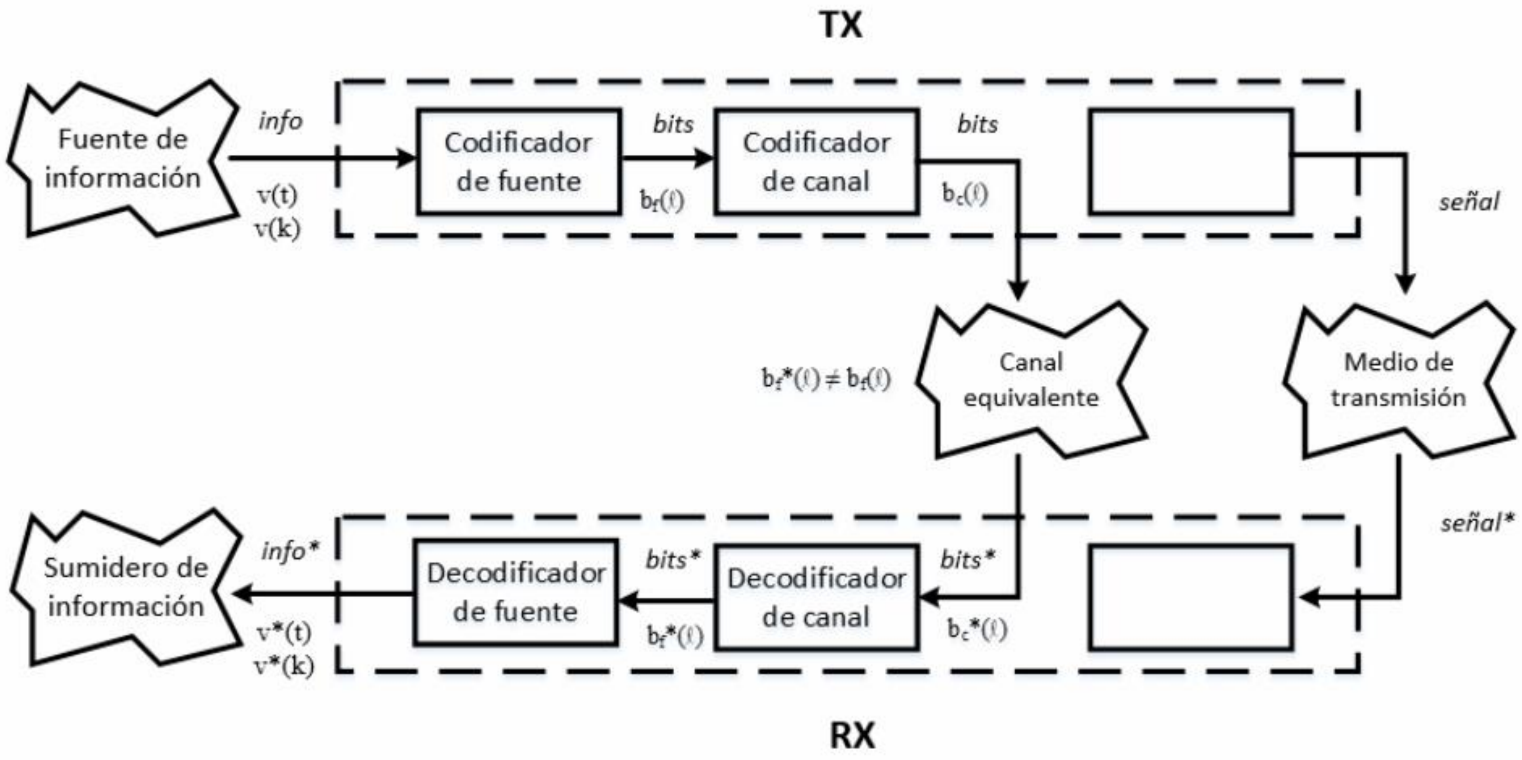
Codificación de canal

Códigos lineales de bloques

Codificación de canal



Códigos rectangulares

Cada set de M x N bits son mapeados en un set de (M +1) x (N+1) bits

Ejemplo: b_f = 111 010 110

b_c = 1111 0101 1100 0110

b_c^* = 1111 0**0**01 1100 0110

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz 3 x 3 Matriz 4 x 4

