Valor esperado y momentos de una variable aleatoria

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

6

Tema I

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

Contenido

El valor esperado y los “momentos” (su generalización) permiten caracterizar numéricamente el comportamiento o las tendencias de una variable aleatoria.

Valor esperado de una variable aleatoria, $E[X]$

El valor esperado de una variable aleatoria es uno de los resultados más importantes y más frecuentemente utilizados. Ya lo conocíamos en su forma discreta como "promedio".

Los bebés son evaluados en la *escala de Apgar*, creado por Virginia Apgar, quien le puso el retrónimo ingenioso ***A**ppearance, **P**ulse, **G**rimace, **A**ctivity, **R**espiration*. Sea X el puntaje de Apgar de un niño seleccionado aleatoriamente en cierto hospital durante el año siguiente, y suponga que la función de densidad discreta (PMF) $P(X)$ es

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x)$	0,002	0,001	0,002	0,005	0,02	0,04	0,18	0,37	0,25	0,12	0,01

Si elegimos un niño(a) al azar, ¿cuál valor de X esperaríamos?

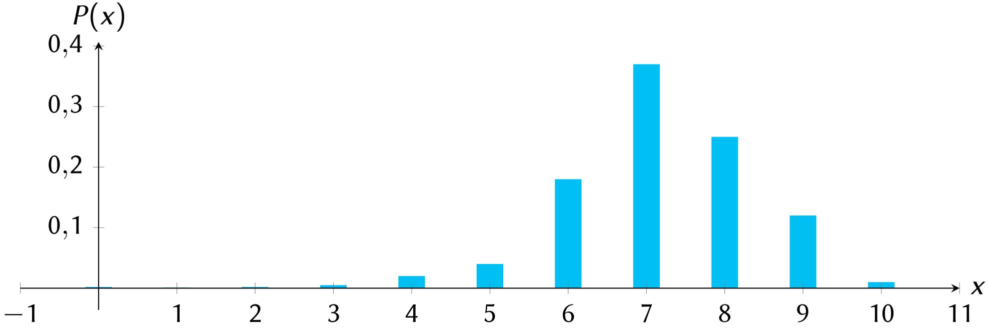
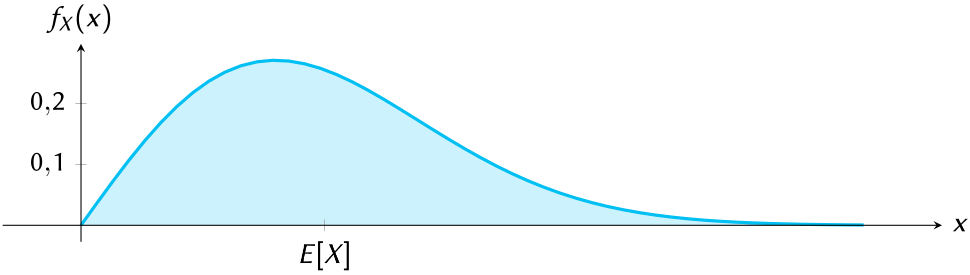


Figura: Ejemplo de evaluación del estado de salud de recién nacidos en un hospital dado, en una escala del 0 al 10 (Apgar).

El *valor esperado* es un operador denotado $E[\ \cdot\ ]$ y se le conoce también como la esperanza matemática, el valor medio, la media o el promedio estadístico de X.

> Un promedio es "el número que es simultáneamente el más cercano a todos los números del conjunto, en el sentido de que la suma de las distancias desde él a todos los puntos en el conjunto es la más pequeña". Similar a un *centro de gravedad*.



Valor esperado de una variable aleatoria **continua**

El valor esperado se obtiene utilizando la función de densidad (PDF), $f_X(x)$, de forma que le da un "peso" a cada valor de x.

Valor esperado de una VA continua

El valor esperado de cualquier VA X es

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, \mathrm{d}x \triangleq \overline{X} \tag{1}$$

Valor esperado de una variable aleatoria **discreta**

En el caso específico de que X es una VA discreta con N posibles valores x_i con probabilidades $P(x_i)$ de ocurrencia, entonces

$$\begin{aligned} E\left[X\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{i=1}^{N} P(x_i)\delta(x - x_i)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{N} P(x_i) \int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x - x_i)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i) \end{aligned} \tag{2}$$

