association und Research Publishing Services, 2019, S. 715–722. ISBN: 978-981-11-2724-3. DOI: [10.3850/978-981-11-2724-3{\textunderscore}0443-cd](https://doi.org/10.3850/978-981-11-2724-3{\textunderscore}0443-cd).
- [17] H. Hirose. „Bias correction for the maximum likelihood estimates in the two-parameter Weibull distribution“. In: *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation* 6.1 (1999), S. 66–68. ISSN: 10709878. DOI: [10.1109/94.752011](https://doi.org/10.1109/94.752011).

- [18] R. Ross. „Bias and standard deviation due to Weibull parameter estimation for small data sets“. In: *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation* 3.1 (1996), S. 28–42. ISSN: 10709878. DOI: [10.1109/94.485512](https://doi.org/10.1109/94.485512).

Anhang A Ein Anhang

Anhang A.1 Unteranhang 1