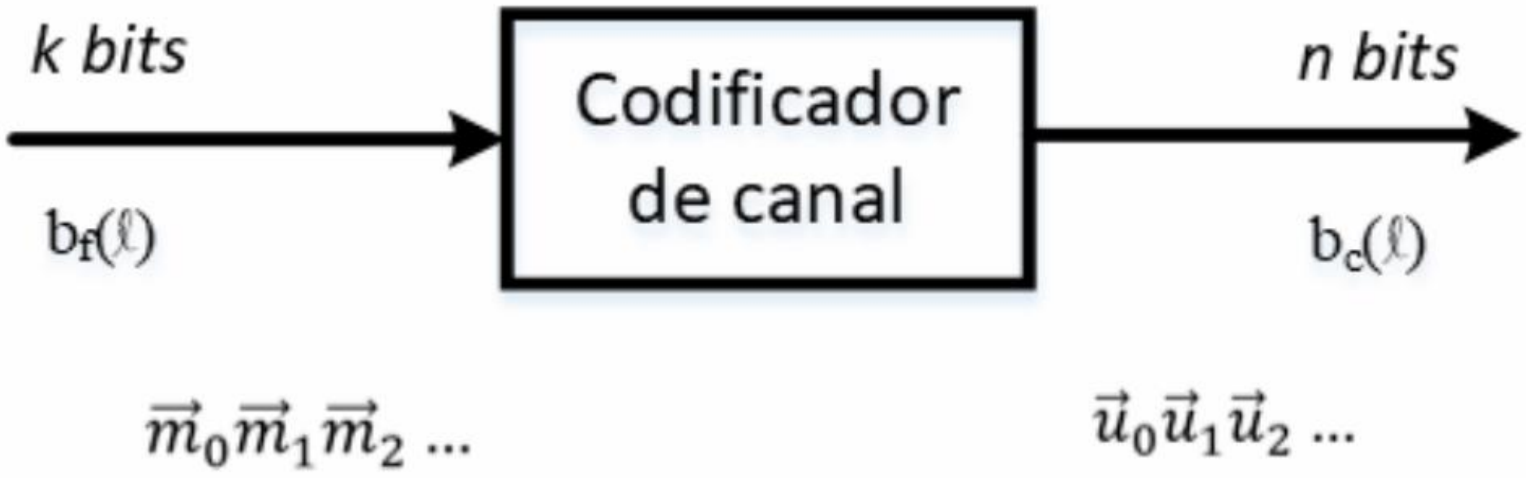
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \rightarrow 0 \\ 0 & \color{red}{0} & 0 & 1 & \rightarrow 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \rightarrow 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \rightarrow 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$ ¡Error!

¡Error!

