

Esercitazione 1

Argomento: aritmetica del calcolatore, cancellazione numerica

1. Data la funzione $f(x) = \sin(x)$, si approssimi $f'(x)$ con il seguente rapporto incrementale

$$f'(x) \approx r(x) = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h},$$

scegliendo $h = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots, 50$. Fissare, per esempio, $x = \pi/4$, rappresentare graficamente l'errore relativo $|f'(x) - r(x)|/|f'(x)|$ e commentare i risultati. Successivamente riformulare $r(x)$ al fine di evitare il fenomeno della cancellazione numerica e rappresentare graficamente il corrispondente errore relativo.

2. QUIZ: Sia assegnata un'aritmetica floating point in base $N = 10$ con t cifre di mantissa. Sia $y = f(x)$ un problema numerico assegnato. È noto il condizionamento $K = 2 \times 10^9$ del problema. Sia inoltre \bar{x} un dato affetto da errore di arrotondamento e sia $\bar{y} = f(\bar{x})$. Se $\frac{|y - \bar{y}|}{|y|} = 10^{-5}$, quante sono al massimo le cifre di mantissa di t ?

Risposte:

- a) 14
- b) 15
- c) 13
- d) 16

Esercizi aggiuntivi

1. I seguenti numeri vengono introdotti in un calcolatore che opera in aritmetica floating-point con base $N = 10$, $t = 5$ cifre riservate alla mantissa e tecnica di arrotondamento:

$$\begin{aligned}a &= 1.483593, \\b &= 1.484111.\end{aligned}$$

Determinare il risultato $\bar{s} = \bar{a} \ominus \bar{b}$, ove \bar{x} indica il numero di macchina corrispondente a x nella suddetta aritmetica e \ominus denota l'operazione di macchina corrispondente all'operazione aritmetica della sottrazione. Confrontare \bar{s} con $c = a - b$ e calcolare l'errore relativo associato a \bar{s} .

2. Si consideri la successione

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 \\x_n &= 2^{n-1/2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 4^{1-n} x_{n-1}^2}}, \quad n \geq 2\end{aligned}$$

per il calcolo approssimato di π . Calcolare gli errori relativi $|\pi - x_n|/\pi$ per $n = 1, \dots, 40$ e rappresentare il grafico dei suddetti errori in scala logaritmica. Successivamente, determinare un'espressione \tilde{x}_n equivalente a x_n che consenta di evitare il fenomeno della cancellazione numerica. Rappresentare graficamente gli errori relativi $|\pi - \tilde{x}_n|/\pi$ per $n = 1, \dots, 40$ in scala logaritmica e, confrontando il grafico con quello precedente, commentare i risultati.

3. Valutare le funzioni

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \frac{1 - \cos(x)}{x^2}, & f_2(x) &= \frac{e^x - 1}{x}, \\f_3(x) &= 1 - \sqrt{1 - x^2}, & f_4(x) &= \frac{(x+1)^2 - 1}{x}\end{aligned}$$

in $x = 10^{-n}$ per $n = 1, 2, \dots, 16$. Successivamente riformulare le funzioni assegnate al fine di evitare il fenomeno della cancellazione numerica e, assumendo come valori esatti quelli che si ottengono mediante la riformulazione proposta, calcolare i corrispondenti errori relativi e confrontarli con la precisione di macchina. Per ogni valore di x , stampare e rappresentare graficamente il corrispondente errore relativo.

4. QUIZ: La quantità

$$\frac{(x!)^2 + (y!)^2}{z!}$$

con $x = 121$, $y = 122$, $z = 150$ vale circa:

Risposte:

- a) 1.71e+143
- b) 5.32e+201
- c) 2.18e+175
- d) 9.21e+132