Valor esperado de una VA discreta

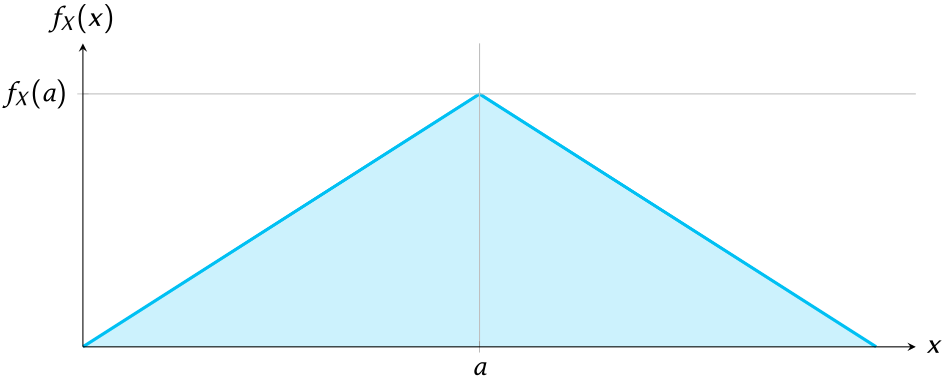
El promedio o "suma ponderada" (*weighted sum*) es

$$E\left[X\right] = \sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i) \triangleq \overline{X} \tag{3}$$

Valor esperado de una variable aleatoria simétrica

Si la función de densidad de una variable aleatoria tiene **simetría par** alrededor de una recta $x = a$, entonces $E[X] = a$, es decir

$$E\left[X\right] = a \quad \text{si} \quad f_X(x + a) = f_X(-x + a)$$



Valor esperado de una función, $E[g(X)]$

Valor esperado de una función de una VA $g(X)$

Para una función real $g(x)$ de una variable aleatoria X, que se denota por $g(X)$, su valor esperado está dado por

$$E\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

Si X es una variable aleatoria discreta,

$$E\left[g(X)\right] = \sum_{i=1}^{N} g(x_i) P(x_i) \tag{5}$$

donde N puede ser infinito para algunas variables aleatorias.
En general, $E[g(X)] \neq g(E[X])$.

Ejemplo de la potencia disipada en un resistor I

Sea I una VA que denota la corriente en un resistor R de valor 1 Ω. I tiene una distribución uniforme en el intervalo de 1 a 3 A, es decir:

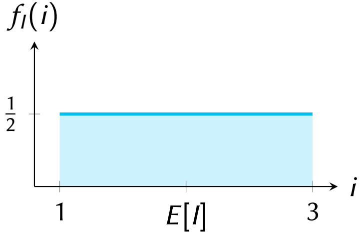
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases} \qquad f_I(i) = \begin{cases} 1/2 & 1 < i < 3 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

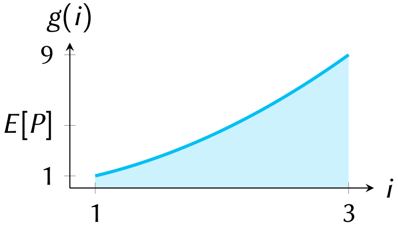
¿Cuál es el promedio de la corriente I? ¿Cuál es el promedio de la potencia disipada en R, $P = g(I) = I^2 R$?

Ejemplo de la potencia disipada en un resistor II

$$\begin{aligned} E[I] &= \int_{-\infty}^{\infty} i\, f_I(i)\ \mathrm{d}i \\ &= \int_1^3 i\ \frac{1}{2}\ \mathrm{d}i \\ &= 2\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[P] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(i)\, f_I(i)\ \mathrm{d}i \\ &= \int_1^3 i^2(1)\ \frac{1}{2}\ \mathrm{d}i \\ &= 13/3 \approx 4.33\,\mathrm{W} \end{aligned}$$



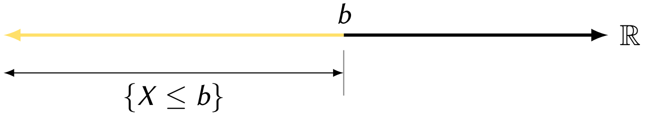


Valor esperado condicional, $E\left[X \mid B\right]$

El valor esperado condicional de X, denotado por $E[X \mid B]$, es un nuevo promedio que ahora depende de la *función de densidad condicional*

$$E[X \mid B] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x \mid B)\, \mathrm{d}x \tag{6}$$

Caso especial $B = \{X \leq b\}$



Si $B = \{X \leq b\}$ con $-\infty < b < \infty$, se sabe que

$$f_X(x \mid \{X \leq b\}) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, \mathrm{d}x} \left(= \dfrac{P(X \cap B)}{P(B)}\right) & x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases} \tag{7}$$

Sustituyendo se tiene entonces,

$$
\begin{aligned}
E\left[X \mid \{X \leq b\}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x \mid B)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\frac{f_X(x)}{\int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, \mathrm{d}x}\right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, \mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, \mathrm{d}x} \\
E\left[X \mid B\right] &= \frac{E\left[X\right]}{P(B)}
\end{aligned}
$$

que es el valor medio de X cuando X está restringido al conjunto $\{X \leq b\}$.

