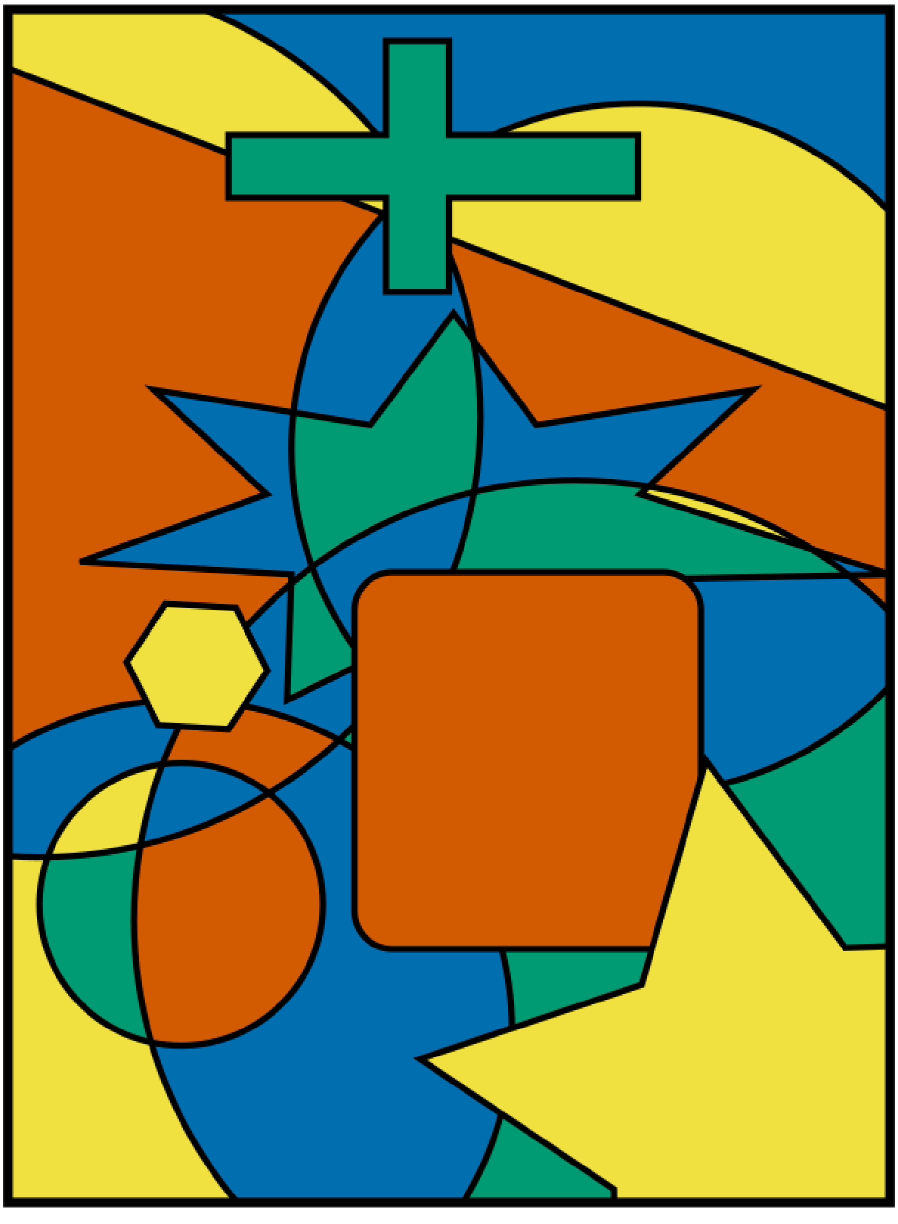
Teorema dei 4 colori

Cellini Marco *5 Informatica* *2023/2024*



Indice

Il problema dei quattro colori

L'enunciato del teorema dei quattro colori si può esprimere come segue: qualsiasi superficie piana divisa in regioni connesse (*per esempio una cartina geografica politica*) può essere colorata con minimo 4 colori senza che 2 regioni adiacenti abbiano lo stesso colore.
Con adiacente si considerano regioni con almeno una linea di confine comune. Le regioni devono essere connesse cioè non devono presentare degli enclavi (*territorio completamente chiuso entro i confini di uno stato diverso da quello cui politicamente o linguisticamente appartiene*).
Per esempio la cartina [Fig. 1] non è adatta al problema, perché presenta un enclave, mentre la mappa in [Fig. 2] potrà essere presa come esempio per il problema.

