VOD 模型下福利函数的先验非凹性

1 符号体系

状态与行动. 令状态空间为 $\Omega = \Theta = \{1, 2, \dots, U\}$，元素 $\omega = \theta$ 表示潜在志愿者的总数。receiver 在每个时期选择响应概率作为行动：

$$p \in A = [0, 1],$$

用以替代原文的一般动作 $a \in A$。

信念与后验. 共有先验 $\mu_0 \in \operatorname{int} \Delta(\Omega)$；一般信念写作 $\mu \in \Delta(\Omega)$；在信号实现 s 下的后验记作 $\mu_s \in \Delta(\Omega)$。信息结构 $\pi = \{\pi(\cdot \mid \omega)\}_{\omega \in \Omega}$ 诱导后验分布的分布 $\tau \in \Delta(\Delta(\Omega))$ ，满足 Bayes 可实现性：

$$\sum_{s \in S} \tau(s)\, \mu_s = \mu_0.$$

VOD 均衡（给定信念 μ）. 记

$$\phi_\theta(p) := (1-p)^{\theta-1}, \qquad G(p, \mu) := \sum_{\theta=1}^{U} \mu(\theta)\, \phi_\theta(p) - \frac{c}{R}.$$

VOD 均衡的响应概率 $p^*(\mu)$ 由

$$G\big(p^*(\mu), \mu\big) = 0$$

给出（或角点 $p^*(\mu) = 1$，见下）。其端点与唯一性判别为

$$G(0^+, \mu) = 1 - \frac{c}{R} > 0, \quad G(1^-, \mu) = \mu(1) - \frac{c}{R}, \quad G_p(p, \mu) = \sum_\theta \mu(\theta)\, \phi'_\theta(p) < 0,$$

从而：

- 若 $\mu(1) \geq c/R$：无内点根，均衡为角点 $p^*(\mu) = 1$；
- 若 $\mu(1) < c/R$：存在且唯一的内点根 $p^*(\mu) \in (0, 1)$。

福利（发送方的价值函数）. 在单一状态 θ 与行动 p 下的社会福利取为

$$v_\theta(p) = V\Big(1-(1-p)^\theta\Big) + R\,\theta p(1-p)^{\theta-1} - c\,\theta p.$$

给定信念 μ 时的 *sender*）价值函数为

$$v(\mu) = \mathbb{E}_\mu\big[v_\theta(p^*(\mu))\big] = \sum_{\theta=1}^{U} \mu(\theta)\, v_\theta\big(p^*(\mu)\big).$$

信息结构的价值与信息增益. 信息结构 π 的价值为

$$\sum_{s\in S} \tau(s)\, v(\mu_s),$$

其中 $\{\mu_s\}_s$ 满足 $\sum_s \tau(s)\mu_s = \mu_0$。相对“无信息”（在先验 μ_0 下采取 $p^*(\mu_0)$ 并获得 $v(\mu_0)$）的信息增益定义为

$$\sum_{s\in S} \tau(s)\, v(\mu_s) \;-\; v(\mu_0).$$

与原文符号的一一对应（最小改动）.

Bayesian Persuasion 原文	本文 VOD 模型
$a \in A$	$p \in [0,1]$（响应概率）
$a^*(\mu)$	$p^*(\mu)$（由$G(p,\mu)=0$ 或角点$p=1$ 给出）
$v(\mu) = \mathbb{E}_\mu[v(a(\mu),\omega)]$	$v(\mu) = \sum_\theta \mu(\theta)\, v_\theta(p^*(\mu))$
μ_s	μ_s（后验，满足$\sum_s \tau(s)\mu_s = \mu_0$）

导数记号（供后续解析使用）.

$$\begin{aligned}
\phi_\theta'(p) &= -(\theta-1)(1-p)^{\theta-2}, \qquad \phi_\theta''(p) = (\theta-1)(\theta-2)(1-p)^{\theta-3},\\
v_\theta'(p) &= V\,\theta(1-p)^{\theta-1} + R\Big[\theta(1-p)^{\theta-1} - \theta(\theta-1)p(1-p)^{\theta-2}\Big] - c\,\theta,\\
v_\theta''(p) &= -V\,\theta(\theta-1)(1-p)^{\theta-2}\\
&\qquad + R\Big[-2\theta(\theta-1)(1-p)^{\theta-2} + \theta(\theta-1)(\theta-2)\,p(1-p)^{\theta-3}\Big].
\end{aligned}$$

