

Esercitazione 2

Argomento: sistemi lineari

1. Implementare in una *function* denominata `elleu`, il calcolo dei fattori \mathbf{L} e \mathbf{U} della fattorizzazione $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ della matrice \mathbf{A} .

Successivamente, generare la matrice \mathbf{A} di ordine $n = 100$, i cui elementi sono $a_{ij} = \max(i, j)$ e il vettore \mathbf{b} definito in modo tale che la soluzione \mathbf{x} del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ coincida con il vettore con tutte le componenti uguali a 1.

Infine, risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, utilizzando dapprima la fattorizzazione $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ della matrice \mathbf{A} ottenuta mediante la *function* `elleu`, e successivamente la fattorizzazione $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ ottenuta mediante la *function* `lu` di MATLAB.

In entrambi casi calcolare l'errore relativo associato alla soluzione in norma infinito e, in base ai risultati ottenuti e dandone una giustificazione, dedurre quale delle due soluzioni sia più accurata.

2. Generare la matrice \mathbf{A} di ordine $n = 100$, i cui elementi sono $a_{ij} = i \max(i, j)$.

Determinare le matrici \mathbf{P} , \mathbf{L} e \mathbf{U} della fattorizzazione $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ della matrice \mathbf{A} mediante la *function* `lu` di MATLAB.

Successivamente, utilizzare i suddetti fattori per invertire la matrice \mathbf{A} . Utilizzare la *function* `inv` di MATLAB per verificare la correttezza del risultato.

3. Generare una matrice \mathbf{A} di ordine $n = 100$ di numeri pseudo-casuali.

Risolvere in modo efficiente, minimizzando il numero di operazioni aritmetiche, i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{Ax}_3 = \mathbf{b}_3 \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{Ax}_{30} = \mathbf{b}_{30} \end{cases}$$

aventi tutti la stessa matrice dei coefficienti \mathbf{A} ; il termine noto \mathbf{b}_1 sia definito in modo tale che la corrispondente soluzione \mathbf{x}_1 coincida con il vettore con tutte le componenti uguali a 1 e $\mathbf{b}_i = \mathbf{x}_{i-1}$, $i = 2, \dots, 30$.

Successivamente, risolvere ciascuno dei suddetti sistemi mediante il comando `\` di Matlab. Utilizzando i comandi `tic` e `toc`, confrontare i tempi di calcolo delle due procedure e commentare i risultati.

4. Generare la matrice tridiagonale \mathbf{B} di ordine $n = 100$, i cui elementi della diagonale principale sono tutti uguali a 10 e quelli delle codiagonali inferiore e superiore sono rispettivamente uguali a -5 e a 5 .

Tenendo conto che \mathbf{B} è non singolare e, quindi, $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$ è simmetrica e definita positiva, utilizzare la *function* `chol` di MATLAB per determinare la decomposizione di Choleski $\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$.

Successivamente, utilizzare la suddetta decomposizione per calcolare la matrice inversa di \mathbf{A} e per risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con \mathbf{b} definito in modo tale che la corrispondente soluzione \mathbf{x} coincida con il vettore con tutte le componenti uguali a 1.

Verificare infine la correttezza dei risultati ottenuti mediante i comandi `inv` e `\` di MATLAB.

5. Generare una matrice pseudo-casuale \mathbf{A} di ordine n e calcolare la fattorizzazione QR della matrice \mathbf{A} .

Successivamente usare i fattori \mathbf{Q} ed \mathbf{R} per risolvere un sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con \mathbf{b} definito in modo tale che la corrispondente soluzione \mathbf{x} coincida con il vettore con tutte le componenti uguali a 1.

Facendo variare l'ordine della matrice, per esempio $n = 100, 200, \dots, 500$ e $n = 1000, 2000, \dots, 5000$, utilizzare i comandi tic e toc per calcolare il rapporto tra il tempo di calcolo della risoluzione del sistema lineare mediante la fattorizzazione $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ di \mathbf{A} e quello mediante la fattorizzazione QR . Commentare i risultati.

6. Si consideri il seguente sistema lineare sovradeterminato

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_1 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

Calcolare il rango della matrice dei coefficienti del sistema e, successivamente, calcolare la soluzione del sistema assegnato nel senso dei minimi quadrati. Verificare la correttezza del risultato utilizzando il comando `\` di Matlab.

7. Dati i punti $x_i, i = 1, \dots, 15$, equispaziati nell'intervallo $[0, \pi]$ (estremi inclusi) e i corrispondenti valori $y_i = x_i \cos x_i$, determinare i coefficienti della parabola $y = c_1x^2 + c_2x + c_3$ che meglio approssima i dati $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, 15}$ nel senso dei minimi quadrati. Rappresentare graficamente i dati e la parabola approssimante.

8. QUIZ: Si applichi l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia m_{32} il moltiplicatore relativo all'algoritmo senza pivoting parziale ed \bar{m}_{32} il moltiplicatore relativo all'algoritmo con pivoting parziale. Il prodotto $m_{32}\bar{m}_{32}$ vale:

- a) $\frac{2}{3}$
- b) $\frac{3}{10}$
- c) $\frac{1}{3}$
- d) $\frac{3}{5}$

9. QUIZ: Si vuole risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nel senso dei minimi quadrati, con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema ammette

- a) nessuna soluzione
- b) infinite soluzioni caratterizzate dalla stessa norma euclidea
- c) soluzione unica
- d) infinite soluzioni caratterizzate dalla stessa norma euclidea del residuo

Esercizi aggiuntivi

1. Selezionare il formato di output `format long e` e risolvere i sistemi lineari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con \mathbf{A} matrice di Hilbert di ordine $n = 5, 10, 15$ e \mathbf{b} definito in modo tale che il corrispondente vettore soluzione \mathbf{x} coincida con il vettore con tutte le componenti uguali a 1.

Per ciascun valore di n , calcolare l'errore relativo della soluzione e il numero di condizionamento in norma infinito. Commentare i risultati.

2. Implementare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt e utilizzarlo per generare una base ortonormale di \mathbb{R}^5 , a partire dai seguenti vettori linearmente indipendenti

$$\mathbf{v}_1 = (4, 2, 1, 5, -1)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (1, 5, 2, 4, 0)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (3, 10, 6, 2, 1)^T$$

$$\mathbf{v}_4 = (3, 1, 6, 2, -1)^T, \quad \mathbf{v}_5 = (2, -1, 2, 0, 1)^T$$

Denotata con \mathbf{Q} la matrice le cui colonne coincidono con i vettori generati, verificare la correttezza dei risultati ottenuti mediante l'ortogonalità di \mathbf{Q} .