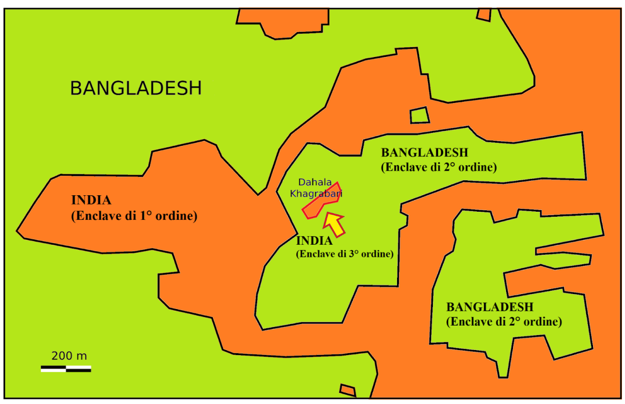


Fig. 1

Fig. 2

Perché è così interessante e conosciuto?

Questo problema è equiparabile ad un puzzle che ha come obbiettivo creare la figura collegando i singoli pezzi colorati fra loro.
Ma allo stesso tempo questo problema è considerato da molti una vera e propria sfida che si è imposto l'uomo, e che lo ha tenuto occupato per diverso tempo vista la sua grande complessità nel dimostrare quanto era stato ipotizzato.

Un po' di Storia

La persona che per primo ideò questo problema fu Francis Guthrie (*matematico e botanico sudafricano*) nel 1852, allora ancora studente di matematica.
Osservò che per colorare la cartina delle contee britanniche erano sufficienti 4 colori ma purtroppo non fu in grado di dimostrare questa sua scoperta.
La prima dimostrazione, seppur non totalmente corretta, fu formulata ben 27 anni dopo dal matematico britannico Alfred Kempe alla quale seguirono una serie di correzioni o formulazioni diverse per tutto il secolo.
La dimostrazione definitiva del teorema del teorema dei 4 colori è redatta abbastanza recentemente nel 1976 da parte di Kenneth Appel e Wolfgang Haken (matematici dell'Università dell'Illinois). Questi ultimi hanno confermato l'idea originaria di Guthrie grazie ad un complesso algoritmo informatico e migliaia e migliaia di ore di calcoli eseguiti dal computer.
Nonostante questo, ancora tutt'oggi, molti matematici ritengono che il problema si può considerare risolto solo quando sarà possibile risolverlo a mano senza l'ausilio di calcolatori.

Il problema dal punto di vista matematico

Dal punto di vista matematico, secondo la teoria dei grafi, il teorema può essere rappresentato tramite un grafo $G = (V, E)$ dove V è un insieme finito di vertici e E sono le coppie di vertici chiamate archi.
Considerando che $v \in V$, indicheremo $d(v)$ il numero di archi a cui appartiene v.
Data una carta geografica M creeremo il grafo secondo le seguenti regole:

- come vertici V usiamo le regioni della cartina M;
- come archi E i lati delle coppie di regioni adiacenti nella cartina.

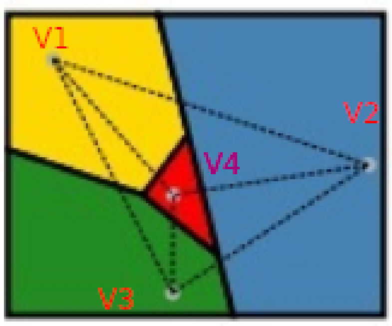


Fig. 4

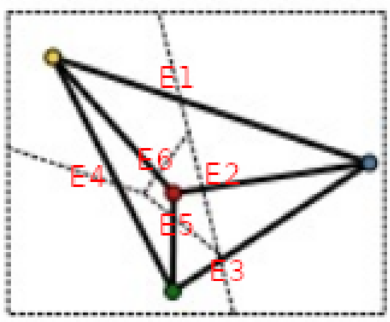


Fig. 5

Il seguente grafo che otteniamo [Fig. 5] è un grafo piano che presenta come vertici le regioni della cartina M e come archi i segmenti che intersecano il confine tra regioni adiacenti solo una volta. Il teorema riferito a questo grafo è il seguente:
Dato $G = (V, E)$ un grafo piano, bastano 4 colori diversi per i vertici V affinché due vertici connessi tramite un arco E siano di colorazione distinta.