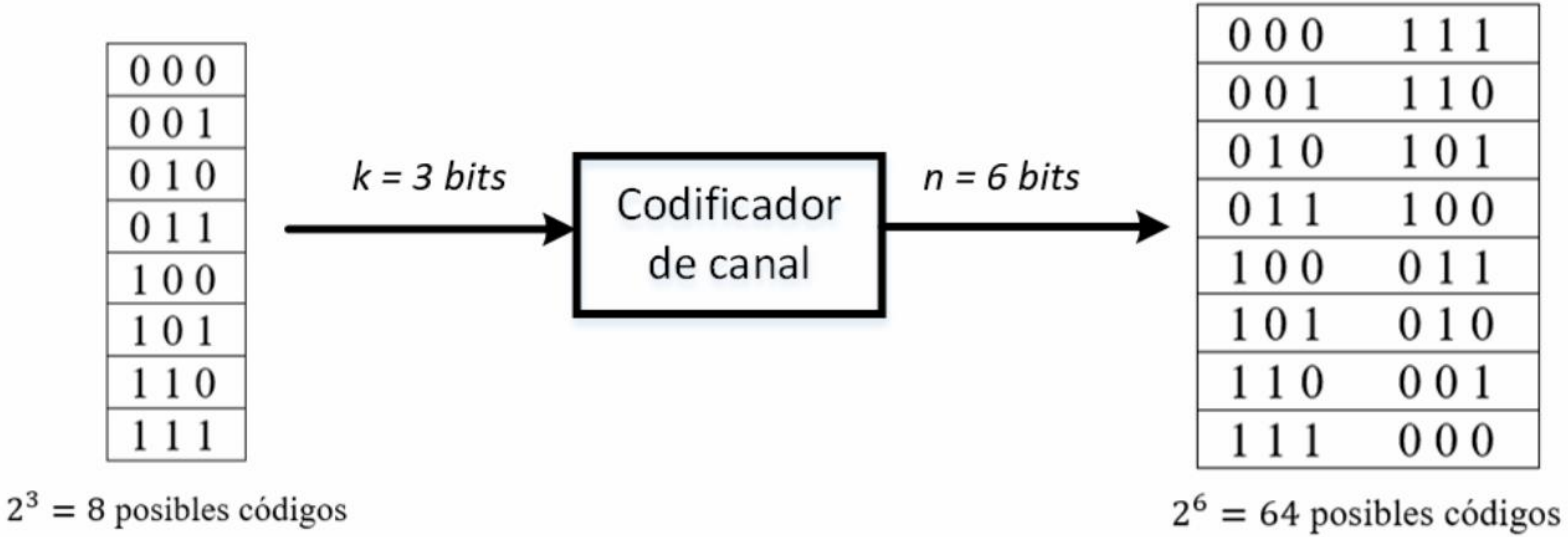
Codificador de canal

Codificador de canal

(Transmisor)



Códigos de bloques



¿Cómo elegir los posibles códigos?

0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	1	1	1
8	0	0	1	0	0	0
9	0	0	1	0	0	1
10	0	0	1	0	1	0
11	0	0	1	0	1	1
12	0	0	1	1	0	0
13	0	0	1	1	0	1
14	0	0	1	1	1	0
15	0	0	1	1	1	1

16	0	1	0	0	0	0
17	0	1	0	0	0	1
18	0	1	0	0	1	0
19	0	1	0	0	1	1
20	0	1	0	1	0	0
21	0	1	0	1	0	1
22	0	1	0	1	1	0
23	0	1	0	1	1	1
24	0	1	1	0	0	0
25	0	1	1	0	0	1
26	0	1	1	0	1	0
27	0	1	1	0	1	1
28	0	1	1	1	0	0
29	0	1	1	1	0	1
30	0	1	1	1	1	0
31	0	1	1	1	1	1

32	1	0	0	0	0	0
33	1	0	0	0	0	1
34	1	0	0	0	1	0
35	1	0	0	0	1	1
36	1	0	0	1	0	0
37	1	0	0	1	0	1
38	1	0	0	1	1	0
39	1	0	0	1	1	1
40	1	0	1	0	0	0
41	1	0	1	0	0	1
42	1	0	1	0	1	0
43	1	0	1	0	1	1
44	1	0	1	1	0	0
45	1	0	1	1	0	1
46	1	0	1	1	1	0
47	1	0	1	1	1	1

48	1	1	0	0	0	0
49	1	1	0	0	0	1
50	1	1	0	0	1	0
51	1	1	0	0	1	1
52	1	1	0	1	0	0
53	1	1	0	1	0	1
54	1	1	0	1	1	0
55	1	1	0	1	1	1
56	1	1	1	0	0	0
57	1	1	1	0	0	1
58	1	1	1	0	1	0
59	1	1	1	0	1	1
60	1	1	1	1	0	0
61	1	1	1	1	0	1
62	1	1	1	1	1	0
63	1	1	1	1	1	1

¿Cómo elegir los posibles códigos?