Momentos de una variable aleatoria

El valor esperado es un caso especial de una categoría más general, denominada “momentos de una variable aleatoria”. Son valores que resumen o sintetizan propiedades de la variable aleatoria.

Mientras que la función de densidad probabilística (PDF) es una **descripción completa** de la VA, los momentos cuantifican ciertas propiedades tales como el “valor esperado”, la “inclinación” o “lo llano” de una VA y son una herramienta estadística valiosa para el análisis de su comportamiento.

Momentos alrededor del origen de una variable aleatoria

Momentos alrededor del origen

La función $g(X) = X^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, da *los momentos alrededor del origen de la variable aleatoria* X, haciendo

$$
\begin{aligned}
m_n &= E\left[X^n\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Casos especiales

El valor $m_0 = 1$ es el área de la función $f_X(x)$, en tanto que $m_1 = \overline{X} = E[X]$ es el valor esperado de X.

Momentos centrales

Los momentos alrededor del valor medio de X se llaman momentos centrales y se denotan por μ_n. Son el valor esperado de la función $g(X) = (X - \overline{X})^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, es decir,

$$\begin{aligned} \mu_n &= E\left[\left(X - \overline{X}\right)^n\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \overline{X}\right)^n f_X(x)\, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{8}$$

Casos especiales

El valor $\mu_0 = 1$ es el área de $f_X(x)$, mientras que $\mu_1 = 0$, ¿por qué?

Momentos ordinarios (alrededor del origen)

$$E[X^n]$$

Momentos centrales (alrededor de la media)

$$E[(X - \overline{X})^n]$$

Momentos generalizados (alrededor de un número cualquiera)

$$E[(X - a)^n]$$

Momentos absolutos (momentos alrededor del origen con los valores absolutos de la variable aleatoria)

$$E[|X|^n]$$

Aparte de la media, algunos momentos particulares tienen nombres especiales y son los más comúnmente utilizados para describir las variables aleatorias. Ellos son:

Varianza y desviación estándar medida de la “dispersión”

Sesgo medida de la “inclinación”

Curtosis medida del “abultamiento”

A μ_2 se le da el nombre *varianza* y tiene la notación σ_X^2.

$$
\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= E\left[\left(X - \overline{X}\right)^2\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{X})^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= E\left[X^2 - 2X\overline{X} + \overline{X}^2\right] \\
&= E[X^2] - 2\left(E[X]\right)^2 + \overline{X}^2 \\
&= E[X^2] - \overline{X}^2 \\
&= m_2 - m_1^2
\end{aligned}
$$

La raíz cuadrada positiva de la varianza, σ_X, se denomina la **desviación estándar** de X. Es una medida de la dispersión de la función $f_X(x)$ alrededor de la media.

$\mu_3 = E\left[(X - \overline{X})^3\right]$ es una medida de la **asimetría** de $f_X(x)$ alrededor de su valor medio. Se le llama la inclinación (*skewness*) de la función de densidad.

- Si una densidad es simétrica alrededor de $x = \overline{X}$, tiene cero inclinación, de hecho, $\mu_n = 0$ para valores impares de n.
- El tercer momento central normalizado μ_3/σ_X^3 es conocido como el *coeficiente de inclinación* de la función de densidad,

$$S_X = E\left[\left(\frac{X - m_1}{\sigma_X}\right)^3\right] \tag{9}$$

que es un número adimensional que describe la inclinación o el sesgo del pdf. Si S_X es 0, la pdf es simétrica, y si es negativo o positivo tiende a la izquierda o la derecha, respectivamente.

κ_X es definido como

$$\kappa_X = E\left[\left(\frac{X - m_1}{\sigma_X}\right)^4\right] - 3 \tag{10}$$

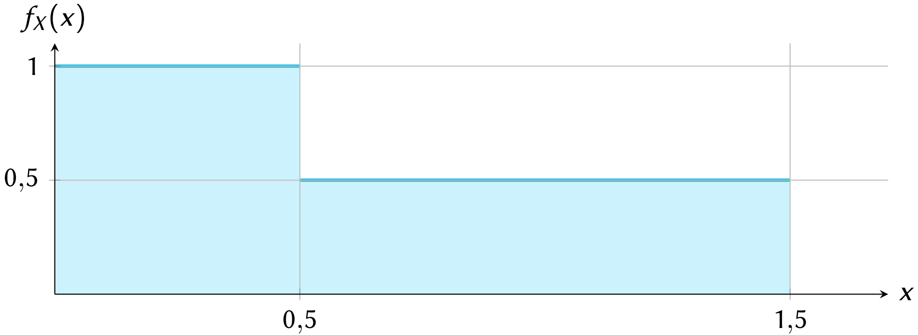
y es un número adimensional descriptor del **abultamiento** de la variable aleatoria…

- …si está "achatada" ($\kappa_X < 0$) (*platicúrtica*)
- …o es prominente ($\kappa_X > 0$) (*leptocúrtica*).