La dimostrazione

Al fine di dimostrare il problema dei 4 colori è necessario prima comprendere la risoluzione di un un problema più semplice "***Il teorema dei 5 colori***".

Teorema dei 5 colori

Il problema alla base del teorema è il medesimo varia solo il numero di colori minimi utilizzabili.
Per dimostrare un problema in matematica vengono usualmente usate 3 tecniche differenti, in questo caso tutte le tecniche elencate qui sotto possono provare il teorema dei 5 colori:

- ***Induzione*** → una volta provato di poter compiere il primo passo, tutti gli altri passi della risoluzione sono possibili.
- ***Contraddizione/Assurdo*** → invece di dimostrare direttamente il problema si assume che l'opposto della nostra tesi sia corretto e questo porterà a delle contraddizioni o delle assurdità inaccettabili.
- ***Invarianza*** → è una proprietà che ci permette di dire che un dato rimane fisso nonostante i dati intorno ad esso vengano modificati.

Come visto in precedenza la mappa su cui ci stiamo ponendo il problema può essere facilmente trasformata in un grafo per facilitare le operazioni e sfruttare al meglio questa struttura di dati.

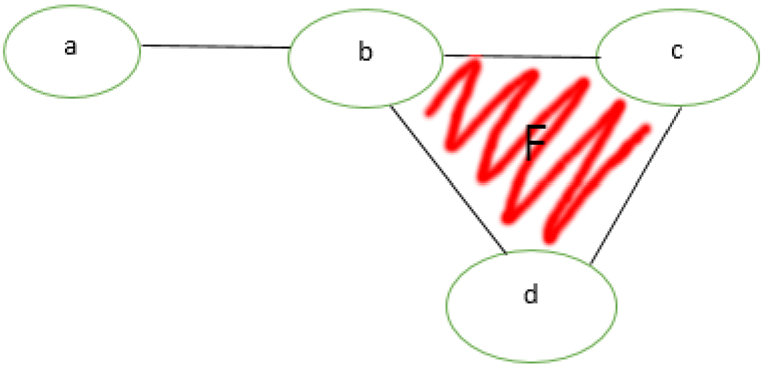


Fig. 6

In aggiunta ai vertici e agli archi prima citati ci interessa conosce che, in un grafo planare, quando n vertici con altrettanti n archi creano un 'loop' l'area formatasi dentro è detta faccia [Fig. 6].
Ora secondo la tecnica dell'ammissione assumiamo che un grafo avente n vertici sono colorabili con 5 colori [Fig. 7] e dunque dimostriamo che un grafo avente $n + 1$ vertici e ugualmente colorabile [Fig. 8], rispettando le condizioni date.

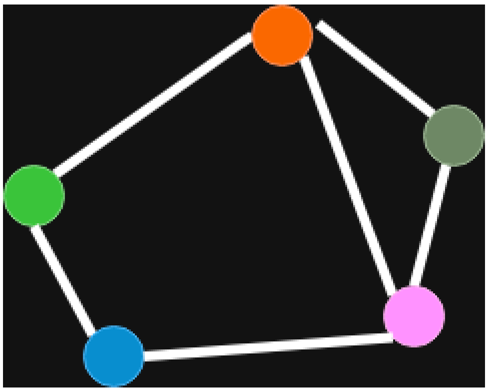


Fig. 7

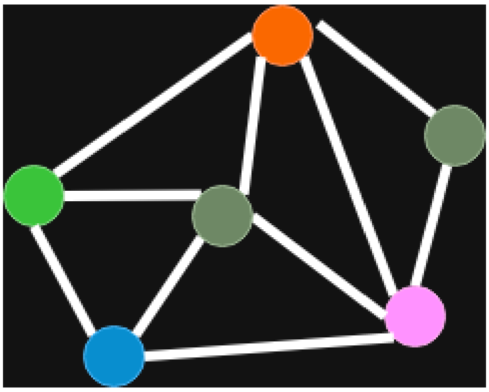


Fig. 8

Questo caso risulta molto semplice perché il vertice che aggiungiamo ha solo 4 o meno vicini e quindi ci rimane automaticamente libero un colore.
Ma se il vertice presenta 5 vicini tutti aventi colori diversi?