0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	1	1	1
8	0	0	1	0	0	0
9	0	0	1	0	0	1
10	0	0	1	0	1	0
11	0	0	1	0	1	1
12	0	0	1	1	0	0
13	0	0	1	1	0	1
14	0	0	1	1	1	0
15	0	0	1	1	1	1

16	0	1	0	0	0	0
17	0	1	0	0	0	1
18	0	1	0	0	1	0
19	0	1	0	0	1	1
20	0	1	0	1	0	0
21	0	1	0	1	0	1
22	0	1	0	1	1	0
23	0	1	0	1	1	1
24	0	1	1	0	0	0
25	0	1	1	0	0	1
26	0	1	1	0	1	0
27	0	1	1	0	1	1
28	0	1	1	1	0	0
29	0	1	1	1	0	1
30	0	1	1	1	1	0
31	0	1	1	1	1	1

32	1	0	0	0	0	0
33	1	0	0	0	0	1
34	1	0	0	0	1	0
35	1	0	0	0	1	1
36	1	0	0	1	0	0
37	1	0	0	1	0	1
38	1	0	0	1	1	0
39	1	0	0	1	1	1
40	1	0	1	0	0	0
41	1	0	1	0	0	1
42	1	0	1	0	1	0
43	1	0	1	0	1	1
44	1	0	1	1	0	0
45	1	0	1	1	0	1
46	1	0	1	1	1	0
47	1	0	1	1	1	1

48	1	1	0	0	0	0
49	1	1	0	0	0	1
50	1	1	0	0	1	0
51	1	1	0	0	1	1
52	1	1	0	1	0	0
53	1	1	0	1	0	1
54	1	1	0	1	1	0
55	1	1	0	1	1	1
56	1	1	1	0	0	0
57	1	1	1	0	0	1
58	1	1	1	0	1	0
59	1	1	1	0	1	1
60	1	1	1	1	0	0
61	1	1	1	1	0	1
62	1	1	1	1	1	0
63	1	1	1	1	1	1

¿Cómo elegir los posibles códigos?

R/ Subespacios vectoriales

1. Debe contener 00…0
2. La suma (módulo 2) de cualesquiera 2 elementos debe crear otro elemento.

Matriz generadora

$$G = [P_{k\,\mathrm{x}\,n-k} \vdots I_{k\,\mathrm{x}\,k}]$$

P: matriz de paridad

I: matriz identidad

$$[\;]_{1\mathrm{x}k}[\quad]_{k\mathrm{x}n} = [\;]_{1\mathrm{x}n}$$

Ejemplo

Matriz generadora

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = [P_{k\,\mathrm{x}\,n-k} \vdots I_{k\,\mathrm{x}\,k}] = [P_{3\,\mathrm{x}\,3} \vdots I_{3\,\mathrm{x}\,3}]$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz generadora