La sustracción del 3 es una comparación con la distribución normal (que siempre es $\kappa_X = 3$) la cual se diría no es ni achatada ni prominente.

Ejemplo para un $f_X(x)$ de los primeros cuatro momentos I

Para el siguiente PDF, $f_X(x)$, determine los primeros cuatro momentos de la VA.



¿Primeras impresiones sobre la media, la dispersión, la inclinación y la kurtosis?

Ejemplo para un $f_X(x)$ de los primeros cuatro momentos II

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \leq x < 1{,}5 \\ 0 & \text{el resto} \end{cases} \tag{11}$$

La media momento ordinario de orden uno,

$$m_1 = E[X] = \int_0^{0{,}5} x \cdot 1 \, \mathrm{d}x + \int_{0{,}5}^{1{,}5} x \cdot 0{,}5 \, \mathrm{d}x = 0{,}625$$

Ejemplo para un $f_X(x)$ de los primeros cuatro momentos III

La varianza momento central de orden dos,

$$
\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= E[(X - m_1)^2] \\
&= E[X^2] - m_1^2 \\
&= \int_0^{0,5} x^2 \cdot 1 \, \mathrm{d}x + \int_{0,5}^{1,5} x^2 \cdot 0{,}5 \, \mathrm{d}x - 0{,}625^2 \\
&= 0,1927
\end{aligned}
$$

El significado de este número usualmente se aprecia en relación con otras densidades probabilísticas (¿qué tan disperso es uno en comparación con el otro?), y puede tener algún significado importante para el experimento (la precisión de fabricación, por ejemplo).

Ejemplo para un $f_X(x)$ de los primeros cuatro momentos IV

La inclinación (*skewness*) momento central de orden tres,

$$
\begin{aligned}
S_X &= \left[\left(\frac{X - m_1}{\sigma_X}\right)^3\right] \\
&= \int_0^{0,5} \left(\frac{x - 0{,}625}{0{,}439}\right)^3 \cdot 1 \, \mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{0,5}^{1,5} \left(\frac{x - 0{,}625}{0{,}439}\right)^3 \cdot 0{,}5 \, \mathrm{d}x \\
&= 0{,}416
\end{aligned}
$$

lo que implica que está sesgado a la derecha.

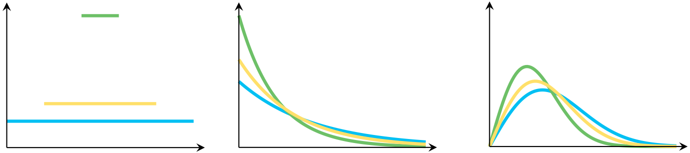
Ejemplo para un $f_X(x)$ de los primeros cuatro momentos V

La *kurtosis* momento central de orden cuatro,

$$\begin{aligned}\kappa_X &= \left[\left(\frac{X - m_1}{\sigma_X}\right)^4\right] \\ &= \int_0^{0,5} \left(\frac{x - 0{,}625}{0{,}439}\right)^4 \cdot 1 \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{0,5}^{1,5} \left(\frac{x - 0{,}625}{0{,}439}\right)^4 \cdot 0{,}5 \, \mathrm{d}x - 3 \\ &= -0,105\end{aligned}$$

lo que implica que tiene una cima achatada.

Ejemplos de momentos para distribuciones usuales I



	Uniforme	Exponencial	Rayleigh
PDF	$\frac{1}{b-a}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/\left(2\sigma^2\right)}$
Media	$\frac{1}{2}(b-a)$	λ^{-1}	$\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
Varianza	$\frac{1}{12}(b-a)^2$	λ^{-2}	$\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$
Inclinación	0	2	$\frac{2\sqrt{\pi}(\pi-3)}{(4-\pi)^{3/2}} \approx 0{,}63$
Kurtosis	$-6/5$	6	$-\frac{6\pi^2-24\pi+16}{(4-\pi)^2} \approx 0{,}24$

- **The Expected Value and Variance of Discrete Random Variables**
  jbstatistics, https://youtu.be/Vyk8HQOckIE