Esercitazione 3

Argomento: autovalori e valori singolari

1. Implementare il metodo delle potenze in una *function* con nome `potenze.m`; fissare un numero massimo `m_max` di iterazioni da eseguire e una precisione relativa `tol`.

   Successivamente, a partire dal vettore $\mathbf{z} = (1, 2, 3)^T$, determinare con una tolleranza pari a `tol=1.0e-10` l'autovalore di modulo massimo delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 3.8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Giustificare i risultati utilizzando il comando `eig` di Matlab.

2. In una *function*, denominata `potenze_inverse.m`, modificare opportunamente l'algoritmo implementato in `potenze.m` in modo tale da ottenere l'algoritmo che implementa il metodo delle potenze inverse.

   Successivamente, a partire dal vettore $\mathbf{z} = (1, 1, 1)^T$, applicare la *function* `potenze_inverse.m` per determinare l'autovalore più vicino a $p = 0.5$, con precisione relativa $tol = 1.0e - 10$, delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Richiamare la *function* `eigs.m` di Matlab e, alla luce dei valori ottenuti, commentare i risultati prodotti da `potenze_inverse.m`.

3. Implementare il metodo QR, nella sua forma più elementare, in una *function* con nome `qr_base.m`; fissare un numero massimo `m_max` di iterazioni e il seguente criterio d'arresto `norm(tril(A,-1),inf) <= tol`, ove `tol` è un parametro di input.

   Applicare il suddetto metodo, alla matrice di Hilbert di ordine 10, ponendo `m_max=100` e `tol=1.0e-14`.

   Calcolare l'errore assoluto associato ai suddetti autovalori, prendendo come valori di riferimento quelli ottenuti con il comando `eig`.

   Successivamente, eseguire 100 iterazioni del metodo QR applicato alle matrici

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Commentare i risultati.

4. Selezionare il formato `format long e`. Definire le matrici triangolari superiore $\mathbf{A}$ di ordine $n = 5, 10, 15, ..., 100$, i cui elementi sono

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } i < j \\ 0 & \text{se } i > j \end{cases}$$

   Calcolare il determinante, il rango e i valori singolari delle matrici $\mathbf{A}$ e commentare i risultati.

5. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ 5x_2 - 6x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ 8x_1 - x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Calcolare il rango della matrice A del sistema e, successivamente, calcolare la soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati, avente norma euclidea minima.

Verificare la correttezza del risultato utilizzando il comando `pinv` di Matlab.

Quali sono tutte le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema?

6. QUIZ: Siano $\sigma_1 = 10$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$, $\sigma_4 = 1/2$ i valori singolari di una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Allora il condizionamento di $\mathbf{A}$ in norma 2 vale:

   a) 5
   b) 10
   c) 15
   d) 20

7. QUIZ: È assegnata la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 9 \\ 7 & 8 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia $\mathbf{A}\_100$ la matrice ottenuta al termine di 100 iterazioni del metodo QR per il calcolo degli autovalori di $\mathbf{A}$. La matrice $\mathbf{A}$ ha 2 autovalori complessi coniugati approssimati dagli autovalori del blocco:

   a) $\mathbf{A}\_100(1:2, 1:2)$
   b) $\mathbf{A}\_100(2:3, 2:3)$
   c) $\mathbf{A}\_100(3:4, 3:4)$
   d) $\mathbf{A}\_100(4:5, 4:5)$

Esercizi aggiuntivi

1. Utilizzare il comando `eig` per calcolare gli autovalori delle matrici

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & n-2 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & \vdots & \ddots & \ddots & 3 & 2 & 1 \\ 2 & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

con $n = 100$.

Successivamente introdurre una perturbazione $\varepsilon = 1.0e - 10$ negli elementi dell'ultima riga di entrambe le matrici, e calcolare gli autovalori delle matrici perturbate.

Rappresentare graficamente gli autovalori e giustificare i risultati ottenuti.

2. In una *function*, denominata `potenze_no_norma.m`, implementare il metodo delle potenze che non prevede la normalizzazione del vettore iterata a ogni passo.

   Successivamente, a partire dal vettore $\mathbf{z} = (1, 2, 3)^T$, determinare l'autovalore di modulo massimo e un autovettore ad esso associato della matrice $\mathbf{A}_2$ dell'esercizio precedente. Fissare `m_max`=500,800,1100 e commentare i risultati.

3. Utilizzare la decomposizione SVD per approssimare l'immagine cucciolo.jpg, generata dalla *blackness matrix* di dimensione 271×300, mediante una matrice di rango $n = 10, 30, 50, 70$.