$$\vec{u} = G\vec{m}$$

$\vec{m}$: vector de k bits de entrada

G: matriz generadora de k x n

$\vec{u}$: vector de n bits codificados

$$[\ ]_{1\mathrm{x}k}[\quad]_{k\mathrm{x}n} = [\ ]_{1\mathrm{x}n}$$

Ejemplo

Bits codificados

$$\vec{u} = \vec{m}G$$

$$\vec{m}_0 = [1 \quad 0 \quad 1]$$

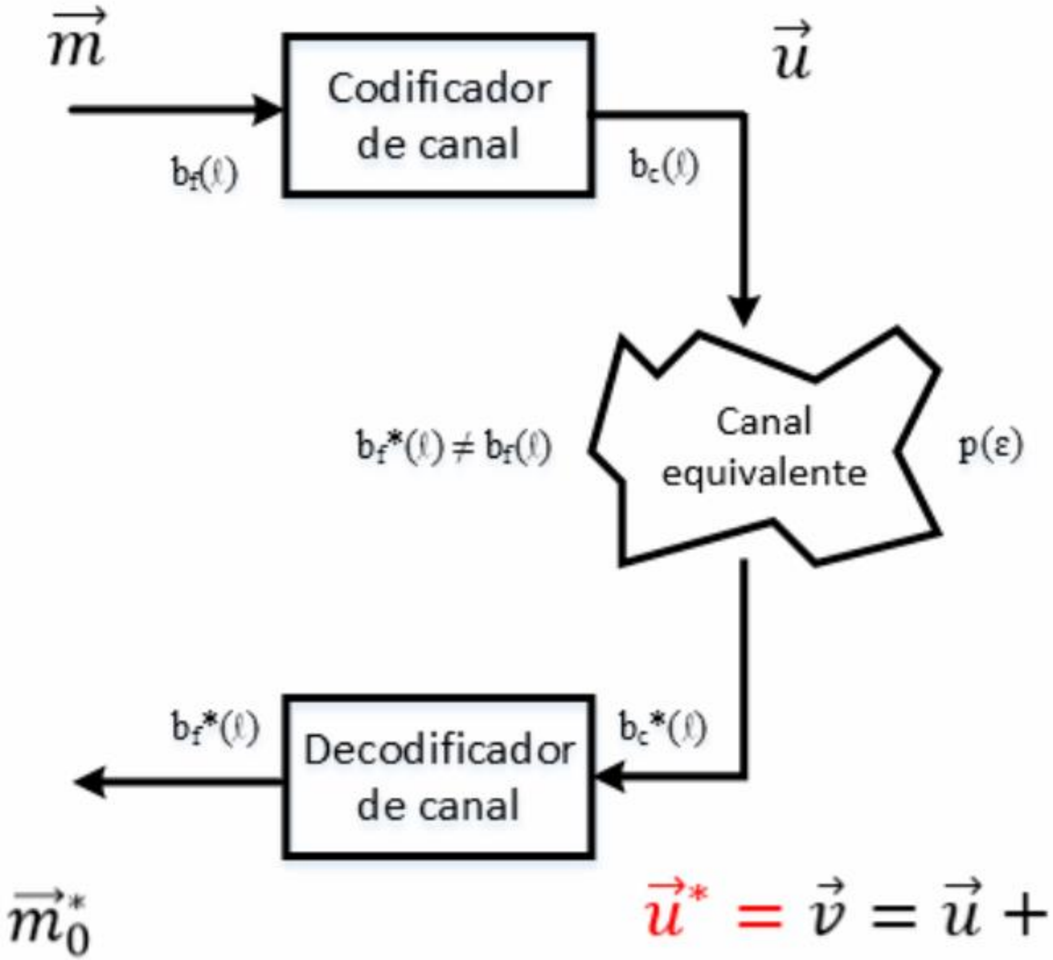
$$\vec{u}_0 = \vec{m}_0 G = [1 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$$

Bits codificados

$\vec{m}$	$\vec{u}$
0 0 0	0 0 0 0 0 0
0 0 1	1 0 1 0 0 1
0 1 0	0 1 1 0 1 0
0 1 1	1 1 0 0 1 1
1 0 0	1 1 0 1 0 0
1 0 1	0 1 1 1 0 1
1 1 0	1 0 1 1 1 0
1 1 1	0 0 0 1 1 1

Datos (k bits)	Redund. (n-k bits)	Datos (k bits)