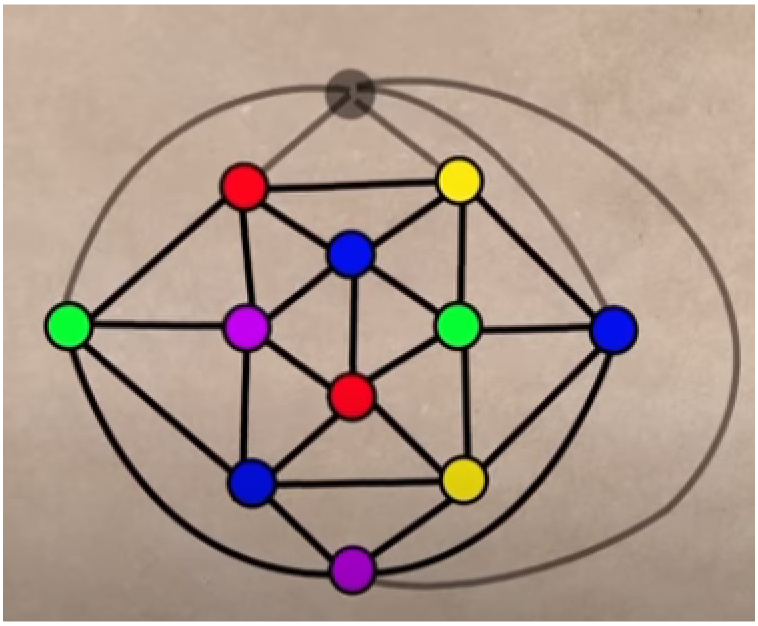


Fig. 9

In questo caso assumiamo che i vertici già colorati siano colorabili con 5 colori come in figura [Fig. 9]. Il vertice che vogliamo aggiungere non può momentaneamente assumere nessun colore in quanto è collegato con 5 colori differenti.
L'unico stratagemma che abbiamo ha disposizione e riarrangiare i colori già disposti; per esempio prendiamo in considerazione il giallo e il verde, possiamo notare che il verde che è all'estrema sinistra non è collegato direttamente con un giallo e dunque possiamo cambiargli il colore in giallo [Fig. 10].

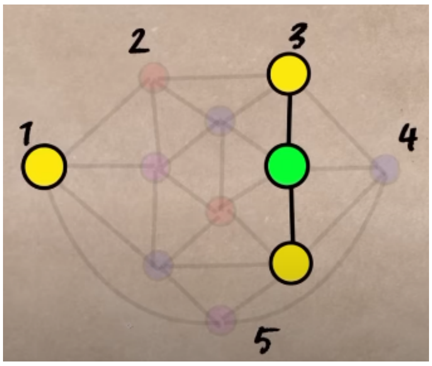


Fig. 10

Così facendo abbiamo introdotto un doppione tra i colori vicini del nuovo vertice quindi possiamo dare il colore verde al nuovo vertice [Fig. 11].

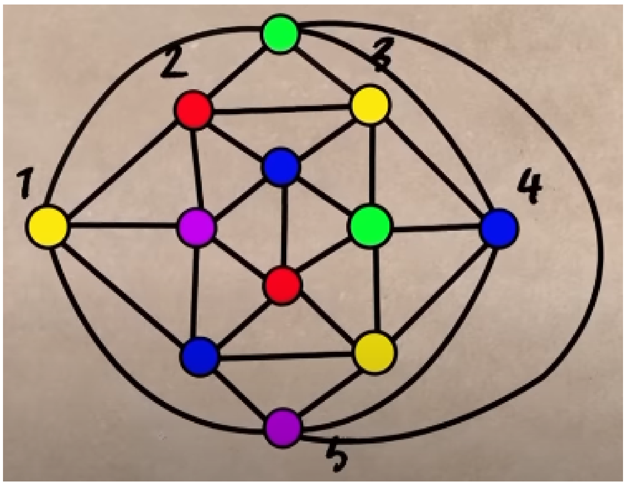


Fig. 11

Inoltre il teorema dei 5 colori è dimostrabile tramite la tecnica dell'invarianza alla quale bisogna associare l'uso della "***Relazione di Eulero***" la quale afferma che: *"la differenza tra i vertici e la somma tra gli archi e le facce è sempre 2".*

$$V - S + F = 2$$

Grazie ai dati invariabili appena scoperti possiamo scrivere la dimostrazione per mezzo della tecnica della contraddizione.
Assumiamo che ogni vertice deve avere 6 o più vicini (l'opposto rispetto al tesi da noi supportata) dunque, secondo la nostra assunzione, potremo affermare che secondo la seguente disequazione:

$$S \geq 3V \rightarrow S - 3V \geq 0$$

il numero di archi è maggiore o uguale di tre volte il numero di vertici perché un arco è condiviso da 2 vertici.
Inoltre sulla base della relazione di Eulero una faccia deve essere formata da minimo 3 archi e un arco è condiviso da solo 2 vertici si può affermare che ogni faccia è minore o uguale a due terzi degli archi.