在均衡点处记

$$B := \sum_\theta \mu(\theta)\, v_\theta'\big(p^*(\mu)\big), \qquad G_p := \sum_\theta \mu(\theta)\, \phi_\theta'\big(p^*(\mu)\big) < 0.$$

2 均衡存在唯一性与角点/内点判别

对任意 μ，定义

$$G(p,\mu) = \sum_\theta \mu(\theta)\phi_\theta(p) - \frac{c}{R}, \qquad G_p(p,\mu) := \sum_\theta \mu(\theta)\phi_\theta'(p).$$

显然 $G_p(p,\mu)<0$（因为每个 $\phi_\theta'<0$，且 μ 为概率向量）。并且

$$G(0^+,\mu)=1-\frac{c}{R}>0,\qquad G(1^-,\mu)=\mu(1)-\frac{c}{R}.$$

Lemma 1 (角点与唯一内点)**.**

- 若 $\mu(1)\ge c/R$，则 $G(1^-,\mu)\ge 0$ 且 $G_p<0$，无内点根；均衡为角点 $p^*(\mu)=1$。
- 若 $\mu(1)<c/R$，则 $G(1^-,\mu)<0<G(0^+,\mu)$，因 $G_p<0$ 单调，存在且仅存在唯一内点根 $p^*(\mu)\in(0,1)$。

3 沿概率方向的隐函数导数（所有步骤）

取零和方向 $d\in\mathbb{R}^U$（$\sum_\theta d(\theta)=0$），考虑 $\mu_t=\mu+td$（t 为标量），令 $p(t)=p^*(\mu_t)$，且 $p(0)=p^*(\mu)$。由定义

$$G\big(p(t),\mu_t\big)=0\quad 对一切小t.$$

第一步：求 $p'(0)$

对上式两边对 t 求导（链式法则）：

$$0=\frac{d}{dt}G\big(p(t),\mu_t\big)=G_p\big(p(t),\mu_t\big)\cdot p'(t)\;+\;\sum_\theta\frac{d\mu_t(\theta)}{dt}\,\phi_\theta\big(p(t)\big),$$

在 $t=0$ 处代入 $p(0)=p^*$, $\mu_0=\mu$, $\frac{d\mu_t}{dt}\Big|_{t=0}=d$：

$$0=G_p\big(p^*,\mu\big)\cdot p'(0)\;+\;\sum_\theta d(\theta)\,\phi_\theta\big(p^*\big).$$

移项解得

$$\boxed{p'(0)=-\frac{\sum_\theta d(\theta)\,\phi_\theta\big(p^*\big)}{G_p\big(p^*,\mu\big)}}.\tag{1}$$

第二步：求 $v'(0)$

由定义：

$$v(\mu_t)=\sum_\theta\mu_t(\theta)\,v_\theta\big(p(t)\big).$$

对 t 求导（积的求导）：

$$\frac{d}{dt}v(\mu_t)=\sum_\theta\frac{d\mu_t(\theta)}{dt}\,v_\theta\big(p(t)\big)+\sum_\theta\mu_t(\theta)\,\frac{d}{dt}v_\theta\big(p(t)\big).$$

又 $\frac{d}{dt}v_\theta(p(t))=v_\theta'(p(t))\cdot p'(t)$。在 $t=0$ 处代入：

$$v'(0)=\sum_\theta d(\theta)\,v_\theta(p^*)\;+\;\Big(\sum_\theta\mu(\theta)\,v_\theta'(p^*)\Big)\,p'(0).$$

记

$$B := \sum_\theta \mu(\theta)\, v_\theta'(p^*), \qquad G_p := G_p(p^*, \mu) = \sum_\theta \mu(\theta) \phi_\theta'(p^*) < 0, \tag{2}$$

并将 (1) 代入上式，得到

$$\boxed{v'(0) = \sum_\theta d(\theta)\, v_\theta(p^*) \;-\; B\, \frac{\sum_\theta d(\theta)\, \phi_\theta(p^*)}{G_p}}. \tag{3}$$

第三步：求 $p''(0)$

对 $G(p(t), \mu_t) = 0$ 再求一次导数。先写出一次导数的通式：

$$0 = G_p(p(t), \mu_t)\, p'(t) + \sum_\theta d(\theta)\, \phi_\theta(p(t)).$$

再次对 t 求导，使用乘积和链式法则：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\Big[G_p(p(t), \mu_t)\, p'(t)\Big] + \frac{d}{dt}\Big[\sum_\theta d(\theta)\, \phi_\theta(p(t))\Big] \\ &= \underbrace{G_{pp}(p(t), \mu_t)\, [p'(t)]^2}_{\text{对}G_p\ \text{链式求导}} + \underbrace{G_p(p(t), \mu_t)\, p''(t)}_{\text{乘积}} + \underbrace{\sum_\theta d(\theta)\, \phi_\theta'\big(p(t)\big)\, p'(t)}_{\text{外项导数}}, \end{aligned}$$