Vectores



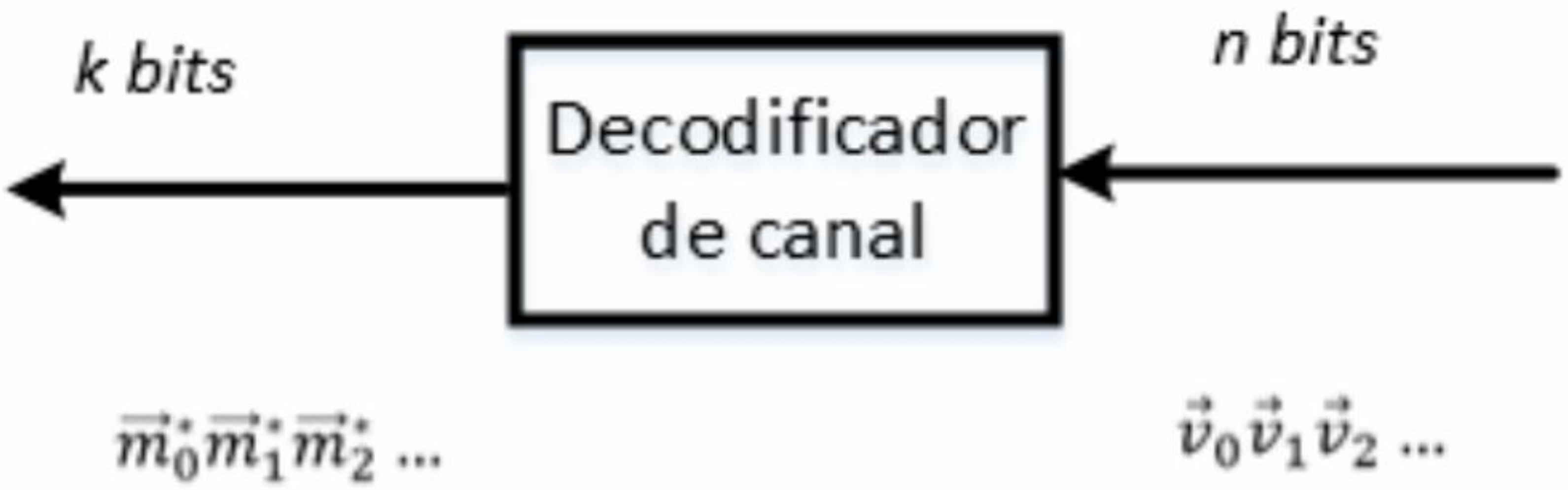
$$\vec{u}^* = \vec{v} = \vec{u} + \vec{e}$$

Suma módulo 2
$1 + 1 = 0$
$1 + 0 = 1$
$0 + 1 = 1$
$0 + 0 = 0$

Decodificador de canal

Decodificador de canal

(Receptor)



Matriz de verificación

$$H = \begin{bmatrix} I_{k \text{ x } k} \\ \cdots \\ P_{n-k \text{ x } k} \end{bmatrix}$$

I: matriz identidad

P: matriz de paridad

$$[\ ]_{1\text{x}n}[\qquad]_{n\text{x}k} = [\ ]_{1\text{x}k}$$

Ejemplo

Matriz de verificación

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} I_{k \text{ x } k} \\ \cdots \\ P_{n-k \text{ x } k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3 \text{ x } 3} \\ \cdots \\ P_{3 \text{ x } 3} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & \cdots & \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de verificación

$$\vec{v}H = (\vec{u} + \vec{e})H = \vec{u}H + \vec{e}H = \vec{m}GH + \vec{e}H = \vec{e}H = S$$

$\vec{v}$: vector de n bits codificados en el receptor

H: matriz de verificación de n x k

$\vec{v} = \vec{u} + \vec{e}$

$\vec{u} = \vec{m}G$

$G \cdot H = 0$

$$[\ ]_{1\text{x}n}[\quad]_{n\text{x}k} = [\ ]_{1\text{x}k}$$

Matriz de verificación

$$\vec{v}H = \vec{e}H = S$$

$$\vec{v}H = S \qquad \vec{e}H = S \qquad \vec{v} = \vec{u} + \vec{e}$$

Ejemplo

Bits decodificados

$$\vec{v}H = S$$

$$\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \vec{v}_0 H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & \cdots & \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Bits decodificados

$$\vec{e}H = S$$

$$S = \vec{e}_0 H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & \cdots & \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Síndromes

Hay más ***e*** que ***S***

$\vec{e}$	S
0 0 0 0 0 0	0 0 0
1 0 0 0 0 0	1 0 0
0 1 0 0 0 0	0 1 0
0 0 1 0 0 0	0 0 1
0 0 0 1 0 0	1 1 0
0 0 0 0 1 0	0 1 1
0 0 0 0 0 1	1 0 1
0 0 0 0 1 1	1 1 0
1 1 1 1 1 1	1 1 1

Ejemplo

Bits decodificados

$$\vec{v}_0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

$$\vec{e}_0 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\vec{v}_0 = \vec{u}_0 + \vec{e}_0$$

$$\vec{u}_0 = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

Ejemplo

Bits decodificados

$$\vec{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{m}_0^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Codificación de canal

Códigos lineales de bloques