$$F \leq 2/3\,S$$

Quindi se sostituiamo la disequazione appena trovata nella relazione di Eulero:

$$V - S + 2/3\,S \geq 2$$
$$V - 1/3\,S \geq 2$$
$$S \leq 3V - 6$$

troviamo che il numero degli archi è minore o uguale a tre volte il numero dei vertici meno 6.

Ora portando il numero di vertici a sinistra otteniamo una struttura della disequazione simile alla nostra assunzione iniziale.

$$S - 3V \geq 0 \qquad\qquad S - 3V \leq -6$$

Il tutto si può unire in unica disequazione dove gli archi meno tre volte i vertici sono minori o uguali a meno sei e allo stesso tempo sono anche maggiori di zero; ed è qui che si presenta la contraddizione, in quanto non esistono numeri che sono contemporaneamente sia minori o uguali di sei sia maggiori o uguali di zero.

$$-6 \geq S - 3V \geq 0$$

$$-6 \geq 0 \quad --> \; impossibile$$

Bene abbiamo dimostrato che il numero minimo di vertici confinanti è 5 o meno. Finalmente ora possiamo dimostrare il "teorema dei 4 colori".

Dimostrazione teorema dei 4 colori

Una prima idea generale sarebbe quella di estendere il problema precedentemente dimostrato con il nostro problema attuale ma questo purtroppo non funzionerebbe, perché il problema dei 5 colori si basa sulla possibilità di poter trovare sempre un vertice con 5 o meno vicini. Cosa che per 4 vicini o meno non è matematicamente garantita.
La dimostrazione, come detto in precedenza, non è stata accettata da tutta la comunità dei matematici in quanto, per il momento, non è umanamente risolvibile in quanto necessita di un calcolatore.
In poche parole Appel e Haken hanno diviso i grafi in due categorie colorabili con 4 colori e colorabili con 5 colori, inseguito hanno dimostrato che tutti i grafi colorabili con 5 colori possono essere suddivisi in grafi più semplici appartenenti alla prima categoria. Per far sì che questo accada i due matematici hanno dimostrato che tutti i grafi hanno delle proprietà speciali che gli permettono di essere ridotti.
La strategia che usarono fu quella dimostrare che i grafi colorabili con 5 colori contenevano tutti almeno una delle circa 2000 configurazioni che garantivano la veridicità del problema. Ed è qui che entrò in gioco l'uso del calcolatore il quale gli permise di velocizzare significamente il tempo per svolgere quest'ultima azione.
La risposta dopo centinaia di ore di calcolo fu sì, ogni grafo planare può essere colorato con 4 colori e quindi contradissero la teoria dei 5 colori.

Il computer che risolse il problema

Il teorema dei 4 colori fu il primo che sfruttò la potenza di un computer per dimostrare una tesi, questo processo è ormai comune in ambito matematico, anche se al tempo non fu molto apprezzato l'uso di calcolatori in ambito matematico.
Appel e Haken, lavorando presso l'Università dell'Illinois, ebbero accesso alla potenza di calcolo del CDC 7600 progettato e creato da Seymour Cray e prodotto dalla Control Data Corporation.
Il CDC 7600 aveva un costo, nella sua configurazione base, di circa 5 milioni di dollari e le sue dimensioni erano relativamente moderate per quegli anni, "solo" 3 metri di lunghezza per 1,8 metri di altezza.