其中

$$G_{pp}(p, \mu) := \sum_\theta \mu(\theta)\, \phi_\theta''(p).$$

在 $t = 0$ 处代入并移项：

$$G_p\, p''(0) + G_{pp}\, [p'(0)]^2 + \sum_\theta d(\theta)\, \phi_\theta'(p^*)\, p'(0) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p''(0) = -\frac{G_{pp}\, [p'(0)]^2 + \sum_\theta d(\theta)\, \phi_\theta'(p^*)\, p'(0)}{G_p}}.$$

第四步：求 $v''(0)$

由 (3) 的一般形式（未代入 $p'(0)$）：

$$v'(t) = \sum_\theta d(\theta)\, v_\theta(p(t)) + \sum_\theta \mu_t(\theta)\, v_\theta'(p(t))\, p'(t).$$

对 t 再求导，在 $t = 0$ 处得到

$$\begin{aligned} v''(0) &= \sum_\theta d(\theta)\, v_\theta'(p^*)\, p'(0) + \sum_\theta \mu(\theta)\, v_\theta''(p^*)\, [p'(0)]^2 + \sum_\theta d(\theta)\, v_\theta'(p^*)\, p'(0) + \sum_\theta \mu(\theta)\, v_\theta'(p^*)\, p''(0) \\ &= \sum_\theta \mu(\theta)\, v_\theta''(p^*)\, [p'(0)]^2 + 2\sum_\theta d(\theta)\, v_\theta'(p^*)\, p'(0) + B\, p''(0), \end{aligned}$$

其中 B 见 (2)。将 $p'(0)$、$p''(0)$ 的表达式代入即可得到关于 ϕ, ϕ', ϕ''、v_θ', v_θ'' 的通式。

4　两点判断凹凸

选择两点对称搬运方向：给定 $\theta_L < \theta_H$，令

$$d = \delta\,(e_{\theta_H} - e_{\theta_L}), \qquad \delta > 0,$$

其中 e_k 为在坐标 k 取 1 的标准基向量。此时

$$\sum_\theta d(\theta)\,(\cdot) = \delta\Big[(\cdot)_{\theta_H} - (\cdot)_{\theta_L}\Big].$$

记差分

$$\Delta\phi := \phi_{\theta_H}(p^*) - \phi_{\theta_L}(p^*), \quad \Delta\phi' := \phi'_{\theta_H}(p^*) - \phi'_{\theta_L}(p^*), \quad \Delta v' := v'_{\theta_H}(p^*) - v'_{\theta_L}(p^*).$$

则由 (1)

$$p'(0) = -\frac{\delta\,\Delta\phi}{G_p}.$$

又由上一节 $v''(0)$ 的一般式，逐项替换：

$$\sum_\theta \mu(\theta)\,v''_\theta(p^*)\,[p'(0)]^2 = \Big(\sum_\theta \mu(\theta)\,v''_\theta(p^*)\Big)\,\frac{\delta^2\,(\Delta\phi)^2}{G_p^2},$$

$$2\sum_\theta d(\theta)\,v'_\theta(p^*)\,p'(0) = 2\,\delta\,\Delta v'\cdot\Big(-\frac{\delta\,\Delta\phi}{G_p}\Big) = -\frac{2\,\delta^2}{G_p}\,\Delta v'\,\Delta\phi,$$

$$B\,p''(0) = B\cdot\left[-\frac{G_{pp}\,[p'(0)]^2 + \sum_\theta d(\theta)\,\phi'_\theta(p^*)\,p'(0)}{G_p}\right] = -\frac{B}{G_p}\cdot\left[\frac{\delta^2\,G_{pp}\,(\Delta\phi)^2}{G_p^2} + \delta\,\Delta\phi'\cdot\Big(-\frac{\delta\,\Delta\phi}{G_p}\Big)\right],$$

$$= -\frac{B}{G_p}\cdot\frac{\delta^2\,G_{pp}\,(\Delta\phi)^2}{G_p^2} \;+\; \frac{B}{G_p}\cdot\frac{\delta^2\,\Delta\phi'\,\Delta\phi}{G_p}.$$

把三部分相加，按 δ 的阶数整理（本方向下 $v''(0)$ 首项就是 δ^2 阶）：

$$v''(0) = \underbrace{\delta^2\left[\Big(\sum_\theta \mu(\theta)\,v''_\theta\Big)\frac{(\Delta\phi)^2}{G_p^2} - \frac{2\,\Delta v'\,\Delta\phi}{G_p} - \frac{B}{G_p}\cdot\frac{G_{pp}\,(\Delta\phi)^2}{G_p^2} + \frac{B}{G_p}\cdot\frac{\Delta\phi'\,\Delta\phi}{G_p}\right]}_{\text{两点方向下的显式二阶式}}$$

$$= \delta^2\Bigg\{\underbrace{\Big(\sum_\theta \mu(\theta)\,v''_\theta\Big) - \frac{B}{G_p}\,G_{pp}}_{=:A}\Bigg\}\frac{(\Delta\phi)^2}{G_p^2} \;+\; \delta^2\left[-\frac{2\,\Delta v'\,\Delta\phi}{G_p} + \frac{B}{G_p^2}\,\Delta\phi'\,\Delta\phi\right].$$

将线性与二次（关于 $\Delta\phi$）项配成标准形式，可写成

$$\boxed{v''(0) = \delta^2\,\frac{A}{G_p^2}\,(\Delta\phi)^2 \;+\; \delta^2\,\frac{1}{G_p}\underbrace{\Big(\frac{B}{G_p}\,\Delta\phi' - 2\,\Delta v'\Big)}_{\text{核的符号决定项}}\Delta\phi,} \tag{4}$$

其中

$$A := \sum_\theta \mu(\theta)\,v''_\theta(p^*) - \frac{B}{G_p}\sum_\theta \mu(\theta)\,\phi''_\theta(p^*), \qquad B := \sum_\theta \mu(\theta)\,v'_\theta(p^*), \qquad G_p = \sum_\theta \mu(\theta)\,\phi'_\theta(p^*) < 0. \tag{5}$$

单调性与符号 注意

$$\phi_\theta(p^*) = (1-p^*)^{\theta-1} \text{ 随}\theta \text{ 严格递减} \Rightarrow \ \Delta\phi < 0, \quad \phi'_\theta(p^*) \text{ 随}\theta \text{ 严格递减} \Rightarrow \ \Delta\phi' < 0,$$

且 $G_p < 0$。因此 $\frac{1}{G_p}\Delta\phi > 0$。(4) 中第二项的符号即由

$$\boxed{\mathcal{K}(\theta_L, \theta_H) := \frac{B}{G_p}\,\Delta\phi' - 2\,\Delta v'}$$

决定。若 $\mathcal{K} > 0$ 且 $|\Delta\phi|$ 不太小，则该项为正；再配合第一项（$\propto (\Delta\phi)^2$）的有界性，可给出正的二阶值。

5 方向非凹性的解析判别

Theorem 1 (两点核判别 $\Rightarrow$ 非凹性)**.** *假设* $p^*(\mu) \in (0,1)$（*即* $\mu(1) < c/R$）。*若存在* $\theta_L < \theta_H$ *使*

$$\boxed{\mathcal{K}(\theta_L, \theta_H) := \frac{B}{G_p}\,\Delta\phi' - 2\,\Delta v' \ > \ 0,} \tag{6}$$

则对足够小的 $\delta > 0$，*沿两点对称搬运方向* $d = \delta(e_{\theta_H} - e_{\theta_L})$ *有*

$$v''(0) > 0,$$

于是 v *在* μ *处非凹。由 concavification*（*Kamenica–Gentzkow, 2011*）*定理，存在*（*例如二元*）*信息分割* $\{\mu_s\}_s$ *使*

$$\sum_s \tau_s\, v(\mu_s) \ > \ v(\mu).$$

证明. 由 (4)，在固定 (p^*, μ) 下，A, B, G_p 有界，且 $\frac{1}{G_p}\Delta\phi > 0$。若 $\mathcal{K}(\theta_L, \theta_H) > 0$，则第二项 $\delta^2 \frac{1}{G_p}\mathcal{K}\,\Delta\phi > 0$。取足够小的 δ，该正项主导或与第一项共同给出 $v''(0) > 0$。由 concavification 定理，非凹 $\Rightarrow$ 存在改进的信息结构，结论成立。 □