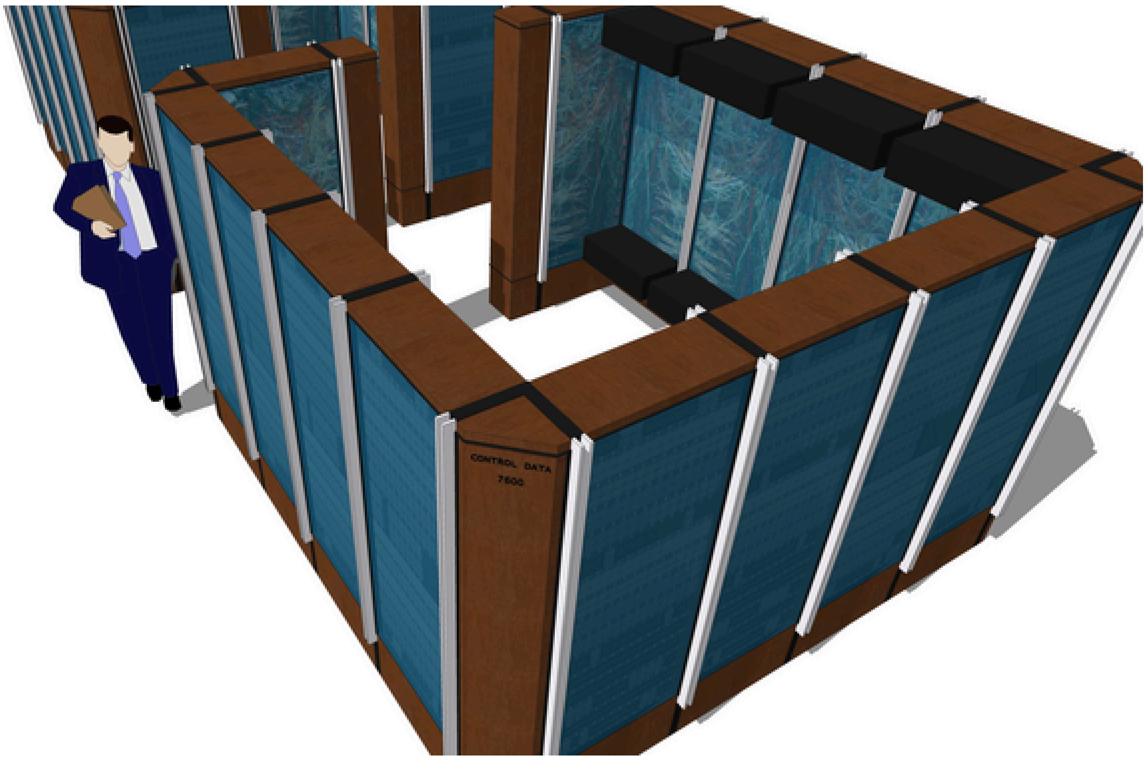


Fig. 12

L'algoritmo

L'algoritmo sviluppato da Kenneth Appel e Wolfgang Haken per la dimostrazione del teorema dei 4 colori è molto complesso e coinvolge un approccio computazionale avanzato.

In generale, l'algoritmo può essere suddiviso in 3 macro-fasi:

1. ***Riduzione a un numero finiti di casi***: questa fase comprendeva anche la decomposizione dei grafi complessi in rappresentazioni più semplici per facilitarne la computazione.
2. ***Computazione***: questa fase richiedeva algoritmi complessi per esaminare tutte le possibili configurazioni e dimostrare che non potevano esistere configurazioni invalide
3. ***Verifica manuale***: nonostante gran parte dei calcoli fossero computerizzati vi era sempre una validazione manuale, sui casi particolari o maggiormente complessi.

Bibliografia

Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved di Robin Wilson

'The Solution of the Four-Color-Map Problem' in Scientific American Magazine Vol. 237 No. 4 (October 1977), p. 108

'Every Planar Map is Four-Colorable' Contemporary Mathematics, vol. 98, With the collaboration of J. Koch., Providence, RI: American Mathematical Society

Sitografia

https://www.matematicamente.it/rivista-il-magazine/numero-4-ottobre-2007/53-il-teorema-dei-quattro-colori-e-la-teoria-dei-grafi/

https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_dei_quattro_colori

https://maddmaths.simai.eu/wp-content/uploads/2013/07/QuattroColori2-1.pdf

https://youtu.be/siFuRrhb-cU?si=9c7t5ob7xMPa5f9n

https://youtu.be/42-ws3bkrKM?si=YX8kIAh9y_SXHmaC

https://youtu.be/W0iZhQJ2drw?si=4MITYTDxgZYL3QmJ

https://youtu.be/NgbK43jB4rQ?si=QPG52CdbOGjf2VMK https://faculty.etsu.edu/gardnerr/5340/notes-Bondy-Murty-GT/Bondy-Murty-GT-15-2.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem

https://www.treccani.it/enciclopedia/dimostrazione-per-assurdo_(Dizionario-di-filosofia)/